

第4章 傅里叶变换

线性系统时域分析的出发点在于任意的信号可以分解为冲激信号，或者任意信号可以使用冲激信号来合成，且任意信号作用下线性系统的响应可以通过叠加原理对冲激信号作用下的响应加权求和得到。系统分析方法及相关概念的讨论均在非常自然的时间域进行。

自然的时间域信号 $x(t)$ ，也可以用不同频率的虚指数函数合成，则信号 $x(t)$ 也可以改用以频率为自变量的函数表示，形成与时间域对等的变换域——频域。傅里叶变换是在傅里叶级数正交函数展开的基础上发展而产生的，这方面的问题也称为傅里叶分析。傅里叶分析的研究与应用已有 200 年的历史。1807 年 12 月，傅里叶在他的一篇关于热学原理的论文中宣布了“一个有限区间上用任意不规则图形所定义的一个任意函数（连续或不连续点）总是能够表示为正弦信号的和（傅里叶级数）”的结果。1822 年，傅里叶“热的分析理论”著作的发表，奠定了傅里叶级数的理论基础，随后 1829 年狄利克雷完成了傅里叶级数展开中收敛条件的证明。经过泊松、高斯等人的努力，傅里叶分析这一成果在电学领域得到了广泛的应用。进入 20 世纪以后，电力工程、通信与控制系统等诸多方面的理论与实际应用的巨大发展，人们越来越认识到采用频域（频率域）的分析方法较之经典的时域（时间域）方法有许多突出且不可替代的优点。现在，傅里叶分析方法已经成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

本章首先从信号的功率与能量概念入手，在对连续时间信号进行分类的基础上确定将不同的信号变换到频域应该使用的分解方法。通过引入信号的正交分解概念，给出信号分解的一般理论，重点指出傅里叶级数和变换仅仅是众多信号变换方法的一类。从傅里叶级数正交函数展开问题开始讨论，建立信号频谱的概念并引出傅里叶变换。在对典型信号频谱以及傅里叶变换性质进行讨论的基础上，以信号的无失真传输、理想滤波器、调制与解调、时、频分复用等为对象，研究线性系统的频域分析与设计问题。对于连续时间周期信号，除了使用傅里叶级数进行频谱分析外，还讨论了对应的傅里叶变换所具有的特性，进而研究了抽样定理相关的理论与概念。

4.1 信号的能量和功率

实际中，信号千差万别，随时间变化有快有慢，幅度有大有小、有正有负。为了

便于对所有的信号进行相同的描述或相互之间进行比较, 建立一个统一的度量关系非常必要。针对不同的信号, 功率和能量就是两个用来衡量绝大部分信号共同特征的两个度量。

电路理论中的功率和能量术语有其特定意义, 而信号的功率和能量则是借用功率和能量的概念, 采用定义的方式得到的两个对信号进行分类的度量。

信号 $x(t)$ 的能量采用下式计算

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (4-1)$$

上式的物理意义可以这样理解: 把信号 $x(t)$ 看作随时间变化的电压或电流, 使其通过一个 1Ω 的电阻, 在时间间隔 T 内所消耗的能量。

比照传统上功率与能量之间的关系, 信号的功率采用下式计算

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (4-2)$$

显然, 信号功率的物理意义也可以理解为信号 $x(t)$ 通过 1Ω 的电阻所吸收的功率。

从数学上考虑, 式(4-1)计算的是 $|x(t)|^2$ 在 T 长度下的面积; 式(4-2)计算的是 $|x(t)|^2$ 在 T 长度下的面积除以积分的长度。容易判断, 不能平方绝对可积的信号有 $E \rightarrow \infty$, P 则有可能是一个有限值; 反之, 平方绝对可积的信号, E 为有限值, 而 P 肯定为零。

应该指出的是, 尽管 E 和 P 被称为信号的能量和功率, 但其并不具备传统意义下的能量与功率的单位。例如, 当把信号 $x(t)$ 看作一电压信号时, 能量 E 的单位为伏特平方秒, 而不是焦耳; 同理, 功率 P 的单位是伏特平方, 而不是瓦特。

基于信号能量与功率的定义, 在统一尺度的度量下, 大多数情况下可以把信号分为能量信号与功率信号。

若信号的能量 E 为不等于零的有限值且功率 P 为零, 即 $0 < E < \infty$, $P = 0$, 则信号为能量信号。显然, 一个信号 $x(t)$ 成为能量信号的必要条件是

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

若信号的能量 E 为不为有限值且功率 P 不等于零的有限值, 即 $E \rightarrow \infty$, $0 < P < \infty$, 则信号为功率信号。容易看出, 如果一个信号是周期的, 或者具有某种统计规律性, 必然在接近无限大的某个大的时间间隔上进行平均的信号平均值存在。

若信号的能量 E 和功率 P 均不是有限值, 则该信号既不是能量信号, 也不是功率信号。例如, 斜变信号 $x(t) = t$, 由于其随 $|t| \rightarrow \infty$ 无限增长, E 和 P 都不是有限值。

总之, 一个信号不可能既是能量信号又是功率信号, 但可能既不是能量信号也不是功率信号。

例4-1 判断下列信号是能量信号还是功率信号。

$$(1) x_1(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$(2) x_2(t) = D e^{j\omega_0 t}$$

$$(3) x_3(t) = e^{-t}$$

解：(1) $x_1(t)$ 是周期信号，其周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 。一个周期的能量为

$$E_1 = \int_0^{T_0} |x_1(t)|^2 dt = \int_0^{T_0} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \theta) dt = A^2 \int_0^{T_0} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega_0 t + \theta)] dt = \frac{A^2}{2} T_0$$

由于周期信号的定义域为 $(-\infty, \infty)$ ，则周期数 $n \rightarrow \infty$ 。于是，信号的总能量为

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} n E_1 = \infty$$

信号的功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_1(t)|^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n T_0} n E_1 = \frac{E_1}{T_0} = \frac{A^2}{2}$$

显然有 $E \rightarrow \infty$ ， P 为不等于零的有限值，因此信号 $x_1(t)$ 为功率信号。

(2) $x_2(t)$ 是复信号，但不管是复信号还是实信号，都可以使用定义式求信号的 E 和 P ，有

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |D e^{j\omega_0 t}|^2 dt$$

由于 $|e^{j\omega_0 t}| = 1$ ，所以 $|D e^{j\omega_0 t}|^2 = |D|^2$ ，于是

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} T |D|^2 = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_2(t)|^2 dt = |D|^2$$

同样，复信号 $x_2(t)$ 仍是功率信号。

(3) $x_3(t)$ 是实非周期信号，其能量和功率可以分别计算为

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x_3(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |e^{-t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} [e^{-T} - e^T] \right\} = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_3(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |e^{-t}|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2T} [e^{-T} - e^T] \right\} = \infty$$

从上面的计算结果可以看到， $x_3(t)$ 的能量和功率均为无限值，按照前面信号的分类方法，信号 $x_3(t)$ 既不是能量信号，也不是功率信号。

建立信号的统一度量标准，看起来是为了对信号进一步的分类，而实际上，其目的是为建立信号正交分解体系提供统一的误差度量而准备的。因为在讨论信号分解时，必须提供一种判断度量，来判断哪一种分解方式是最佳的。

4.2 信号的正交分解

信号与系统的时域分析表明，把一个随时间变化的信号采用幅值加权的方式，沿时间轴用冲激信号表示，可以阐明很多“直接求解系统方程得到系统响应”所不能解决的问题，有利于对信号和系统的分析和更加深入的了解。

采用幅值加权的方式将信号沿时间轴用冲激信号表示，仅是对信号进行分解的一种方式，为了更进一步认识一个信号所具有的时域与频域的双重特征，本节讨论信号的正交分解问题。

信号的正交分解与向量的正交分解之间存在类比关系，甚至可以把信号当作向量来对待。首先回顾向量的正交分解问题，然后再将相应的概念用到信号上。

向量的正交分解

向量有两个要素：大小和方向。为表示方便并与标量有所区别，使用正体表示向量，例如， \mathbf{x} 是长度为 $|\mathbf{x}|$ 的向量。

分解一个向量就是用一组分量经过组合后近似被分解的向量。例如，图 4-1 中的向量 \mathbf{x} 沿向量 \mathbf{x}_1 方向分解出的分量是 $c\mathbf{x}_1$ ，这意味着向量 \mathbf{x} 可以用 $c\mathbf{x}_1$ 近似。同时，用 $c\mathbf{x}_1$ 近似 \mathbf{x} 的结果产生了误差向量 \mathbf{e} ，即

$$\mathbf{x} = c\mathbf{x}_1 + \mathbf{e} \quad (4-3)$$

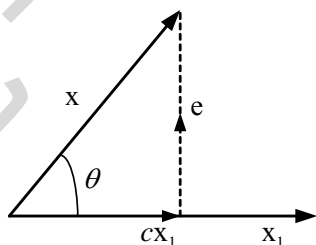


图 4-1 向量的正交分解

如果没有特定条件的限制，用分量近似 \mathbf{x} 可能有无穷多种方式。图 4-2 中给出了两种可能的情况。不管采用哪种近似方式，产生的误差向量可以表示为原始向量与分量之差，例如图 4-1 中的误差向量可以表示为

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - c\mathbf{x}_1 \quad (4-4)$$

同理，图 4-2 中的误差向量 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 也可以比照得到。

如果要对近似的方式加以条件限制，比如要求近似方式获得的结果使得误差向量长度最小，那只有图 4-1 中所示的情况了，也即选择标量 c 的大小使误差向量 \mathbf{e} 的方向与分量 \mathbf{x}_1 的方向垂直。

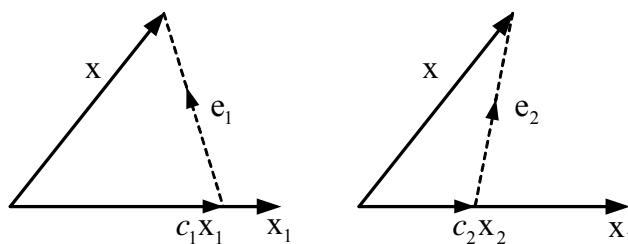


图 4-2 向量的非正交分解

在几何上，使误差向量长度最小的近似方式就是 x 在 x_1 上的投影，并通过从 x 的顶端朝着向量 x_1 画一条垂线得到。显然，此种情况下 x 沿 x_1 的分量长度是 $|x|\cos\theta$ ，即

$$c|x_1| = |x|\cos\theta$$

上式两边同乘以 $|x_1|$ ，得到

$$c|x_1|^2 = |x||x_1|\cos\theta = x \cdot x_1$$

式中， $x \cdot x_1$ 表示的是所熟知的两个向量的点积，有些场合也称之为内积或标量积。应用点积的定义，一个向量 x 的长度 $|x|$ 可以表示为

$$|x|^2 = x \cdot x$$

于是，标量 c 可以表示为

$$c = \frac{x \cdot x_1}{x_1 \cdot x_1} = \frac{1}{|x_1|^2} x \cdot x_1 \quad (4-5)$$

很显然，当 x_1 与 x 是垂直或正交时， x 沿 x_1 没有分量，此时 $c=0$ 。再参考式(4-5)，可以得到两个向量正交的条件是点积等于零，即如果有

$$x \cdot x_1 = 0 \quad (4-6)$$

则称向量 x 与 x_1 是正交的。

前面讨论的分解、近似以及正交等概念可以很容易地拓展到任意维的向量空间。例如图 4-3 所示的向量 x 在三个互为正交的向量 x_1 ， x_2 和 x_3 描述的三维直角坐标向量空间中的分解问题，可以逐次地使用 c_1x_1 ， $c_1x_1 + c_2x_2$ 以及 $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ 来不断的近似向量 x 。如果想要获得误差向量长度最小的最佳近似，就要使用式(4-5)来计算 c_1 、 c_2 和 c_3 。这种情况下求出的 c_1x_1 ， c_2x_2 和 c_3x_3 分别是 x 在 x_1 ， x_2 和 x_3 上的投影，即

$$c_k = \frac{x \cdot x_k}{x_k \cdot x_k} = \frac{1}{|x_k|^2} x \cdot x_k \quad k=1,2,3 \quad (4-7)$$

注意到图中近似过程中的误差变化关系，三维的向量 x 使用 c_1x_1 近似时，有误差 e_1 ；使用 $c_1x_1 + c_2x_2$ 近似时，有误差 e_2 ；使用 $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ 近似时，近似误差是零。出现这一结果的原因是 x 本身就是一个三维向量，而分解出的 x 的三个分量的向量 x_1 ， x_2 和 x_3 互为正交，即向量 x_1 ， x_2 和 x_3 是三维空间中的一个完备的正交向量集。

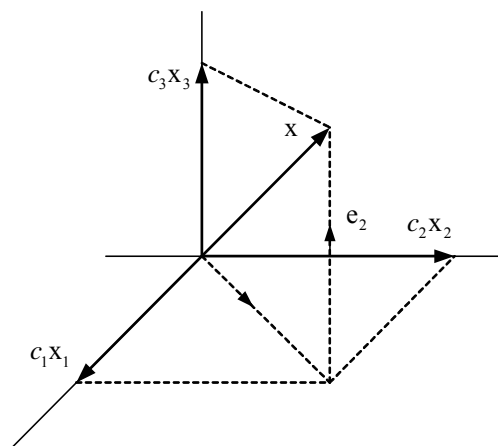


图 4-3 三维空间中的向量及其分解

所谓的完备向量集是指除给出的正交向量外不可能再找到一个向量与已给出的向量都正交。使用一个向量空间的完备正交向量集，该空间中的任何向量都能无误差的用其表示。这些向量又称为基向量。如果一组向量 $\{x_k\}$ 不是完备的，近似过程中的误差向量一般都不会为零。具体到三维向量空间的完备向量集情况，除向量 x_1 , x_2 和 x_3 外，不可能找到一个向量 x_4 ，它与三个向量 x_1 , x_2 和 x_3 都正交。进一步，三维的向量 x 大多数情况下不可能仅用两个基向量近似而没有误差。

对于要分解的一个向量，基向量的选取并不是惟一的。事实上，构成向量空间的坐标系不同，对应的基向量也不同。对三维空间向量而言，若选择旋转坐标系，基向量肯定不是前面所讨论的那样。

信号的正交分解

有了向量分解与正交性的概念，就可以讨论信号的分解问题了。

现在考虑在区间 (t_1, t_2) 上用信号 $x_1(t)$ 近似信号 $x(t)$ ，或从 $x(t)$ 中分解出 $x_1(t)$ 的问题：

$$x(t) \simeq c_1 x_1(t) \quad t \in (t_1, t_2)$$

显然， (t_1, t_2) 上的逐点近似误差为

$$e_1(t) = x(t) - c_1 x_1(t) \quad (4-8)$$

之所以称之为逐点误差，是因为该误差反映了用 $c_1 x_1(t)$ 近似 $x(t)$ 时在 (t_1, t_2) 区间内每一时间点上二者的误差大小。若 $e_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上处处为零，则说明 $c_1 x_1(t)$ 与 $x(t)$ 完全相同；若 $e_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上不完全为零，则该近似就有误差存在。

与向量类似，如果不确定一个选择 c_1 的准则，可以有很多的 c_1 选择。于是就存在一个如何选择 c_1 的问题了。

前面讨论的信号的能量和功率概念，给选择 c_1 提供了一个关于信号大小的度量。选择 c_1 实现最佳近似的准则可以确定为：误差信号的能量或功率在区间 (t_1, t_2) 内最小。

按照这一确定 c_1 的准则，有

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |e_1(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - c_1 x_1(t)|^2 dt$$

