

## 第3章 拉普拉斯变换

卷积公式的导出是对系统的输入信号实施冲激分解的结果。本章将要介绍的拉普拉斯变换，则是对信号的复指数函数  $e^{st}$  分解。把拉普拉斯变换方法用于系统分析，各信号以其变换形式进行运算，且为代数运算，避免了时域分析中信号的微分、积分、微分方程求解、卷积等较为繁琐的运算过程。拉普拉斯变换是系统分析的一种重要数学方法。

在正弦电流电路的相量法分析中，正弦函数用相量表示，相量是正弦函数的一种变换。拉普拉斯变换把时域函数变换为另一种以复频率  $s$  为自变量的函数，与相量法不同，它不局限于对某一种函数变换，而是对相当广泛的一类函数可以进行变换，此外，相量法只能用于稳态分析，而拉普拉斯变换法能够进行瞬态分析。

### 3.1 拉普拉斯变换

信号  $x(t)$  的拉普拉斯变换用  $X(s)$  表示，定义为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3-2)$$

式中  $s$  为复频率变量， $s = \sigma + j\omega$ 。式(3-1)是给信号  $x(t)$  乘以指数函数  $e^{-st}$  后在整个时间轴上的积分，积分后是复频率  $s$  的函数，故表示为  $X(s)$ ， $X(s)$  称为  $x(t)$  的拉普拉斯变换，简称  $x(t)$  的拉氏变换。式(3-2)是用已知的  $X(s)$  求解与之对应的  $x(t)$ ，为逆变换式。 $X(s)$  称为  $x(t)$  象函数，由  $X(s)$  求出的  $x(t)$  称为  $X(s)$  的原函数。

$x(t)$  的拉氏变换记作  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ， $X(s)$  的逆拉氏变换记作  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$ 。或表示成

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

在不引起误解的情况下，箭头上意指拉氏变换的符号  $\mathcal{L}$  也常省去。

**例3-1** 求  $x(t) = e^{-at}\varepsilon(t)$  的拉氏变换，其中  $a$  为复数。

解：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\varepsilon(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right|_0^{\infty}$$

当  $\operatorname{Re}(s+a) > 0$  时，有

$$\mathcal{L}[e^{-at}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a \quad (3-3)$$

**例3-2** 求  $x(t) = -e^{-at}\varepsilon(-t)$  的拉氏变换, 其中  $a$  为复数。

解:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\varepsilon(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t}dt = \left. \frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right|_{-\infty}^0$$

上式中, 只有当  $\operatorname{Re}(s+a) < 0$  时  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s+a)t} = 0$ , 则

$$\mathcal{L}[-e^{-at}\varepsilon(-t)] = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} a \quad (3-4)$$

从式(3-3)和式(3-4)看出,  $e^{-at}\varepsilon(t)$  和  $-e^{-at}\varepsilon(-t)$  变换后的函数式相同, 均为  $1/(s+a)$ , 但  $s$  的取值范围不同。

在因果系统分析中, 当输入信号起始于  $t=0$  时, 系统中的所有信号均在  $t>0_+$  的区间, 为此, 也定义

$$X(s) = \int_{0_+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (3-5)$$

为了区分, 式(3-5)称为单边拉氏变换, 式(3-1)称为双边拉氏变换。对因果信号, 这两种变换式给出的变换结果一致。

式(3-5)中的积分下限取为  $t=0_+$ , 而不是  $t=0_+$ , 其好处是能够对  $t=0$  处的冲激信号进行运算。当  $x(t)$  在  $t=0$  处不含冲激时, 式(3-5)中的积分下限也可写作  $0$ 。

对式(3-5)所示的单边拉氏变换, 其逆变换仍然按式(3-2)求解, 只不过求得的  $x(t)$  只适合于  $t>0_+$  的区间。由于实时信号处理系统都是因果的, 应用单边拉氏变换进行系统分析更为快捷和方便, 如无特别说明, 后续内容中的拉普拉斯变换指单边形式。

**例3-3** 求阶跃信号  $\varepsilon(t)$  的拉氏变换。

解: 根据拉氏变换的定义

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\varepsilon(t)] &= \int_{0_+}^{\infty} \varepsilon(t)e^{-st}dt = \int_{0_+}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_{0_+}^{\infty} \end{aligned}$$

当  $s$  的实部  $\operatorname{Re} s > 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ , 故

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (3-6)$$

由于单边拉氏变换只与  $t>0_+$  区间的信号有关, 故阶跃信号  $\varepsilon(t)$  与常数 1 的单边拉氏变换相同。

**例3-4** 求  $t^n\varepsilon(t)$  的拉氏变换, 其中  $n$  为正整数。

解:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^n \varepsilon(t)] &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \\
&= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^n d e^{-st} \\
&= -\frac{1}{s} \left[ t^n e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} n t^{n-1} e^{-st} dt \right] \\
&= \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1} \varepsilon(t)]
\end{aligned}$$

用递推法求解上式，并利用式(3-6)结果，有

$$\mathcal{L}[t^n \varepsilon(t)] = \underbrace{\frac{n}{s} \times \frac{n-1}{s} \times \cdots \times \frac{1}{s}}_{\text{共 } (n+1) \text{ 项}}$$

则

$$\mathcal{L}[t^n \varepsilon(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

**例3-5** 求冲激信号  $\delta(t)$  的拉氏变换。

解：

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

即对任何  $s$ ， $\delta(t)$  的拉氏变换为常数 1。

**例3-6** 求冲激偶信号  $\delta'(t)$  的拉氏变换。

解：

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-st} dt = -\frac{d e^{-st}}{dt} \Big|_{t=0} = s$$

即对任何  $s$ ， $\delta'(t)$  的拉氏变换为  $s$ 。

### 存在性与收敛域

把  $s = \sigma + j\omega$  代入式(3-5)，有

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

对给定信号  $x(t)$ ，上式积分有可能不存在。例如，信号  $e^{t^2}$  由于其增长速率大于指数函数  $e^{\sigma t}$  的增长速率，它实际上不存在拉氏变换。由于

$$\left| \int_0^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt$$

注意到  $|e^{-j\omega t}| = 1$ ，则当

$$\int_0^{\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3-7)$$

成立时， $x(t)$  的单边拉氏变换一定存在。工程实际中遇到的信号一般都能满足式(3-7)，

故拉氏变换具有其广泛的适用性。

拉氏变换积分式收敛时复频率  $s$  的取值区域称为  $X(s)$  的收敛域 (ROC)。以式(3-3)所示的变换为例, 设  $a$  为实数, 则  $X(s)$  的收敛域为  $\operatorname{Re} s > -a$ , 将它表示在  $s$  平面 (复平面) 上, 如图 3-1 阴影区域所示。图中,  $\operatorname{Re}$  和  $\operatorname{Im}$  分别为实轴和虚轴。

若  $x(t)$  为有限持续期信号, 设持续期  $t \in (t_1, t_2)$ , 有

$$X(s) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

上式若对  $\sigma = 0$  收敛, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j\omega t} dt < \infty$$

则对其他  $\sigma$  值也一定收敛, 这是因为  $e^{-\sigma t}$  为有限值, 若设在持续期  $t \in (t_1, t_2)$  内  $e^{-\sigma t} < M$ , 则有

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \right| < M \left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| < \infty$$

故对有限持续期信号  $x(t)$ , 它的拉氏变换  $X(s)$  存在时其收敛域为任何  $s$ 。

由于在定义式(3-5)中  $e^{-\sigma t}$  起积分收敛的因子作用,  $\sigma$  越大,  $|x(t)e^{-\sigma t}|$  的值就越小, 故  $X(s)$  的收敛域在  $s$  平面上只存在左边界, 如图 3-1 所示。

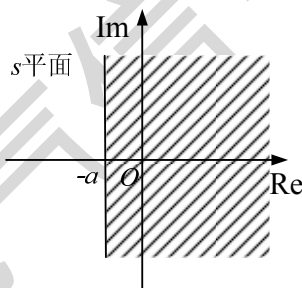


图3-1 收敛域

### 线性性质

拉氏变换对函数  $x(t)$  所进行的运算是一种线性运算: 设  $a_1$  和  $a_2$  为二个任意常数, 则  $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[x_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[x_2(t)] \quad (3-8)$$

$X(s)$  的收敛域一般为  $X_1(s)$  与  $X_2(s)$  的交集。

根据拉氏变换的定义容易证明其线性性质。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1 x_1(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{\infty} a_2 x_2(t) e^{-st} dt \\ &= a_1 \mathcal{L}[x_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[x_2(t)] \end{aligned}$$

线性性质简单而又重要, 在后续内容中将经常使用。

**例3-7** 应用线性性质求  $x(t) = \sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$  的拉氏变换。

解：把正弦函数可用复指数函数表示

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

利用线性性质与式(3-3)，得

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0} \right] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

### 极零点

若  $X(s)$  为两个  $s$  的多项式之比形式：

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3-9)$$

称  $X(s)$  为有理函数。式中  $a_n (n=0, 1, 2, \cdots)$  和  $b_m (m=0, 1, 2, \cdots)$  均为实系数， $M$  和  $N$  为正整数。设  $p_1, p_2, \cdots, p_N$  和  $z_1, z_2, \cdots, z_M$  分别表示  $A(s)=0$  和  $B(s)=0$  的根， $X(s)$  也可表示为

$$X(s) = b_M \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)} \quad (3-10)$$

在对  $s$  的取值不加任何限制的情况下，当  $s$  取  $p_1, p_2, \cdots, p_N$  时  $X(s)$  的值为无限大，故称它们为  $X(s)$  的极点；当  $s$  取  $z_1, z_2, \cdots, z_M$  时  $X(s)$  的值为零，故称它们为  $X(s)$  的零点。为了直观起见， $X(s)$  的极点和零点也可表示在  $s$  平面上，零点用“○”表示，极点用“×”表示。极零点在  $s$  平面上的分布称为极零点图，它是  $X(s)$  的另一种表示方式。

**例3-8** 绘出  $X(s) = \frac{s^2 + s - 6}{s(s^2 + 2s + 2)}$  的极零点图。

解：对  $X(s)$  的分子与分母做因式分解，有

$$X(s) = \frac{(s+3)(s-2)}{s(s+1+j)(s+1-j)}$$

可看出， $X(s)$  有 3 个极点和 2 个零点： $p_1 = 0$ ， $p_2 = -1-j$ ， $p_3 = -1+j$  和  $z_1 = -3$ ， $z_2 = 2$ ，极零点分布如图 3-2 所示。

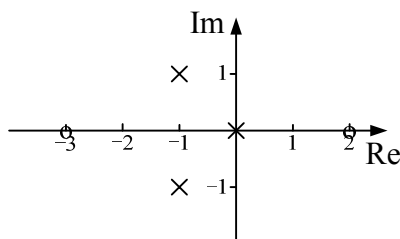


图3-2 极零点在  $s$  平面上的表示

如果  $X(s)$  有重极点或重零点，在极零点图中的相应位置要标出其阶次。

**例3-9** 已知  $x(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$ ，求该信号的单边拉氏变换，并指出其收敛域。

解：根据例 3-6 结果，有

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re} s > -2$$

$$\int_{0-}^{\infty} e^{-3t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+3}, \quad \operatorname{Re} s > -3$$

由线性性质，得

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \operatorname{Re} s > -2$$

由于  $\operatorname{Re} s > -2$  与  $\operatorname{Re} s > -3$  的交集为  $\operatorname{Re} s > -2$ ，故  $X(s)$  的 ROC 为  $\operatorname{Re} s > -2$ ，如图 3-3 所示。

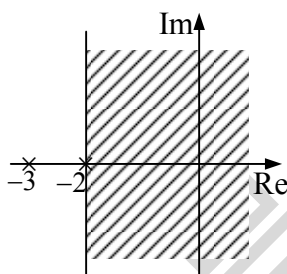


图3-3 收敛域

极点与收敛域有着密切关系。(1) 很明显，收敛域内不可能有任何极点；(2) 对单边拉氏变换，收敛域总是为  $\operatorname{Re} s$  大于某一值的区域，可以证明：单边拉氏变换为以最右极点处为边界的右边区域，如图 3-3 所示。

对单边拉氏变换，鉴于函数式  $X(s)$  已表明了它的收敛域，故  $X(s)$  的收敛域一般不需要特别给出。一些常用信号的单边拉普拉斯变换如表 3-1 所示。

表3-1 单边拉普拉斯变换表

时域	$s$ 域
$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$	$X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$

$e^{-at} \sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) \varepsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$t^n \varepsilon(t)$ ( $n$ 为正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-at} \varepsilon(t)$ ( $n$ 为正整数)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$t e^{-at} \sin(\omega_0 t) \varepsilon(t)$	$\frac{2\omega_0(s+a)}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]^2}$
$t e^{-at} \cos(\omega_0 t) \varepsilon(t)$	$\frac{(s+a)^2 - \omega_0^2}{[(s+a)^2 + \omega_0^2]^2}$

## 3.2 逆拉普拉斯变换

由已知的  $X(s)$  求解  $x(t)$  的公式是

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (3-11)$$

对单边拉氏变换, 按上式求得的  $x(t)$  只适合于  $t > 0_-$  的时间范围。

在求  $X(s)$  的逆变换时, 积分路线  $(c-j\infty)$  到  $(c+j\infty)$  必须在收敛域内, 如图 3-4 中虚线所示。

式(3-2)所示的逆变换公式为积分形式, 若按等间隔  $\Delta s$  划分积分路线, 如图 3-4 所示。用求和近似替代积分, 式(3-2)可表示为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi j} X(s_k) \Delta s e^{s_k t} \quad (3-12)$$

上式显示, 信号  $x(t)$  用无限多个复指数函数  $e^{s_k t}$  的“和”表示, 故而拉氏变换的本质是信号的复指数函数分解。

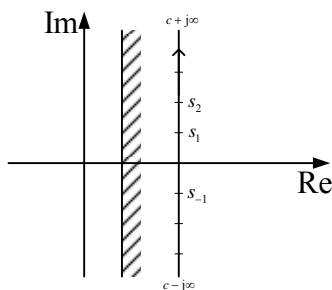


图3-4 积分的求和近似

由于逆变换式(3-11)是复变函数积分, 直接计算需要有较好的复变函数知识。在系统分析中, 最常遇到的  $X(s)$  为下式所示的有理函数形式:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3-13)$$

复杂有理函数  $X(s)$  总可以展开为一些简单有理函数的和, 设

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \cdots$$

若  $X_1(s)$ 、 $X_2(s)$  等的逆变换已知, 根据线性性质,  $X(s)$  的逆变换  $x(t)$  就为

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[X_2(s)] + \cdots$$

这种求解逆变换的方法称为部分分式展开法。

**例3-10** 求  $X(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$  的逆拉氏变换。

解: 由  $s^2+5s+6=0$  可确定出  $X(s)$  的极点为  $p_1=-2$ ,  $p_2=-3$ , 于是

$$X(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$$

$X(s)$  可用分式  $\frac{r_1}{s+2}$  与  $\frac{r_2}{s+3}$  的和表示, 其中  $r_1$  和  $r_2$  为待定系数。由于

$$\frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{s+3} = \frac{(r_1+r_2)s + (3r_1+2r_2)}{(s+2)(s+3)}$$

令上式分子与  $X(s)$  分子的对应项相等, 有

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 1 \\ 3r_1 + 2r_2 = 4 \end{cases}$$

解出  $r_1=2$ ,  $r_2=-1$ , 则

$$X(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+3}$$

利用下式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}\varepsilon(t)$$

得  $X(s)$  的逆变换  $x(t)$  为

$$x(t) = 2e^{-2t}\varepsilon(t) - e^{-3t}\varepsilon(t)$$

上例中求解各简单项系数需要解联立方程, 下面介绍一种更为简单的计算方法。先假设式(3-13)中分子多项式的阶次低于分母多项式的阶次, 即  $M < N$ , 此时称函数  $X(s)$  为真有理函数。

### 单极点函数

若  $X(s)$  的  $N$  个极点  $p_1, p_2, \cdots, p_N$  全不相等,  $X(s)$  可展开为

$$X(s) = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{r_N}{s-p_N} \quad (3-14)$$



式中  $r_1, r_2, \dots, r_N$  是待定系数, 分别称为  $X(s)$  在极点  $p_1, p_2, \dots, p_N$  处的留数, 它们可按下述方法确定。给上式两端乘以  $(s - p_1)$ , 得

$$(s - p_1)X(s) = r_1 + (s - p_1) \left( \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_N}{s - p_N} \right)$$

若令  $s = p_1$ , 等号右端除第一项外其余项均变为零, 因而求得

$$r_1 = (s - p_1)X(s) \Big|_{s=p_1}$$

上式中  $(s - p_1)$  与  $X(s)$  分母中  $(s - p_1)$  正好相抵消。同理, 可求得其他系数

$$r_k = (s - p_k)X(s) \Big|_{s=p_k}$$

由于

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - p} \right] = e^{pt} \varepsilon(t) \quad (3-15)$$

对式(3-14)取逆变换, 得

$$x(t) = (r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + \dots + r_N e^{p_N t}) \varepsilon(t)$$

**例3-11** 求  $X(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$  的逆拉氏变换。

解:  $X(s)$  的极点为  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -3$ , 于是

$$\frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{r_1}{s+2} + \frac{r_2}{s+3}$$

给上式两端乘以  $(s+2)$ , 有

$$(s+2) \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = (s+2) \frac{r_1}{(s+2)} + (s+2) \frac{r_2}{s+3}$$

两端令  $s = -2$ , 得

$$\begin{aligned} \cancel{(s+2)} \frac{s+4}{\cancel{(s+2)}(s+3)} &= \cancel{(s+2)} \frac{r_1}{\cancel{(s+2)}} + 0 \\ r_1 &= \cancel{(s+2)} \frac{s+4}{\cancel{(s+2)}(s+3)} \Big|_{s=-2} = \frac{s+4}{s+3} \Big|_{s=-2} = 2 \end{aligned}$$

还可得

$$r_2 = \cancel{(s+3)} \frac{s+4}{(s+2)\cancel{(s+3)}} \Big|_{s=-3} = \frac{s+4}{s+2} \Big|_{s=-3} = -1$$

