



西安交通大学

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

# 自动控制理论

## Automatic Control Theory

工业自动化系



□ 根轨迹的概念（开环根轨迹增益K）

□ 根轨迹的基本方程

$$\frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = -1$$

幅值条件：

$$\frac{K \prod_{j=1}^m |s + z_j|}{\prod_{i=1}^n |s + p_i|} = 1 \quad \longleftarrow \text{与 } K \text{ 有关}$$

相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} = \pm(2k + 1)180^\circ \quad \longleftarrow \text{与 } K \text{ 无关}$$

$$\theta_{z_j} = \angle(s + z_j) \quad \theta_{p_i} = \angle(s + p_i)$$

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则1 绘制根轨迹的方程形式

$$1 + \frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0$$

### □ 规则2 根轨迹的分支数及起点和终点

对于一个 $n$ 阶系统，当参变量 $K$ 从零到无穷大变化时，根轨迹有 $n$ 条分支，它们分别从 $n$ 个开环极点出发，其中有 $m$ 条根轨迹分支终止在 $m$ 个有限开环零点上，其余 $(n-m)$ 条根轨迹分支终止在 $(n-m)$ 个无限零点上。

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则3 根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上总是分布在两个相邻的开环实零、极点之间，且线段右边开环实零、极点的总数为奇数。

### ■ 规则4 根轨迹的对称性

根轨迹必然关于实轴对称。绘制根轨迹图时，只需画出上半平面根轨迹，下半平面的根轨迹可根据对称性原理得出。

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则5 根轨迹的渐近线

当系统 $n \geq m$ 时，根轨迹的渐近线共有 $(n-m)$ 条，各条根轨迹的渐近线与实轴的倾角为：

$$\theta_k = \frac{\pm (2k+1)\pi}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad 2\pi \text{ 等分射线}$$

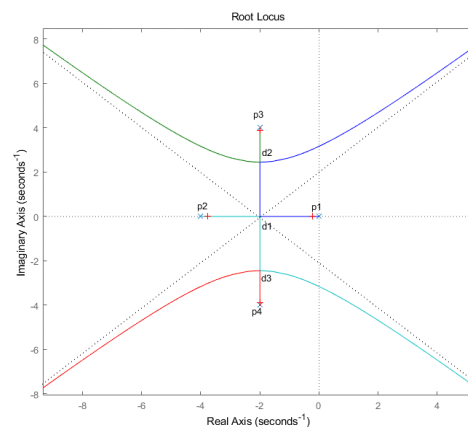
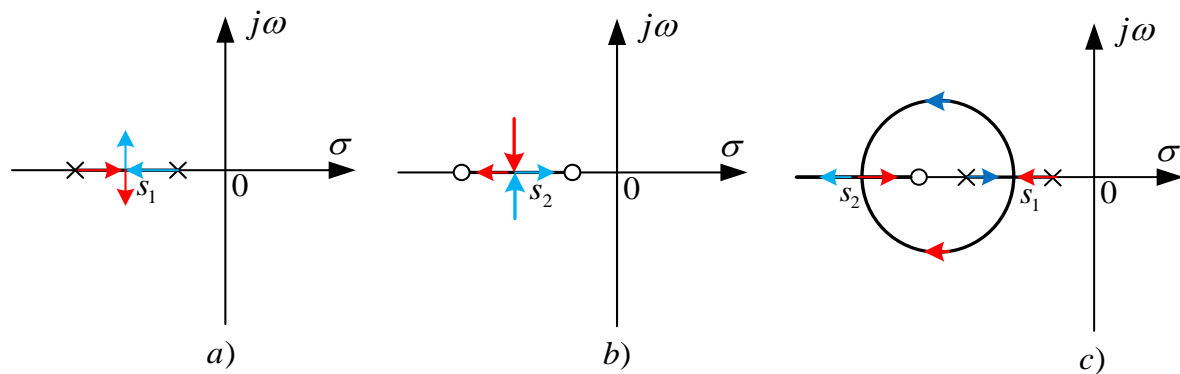
根轨迹的渐近线交于实轴上一点，交点坐标为：

$$-\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n -p_i - \sum_{j=1}^m -z_j}{n-m}$$

## 规则6 根轨迹的分离点和会合点

两条以上根轨迹分支的交点称为根轨迹的分离点或会合点。(两支相向运动的根轨迹会合后必然会再次分叉运行)

- 图a: 当根轨迹分支在实轴上相交后走向复平面时, 该相交点称为分离点;
- 图b: 当根轨迹分支由复平面走向实轴时, 它们在实轴上的交点称为会合点;
- 图c: 典型分离点和会合点的根轨迹。
- 图d: 分离点和会合点一般位于实轴上, 但也可能出现在共轭复数对中。



d)

## 规则6 根轨迹的分离点和会合点

- ◆ 根轨迹的分离点和会合点实质上都是特征方程式的重根，因而可用求解闭环特征方程式重根方法确定它们在平面上的位置。

方法1:

把开环传递函数改写为：
$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)}$$

闭环特征方程 ( $1+GH=0$ ) 出现重根的条件是  $s$  必须满足下列方程:

$$\begin{cases} F(s) = A(s) + KB(s) = 0 \\ F'(s) = A'(s) + KB'(s) = 0 \end{cases}$$

消去  $K$

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0$$

确定根轨迹的分离点或会合点的坐标及相应的  $K$  值

## 规则6 根轨迹的分离点和会合点


- ◆ 根轨迹的分离点和会合点实质上都是特征方程式的重根，因而可用求解闭环特征方程式重根方法确定它们在平面上的位置。

方法2: 用方程  $\frac{dK}{ds} = 0$  求取

$$F(s) = A(s) + KB(s) = 0$$

$$\Rightarrow K = -\frac{A(s)}{B(s)}$$

求导



$$\frac{dK}{ds} = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{[B(s)]^2}$$

由于在根轨迹的分离点或会合点处，上式右方的分子应等于零，则有：

$$\frac{dK}{ds} = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{[B(s)]^2} = 0$$

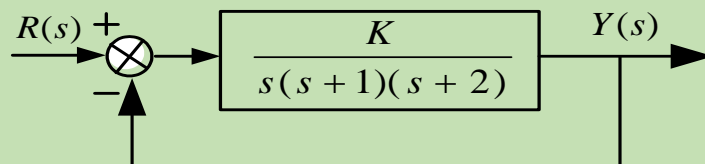


## 规则6 根轨迹的分离点和会合点

- 应当指出，闭环特征方程出现重根只是形成根轨迹分离点或会合点的**必要条件**，但不是充分条件。只有位于根轨迹上的那些重根才是实际的分离点或会合点（**即必须进行校验**）。
- 另外，求分离点或会合点坐标时，有时需要求解高阶代数方程，在阶次较高时可用**试探法**进行求解。

## 规则6 根轨迹的分离点和会合点

例4.3: 求系统根轨迹的分离点。



解:

闭环特征方程为:  $s(s+1)(s+2) + K = 0$ 

$$\Rightarrow K = -s(s+1)(s+2)$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