根据求极值的必要条件关系

$$\frac{dE_e}{dt} = 0$$

经过平方展开与求导后，有

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)x_1(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt} \quad (4-9)$$

如若信号 $x(t)$ 为复信号，根据运算关系，有

$$c_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^*(t)x_1(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)x_1^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x_1(t)|^2 dt} \quad (4-10)$$

上式中， $x^*(t)$ 和 $x_1^*(t)$ 分别是 $x(t)$ 和 $x_1(t)$ 的共轭。

进一步来看，对实信号，式(4-9)中 $x(t)$ 与 $x_1(t)$ 乘积的积分代表的是面积，信号 $x(t)$ 平方的积分则恰是信号的能量。对于一个信号而言，在特定区间上的能量是一个定值，用一个信号 $x_1(t)$ 来近似它，或者说从该信号中分解出 $x_1(t)$ 的大小，在误差能量最小的准则下，取决于 $x(t)$ 与 $x_1(t)$ 乘积的积分的大小。当系数 c_1 或 $x(t)$ 与 $x_1(t)$ 乘积的积分较大时，说明 $x(t)$ 中包含有 $x_1(t)$ 的分量就较大；当系数 c_1 较小时，说明 $x(t)$ 中包含有 $x_1(t)$ 的分量就较小；特殊情况下，当系数 c_1 等于零时，说明 $x(t)$ 中没有 $x_1(t)$ 的分量。

$x(t)$ 中没有 $x_1(t)$ 分量，对应的关系为

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)x_1(t)dt = 0 \quad (4-11)$$

此时称信号 $x(t)$ 与 $x_1(t)$ 在时间区间 (t_1, t_2) 内正交。

例4-2 设方波信号 $x(t)$ 如图 4-4所示，试用正弦信号 $\sin(t)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似表示方波信号，并使能量误差最小。

解：方波信号

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

在区间 $(0, 2\pi)$ 内，信号 $x(t)$ 表示为

$$x(t) = c \sin(t)$$

根据式(4-9)求系数 c ，得

$$c = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sin(t) dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t) dt \right] = \frac{4}{\pi}$$

所以, 有

$$x(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(t)$$

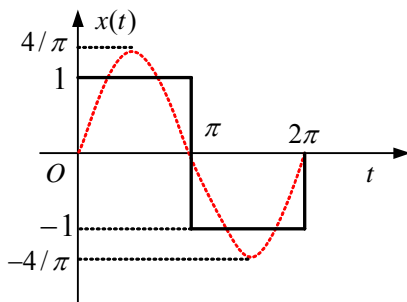


图 4-4 正弦信号逼近方波信号

类比于向量, 当用信号 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_k(t) \dots x_N(t)$ 来近似或分解 $x(t)$, 且以误差信号的能量或功率在区间 (t_1, t_2) 内最小为准则时, 每一个分量的系数可以用如下的公式进行计算。

对实信号, 有

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) x_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x_k(t)|^2 dt} = \frac{1}{E_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x_k(t) dt \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-12)$$

对复信号, 有

$$c_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) x_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} |x_k(t)|^2 dt} = \frac{1}{E_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) x_k^*(t) dt \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-13)$$

其中各分量间有如下的关系:

对实信号, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} x_k(t) x_j(t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ E_k & k = j \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4-14)$$

对复信号, 有

$$\int_{t_1}^{t_2} x_k(t) x_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ E_k & k = j \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4-15)$$

即各分量之间是两两正交的, 此时的 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_k(t) \dots x_N(t)$ 构成一个正交信号集合。若有 $E_k = 1$, 则称该组信号集是正交归一化信号集合。

按照误差信号的能量或功率在区间 (t_1, t_2) 内最小这一准则近似或分解信号时, 每

一个分量的系数 c_k 的计算，仅与对应的 $x_k(t)$ 有关，而与近似中用多少个分量 N 无关，这一特点称之为系数的最终不变性质。

信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t) + \cdots + c_N x_N(t) + e_N \quad t_1 < t < t_2$$

式中的 e_N 是用 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \cdots 、 $x_k(t)$ 、 \cdots 、 $x_N(t)$ 组合后近似 $x(t)$ 产生的误差。

显然，采用 N 项正交信号组合近似 $x(t)$ 产生的信号误差的能量为

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e_N^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{k=1}^N c_k x_k(t) \right]^2 dt$$

按照 E_e 最小， $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \cdots 、 $x_N(t)$ 两两正交的要求，可以得到

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{k=1}^N c_k^2 E_k \quad (4-16)$$

可见由于 $c_k^2 E_k$ 总是大于零，误差能量 E_e 总是随着项数 N 的增加而减小。基于这一认识，有 $N \rightarrow \infty$ 时，误差能量就有可能趋于零，即 $E_e \rightarrow 0$ 。若一组正交信号集合能够满足项数 $N \rightarrow \infty$ 时，误差能量 $E_e \rightarrow 0$ ，则称这组正交信号集是完备的。此时， $x(t)$ 可以用如下的等式表示

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_k x_k(t) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k(t) \quad t_1 < t < t_2 \quad (4-17)$$

式中的系数 c_k 由式(4-12)或式(4-13)给出。式(4-17)右边的级数称为关于完备信号集 $\{x_k(t)\}$ 的 $x(t)$ 的广义傅里叶级数。

该级数表明：

(1) 满足一定条件的任意信号 $x(t)$ 在时间区间 (t_1, t_2) 内可以用完备信号集加权后近似，加权系数由式(4-12)或(4-13)给出。由误差信号能量大小决定的近似程度由所取级数的项数多少决定，一般来讲，项数越多，近似程度越高或误差能量越小，理想情况是取无穷多项，此时误差能量等于零。

(2) 式(4-17)给出的等式关系是以等式两边的信号能量相等为前提的，在有些情况下并不意味着等式两边“处处”逐点相等，所谓的“逐点误差”有可能不等于零，即式(4-17)中的右边级数无论取多少项，都会在有限的点上可能与 $x(t)$ 不相等，这一现象有时称为吉布斯现象，这一点尤其要注意。

(3) 由于得到式(4-17)以误差能量等于零为准则，通过式(4-16)可以得到， $N \rightarrow \infty$ 时，信号 $x(t)$ 的能量等于它的正交分量各自的能量之和，即

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 E_k \quad (4-18)$$

上式所表示的即为适用于能量信号的帕斯瓦尔定理。

(4) 若信号集 $\{x_k(t)\}$ 在区间 (t_1, t_2) 内随着 $N \rightarrow \infty$ 能够使 $E_e \rightarrow 0$, 就可以说信号集 $\{x_k(t)\}$ 对 $x(t)$ 是完备的, $\{x_k(t)\}$ 称为 $x(t)$ 的一组基函数集或基信号集。显然, 随 $\{x_k(t)\}$ 中 $x_k(t)$ 选择的不同, 同一个信号 $x(t)$ 可以有很多种基信号集。典型的基信号集有: 三角(正弦)函数、指数函数、沃尔什(Walsh)函数、贝塞尔(Bessel)函数、勒让德(Legendre)函数等等。指数信号集为 $e^{jk\omega_0 t}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); 三角函数信号集为 $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos k\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin k\omega_0 t, \dots\}$ 。

(5) 若信号 $x(t)$ 是功率信号, 仅需要把近似的准则转化为误差功率为最小就可以进行上面类似的推导, 得到功率信号在一定的时间区域内分解或近似的关系。

4.3 周期信号的傅里叶级数与频谱

按照上节中关于信号近似与正交分解的讨论, 采用完备的正交基信号集可以对满足一定条件的信号进行近似或分解。本节讨论工程中常用的周期信号的傅里叶级数展开、应用与频谱分析问题。

周期信号 $x(t)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 时间区间, 以时间间隔 T 重复变化无始无终的信号。按照 4.2 节中信号的分类, 周期信号一般属于功率信号。具体的可以表示为

$$x(t + kT) = x(t) \quad -\infty < t < \infty, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

重复的最小时间间隔 T 称为周期信号的基波周期, $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为信号的基波角频率, 单位为 rad/s; $f_0 = 1/T$ 称为信号的基波频率, 单位为 Hz。显然有 $\omega_0 = 2\pi f_0$ 。为方便, 在不引起歧义的情况下角频率也常简称为频率。

三角形式的傅里叶级数

函数 $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 内是一个完备正交函数系, 其中 $T = 2\pi/\omega_0$ 。满足一定条件(称之为狄利克雷条件)的任意周期为 T 的信号 $x(t)$, 可以由下式准确逼近

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4-19)$$

式中的系数可以用式(4-14)求得, 为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

式(4-19)又称为信号 $x(t)$ 的傅里叶级数展开式。

应注意的是，尽管 $\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots$ 或 $\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots$ 都是正交基底函数，但单纯的 $\sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots$ 或 $\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots$ 都不能构成完备的正交函数系，因为前者是时间 t 的奇函数，后者是时间 t 的偶函数。只有两者结合才构成完备正交函数系。

将式(4-19)中相同频率项加以合并，可以写成另一种形式的傅里叶级数

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (4-21)$$

或

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (4-22)$$

根据三角函数的公式可以得到傅里叶级数各系数之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \tan \varphi_k &= \frac{-b_k}{a_k}, \quad \tan \theta_k = \frac{a_k}{b_k} \\ a_k &= A_k \cos \varphi_k = A_k \sin \theta_k \\ b_k &= -A_k \sin \varphi_k = A_k \cos \theta_k \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

显然，若满足一定条件的任意周期信号 $x(t)$ 展开成式(4-19)形式的傅里叶级数时，就意味着信号 $x(t)$ 被分解成频率为零的直流分量 a_0 、频率与信号 $x(t)$ 相同的正弦、余弦分量及无穷多项频率等于信号 $x(t)$ 的频率整数倍的正弦、余弦分量。通常称与信号 $x(t)$ 相同频率的分量为基波分量或基波，频率为 $2f_0$ 、 $3f_0 \dots$ 等分量分别称为二次谐波、三次谐波， \dots 等。

上面讨论的傅里叶级数展开式，并不是对任何周期信号都成立。狄利克雷 (Dirichlet) 给出了一种充分条件：

若单值周期信号在一个周期内满足：

- (1) 不连续点的数目为有限个；
- (2) 极值点的数目为有限个；
- (3) 绝对可积： $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$ 。

则该信号一定能用傅里叶级数展开表示。实际系统中的时间信号总满足这三个条件。实际上，上面的三个条件保证了傅里叶系数为有限值。

在 $x(t)$ 的连续点处，傅里叶级数收敛于 $x(t)$ 的值。而在不连续点处，傅里叶级数收敛于 $x(t)$ 在该时刻左极限和右极限的平均值。

指数形式的傅里叶级数

虚指数函数 $e^{jk\omega_0 t}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 在时间区间 $(t_0, t_0 + T_0)$ 内是一个完备正交函数集。任意周期为 T 的信号 $x(t)$ 可以分解为无穷多项虚指数函数的组合, 或表达为任意周期为 T 的信号 $x(t)$ 可以由无穷多项虚指数函数准确逼近, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + X_1 e^{j\omega_0 t} + X_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + X_{-1} e^{-j\omega_0 t} + X_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4-24)$$

式中的系数 X_k 可以由式(4-13)求得。上式称为信号 $x(t)$ 的指数傅里叶级数展开式。

实际上, 虚指数形式的完备正交函数系与三角函数形式的完备正交函数系由欧拉公式可实现相互之间的转换。欧拉公式为:

$$\begin{aligned} \cos(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) \\ \sin(k\omega_0 t) &= \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \end{aligned}$$

把欧拉公式代入式(4-24), 有

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} \right) \quad (4-25)$$

于是, 有

$$X_0 = a_0, \quad X_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad X_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} \quad (4-26)$$

从上式可以看出, 用由复变函数构成的完备正交函数系逼近实信号时, 其系数为复数。

虚指数形式的傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4-27)$$

式中的系数 X_k 为随 $k\omega_0$ 变化的复数, 可以由式(4-13)求出, 有

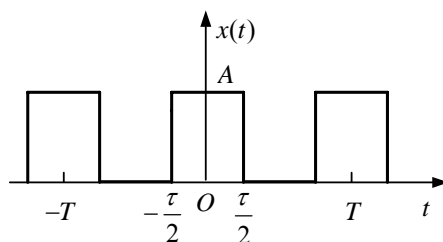
$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4-28)$$

虚指数形式的傅里叶级数仍然由无穷多项组成, k 的取值为 $-\infty$ 到 ∞ 的整数。

根据两种形式傅里叶级数的转换过程, 其系数之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= A_0 = a_0 \\ X_k &= |X_k| e^{j\varphi_k} = \frac{1}{2} (a_k - jb_k) \end{aligned} \right\} \quad (4-29)$$

例4-3 求图 4-5所示幅度为 A 、周期为 T , 脉冲宽度为 τ 的周期矩形脉冲的傅里叶级数表示式。


 图 4-5 周期为 T ，脉冲宽度为 τ 的周期矩形脉冲

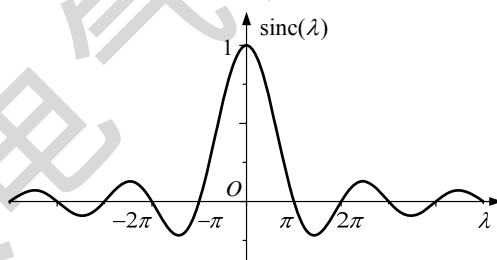
解：为简化积分计算，采用式(4-28)计算系数 X_k 的积分限取 $t_0 = -T/2$ ，则有

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T} \\ X_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{T(-jk\omega_0)} e^{jk\omega_0 t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{k\pi} \sin(k\omega_0 \tau/2) \\ &= \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} \end{aligned}$$

若定义

$$\text{sinc}(\lambda) = \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \quad (4-30)$$

sinc 函数在信号与系统中使用比较多，波形如图 4-6 所示，它在 $\lambda = 0$ 处值最大，为 1，在 $\lambda = \pm k\pi$ 处值为零。


 图 4-6 sinc 函数

于是周期矩形脉冲信号指数形式傅里叶级数的系数 X_k （包括 $k = 0$ ）可统一写作

$$X_k = \frac{A\tau}{T} \cdot \frac{\sin(k\omega_0 \tau/2)}{k\omega_0 \tau/2} = \frac{\tau A}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\pi \tau}{T}\right) \quad (4-31)$$

所以周期矩形脉冲信号指数形式的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{\tau A}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\pi \tau}{T}\right) e^{jk\omega_0 t} \quad (4-32)$$

应用式(4-32)可得周期矩形脉冲信号三角形式的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{\tau A}{T} + \frac{2\tau A}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\pi \tau}{T}\right) \cos(k\omega_0 t) \quad (4-33)$$

频谱

根据傅里叶展开式中各系数的计算公式, 各分量系数的大小完全由信号 $x(t)$ 的波形确定, 并形成惟一的对应关系。或者说信号 $x(t)$ 展开为三角形式或指数形式的傅里叶级数后, 建立了一种各频率分量的大小及相位随频率 $k\omega_0$ 变化的函数关系。这种随频率变化的函数关系从有别于时间域的角度, 在频率域对信号进行了刻画, 是信号 $x(t)$ 固有性质的一种表现形式。由于信号的这种时域与频域的统一性和对应性, 当在应用中出现单一表示形式不能或不方便解决问题时, 就可以转换表示方式, 以有利于解决问题或方便解决问题。