故

$$X(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+3}$$

对其取逆变换, 得

$$x(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

对实系数有理函数  $X(s)$ ，如果有复数极点，则复数极点必以共轭形式出现。为了不以复数形式表示  $x(t)$ ，方法如下：

设

$$X(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2}$$

其中

$$r_1 = (s - p_1)X(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$r_2 = (s - p_2)X(s)\Big|_{s=p_2}$$

若  $p_1, p_2$  为复数，由于  $X(s)$  为实系数有理函数，则必有  $p_2 = p_1^*$ 。由以上两式可以看出， $r_1$  与  $r_2$  也一定共轭，假定

$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$$

$$r_1 = a + jb$$

有

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1 e^{p_1 t} \varepsilon(t) + (r_1 e^{p_1 t})^* \varepsilon(t) = 2 \operatorname{Re} [r_1 e^{p_1 t}] \varepsilon(t) \\ &= 2 \operatorname{Re} [(a + jb) e^{\sigma_1 t} e^{j\omega_1 t}] \varepsilon(t) \\ &= 2e^{\sigma_1 t} [a \cos(\omega_1 t) - b \sin(\omega_1 t)] \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3-16)$$

在按以上方法求解时，注意最好选虚部大于零的极点为  $p_1$ ，这时角频率  $\omega_1$  也就大于零。

**例3-12** 求  $X(s) = \frac{6s-10}{s^2+2s+5}$  的逆变换。

解：分母多项式

$$A(s) = s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4$$

则  $X(s)$  的极点  $p_1 = -1 + j2$ ， $p_2 = -1 - j2$ ， $X(s)$  可展开为

$$X(s) = \frac{r_1}{s+1-j2} + \frac{r_2}{s+1+j2}$$

其中

$$\begin{aligned} r_1 &= (s+1-j2) \frac{6s-10}{(s+1-j2)(s+1+j2)} \Big|_{s=-1+j2} = 3 + j4 \\ r_2 &= r_1^* \end{aligned}$$

由式(3-16)得

$$x(t) = e^{-t} [6 \cos(2t) - 8 \sin(2t)] \varepsilon(t)$$

本题也可按如下方法求解， $X(s)$  可展开为

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{6s-10}{(s+1)^2+4} = \frac{6(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{16}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{6(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - \frac{8 \times 2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

由于

$$\mathcal{L}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] = e^{-t} \cos(2t) \varepsilon(t)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] = e^{-t} \sin(2t) \varepsilon(t)$$

故

$$x(t) = e^{-t} [6 \cos(2t) - 8 \sin(2t)] \varepsilon(t)$$

### 有重极点的函数

单极点的展开方法也可用于有重极点的  $s$  域函数展开。

**例3-13** 求  $X(s) = \frac{s}{(s+2)^3(s+1)}$  的逆变换。

解： 令  $X_1(s) = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$ ，它为单极点形式，可展开为

$$X_1(s) = \frac{2}{(s+2)} + \frac{-1}{(s+1)}$$

给  $X_1(s)$  除以  $(s+2)$ ，令其为  $X_2(s)$ ，则

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{-1}{(s+1)} \end{aligned}$$

再给  $X_2(s)$  除以  $(s+2)$ ，为给定的  $X(s)$ ，则

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{-1}{(s+2)(s+1)} \\ &= \frac{2}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{-1}{(s+1)} \end{aligned}$$

对其取逆变换，得

$$x(t) = [(t^2 + t + 1)e^{-2t} - e^{-t}] \varepsilon(t)$$

注意：

$$\frac{s}{(s+2)^3(s+1)} \neq \frac{r_1}{(s+2)^3} + \frac{r_4}{(s+1)}$$

设  $X(s)$  含有  $m$  重极点  $p_1$ ,  $X(s)$  的展开形式如下:

$$X(s) = \left\{ \frac{r_1}{(s-p_1)^m} + \frac{r_2}{(s-p_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{r_m}{(s-p_1)} \right\} + \cdots$$

式中花括号内的项只与极点  $p_1$  有关, 各留数的求解公式如下 (请读者自行推导):

$$r_1 = (s-p_1)^m X(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$r_2 = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^m X(s)] \Big|_{s=p_1}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p_1)^m X(s)] \Big|_{s=p_1}$$

...

$$r_m = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-p_1)^m X(s)] \Big|_{s=p_1}$$

利用以上公式求解例 3-13,  $X(s)$  的极点  $p_1 = p_2 = p_3 = -2$ ,  $p_4 = -1$ ,  $X(s)$  可展开为

$$X(s) = \frac{s}{(s+2)^3(s+1)} = \frac{r_1}{(s+2)^3} + \frac{r_2}{(s+2)^2} + \frac{r_3}{(s+2)} + \frac{r_4}{(s+1)}$$

则各留数为

$$r_1 = \cancel{(s+2)^3} \frac{s}{\cancel{(s+2)^3}(s+1)} \Big|_{s=-2} = 2$$

$$r_2 = \frac{d}{ds} \frac{s}{(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 1$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^3} \Big|_{s=-2} = 1$$

$$r_4 = \cancel{(s+1)} \frac{s}{(s+2)^3 \cancel{(s+1)}} \Big|_{s=-1} = -1$$

于是

$$x(t) = [(t^2 + t + 1)e^{-2t} - e^{-t}] \varepsilon(t)$$

若式(3-13)中  $M \geq N$ , 利用多项式的长除运算, 可将  $X(s)$  分解为一个  $s$  的多项式 (阶次为  $M - N - 1$ ) 与一个真有理函数的和, 形式为

$$\frac{B(s)}{A(s)} = C(s) + \frac{B_1(s)}{A(s)} \quad (3-17)$$

其中  $C(s)$  为长除运算的商多项式,  $B_1(s)$  为长除运算的余多项式。当  $M = N$  时,  $C(s)$  只有常数项。

**例3-14** 求  $X(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 15s + 11}{s^2 + 5s + 6}$  的逆变换。

解：分子多项式的阶次高于分母的阶次，将  $X(s)$  中分子、分母多项式按  $s$  的降幂排列，利用长除运算

$$\begin{array}{r} s+1 \\ s^2+5s+6 \overline{) s^3+6s^2+15s+11} \\ \underline{s^3+5s^2+6s} \phantom{+11} \\ s^2+9s+11 \\ \underline{s^2+5s+6} \\ 4s+5 \end{array}$$

得

$$X(s) = s+1 + \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

对上式中的真有理函数展开，有

$$\frac{4s+5}{s^2+5s+6} = \frac{-3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

于是， $X(s)$  为

$$X(s) = s+1 + \frac{-3}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

等号右端第 1 项为  $s$ ，其逆变换  $\mathcal{L}^{-1}[s] = \delta'(t)$ ，则

$$x(t) = \delta'(t) + \delta(t) + (-3e^{-2t} + 7e^{-3t})\varepsilon(t)$$

求解逆拉氏变换除上面介绍的部分分式展开法外，常用的还有幂级数法和留数法。对比较复杂的  $s$  域函数，可借助计算机求解。

### 3.3 拉普拉斯变换的性质

#### 微分

**时域微分性质：**若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ，则  $x(t)$  导数  $x'(t)$  的单边拉氏变换为

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0_-) \quad (3-18)$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} dx(t) \\ &= s \int_{0_-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt + x(t)e^{-st} \Big|_{0_-}^{+\infty} \\ &= sX(s) - x(0_-) \end{aligned}$$

$x(t)$ 的二阶导数可看作一阶导数再求导, 利用式(3-18)还可得

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x'(t)] - x'(0_-) = s[sX(s) - x(0_-)] - x'(0_-)$$

即

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 X(s) - sx(0_-) - x'(0_-) \quad (3-19)$$

依次类推,  $x(t)$ 的 $n$ 阶导数的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) - s^{n-1}x(0_-) - s^{n-2}x^{(1)}(0_-) - \cdots - x^{(n-1)}(0_-) \quad (3-20)$$

其中,  $x^{(n)}(0_-)$ 表示 $x(t)$ 的 $n$ 阶导数在 $t=0_-$ 处的值。

当 $x(t)$ 为因果信号时, 它及其导数在 $t=0_-$ 处的值为零, 则有

$$\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) \quad (3-21)$$

式(3-21)表明: 因果信号 $x(t)$ 在时域求导, 对应于 $s$ 域给 $X(s)$ 乘以 $s$ 。微分性质的一个特征是把时域微分运算转换为 $s$ 域的代数运算, 这也是连续时间系统采用拉氏变换分析的原因之一。

**例3-15** 应用微分性质求 $\delta'(t)$ 的拉氏变换。

解:  $\delta'(t)$ 为 $\delta(t)$ 的导数, 由微分性质

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[\delta(t)]$$

代入 $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , 得

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = s$$

依次类推, 有

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

**例3-16** 应用微分性质求 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ 的单边拉氏变换。

解: 由于 $\cos''(\omega_0 t) = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$ , 对该式两端应用拉氏变换, 有

$$s^2 X(s) - sx(0_-) - x'(0_-) = -\omega_0^2 X(s)$$

其中 $x(0_-) = 1$ ,  $x'(0_-) = 0$ , 则

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (3-22)$$

本题也可取 $x(t) = \cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$ , 则

$$x'(t) = \delta(t) - \omega_0 \sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$$

$$x''(t) = \delta'(t) - \omega_0^2 x(t)$$

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta'(t)$$

对上式两端取拉氏变换, 也可得式(3-22)结果。

**$s$ 域微分性质:** 若 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ , 则

$$\mathcal{L}[-tx(t)] = \frac{dX(s)}{ds} \quad (3-23)$$

证明: 给拉氏变换定义式对 $s$ 求导, 并调换微分与积分顺序, 有

$$\begin{aligned}
\frac{dX(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_{0_-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\
&= \int_{0_-}^{\infty} [-tx(t)] e^{-st} dt \\
&= \mathcal{L}[-tx(t)]
\end{aligned}$$

重复运用上述结果, 还可得

$$\mathcal{L}[(-t)^n x(t)] = \frac{d^n X(s)}{ds^n} \quad (3-24)$$

**例3-17** 试求  $x(t) = t^n e^{-at} \varepsilon(t)$  的拉氏变换, 其中  $n$  为正整数。

解: 由于  $\mathcal{L}[e^{-at} \varepsilon(t)] = \frac{1}{s+a}$ , 则

$$\mathcal{L}[-te^{-at} \varepsilon(t)] = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s+a} \right) = \frac{-1}{(s+a)^2}$$

即

$$\mathcal{L}[te^{-at} \varepsilon(t)] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

类似地还可得

$$\mathcal{L}[t^2 e^{-at} \varepsilon(t)] = \frac{2}{(s+a)^3}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{-at} \varepsilon(t)] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

## 积分

**时域积分性质:** 若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ , 则

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{g(0_-)}{s} \quad (3-25)$$

证明: 由于  $\frac{dg(t)}{dt} = x(t)$ , 根据时域微分性质, 有

$$sG(s) - g(0_-) = X(s)$$

则

$$G(s) = \frac{X(s)}{s} + \frac{g(0_-)}{s}$$

若  $x(t)$  为因果信号, 则  $g(0_-) = 0$ ,  $x(t)$  积分的拉氏变换为

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] = \frac{X(s)}{s}$$

**例3-18** 利用积分性质求斜变信号  $t\varepsilon(t)$  的变换。

解：斜变信号  $t\varepsilon(t)$  为阶跃信号  $\varepsilon(t)$  的积分，而  $\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = 1/s$ ，故

$$\mathcal{L}[t\varepsilon(t)] = \frac{\mathcal{L}[\varepsilon(t)]}{s} = \frac{1}{s^2}$$

**s 域积分性质**：若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ，则

$$\mathcal{L}\left[\frac{x(t)}{t}\right] = \int_s^\infty X(s)ds \quad (3-26)$$

该性质的证明从略。

## 移位

**时域移位性质**：若  $x(t)$  为因果信号， $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ，则  $x(t-t_0)$  ( $t_0 > 0$ ) 的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)] = e^{-st_0} X(s) \quad (3-27)$$

证明：由于  $x(t)$  为因果信号， $x(t-t_0)$  就起始于  $t_0$  时刻，则

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt = \int_{t_0}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt$$

令  $\tau = t - t_0$ ，则上式为

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)] = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st_0} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0} X(s)$$

注意：对单边拉氏变换，当  $x(t)$  不为因果信号时式(3-27)不成立。时域移位性质也常表示为

$$\mathcal{L}[x(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L}[x(t)\varepsilon(t)] \quad (t_0 > 0) \quad (3-28)$$

**例3-19** 求单个正弦波  $x(t) = \sin(\omega_0 t)\varepsilon(t) - \sin[\omega_0(t-T)]\varepsilon(t-T)$  的拉氏变换。

解：由于

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)] &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ \mathcal{L}[\sin(\omega_0(t-T))\varepsilon(t-T)] &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-sT} \end{aligned}$$

于是

$$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} (1 - e^{-sT})$$

**例3-20** 已知  $x(t)$  的单边拉氏变换

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} e^{-2s}$$

求  $x(t)$ 。



解：令

$$X_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3}$$

它的逆变换

$$x_1(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

由时域移位性质， $x(t) = x_1(t-2)$ ，故

$$x(t) = (e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)})\varepsilon(t-2)$$

**周期信号的单边拉普拉斯变换：**若  $x(t)$  是周期信号，周期为  $T$ ，设它在第 1 个周期  $t \in (0_-, T_-)$  内的信号为  $x_0(t)$

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & t \in (0_-, T_-) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

则  $x(t)$  的单边拉氏变换为

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)]}{1 - e^{-sT}} \quad (3-29)$$

证明：设  $x(t)$  在  $t < 0$  时为零，则

$$x(t) - x(t-T) = x_0(t)$$

利用移位性质，有

$$\mathcal{L}[x(t)] - e^{-sT} \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[x_0(t)]$$

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)]}{1 - e^{-sT}}$$

**s 域移位性质：**若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ，则

$$\mathcal{L}[e^{-at}x(t)] = X(s+a) \quad (3-30)$$

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at}x(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-(s+a)t}dt \\ &= X(s+a) \end{aligned}$$

该性质说明，给  $x(t)$  乘以  $e^{-at}$ ，其拉氏变换为  $X(s+a)$ 。

**例3-21** 求  $e^{-at} \sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$  的拉氏变换。

解：正弦函数的变换为

$$\mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

根据  $s$  域移位性质，有

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)] = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

### 初值定理

若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $x(t)$  在  $t=0$  处不含冲激及其各阶导数项, 则  $x(t)$  的初始值

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (3-31)$$

初值定理说明根据  $X(s)$  可直接求解出  $x(t)$  的初始值  $x(0_+)$ , 不需要对  $X(s)$  取逆变换, 当  $X(s)$  比较复杂时该方法特别有效。

证明:  $[x(t) - x(0_+)]$  的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[x(t) - x(0_+)] = \int_{0_-}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] e^{-st} dt = X(s) - \frac{x(0_+)}{s}$$

由于  $x(t)$  在  $t=0$  处不含冲激, 有

$$\int_{0_-}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] e^{-st} dt = \int_{0_+}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] e^{-st} dt$$

故

$$\begin{aligned} \int_{0_+}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] e^{-st} dt &= X(s) - \frac{x(0_+)}{s} \\ x(0_+) &= sX(s) - \int_{0_+}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] se^{-st} dt \end{aligned}$$

对上式两端取  $s$  趋于无穷的极限, 由于

$$\lim_{s \rightarrow \infty} se^{-st} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0_+}^{\infty} [x(t) - x(0_+)] se^{-st} dt = 0$$

故

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

**例3-22** 已知  $x(t)$  的拉氏变换为

$$X(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

求  $x(t)$  的初始值  $x(0_+)$ 。

解: 根据初值定理,  $x(0_+)$  为

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(2s^2 + 1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = 2$$

**例3-23** 已知  $x(t)$  的拉氏变换为

$$X(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 15s + 11}{s^2 + 5s + 6}$$

求  $x(t)$  的初始值  $x(0_+)$ 。

解: 由于  $X(s)$  分子多项式的阶次高于分母,  $x(t)$  含有冲激及其冲激偶。利用长除运算,  $X(s)$  可表示为

$$X(s) = s + 1 + \frac{4s + 5}{s^2 + 5s + 6}$$

则

$$x(t) = \delta'(t) + \delta(t) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4s+5}{s^2+5s+6} \right]$$

$x(t)$  的初始值  $x(0_+)$  为

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{4s+5}{s^2+5s+6} \right] = 4$$

### 终值定理

若  $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ ,  $X(s)$  在右半  $s$  平面没有极点, 在虚轴上没有多重极点, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3-32)$$

证明: 由时域微分性质可知

$$\int_{0_-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0_-)$$

取  $s$  趋于零的极限, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0_-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0_-)$$

$$x(\infty) - x(0_-) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0_-)$$

故有式(3-32)结论。

**例3-24** 已知  $x(t)$  的拉氏变换  $X(s) = \frac{1}{s+a}$ , (1) 当  $a=2$  时, (2) 当  $a=-2$  时, 分别求出  $x(t)$  的终值  $x(\infty)$ 。

解: (1) 当  $a=2$  时,  $X(s)$  的极点位于左半  $s$  平面, 根据终值定理有

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+2} = 0$$

(2) 当  $a=-2$  时,  $X(s)$  所对应的时域函数  $x(t) = e^{2t}\varepsilon(t)$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 其终值  $x(\infty)$  不存在, 也就不能利用式(3-32)计算  $x(\infty)$  的值, 所以应用终值定理是有条件的。

在利用终值定理时, 是以  $x(t)$  的终值存在作为前提的。如果  $x(t)$  随时间  $t$  推移是增长的或等幅振荡,  $x(t)$  的终值就不存在。

### 卷积

**时域卷积性质:** 若  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ,  $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ , 则

$$\mathcal{L}[h(t) * x(t)] = H(s)X(s) \quad (3-33)$$

证明: 由第2章有关内容已知,  $x(t)$  与无始无终复指数信号  $e^{st}$  的卷积为

$$x(t) * e^{st} = X(s)e^{st} \quad (3-34)$$

则

$$\begin{aligned} h(t) * x(t) * e^{st} &= h(t) * X(s)e^{st} \\ &= X(s)[h(t) * e^{st}] \\ &= X(s)H(s)e^{st} \end{aligned}$$