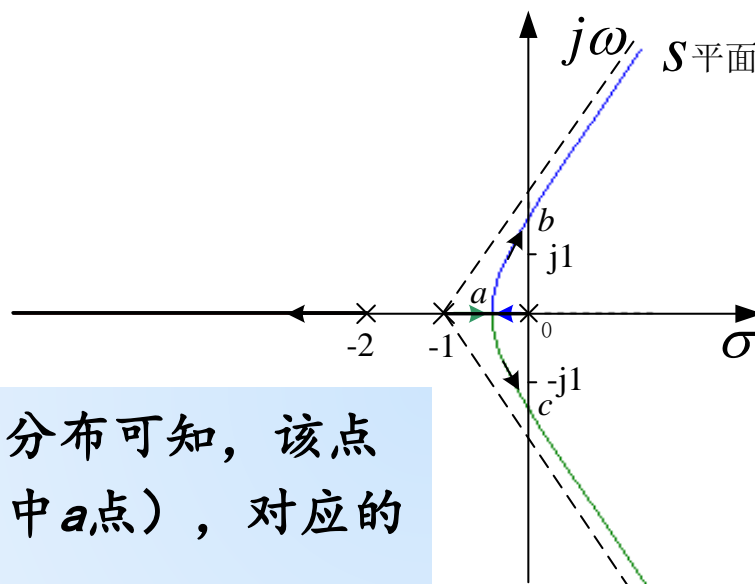
解方程得:

$$s_1 = -0.423 \quad \leftarrow$$

由根轨迹实轴上的分布可知, 该点是实际分离点 (图中a点), 对应的  $K=0.385$ 。

$$s_2 = -1.577 \quad \leftarrow$$

该点不是根轨迹上的点, 应当舍去。



**例** 开环传递函数如右所示，试绘制  $K^*$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化时的根轨迹。

$$\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

解：1)  $m=0$ ,  $n=4$ ;  $p_1=0$ ,  $p_2=-4$ ,  $p_3=-2+j4$ ,  $p_4=-2-j4$

2) 绘制实轴上的根轨迹；

3)  $n-m=4$ ;  $\phi_a = \pm 45^\circ$ ,  $\pm 135^\circ$

$$\sigma_a = \frac{0-4-2+j4-2-j4}{4} = -2$$

4) 求重根:  $K^* = -s(s+4)(s^2+4s+20)$

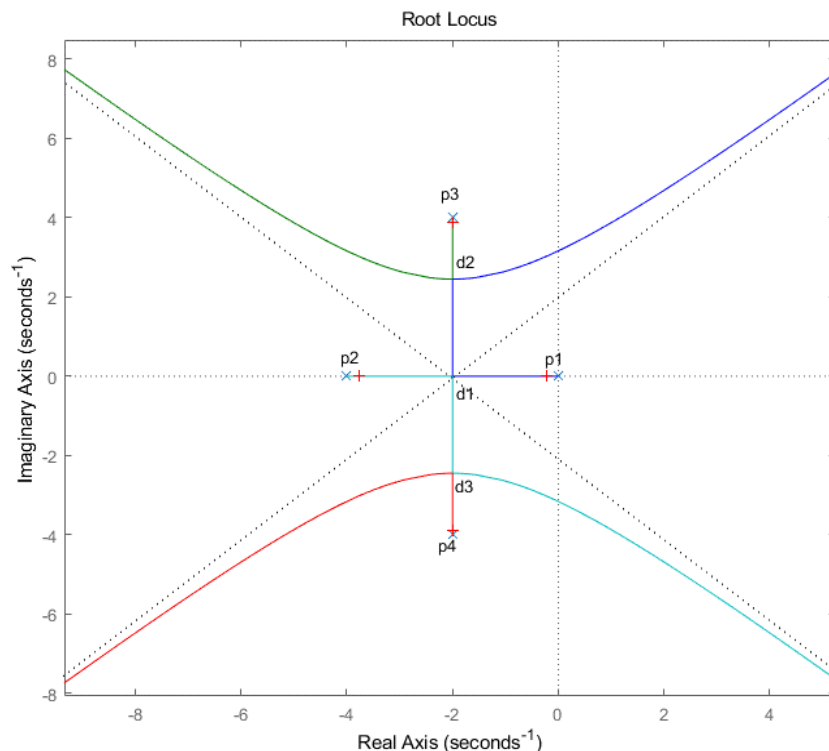
$$\Rightarrow \frac{dK^*}{ds} = 4(s+2)(s^2+4s+10)$$

$$\Rightarrow d_1 = -2, \quad d_{2,3} = -2 \pm j\sqrt{6}$$

考虑到:  $\sum_{j=1}^m \angle(s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s-p_i)$

$$= -[\underbrace{\angle(d_2 - p_3)}_{-90^\circ} + \underbrace{\angle(d_2 - p_4)}_{90^\circ} + \underbrace{\angle(d_2 - p_1) + \angle(d_2 - p_2)}_{180^\circ}]$$

因此,  $d_2$  是位于根轨迹上的重根点; 对称性决定  $d_3$  也是根轨迹上的重根点。



$p_3$  至  $p_4$  直线上任意点  
都是根轨迹上的点。

### 规则7 根轨迹的出射角和入射角

- 根轨迹离开开环复数极点处的切线与实轴正方向的夹角，称为根轨迹的出射角。
- 根轨迹进入开环复数零点处的切线与实轴正方向的夹角，称为根轨迹的入射角。
- 计算根轨迹的出射角和入射角的目的在于了解开环复数极点或零点附近根轨迹的变化趋势和走向，便于绘制根轨迹。
- 计算根轨迹出射角和入射角可由根轨迹的相角条件来确定。

## 规则7 根轨迹的出射角和入射角

相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} = \pm(2k+1)180^\circ \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\theta_{z_j} = \angle(s + z_j)$$

$$\theta_{p_i} = \angle(s + p_i)$$

根轨迹在第 $a$ 个开环复数极点 $-p_a$ 处的出射角为：

$$\theta_{p_a} = \mp(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^n \theta_{p_i}$$

$$\theta_{p_i} = \angle(-p_a + p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (i \neq a)$$

$$\theta_{z_j} = \angle(-p_a + z_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

根轨迹在第 $b$ 个开环复数零点 $-z_b$ 处的入射角为：

$$\theta_{z_b} = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^m \theta_{z_j}$$

$$\theta_{p_i} = \angle(-z_b + p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\theta_{z_j} = \angle(-z_b + z_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (j \neq b)$$

**例4.4:** 根轨迹方程如右所示, 求系统根轨迹在实轴上的会合点以及复数极点处的出射角。

$$1 + \frac{Ks(s+4)}{s^2 + 2s + 2} = 0$$

解:

1) 起止点:  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -4$ ,  $p_1 = -1 + j$ ,  $p_2 = -1 - j$

2) 实轴上的根轨迹:  $z_1 z_2$  之间;

3) 分支数: 2条, 止于  $z_1$ 、 $z_2$ ;

4) 会合点:  $K = -\frac{s^2 + 2s + 2}{s(s+4)}$

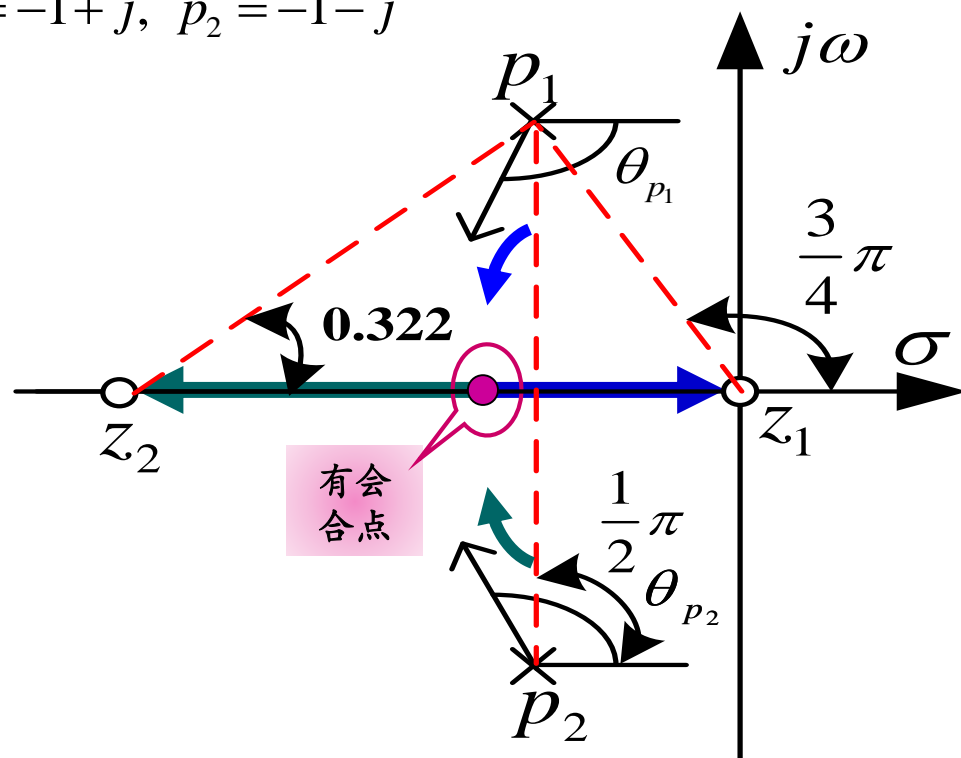
$$\frac{dK}{ds} = -\frac{-2s^2 + 4s + 8}{s^2(s+4)^2} = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = 1 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} -1.236 \\ 3.236 \end{cases} \text{ (舍)}$$