类比于时间域可以绘出信号 $x(t)$ 随时间变化波形的过程, 也可以在频率域绘出傅里叶级数展开式中的各频率分量的系数随 $k\omega_0$ 变化的关系, 例如 $A_k \sim k\omega_0$ 、 $|X_k| \sim k\omega_0$ 、 $\varphi_k \sim k\omega_0$, 如图 4-7、图 4-8 所示。从图中可以清楚而直观地看出各频率分量幅度的相对大小及相位的变化关系和趋势。信号各分量的幅度随频率 $k\omega_0$ 变化的图形称为信号的幅度频谱, 简称为幅度谱。幅度谱中每条线代表某一频率分量的幅度, 称为谱线。连接各谱线顶点的曲线(图 4-7 中虚线)称为频谱的包络线, 它反映各分量的幅度变化趋势。类似地, 信号各分量的相位随频率 $k\omega_0$ 变化的图形称为信号的相位频谱, 简称为相位谱。信号的幅度谱与相位谱统称为信号的频谱。

由于周期信号的频谱只在频率等于零、基波和基波整数倍的离散频率点上出现, 这种频谱称为离散谱, 它是周期信号频谱的主要特点之一。

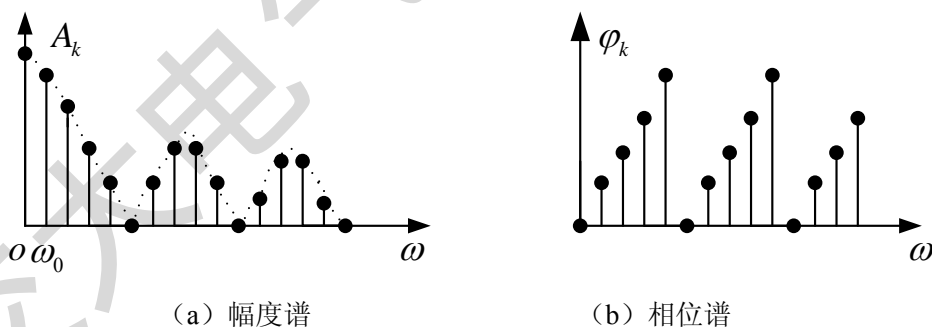


图 4-7 展开为三角形式傅里叶级数的周期信号频谱

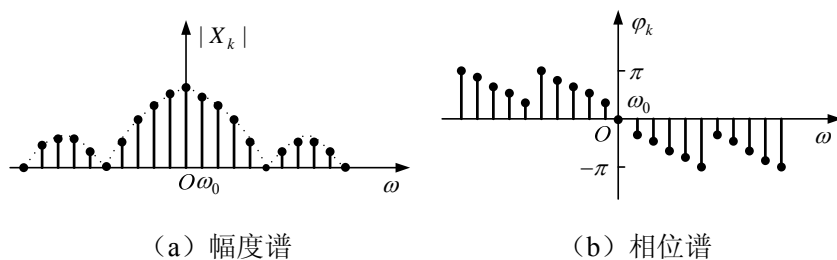


图 4-8 展开为指数形式傅里叶级数的周期信号频谱

指数形式的傅里叶级数与三角形式的傅里叶级数二者都建立了信号由时间域向

频率域转换的方式。由于指数形式傅里叶级数在线性系统分析中的特殊作用，指数形式的傅里叶级数受到特有的重视。

与三角形傅里叶级数相比，指数形式傅里叶级数除每一分量的系数 X_k 一般是复函数外，还出现了 X_k 随“负频率” $k\omega_0$ (k 取 -1 到 $-\infty$ 的整数) 的变化。因此，有些场合称这种频谱为复数频谱或双边频谱。

可以证明，若 $x(t)$ 为实信号，复数频谱的幅度谱 $|X_k| \sim k\omega_0$ 是频率的偶函数而关于纵轴对称；复数相位谱 $\varphi_k \sim k\omega_0$ 是频率的奇函数而关于原点对称。

实际上，三角傅里叶级数与虚指数傅里叶级数是同一个信号的两种不同展开形式，因此，两种频谱表示方法实质上是一样的。表现形式的不同之处仅在于图 4-7 中每条谱线代表一个频率分量的幅度，而图 4-8 中每个分量的幅度一分为二，在正、负频率相对应的位置上各为一半。所以，只有把正、负频率上对应的两条谱线矢量加起来才代表一个分量的幅度。复数频谱中的“负频率”并不意味着实际信号中有真正的负频率分量，它的出现完全是数学运算的结果，不具有任何物理意义。

当特殊的信号使 X_k 为实数时，可以用 X_k 的正负表示相位 φ_k 的 0 、 π ，也常把幅度谱与相位谱合画在一张图上，周期矩形脉冲信号的频谱就属于该种情况，如图 4-9 所示。

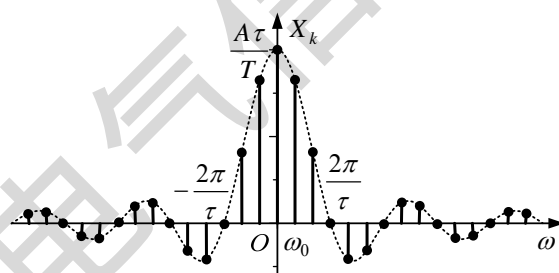


图 4-9 周期矩形脉冲信号的复数频谱

从图 4-9 所示的频谱图中可以看到仅从时域波形所得不到的信号性质：

(1) 离散频谱是周期信号频谱的共有特点，如同一般的周期信号一样，周期矩形脉冲的频谱是离散的，两离散谱线间的间隔为 $\omega_0 = 2\pi/T$ ，脉冲重复周期愈大，谱线距离就愈小。

(2) 各次谐波分量的幅度大小与脉冲幅度 A 和脉冲宽度 τ 成正比，与周期 T 成反比。各谱线的幅度按 sinc 函数形成的包络线规律变化。由图 4-9 可以看到，当 $k\pi\tau/T$ 随 k 、 T 或 τ 变化时，谱线可以取极值及过零点，并且每过一次零点谱线的幅值都在减小，直至衰减到零为止。当 $\omega = 2k\pi/\tau$ 时， $\text{sinc}(\omega\tau/2)$ 经过零点。

(3) 准确近似周期矩形脉冲信号需要无穷多个频率分量，即信号的频谱中包含有无穷多条谱线，但其主要能量都集中在第一个零点以内的频率分量上。若从工程的

观点看问题,在允许信号有一定失真的条件下,可以要求一个通信或处理信号的系统只把第一个零点以内的各频率分量传送过去,而舍弃第一个零点以后的所有分量。因此,实用中常常把 $0 \sim (2\pi/\tau)$ 这段频率范围称为矩形信号的频带宽度,记作 B ,于是

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ 或 } B_f = \frac{1}{\tau} \quad (4-34)$$

上式建立了信号的频带宽度与脉冲宽度成反比的关系。

对称信号的傅里叶级数

对于任意给定的实信号 $x(t)$,总可以由式(4-20)及(4-28)求得三角或虚指数形式傅里叶级数的系数。但如果信号的波形满足某种对称性,则傅里叶级数展开式中将出现系数等于零的项,且不等于零项系数的形式也变得比较简单。熟悉这些特性对直观了解信号的定性特性有重要的意义,也为通过观察信号波形知晓信号的频谱特点奠定基础。

常见的对称性有两类,一类是整周期对称,例如偶函数和奇函数;另一类是半周期对称,例如奇谐函数。信号的奇偶性决定级数中只能含有正弦项或余弦项,决定级数中只可能含有偶次项或奇次项的则是信号的奇谐性。

当信号是偶函数时,波形关于纵坐标对称,即有 $x(t) = x(-t)$,由求解 a_0 、 a_k 及 b_k 的公式知, $b_k = 0$ 。所以,关于纵轴对称的偶函数信号的 X_k 为实数,三角形形式傅里叶级数中不会含有正弦项,仅含有直流项和余弦项,如例4-3中的周期矩形脉冲信号。

当信号是奇函数,波形关于纵坐标反对称或关于原点对称,有 $x(t) = -x(-t)$,由求解 a_0 、 a_k 及 b_k 的公式知, $a_0 = 0$, $a_k = 0$ 。所以,奇函数信号的 X_k 为虚数,三角形形式傅里叶级数中不会含有直流分量和余弦项,只可能包含正弦项。

当信号为半波对称函数,波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下翻转而不发生波形变化,有

$$x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$$

如图4-10所示。其傅里叶级数只含有基波和奇次谐波,而不会包含直流和偶次谐波项,故把这种信号也称为奇谐波信号。

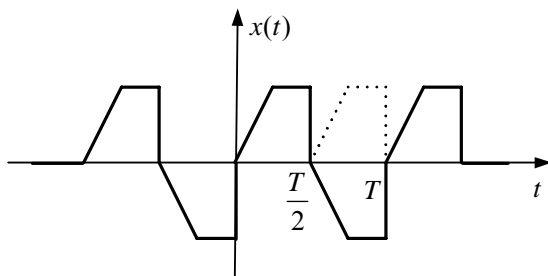


图 4-10 半波对称信号

系统对周期输入信号的响应

实周期信号的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

把 $x(t)$ 的傅里叶级数展开式代入上式，并调换求和与积分的次序，得

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right] dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k X_k^* \end{aligned}$$

或

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (4-35)$$

上式称为实周期信号的功率帕斯瓦尔（Parseval）定理。

实周期信号平均功率的平方根为信号的有效值 X_{rms} ，注意到 $|X_k| = |X_{-k}|$ ，故有

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{X_0^2 + 2(|X_1|^2 + |X_2|^2 + \dots)} \quad (4-36)$$

前面借助于完备正交函数系概念将周期信号展开为傅里叶级数，一是建立了信号的时域与频域联系，实现了在频域观察信号的频谱特性目标，二是为求解周期信号作用于线性非时变系统的响应提供了信号的基本准备，既将任意的周期信号都转化为了正弦或指数信号。

由第 2 章内容已知，传递函数为 $H(s)$ 的系统对无始无终输入 $x(t) = e^{st}$ 时的响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad (4-37)$$

当周期信号展开为指数形式的傅里叶级数时，周期信号可以表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

于是，应用叠加原理，响应就一定是

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (4-38)$$

从上式中可以看出， $y(t)$ 不仅是周期的，而且与激励 $x(t)$ 有相同的基波频率。

例4-4 已知某系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{1}{1+s}$$

试求在图 4-5 所示周期矩形信号作用下的响应。

解：首先求出周期矩形信号的傅里叶系数，由式(4-31)

$$X_k = \frac{A\tau}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right)$$

根据式(4-38)，系统的响应

$$y(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + jk\omega_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

4.4 傅里叶变换

傅里叶变换的定义

周期信号的傅里叶级数建立了信号时域与频域的对应关系，得到了周期信号的离散频谱，为分析周期信号的频域特性提供了工具，并对求解周期信号作用于线性非时变系统的响应进行了讨论。本节讨论非周期信号的近似与分解问题，导出傅里叶变换，建立非周期信号时域与频域的各种对应关系以及连续频谱的概念。

一般情况下，非周期信号是能量信号。能量信号又可以分为时限信号和非时限信号，单个矩形脉冲和指数信号 e^{at} ($a < 0$) 分别是两类信号的例子。显然，两类非周期信号都可以看作周期 $T \rightarrow \infty$ 的周期信号。

周期为 T 的周期信号 $x_T(t)$ 可以用指数傅里叶级数表示为

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (4-39)$$

$$X(k\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4-40)$$

且 $x_T(t)$ 与 $X(k\omega_0)$ 之间有着对应关系。

根据前面对周期信号频谱的讨论，周期信号的周期 T 的大小决定谱线的间隔 $\omega_0 = 2\pi/T$ 的大小；当信号的周期 $T \rightarrow \infty$ 时，就意味着谱线间的间隔 $\omega_0 \rightarrow d\omega$ 而变为无限小。离散的周期信号频谱将变为连续的频谱。

另外，由于 $T \rightarrow \infty$ ，将导致 $X(k\omega_0) \rightarrow 0$ 。根据信号能量时域与频域的守恒关系，尽管有 $X(k\omega_0) \rightarrow 0$ ，但随着 ω 的变化，仍将有能量分解到每一个频率分量上。为保证各频谱分量间的相对大小，引入“频谱密度函数”的概念来表征非周期信号在频域中的频谱分布。

对式(4-40)两边同乘以 T ，得到

$$X(k\omega_0)T = \frac{2\pi X(k\omega_0)}{\omega_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{jk\omega_0 t} dt \quad (4-41)$$

对非周期信号 $x(t)$ ，由于 $T \rightarrow \infty$ ， $k\omega_0 \rightarrow \omega$ ， $\omega_0 \rightarrow d\omega$ 。在极限情况下，虽然

$X(k\omega_0) \rightarrow 0$ ，但 $(2\pi/\omega_0)X(k\omega_0)$ 可望不趋于零，而趋于有限值，且变为连续函数，常记作 $X(\omega)$ ，即

$$X(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi X(k\omega_0)}{\omega_0} = \lim_{T \rightarrow \infty} X(k\omega_0)T \quad (4-42)$$

式中的 $X(k\omega_0)/\omega_0$ 表示单位频带的频谱值，即频谱密度。于是，非周期信号 $x(t)$ 与 $X(\omega)$ 建立了时域与频域的对应关系， $X(\omega)$ 称为原函数 $x(t)$ 的频谱密度函数，或简称为频谱函数。

这样，式(4-41)在非周期信号的情况下将变成

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

即

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-43)$$

频谱函数 $X(\omega)$ 一般为 ω 的复函数，可以写作

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

模值 $|X(\omega)|$ 代表非周期信号中各频率分量的相对大小，幅角 $\varphi(\omega)$ 则表示相应各频率分量的相位。为了与周期信号的频谱相一致，习惯上也把 $|X(\omega)| \sim \omega$ 与 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 曲线分别称为非周期信号的幅度频谱与相位频谱。与周期信号频谱不同，它们都是频率 ω 的连续函数，形状上与相应的周期信号频谱包络线相同。

对应地，用频谱密度表示的非周期信号可以用下面的过程得到：

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k\omega_0=-\infty}^{\infty} \frac{X(k\omega_0)}{\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

在 $T \rightarrow \infty$ 时，上式中的各量变为

$$k\omega_0 \rightarrow \omega$$

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

$$\frac{X(k\omega_0)}{\omega_0} \rightarrow \frac{X(\omega)}{2\pi}$$

$$\sum_{k\omega_0=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$x_T(t) \rightarrow x(t)$$

于是，傅里叶级数变成傅里叶积分形式，即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4-44)$$

上式的意义表明，非周期信号 $x(t)$ 可以分解成无限多个指数函数分量 $e^{j\omega t}$ 之和，每一

指数分量的系数为 $X(\omega)d\omega/(2\pi)$ ，是一无穷小量，这些分量的频率范围从 $-\infty$ 到 ∞ ，占据整个频率域。

若 $x(t)$ 为实信号，傅里叶积分也可变换为：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \frac{|X(\omega)|}{\pi} \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \end{aligned}$$

可以更清楚地看出傅里叶积分所表示的意义，与周期信号一样，非周期信号也可以分解成无限多个不同频率的正弦振荡之和，但其振幅 $|X(\omega)|d\omega/\pi$ 为一无穷小量，并占据了从 0 到 ∞ 的所有频率范围。

通常式(4-43)称为正傅里叶变换，式(4-44)称为逆傅里叶变换。为书写方便，常采用如下符号：

正傅里叶变换

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

逆傅里叶变换

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

在傅里叶变换定义下 $x(t)$ 与 $X(\omega)$ 有惟一对应关系，可简单地表示为

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

并不是所有信号都能进行傅里叶变换，傅里叶变换存在的充分条件是信号在无限区间内满足：

- (1) 只有有限个间断点；
- (2) 只有有限个极值点；
- (3) 绝对可积： $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