故有式(3-33)结论。

时域卷积性质给出了求解系统（零状态）响应  $y(t)$  的变换域方法：（1）由已知的输入  $x(t)$  和冲激响应  $h(t)$  求出它们的拉氏变换  $X(s)$  和  $H(s)$ ；（2）由卷积性质， $s$  域输出  $Y(s)$  为  $Y(s) = H(s)X(s)$ ；（3）对  $Y(s)$  取逆拉氏变换，得  $y(t)$ ，如图 3-5 所示。与时域方法比较，拉氏变换使系统分析问题变得较为简单，它把时域卷积计算转变为  $s$  域的代数运算。

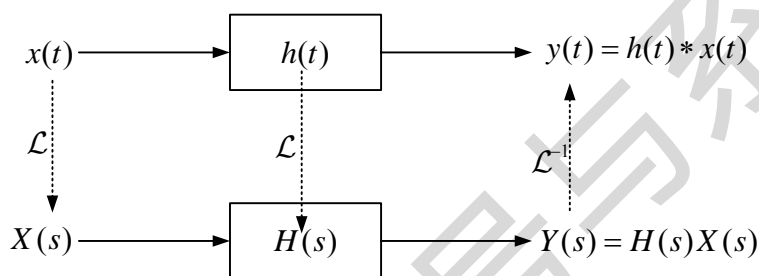


图3-5 拉氏变换在系统分析中的应用

**s 域卷积性质：**若  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ ， $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ ，则

$$\mathcal{L}[h(t) \cdot x(t)] = \frac{1}{2\pi j} [H(s) * X(s)] \quad (3-35)$$

此性质不常用，证明从略。

**例3-25** 利用时域卷积性质求  $y(t) = e^{-at}\varepsilon(t) * e^{-bt}\varepsilon(t)$ 。

解：由于

$$\mathcal{L}[e^{-at}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[e^{-bt}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+b}$$

则

$$Y(s) = \frac{1}{s+a} \times \frac{1}{s+b} = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right]$$

取其逆变换，得

$$y(t) = \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})\varepsilon(t)$$

单边拉普拉斯变换的性质总结于中。

表3-2 单边拉普拉斯变换的性质

时域	单边拉普拉斯变换
$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 \mathcal{L}[x_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[x_2(t)]$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0_-)$
$\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	$s^2 X(s) - sx(0_-) - \frac{dx(t)}{dt} \Big _{t=0_-}$
$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{x(0_-)}{s}$
$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} X(s) ds$
$x(t-\tau)\varepsilon(t-\tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau} X(s)$
$x(t)e^{-at}$	$X(s+a)$
$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} [X_1(s) * X_2(s)]$

### 3.4 微分方程求解

线性微分方程若用单边拉氏变换法求解，不需要专门求解初始值，一次可以求得全响应，通常要比时域经典法方便。

**例3-26** 已知系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x'(t)$$

应用拉氏变换法求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

解：—  $h(t)$  满足的方程为

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta'(t)$$

对方程两端取拉氏变换，由于  $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$ ， $\mathcal{L}[h'(t)] = sH(s)$ ， $\mathcal{L}[h''(t)] = s^2 H(s)$ ， $\mathcal{L}[\delta'(t)] = s$ ，则

$$(s^2 + 5s + 6)H(s) = s$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s}{(s+2)(s+3)} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

取逆变换，冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = (2e^{-2t} - 3e^{-3t})\varepsilon(t)$$

若系统的初始状态不为零，在运用拉氏变换的微分性质时，还要计入初始状态。

以二阶系统为例，设微分方程为

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \quad (3-36)$$

输入  $x(t)$  起始于  $t=0$ ，为因果信号，系统的初始状态  $y(0_-)$  与  $y'(0_-)$  已知。对式(3-36)两端取单边拉氏变换，有

$$[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-)] + a_1 [sY(s) - y(0_-)] + a_0 Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)X(s)$$

上式可表示为

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$$

其中：

$$A(s) = s^2 + a_1 s + a_0$$

$$B(s) = b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

$$C(s) = sy(0_-) + y'(0_-) + a_1 y(0_-)$$

则

$$Y(s) = \frac{B(s)X(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)}$$

令

$$Y_x(s) = \frac{B(s)X(s)}{A(s)}, \quad Y_0(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$$

$Y_x(s)$  只与输入有关，是系统零状态响应分量  $y_x(t)$  的拉氏变换； $Y_0(s)$  只与初始状态有关，是系统零输入响应分量  $y_0(t)$  的拉氏变换。

**例3-27** 已知系统的微分方程为

$$y''(t) + 2.5y'(t) + y(t) = x(t)$$

输入  $x(t) = \varepsilon(t)$ ，初始状态  $y(0_-) = 0$ ， $y'(0_-) = 1$ ，求  $y(t)$ 。

解：对微分方程两边取拉氏变换，有

$$s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + 2.5[sY(s) - y(0_-)] + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s) + sy(0_-) + y'(0_-) + 2.5y(0_-)}{s^2 + 2.5s + 1} \quad (3-37)$$

根据已知输入， $X(s) = 1/s$ ，则

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + 1}{s^2 + 2.5s + 1} = \frac{s + 1}{s(s + 0.5)(s + 2)}$$

对  $Y(s)$  进行部分分式展开，有

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{2}{3}}{s + 0.5} + \frac{-\frac{1}{3}}{s + 2}$$

取逆变换得

$$y(t) = 1 - \frac{2}{3}e^{-0.5t} - \frac{1}{3}e^{-2t} \quad (t > 0)$$

如果本例要求单独给出零状态响应和零输入响应，由式(3-37)，有

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2.5s + 1} + \frac{sy(0_-) + y'(0_-) + 2.5y(0_-)}{s^2 + 2.5s + 1}$$

$$Y_x(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2.5s + 1} = \frac{1}{s(s+0.5)(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{4}{3}}{s+0.5} + \frac{\frac{1}{3}}{s+2}$$

$$Y_0(s) = \frac{sy(0_-) + y'(0_-) + 2.5y(0_-)}{s^2 + 2.5s + 1} = \frac{1}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+0.5} + \frac{-\frac{2}{3}}{s+2}$$

故零状态响应  $y_x(t)$  和零输入响应  $y_0(t)$  分别为

$$y_x(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-0.5t} + \frac{1}{3}e^{-2t} \quad (t > 0)$$

$$y_0(t) = \frac{2}{3}e^{-0.5t} - \frac{2}{3}e^{-2t} \quad (t > 0)$$

### 3.5 拉普拉斯变换法电路分析

电路时域分析的一种过程为：（1）编写时域电路方程；（2）推导输入输出微分方程；（3）求出输出量和其他一些量的初始值；（4）求解微分方程。时域分析的每一过程都因为涉及微积分运算而比较繁琐，要得到高阶电路的解析解较为困难。

本节介绍使用拉氏变换法的线性电路分析，称为电路的复频域分析或  $s$  域分析。借用相量法正弦电流电路分析的过程，拉氏变换法电路分析的过程为：（1）根据时域电路绘出其  $s$  域电路模型；（2）在  $s$  域，利用方程法、等效变换法、叠加法等求出输出电压或电流的  $s$  域函数；（3）对  $s$  域函数取逆变换，为输出电压或电流的时域解。

#### $s$ 域电路模型

电压  $u(t)$  和电流  $i(t)$  的拉氏变换用大写形式  $U(s)$  和  $I(s)$  表示，为叙述简单起见，以下有时也直接称  $U(s)$  为电压， $I(s)$  为电流。

#### 1. $s$ 域基尔霍夫定律

设某一结点处的 KCL 为

$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0$$

对该式取拉氏变换，利用线性性质，得

$$I_1(s) + I_2(s) - I_3(s) = 0$$

即对收敛域中的所有  $s$ ， $s$  域电流的代数和为零，该结论可推广到一般情况。

$s$  域 KCL：在  $s$  域，任一结点处所有支路电流的代数和为零。用公式表示为

$$\sum I(s) = 0$$

$s$  域 KVL：在  $s$  域，任一回路中所有支路电压的代数和为零。用公式表示为

$$\sum U(s) = 0$$

## 2. 电路元件的 $s$ 域模型

独立电源的  $s$  域模型如图 3-6 所示。电压源  $u_s(t)$  在  $s$  域的电压为  $U_s(s) = \mathcal{L}[u_s(t)]$ ，电流为待定量。电流源  $i_s(t)$  在  $s$  域的电流为  $I_s(s) = \mathcal{L}[i_s(t)]$ ，电压为待定量。

在正关联参考方向下，电阻、电感和电容元件的时域电压电流关系式分别为

$$\text{电阻: } u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$\text{电感: } u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\text{电容: } u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_L(\tau) d\tau + u_C(0_-)$$

对以上各式进行拉氏变换，得

$$\text{电阻: } U_R(s) = RI_R(s)$$

$$\text{电感: } U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$

$$\text{电容: } U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(0_-)}{s}$$

正如所期望的那样，这些元件的  $s$  域关系式为代数方程，其  $s$  域电路模型如图 3-7 所示。其中，电感初始电流  $i_L(0_-)$ 、电容初始电压  $u_C(0_-)$  对电路的作用在  $s$  域分别用附加电压源  $Li_L(0_-)$  和  $u_C(0_-)/s$  表示，极性如图中所示。注意：电感和电容上的  $s$  域电压应包括附加电压源的电压。

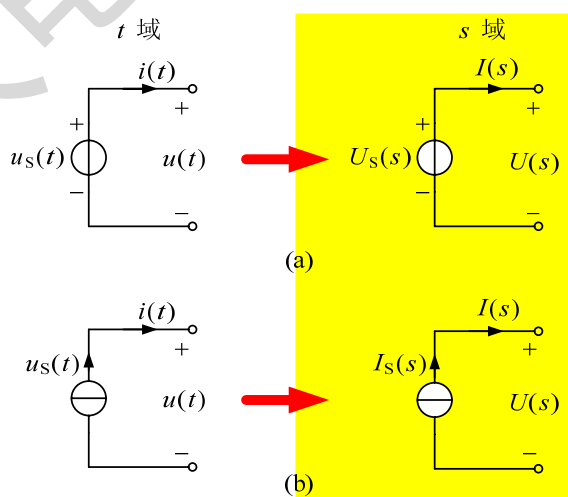
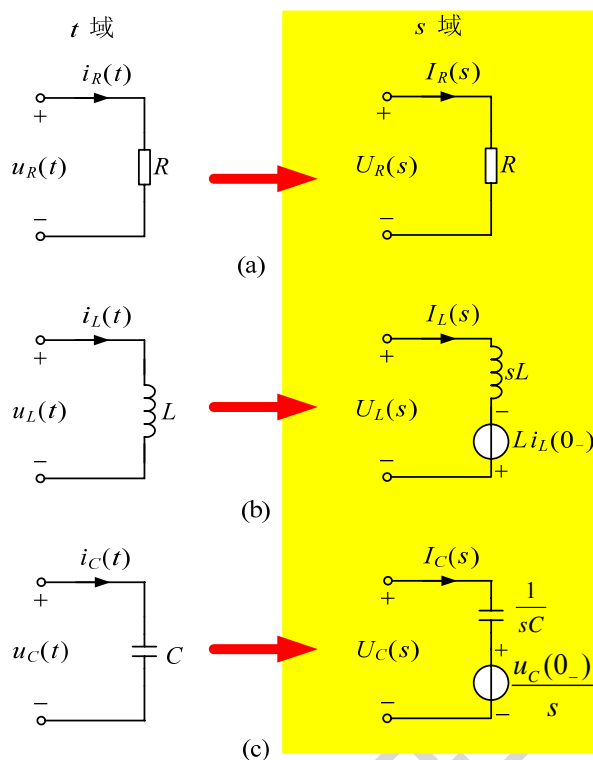


图3-6 独立电源的  $s$  域模型



图3-7 无源元件的  $s$  域模型（用附加电压源）

电阻、电感和电容元件的  $s$  域电压电流关系式也可表示为

$$\text{电阻: } I_R(s) = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$\text{电感: } I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(0_-)}{s}$$

$$\text{电容: } I_C(s) = sC U_C(s) - C u_C(0_-)$$

电感和电容元件的  $s$  域模型如图 3-8 所示。注意：元件的电流还应包括附加电流源的电流。

在零初始状态下，电阻、电感和电容元件的  $s$  域关系式为

$$\text{电阻: } U_R(s) = R I_R(s)$$

$$\text{电感: } U_L(s) = sL I_L(s)$$

$$\text{电容: } U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

以上各式均可表示为  $U(s) = Z(s)I(s)$  或  $I(s) = Y(s)U(s)$  的形式，比例因子  $Z(s)$  和  $Y(s)$  分别称为  $s$  域阻抗和导纳， $Y(s) = 1/Z(s)$ 。则

$$\text{电阻: } Z_R(s) = R, \quad Y_R(s) = \frac{1}{R}$$

$$\text{电感: } Z_L(s) = sL, \quad Y_L(s) = \frac{1}{sL}$$

$$\text{电容: } Z_C(s) = \frac{1}{sC}, \quad Y_C(s) = sC$$

$s$  域阻抗是电阻概念在  $s$  域的推广，电感和电容的阻抗不仅与元件参数有关，还与复频率  $s$  有关。

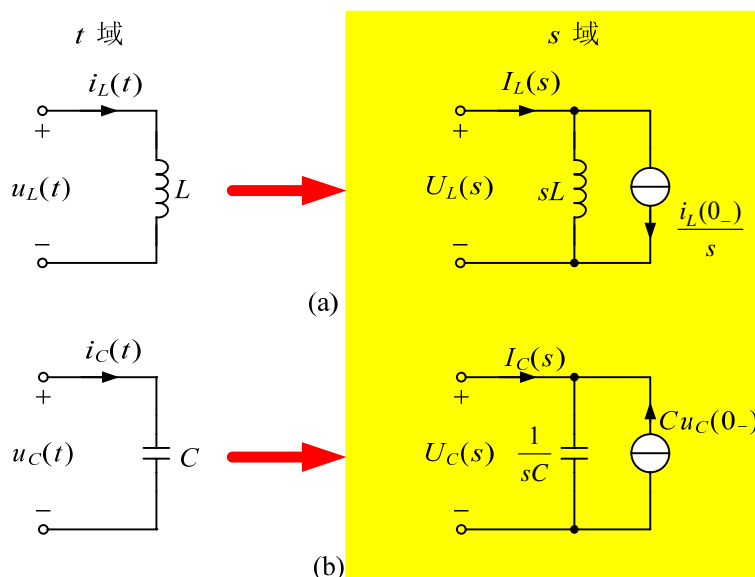


图3-8 无源元件的  $s$  域模型（用附加电流源）

图 3-9（a）所示耦合电感的时域关系式为

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned}$$

取拉氏变换有

$$\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - [L_1 i_1(0_-) + Mi_2(0_-)] \\ U_2(s) &= sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) - [L_2 i_2(0_-) + Mi_1(0_-)] \end{aligned}$$

耦合电感的  $s$  域模型如图 3-9（b）所示。其中

$$\begin{aligned} E_1(s) &= L_1 i_1(0_-) + Mi_2(0_-) \\ E_2(s) &= L_2 i_2(0_-) + Mi_1(0_-) \end{aligned}$$

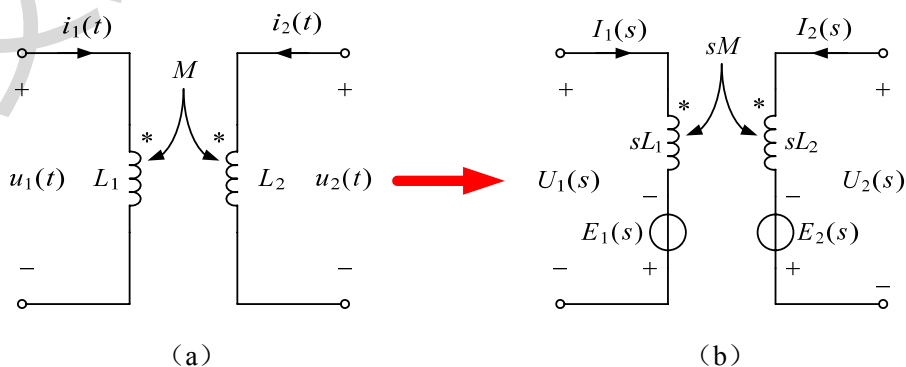


图3-9 耦合电感的  $s$  域模型

在电路的动态过程分析中，开关的动作导致电路拓扑结构的变化。设开关是理想

的, 在  $t=0$  时刻动作。由于单边拉氏变换的积分下限取为  $0_-$ , 对  $t=0$  时刻闭合的开关,  $t \geq 0_+$  时开关两端的电压为零, 故开关两端电压的拉氏变换为

$$U(s) = \int_{0_-}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} u(t)e^{-st} dt$$

由于开关闭合瞬间开关两端的电压从  $u(0_-)$  突变至零, 只为有限值, 则有

$$U(s) = 0$$

因此, 对  $t=0$  时刻闭合的理想开关, 其  $s$  域模型相当于短路。

类似地, 对  $t=0$  时刻断开的理想开关, 其  $s$  域模型相当于开路。

### $s$ 域电路分析

拉氏变换法与相量法在处理线性电路时, 其基本思想相似。相量法把电路稳态时的正弦量变换为相量, 而拉氏变换法把以时间为变量的电压和电流变换为以复频率  $s$  为变量的电压和电流,  $s$  域电路方程为线性代数方程。

结点法、回路法、戴维宁定理、叠加定理等也适用于  $s$  域。阻抗串联时, 其等效阻抗为各阻抗的和。类似地, 阻抗并联时, 其等效导纳为各导纳的和。

$s$  域电路分析的步骤如下:

- (1) 绘出  $s$  域电路模型;
- (2) 在  $s$  域列出电路方程, 并求解  $s$  域输出量;
- (3) 求出  $s$  域输出量的逆拉氏变换, 给出时域表达式。