5) 出射角:

$$\theta_{p_1} = -\pi + \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - \theta_{p_2} = -\pi + \frac{3}{4}\pi + 0.322 - \frac{1}{2}\pi = -2.034 \text{ (rad)}$$

$\theta_{p_1}$  与  $\theta_{p_2}$  关于实轴对称, 因此  $\theta_{p_2} = 2.034 \text{ (rad)}$ , 即可画出根轨迹。



**例：** 求系统根轨迹在实轴上的会合点以及复数极点的出射角。

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

**解：** 1) 起止点：  $z_1 = -1$ ,  $p_{1,2} = 0$ ,  $p_3 = -9$

2) 实轴上的根轨迹：  $[-9, -1]$   $[0, 0]$

3) 分支数： 3条，两支终止于  $\rightarrow \infty$  ；

4) 渐近线：  $\sigma_A = \frac{-9+1}{2} = -4$   $\theta_k = \pm 90^\circ$

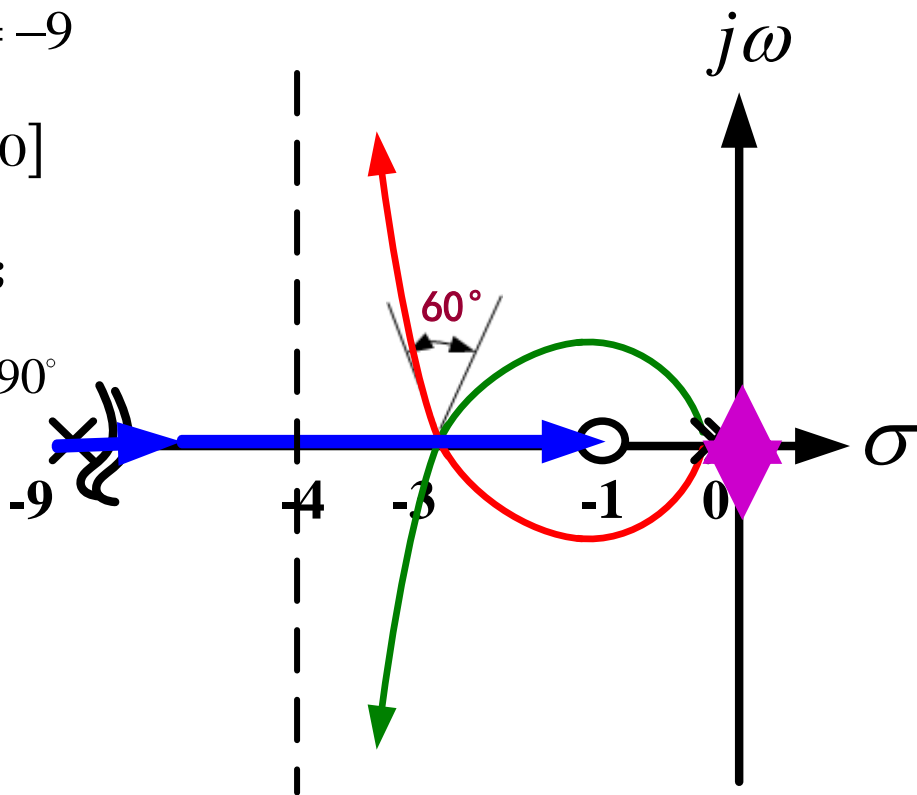
5) 分离点和会合点：

$$K = -\frac{s^2(s+9)}{(s+1)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow s = 0, \quad s = -3, \quad K = 27$$

6) 出射角：

不仅复数极点存在出入射角，实轴上的分离点、会合点处也存在出入射角。(0, 0)处出射角为  $\pm 90^\circ$  ； -3处共有6条分支出入，互相夹角为  $60^\circ$  。



**结论：** 在分离点或会合点处根轨迹的出、入射角（切线）平分  $360^\circ$  角。

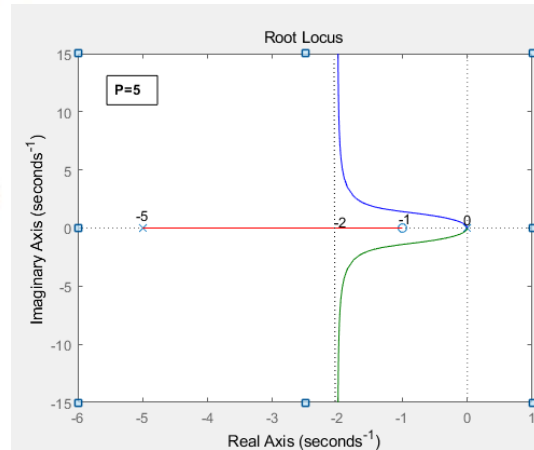
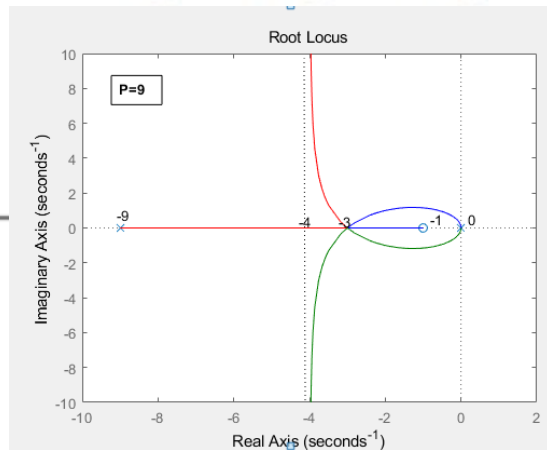
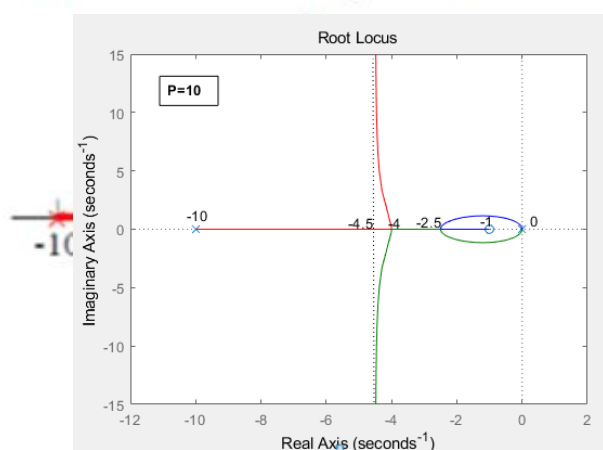
## 4.3 绘制根轨迹的基本规则

已知某负反馈系统的开环传递函数为：
$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+p)}$$

分别绘制当  $p = 10$  ;  $p = 9$  ;  $p = 5$  时,  $K^*$  从  $0 \rightarrow \infty$  变化时的根轨迹。

解:  $m = 1: z_1 = -1$

$n = 3: p_1 = 0; p_2 = 0; p_3 = -p$



绘出实轴上的根轨迹:

求渐近线: 
$$\begin{cases} \varphi_a = \pm 90^\circ \\ \sigma_a = \begin{cases} -4.5 & \text{当 } p=10 \text{ 时;} \\ -4 & \text{当 } p=9 \text{ 时;} \\ -2 & \text{当 } p=5 \text{ 时;} \end{cases} \end{cases}$$