应当指出，由于绝对可积仅是充分条件，因此一些不满足绝对可积条件的信号也可能有傅里叶变换。借助奇异函数概念，可进一步把可变换的信号扩展到周期函数、阶跃函数、符号函数等特殊情况。

绝对可积信号的傅里叶变换

下面通过对几个常用信号进行傅里叶变换，以加深非周期信号时域与频域对应关

系的理解，并初步掌握进行傅里叶变换的技巧。

1. 单边指数信号

单边指数信号如图 4-11 (a) 所示，其时间表示式为

$$x(t) = e^{-at} \varepsilon(t)$$

式中 a 为正实数。

由式(4-43)，有

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{j\omega + a} e^{-(j\omega + a)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

故

$$e^{-at} \varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + a} \quad (4-45)$$

幅度和相位分别为

$$\left. \begin{aligned} |X(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \right\}$$

频谱如图 4-11 (b)、(c) 所示。

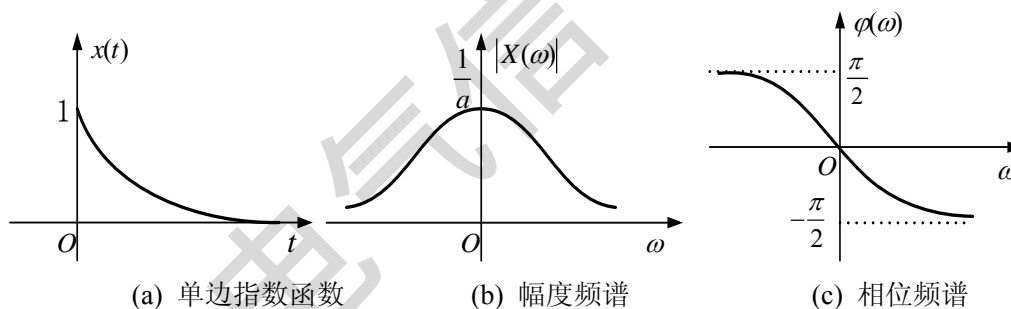


图 4-11 单边指数信号的波形及其频谱

2. 双边指数信号

双边指数信号如图 4-12 (a) 所示，其时间表示式为

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

其中 a 为正实数。傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

则

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (4-46)$$

双边指数信号的傅里叶变换是一个实函数。频谱 $X(\omega) \sim \omega$ 如图 4-12 (b) 所示。

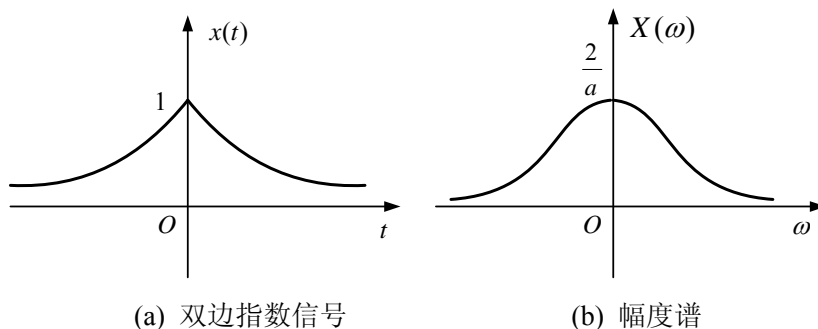


图 4-12 双边指数信号的波形及其频谱

3. 矩形脉冲信号

图 4-13(a)所示的单个矩形脉冲信号可以用阶跃函数表示为

$$x(t) = A\left[\varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

其中 A 为脉冲的幅度， τ 为宽度。

$$X(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$X(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (4-47)$$

频谱如图 4-13 (b)所示。

从矩形脉冲信号的频谱特征可以看出：

(1) 非周期矩形脉冲信号的频谱同样是连续频谱，其形状与周期矩形脉冲信号离散频谱的包络线相似；

(2) 信号在时域是有限时间宽度、有限能量的波形，在频域却包含有无限多的频率分量并延续到无限；

(3) 信号的能量在频域按 $\text{sinc}(\omega\tau/2)$ 的规律分布。信号的频谱分量能量主要集中在零频到第一个过零点之间，工程上常将此宽度作为有效带宽，通过计算可知矩形脉冲信号的有效带宽由矩形脉冲的时间宽度 τ 决定，且与时间宽度 τ 成反比，记作

$$B = \frac{1}{\tau} \quad (4-48)$$

(4) 脉冲宽度越窄，信号在频域的有效带宽越宽，对应于高频含量越多。

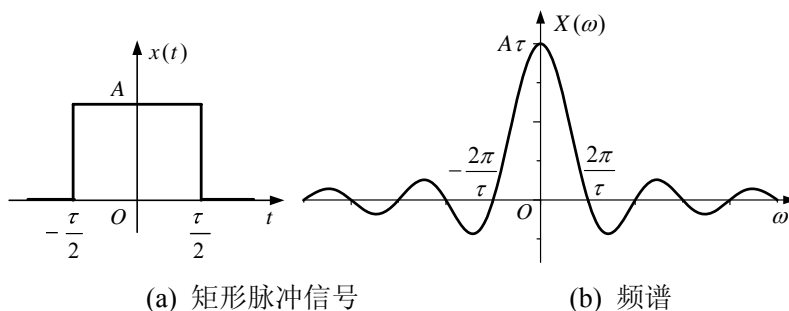


图 4-13 矩形脉冲信号波形及其频谱

4. 冲激信号

冲激信号的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

即

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (4-49)$$

冲激信号的傅里叶变换等于 1，其频谱如图 4-14 所示。这一结果表明，在时域持续时间无限短、幅度为无限大的单位冲激信号，在频域却要分解为无限宽度频率范围内幅度均匀的指数分量，这一信号持续时间与信号频带宽度之间成反比的特点与式 (4-48) 表明的关系相一致。

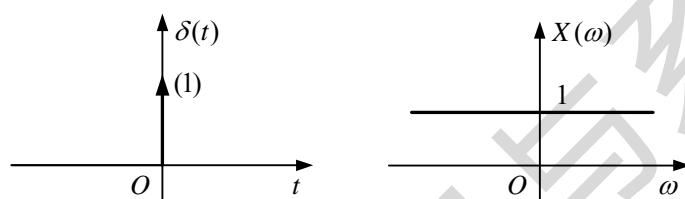


图 4-14 冲激信号及其频谱

广义傅里叶变换

一些常见信号，如常数 1、阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 、正弦信号 $\sin(\omega_0 t)$ 等不满足绝对可积条件，用式 (4-43) 求解其变换则积分不收敛。如果对式 (4-43) 稍加修改，表示为下列极限形式：

$$X(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-50)$$

$$X(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \quad (a > 0) \quad (4-51)$$

一些不满足绝对可积条件的信号也可以求出其变换。式 (4-50) 与式 (4-51) 定义的 $X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的广义傅里叶变换。

1. 常数 1

常数 1 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} 1 \times e^{-j\omega t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(\omega \tau)}{\omega} \\ &= 2\pi \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \\ &= 2\pi \delta(\omega) \end{aligned}$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (4-52)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (4-53)$$

顾名思义, 常数 1 的频谱仅仅包含有零频率分量。由于它在时域中持续时间为无限宽, 根据频带与信号持续时间宽度的反比关系, 其频域能量必定集中在零频率分量上。依据非周期信号频谱密度函数的定义, 直流信号的傅里叶变换必然是一个出现在 $\omega = 0$ 的冲激函数。

式(4-53)变换对很容易用逆傅里叶变换式检验。

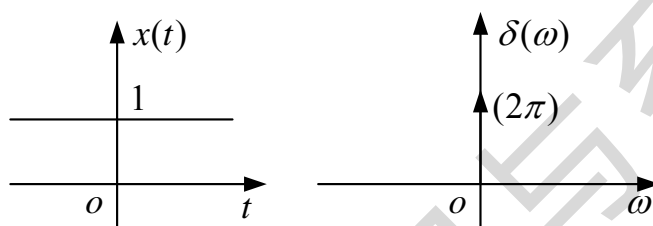


图 4-15 直流信号波形及其频谱

2、符号函数信号

符号函数信号的定义式为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

符号函数信号的波形如图 4-16 (a) 所示。

由于符号函数信号不满足绝对可积条件, 求其傅里叶变换仍要采用极限方法。若用式(4-51)求解, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} \right] \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ \frac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega} \quad (4-54)$$

符号函数的傅里叶变换 $X(\omega)$ 只有虚部。即

$$|X(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ \frac{2}{\omega} & \omega \neq 0 \end{cases}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \end{cases} \quad (4-55)$$

符号函数的幅度与相位频谱如图 4-16 (b)、(c) 所示。

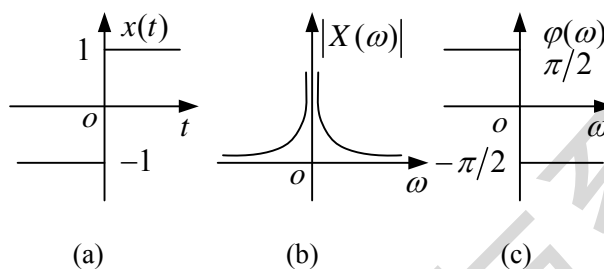


图 4-16 符号函数及其频谱

3、阶跃信号

阶跃函数可以分解成直流信号与符号函数之和，表达式为

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

分别对直流信号和符号函数信号进行傅里叶变换后相加，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varepsilon(t)] &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned} \quad (4-56)$$

阶跃信号的频谱函数既有实部又有虚部。从时域来看，单位阶跃信号分解为直流信号与符号函数信号之和，在频域就意味着必有 $\omega = 0$ 处出现的冲激和遍布整个频率范围内的频率分量。 $\omega = 0$ 处出现的冲激由阶跃信号的稳定不变部分生成，而遍布整个频率范围内的频率分量则由阶跃函数信号 $t = 0$ 处的急剧变化产生。

阶跃信号的频谱示于图 4-17 中。

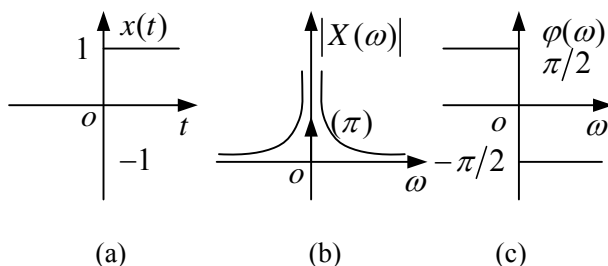


图 4-17 单位阶跃函数及其频谱

4、虚指数信号

虚指数信号 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

由式(4-52), 有

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

即

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4-57)$$

虚指数信号 $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ 的频谱中只有一个频率, 在 $\omega = \omega_0$ 处, 频谱密度为冲激, 强度为 2π 。

周期信号的傅里叶变换

通过把周期信号展开为傅里叶级数, 建立了周期信号时域与频域的联系, 讨论了周期信号的频谱特征。通过把非周期信号看作周期为无穷大的周期信号, 使用傅里叶变换建立了非周期信号的时域与频域关系, 讨论了一般非周期信号的频域性质, 进而在频域对一些系统进行了分析与设计。在频谱分析中引入冲激函数, 解决了一些不满足绝对可积条件的特殊信号的傅里叶变换问题。对周期信号的傅里叶变换问题进行讨论, 既建立起周期信号傅里叶变换与傅里叶级数之间的联系, 又把周期信号与非周期信号的分析方法统一在一起, 使傅里叶变换这一工具得到更广泛应用。

将满足狄利克雷条件的周期信号 $x(t)$ 展开为指数傅里叶级数, 有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4-58)$$

对上式两边取傅里叶变换, 有

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathcal{F}[e^{jk\omega_0 t}]$$

由于

$$\mathcal{F}[e^{jk\omega_0 t}] = 2\pi\delta[\omega - k\omega_0]$$

于是得到周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 为

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4-59)$$

其中 X_k 是周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数的系数, 即

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (4-60)$$

由式(4-59)给出的结果可以看出, 周期信号的傅里叶变换是一个由冲激函数所组成的离散冲激序列。冲激序列的频率间隔等于周期信号的频率 ω_0 , 即冲激位于周期信号的谐频处, 冲激强度等于相应傅里叶级数的系数 X_k 的 2π 倍。

由于傅里叶变换反映了信号的频谱密度，只有信号满足绝对可积条件时变换才会为有限值，因此周期信号的傅里叶变换必定是冲激函数序列而不是有限值序列，各谱线之间的区别不是其长短而是冲激的强度。

求周期信号频谱的步骤可以首先应按式(4-60)求出周期信号的傅里叶级数系数，然后再代入式(4-59)求解出周期信号的傅里叶变换。

也可以从周期延拓的角度建立周期信号傅里叶级数的系数与周期信号傅里叶变换之间的联系。

从周期信号 $x(t)$ 中截取以 $t=0$ 为中心的一个周期，用 $x_0(t)$ 表示，即

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{其余 } t \end{cases}$$

$x_0(t)$ 的傅里叶变换可由定义求出，有

$$X_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-61)$$

比较式(4-60)与式(4-61)，有

$$X_k = \frac{1}{T} X_0(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad (4-62)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。式(4-62)表明，周期信号的傅里叶级数的系数 X_k 可以用以 $t=0$ 为中心的单周期信号的傅里叶变换代入 $\omega = k\omega_0$ 求得。

把式(4-62)代入式(4-59)，周期信号的傅里叶变换也可表示为

$$X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4-63)$$

例4-5 求余弦信号 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换，并画出频谱图。

解：由欧拉公式，余弦函数可用复指数函数表示为

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

则余弦函数的傅里叶系数为

$$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{2}$$

由式(4-59)得

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

频谱如图 4-18 所示。

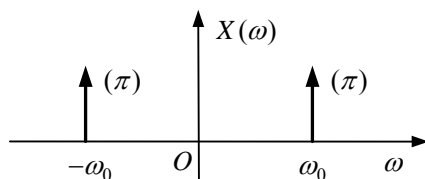


图 4-18 余弦信号的频谱

例4-6 若把位于 $t=0$ 处的单位冲激函数以 T 为周期延拓, 可构成周期单位冲激串, 如图 4-19(a)所示。该函数在研究信号的抽样问题中经常用到, 称为狄拉克梳状函数或理想抽样函数, 用数学公式表示为

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

试求 $p(t)$ 的傅里叶级数和傅里叶变换。

解: 首先对周期为 T 的 $p(t)$ 函数进行傅里叶级数展开, 其傅里叶级数为

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k e^{jk\omega_0 t}$$

其中

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$P_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

即

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad (4-64)$$

上式表明, 周期单位冲激串的傅里叶级数中, 只包含位于 $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \dots, \pm k\omega_0, \dots$ 处的频率分量, 每个频率分量的大小相等且都等于 $1/T$ 。

