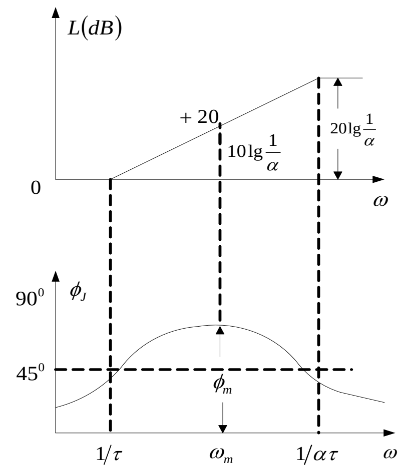
西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

6 上节课要点复习

超前校正装置



$$G_J(j\omega)=\frac{j\omega\tau+1}{j\alpha\omega\tau+1}$$

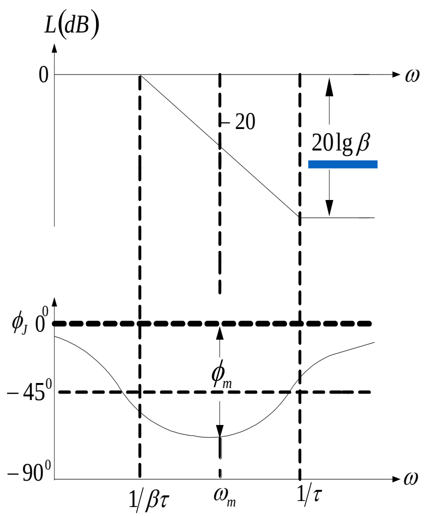
$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$\phi_m=\sin^{-1}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m}$$

特点：相位超前，幅值增加

思想：利用其相角超前特性，将校正装置产生最大超前角的频率配置在新系统开环截止频率处，从而产生最大相位裕量。

迟后校正装置



$$G_J(j\omega)=\frac{j\omega\tau+1}{j\beta\omega\tau+1}$$

$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\beta\tau}}$$

$$\phi_m=\sin^{-1}\frac{1-\beta}{1+\beta}\quad\Rightarrow\quad\beta=\frac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m}$$

特点：幅值衰减，相位迟后

思想：利用幅值衰减带来相位裕量的增加特性，利用其后段产生稳定的$20\lg\beta$衰减，同时配置转折频率$\frac{1}{\tau}$远离ω_0（距离越远，迟后装置带来的相位迟后影响越小）

上节课要点复习

□ 应用频率法对系统进行串联校正

- ✓ 串联超前校正：步骤+例题
- ✓ 串联迟后校正：步骤+例题

□ 按期望模型对系统进行串联校正

按最佳二阶系统校正后开环传函为：

$$G_J(s)G_g(s)=\frac{1}{2Ts(Ts+1)}\qquad \begin{cases}\sigma=4.3\% \\ \omega_n t_s=6 \\ \gamma=65.5^\circ\end{cases}$$

则校正网络传函为：

$$G_J(s)=\frac{G_0(s)\left[=G_J(s)G_g(s)\right]}{G_g(s)}=\frac{1}{2Ts(Ts+1)G_g(s)}$$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

线性离散系统的分析与综合 07

- ☐ 离散系统的基本概念
- ☐ 信号的采样与保持
- ☐ Z变换理论
- ☐ 线性离散系统的数学模型、稳定性与稳态误差
- ☐ 线性离散系统的动态性能分析
- ☐ 数字PID校正

控制系统分类：按输入输出量是否连续

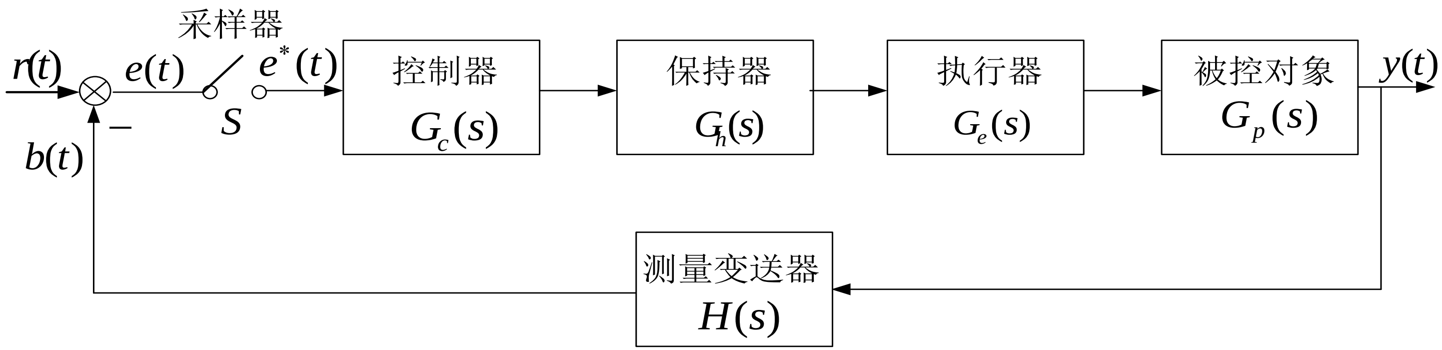
- 连续控制系统（Continuous Control System）：所有信号都是时间变量的连续函数；
- 离散控制系统（Discrete Control System）：一处或数处为脉冲信号或数字信号（采样控制系统，数字控制系统）。

- 离散系统与连续系统相比，既有本质不同，又有分析研究方面相似性。
- 利用z变换法研究离散系统，可以把连续系统中的许多概念和方法，推广应用于线性离散系统。

连续量　微分方程　拉氏变换　代数方程　稳、准、好

离散量　差分方程　z变换　代数方程　稳、准、好

采样控制系统



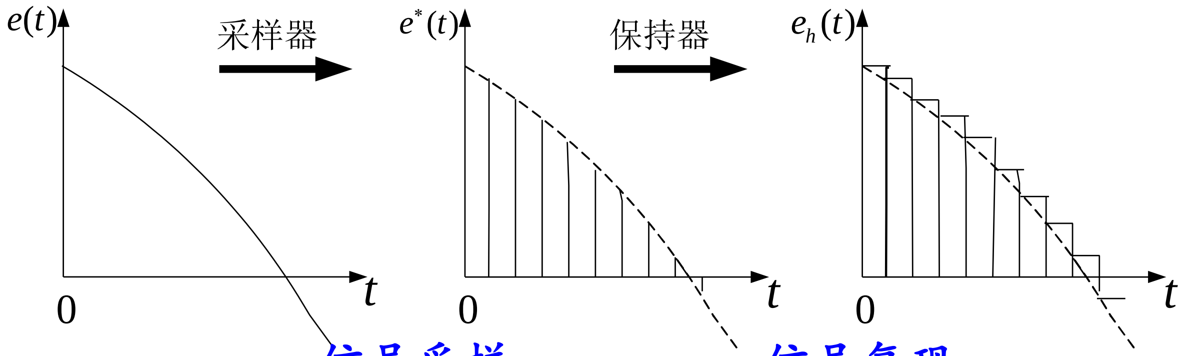
误差采样控制的闭环控制系统

信号采样： 采样开关（采样器）、采样周期*T*、采样频率 *f*

信号复现/恢复： 保持器

7.1 离散系统的基本概念

信号采样与复现



采样过程中，经过采样器，连续信号→脉冲序列，采样后，采样点间信息会丢失；采样后，e*(t)时间上断续，幅值上连续。

- 如果是等时间间隔采样，则称为普通采样、均匀采样、周期采样。采样间隔时间称为采样周期，常用T表示。
- 如果采样时间间隔是时变的，则称非周期采样、非均匀采样等。
- 如果采样的时间间隔是随机的，则称为随机采样。