求重根点:  $2d^2 + (p+3)d + 2p = 0$

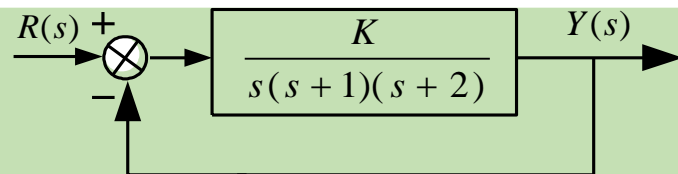
解得: 
$$d = \begin{cases} -2.5, -4 & \text{当 } p=10 \text{ 时;} \\ -3, -3 & \text{当 } p=9 \text{ 时;} \\ -2 \pm j1 & \text{当 } p=5 \text{ 时; (舍去)} \end{cases}$$



## 规则8 根轨迹与虚轴的交点

- 根轨迹若穿过虚轴进入右半平面,系统将不稳定。而且靠近虚轴的闭环极点对系统动态性能影响较大,所以在靠近原点和虚轴附近的根轨迹是比较关心的,应画得比较精确。
- 同时为了判断系统稳定范围,需确定根轨迹与虚轴的交点。
- 由以下两种方法确定:
  - 1) 用劳斯判据,求临界稳定的 $K$ 值和根轨迹与虚轴的交点;
  - 2) 令特征方程的 $s=j\omega$ ,并令方程左边实部和虚部分别等于零,就可求出 $\omega$ 和 $K$ 值。
- 这两种方法均需求解代数方程,其中用劳斯判据时往往可以得到阶次较低的辅助方程,因而计算较简单方便一些。
- **辅助方程:** 因为一对纯虚根是数值相等符号相反的根,因此可用劳斯表中 $s^2$ 行的系数构成辅助方程;若有一对以上交点,则应采用劳斯表中幂大于2的 $s$ 偶次方行系数构成辅助方程。(也可按照劳斯稳定判据中的特殊情况处理办法进行)

**例：** 求系统根轨迹与虚轴的交点。



**解：** 特征方程：  $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

临界稳定时：  $-\frac{K-6}{3} = 0 \Rightarrow K = 6$

将  $K$  代入辅助方程：  $3s^2 + 6 = 0$

得根轨迹与虚轴的交点：  $s = \pm j1.414$

**列劳斯表：**

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s^1$	$-\frac{K-6}{3}$	
$s^0$	$K$	

再采用解方程的方法

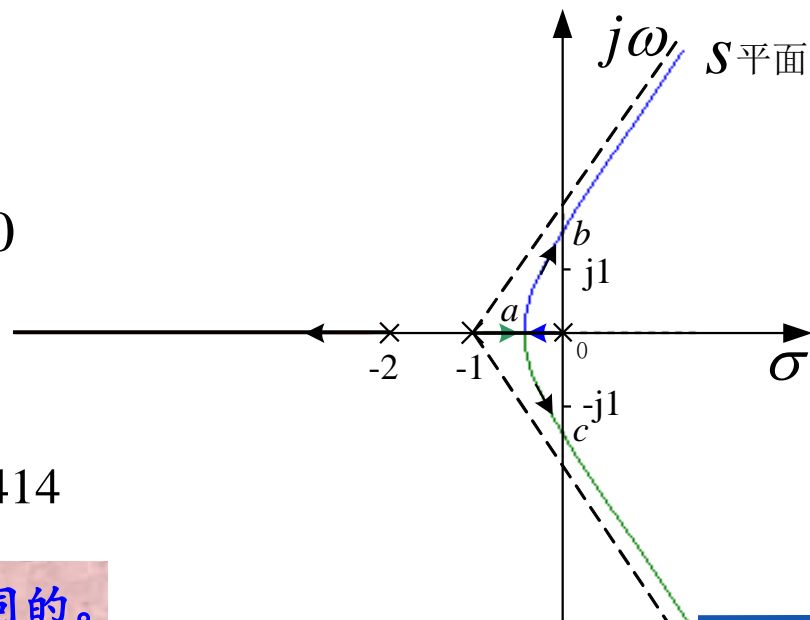
以  $s=j\omega$  代入特征方程，得：

$$-3\omega^2 + K + j\omega(2 - \omega^2) = 0$$

令上式左边实部和虚部分别等于零：

$$\begin{cases} -3\omega^2 + K = 0 \\ \omega(2 - \omega^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 6 \\ \omega = \pm 1.414 \end{cases}$$

在两种方法的结果是相同的。



## 规则9 特征方程的根之和与根之积

开环传递函数展成多项式形式：

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \Rightarrow G(s)H(s) = \frac{K(s^m + \sum_{j=1}^m z_j s^{m-1} + \cdots + \prod_{j=1}^m z_j)}{s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n p_i}$$

当  $n-m > 2$  时，闭环特征方程可变为：

$$G(s)H(s) = -1 \Rightarrow s^n + \sum_{i=1}^n p_i s^{n-1} + \cdots + \left( \prod_{i=1}^n p_i + K \prod_{j=1}^m z_j \right) = 0 \quad (4.38)$$

设式 (4.38) 的特征根为  $-p_{ci}$  ( $i=1,2,\dots,n$ )，则上式可写为：

$$\prod_{i=1}^n (s + p_{ci}) = s^n + \sum_{i=1}^n p_{ci} s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n p_{ci} = 0 \quad (4.39)$$

## 规则9 特征方程的根之和与根之积

对比式 (4.38) 和式 (4.39), 得:

$$\sum_{i=1}^n p_{ci} = \sum_{i=1}^n p_i \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^n (-p_{ci}) = \sum_{i=1}^n (-p_i)$$

以及: 
$$\prod_{i=1}^n (-p_{ci}) = \prod_{i=1}^n (-p_i) + K \prod_{j=1}^m (-z_j)$$

- 当  $K$  由  $0 \rightarrow \infty$  变化时, 虽然  $n$  个闭环特征根会随之变化, 但它们之和却恒等于  $n$  个开环极点之和。
- 如果一部分根轨迹分支随着  $K$  增大而向左移动, 则另一部分根轨迹分支必将随着  $K$  增大而向右移动, 以保持开环极点之和不变。
- 利用这一性质可以估计根轨迹分支的变化趋势。

## 小结

规则1: 形式

规则2: 分支数, 起点, 终点 (有限/无限零点)

规则3: 实轴上的分布

规则4: 对称性

规则5: 渐进线

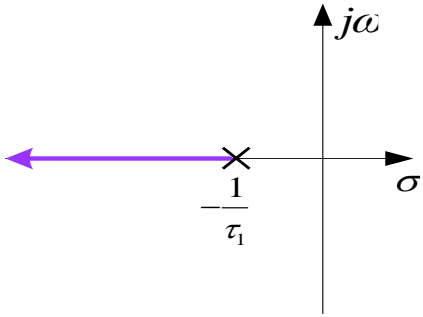
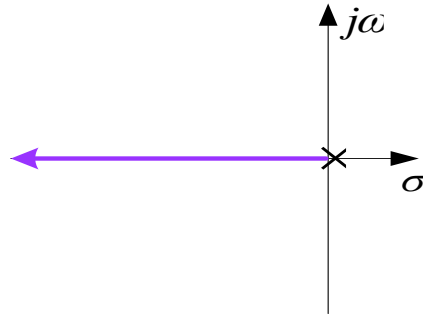
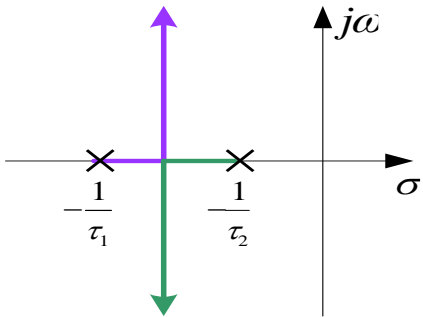
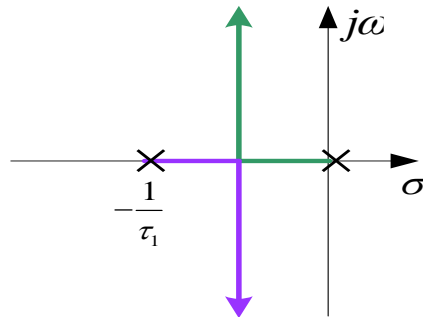
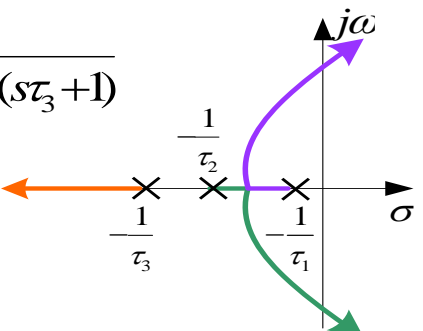
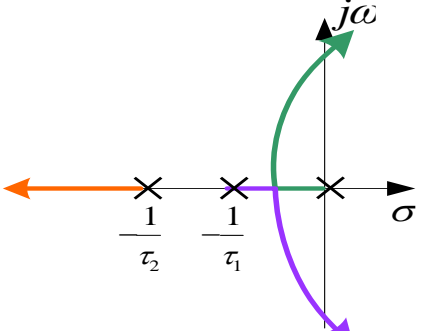
规则6: 分离点/汇合点