$p(t)$ 的单周期信号为 $\delta(t)$, 其傅里叶变换

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

根据式(4-63), $p(t)$ 的傅里叶变换则为

$$P(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4-65)$$

$p(t)$ 的傅里叶级数及傅里叶变换如图 4-19(b)和(c)所示。周期单位冲激串的傅里叶变换为强度等于 ω_0 的冲激串。

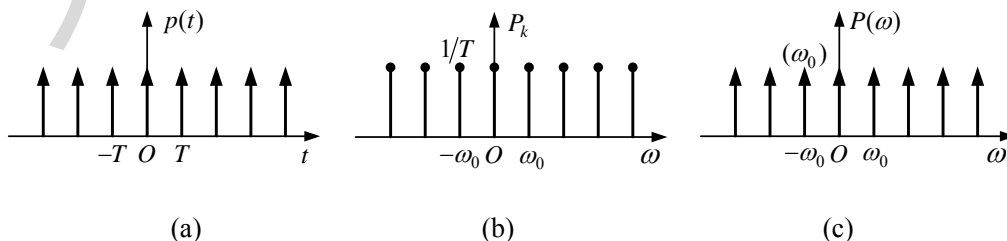


图 4-19 周期单位冲激串的傅里叶级数与傅里叶变换

为方便使用, 把一些典型信号的傅里叶变换列于表 4-1 中, 以备查用。

表 4-1 常用信号的傅里叶变换

时域	频域
$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$t\varepsilon(t)$	$-\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
t	$j2\pi\delta'(\omega)$
$ t $	$-\frac{2}{\omega^2}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$	$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
$e^{-at}\varepsilon(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{j\omega + a}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t), \quad a > 0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t), \quad a > 0$	$\frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$
$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
e^{-t^2}	$\sqrt{\pi}e^{-(\omega/2)^2}$
$x(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < \tau \\ 0, & \text{else} \end{cases}$	$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega\tau)}{\omega}$

4.5 傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

信号 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换定义为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (4-66)$$

若 $X(s)$ 的收敛域包括 $j\omega$ 轴, 令 $s = j\omega$, 有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4-67)$$

式(4-67)所示积分就是 $x(t)$ 的傅里叶变换, 此处用 $X(j\omega)$ 表示。例如:

$$e^{-at}\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

当 $a > 0$ 时, $X(s)$ 的收敛域包括 $j\omega$ 轴, 故

$$e^{-at}\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega+a}$$

当信号 $x(t)$ 不满足绝对可积条件时, $X(s)$ 的收敛域就不包括 $j\omega$ 轴, 这时 $x(t)$ 的傅里叶变换可能含有冲激函数或不存在, 不能简单地用 $j\omega$ 置换 s 的方法从拉普拉斯变换得到傅里叶变换。例如:

$$\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

由于 $\varepsilon(t)$ 不满足绝对可积条件, 故它的傅里叶变换不为 $1/(j\omega)$, 正确的结果应该为

$$\varepsilon(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

拉普拉斯变换可用傅里叶变换理解。令式(4-66)积分中 $s = \sigma + j\omega$, 则

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt$$

则 $x(t)$ 的双边拉普拉斯变换也就是给 $x(t)$ 乘以 $e^{-\sigma t}$ 后 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。由逆傅里叶变换公式, 有

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{j\omega t} d\omega$$

两边同乘以 $e^{\sigma t}$, 有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$

若令 σ 为恒定值, 则 $d\omega = ds/j$, 故

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

上式即为求解逆拉普拉斯变换的积分式。

尽管拉普拉斯变换与傅里叶变换之间有着前述的紧密联系，但二者也有差别。这主要表现在傅里叶变换将时域函数 $x(t)$ 变换为频域函数 $X(\omega)$ ，或作相反变换，时域中的变量 t 和频域中的变量 ω 都是实数且有明确的物理意义。而拉普拉斯变换是将时间函数 $x(t)$ 变换为复变函数 $X(s)$ ，或作相反变换，这时，时域变量 t 虽是实数，但 s 却是复数；与 ω 相比较，变量 s 虽称为“复频率”，但其物理意义就不如 ω 明确。另外，利用傅里叶变换可以从频谱改变的观点解释系统输入与输出波形的差异，物理概念比较清楚，然而求解逆傅里叶变换的过程比较烦琐，傅里叶变换式中有时含有冲激函数 $\delta(\omega)$ 项，因此傅里叶变换分析法不如拉普拉斯变换简便。况且傅里叶变换分析法也只能求解稳定系统的零状态响应，所以，在求解一般非周期信号作用于电路的响应时，常采用拉普拉斯变换分析法，而很少用频域法。在频域法的重要意义在于研究信号传输的基本特性、建立滤波器的基本概念并理解系统频率特性的物理意义。

4.6 傅里叶变换的性质

傅里叶变换建立了信号的时域特性与频域特性的一般关系。这种变换不仅具有数学意义下的惟一性，而且还揭示了信号时域特性与频域特性之间确定的内在联系，并具有许多重要的性质，这些性质在理论分析和工程实际中都有着广泛的应用，采用傅里叶变换的基本性质进行复杂信号变换的求解，不仅计算过程简单，而且物理概念清楚。

线性

若 $X_1(\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)]$ ， $X_2(\omega) = \mathcal{F}[x_2(t)]$ ，则

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \longleftrightarrow a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (4-68)$$

式中 a_1 、 a_2 为任意常数。

进一步，若 $X_i(\omega) = \mathcal{F}[x_i(t)]$ ， $(i=1, 2, \dots, n)$ ，则

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i X_i(\omega) \quad (4-69)$$

式中 a_i 为任意常数。

上面的结论可以容易地由傅里叶变换的定义式证明。该性质说明傅里叶变换是一种线性运算，满足叠加定理，或加权相加信号的频谱等于各个单独信号的频谱加权之和。

奇偶虚实性

偶函数信号的频谱函数是实函数，例如双边指数信号、对称矩形脉冲信号、直流

信号等；奇函数信号的频谱函数是虚函数，例如符号函数信号；非奇非偶函数信号的频谱一般是复函数，例如单边指数信号、单位阶跃信号等。

傅里叶变换的奇偶虚实性质可以通过下面的过程来说明。

设信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$ ，则 $x(-t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau \\ &= X(-\omega)\end{aligned}$$

$x(t)$ 共轭复数 $x^*(t)$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^*(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right]^* \\ &= X^*(-\omega)\end{aligned}$$

若 $x(t)$ 为实信号，则有

$$X^*(-\omega) = X(\omega)$$

或

$$\left. \begin{aligned} |X(-\omega)| &= |X(\omega)| \\ -\arg[X(-\omega)] &= \arg[X(\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (4-70)$$

则 $X(\omega)$ 的模 $|X(\omega)|$ 是偶函数，相位 $\arg[X(\omega)]$ 是奇函数。

若 $x(t)$ 为实偶函数时，有 $x(t) = x(-t)$ 成立，于是

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= X(-\omega) \\ X(\omega) &= X^*(\omega) \end{aligned} \right\}$$

即实偶函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 是实偶函数。

若 $x(t)$ 为实奇函数时，有 $x(-t) = -x(t)$ 成立，于是

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= -X(-\omega) \\ X(\omega) &= -X^*(\omega) \end{aligned} \right\}$$

即实奇函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 是虚奇函数。

当信号为复函数时，证明过程与前类似。

对偶性

若 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，则

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

例如，单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换是1，即

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

对偶性质就意味着直流信号1的傅里叶变换为 $2\pi\delta(-\omega)$ ，由于 $\delta(-\omega)=\delta(\omega)$ ，故

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

对于一般情况，因为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

以 $-t$ 代替 t ，有

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

再进一步在上式中将变量 t 与 ω 互换，可以得到

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

显然，上式就是 $X(t)$ 的傅里叶变换式，即

$$F[X(t)] = 2\pi x(-\omega) \quad (4-71)$$

若 $x(t)$ 是偶函数，式(4-71)变成

$$F[X(t)] = 2\pi x(\omega) \quad (4-72)$$

了解了傅里叶变换的时域与频域的对偶性质，若已知 $x(t)$ 的频谱函数为 $X(\omega)$ ，则 $X(t)$ 的频谱就为 $2\pi x(-\omega)$ 给出。特别地当 $x(t)$ 为偶函数时，对偶关系得到进一步的简化， $x(t)$ 的频谱为 $X(\omega)$ ，时域形状为 $X(t)$ 的信号，其频谱就是 $2\pi x(\omega)$ 。例如，矩形脉冲信号的频谱为sinc函数状，而信号 $\text{sinc}(t)$ 的频谱必然为矩形脉冲函数状，二者相差 2π 或 $1/2\pi$ 的系数，如图4-20所示，其中 $y(t) = X(t)$ ， $Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$ 。

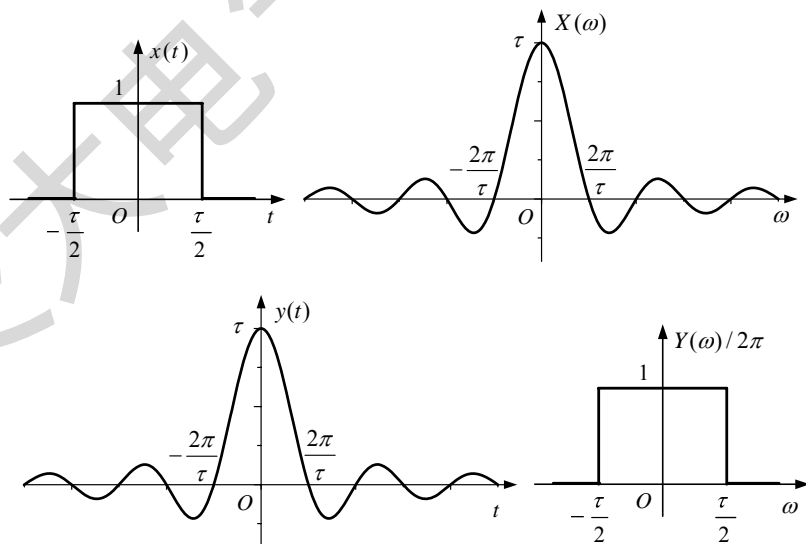


图 4-20 对偶性说明

缩展

若 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，对于任意不等于零的实数 a ，有

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (4-73)$$

根据傅里叶变换的定义式，读者可自行证明之。

在时域，将 $x(t)$ 变为 $x(at)$ 是一种对信号进行压缩或展宽的运算。如果 $a > 1$ ，信号 $x(at)$ 表示 $x(t)$ 在时间轴上以 $1/a$ 的比例压缩；如果 $0 < a < 1$ ，信号 $x(at)$ 表示 $x(t)$ 在时间轴上以 $1/a$ 的比例展宽。信号的压缩意味着信号波形以更快的速率变化，信号的展宽则表示信号的波形比原来的变化要慢。

在频域，如果 $a > 1$ ， $X(\omega/a)$ 表示频谱函数 $X(\omega)$ 在频率轴上展宽 a 倍；如果 $a < 1$ ， $X(\omega/a)$ 表示频谱函数 $X(\omega)$ 在频率轴上以 a 倍比率压缩。

缩展性质表明，时域信号的压缩与展宽，对应于频域频谱函数的展宽与压缩。时域信号压缩或展宽 a 倍，频域频谱函数就展宽或压缩 a 倍。由于时域信号的压缩或展宽影响信号的总能量，对应于频域频谱函数的幅度将有相应的 $1/a$ 的改变。图 4-21 给出了矩形脉冲缩展的几种情况。

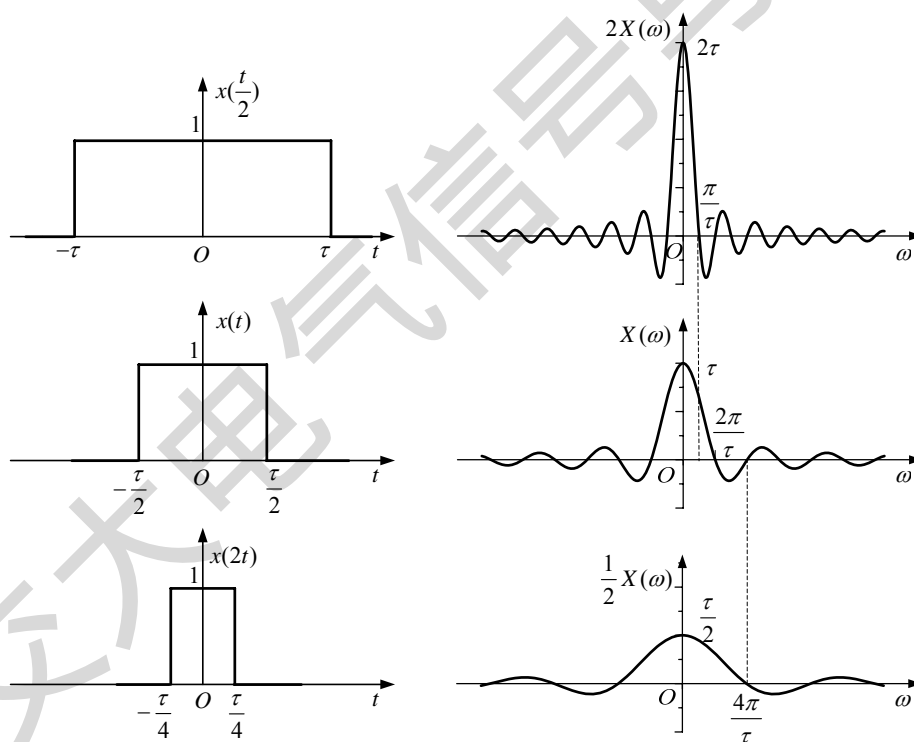


图 4-21 矩形脉冲的尺度变换

对于 $a < 0$ 情况，在时域由 $x(t)$ 变为 $x(at)$ 除了具有缩展的作用外，还具有对信号的翻转运算作用，例如 $a = -2$ 时，有

$$x(-2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

移位

若 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，在时域，信号在时间轴上的移位为 $x(t \pm t_0)$ ；在频域，信号频谱在频率轴上的移位为 $X(\omega \pm \omega_0)$ 。于是有

$$x(t \pm t_0) \longleftrightarrow X(\omega)e^{\pm j\omega t_0} \quad (4-74)$$

$$x(t)e^{\mp j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega \pm \omega_0) \quad (4-75)$$

式(4-74)称为傅里叶变换的时间移位性质，简称为时移特性；式(4-75)称为傅里叶变换的频率移位性质，简称为频移特性。

将式(4-74)作如下变化，有

$$\mathcal{F}[x(t \pm t_0)] = X(\omega)e^{\pm j\omega t_0} = |X(\omega)|e^{j(\varphi(\omega) \pm \omega t_0)}$$

傅里叶变换的时移特性表明，信号在时域的时间轴上向左或向右平移时间 t_0 ，其频谱函数的幅度谱不变，相位谱发生变化，并产生附加相移 $\pm \omega t_0$ 。

式(4-75)给出的频移性质表明，若要使一个信号的频谱在频率轴上向左或向右搬移 ω_0 单位，在时域就对应于其时间信号 $x(t)$ 乘以 $e^{-j\omega_0 t}$ 或 $e^{j\omega_0 t}$ 。

时间、频率移位特性都可以由傅里叶变换的定义式容易地证明。例如频移特性可证明如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)e^{\pm j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{\pm j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega \mp \omega_0)t} dt \\ &= X(\omega \mp \omega_0) \end{aligned}$$