**例3-28** 图 3-10 (a) 所示  $RLC$  串联电路, 已知  $R=5\Omega$ ,  $L=1\text{H}$ ,  $C=1/6\text{F}$ ,  $u(0_-)=1\text{V}$ ,  $u_s(t)=2\text{V}$ 。利用拉氏变换分析开关闭合后的电容电压  $u(t)$ 。

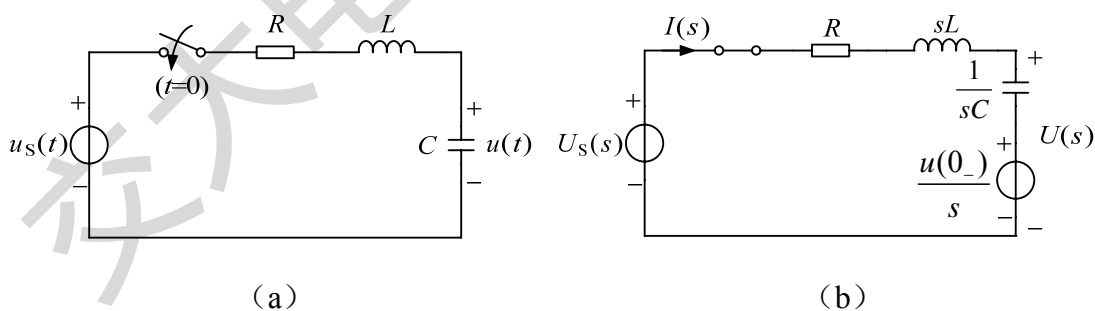


图3-10  $RLC$  串联电路

解: 电路的  $s$  域模型如图 3-10 (b) 所示, 其中电感的初始电流为零, 故不含附加电源, 电容的初始电压用附加电压源表示。对回路应用KVL, 有

$$\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)I(s) = U_s(s) - \frac{u(0_-)}{s}$$

式中,  $R + sL + \frac{1}{sC}$  为  $R$ 、 $L$ 、 $C$  串联的等效阻抗  $Z(s)$ 。电容电压  $U(s)$  则为

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0_-)}{s} = \frac{\frac{1}{sC} \left( U_s(s) - \frac{u(0_-)}{s} \right)}{R + sL + \frac{1}{sC}} + \frac{u(0_-)}{s}$$

给上式等号右端第一项的分子和分母同乘以  $\frac{s}{L}$ , 有

$$U(s) = \frac{\frac{1}{LC} \left( U_s(s) - \frac{u(0_-)}{s} \right)}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} + \frac{u(0_-)}{s}$$

代入已知数据, 且  $U_s(s) = \mathcal{L}[2] = \frac{2}{s}$ , 有

$$U(s) = \frac{6}{s(s^2 + 5s + 6)} + \frac{1}{s}$$

上式可展开为

$$U(s) = \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

则电容电压  $u(t)$  为

$$u(t) = 2 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

**例3-29** 电路如图 3-11 所示, 已知  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $L = 0.1\text{H}$ ,  $C = 0.5\text{F}$ 。

- (1) 若  $u_s(t) = e^{-5t}\varepsilon(t)\text{V}$ , 求电压  $u_c(t)$ ;
- (2) 若  $u_s(t) = 6\varepsilon(-t) + e^{-5t}\varepsilon(t)\text{V}$ , 绘出  $s$  域电路模型。

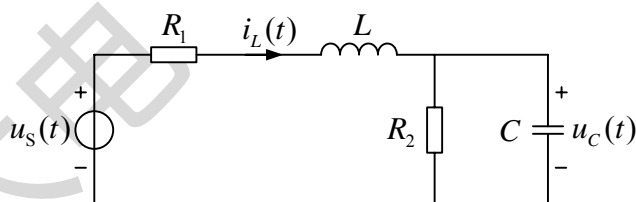


图3-11 例 3-29 电路

**解:** (1) 电路的  $s$  域模型如图 3-12 (a) 所示, 由于电感元件的初始电流和电容元件的初始电压均为零, 故  $s$  域模型中不含附加电源。

运用结点法, 有

$$\left( \frac{1}{R_1 + sL} + \frac{1}{R_2} + sC \right) U_c(s) = \frac{1}{R_1 + sL} U_s(s)$$

所以

$$U_c(s) = \frac{1}{1 + (R_1 + sL) \left( \frac{1}{R_2} + sC \right)} U_s(s) = \frac{1}{LCs^2 + (R_1C + \frac{L}{R_2})s + \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)} U_s(s)$$

代入已知数据, 且  $U_s(s) = \frac{1}{s+5}$ , 有

$$\begin{aligned} U_c(s) &= \frac{1}{0.05s^2 + (0.5 + 0.05)s + (1 + 0.5)} \cdot \frac{1}{s+5} \\ &= \frac{20}{s^2 + 11s + 30} \cdot \frac{1}{s+5} \\ &= \frac{20}{(s+5)^2(s+6)} = \frac{r_1}{(s+5)^2} + \frac{r_2}{s+5} + \frac{r_3}{s+6} \end{aligned}$$

求得  $r_1 = 20$ ,  $r_2 = -20$ ,  $r_3 = 20$ , 故

$$u_c(t) = 20[(t-1)e^{-5t} + e^{-6t}] \varepsilon(t) \quad \text{V}$$

(2) 在  $t < 0$  时电源电压  $u_s(t) = 6 \text{ V}$ , 则

$$i_L(t) = \frac{u_s(t)}{R_1 + R_2} = \frac{6}{1+2} = 2 \text{ A} \quad (t < 0)$$

$$u_c(t) = R_2 i_L(t) = 4 \text{ V} \quad (t < 0)$$

$s$  域电路模型如图 3-12 (b) 所示。

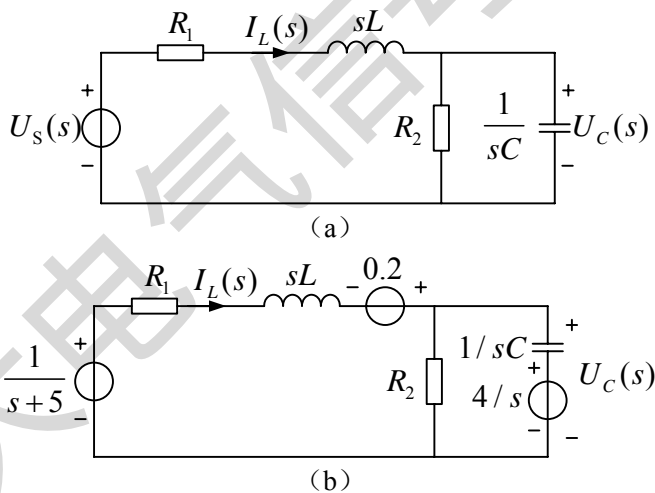


图3-12  $s$  域电路模型

**例3-30**  $RC$  串联电路如图 3-13 所示。(1) 求电流  $i(t)$  的冲激响应; (2) 求在图示三角脉冲输入作用下的电流  $i(t)$ 。

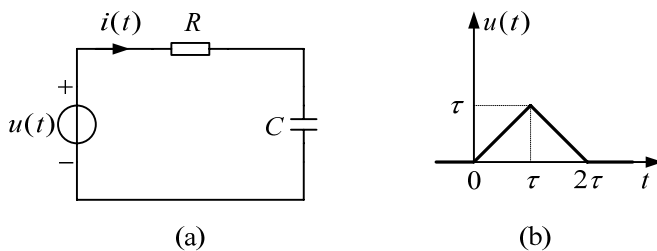


图3-13  $RC$  串联电路及三角脉冲输入

解：（1）根据冲激响应的定义，电路的初始状态为零，因而  $s$  域电路模型（图略）中不含附加电源。电流  $I(s)$  为

$$I(s) = \frac{U(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s \frac{1}{R}}{s + \frac{1}{RC}} U(s) \quad (3-38)$$

对冲激输入， $U(s)=1$ ，故

$$I(s) = \frac{s \frac{1}{R}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{R} - \frac{\frac{1}{R^2 C}}{s + \frac{1}{RC}}$$

于是，电流  $i(t)$  的冲激响应  $h(t)$  为

$$h(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \text{ A}$$

用拉氏变换法求解冲激响应要比时域方法简单。

（2）利用微分性质求输入  $u(t)$  的拉氏变换。对  $u(t)$  求导，波形如图 3-14 所示。则

$$u''(t) = \delta(t) - 2\delta(t - \tau) + \delta(t - 2\tau)$$

由拉氏变换微分性质，有

$$s^2 U(s) = 1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau}$$

则

$$U(s) = \frac{1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau}}{s^2} \quad (3-39)$$

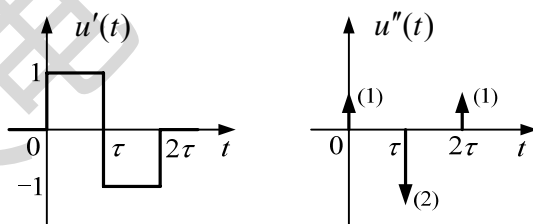


图3-14  $u(t)$  的导数

把式(3-39)代入式(3-38)，有

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{s \frac{1}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \frac{1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau}}{s^2} = \frac{\frac{1}{R}}{s \left( s + \frac{1}{RC} \right)} (1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau}) \\ &= C \left( \frac{1}{s} + \frac{-1}{s + \frac{1}{RC}} \right) (1 - 2e^{-s\tau} + e^{-2s\tau}) \end{aligned}$$

对上式取逆变换，利用时域移位性质得

$$i(t) = C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) - 2C(1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}})\varepsilon(t-\tau) + C(1 - e^{-\frac{t-2\tau}{RC}})\varepsilon(t-2\tau)$$

**例3-31** 电路如图 3-15 (a) 所示,  $L_1 = L_2 = 0.5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $E = 3 \text{ V}$ , 电路原来已处于稳态,  $t = 0$  时开关断开, 求  $i_1(t)$  和  $u_1(t)$ 。

解: 在开关动作前, 电路处于稳态, 故有

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1} = 3 \text{ A}, \quad i_2(0_-) = 0$$

$s$  域电路如图 3-15 (b) 所示。对回路应用 KVL, 有

$$(R_1 + R_2 + sL_1 + sL_2)I_1(s) = L_1 i_1(0_-) + \frac{E}{s}$$

代入数值, 得

$$I_1(s) = \frac{0.5 \times 3 + \frac{3}{s}}{1 + 2 + 0.5s + 0.5s} = \frac{1.5s + 3}{s(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{0.5}{s+3}$$

而

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) = 0.5s \times \frac{1.5s + 3}{s(s+3)} - 1.5 = -0.75 - \frac{0.75}{s+3}$$

所以有

$$i_1(t) = 1 + 0.5e^{-3t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

$$u_1(t) = -0.75\delta(t) - 0.75e^{-3t} \text{ V} \quad (t > 0_-)$$

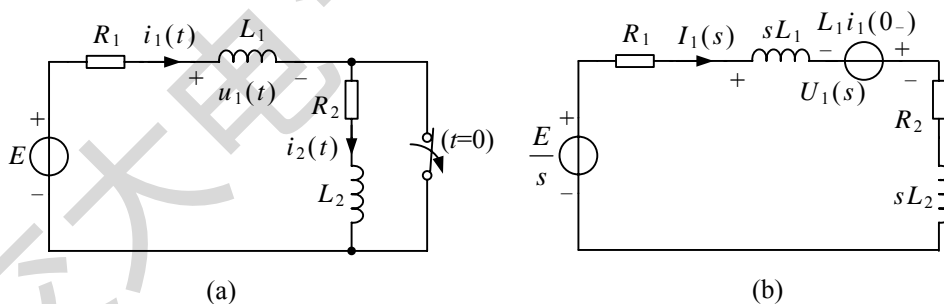


图3-15 含有冲激电压的电路

本例中, 尽管输入不含冲激, 但在开关动作瞬间电感电压为冲激函数, 在开关断开后,  $L_1$  和  $L_2$  中的电流被强制相等,  $i_1(0_+) = 1.5 \text{ A}$ , 在  $t = 0$  时刻电感电流发生了突变。

**例3-32** 图 3-16所示  $s$  域电路模型含有一个VCCS, 其跨导  $g = 2 \text{ S}$ , 试求结点 2 的电压  $u_2(t)$ 。

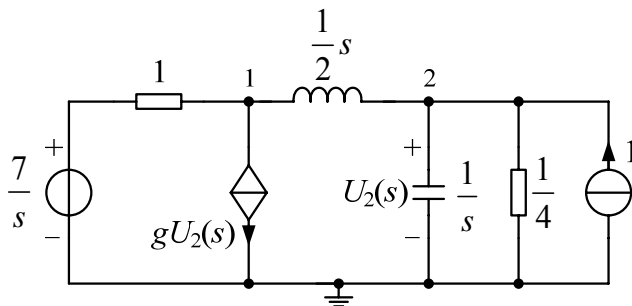


图3-16 含有受控源的电路

解： 电路的结点电压方程为

$$\text{结点 1:} \quad \left(1 + \frac{2}{s}\right)U_1(s) - \frac{2}{s}U_2(s) + 2U_2(s) = \frac{7}{s}$$

$$\text{结点 2:} \quad -\frac{2}{s}U_1(s) + \left(s + 4 + \frac{2}{s}\right)U_2(s) = 1$$

求得

$$U_2(s) = \frac{s^2 + 2s + 14}{s(s^2 + 6s + 14)}$$

将  $U_2(s)$  用部分分式展开，设为

$$U_2(s) = \frac{r_1}{s} + X(s) \quad (3-40)$$

其中

$$r_1 = sU_2(s)|_{s=0} = \frac{s^2 + 2s + 14}{(s^2 + 6s + 14)} \Big|_{s=0} = 1$$

由式(3-40)，有

$$\begin{aligned} X(s) &= U_2(s) - \frac{r_1}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2s + 14}{s(s^2 + 6s + 14)} - \frac{1}{s} \\ &= \frac{-4}{(s+3)^2 + 5} \end{aligned}$$

则

$$U_2(s) = \frac{1}{s} + \frac{-4}{(s+3)^2 + 5} = \frac{1}{s} - \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{(s+3)^2 + (\sqrt{5})^2}$$

对上式取逆拉氏变换得

$$u_2(t) = \left[ 1 - \frac{4}{\sqrt{5}} e^{-3t} \sin(\sqrt{5}t) \right] \varepsilon(t) \quad \text{V}$$

对较为复杂的电路，通常要列方程求解。由于  $s$  域电路分析涉及符号运算，对高阶电路，手工计算比较繁琐，这时，可借助符号公式推导程序进行分析。



### 3.6 系统函数

系统冲激响应  $h(t)$  的拉氏变换称为系统函数或传递函数，常用  $H(s)$  表示。以下只讨论因果系统， $H(s)$  定义为

$$H(s) = \int_{0-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (3-41)$$

在零状态限定条件下，根据卷积定理， $H(s)$  也为输出  $y(t)$  的拉氏变换  $Y(s)$  与输入  $x(t)$  的拉氏变换  $X(s)$  之比，即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3-42)$$

对下式所示的积分器

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

其冲激响应

$$h(t) = \varepsilon(t)$$

则其系统函数  $H(s)$  为

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

系统函数在系统分析中扮演着非常重要的角色。以二阶微分方程为例

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

两端取拉氏变换，运用微分性质，在零状态条件下，有

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)X(s)$$

则系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

由以上过程，LTI 连续时间系统可用以下三种方式描述：

- (1) 系统微分方程；
- (2) 系统冲激响应；
- (3) 系统函数。

在这三种描述中，一般来说，根据任一种形式可推导出另外两种形式。例如，若已知系统是二阶的，系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s+11}{s^2+5s+6}$$

对  $H(s)$  做部分分式展开，有

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{s+3}$$

则系统的冲激响应为

$$h(t) = (e^{-2t} + 4e^{-3t})\varepsilon(t)$$

根据给定的传递函数，输出与输入间具有以下关系

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (5s + 11)X(s)$$

利用拉氏变换的微分性质，则有以下微分方程

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 5x'(t) + 11x(t)$$

当系统用传递函数描述时，其框图表示如图 3-17 所示，方框中给出其系统函数。

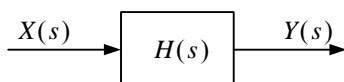


图3-17 系统的传递函数描述

在电路理论中也把系统函数称为网络函数，共有 4 种形式：

$$\text{电压比电压: } H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$$

$$\text{电流比电流: } H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$$

$$\text{电压比电流: } H(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)}$$

$$\text{电流比电压: } H(s) = \frac{I_o(s)}{U_i(s)}$$

以上 4 式中，下角标 o 和 i 分别表示输出和输入。对不含独立电源的单口网络，电路的输入阻抗或导纳常称为驱动点函数。

根据  $s$  域电路模型求解网络函数时，注意网络函数是在零状态下定义的，无论电路的初始状态是否为零，求解网络函数时要按零初始状态对待，即在  $s$  域电路模型中不应包含附加电源。网络函数与电路的拓扑结构和元件的参数值有关，而与输入信号的大小无关。

**例3-33** 设图 3-18 所示电路中运算放大器是理想的，求传递函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

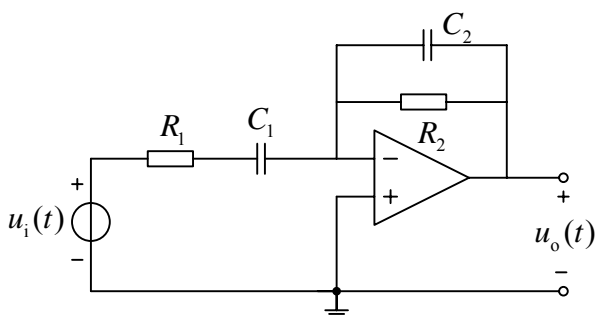


图3-18 含有理想运算放大器的电路

解：该电路与反比例运算电路的结构类似， $R_1$ 、 $C_1$  串联的等效阻抗为

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{sC_1}$$

$R_2$ 、 $C_2$  并联的等效阻抗为

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2}}$$

则传递函数

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{1}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} \times \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \\ &= -\frac{sR_2C_1}{(sR_1C_1 + 1)(sR_2C_2 + 1)} \end{aligned}$$