信号复现过程，经保持器后，脉冲序列→连续信号，最简单的保持器为零阶保持器，将脉冲序列e*(t) 复现为阶梯信号。

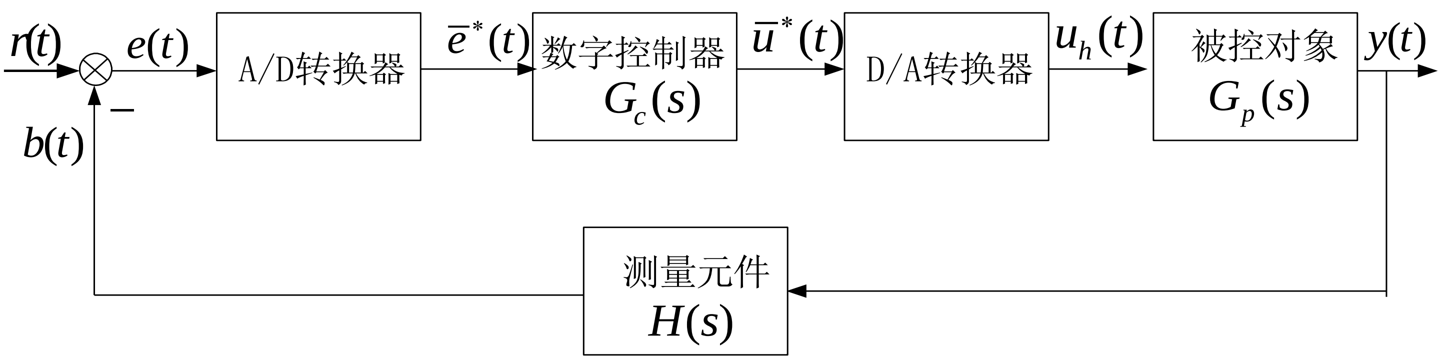
信号采样与复现

一个离散系统中往往存在多个采样开关。如果系统中所有采样开关同时采样，则称为同步采样，否则称为非同步采样。如果所有采样开关都是均匀采样，但采样周期不等，则称为多速采样。

- 信号的采样过程：通过采样开关将连续信号离散化，转变为脉冲序列信号；
- 信号的保持过程：通过信号保持器将离散信号连续化的过程；
- 两者互为逆过程。

数字控制系统

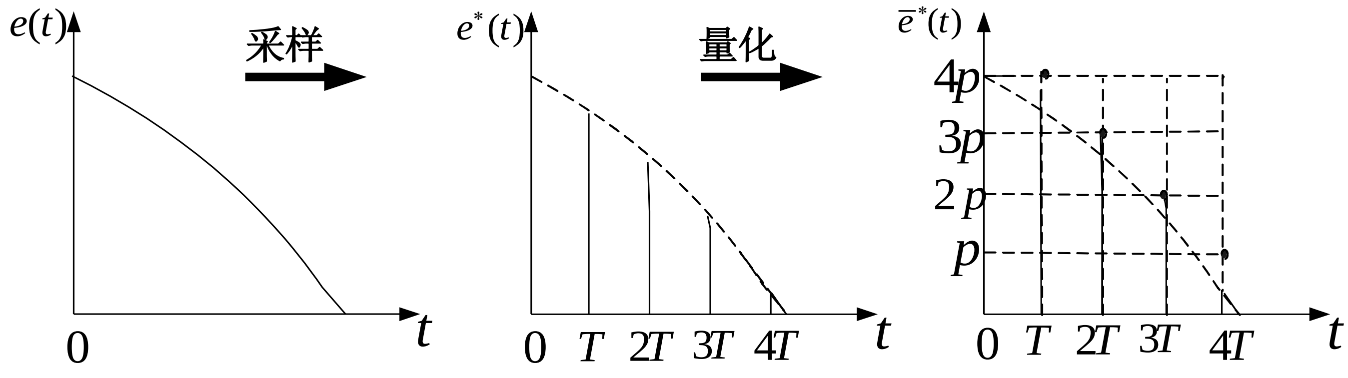
数字控制系统以计算机为控制器去控制具有连续工作状态被控对象的闭环控制系统。因为计算机不能对连续的模拟量进行处理，所以必须采用A/D和D/A的环节。



数字控制系统

A/D转换器 采样+量化编码

量化就是把采样信号用其最小单位物理量（如伏特）的整数倍表示的这一过程。由此可见，采样信号是幅值上连续变化的模拟量，但只要变化不超过量化单位（例如：1伏），则数字量不变，所以量化过程实质是一个“数值分层”过程。（台阶型）。



数字控制系统

A/D转换器

量化单位（分辨率、量化增量）：最小单位物理量，可表示为：

$$q = \frac{M}{2^n - 1}$$

q为量化单位；M为被转换的最大模拟量；n为模/数（或数/模）转换器的位数。

比如：A/D为8位，电压变化为 0～5伏，则 $q = \frac{5}{255} \approx 0.02\ \mathrm{v}$

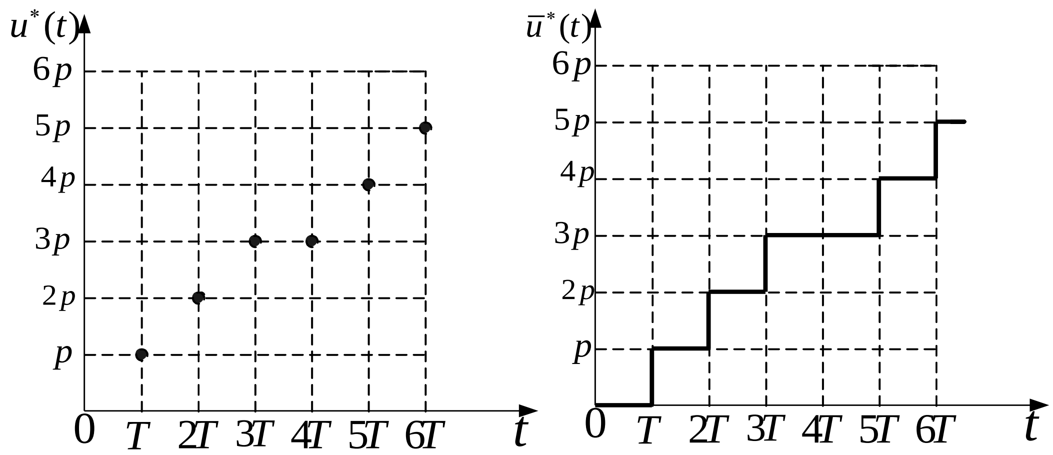
那么一个数字量1代表0.02伏。误差为 $\pm q = \pm 0.01\ \mathrm{v}$ ，在A/D中表示为1/2 LSB（Least Significant Bit，最低有效位）。