应用频移特性时，应注意公式中符号的变化。

例4-7 试求图 4-22 (a) 所示三矩形脉冲信号 $x(t)$ 的频谱，设脉宽为 τ ，脉冲重复间隔为 T 。

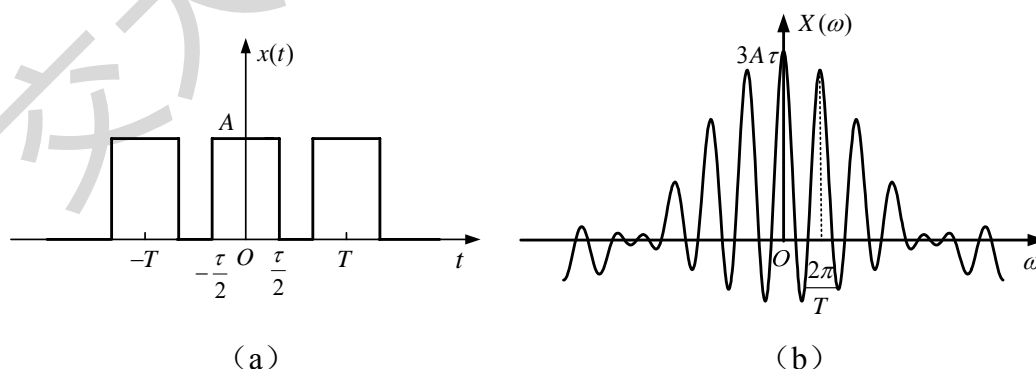


图 4-22 三矩形脉冲及其频谱

解： 设 $x_0(t)$ 表示中间的矩形脉冲信号，相应的频谱函数前已求出，即

$$X_0(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由图可知

$$x(t) = x_0(t+T) + x_0(t) + x_0(t-T)$$

应用时移性质可得其频谱函数为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_0(\omega)(e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}) \\ &= A\tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)(1 + 2\cos\omega T) \end{aligned}$$

假设 $T = 3\tau$, $x(t)$ 的频谱如图 4-22 (b) 所示。

例4-8 求指数信号 $e^{-j\omega_0 t}$ 和 $x(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱函数, 设 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ 。

解: 首先求 $e^{-j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换。由于 $e^{-j\omega_0 t}$ 可以看作 $1 \cdot e^{-j\omega_0 t}$, 所以求 $e^{-j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换时可以应用频移特性。因为

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

于是

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

及

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

进一步由欧拉公式知

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

所以有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[x(t)\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right] \\ &= \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

图 4-22 示出了信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 被搬移的情况。

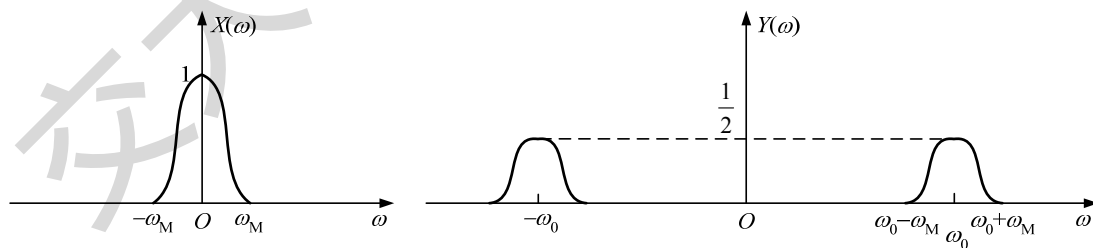


图 4-23 频谱搬移特性示例

例 4-8 中的 $x(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 相乘得到的信号 $x(t)\cos\omega_0 t$ 在通信系统中称为幅度调制信号。信号 $x(t)$ 与频率较高的正弦或余弦信号相乘的过程称为调制, 已调信号再次与正弦或余弦信号相乘的过程又称为解调。信号 $x(t)$ 通过与不同频率的正弦或余弦信号相乘使信号 $x(t)$ 的频谱搬移到不同频率处实现的通信方式称为频分复用。通信系统中的调制、解调及频分复用等都是应用傅里叶变换的频移特性才得以实现的。

微分与积分

若 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ ，在时域对信号 $x(t)$ 求导，有时域微分特性

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (4-76)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \quad (4-77)$$

及对 $x(t)$ 从 $-\infty$ 开始积分，有时域积分特性

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (4-78)$$

与时域相对应，在频域对信号频谱 $X(\omega)$ 求频率导数，有频域微分特性

$$(-jt)x(t) \longleftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (4-79)$$

$$(-jt)^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (4-80)$$

及对 $X(\omega)$ 从 $-\infty$ 开始积分，有频域积分特性

$$-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(\Omega) d\Omega \quad (4-81)$$

无论是时域的微分、积分特性或是频域的微分积分特性，都可以通过使用定义式进行一系列的推导得到，推导过程留作习题。

上面给出的性质中，时域微分特性常用来求解分段定义的以折线、指数函数或正弦函数等组成的能量信号的傅里叶变换。

例4-9 利用时域微分性质求图 4-24(a)所示三角脉冲信号的傅里叶变换。

解：三角脉冲信号可表示为

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\tau}|t| & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

对 $x(t)$ 求两次导数，波形如图 4-24(b)和(c)所示。根据微分性质得

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 X(\omega) &= \frac{2}{\tau} (e^{j\omega\tau/2} + e^{-j\omega\tau/2} - 2) = \frac{4}{\tau} [\cos(\frac{\omega\tau}{2}) - 1] \\ &= -\frac{8}{\tau} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4}) = -\frac{\omega^2\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4}) \end{aligned}$$

由于 $x(t)$ 满足绝对可积条件，其傅里叶变换不含冲激函数，故

$$X(\omega) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4}) \quad (4-82)$$

频谱如 4-22(d)所示。

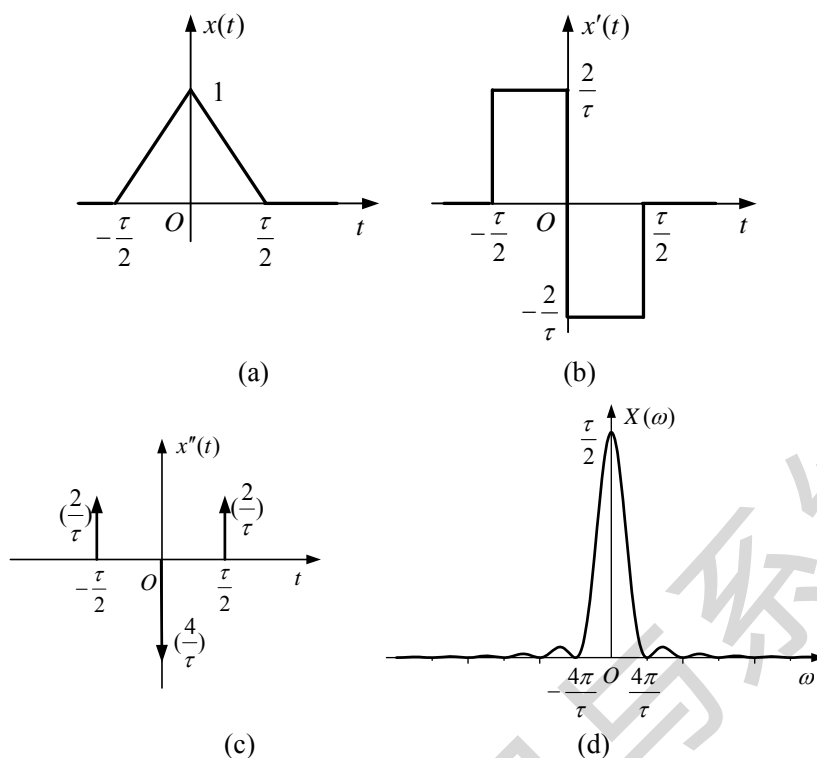


图 4-24 三角脉冲信号及其频谱

例4-10 求图 4-41 所示周期三角脉冲信号 $x(t)$ 的傅里叶级数。

解：设以 $t=0$ 为中心的一个周期的信号为 $x_0(t)$ ，可求得其傅里叶变换为

$$X_0(\omega) = \frac{A\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

由式(4-62)得周期三角脉冲信号的傅里叶级数的系数为

$$X_k = \frac{1}{T} X_0(k\omega_0) = \frac{A\tau}{2T} \text{sinc}^2\left(\frac{k\omega_0\tau}{4}\right)$$

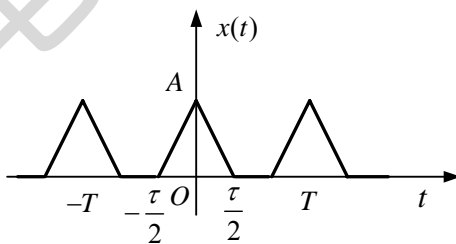


图 4-25 周期三角脉冲信号

例4-11 利用频域微分性质求斜变函数 $x(t) = t\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换。

解： $\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换为

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

根据频域微分性质，有

$$-jt\varepsilon(t) \longleftrightarrow -\frac{1}{j\omega^2} + \pi\delta'(\omega)$$

给上式时域和频域同乘以常数 j ，则

$$t\varepsilon(t) \longleftrightarrow -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

卷积

根据傅里叶变换时域与频域的对偶性质，卷积性质也分时域卷积性质和频域卷积性质。

若有 $X_1(\omega) = \mathcal{F}[x_1(t)]$ 和 $X_2(\omega) = \mathcal{F}[x_2(t)]$ 成立，则时域卷积性质为

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \quad (4-83)$$

频域卷积性质为

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)] \quad (4-84)$$

首先证明时域卷积性质，取 $x_1(t) * x_2(t)$ 的傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi)e^{-j\omega\xi} d\xi \\ &= X_1(\omega)X_2(\omega) \end{aligned}$$

时域卷积性质说明，两个时间函数卷积的傅里叶变换等于它们各时间函数的频谱函数的乘积。即时域中两信号的卷积对应于频域中它们频谱函数的乘积。

频域卷积性质的证明仍可以使用傅里叶变换的定义式进行，即

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\xi)e^{j\xi t} d\xi \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j(\omega-\xi)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\xi)X_2(\omega-\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)] \end{aligned}$$

频域卷积性质表明，两个时间函数乘积的傅里叶变换等于它们各自频谱函数的卷积乘以 $1/(2\pi)$ 。换言之，时域中两函数的乘积对应于频域中它们的频谱函数的卷积。

例4-12 应用卷积性质证明式(4-78)给出的时域积分特性。

解：由于

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * \varepsilon(t)$$

所以, 由卷积性质

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right] &= F[x(t) * \varepsilon(t)] = X(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}\end{aligned}$$

帕斯瓦尔定理

信号 $x(t)$ 的能量 E 定义为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$|x(t)|^2$ 等于 $x(t)x^*(t)$, 由频域卷积性质, $x(t)x^*(t)$ 的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[x^*(t)]$$

由于

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega), \quad \mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-j\omega t} dt &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) X^*(\lambda - \omega) d\lambda\end{aligned}$$

若令上式中 $\omega = 0$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4-85)$$

这就是著名的帕斯瓦尔定理。信号 $x(t)$ 的能量也可以用其频谱函数 $X(\omega)$ 计算, 为 $|X(\omega)|^2$ 下面积除以 2π 。

在非常小的窄带 $\Delta\omega$ 内, $X(\omega)$ 所拥有的能量为

$$\Delta E = \frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 \Delta\omega = |X(\omega)|^2 \Delta f$$

总能量为所有窄带内能量的和。因此, $|X(\omega)|^2$ 是单位频带 Δf 内的能量, 称为能量谱密度, 简称能谱。

例4-13 求信号 $x(t) = e^{-at} \varepsilon(t)$ ($a > 0$) 的能量, 验证帕斯瓦尔定理。

解: 信号 $x(t)$ 的能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$$

$x(t)$ 的频谱函数为

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi a} \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

则满足式(4-85)给出的等式关系。

傅里叶变换的性质总结于表 4-2 中。

表 4-2 傅里叶变换的性质

时域	频域
$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
$-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} X(\lambda) d\lambda$
$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$x(at+b)$	$\frac{1}{ a } e^{j\frac{b}{a}\omega} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega) X_2(\omega)$
$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$

4.7 系统的频域分析

信号的传输包含有两层意义，其一是信号从一点到达另一点必须经过某种介质或系统；其二是让信号经过专门设计的系统进行处理以实现特定的目的和要求。第一种情况信号经过的介质或系统有时是不能避开或不能改变的，第二种情况则可以根据需要对系统加以设计，得到希望得到的系统特性。

系统的频域分析

卷积性质进一步说明了傅里叶变换时域与频域的对称性，它不仅沟通了信号时域分析与频域分析之间的联系，而且建立了它们在运算上的关系。通过应用卷积性质的运算关系，很多情况下可以简化傅里叶正、逆变换中冗长的数学推导，同时也为应用傅里叶变换进行系统的频域分析与设计提供了途径，可以解决、解释单纯依靠时域分析所不能或难以解决的问题。

在求线性系统对任意输入 $x(t)$ 的响应中，时域方法采用的是卷积积分，而频域分析方法则是把系统的输入与响应关系应用傅里叶变换从时域变换到频域进行考察的一种方法。该方法把在时域中处理的时间变量 t 转换成处理频率变量 ω ，从解电路或系统的微分方程转化为解代数方程，并通过响应的频谱函数来研究响应的频率结构和电路及系统的功能。

若系统输入为 $x(t)$ ，系统的冲激响应为 $h(t)$ ，系统响应为 $y(t)$ ，由时域分析方法知道

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

若有 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ 、 $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ 及 $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ ，利用傅里叶变换的时域卷积性质，有

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (4-86)$$

上式中， $H(\omega)$ 也称为系统频率响应函数，为系统冲激响应的傅里叶变换，与冲激响应一样，从频域反映了系统的固有性质。

从物理概念的角度来理解卷积性质，就是任意输入信号的频谱函数，经过系统的处理后，发生了改变，由原来的 $X(\omega)$ 变成了 $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 。系统的作用相当于对输入信号各频率分量进行加权，某些频率的分量有可能增强，而另一些分量则相对削弱或保持不变。而且，经过系统处理的每一个频率分量都会产生各自的相位移。每一个频率分量改变的规律完全由系统函数 $H(\omega)$ 所决定。因此，在输入信号频谱给定的情况下，要想得到需要的输出频谱结构的过程，实际上就是对 $H(\omega)$ 进行设计的过程。所以，卷积性质并不仅仅是给出了一种计算响应的方法，更深层次上的意义是

该关系能够使设计者在频域中通过输入、输出信号的频谱清晰地看到系统对信号每一个分量的变换过程及对 $H(\omega)$ 的要求，从而获得系统函数的信息。

当然，采用卷积性质进行分析的前提一定以输入可以进行傅里叶变换，系统是以有界输入有界输出（BIBO）稳定和边界稳定为前提。

一般情况下，按照频域的观点，信号传输过程中所经过系统的系统函数可表示为

$$H(\omega) = \frac{b_M(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{a_N(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \quad (4-87)$$

式中的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_N; b_0, b_1, \cdots, b_M$ 取决于系统的结构，而与输入信号无关。可见， $H(\omega)$ 是 ω 的复函数，可写作

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\varphi_H(\omega)} \quad (4-88)$$

$|H(\omega)|$ 称为系统函数的幅频特性； $\varphi_H(\omega)$ 称为系统的相频特性。与信号的频谱相同的是， $|H(\omega)|$ 为 ω 的偶函数， $\varphi_H(\omega)$ 为 ω 的奇函数。

如前所述，信号经过传输系统就是对信号进行了加工，按照式(4-87)和(4-88)，传输的信号 $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\varphi_X(\omega)}$ 就被加工成了信号 $Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\varphi_Y(\omega)}$ ，有

$$\left. \begin{aligned} |Y(\omega)| &= |X(\omega)||H(\omega)| \\ \varphi_Y(\omega) &= \varphi_X(\omega) + \varphi_H(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4-89)$$

显然，传输后信号的幅度谱由传输前的 $|X(\omega)|$ 改变成了 $|X(\omega)||H(\omega)|$ 、相位谱由 $\varphi_X(\omega)$ 增加附加相移 $\varphi_H(\omega)$ 改变成 $\varphi_X(\omega) + \varphi_H(\omega)$ 。