**例3-34** 电路如图 3-19 所示，求输入阻抗  $Z_i(s) = I_1(s)/U_1(s)$  和传递函数  $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ 。

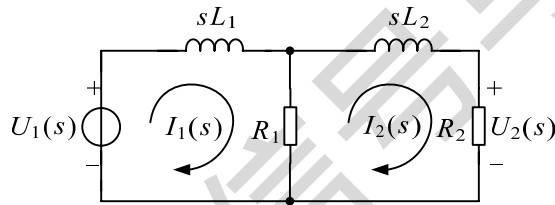


图3-19 网络函数求解示例

解：应用回路法，有

$$\text{回路 1: } (sL_1 + R_1)I_1(s) - R_1I_2(s) = U_1(s)$$

$$\text{回路 2: } -R_1I_1(s) + (sL_2 + R_1 + R_2)I_2(s) = 0$$

解得回路电流

$$I_1(s) = \frac{sL_2 + R_1 + R_2}{s^2L_1L_2 + s[L_1(R_1 + R_2) + L_2R_1] + R_1R_2} U_1(s)$$

$$I_2(s) = \frac{R_1}{s^2L_1L_2 + s[L_1(R_1 + R_2) + L_2R_1] + R_1R_2} U_1(s)$$

则输入阻抗  $Z_i(s)$  和电压传递函数  $H(s)$  分别为

$$Z_{in}(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} = \frac{sL_2 + R_1 + R_2}{s^2L_1L_2 + s[L_1(R_1 + R_2) + L_2R_1] + R_1R_2}$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2I_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_1R_2}{s^2L_1L_2 + s[L_1(R_1 + R_2) + L_2R_1] + R_1R_2}$$

### 3.7 系统的稳定性

#### 系统稳定的条件

一个实际系统，如果在任何微小输入扰动的作用下，只在系统响应中产生微小的扰动，就称系统是稳定的。研究系统的稳定性在系统设计中具有重要意义，如果一个线性系统是不稳定的，它就不能起到信号处理的作用。

对线性系统，在任一有界输入作用下，若系统的响应总是有界的，就称系统是**稳定的**，或 **BIBO**（有界输入有界输出）**稳定**。若系统对某一有界输入的响应不是有界的，称系统是不稳定的。

根据该定义，若输入信号对所有时间  $t$  都有界，设  $|x(t)| \leq M$ ，当输出也有界时则系统是稳定的。由卷积公式，有

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |h(t) * x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau \\ &= M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \end{aligned}$$

因此，当

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \quad (3-43)$$

成立时，即当系统的冲激响应满足上式给出的**绝对可积条件**时，输出  $y(t)$  必是有界的，系统稳定。进一步还可以证明，式(3-43)是系统稳定的充分必要条件。

**例3-35** 判断以下两个系统的 BIBO 稳定性。

(1)  $h(t) = e^{-3t}\varepsilon(t)$

(2)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

解：(1) 根据式(3-43)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_0^{\infty} e^{-3t}dt = \frac{1}{3} < \infty$$

故该系统是 BIBO 稳定的。

(2) 该系统的输出是输入的积分，系统的冲激响应

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \varepsilon(t)$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_0^{\infty} dt = t \Big|_0^{\infty}$$

由于它是无界的，故该系统是不稳定的。例如，当输入  $x(t) = \varepsilon(t)$  时，有  $y(t) = t\varepsilon(t)$ ，输出则是无界的。此例说明，对单独一个理想积分器，系统是不稳定的，但这并不表示一个使用积分器的系统一定是不稳定的，相反，积分器在系统设计中非常广泛。

由于  $h(t)$  的拉氏变换为系统函数  $H(s)$ ，因而系统的稳定性也可用传递函数  $H(s)$  判断。传递函数  $H(s)$  的极点也为微分方程的特征根，当它们全不相等时，对应于极点  $p$  的冲激响应项为  $re^{pt}$ （设系统是因果的），其中  $r$  为  $H(s)$  在极点  $p$  处的留数， $p$  在复平面上的分布及相应响应项波形如图 3-20 所示。若  $\text{Re}[p] < 0$ ，响应项波形的总趋势随时间推移衰减；若  $\text{Re}[p] > 0$ ，响应项波形的总趋势随时间推移增长，系统不稳定；若  $p$  位于虚轴上，响应项波形有界。虚轴上的特征根情况比较特殊，尽管其响应项有界，考虑到实际稳定系统一般不希望这种情况出现，况且这种系统的冲激响应不满足绝对可积条件，本书把它归类为不稳定系统。对仅由无源电感和无源电容两种元件构成的电路，系统函数的极点全部位于虚轴上（证明从略），且为单极点，考虑到实际器件总有一定损耗，因而，实际中这种电路的极点还是位于左半复平面，故对这种情况也可认为是稳定的。

当  $p$  为重根时，设为二重实根，零输入响应中包含  $te^{pt}$  项，当  $p < 0$  时  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{pt} = 0$ ，当  $p \geq 0$  时  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{pt} = \infty$ 。可见，在重根情况下，仍然是  $\text{Re}[p] < 0$  时响应项在  $t \rightarrow \infty$  时为零。

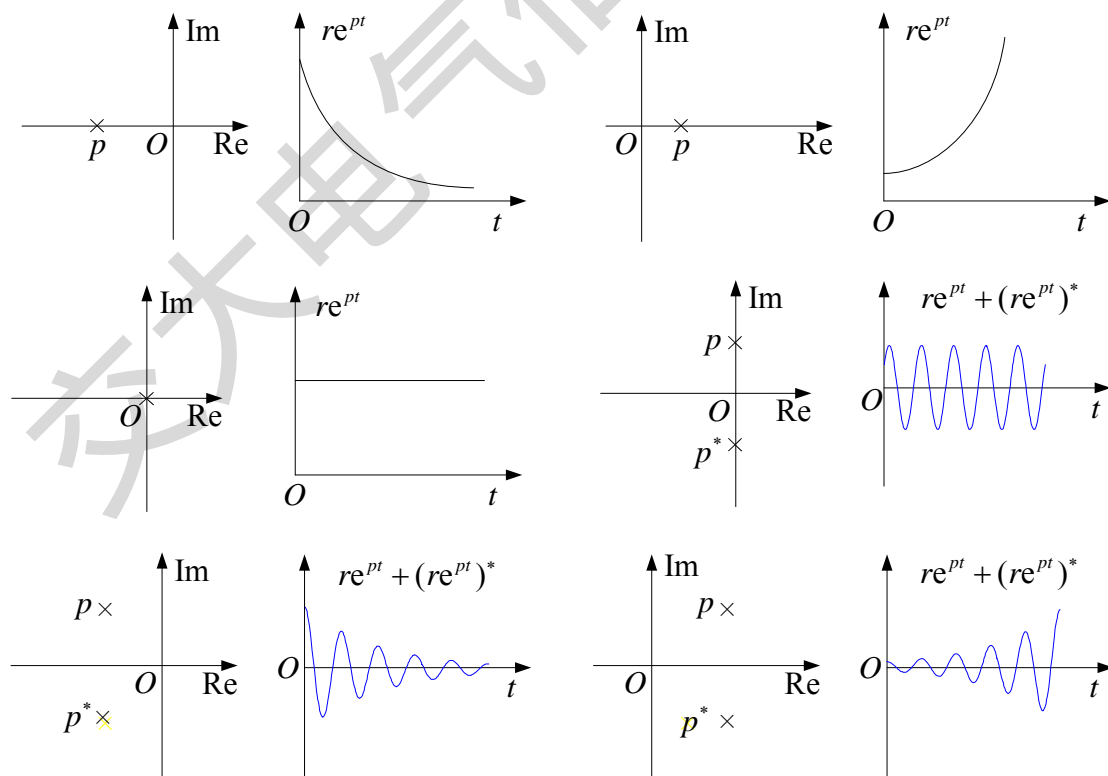


图3-20 极点的响应项

综上所述,对因果系统,若全部极点位于左半复平面(见图 3-21),系统是稳定的,若有极点位于右半复平面或虚轴上,系统是不稳定的。也可以推论出:无论系统是否因果,只有当传递函数  $H(s)$  的收敛域覆盖虚轴时,系统稳定。

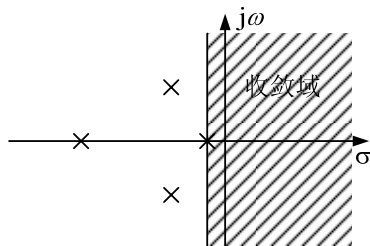


图3-21 因果稳定系统的极点分布

有时候,  $H(s)$  也可能出现某一极零点相消情况,这时,  $H(s)$  的极点就没有包括微分方程的所有特征根(或固有频率),用  $h(t)$  或  $H(s)$  不能完全判断系统的稳定性。解决的方法是,选用系统内部其他信号作为输出量,求解其传递函数,若它能够反映系统的所有固有频率,用它可判断系统的稳定性。

用  $H(s)$  判断系统的稳定性,在不求出极点的情况下有时也能够确定系统是否稳定。对二阶系统,设  $H(s)$  的分母多项式  $A(s)$  为

$$A(s) = s^2 + a_1s + a_0$$

容易得出,系统稳定的充分必要条件是各  $s$  项的系数均大于零。

对高阶系统,若  $H(s)$  的分母多项式  $A(s)$  某些  $s$  项缺失或有负系数存在,可以证明系统是不稳定的。

**例3-36** 图 3-22 为一有源 RC 滤波电路,输出为电压  $u_4(t)$ , 分析电路稳定时电压放大器增益  $K$  的取值范围。

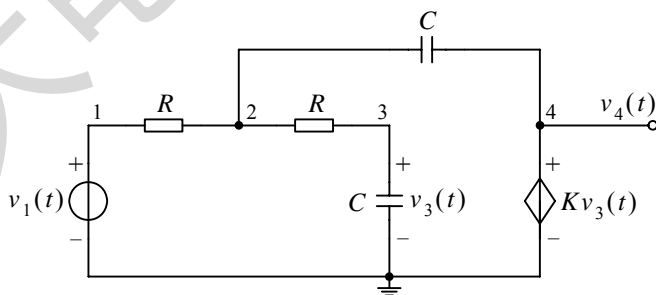


图3-22 有源 RC 滤波器

解: 首先求解传递函数, 电路的结点电压方程为

$$\text{结点 2: } \left(sC + \frac{2}{R}\right)U_2(s) - \frac{1}{R}U_3(s) - sCU_4(s) = \frac{1}{R}U_1(s)$$

$$\text{结点 3: } -\frac{1}{R}U_2(s) + \left(sC + \frac{1}{R}\right)U_3(s) = 0$$

$$\text{电压控制电压源: } U_4(s) = KU_3(s)$$

从以上方程中消去  $U_4(s)$ ，有

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{2}{R} & -\left(sCK + \frac{1}{R}\right) \\ -\frac{1}{R} & sC + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}U_1(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

得

$$U_3(s) = \frac{1}{s^2 R^2 C^2 + sRC(3-K)+1} U_1(s)$$

因此，传递函数为

$$H(s) = \frac{U_4(s)}{U_1(s)} = \frac{KU_3(s)}{U_1(s)} = \frac{K}{s^2 R^2 C^2 + sRC(3-K)+1}$$

由于系统稳定时上式分母多项式中的各个系数必须大于零，因此，只有当  $K < 3$  时电路才是稳定的。

### 劳斯（Routh）稳定性判据

劳斯判据是一种不需要计算出传递函数的极点就能判断系统稳定性的方法。设系统的特征多项式为

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

它也可表示为

$$A(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

式中  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  为特征根，其特征根与系数的关系为

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -\sum_{i=1}^n p_i \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sum_{i=1}^n p_i p_j \quad i \neq j \\ \frac{a_{n-3}}{a_n} &= -\sum_{i=1}^n p_i p_j p_k \quad i \neq j \neq k \\ &\vdots \\ \frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n \prod_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

由上式可以看出，如果系统的全部特征根实部均为负值，则必有：

- (1) 特征多项式所有系数的符号相同；
- (2) 特征多项式中所有系数都不为零（无缺项）。

应用劳斯稳定判据时，首先根据系统的特征方程构造劳斯阵列（或称劳斯表）：

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 s^2 & d_1 & d_2 & & \\
 s^1 & e_1 & & & \\
 s^0 & a_0 & & & 
 \end{array}$$

对偶次多项式，阵列中第二行最后一列需补上零。在上述阵列中，第 $s^n$ 行和第 $s^{n-1}$ 行元素可按特征方程直接填写。第 $s^{n-2}$ 行元素由下列公式计算：

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

计算直到其余元素 $b_i$ 均为零值时停止。第 $s^{n-3}$ 行元素用第 $s^{n-2}$ 行和第 $s^{n-1}$ 行元素按同样的方法计算，即

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad \dots$$

用相同的方法计算其余各行，直到第 $s^0$ 行。劳斯阵列的形状呈倒三角形，最后一行只有一个元素，为特征方程的系数 $a_0$ 。

**劳斯判据：**劳斯阵列中若首列所有元素不为零并具有相同的符号，则多项式 $A(s)$ 的全部根位于左半 $s$ 平面。如果首列元素的符号发生改变，则改变的次数就是 $A(s)$ 在右半 $s$ 平面根的数目。

**例3-37** 已知系统特征多项式 $A(s) = s^3 + 5s^2 + 4s + K$ ，试确定使系统稳定的 $K$ 值范围。

解：劳斯阵列为

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 4 \\
 s^2 & 5 & K \\
 s^1 & \frac{20-K}{5} & 0 \\
 s^0 & K & 
 \end{array}$$

要使该系统稳定，劳斯阵列的第一列元素应全部为正。即

$$\begin{aligned}
 K &> 0 \\
 \frac{20-K}{5} &> 0
 \end{aligned}$$



当  $0 < K < 20$  时, 该系统稳定。

下列两种情况的劳斯阵列需要做特殊处理。一是当某行第一个元素为零, 但该行元素不全为零时的情况。由于在下一行计算中, 这个零元素出现在分母中, 使得计算无法持续下去。解决的方法是, 用符号  $\varepsilon$  代替该零元素, 按上述方法计算完整个阵列后, 令  $\varepsilon$  正值趋于零, 观察首列元素符号的变化。

**例3-38** 某系统的特征多项式  $A(s) = s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 2$ , 试确定系统的稳定性。

解: 劳斯阵列计算中,  $s^2$  行的元素为

$$s^2 \mid 0 \quad 2$$

用  $\varepsilon$  代替 0, 劳斯阵列如下:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 2 \\ s^3 & 2 & 2 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & 2 & \\ s & \frac{2\varepsilon-4}{\varepsilon} & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 首列中, 由于  $s$  行元素为负, 所以符号改变两次, 故传递函数有两个极点位于右半  $s$  平面, 系统不稳定。

事实上, 该特征多项式的 4 个根为:  $-1, -1.696, 0.348 + j 1.029, 0.348 - j 1.029$ , 确有两个根在右半  $s$  平面。

另一种情况是: 当特征多项式的一些根关于原点对称排列时, 如一对绝对值相等的正负实根, 一对共轭虚根, 四个呈对称分布的复数根等, 劳斯阵列中某一行的元素就全为零, 且全零行总是出现在  $s$  的奇次幂行。这时, 只要写出全零行上一行的多项式 (称为辅助多项式), 并对  $s$  求导, 用该多项式替代全零行后再继续计算。辅助多项式的阶次总为偶数, 其根正是那些关于原点对称排列的根。

**例3-39** 某系统的特征多项式  $A(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$ , 试确定系统的稳定性。

解: 劳斯阵列如下:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s & 0 & 0 & \\ s^0 & & & \end{array}$$

由于  $s$  行为全零行, 辅助多项式为

$$2s^2 + 2$$

其根为  $p_1 = j, p_2 = -j$ , 它们出现在虚轴上, 关于原点对称。对辅助多项式求导, 为  $4s$ ,

修改后的劳斯阵列如下：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & 0 \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s & 4 & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

由于首列元素均大于零，说明多项式的另外两个根在左半  $s$  平面，实际上，它们为  $p_3 = -1$ ， $p_4 = -2$ 。本题所示系统由于虚轴上有两个特征根，属于临界稳定情况，本书中按不稳定系统对待。

### 3.8 频率响应

由第2章内容已知，系统在无始无终复指数信号  $e^{st}$  作用下，系统的响应  $y(t)$  为

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

式中  $H(s)$  为系统的传递函数  $H(s)$ 。若系统稳定（ $H(s)$  在虚轴上收敛），令  $s = j\omega$ ，即当输入为虚指数函数  $x(t) = e^{j\omega t}$  时，则响应  $y(t)$  为

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$H(j\omega)$  为复数，设

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$y(t)$  也可表示为

$$y(t) = |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}$$

即输出信号的振幅为  $|H(j\omega)|$ ，初相为  $\varphi(\omega)$ 。可见，系统在虚指数信号输入下， $|H(j\omega)|$  反映了系统对输入信号的放大能力，称为幅度函数，它随  $\omega$  的变化曲线称为系统的幅频响应； $\varphi(\omega)$  则反映了系统在输入信号中引入的相位，称为相位函数，它随  $\omega$  的变化曲线称为系统的相频响应；幅频响应与相频响应统称为频率响应。

当系统的输入为无始无终正弦函数  $\cos(\omega_0 t)$  时，由于  $\cos(\omega_0 t) = \text{Re}[e^{j\omega_0 t}]$ ，则输出

$$\mathcal{R}[\cos(\omega_0 t)] = \text{Re}[|H(j\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}] = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

**例3-40** 已知一阶系统的传递函数

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

输入  $x(t) = \cos(4t)$ ，求输出  $y(t)$ 。

解：系统稳定，输出  $y(t)$  为

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \operatorname{Re}[H(j4)e^{j4t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{j4+3}e^{j4t}\right] \\
 &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{5}e^{-j53.13^\circ}e^{j4t}\right] = \frac{1}{5}\cos(4t-53.13^\circ)
 \end{aligned}$$