规则7: 出/入射角

规则8: 与虚轴的交点

规则9: 根之和与根之积

## 4.3 绘制根轨迹的基本规则

传递函数G(s)	根轨迹	传递函数G(s)	根轨迹
1. $\frac{K}{s\tau_1+1}$		4. $\frac{K}{s}$	
2. $\frac{K}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$		5. $\frac{K}{s(s\tau_1+1)}$	
3. $\frac{K}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)(s\tau_3+1)}$		6. $\frac{K}{s(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$	

传递函数 $G(s)$	根轨迹	传递函数 $G(s)$	根轨迹
7. $\frac{K(s\tau_a+1)}{s(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$		10. $\frac{K(s\tau_a+1)}{s^2(s\tau_1+1)}$ $\tau_a > \tau_1$	
8. $\frac{K}{s^2}$		11. $\frac{K}{s^3}$	
9. $\frac{K}{s^2(s\tau_1+1)}$		12. $\frac{K(s\tau_a+1)}{s^3}$	

- 以上所述的根轨迹都是以开环根轨迹增益作为可变参量，这在实际系统中是最常见的。
- 但是，有时候需要研究除开环根轨迹增益以外的其它可变参量（如时间常数、反馈系数，开环零、极点等）对系统性能的影响，就需要绘制以其它参量为可变参数的根轨迹，这种根轨迹称为参量根轨迹或广义根轨迹。



### 一个可变参量根轨迹的绘制

假定系统可变参量是某一时间常数 $T$ ，由于它位于开环传递函数分子或分母的因式中，因而就不能简单地用开环根轨迹增益为参变量的方法去直接绘制系统的根轨迹，而是需要按照根轨迹基本绘制规则中的**规则1**，对根轨迹方程形式进行必要处理。

## 一个可变参量根轨迹的绘制

根据系统闭环特征方程，把闭环特征方程式中不含有  $T$  参量的各项去除该方程，使原方程变为：

$$1 + TG_1(s)H_1(s) = 0$$

式中， $TG_1(s)H_1(s)$  为系统的等效开环传递函数， $T$  所处的位置与以前所述的开环传递函数中  $K$  所处的位置相当，这样就可按绘制以  $K$  为参变量同样的方法来绘制以  $T$  为参量的根轨迹。此方程进一步转化为零、极点形式，即

$$1 + \frac{T \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0$$

可根据根轨迹绘制的基本规则2~9绘制根轨迹

**例4.6:** 试绘制当 $K=10$ ，参数 $T$ 变化时的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s(s + 2)}$$

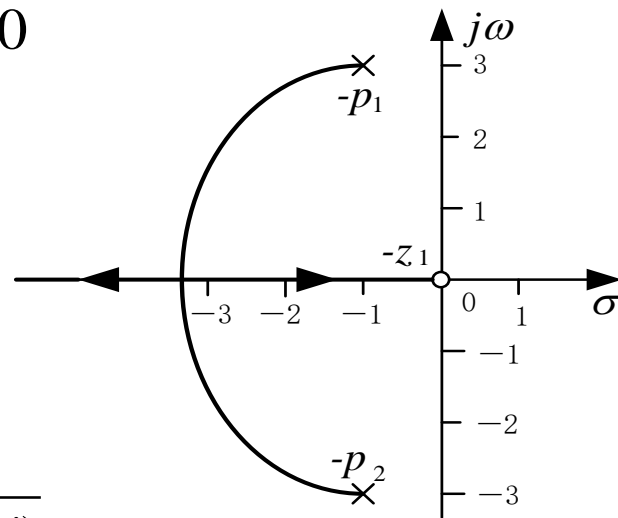
解:

闭环特征方程为:  $s^2 + 2s + 10Ts + 10 = 0$

$$\Rightarrow 1 + \frac{10Ts}{s^2 + 2s + 10} = 0$$

系统等效开环传递函数变为:

$$\begin{aligned} G_1(s)H_1(s) &= \frac{10Ts}{s^2 + 2s + 10} \\ &= \frac{10Ts}{(s + 1 + 3j)(s + 1 - 3j)} \end{aligned}$$



$T$ 在 $G_1(s)H_1(s)$ 中所处的位置与 $K$ 在 $G(s)H(s)$ 中所处的位置相当，这样就可按照绘制以 $K$ 为参变量同样的方法来绘制以 $T$ 为参量的根轨迹。

利用根轨迹，可以定性分析当系统某一参数变化时系统的稳定性及动态性能的变化趋势，也可根据性能要求确定系统的参数。

## 利用根轨迹分析系统的稳定性

用根轨迹图分析控制系统的稳定性，比仅仅知道一组闭环极点要全面得多。

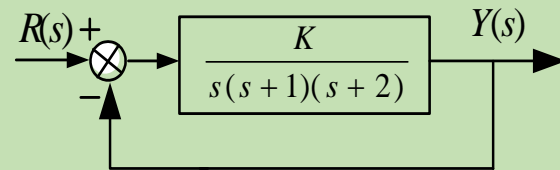
- 如当  $K$  在  $(0, \infty)$  间取值时，如果  $n$  条根轨迹全部位于  $s$  平面的左半平面，就意味着不管取任何值闭环系统均是稳定的。
- 反之，只要有一条根轨迹全部位于  $s$  平面的右半平面，就意味着不管  $K$  取何值闭环系统都是不可能稳定的。

如果系统不稳定且其开环零、极点是系统固有的，要使系统稳定就必须设计调节装置，人为增加开环零、极点来改变系统的结构。

## 利用根轨迹分析系统的稳定性

- ◆ 大多数情况是没有任何一条根轨迹全部位于  $s$  平面的右半平面，但有一条或多条穿越虚轴到达右半平面，这说明闭环系统的稳定是有条件的。
- ◆ 知道了根轨迹与虚轴交点的值，就可以确定稳定条件，进而确定合适的  $K$  值范围。

**例4.9** 试用根轨迹法确定系统在欠阻尼下稳定的开环增益 $K$ 的范围，并计算阻尼系数 $\zeta=0.5$ 时的 $K$ 值以及相应的闭环极点，估算此时系统的动态性能指标。



解：

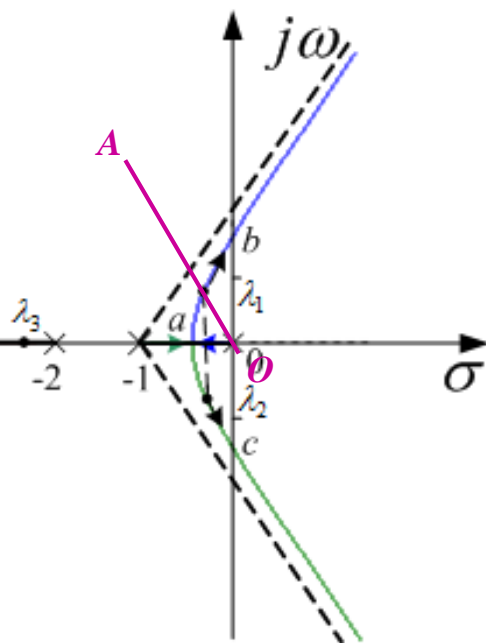
根据例4.2、例4.3和例4.4可知，系统根轨迹如图所示：

分离点 $a$ 的坐标是 $-0.423$ ，对应的 $K = -0.385$ ，根轨迹与虚轴相交时 $K=6$ ，经过 $a$ 后，随着 $K$ 的增加，系统将出现共轭复根，则系统在欠阻尼情况下满足