信号经过传输发生了频谱特性的改变，有些频率分量可能得到提升，有些频率分量可能受到衰减，必然引起输出信号的波形与输入信号的波形不同，此种情况，称为信号传输过程中产生了信号传输失真。

例4-14 试分析图 4-26(a)所示电路的输出电压 $u_2(t)$ 。已知 $u_1(t) = \varepsilon(t + \tau) - \varepsilon(t - \tau)$ ，电路接入信号前无储能。

解：频域电路模型如图 4-26(b)所示。利用结点电压法，有

$$U_2(\omega) = \frac{GU_1(\omega)}{2G + j\omega C}$$

由于

$$U_1(\omega) = [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}](e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) = \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})$$

于是

$$\begin{aligned} U_2(\omega) &= \frac{a(e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau})}{2j\omega(a + j\omega)} \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a + j\omega}]e^{j\omega\tau} - \frac{1}{2}[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{a + j\omega}]e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

式中 $a = 2G/C$ 。对 $U_2(\omega)$ 进行逆傅里叶变换，得

$$u_2(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t + \tau) - e^{-a(t+\tau)} \varepsilon(t + \tau) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t - \tau) - e^{-a(t-\tau)} \varepsilon(t - \tau) \right]$$

电路的输入输出波形如图 4-27 所示。

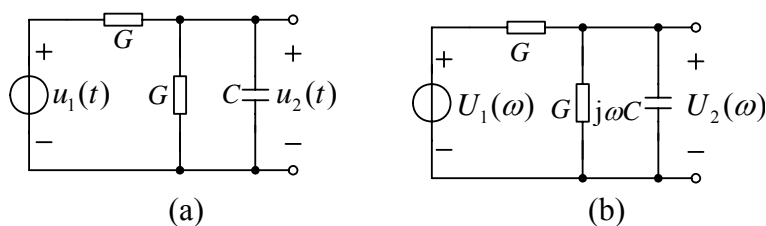


图 4-26 频域分析法求响应的例子

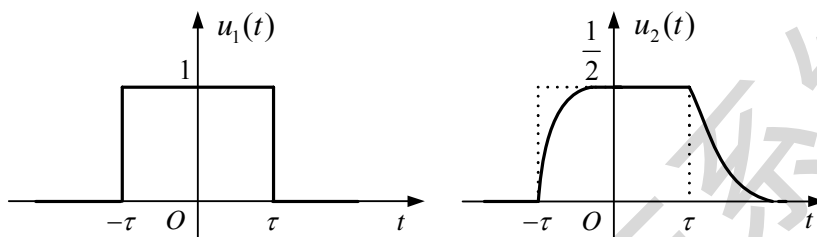


图 4-27 矩形脉冲输入信号及其响应

由图可见，输出信号的波形与输入信号相比产生了失真，失真主要表现在输出波形的上升和下降特性上。在时域的急剧变化意味着频域将包含有很高的频率分量。输出波形上升或下降特性的变缓，意味着输入信号经过系统的处理或系统函数的加权后损失了高频分量。图 4-28 分别给出的输入信号、系统函数及输出信号的幅频特性也证实了上述的结论并且更加直观。图 4-28 (b) 显示，该电路生成的系统具有典型的低通特性，它不允许输入信号各频率分量均等地通过，频率较低的分量衰减较小，频率较高的分量衰减较大。图 4-28 (c) 恰是图 4-28 (a) 与图 4-28 (b) 相乘的结果。

应当指出，图 4-28 只给出了幅度特性，严格地讲必须幅度和相位特性一起考虑才能与时域的波形相对应，但本例的幅频特性起了主要作用，相位特性的影响没有考虑。

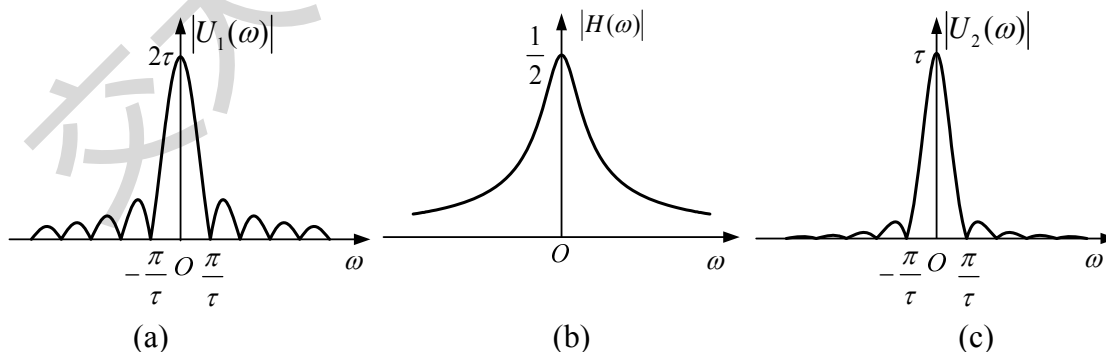


图 4-28 例 4-14 系统函数、输入信号及输出信号的频率特性

讨论例 4-14 信号经过系统传输产生失真的问题时，用到了所谓的“系统频域分析方法”。采用该方法求解系统的零状态响应时通常会遇到两类问题：一类是已知系统的冲激响应或系统函数，求任意非周期信号激励下的响应，该类问题可以用卷积性质

很容易解决；另一类是已知系统或电路的结构、元件约束，求在电源作用下的响应。

对于已知系统或电路的结构、元件约束，求在电源作用下的响应的情况，频域分析法则意味着将输入信号的傅里叶分解可以看作无穷多项 $e^{j\omega t}$ 信号的叠加。因此，分别计算电路或系统对每一 $e^{j\omega t}$ 分量的响应再求和即可得出完整的响应信号。这一观点在线性时不变系统的分析方法中已得到了反复运用。所以，频域分析法求解具体电路或系统响应的时候，处理电路元件的频域模型与相量法中类似。其区别是相量法中通常是某一频率分量，而在频域法中的 ω 是频率轴上的连续变量（从 $-\infty$ 到 ∞ ）。

此类情况下频域分析法的基本步骤为

(1) 把已知激励和待求响应变换为相应的频谱函数，把电路元件代以相应的阻抗或导纳函数，画出频域中的电路模型。其中 R 、 L 、 C 的阻抗和导纳分别为

$$Z_R = R, \quad Y_R = G$$

$$Z_L = j\omega L, \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad Y_C = j\omega C$$

基尔霍夫定律的频域形式为

$$\sum I(\omega) = 0 \quad (\text{KCL})$$

$$\sum U(\omega) = 0 \quad (\text{KVL})$$

(2) 根据 KCL、KVL 和支路特性列出频域形式下电路或系统的代数方程；

(3) 解代数方程求取待求响应的频谱函数；

(4) 取逆傅里叶变换得出零状态下响应的时域解。

无失真传输

大多数情况下，信号传输过程中都会产生或多或少的失真。但实际应用中往往又希望信号传输过程中保持“无失真传输”。例如在一条通信信道上信号的放大或消息信号的传输都要求输出波形与输入波形相同。

所谓无失真传输是指传输系统的输出与输入相比，只是大小与出现的时间不同，而无波形上的变化。大小的不同意味着输出波形与输入波形各点的瞬时值可以相差一比例常数 K ；波形出现时间的不同意味着对输入进行的时移运算。若设输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，无失真传输的时域条件为

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (4-90)$$

式中的 t_0 为滞后时间。

显然，输出是输入的精确再现，因为输出波形与输入波形一样，只不过输出信号的幅度是原信号的 K 倍，并延迟了 t_0 时间，如图 4-29 所示。

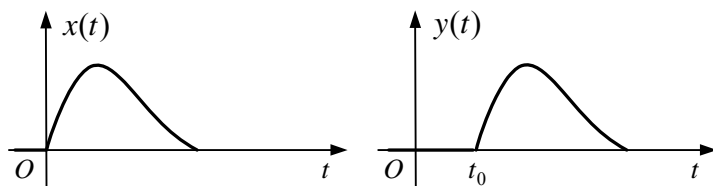


图 4-29 系统的无失真传输

无失真传输也可在频域讨论，对式(4-90)进行傅里叶变换，由时移特性可得

$$Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

故系统函数为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (4-91)$$

式(4-91)即为实现无失真传输系统函数应该满足的频域条件。这一条件表明，系统函数的幅频特性在全频率范围内保持为与频率无关的常数，而相频特性则是一条通过原点并具有斜率为 $-t_0$ 的直线，即

$$|H(\omega)| = K, \quad \varphi(\omega) = -\omega t_0$$

幅频特性与相频特性如图 4-30 所示。

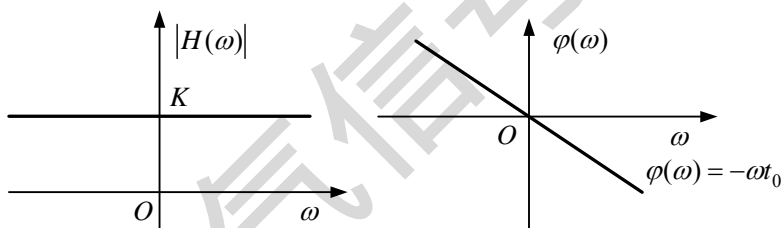


图 4-30 系统无失真传输的频域特性

由于 $|H(\omega)|$ 为一常数，故输出信号中各分量的幅度的相对大小没有变化，所以不产生幅度失真；为了满足无相位失真的条件，就必须使输出中各频率分量的时间平移相同，即都等于 t_0 ，反映在相位特性上就是一条通过原点的直线。

例如一个由基波和三次谐波分量组成的信号 $x(t)$ ，如图 4-31(a)所示，如果 $x(t)$ 在时间轴上时移了时间 t_0 ，它的两个谐波分量也必须时移 t_0 ，才能保证 $x(t)$ 不失真，如图 4-31(b)所示。基波和三次谐波相位的变化分别为 $\omega_0 t_0$ 和 $3\omega_0 t_0$ 。如果各频率分量的时移不同，例如基波分量时移时间 t_0 ，三次谐波分量时移时间是 t_1 ，则输出的波形将与 $x(t)$ 大不相同，如图 4-31(c)所示。

为了实现无失真传输，理论上要求系统具有无限大的带宽和线性相位特性，实际上大多数情况下并不需要如此苛刻的条件。一般情况下，实际信号的带宽都是有限的，即使信号的频谱分布可以延展到无穷大频率处，但由于各频率分量所含的能量随着频率的增高而减小，由较高频率分量引起的失真可以忽略不计。因此，为保证系统能够

无失真地传输，只需要系统具有有限的带宽就可以了。例如，放大器设计中就不要求其带宽为无穷大，只要求放大器的带宽与要放大的信号相对应的带宽区域内满足无失真条件即可。

应特别注意，不满足无失真传输条件的线性系统引起的失真仅仅是使各频率分量的幅度相对比例发生变化或有不相等的时移。输入信号经过线性系统后的输出中不会有输入信号中所不具有的频率分量。它与非线性失真有着本质的不同，因为非线性失真将导致输出中出现输入所没有的频率分量。

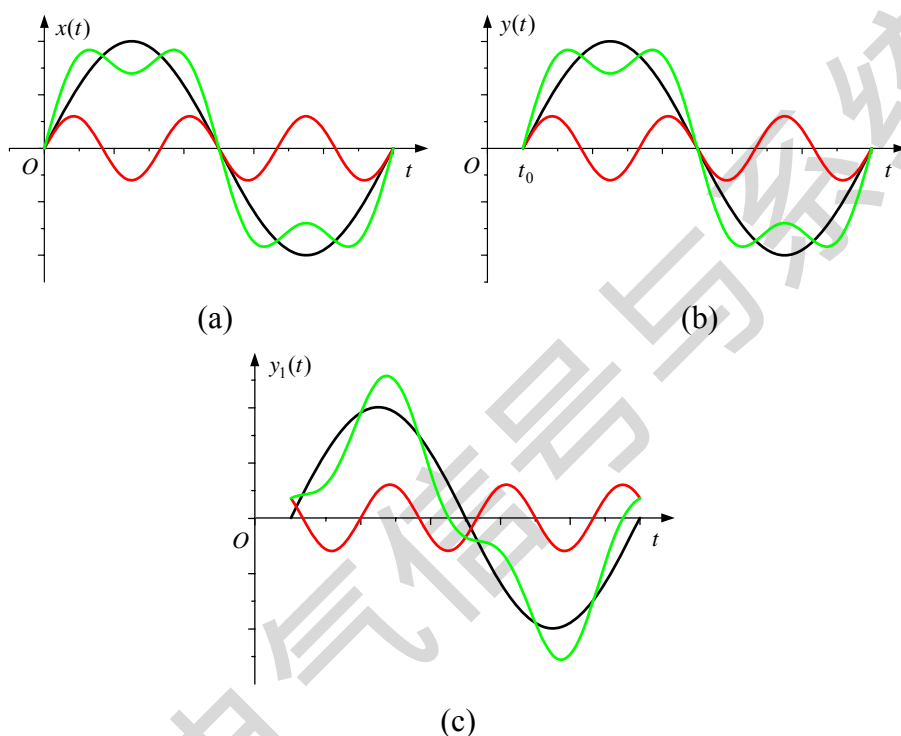


图 4-31 无失真传输与相位失真传输示例

理想滤波器

滤波器广泛存在于电子设备中，它主要用于滤除或削弱输入信号中不希望包含的噪声、干扰等的频率分量。滤波器属于专门设计的用于处理信号的系統。

理想滤波器能够在某个频带内实现无失真传输，而在其余频率上则完全给予抑制。通常称希望滤除的频率范围为滤波器的阻带，而希望输入信号中保留的频率范围为滤波器的通带。根据滤波器通带与阻带在频率轴上占据的相对位置，将滤波器分为低通、高通、带通、全通等不同类型的。例如，滤除低频信号而允许高频信号通过的滤波器，称为高通滤波器；滤除高频信号而允许低频信号通过的滤波器，称为低通滤波器。

对低于 ω_c 的所有频率分量无失真地通过，而高于 ω_c 的所有频率分量将被彻底滤除， ω_c 称为通带频率，具有这种特性的滤波器称为理想低通滤波器，其系统函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{其余 } \omega \end{cases} \quad (4-92)$$

图 4-32画出了理想低通滤波器的幅频特性 $|H(\omega)|$ 与相频特性 $\varphi(\omega)$ 。

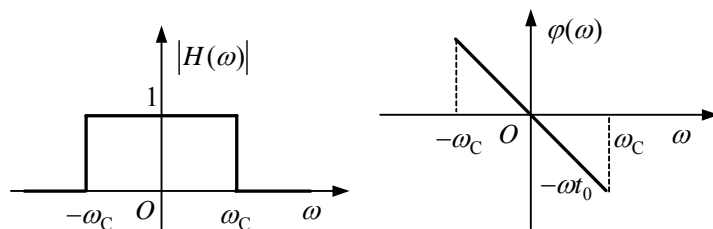


图 4-32 理想低通滤波器的幅频特性与相频特性

由理想低通滤波器的系统函数可以求得冲激响应 $h(t)$ 为

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos[\omega(t-t_0)] d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}[\omega(t-t_0)] \end{aligned} \quad (4-93)$$