数字控制系统

D/A转换器

D/A转换包括解码过程和复现过程：

- **解码过程：**把离散数字信号转换为离散的模拟信号；
- **复现过程：**通过保持器，将离散模拟信号复现为连续模拟信号。



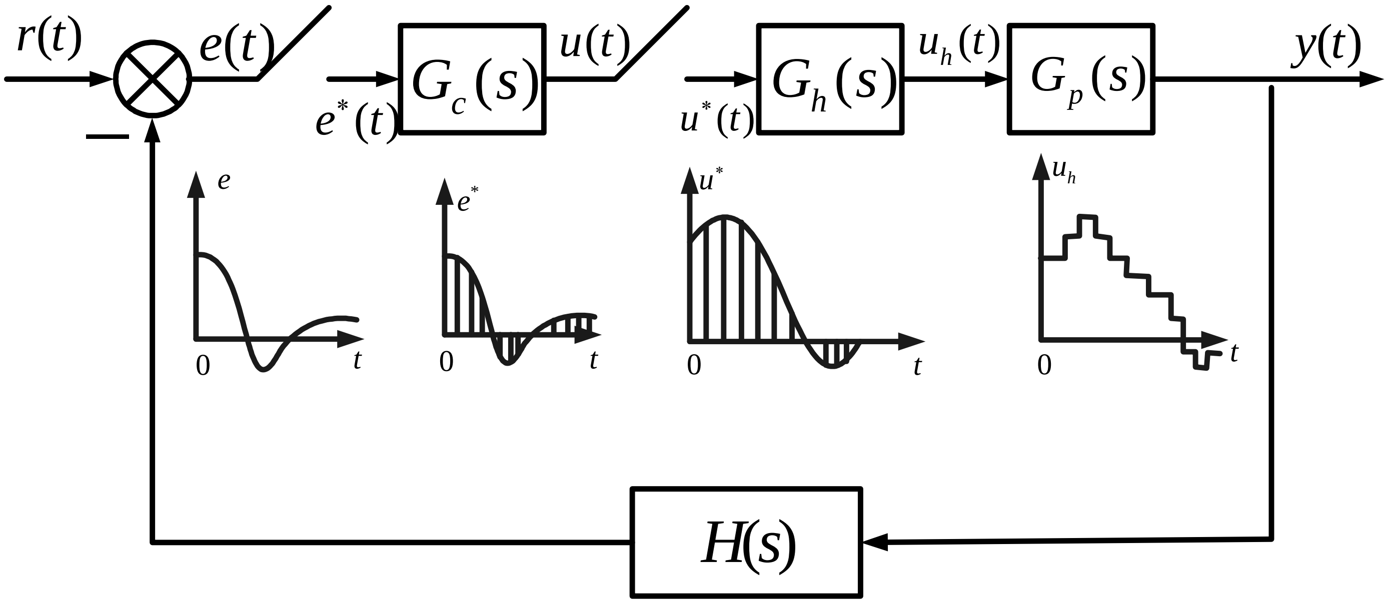
数字控制系统

$$q = \frac{M}{2^n - 1}$$

在数字控制系统中，不管是A/D(或D/A)转换器，还是计算机，无论其精度有多高，其转换或计算的位数都是有限的，因此量化过程实质上是用一个有限位数的数无限逼近一个模拟量，无论如何都不能包含模拟量的全部信息，这就出现了误差，这个误差被称为量化误差。

量化误差是量化过程中的固有误差，它与A/D(或D/A)转换器的位数有关。对于一个被转换量，当所用A/D(或D/A)转换器的位数增加时，其量化误差可以减小，但不能被消除。

数字控制系统



计算机控制系统的等效结构图

数字控制系统

与连续系统相比，在确定的条件下，数字控制系统的性能会有所降低，但数字控制系统具有以下优点：

（1）控制规律修改和调整方便，控制灵活。（软件实现）

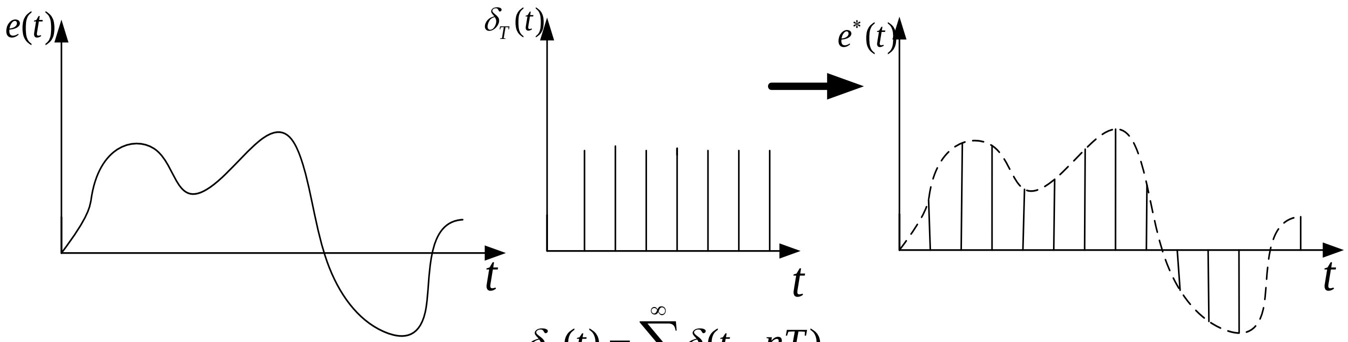
（2）数字信号的传递可以有效地抑制噪声，从而提高了系统的抗干扰能力。

（3）可以采用高灵敏度的控制元件/控制策略，提高系统的控制精度。

（4）可用一台计算机分时控制若干个系统，提高设备的利用率，经济性好。

信号的采样（Sample）

一个理想采样器可以看作是一个载波为理想单位脉冲序列$\delta_T(t)$的幅值调制器。



$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$e^*(t)=e(t)\delta_T(t)\ \Rightarrow\ e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

信号的采样（Sample）

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

对采样信号$e^*(t)$进行拉氏变换：

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=L[\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\,L[\delta(t-nT)]$$

根据拉氏变换的延迟定理，有： $L[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)$

$$L[\delta(t-nT)]=\mathrm{e}^{-nTs}\int_0^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}dt=\mathrm{e}^{-nTs}$$

位移定理

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)]=F(s+\alpha)$$

则采样信号的拉氏变换为：

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs}$$

连续信号与采样信号频谱的关系

- 由于采样信号只包括连续信号采样时刻点上的信息，所以采样信号的频谱与连续信号的频谱相比，要发生变化。

- 理想单位脉冲序列是周期函数，可以展开为傅氏级数的形式。

$$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{jn\omega_s t}$$

则采样信号傅氏级数形式为：

$$e^*(t)=e(t)\delta_T(t)$$

$$e^*(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e(t)\mathrm{e}^{jn\omega_s t}$$