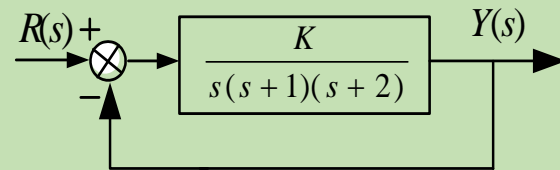
$$0.385 < K < 6。$$

为确定满足 $\zeta=0.5$ 条件时系统的3个闭环极点，首先作出等阻尼线 $OA$ ，它与负实轴夹角为：

$$\beta = \arccos \zeta = 60^\circ$$



**例4.9** 试用根轨迹法确定系统在欠阻尼下稳定的开环增益 $K$ 的范围，并计算阻尼系数 $\zeta=0.5$ 时的 $K$ 值以及相应的闭环极点，估算此时系统的动态性能指标。



等阻尼线 $OA$ 与根轨迹的交点即为相应的闭环极点，设相应两个共轭复数闭环极点为：

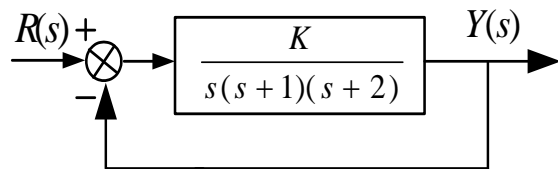
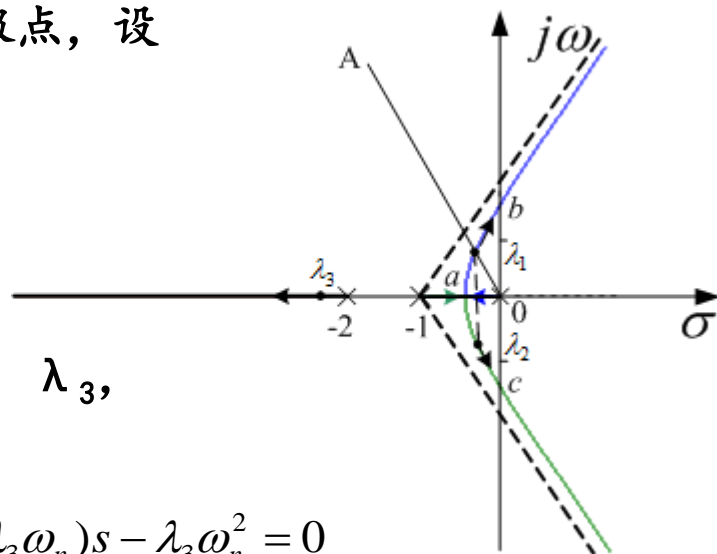
$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.5\omega_n + j0.866\omega_n$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.5\omega_n - j0.866\omega_n$$

式中是 $\omega_n$ 无阻尼自然角频率。设系统第3个实根为 $\lambda_3$ ，

则闭环特征方程可表示为：

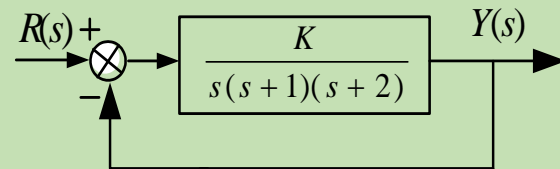
$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) = s^3 + (\omega_n - \lambda_3)s^2 + (\omega_n^2 - \lambda_3\omega_n)s - \lambda_3\omega_n^2 = 0 \quad (4.44)$$



从控制图可得闭环特征方程为：

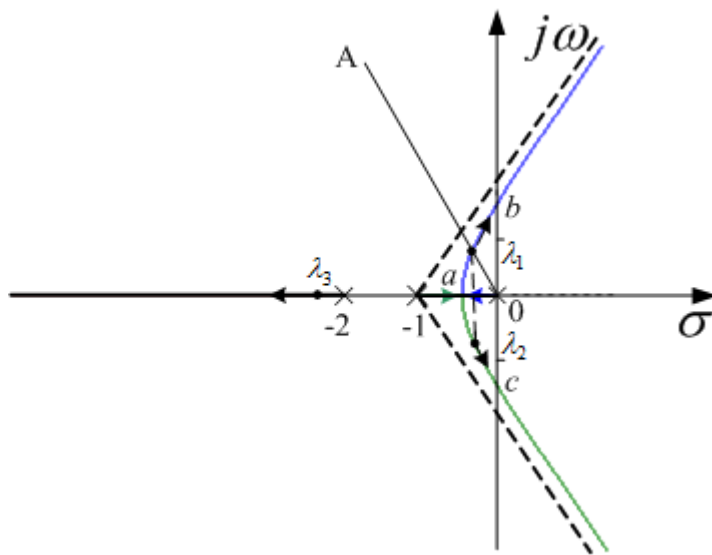
$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad (4.45)$$

**例4.9** 试用根轨迹法确定系统在欠阻尼下稳定的开环增益K的范围，并计算阻尼系数 $\zeta=0.5$ 时的K值以及相应的闭环极点，估算此时系统的动态性能指标。



比较式 (4.44) 和 (4.45)，可得：

$$\begin{cases} \omega_n - \lambda_3 = 3 \\ \omega_n^2 - \lambda_3 \omega_n = 2 \\ -\lambda_3 \omega_n^2 = K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 0.667 \\ \lambda_3 = -2.33 \\ K = 1.04 \end{cases}$$



故  $\zeta=0.5$  相应的3个闭环极点为：

$$\lambda_1 = -0.33 + j0.58$$

$$\lambda_2 = -0.33 - j0.58$$

$$\lambda_3 = -2.33$$

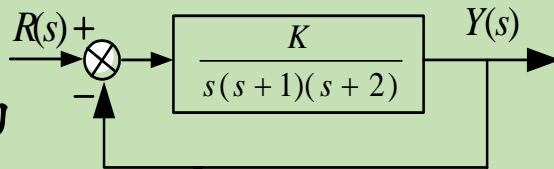
主导闭环极点

故  $\lambda_3$  至虚轴的距离与  $\lambda_1$  (或  $\lambda_2$ ) 至虚轴的距离之比为： $\frac{2.33}{0.33} \approx 7$ (倍)

可由  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  所构成的二阶系统来估算原三阶系统动态性能指标



**例4.9** 试用根轨迹法确定系统在欠阻尼下稳定的开环增益K的范围，并计算阻尼系数  $\zeta=0.5$  时的K值以及相应的闭环极点，估算此时系统的动态性能指标（误差2%）。



原系统稳态闭环增益为1，**保持稳态增益不变**，

因此降阶后相应的二阶系统闭环传递函数为：

$$W'(s) = \frac{0.33^2 + 0.58^2}{(s + 0.33 - j0.58)(s + 0.33 + j0.58)} = \frac{0.667^2}{s^2 + 0.667s + 0.667^2}$$

根据二阶系统标准形式可得：  $\zeta=0.5$ ，  $\omega_n=0.667$

则系统超调量为：  $\sigma_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 16.3\%$

调节时间为：  $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.5 \times 0.667} = 12 \text{ s}$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