**例3-41** 试定性绘制图 3-23所示两个一阶电路的幅频特性。

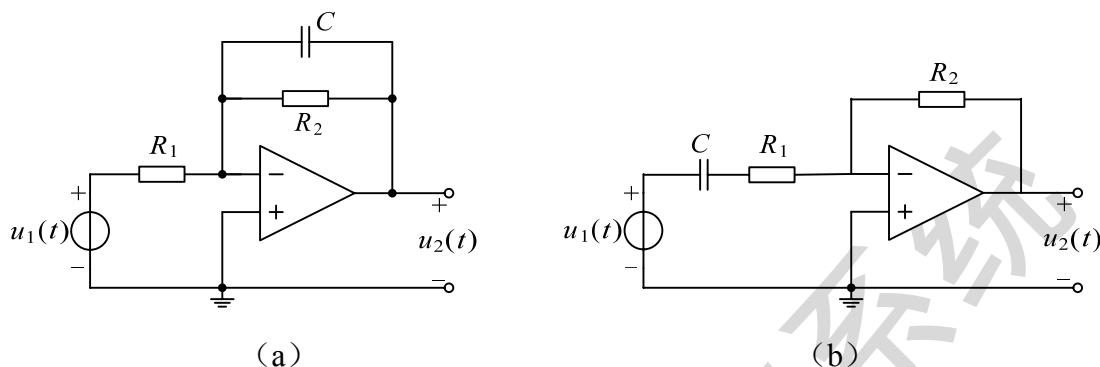


图3-23 例 3-41图

解：图 3-23 (a) 所示电路具有反比例器结构，反馈支路的阻抗

$$Z_2(s) = \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}}$$

则电路的传递函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2(s)}{R_1} = -\frac{\frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_2C}} = \frac{K\omega_p}{s + \omega_p}$$

其中  $\omega_p = \frac{1}{R_2C}$ ， $K = -\frac{R_2}{R_1}$ 。则幅度函数为

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|\omega_p}{\sqrt{\omega^2 + \omega_p^2}}$$

可计算出  $|H(j0)| = |K|$ ， $|H(j\omega_p)| = |K|/\sqrt{2}$ ， $|H(j\infty)| = 0$ ，幅频特性如图 3-24 (a) 所示。当  $\omega \ll \omega_p$  时， $H(s) \approx K$ ，电路具有比较小的衰减；当  $\omega \gg \omega_p$  时， $H(s) \approx K\omega_p/s$ ，幅频特性近似与频率成反比。由于幅频特性在低频时衰减较小，而高频时衰减较大，其电路是一种低通滤波器，通带为  $0 \sim \omega_p$ ， $\omega_p$  称为通带（截止）角频率。

图 3-23 (b) 所示电路的传递函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{s}{s + \frac{1}{R_1C}} = \frac{Ks}{s + \omega_p}$$

其中  $\omega_p = \frac{1}{R_1 C}$ ,  $K = -\frac{R_2}{R_1}$ 。则幅度函数为

$$|H(j\omega)| = \frac{|K|\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_p^2}}$$

可计算出  $|H(j0)| = 0$ ;  $|H(j\omega_p)| = |K|/\sqrt{2}$ ,  $|H(j\infty)| = |K|$ , 幅频特性如图 3-24 (b) 所示。当  $\omega \ll \omega_p$  时,  $H(s) \approx Ks/\omega_p$ , 频率愈低, 衰减愈大; 当  $\omega \gg \omega_p$  时,  $H(s) \approx K$ , 幅频特性近似为水平直线。由于幅频特性在低频时衰减较大, 而高频时衰减较小, 其电路为高通滤波器, 通带为  $\omega_p \sim \infty$ ,  $\omega_p$  称为通带(截止)角频率。

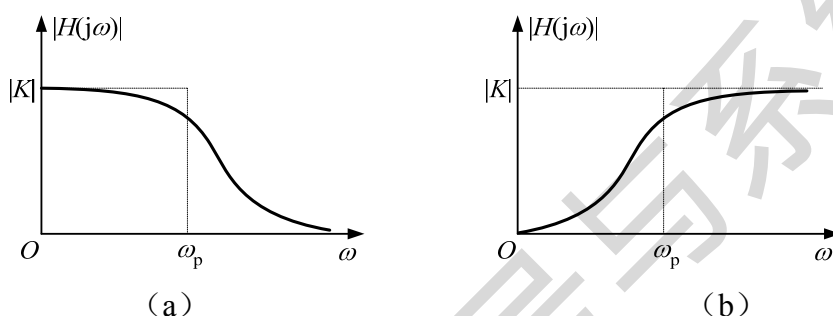


图3-24 例 3-41 电路的幅频特性

若已知系统函数的极点和零点, 可以通过在  $s$  平面上用作图的方法定性地描绘出幅频响应曲线和相频响应曲线。设

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (s - z_m)}{\prod_{n=1}^N (s - p_n)} \quad (3-44)$$

幅频响应和相频响应分别为

$$|H(j\omega)| = |H_0| \frac{\prod_{m=1}^M |j\omega - z_m|}{\prod_{n=1}^N |j\omega - p_n|} \quad (3-45)$$

$$\arg[H(j\omega)] = \arg(H_0) + \sum_{m=1}^M \arg(j\omega - z_m) - \sum_{n=1}^N \arg(j\omega - p_n) \quad (3-46)$$

在  $s$  平面上, 若用有向线段表示复数,  $j\omega$  就为从原点指向纵轴上  $\omega$  处的矢量,  $j\omega - p_n$  为从极点  $p_n$  指向  $\omega$  处的矢量, 称为极点矢量, 设为  $\mathbf{A}_m$ ,  $j\omega - z_m$  为从零点  $z_m$  指向  $\omega$  处的矢量, 称为零点矢量, 设为  $\mathbf{B}_m$ , 如图 3-25 所示。则式(3-45)和式(3-46)又可以表示成

$$|H(j\omega)| = |H_0| \frac{\prod_{m=1}^M |B_m|}{\prod_{n=1}^N |A_n|} \quad (3-47)$$

$$\arg[H(j\omega)] = \arg(H_0) + \sum_{m=1}^M \arg(B_m) - \sum_{n=1}^N \arg(A_n) \quad (3-48)$$

从以上两式可见：幅度函数与零点矢量的模成正比，与极点矢量的模成反比。当  $j\omega$  点非常靠近某一零点时，幅度则很小，当  $j\omega$  点非常靠近某一极点时，幅度则较大。 $H_0$  只影响幅度的大小，与曲线的形状无关。相位函数为所有零点矢量的辐角之和减去极点矢量的辐角之和，当  $H_0 > 0$  时，相位函数与  $H_0$  无关，当  $H_0 < 0$  时， $\arg(H_0) = \pm\pi$ 。

利用几何作图方法，令  $\omega$  从零到无限大变化，在  $s$  平面上观察极点矢量和零点矢量的变化情况，并取一些特殊频率点进行计算，这样可以定性地绘出频率响应曲线的大致形状，从而可判断系统在哪些频率处具有较高或较低的增益。当然，准确绘制频率特性需要借助计算机进行。

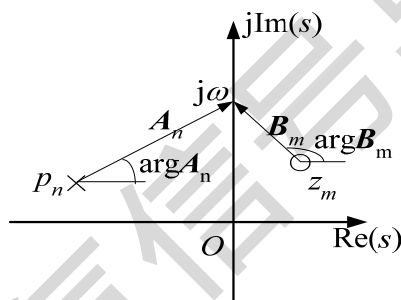


图3-25 极点矢量和零点矢量

以图 3-26所示电路为例，可得

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sC + \frac{1}{R_1}}{sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

设  $R_1 = 1\Omega$ ， $R_2 = 0.5\Omega$ ， $C = 1F$ ，则传递函数为

$$H(s) = \frac{s+1}{s+3} \quad (3-49)$$

下面用几何作图方法定性绘制式(3-49)的幅频特性和相频特性。

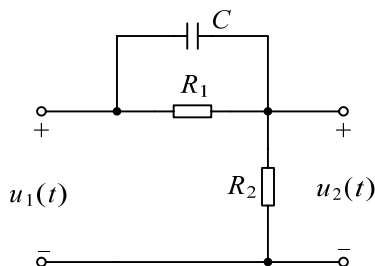


图3-26 传递函数具有一个极点和一个零点的电路

令  $s = j\omega$ ，则有

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 3}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega + 3|}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)] = \arg(j\omega + 1) - \arg(j\omega + 3)$$

当  $\omega = 0$  时，通过计算得  $|H(j0)| = 1/3$ ， $\varphi(0) = 0$ ；当  $\omega$  略有增加时，见图 3-27 (a)，较  $\omega = 0$  处极点矢量  $A$  和零点矢量  $B$  的模都增加，但零点矢量的增加相对较大，因而幅度增加，零点矢量的辐角大于极点矢量的辐角，传递函数的相位为正值；随着  $\omega$  的继续增加，见图 3-27 (b)，幅度不断增大；当  $\omega$  趋于无限大时，幅度趋近于 1，相位趋近于 0。由此，可定性的画出幅频响应和相频响应曲线，如图 3-28 所示。相频响应在  $\omega = 0$  和  $\omega = \infty$  时相位均为零，故在某一频率处必有一极大值，数值计算结果为  $30^\circ$ 。

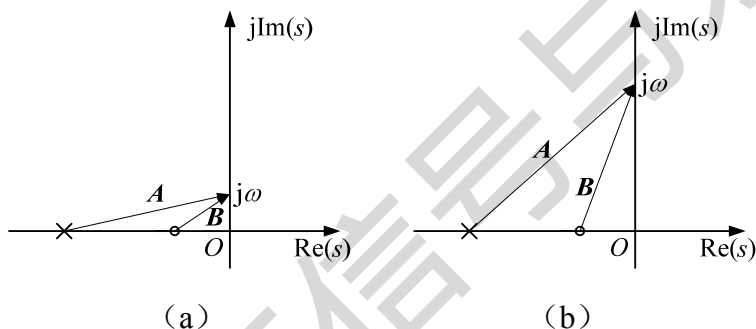


图3-27 频率响应的几何作图

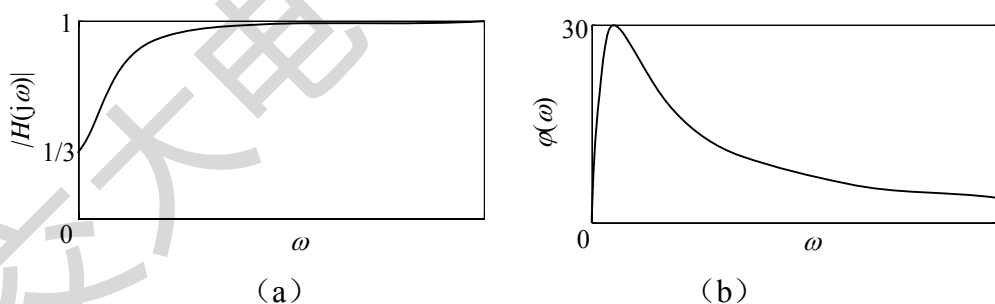


图3-28 幅频响应和相频响应

**例3-42**  $RLC$  串联电路如图 3-29 所示，若以电容电压  $u_c(t)$  为输出，求传递函数  $H(s) = U_C(s)/U(s)$ ，并分析其幅频特性。

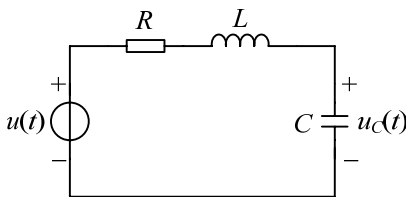


图3-29  $RLC$  串联电路

解：传递函数

$$H(s) = \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

如果令  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $Q$  称为品质因数,  $H(s)$  又可表示为

$$H(s) = \frac{\omega_p^2}{s^2 + s\frac{\omega_p}{Q} + \omega_p^2} = \frac{\omega_p^2}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

当  $Q < 1/2$  时,  $H(s)$  的两个极点为负实数, 极点分布如图 3-30(a) 所示。在  $\omega = 0$  处,  $|H(j0)| = 1$ , 随着频率的增加, 两个极点矢量的模  $|A_1|$  和  $|A_2|$  越来越大, 因而传递函数的幅度减小, 在  $\omega = \infty$  处幅度为零, 幅频特性则是单调减的, 如图 3-30(b) 所示。

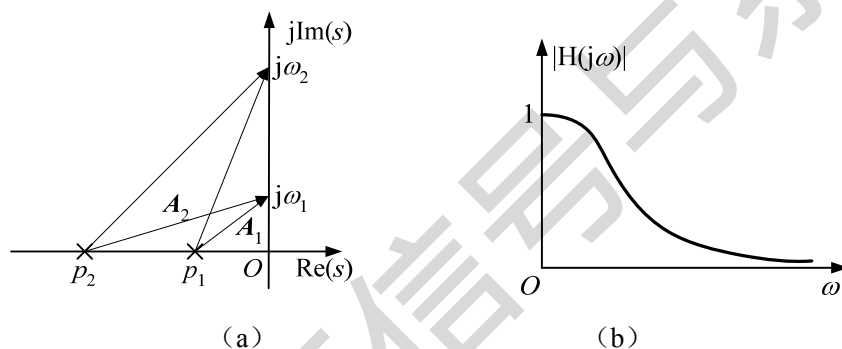


图3-30 (a) 实极点分布 (b) 幅频响应

当  $Q > 1/2$  时,  $H(s)$  的两个极点为共轭复数, 极点为

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad p_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

当角频率  $\omega$  略大于零时, 设为  $\omega_1$ , 见图 3-31 (a), 与  $\omega = 0$  处的极点矢量相比较,  $|A_1|$  减小, 而  $|A_2|$  增大, 理论分析表明, 若  $Q > 1/\sqrt{2}$ , 则  $|A_1| \cdot |A_2|$  变小, 故传递函数的幅度增大; 当  $j\omega$  点距离极点  $p_1$  比较近时, 图中  $\omega = \omega_2$ , 幅度出现极大值, 极点  $p_1, p_2$  愈靠近  $j\omega$  轴, 该极大值则愈大; 当  $\omega > \omega_2$  时, 两个极点矢量随  $\omega$  的增加而增加, 幅度呈衰减趋势, 故幅频特性如图 3-31 (b) 所示, 它具有低通特征。

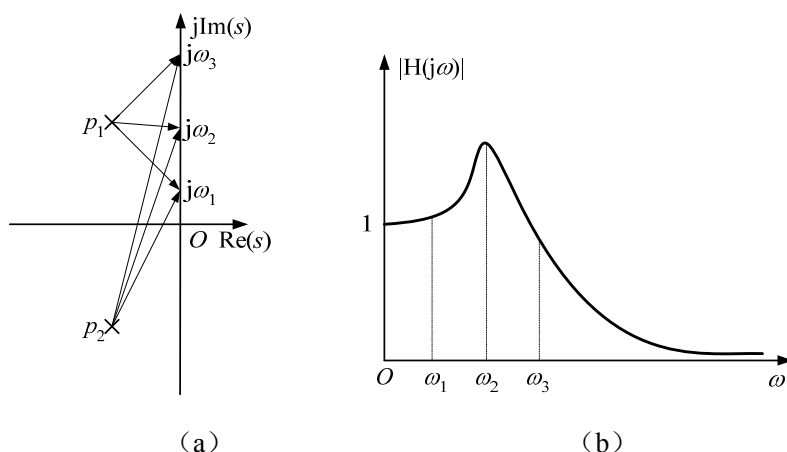


图3-31 (a) 复数极点分布 (b) 幅频响应

**例3-43** 图 3-32所示电路为一信号放大电路的模型，已知  $R_1C_1 \ll R_2C_2$ ，试定性分析电路的频率特性。

解：电路的传递函数为

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{R_1}}{sC_1 + \frac{1}{R_1}} \times \frac{KsC_2}{sC_2 + \frac{1}{R_2}} \\
 &= \frac{s \frac{K}{R_1C_1}}{(s + \frac{1}{R_1C_1})(s + \frac{1}{R_2C_2})}
 \end{aligned}$$

它有两个极点和一个零点：

$$p_1 = -\frac{1}{R_1C_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{R_2C_2}, \quad z_1 = 0$$

根据已知条件， $R_1C_1 \ll R_2C_2$ ，故  $p_2$  靠近原点，而  $p_1$  距离原点较远，极零点分布如图 3-33 (a) 所示。

当  $\omega$  较低时， $|A_1|$  几乎不随频率变化， $|A_2|$  和  $|B|$  则随频率增大而增大，由于  $|B|$  的变化量最大，因此幅度呈增长趋势，在低频范围，零点  $z_1$  和极点  $p_2$  起主要作用，传递函数近似为

$$H(s) \Big|_{\omega \ll \frac{1}{R_2C_2}} \approx \frac{s \frac{K}{R_1C_1}}{(\frac{1}{R_1C_1})(\frac{1}{R_2C_2})} = sKR_2C_2$$

当  $\omega$  较高时，可近似认为  $|A_2| = |B|$ ，传递函数具有一阶低通特征，幅度随  $\omega$  的增加而减小，传递函数近似为



$$H(s)\Big|_{\omega \gg \frac{1}{R_1 C_1}} \approx \frac{s \frac{K}{R_1 C_1}}{(s)(s)} = \frac{K}{R_1 C_1 s}$$

当  $\omega$  位于中间频率范围时

$$\frac{1}{R_2 C_2} < \omega < \frac{1}{R_1 C_1}$$

$|A_1|$  几乎不随频率变化,  $|A_2| \approx |B|$ , 故幅度的变化范围不大, 传递函数近似为

$$H(s)\Big|_{\frac{1}{R_2 C_2} < \omega < \frac{1}{R_1 C_1}} = \frac{s \frac{K}{R_1 C_1}}{(\frac{1}{R_1 C_1})(s)} = K$$