连续信号与采样信号频谱的关系

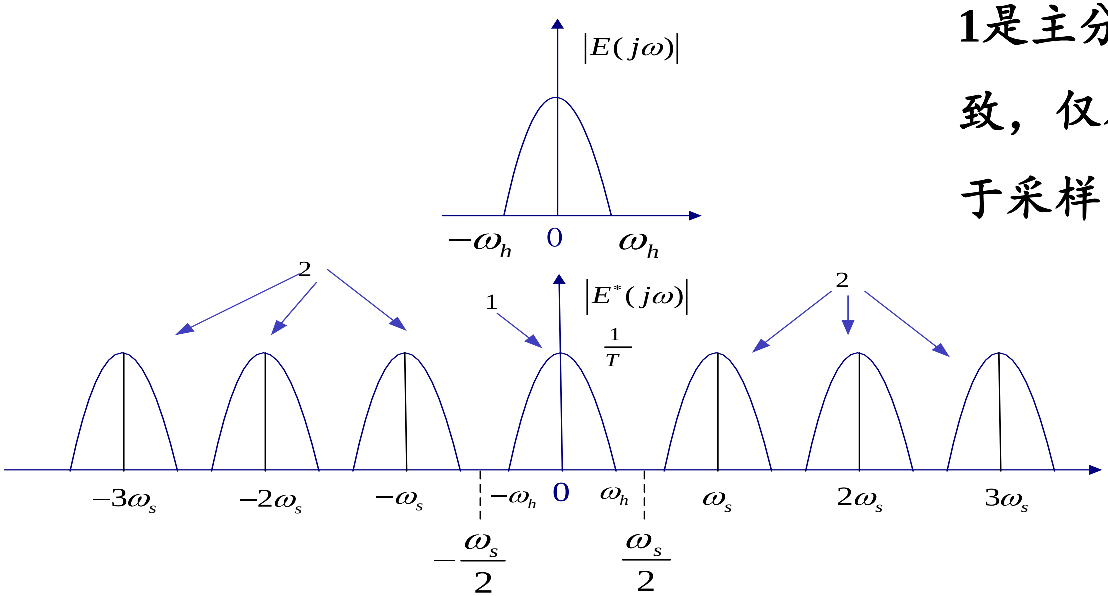
非周期连续信号e(t)的傅氏变换：

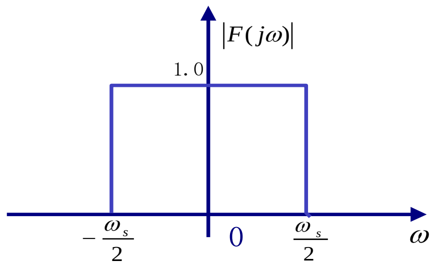
$$E(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e(t)e^{-j\omega}dt$$

采样信号e*(t)的傅氏变换：

$$E^{*}(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E[j(\omega+n\omega_s)]$$

是连续信号频谱|E(jw)|以采样角频率ω_s为周期的无穷多个频谱扩展，曲线1是主分量，与连续频谱|E(jω)|形状一致，仅在幅值上变化1/T；曲线2是由于采样引起的高频分量。





理想低通滤波器的频率特性

$\omega_s>2\omega_h$,没有发生频率混叠，可用低通滤波器恢复原来连续信号的频谱。

香农(Shannon)采样定理

如果输入信号$e(t)$具有有限的带宽（具有到ω_h的频率分量），则若要从采样信号$e^*(t)$ 中完全复现出采样前的连续信号$e(t)$，对采样频率ω_s应满足以下要求：

$$\omega_s \geq 2\omega_h \quad 或 \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_h}$$

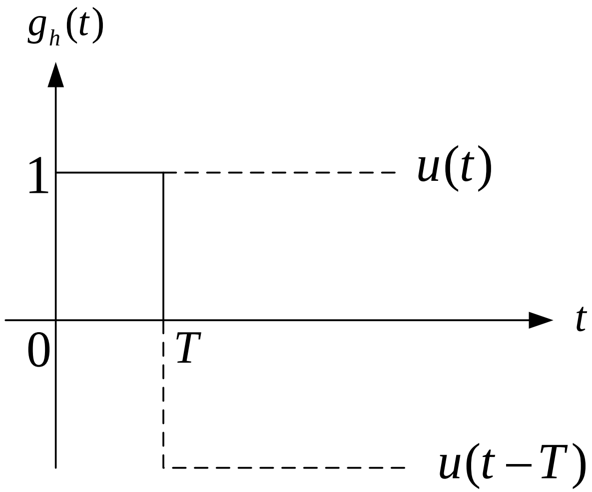
实际应用中，采样周期的选择是一个重要的问题，目前从理论上还未找到确定采样周期的切实可行方法，所以采样定理只是指出了方向。

$$\omega_s = 3 \sim 5\omega_h$$

信号保持(恢复)——零阶保持器

零阶保持器(Zero Order Holder，Z.O.R.)把前一采样时刻nT的采样值$e(nT)$一直保持到下一采样时刻$(n+1)T$到来之前。

给零阶保持器输入一个理想单位脉冲$\delta(t)$，则单位脉冲响应函数$g_h(t)$是幅值为1，时间长度为T的矩形脉冲，它可以分解为两个单位阶跃函数的和，即：



$$g_h(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

信号保持(恢复)——零阶保持器

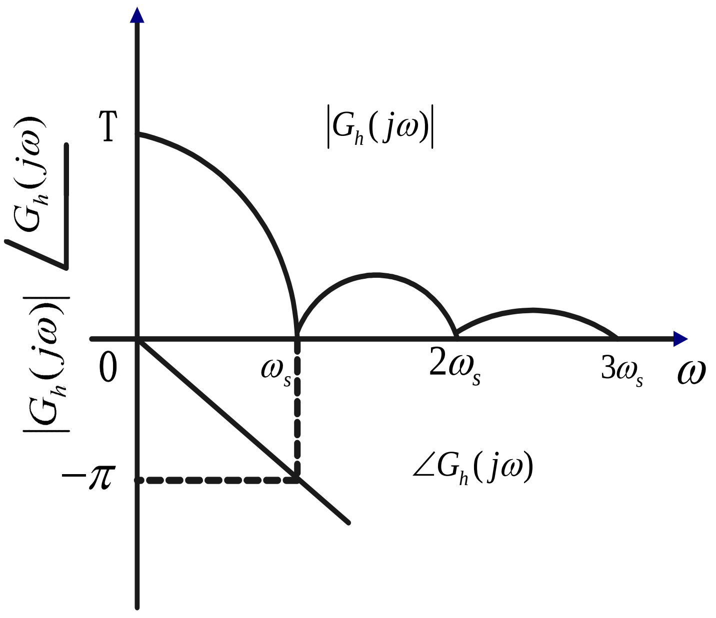
$$g_h(t)=1(t)-1(t-T) \quad \Rightarrow \quad G_h(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$G_h(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{2e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2})}{2j\omega}$$

$$=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-j\omega T/2}$$

若 $\omega_s=2\pi/T \quad \Rightarrow \begin{cases} T=2\pi/\omega_s \\ \omega T/2=\pi\omega/\omega_s \end{cases}$