## 开环零、极点对系统性能的影响

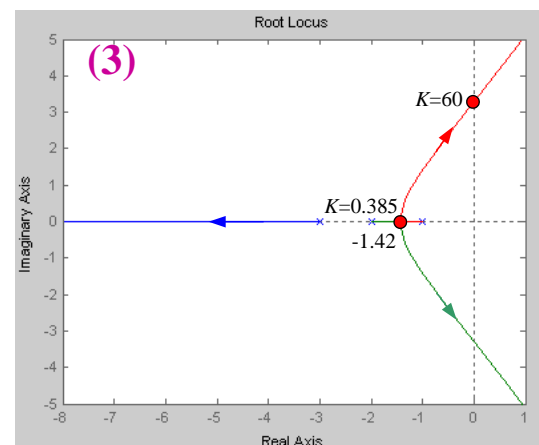
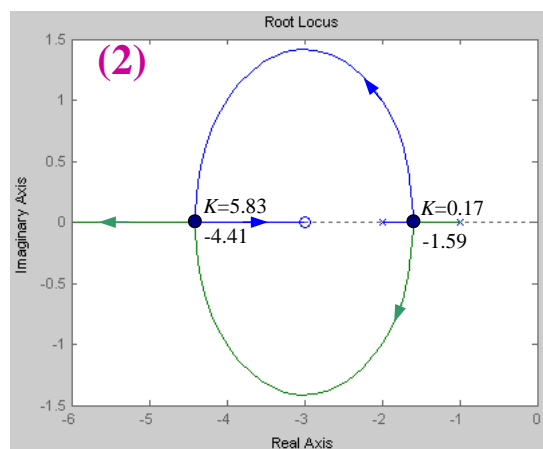
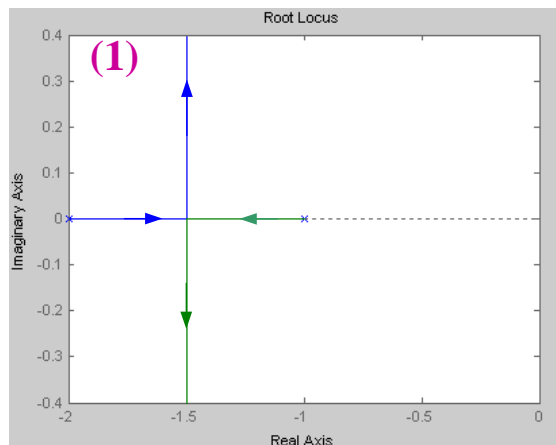
- 影响系统稳定性和动态性能的因素除开环根轨迹增益外，还有开环零点和开环极点的位置，因为开环零点、极点的分布决定系统根轨迹的形状。
- 如果系统的性能不尽人意，可以通过调整控制器的结构和参数，改变相应的开环零点、极点的位置，调整根轨迹的形状，改善系统的性能。

**例4.10** 绘制三个系统的根轨迹，并分析比较它们之间的关系。

$$(1) G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$



- 当  $K > 0$  时，系统(1)、(2)始终稳定，系统(2)可以选择一对比系统(1)更远的闭环极点，这说明增加合适的位于虚轴左侧的开环零点，可以使系统的根轨迹向左偏移，即可以增加稳定裕度又可以提高系统响应快速性，改善了系统的动态性能。
- 系统(3)相对系统(1)增加了位于虚轴左侧的开环极点，则系统只有在  $K < 60$  时才是稳定的，这说明给开环系统增加位于虚轴左侧的开环极点，将使系统的根轨迹向右偏移，一般会使系统的稳定性降低，不利于改善系统的动态性能，而且，开环负实极点离虚轴越近，这种作用越显著。

## 开环零、极点对系统性能的影响

增加开环极点就是增加惯性环节（或称为引入迟后校正作用），提高系统阶数可以改善稳态误差的无差度，但会破坏稳定性，所以应放置在远离主导极点轨迹分支处（即低频段）；如果再引入合适的开环零点（置于主导极点左侧并充分靠近主导根轨迹），就是引入微分作用（或称为超前校正），则可基本实现改善稳态精度和动态性能的目的。

## □ 参量根轨迹的绘制

- ✓ 研究除开环根轨迹增益K以外的其它可变参量（如时间常数、反馈系数，开环零、极点等）对系统性能的影响，就需要绘制参量根轨迹。
- ✓ 首先需要按照根轨迹基本绘制规则1，对根轨迹方程形式进行必要处理。（例参量为时间常数T）

$$1 + TG_1(s)H_1(s) = 0$$

$$1 + \frac{T \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0$$

- ✓ 然后按照根轨迹基本绘制规则2~9绘制参量根轨迹。

## □ 用根轨迹法分析控制系统性能

- ✓ 利用根轨迹，可以定性分析当某一参数变化时系统稳定性及动态性能的变化趋势，也可根据性能要求确定系统的参数。
- ✓ 利用根轨迹分析系统的稳定性，求根轨迹与虚轴交点，确定稳定条件，从而确定合适的K值范围。
- ✓ 开环零极点对系统性能的影响（增加合适的位于虚轴左侧的开环零点，根轨迹左移，可增加稳定裕度又可提高系统快速性，改善系统动态性能；增加位于虚轴左侧的开环极点，根轨迹右移，稳定性降低，不利于改善动态性能，离虚轴越近，作用越显著）

## 任务：

采用PID控制器代替原来的放大器，以便得到系统所期望的系统动态响应。用根轨迹法分析设计控制器参数。

PID控制器的传递函数为：
$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$G_2(s)$  已有积分环节，则取  $K_I=0$ ，即选择PD控制器为：
$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

控制系统框图如图所示，闭环传递函数为：

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)}, \quad H(s) = 1$$

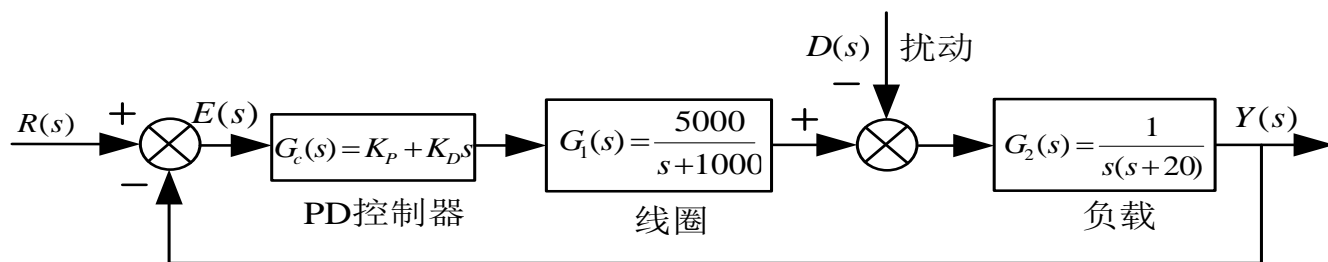


图4.18 带PD控制器的磁盘读写控制系统

$$G_c G_1 G_2 H(s) = \frac{5000(K_P + K_D s)}{s(s+20)(s+1000)} = \frac{5000K_D(s+z)}{s(s+20)(s+1000)} \quad (4.49)$$