幅频响应如图 3-33 (b) 所示。

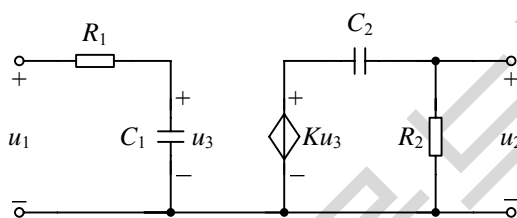


图3-32 信号放大电路

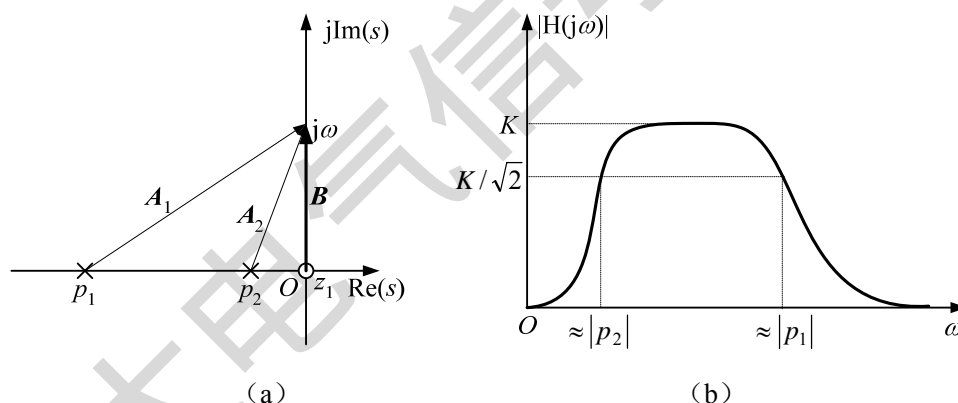


图3-33 (a) 极点分布 (b) 幅频响应

从物理概念考虑, 当频率非常低时, 电容  $C_1$  相当于开路, 主要是  $R_2$  和  $C_2$  构成的高通电路起作用; 当频率非常高时, 电容  $C_2$  相当于短路,  $R_1$  和  $C_1$  构成的低通电路起主要作用; 在中间频率范围,  $C_1$  相当于开路,  $C_2$  相当于短路, 受控源的输入为电路的输入电压, 受控源的输出为电路的输出电压。该电路可认为是一阶低通电路经电压放大后, 再与一阶高通电路的级联, 整个电路具有带通滤波功能。

在实际中, 信号频率的变化范围很宽, 可以从几赫芝到几十兆赫芝, 而传递函数幅度的变化范围也可能跨越好几个数量级。为了在同一张图上描绘出频响曲线, 便于观察和绘制, 有时频率坐标采用对数刻度, 传递函数的幅度用其分贝值 (dB) 表示, 它定义为  $20\lg[|H(j\omega)|]$ 。由该定义,  $|H(j\omega)|=1$  时的 dB 值为 0,  $|H(j\omega)|=10$  时的 dB

值为 20,  $|H(j\omega)|=10^n$  时的 dB 值为  $20n$ 。相位坐标仍采用度或弧度表示。

例如, 二阶低通传递函数

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{Q}s + 1}$$

$Q$  为 10 和  $1/\sqrt{2}$  时的幅频特性和相频特性如图 3-34 所示。

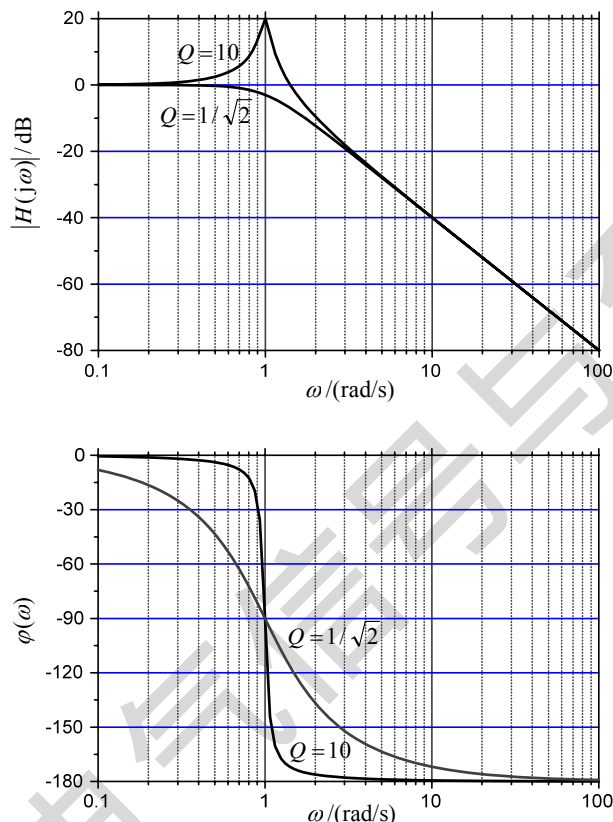


图3-34 采用半对数刻度的频率特性曲线

### 3.9 反馈系统简介

复杂系统一般用简单系统的互联接实现, 这样能利用简单系统的成功设计经验, 花比较少的时间完成设计, 而且便于实际系统的最终调试。

系统互联的基本方式有级联、并联和反馈联接, 如图 3-35 所示。系统级联时, 系统 2 的输入为系统 1 的输出, 总系统的传递函数  $H(s)$  为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Y_1(s)}$$

即

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad (3-50)$$

系统并联时输出为每个子系统输出的和，总系统的传递函数  $H(s)$  为

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (3-51)$$

反馈是一个非常重要的概念，广泛用于自动控制、滤波、信号放大、电源等系统。在系统反馈联接中，系统的输出  $y(t)$  可看成由两部分组成：一部分是系统输入  $x(t)$  引起的响应，另一部分是与  $y(t)$  自身有关的响应。图 3-35 (c) 中， $G$  和  $H$  分别为前向通道和反馈通道的增益， $r(t)$  为反馈信号，比较器对  $r(t)$  反相后与输入  $x(t)$  求和，产生偏差信号  $e(t)$

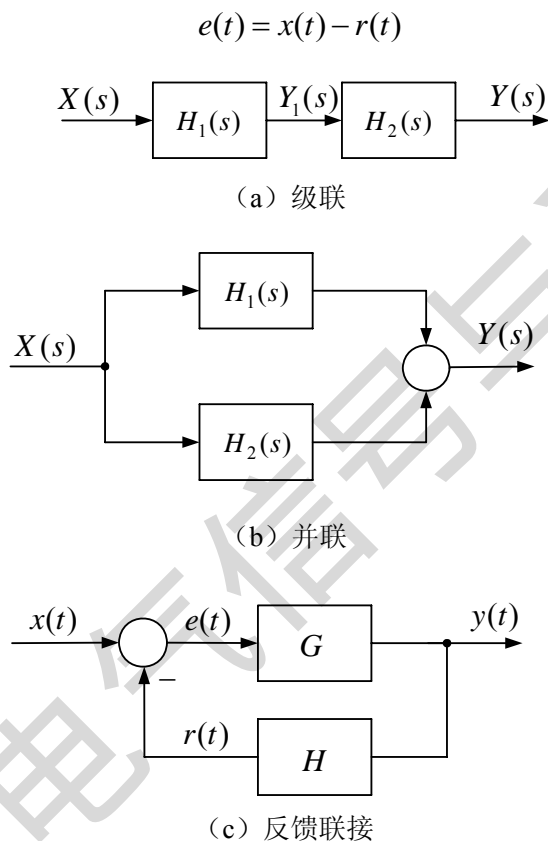


图3-35 系统的互联

用拉氏变换求解输入输出关系（参看图 3-36）， $Y(s)$  与  $X(s)$  的关系为

$$Y(s) = G(s)[X(s) - H(s)Y(s)]$$

于是总系统的传递函数（闭环传递函数）

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-52)$$

式中  $G(s)H(s)$  为反馈环路中两个子系统传递函数的乘积，称为环路传递函数。可见，闭环传递函数的分子为前向通道的传递函数（开环传递函数），分母为 1 加上环路传递函数。

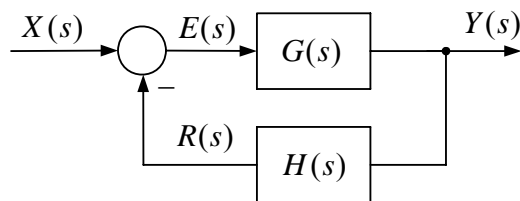


图3-36 反馈联接

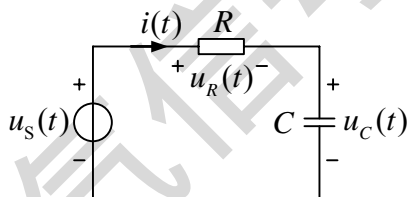
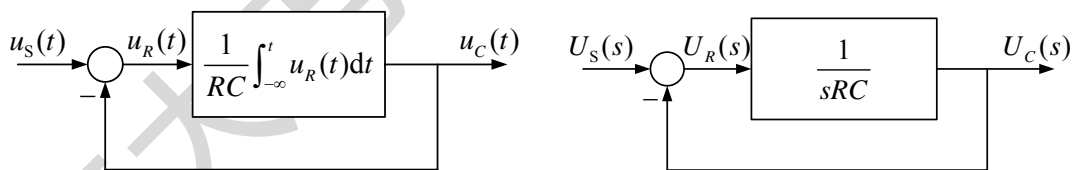
一个系统中是否存在反馈，与系统中所选取的信号有关。以图 3-37所示的  $RC$  串联电路为例，设输出为电容电压  $u_C(t)$ ，当考虑  $u_C(t)$ 、 $u_R(t)$  与  $u_S(t)$  间的关系时，系统就存在反馈。由电路可列出

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} = u_R(t)$$

$$u_R(t) = u_S(t) - u_C(t)$$

系统框图表示如图 3-38所示。由式(3-52)，传递函数为

$$\frac{U_C(s)}{U_R(s)} = \frac{\frac{1}{sRC}}{1 + \frac{1}{sRC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

图3-37  $RC$  串联电路图3-38  $RC$  串联电路的框图表示

在图 3-36中，对反馈信号  $R(s)$  反相后与输入  $X(s)$  求和，称为负反馈。若对  $R(s)$  直接求和，则称为正反馈。实际上，由于  $G(s)$  与  $H(s)$  与频率有关，负反馈也可能在某些频率处构成本质上的正反馈。

**例3-44** 图 3-39所示电路为反比例器电路，设运算放大器非理想，其系统函数为  $A(s)$ （运算放大器  $s$  域输出电压与其  $s$  域差动输入电压之比），试用框图表示该电路，并求系统函数  $U_o(s)/U_i(s)$ 。

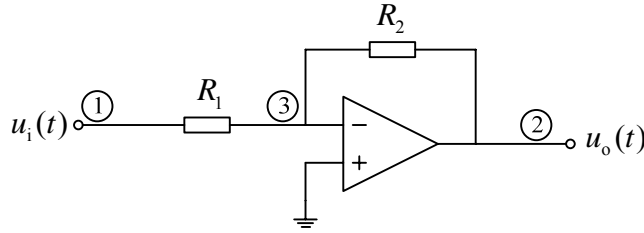


图3-39 反比例器电路

解：由结点法可得运算放大器反相端的电压  $U_3(s)$  为

$$U_3(s) = \frac{\frac{1}{R_1}U_1(s) + \frac{1}{R_2}U_2(s)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2U_1(s) + R_1U_2(s)}{R_1 + R_2}$$

根据上式和运算放大器的输入输出关系，可画出图 3-40 所示的框图。由式(3-52)得

$$\begin{aligned} \frac{U_2(s)}{U_1(s)} &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{-A(s)}{1 + A(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) / A(s)} \end{aligned}$$

显然，当  $A(s) \rightarrow \infty$  时， $\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$ 。

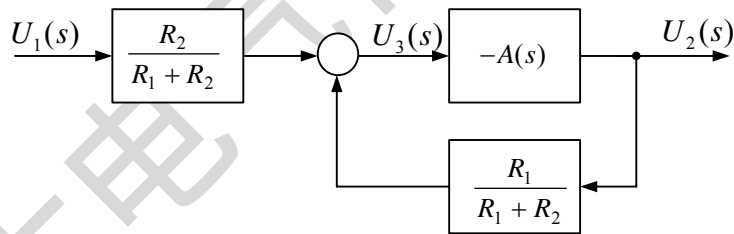


图3-40 反比例器电路的框图表示

尽管反馈联接增加了系统的复杂性，但它能够带来许多好处。当环路增益  $G(s)H(s) \gg 1$  时，式(3-52)近似为

$$T(s) \approx \frac{1}{H(s)}$$

该式显示，这时的闭环传递函数  $T(s)$  只取决于  $H(s)$ ，而与  $G(s)$  几乎无关。当  $G(s)$  由于工作条件或元件老化发生变化时，不会因为它的改变而影响闭环传递函数。看一个放大器实例，设  $G = 1000$ ， $H = 0.1$ ，则闭环增益  $T$  为

$$T = \frac{G}{1 + GH} = \frac{1000}{1 + 1000 \times 0.1} = 9.90$$

本例中，由于  $GH \gg 1$ ，上式结果近似等于  $1/H = 10$ 。

设  $G$  降低了 10%，为 900，而  $H$  保持不变，这时的闭环增益  $\hat{T}$  为

$$\hat{T} = \frac{G}{1+GH} = \frac{900}{1+900 \times 0.1} = 9.89$$

它仍然近似等于  $1/H = 10$ ， $T$  的相对变化量为

$$\frac{\hat{T} - T}{T} = \frac{9.89 - 9.90}{9.90} = -0.1\%$$

可见，尽管  $G$  改变了 10%，但  $T$  只有 0.1% 的变化。这说明，闭环传递函数对  $G$  的改变具有不敏感性。读者可能会质疑， $H$  的改变会使  $T$  有比较大的变化，然而，实际系统实现中  $H$  一般小于 1，可用价格低廉但性能却比较好的无源元件实现，因而  $H$  可以做到比较精确的实现。

上例中，如果用两个增益分别为 0.01 和 1000 的系统按级联方法实现总增益为 10 的系统，即使理论上可行，但每一子系统增益的变化都会对系统的性能有比较大的影响。

反馈连接的另一好处是能够降低反馈环内部噪声和干扰的影响。参看图 3-41 所示框图，环内干扰信号用  $n$  表示。只考虑输入  $x$  的作用时，其响应

$$Y_x(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} X(s)$$

只考虑干扰  $n$  的作用时，其响应

$$Y_n(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} N(s)$$

二者叠加后有

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} X(s) + \frac{1}{1+G(s)H(s)} N(s) \quad (3-53)$$

上式第 2 项为无用的输出，显然，反馈联接具有把干扰  $n$  降低  $1+G(s)H(s)$  倍的作用。

反馈联接除以上优点外，它还可以增加系统的带宽，改善系统的线性特性（即降低了非线性元件对信号造成失真的影响），这些都是以增加系统的复杂度和损失开环系统的增益为代价来换取的。

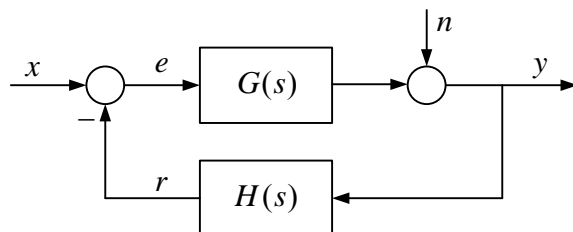


图3-41 考虑干扰信号的系统

反馈可以稳定一个原本不稳定的系统，也可以使稳定系统变为不稳定。设一阶系

统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b}{s-a}$$

当  $a > 0$  时，这个系统是不稳定的。若按图 3-36 加入反馈，取  $H(s)$  为常数  $K$ ，则闭环传递函数  $T(s)$  为

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{b}{s-a+Kb}$$

若取

$$K > \frac{b}{a}$$

则  $T(s)$  的极点位于左半  $s$  平面，系统是稳定的。

反馈联接的一个重要应用是系统的闭环控制，使系统能够克服各种扰动的影响，输出总能够精确保持到所期望的输出（目标响应）。一种典型的控制系统如图 3-42 (a) 所示，它由受控装置、控制器、比较器等部件组成，由于该系统中输出完全反馈至输入端，反馈通道的增益为 1，称其为单位反馈，输入  $y_d(t)$  是系统的目标响应，比较器对系统的实际响应  $y(t)$  与目标响应  $y_d(t)$  进行比较，产生偏差信号  $e(t)$ ，控制器根据偏差信号  $e(t)$  产生控制量对受控装置进行控制。

设受控装置和控制器的传递函数分别为  $G(s)$  和  $H(s)$ ，由于它们两个为级联，故其等效传递函数为  $G(s)H(s)$ ，从图 3-42 (b) 得闭环传递函数为

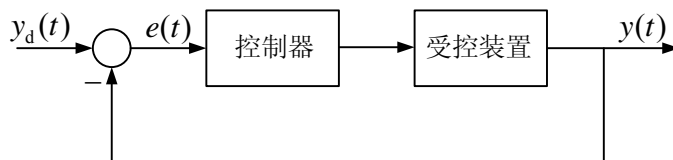
$$T(s) = \frac{Y(s)}{Y_d(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-54)$$

假设对所有有用的  $s$  值，若有  $|G(s)H(s)| \gg 1$ ，即系统的环路增益很大，则式(3-54)简化为

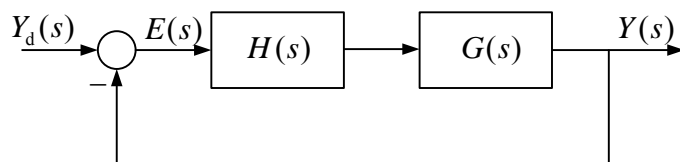
$$T(s) \approx 1$$

说明  $y(t)$  近似等于  $y_d(t)$ ，从而达到对受控装置的输出进行控制的目的。

以上介绍的反馈只有一个反馈环，称为单环反馈，在复杂系统中，一般为多环反馈结构。



(a)



(b)

图3-42 单位反馈控制系统

## 习 题

3-1 利用拉氏变换的定义求下列函数的变换。

- |                                      |                               |
|--------------------------------------|-------------------------------|
| (1) $\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$ | (2) $\sin^2(t)\varepsilon(t)$ |
| (3) $t\varepsilon(t)$                | (4) $t\varepsilon(t-2)$       |
| (5) $e^{-at}\varepsilon(t-1)$        | (6) $\delta(t-1)$             |