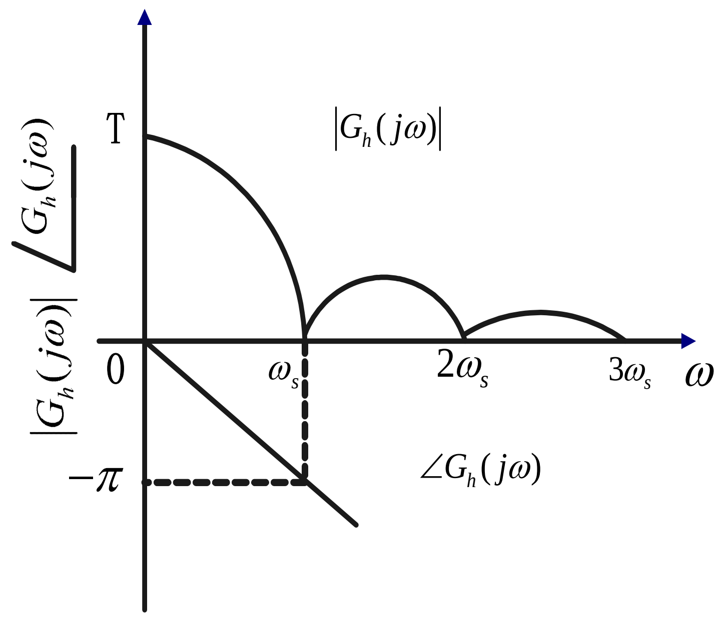
$$G_h(j\omega)=\frac{2\pi}{\omega_s}\frac{\sin\pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)}e^{-j\pi(\omega/\omega_s)}$$



信号保持(恢复)——零阶保持器

零阶保持器的特性：

- **相角滞后特性：** 零阶保持器要产生相角滞后，且随频率增大而增大，在 $\omega=\omega_s$ 处，相角滞后可达-180°，从而使系统的稳定性变差。
- **低通特性：** 由于幅值随频率增大而迅速衰减，说明零阶保持器基本上是一个低通滤波器，但与理想滤波器相比，在 $\omega=\omega_s/2$ 时，幅值是初值的63.7%，其允许主要频谱分量通过外，还允许部分高频分量通过，从而造成数字控制系统的输出频率在高频段存在纹波。



z变换定义

在分析连续系统时，可通过拉氏变换将微分方程转换为代数方程。对于离散系统，也可以**通过z变换将差分方程转换成代数方程**。

采样信号$e^*(t)$的拉氏变换为：$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nsT}$

$E^*(s)$不再是s的代数函数，而是s的**超越函数**。

$$\text{初等函数}\begin{cases}\text{超越函数}\begin{cases}\text{三角函数}\\\text{指数函数}\\\text{对数函数}\end{cases}\\\text{代数函数}\end{cases}$$

令 $z=\mathrm{e}^{Ts}\quad\Rightarrow s=\dfrac{1}{T}\ln z$

则采样信号$e^*(t)$的z变换为：

$$E(z)=\underline{Z[e^*(t)]=Z[e(t)]=Z[E(s)]}$$

均表示对离散信号$e^*(t)$的z变换。

$$\Rightarrow E(z)=E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

z变换方法

分析常用的z变换方法有级数求和法和部分分式法。

□ 级数求和法

根据z变换的定义，将连续信号按周期进行采样，将采样点处的值代入，可得：

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

$$=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

再求出上式的闭合形式，即可得到$E(z)$。

z变换方法

$$E(z)=Z[e(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

□ 级数求和法

例： 求$x(t)=t$的z变换表达式。

解：

$$X(z)=Z\left[x(t)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=Tz^{-1}+2Tz^{-2}+3Tz^{-3}+\cdots$$

$$=Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+\cdots)=Tz^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}+\cdots\right)$$

$$=Tz^{-1}\frac{\frac{1}{1-z^{-1}}}{1-z^{-1}}=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

z变换方法

部分分式法

已知连续信号的拉氏变换，将其展开成部分分式之和：

$$E(s)=E_1(s)+E_2(s)+\cdots+E_n(s)$$

每一个部分分式，都是z变换表中所对应的标准函数，其z变换即可查表（p.343 附录1）得出：

$$E(z)=E_1(z)+E_2(z)+\cdots+E_n(z)$$

z变换方法

□ 部分分式法

例7.2： 求$E(z)$ $\quad E(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+1)}$

解：

$$E(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$$

$$\frac{2Tz}{(z-1)^2} \qquad \frac{z}{z-1} \qquad \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{2Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$=\frac{(2T+e^{-T}-1)z^2+[1-e^{-T}(2T+1)]z}{(z-1)^2(z-e^{-T})}$$

Z反变换

已知z变换表达式$E(z)$，求相应离散序列$e(nT)$的过程，称为z反变换，即：

$$e(nT)=Z^{-1}[E(z)]$$

当$n<0$时，$e(nT)=0$，信号序列$e(nT)$是单边的。对单边序列常用的z反变换法有部分分式法、幂级数法和反演积分法。

□ 部分分式法

又称查表法，考虑到表中z变换函数分子上都有因子z，所以先将$E(z)/z$展成部分分式之和然后将分母中的z乘到各分式中，再逐项查表求得反变换。

Z反变换

- 部分分式法

例7.3： 求$e(nT)$ $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-3)}$

解：

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-3)}=\frac{-5}{z-1}+\frac{5}{z-3} \Rightarrow E(z)=\frac{-5z}{z-1}+\frac{5z}{z-3}$$

$$Z^{-1}[\frac{z}{z-1}]=1$$

$$Z^{-1}[\frac{z}{z-3}]=3^n$$

$$\Rightarrow e(nT)=5(-1+3^n) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

Z反变换

☐ 幂级数法

若$E(z)$是一个有理分式，则可以通过长除法得到一个无穷项幂级数的展开式，根据z^{-n}的系数便可得出时间序列$e(nT)$的值。

长除法

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\cdots+e(nT)z^{-n}+\cdots$$

$$e^{*}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

Z反变换

□ 幂级数法

例7.4： 求$e(nT)$ $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-3)}$

解：

$$E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-3)}=\frac{10z}{z^2-4z+3}$$

长除法

$$E(z)=0z^0+10z^{-1}+40z^{-2}+130z^{-3}+400z^{-4}+\cdots$$

$$e^*(t)=10\delta(t-T)+40\delta(t-2T)+130\delta(t-3T)+400\delta(t-4T)+\cdots$$

长除法以序列的形式给出$e(0)$，$e(1T)$，$e(2T)$，$e(3T)$，…的数值，不容易得出$e(nT)$的封闭表达形式。

Z反变换

反演积分法

$E(z)$除有理分式外，也可能是超越函数，只能用反演积分法。

反演积分公式

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

$E(z)z^{n-1}$在z_i处的留数

$$e(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}E(z)z^{n-1}dz=\sum_{i=1}^{k}\boxed{\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}}$$

单极点：$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}=\lim\limits_{z\to z_i}[(z-z_i)E(z)z^{n-1}]$

m重极点：$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}=\dfrac{1}{(m-1)!}\left\{\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_i)^m E(z)z^{n-1}]\right\}_{z=z_i}$