式中 $z=K_P/K_D$ ，可先用 $K_P$ 来选择开环零点 $z$ 的位置，再画出 $K_D$ 变化时的根轨迹。

取 $z=1$ ，式(4.49)变为：

$$G_c G_1 G_2 H(s) = \frac{5000K_D(s+1)}{s(s+20)(s+1000)} \quad (4.50)$$

极点比零点多2个，根轨迹有两条渐近线，其与实轴交角为 $\theta_k = \pm 90^\circ$ ，渐近线中心为：

$$\sigma_a = \frac{-20-1000+1}{2} = -509.5$$

系统近似根轨迹图如图所示。

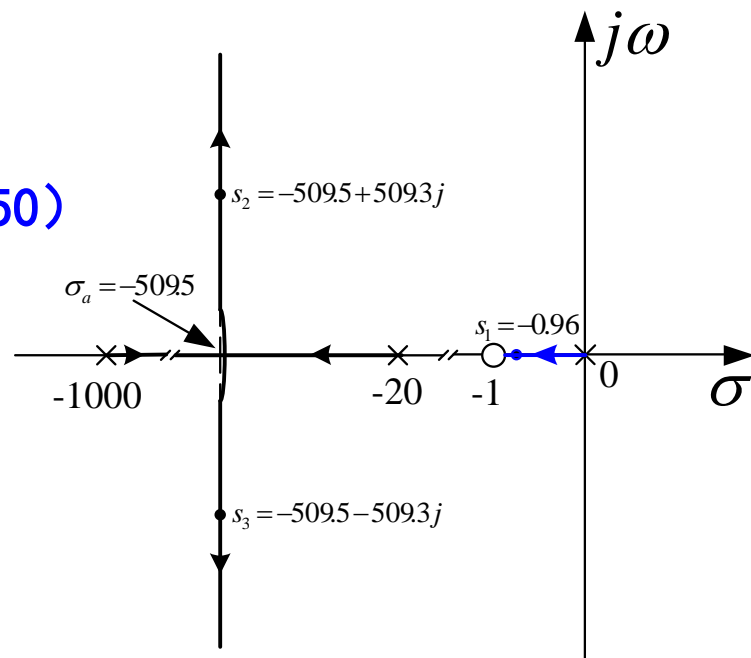


图4.19 近似根轨迹图



式中 $K_D=100$ 时，系统阶跃响应曲线和性能指标。

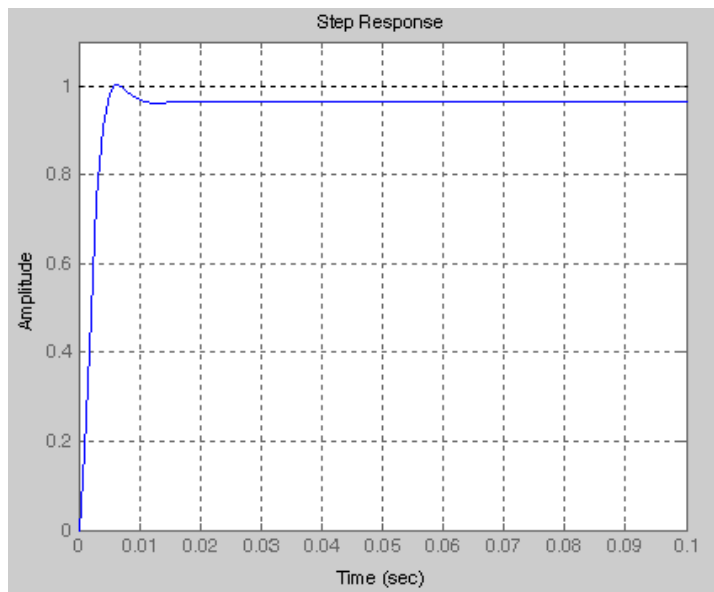


图4.20 系统的阶跃响应

表4.4 磁盘驱动器系统的设计规格要求和实际性能指标

性能指标	预期值	实际值
超调量	小于5%	0.5%
调节时间	小于250ms	20ms
单位阶跃干扰的最大响应值	小于 $5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$

- 从表中可以看出，所设计的系统满足了所有设计规格要求。
- 所给出的20ms调节时间是系统“实际”达到终值所需的时间，即系统能迅速达到终值的96.4%，然后才慢慢的与终值吻合。

□ 根轨迹的概念（开环增益K）

□ 根轨迹的基本方程

$$\frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = -1$$

幅值条件:

$$\frac{K \prod_{j=1}^m |s + z_j|}{\prod_{i=1}^n |s + p_i|} = 1 \quad \longleftarrow \text{与 } K \text{ 有关}$$

相角条件:

$$\sum_{j=1}^m \theta_{zj} - \sum_{i=1}^n \theta_{pi} = \pm(2k+1)180^\circ \quad \longleftarrow \text{与 } K \text{ 无关}$$

$$\theta_{zj} = \angle(s + z_j) \quad \theta_{pi} = \angle(s + p_i)$$

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则1 绘制根轨迹的方程形式

$$1 + \frac{K \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0$$

### □ 规则2 根轨迹的分支数及起点和终点

对于一个 $n$ 阶系统，当参变量 $K$ 从零到无穷大变化时，根轨迹有 $n$ 条分支，它们分别从 $n$ 个开环极点出发，其中有 $m$ 条根轨迹分支终止在 $m$ 个有限开环零点上，其余 $(n-m)$ 条根轨迹分支终止在 $(n-m)$ 个无限零点上。

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则3 根轨迹在实轴上的分布

根轨迹在实轴上总是分布在两个相邻的开环实零、极点之间，且线段右边开环实零、极点的总数为奇数。

### ■ 规则4 根轨迹的对称性

根轨迹必然关于实轴对称。绘制根轨迹图时，只需画出上半平面根轨迹，下半平面的根轨迹可根据对称性原理得出。

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则5 根轨迹的渐近线

当系统 $n \geq m$ 时，根轨迹的渐近线共有 $(n-m)$ 条，各条根轨迹的渐近线与实轴的倾角为：

$$\theta_k = \frac{\pm (2k+1)\pi}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \quad 2\pi \text{ 等分射线}$$

根轨迹的渐近线交于实轴上一点，交点坐标为：

$$-\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n -p_i - \sum_{j=1}^m -z_j}{n-m}$$

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则6 根轨迹的分离点和会合点

- ◆ 根轨迹的分离点和会合点实质上都是特征方程式的重根，因而可用求解特征方程式重根方法确定它们在平面上的位置。

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{[B(s)]^2} = 0$$

确定根轨迹的分离点或会合点的坐标及相应的 $K$ 值

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则7 根轨迹的出射角和入射角

◆ 计算根轨迹出射角和入射角可由根轨迹的相角条件来确定。

相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} = \pm(2k+1)180^\circ \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\theta_{z_j} = \angle(s + z_j)$$

$$\theta_{p_i} = \angle(s + p_i)$$

根轨迹在第  $a$  个开环复数极点  $-p_a$  处的出射角为：

$$\theta_{p_a} = \mp(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^m \theta_{z_j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq a}}^n \theta_{p_i}$$

$$\theta_{p_i} = \angle(-p_a + p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (i \neq a)$$

$$\theta_{z_j} = \angle(-p_a + z_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

根轨迹在第  $b$  个开环复数零点  $-z_b$  处的入射角为：

$$\theta_{z_b} = \pm(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^n \theta_{p_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq b}}^m \theta_{z_j}$$

$$\theta_{p_i} = \angle(-z_b + p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\theta_{z_j} = \angle(-z_b + z_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (j \neq b)$$

## □ 绘制根轨迹的基本规则

### □ 规则8 根轨迹与虚轴的交点

- 1) 用劳斯判据, 求临界稳定的 $K$ 值和根轨迹与虚轴的交点;
- 2) 令特征方程的 $s=j\omega$ , 并令方程左边实部和虚部分别等于零, 就可求出 $\omega$ 和 $K$ 值。

### □ 规则9 特征方程的根之和与根之积

$$\sum_{i=1}^n (-p_{ci}) = \sum_{i=1}^n (-p_i)$$

$$\prod_{i=1}^n (-p_{ci}) = \prod_{i=1}^n (-p_i) + K \prod_{j=1}^m (-z_j)$$



## □ 参量根轨迹的绘制

- ✓ 研究除开环根轨迹增益K以外的其它可变参量（如时间常数、反馈系数，开环零、极点等）对系统性能的影响，就需要绘制参量根轨迹。
- ✓ 首先需要按照根轨迹基本绘制规则1，对根轨迹方程形式进行必要处理。（例参量为时间常数T）

$$1 + TG_1(s)H_1(s) = 0$$

$$1 + \frac{T \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0$$

- ✓ 然后按照根轨迹基本绘制规则2~9绘制参量根轨迹。

## □ 用根轨迹法分析控制系统性能

- ✓ 利用根轨迹，可以定性分析当某一参数变化时系统稳定性及动态性能的变化趋势，也可根据性能要求确定系统的参数。
- ✓ 利用根轨迹分析系统的稳定性，求根轨迹与虚轴交点，确定稳定条件，从而确定合适的K值范围。
- ✓ 开环零极点对系统性能的影响（增加合适的位于虚轴左侧的开环零点，根轨迹左移，可增加稳定裕度又可提高系统快速性，改善系统性能；增加位于虚轴左侧的开环极点，根轨迹右移，稳定性降低，不利于改善动态性能，离虚轴越近，作用越显著）