3-2 求逆拉氏变换。

- |                             |                                      |
|-----------------------------|--------------------------------------|
| (1) $\frac{1}{s(s+1)}$      | (2) $\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+4)}$ |
| (3) $\frac{4s}{(s^2+4s+4)}$ | (4) $\frac{1}{s^2+2s+5}$             |
| (5) $\frac{s+1}{s^2+2s+5}$  | (6) $\frac{s^3+1}{s(s^2+2s+5)}$      |

3-3 求逆拉氏变换。

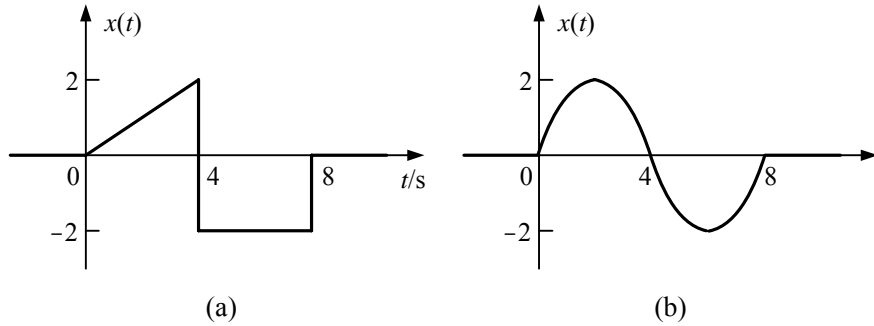
- |                             |                            |
|-----------------------------|----------------------------|
| (1) $\frac{1}{s^2(s+1)}$    | (2) $\frac{1}{s(s+1)^3}$   |
| (3) $\frac{1-e^{-2s}}{s+1}$ | (4) $\frac{s^3}{s^2+4s+3}$ |

3-4 利用性质求下列函数的拉普拉斯变换。

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\text{ch}(2t)\varepsilon(t)$          | (2) $\cos(2t - \frac{3\pi}{4})\varepsilon(t)$        |
| (3) $te^{-at}\varepsilon(t)$               | (4) $\frac{\sin(t)}{t}\varepsilon(t)$                |
| (5) $t[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-3)]$ | (6) $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\varepsilon(t)$ |

3-5 写出图示波形的数学表达式，求其拉氏变换。





图p3-5

3-6 画出下列信号的波形，求其拉氏变换。

$$(1) |\sin(\omega_0 t)| \varepsilon(t)$$

$$(2) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$(3) \sum_{k=0}^{\infty} (t - k) [\varepsilon(t - k) - \varepsilon(t - k - 1)]$$

3-7 求下列各  $X(s)$  所对应信号  $x(t)$  在  $t = 0_+$  时刻的值。

$$(1) \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$(2) \frac{10(s^2 + 10s - 20)}{s(s^2 + 20s + 100)}$$

$$(3) \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+4)} e^{-10s}$$

$$(4) \frac{s^3 + 6s^2 + 12s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$

3-8 已知信号  $x(t)$  的拉氏变换为  $X(s)$ ，求下列信号的拉氏变换。

$$(1) x(t-2)\varepsilon(t-2)$$

$$(2) (t-1)x(t)$$

$$(3) e^{-2t}x(t)$$

$$(4) x(t) * x(t)$$

$$(5) \frac{d}{dt}x(t)$$

$$(6) x(t) * \cos(3t)$$

$$(7) x(5t)$$

$$(8) x(5t-1)$$

3-9 用拉氏变换法求解下列微分方程。

$$(1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 20 \frac{dy(t)}{dt} + 75y(t) = 0, \quad y(0_-) = 10, \quad y'(0_-) = 0$$

$$(2) y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x(t), \quad x(t) = 3\varepsilon(t), \quad y(0_-) = 0, \quad y'(0_-) = 3$$

$$(3) y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x(t), \quad x(t) = e^{-2t}\varepsilon(t), \quad y(0_-) = 0, \quad y'(0_-) = 3$$

$$(4) y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = x(t), \quad x(t) = \cos(2t)\varepsilon(t), \quad y(0_-) = 0, \quad y'(0_-) = 0$$

3-10 求下列各微分方程所描述系统的冲激响应和阶跃响应。

$$(1) y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2x(t)$$

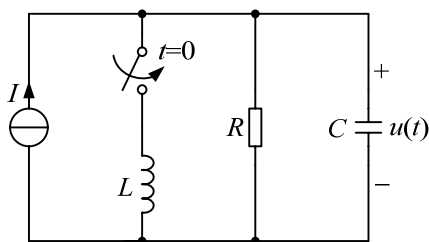
$$(2) y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 2x'(t) + 6x(t)$$

$$(3) y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x''(t)$$

$$(4) y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) = 2x'(t) - 6x(t)$$

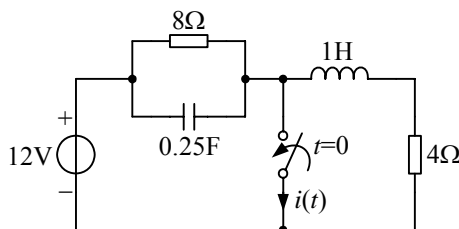
3-11 图示电路中开关断开已很长时间， $t = 0$  时闭合，用拉氏变换法求电压  $u(t)$ 。已知

$I=4\text{ A}$ ,  $L=2\text{ H}$ ,  $R=1.5\Omega$ ,  $C=1/6\text{ F}$ 。



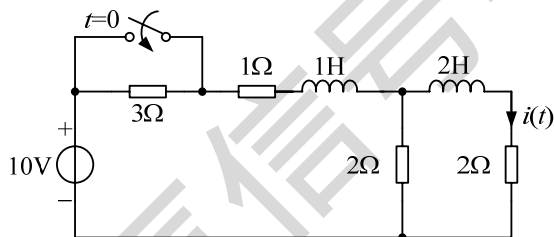
图p3-11

3-12 图示电路中开关断开已很长时间,  $t=0$  时闭合, 求电流  $i(t)$ 。



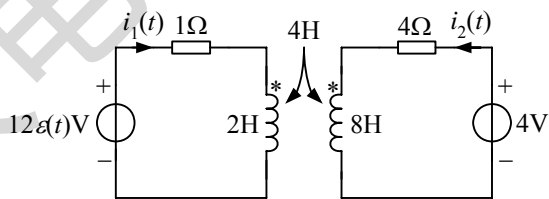
图p3-12

3-13 图示电路中开关断开已很长时间,  $t=0$  时闭合, 求电流  $i(t)$ 。



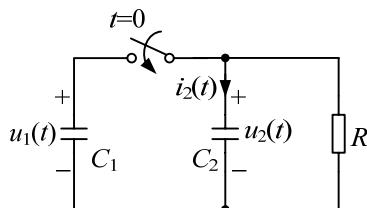
图p3-13

3-14 图示电路含有耦合电感, 求  $t > 0$  时的电流  $i_2(t)$ 。



图p3-14

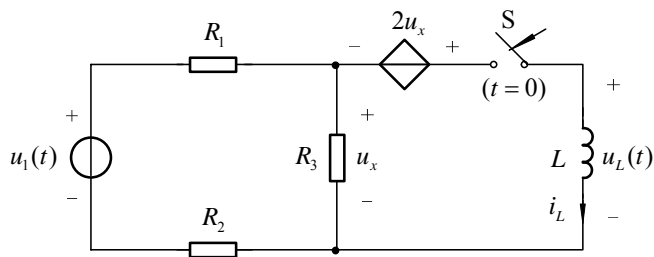
3-15 图示电路中,  $t=0_-$  时刻的电容电压  $u_1(0_-)$  和  $u_2(0_-)$  已知, 用拉氏变换法求  $t > 0$  时的电压  $u_2(t)$ 。



图p3-15

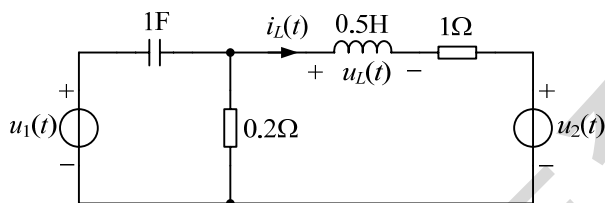
3-16 电路如图所示, 已知  $u_1(t)=20e^{-t}\text{ V}$ ,  $R_1=R_2=2\Omega$ ,  $R_3=4\Omega$ ,  $L=1\text{ H}$ ,

$i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ ， $t = 0$ 时将开关S闭合，应用拉氏变换求 $t > 0$ 时的 $u_L(t)$ 。



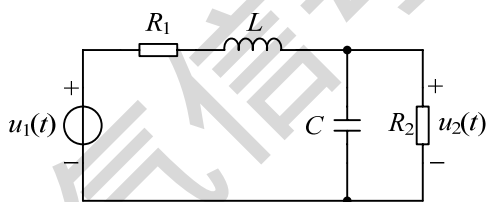
图p3-16

3-17 电路如图所示，已知 $u_1(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t) \text{ V}$ ， $u_2(t) = e^{-2t}\varepsilon(t) \text{ V}$ ，求 $t > 0$ 时的 $u_L(t)$ 和 $i_L(t)$ 。



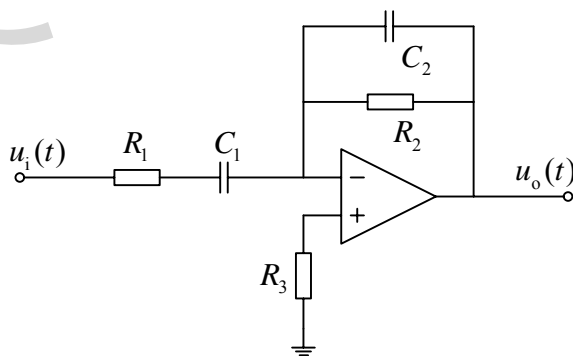
图p3-17

3-18 求图示电路的传递函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。



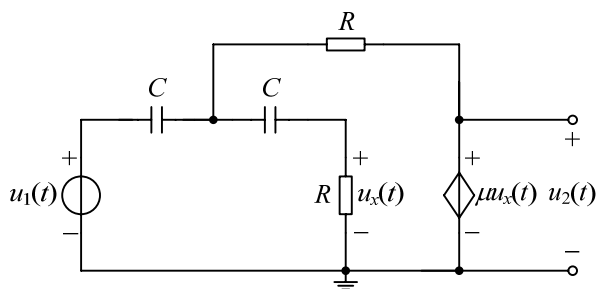
图p3-18

3-19 求图示电路的传递函数 $H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$ 。



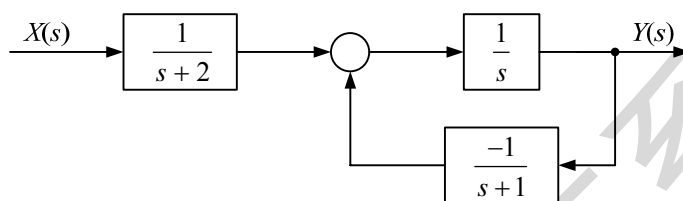
图p3-19

3-20 求图示电路的传递函数 $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。



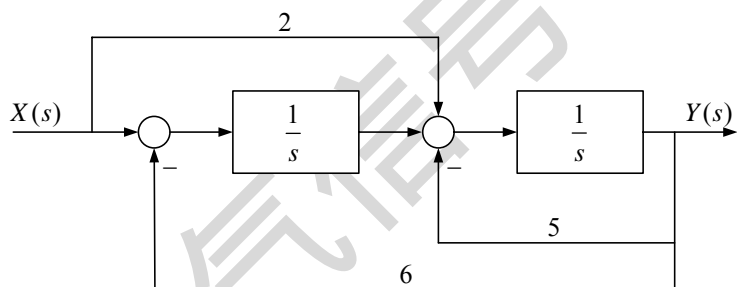
图p3-20

3-21 求图示系统的输入输出微分方程。



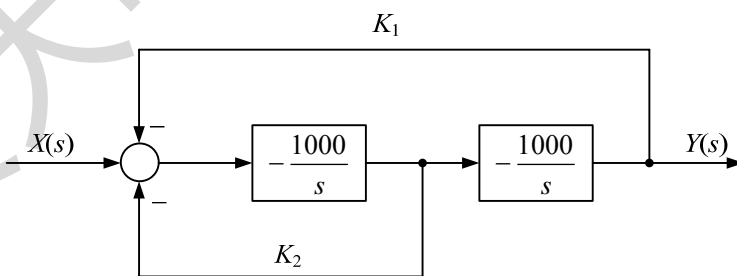
图p3-21

3-22 求图示系统的传递函数。



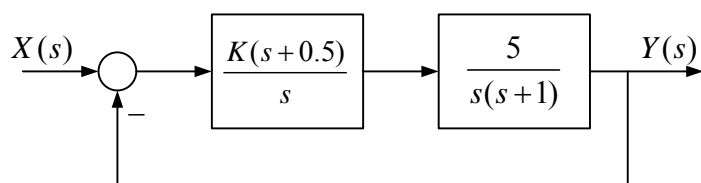
图p3-22

3-23 欲使图示系统稳定，试求  $K_1$  和  $K_2$  的取值范围。



图p3-22

3-24 求图示系统的传递函数，确定系统稳定时  $K$  的取值范围。



图p3-24

3-25 绘出以下系统函数的极零点分布图，说明系统是否稳定。

$$(1) \frac{s+2}{(s+1)(s-2)}$$

$$(2) \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$(3) \frac{s-2}{s(s+5)}$$

$$(4) \frac{1}{s^2+2s+1}$$

3-26 确定下列特征方程右半平面根的个数。

$$(1) s^3+6s^2+3s+2$$

$$(2) s^4+1$$

$$(3) s^4+3s^3+12s^2+12s+36$$

$$(4) s^4+s^3+s+1$$

3-27 确定系统稳定时下列特征方程中  $K$  的取值范围。

$$(1) s^3+3s^2+3s+(1+K)$$

$$(2) s^3+(1+K)s^2+3s+K$$

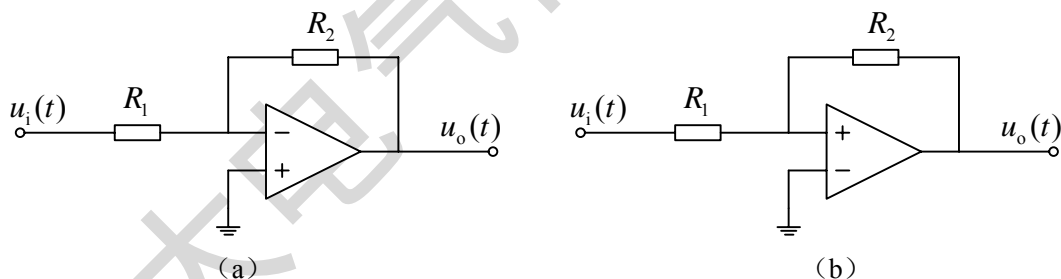
$$(3) s^4+2s^3+2s^2+s+K$$

3-28 设运算放大器工作在线性区，同相端与反相端间的电压为  $U_d(s)$ ，输出电压为  $U_o(s)$ ，电压增益为

$$A(s) = \frac{U_o(s)}{U_d(s)} = \frac{A_0 \omega_0}{s + \omega_0}$$

其中  $A_0$  为直流增益， $\omega_0$  为 3dB 角频率。

试分析图示两个电路能否实现反相放大功能，并说明原因。



图p3-28

3-29 已知某稳定系统的传递函数

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$$

求下列输入信号  $x(t)$  作用下的响应。

$$(1) x(t) = e^{2t} \text{ (无始无终)}$$

$$(2) x(t) = e^{2t} \varepsilon(t)$$

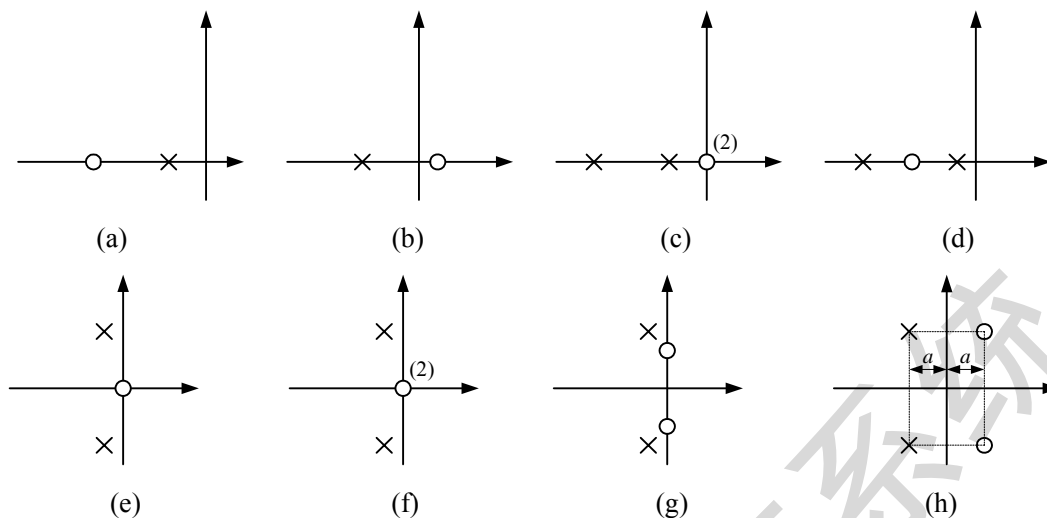
$$(3) x(t) = e^{2t} \varepsilon(-t)$$

$$(4) x(t) = e^{j2t} \text{ (无始无终)}$$

$$(5) x(t) = \cos(2t) \text{ (无始无终)}$$

$$(6) x(t) = \cos(2t)\varepsilon(t)$$

3-30 根据给定的极零点分布，定性画出幅频响应。



图p3-30

3-31 已知某因果系统的传递函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+4)}{s^2 + 2s + 2}$$

初始状态  $y(0_-) = 1$ ,  $y'(0_-) = 0$ , 输入  $x(t) = 2\cos t\varepsilon(t)$ , 求  $t > 0$  时的全响应。

3-32 已知状态方程

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

(1) 求传递函数  $H(s) = \frac{X_2(s)}{E(s)}$ 。

(2) 若  $x_1(0_-) = 1$ ,  $x_2(0_-) = 0$ ,  $e(t) = \varepsilon(t)$ , 求  $x_2(t)$ 。