Z反变换

反演积分法

$$e(nT)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}$$

例7.5： 求$e(nT)$

$$E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-3)}$$

解：

$$e(nT)=\sum\mathrm{Res}\left[\frac{10z}{(z-1)(z-3)}z^{n-1}\right]$$

$$\mathrm{Res}[E(z)z^{n-1}]_{z\to z_i}=\lim_{z\to z_i}[(z-z_i)E(z)z^{n-1}]$$

$$=\left[\frac{10z^n}{(z-1)(z-3)}(z-1)\right]_{z=1}+\left[\frac{10z^n}{(z-1)(z-3)}(z-3)\right]_{z=3}$$

$$=-5+5\times 3^n=5(-1+3^n)$$

7.4 线性离散系统的数学模型

- 为了研究离散系统的性能，需要建立离散系统的数学模型。
- 线性离散系统的数学模型有差分方程、脉冲传递函数。
- 主要介绍差分方程及其解法，脉冲传递函数的定义，以及求开环脉冲传递函数和闭环脉冲传递函数的方法。

线性常系数差分方程

对于线性定常离散系统，k时刻的输出$y(k)$，不但与k时刻的输入$r(k)$有关，而且与k时刻以前的输入$r(k-1), r(k-2), \ldots$有关，同时还与k时刻以前的输出$y(k-1), y(k-2), \ldots$有关。这种关系一般可以用n阶后向差分方程来描述：

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j r(k-j)$$

也可以用n阶前向差分方程来描述：

$$y(k+n) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k+n-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j r(k+m-j)$$

7.4 线性离散系统的数学模型

线性常系数差分方程

工程上求解线性常系数差分方程通常采用：

- 迭代法(递推法) $y(k)=-\sum_{i=1}^{n}a_i y(k-i)+\sum_{j=0}^{m}b_j r(k-j)$

已知差分方程式，给定输出序列的初值，则可以利用递推关系，通过迭代一步一步地算出输出序列。

- z变换法

利用z变换的实数位移定理，对差分方程两端取变换，得到以z为变量的代数方程，然后对代数方程的解$y(z)$ 取z反变换，求得输出序列$y(k)$。

线性常系数差分方程

z变换的性质和定理:

- 线性性质:

$$Z\left[r_1(t)\pm r_2(t)\right]=R_1(z)\pm R_2(z)$$

$$Z\left[ar(t)\right]=aZ\left[r(t)\right]=aR(z)$$

- 实数位(平)移定理:

$$Z\left[r(t-kT)\right]=z^{-k}R(z)$$

$$Z\left[r(t+kT)\right]=z^{k}[R(z)-\sum_{n=0}^{k-1}r(nT)z^{-n}]$$

$$Z\left[r(t+2T)\right]=z^{2}R(z)-z^{2}r(0)-zr(T)$$

例7.8： 试用z变换法解差分方程，初始条件y(0)=0，y(1)=1。

$$y(k+2)-2y(k+1)+y(k)=0$$

解：

$$Z[y(k+2)-2y(k+1)+y(k)]=Z[y(k+2)]+Z[-2y(k+1)]+Z[y(k)]=0$$

$$Z[y(k)]=Y(z)$$

$$Z[-2y(k+1)]=-2[zY(z)-zy(0)]=-2zY(z)$$

$$Z[y(k+2)]=z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)=z^2Y(z)-z$$

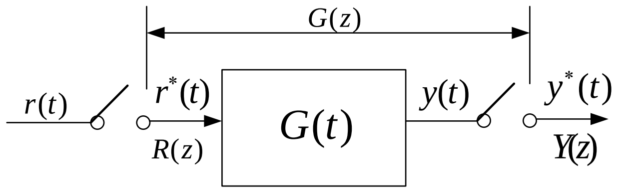
$$(z^2-2z+1)Y(z)=z \Rightarrow Y(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow y^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n\delta(t-n)$$

不便于研究系统参数变化对性能的影响，所以需要另一种数学模型——脉冲传递函数

脉冲传递函数

脉冲传递函数定义：在零初始条件下，系统输出采样信号的z变换 y(z)与输入采样信号的z变换r(z)之比：

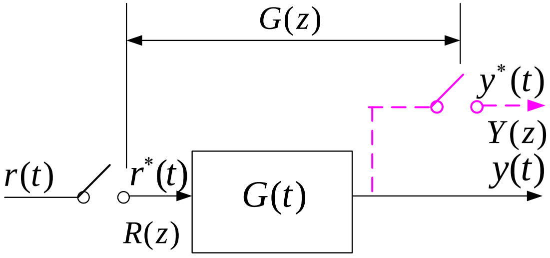


$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}}$$

零初始条件：当$t<0$时，$r(-T)$，$r(-2T)$，…以及 $y(-T)$，$y(-2T)$，…均为零。

$$y(nT)=Z^{-1}[Y(z)]=Z^{-1}[G(z)R(z)]$$

输出是连续信号$y(t)$ 时，可在输出端虚设一个开关，它与输入采样开关同步工作，具有相同的采样周期。但实际上虚设开关是不存在的，只是表明脉冲传递函数所能描述的是输出连续信号$y(t)$在采样时刻的离散值$y^*(t)$。



脉冲传递函数

$$z = e^{Ts}$$

脉冲传递函数的性质：

(1) 脉冲传递函数是复变量z的复函数（一般是有理分式）；

(2) 脉冲传递函数只与系统自身的结构、参数有关；

(3) 脉冲传递函数与系统的差分方程有直接关系；

(4) 脉冲传递函数是系统的单位脉冲响应序列的z变换；

(5) 脉冲传递函数在z平面上有对应的零、极点分布。 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}$

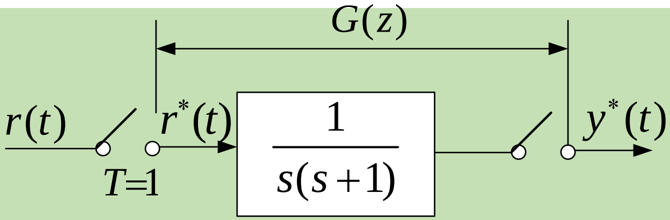
由传递函数求脉冲传递函数：

$$G(s) \Rightarrow L^{-1}[G(s)] = k(t) \Rightarrow \text{离散化}\, k(t) = k(nT) \Rightarrow Z[k(nT)] = G(z)$$

将G(s)变为z变换表的标准形式，查表可得到G(z)。$G(z) = Z[G(s)]$

例7.9： (1) 求系统的脉冲传递函数；

(2) 写出系统的差分方程。



解： (1) 系统的脉冲传递函数为：

$$G(z)=Z\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=Z\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\xrightarrow{T=1}=\frac{0.632z}{z^2-1.368z+0.368}=\frac{0.632z^{-1}}{1-1.368z^{-1}+0.368z^{-2}}$$

(2) 根据 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{0.632z^{-1}}{1-1.368z^{-1}+0.368z^{-2}}$

两端求z反变 $\Rightarrow (1-1.368z^{-1}+0.368z^{-2})Y(z)=0.632z^{-1}R(z)$

换得到差分方 $y(k)-1.368y(k-1)+0.368y(k-2)=0.632r(k-1)$

程为：

7.4 线性离散系统的数学模型

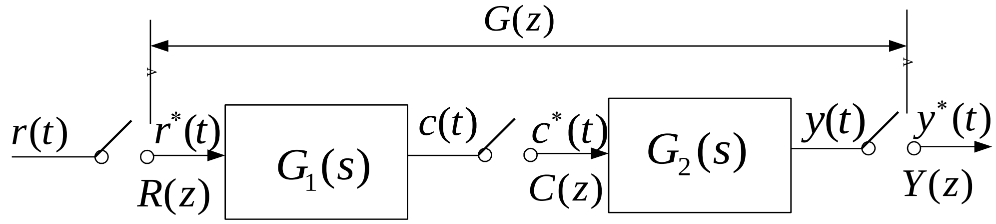
开环系统的脉冲传递函数

当开环离散系统由几个环节串联组成时，由于采样开关的数目和位置不同，求出的开环脉冲传递函数也不同。

□ 串联环节之间有采样开关时

$$C(z)=G_1(z)R(z)$$

$$Y(z)=G_2(z)C(z)$$



$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

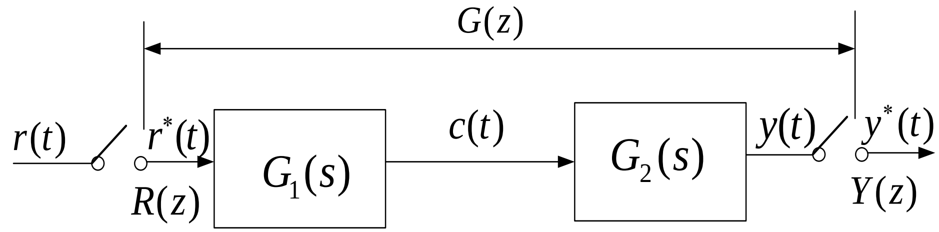
有理想采样开关隔开的两个线性连续环节串联的脉冲传递函数，等于这两个环节各自脉冲传递函数之积。该结论也可以推广到 ***n*** 个环节相串联的情形。

开环系统的脉冲传递函数

□ 串联环节之间无采样开关时

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

连续系统优先!



$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z[G_1(s)G_2(s)]=G_1G_2(z)\quad \neq G_1(z)G_2(z)$$

没有理想采样开关隔开的两个线性连续环节串联时的脉冲传递函数，等于这两个环节传递函数乘积后的相应变换。该结论也可以推广到n个环节相串联的情形。

7.4 线性离散系统的数学模型

例： 已知 $G_1(s)=\dfrac{1}{s}$ ，$G_2(s)=\dfrac{10}{s+10}$ ，两环节串联，求脉冲传递函数。

解：

□ 若有采样开关时：

$$G(z)=G_1(z)G_2(z)=Z[\frac{1}{s}]Z[\frac{10}{s+10}]$$

$$=\frac{z}{z-1}\frac{10z}{z-e^{10T}}=\frac{10z^2}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

□ 若无采样开关时：

$$G(z)=G_1G_2(z)=Z[\frac{10}{s(s+10)}]=\frac{z(1-e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

p.343 附录1 序号9

注：此两环节不同，虽然极点相同，但零点不同 。

开环系统的脉冲传递函数

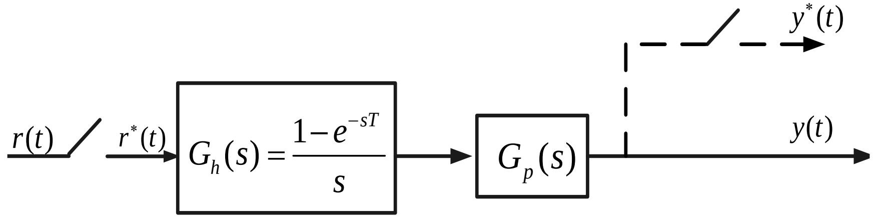
□ 有零阶保持器时

$$Y(z)=Z\left[\frac{(1-e^{-sT})}{s}G_p(s)\right]R(z)$$

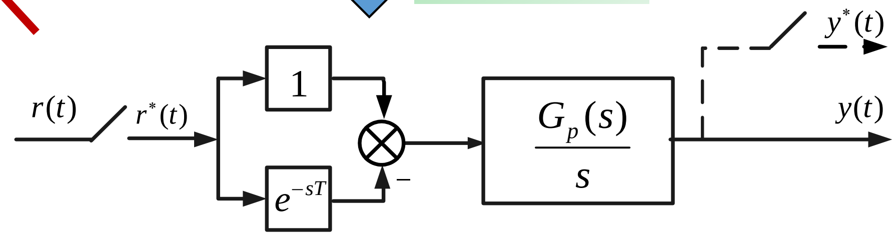
$$=Z\left[\frac{G_p(s)}{s}-e^{-sT}\frac{G_p(s)}{s}\right]R(z)$$

$$=\left\{Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]-Z\left[e^{-sT}\frac{G_p(s)}{s}\right]\right\}R(z)$$

$$=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]R(z)$$



等效变换



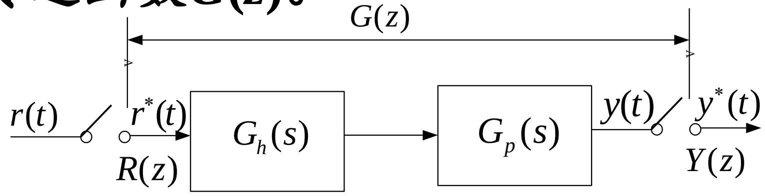
$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

开环系统的脉冲传递函数

□ 有零阶保持器时 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-sT}}{s}$

$$G_p(s)=\frac{ab}{s(s+a)}$$

例7.11： 求离散系统的脉冲传递函数G(z)。



解：$$\frac{G_p(s)}{s}=\frac{ab}{s^2(s+a)}=\frac{b}{s^2}-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

查z变换表 $$\Rightarrow Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]=\frac{Tbz}{(z-1)^2}-\frac{b}{a}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$$

$$=\frac{\frac{b}{a}z[(e^{-aT}+aT-1)z+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})]}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

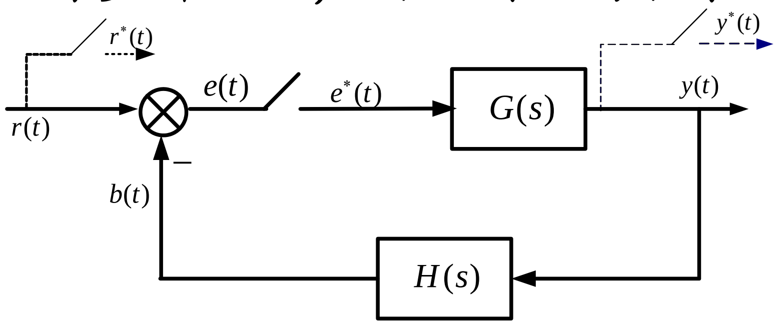
代入

有零阶保持器时开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]=\frac{\frac{b}{a}[(e^{-aT}+aT-1)z+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})]}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

闭环系统的脉冲传递函数

由于采样器在闭环系统中可以有多种配置，因此闭环离散系统结构图形式并不唯一。



误差采样闭环离散系统

$$\begin{cases} Y(z)=G(z)E(z) \\ E(z)=R(z)-B(z) \\ B(z)=GH(z)E(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{R(z)}{1+GH(z)} \quad \Rightarrow W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

P263-表7.1-序号1

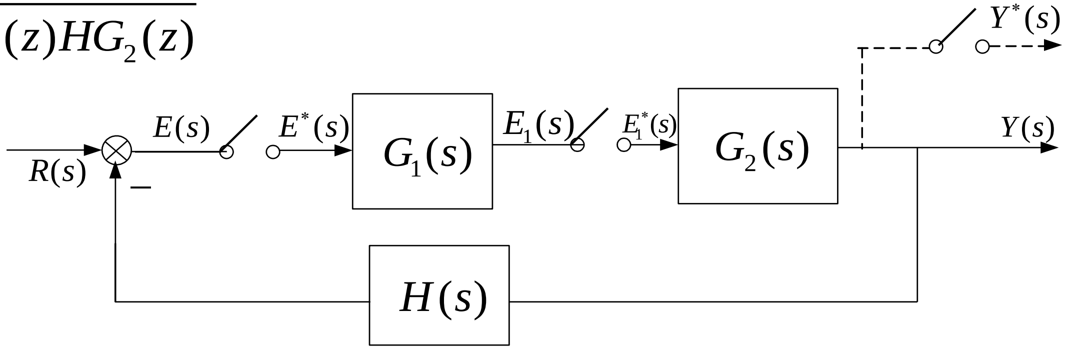
开环脉冲传递函数

闭环离散系统的误差传递函数为：$W_e(z)=\dfrac{E(z)}{R(z)}=\dfrac{1}{1+GH(z)}$

闭环离散系统的特征方程为：$D(z)=1+GH(z)=0$

闭环系统的脉冲传递函数

例7.12： 证明 $W(z)=\dfrac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$



证：

$$\begin{cases} Y(z)=G_2(z)E_1(z) \\ E_1(z)=G_1(z)E(z) \\ E(z)=R(z)-HG_2(z)E_1(z) \end{cases}$$

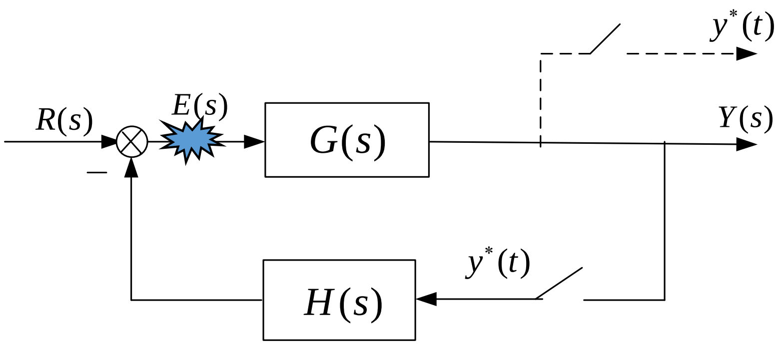
$$\Rightarrow E_1(z)=\frac{G_1(z)R(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)} \quad Y(z)=G_2(z)E_1(z)\Rightarrow Y(z)=\frac{G_2(z)G_1(z)R(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$$

P263-表7.1-序号4

$$\Rightarrow W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)HG_2(z)}$$

闭环系统的脉冲传递函数

例7.13： 求闭环脉冲传递函数



解： $Y(z) = GR(z) - GH(z)Y(z)$

$$\Rightarrow [1+GH(z)]Y(z) = GR(z)$$

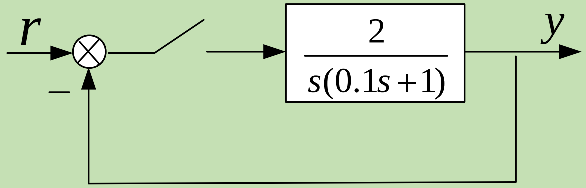
$$\Rightarrow Y(z) = \frac{GR(z)}{[1+GH(z)]} \quad \Rightarrow W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \ ???$$

$E(s)$处没有采样开关，解不出$Y(z)/R(z)$。

但可以求出$Y(z)$，从而确定闭环系统采样输出信号$y^*(t)$。

- 在求解复杂离散系统的脉冲传递函数时，由于采样开关处在不同的位置，即使各动态环节的传递函数相同，脉冲传递函数也可能不同。
- 有时采样开关位置可能导致无法求出脉冲传函，而只能求出输出Y的z变换表达式。
- 如果从输入到输出的直接通道均无采样开关，则不可能写出闭环脉冲传函。

例： 根据离散系统结构，当T=0.1时，求系统的单位阶跃响应。



解：

$$G(z)=Z[\frac{2}{s(0.1s+1)}]=\frac{2z}{z-1}-\frac{2z}{1-e^{-10T}}\xrightarrow{T=0.1}=\frac{2z-0.736z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Rightarrow W(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{1.264z}{z^2-0.104z+0.368}\qquad=\frac{1.264z}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$Y(z)=W(z)R(z)\ =\frac{1.264z}{z^2-0.104z+0.368}\cdot\frac{z}{z-1}\qquad r(t)=1\Rightarrow R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$=1.264z^{-1}+1.396z^{-2}+0.945z^{-3}+0.849z^{-4}+\cdots$$

$$y^*(t)=1.264\delta(t-0.1)+1.396\delta(t-0.2)+\cdots$$

本次课小结

□信号的采样与保持

信号采样 $e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$ $E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\mathrm{e}^{-nTs}$

香农定理 $\omega_s \geq 2\omega_h$

零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$

□z变换理论

z变换：级数求和法和部分分式法

$$E(z)=Z[e^*(t)]=Z[e(t)]=Z[E(s)]$$

$$\Rightarrow E(z)=E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

z反变换：部分分式法、幂级数法和反演积分法(留数法)

线性离散系统的数学模型

- **线性常系数差分方程：** 迭代法(递推法),z变换法
- **脉冲传递函数定义：** $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}}$
- **由传递函数求脉冲传递函数** $G(s)\Rightarrow L^{-1}[G(s)]=k(t)\Rightarrow$ 离散化$k(t)=k(nT)\Rightarrow Z[k(nT)]=G(z)$
- **开环系统的脉冲传递函数**

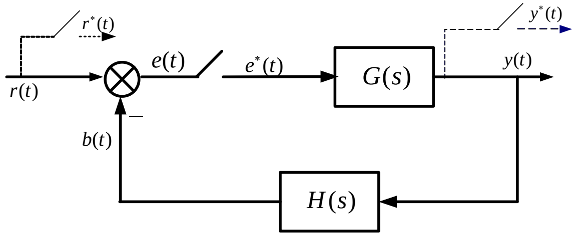
串联环节之间有采样开关时 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$

串联环节之间无采样开关时 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=G_1G_2(z)$

有零阶保持器时 $G(z)=\dfrac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{G_p(s)}{s}\right]$

- **闭环系统脉冲传递函数**

结构图，注意采样开关的位置



$$\Rightarrow W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$