可见， $h(t)$ 为sinc函数，最大峰值出现在 $t=t_0$ 处，如图 4-33所示。峰值 ω_c/π 与通带频率 ω_c 成正比，波形的主瓣持续时间为 $2\pi/\omega_c$ ，与通带频率 ω_c 成反比。显然，与输入信号 $\delta(t)$ 相比，冲激响应 $h(t)$ 产生了非常大的失真。这是由于 $\delta(t)$ 具有无穷宽的频谱分布，而低通滤波器完全滤除了高于 ω_c 频率的分量，这必然导致时域响应的变缓。如果加宽滤波器的通频带即提高通带频率 ω_c ，则冲激响应的峰值增加，主瓣宽度变窄；当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时，即不滤除任何分量，冲激激励将无失真地被传输。当然，此时系统已不再是低通滤波器了。

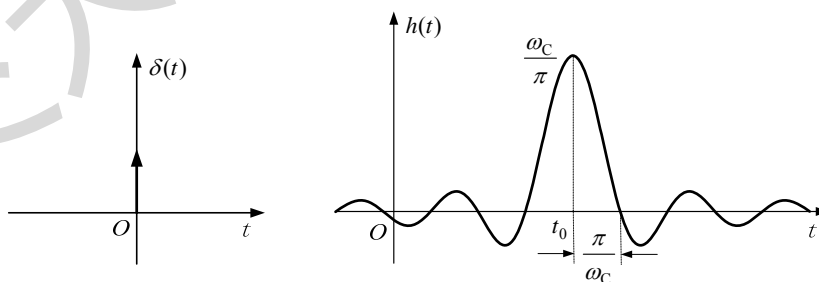


图 4-33 理想低通滤波器的冲激响应

整个冲激响应波形持续时间从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，即在没有冲激信号激励之前，就有了响应，响应先于激励出现，这在实际物理系统中是不可能的。因此，理想低通滤波器属于非因果系统，它在物理上是无法实现的。

由以上讨论，理想低通滤波器具有抑制输入信号快速变化的特性。为了更进一步

定量说明影响关系，再对理想低通滤波器的阶跃响应进行研究。

阶跃信号的傅里叶变换为

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

于是在 $|\omega| < \omega_c$ 时

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0}$$

则阶跃响应

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

上式中利用了奇对称函数积分等于零及偶对称函数积分等于两倍单边积分的关系，更进一步引入变量代换

$$\xi = \omega(t-t_0)$$

有

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \text{sinc}(\lambda) d\lambda \quad (4-94)$$

$\text{sinc}(\lambda)$ 函数的积分不能用解析式表示，通常用表格或曲线的形式给出。图 4-34 给出了 $\text{sinc}(\lambda)$ 函数及其积分 $\text{sinint}(\lambda) = \int_0^\lambda \text{sinc}(\eta) d\eta$ 的曲线。

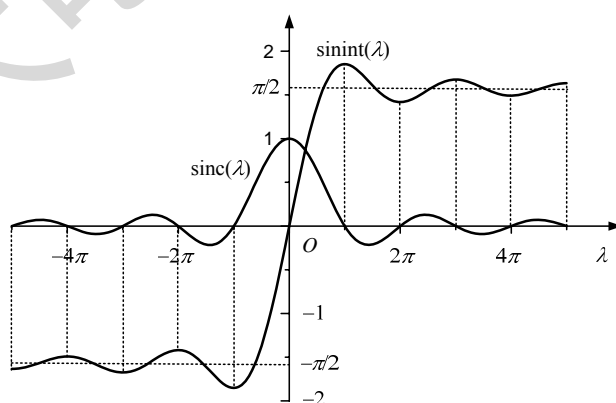


图 4-34 $\text{sinc}(\lambda)$ 函数及其积分的曲线

从图中可以看出， $\int_0^\lambda \text{sinc}(\eta) d\eta$ 是奇对称函数，随着 λ 的增长， $\int_0^\lambda \text{sinc}(\eta) d\eta$ 从 0 增长，然后以 $\pi/2$ 为中心衰减起伏，各极值点与 $\text{sinc}(\lambda)$ 函数的零点对应。

式(4-94)给出的阶跃响应如图 4-35 所示。从图中可见：

(1) 理想低通滤波器通带内的线性相位平移使其阶跃响应产生对应的时间延迟，若从 $y(t)=1/2$ 开始计算，延迟时间恰等于 t_0 。

(2) 由于理想低通滤波器的通带频率 ω_c 为有限值，阶跃信号经过它处理后必然损失 $\omega > \omega_c$ 的高频分量。前已指出，高频分量的滤除必然导致时域快变特性的变缓，因此，单位阶跃响应有一个上升时间。如果定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间 t_r ，则有

$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{B} \quad (4-95)$$

式中， $B = \omega_c / (2\pi)$ ，是将角频率折合为频率的滤波器带宽（通带频率）。显然，滤波器的通带频率 ω_c 越低，阶跃响应上升越缓慢。

(3) 阶跃响应仍然先于激励出现，这进一步说明理想低通滤波器的非因果特性。

尽管理想低通滤波器在实际电路中无法实现，但它能为实际滤波器的分析与设计提供理论指导。

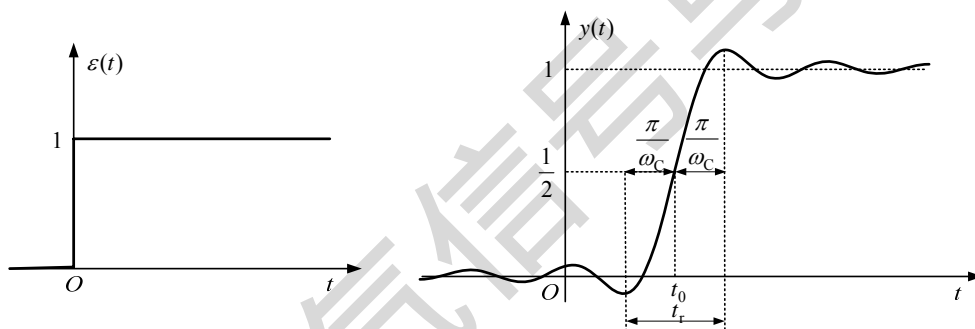


图 4-35 理想低通滤波器的阶跃响应

4.8 抽样定理

在时域，将连续时间信号转换为离散时间信号的过程称为“时域抽样”。根据傅里叶变换的对偶性，在频域将连续频谱转换为离散频谱的过程则称为“频域抽样”。

实际应用中虽然有很多信号本身就具有时间离散性而成为离散时间信号，但大多数情况遇到的还是连续时间信号。因此，为充分利用数字信号处理技术的优势，首先要将连续时间信号转换成离散时间信号。本节讨论连续时间信号或连续频谱转换成离散时间信号或离散频谱的时域、频域特征，以及满足什么条件可以保证抽样后能不失真地恢复原信号。

时域抽样

在时域对连续时间信号进行抽样的目的是要将连续时间信号变为离散时间信号。

所谓抽样就是利用抽样脉冲序列 $p_s(t)$ 从连续信号 $x(t)$ 中“抽取”一系列的离散时间样本值，通常称为抽样数据信号，以 $x_s(t)$ 表示，图 4-36 给出了连续时间信号、抽样脉冲及抽样数据信号。一般情况下，信号的抽样过程就是待抽样连续时间信号 $x(t)$ 与抽样脉冲序列 $p_s(t)$ 相乘的过程。

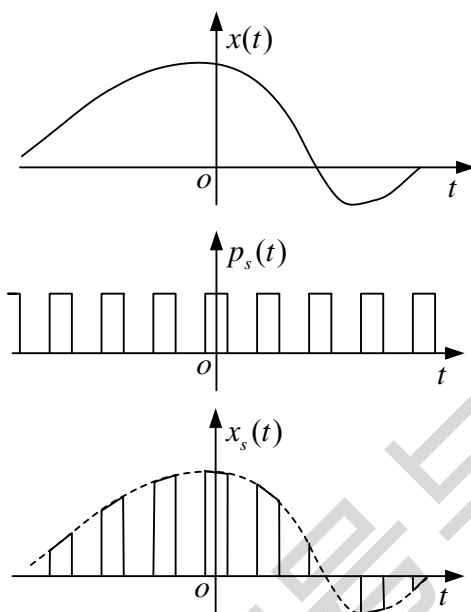


图 4-36 信号抽样示意图

设抽样脉冲序列 $p_s(t)$ 是周期函数，周期为 T_s ，角频率 $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$ ， T_s 和 ω_s 也分别称为抽样周期和抽样角频率。

由抽样过程，有

$$x_s(t) = x(t)p_s(t) \quad (4-96)$$

因为抽样脉冲 $p_s(t)$ 的周期性，由式(4-59)知，它的傅里叶变换 $P_s(\omega)$ 可以表示为

$$P_s(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \delta(\omega - k\omega_s) \quad (4-97)$$

其中

$$P_k = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p_s(t) e^{-jk\omega_s t} dt \quad (4-98)$$

它是抽样脉冲的傅里叶系数。

对式(4-96)两边取傅里叶变换，根据频域卷积性质

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}[x(t)p_s(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P_s(\omega)$$

把式(4-97)代入上式，抽样数据信号的傅里叶变换为

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k X(\omega - k\omega_s) \quad (4-99)$$

上式表明，抽样数据信号的频谱 $X_s(\omega)$ 是连续时间信号的频谱 $X(\omega)$ 以抽样角频率 ω_s

为间隔的延拓，在延拓过程中频谱被抽样脉冲 $p_S(t)$ 的傅里叶级数的系数 P_k 所加权。

显然，抽样数据信号的傅里叶变换由三种因素确定：连续时间信号的频谱、抽样脉冲序列的波形及抽样周期。

下面讨论抽样脉冲 $p_S(t)$ 为冲激序列时的理想抽样情况。

理想抽样如图 4-37 所示，设 $p(t)$ 为周期单位冲激串， $x(t)$ 为连续时间信号，乘积 $x_S(t) = x(t)p(t)$ 称为 $x(t)$ 的已抽样信号 (sampled signal)， $x_S(t)$ 中各冲激强度构成的序列则为 $x(t)$ 的样本 $x[n]$ 。仍设抽样间隔为 T_S ，抽样角频率 $\omega_S = 2\pi f_S = 2\pi/T_S$ 。

根据式(4-99)，已抽样信号的傅里叶变换为

$$X_S(\omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_S) \quad (4-100)$$

上式表明，已抽样信号的频谱 $X_S(\omega)$ 是连续时间信号的频谱 $X(\omega)$ 以抽样角频率 ω_S 为间隔的延拓，系数为 $1/T_S$ 。

对最高频率为 ω_M 的带限信号 $x(t)$ ，频谱函数 $X(\omega)$ 在 $|\omega| > \omega_M$ 时 $X(\omega) = 0$ ，当抽样频率 $\omega_S > 2\omega_M$ 时，图 4-38 给出了已抽样信号的频谱示意图。从图中可以看出，这种情况下已抽样信号的频谱完整的保留了 $x(t)$ 的频谱，因此，用一个增益为 T_S 、通带频率大于 ω_M 并小于 $(\omega_S - \omega_M)$ 的理想低通滤波器，就可以从已抽样信号 $x_S(t)$ 中不失真地恢复出连续时间信号 $x(t)$ 。

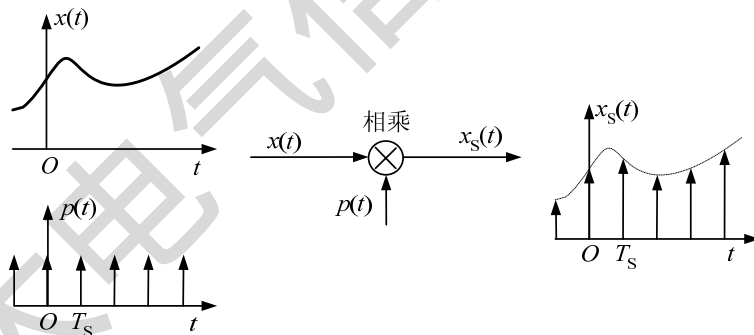


图 4-37 理想抽样

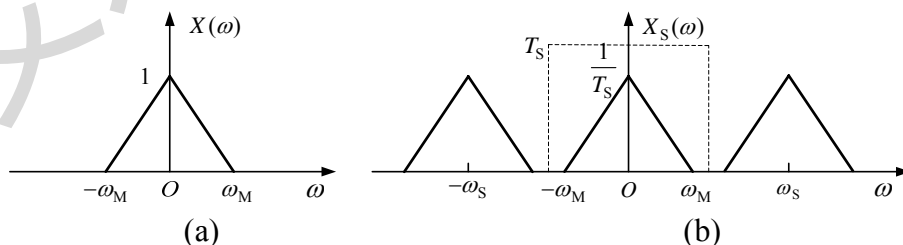


图 4-38 已抽样信号的频谱

如果 $x(t)$ 是最高频率为 ω_M 的带限信号，但抽样频率 $\omega_S < 2\omega_M$ ，则已抽样信号的频谱如图 4-39 所示。由于其频谱发生混叠，则在这种情况下无法用滤波器从 $x_S(t)$ 中不失真地恢复原信号 $x(t)$ 。

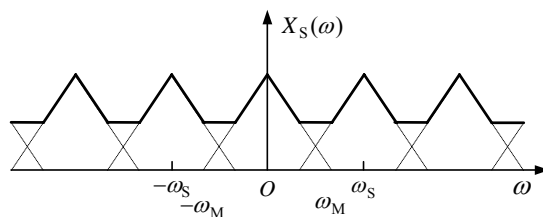


图 4-39 频谱的混叠

如果 $x(t)$ 不是带限信号，无论抽样周期或抽样频率如何选取，则频谱混叠是不可避免的，也就不可能从 $x_s(t)$ 中无失真地恢复出原信号 $x(t)$ 。

由以上分析可见，首先要保证被抽样的信号必须是带限信号，再就是要保证抽样频率 ω_s 大于被已抽样信号中最高频率 ω_M 的两倍，即 $\omega_s > 2\omega_M$ ，才能把一个信号从其已抽样信号中无失真地恢复出来。时域抽样定理指出：

对任一最高频率为 ω_M 的带限信号，当抽样频率 $\omega_s > 2\omega_M$ 时，该信号就可以从已抽样信号中无失真地恢复出来。

抽样定理中的最小抽样频率 $2\omega_M$ 常称为“奈奎斯特（Nyquist）角频率”。

以上通过讨论已抽样信号的傅里叶变换从频域解释了抽样定理，下面再从时域来说明抽样定理的合理性。

众所周知，两点可以确定一条直线，三点可以决定一条二次曲线（抛物线）。当把一个周期为 T 、最高频率分量为 $M\omega_0$ 的周期信号 $x(t)$ 分解为三角傅里叶级数时，除直流分量外共有 $2M$ 个待定系数，即

$$\begin{aligned} x(t) = & a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + a_M \cos M\omega_0 t \\ & + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots + b_M \sin M\omega_0 t \end{aligned} \quad (4-101)$$

显然，为了决定正弦项和余弦项的 $2M$ 个待定系数，共需要 $2M$ 个 $x(t)$ 的数据。若要进一步确定信号的直流分量 a_0 ，当然还需要一个数据。一般情况下信号的恒定分量对信号的信息内容无关紧要，可以不予考虑。因此，对最高频率分量为 $M\omega_0$ 的信号来说，可以在一周期内对 $x(t)$ 抽样 $2M$ 次，然后把 $2M$ 个抽样值和抽样时间 t_0, t_1, \cdots, t_{2M} 分别代入式(4-101)，最后得到 $2M$ 个联立方程。由此就可以求出 a_1, a_2, \cdots, a_M 和 b_1, b_2, \cdots, b_M 共 $2M$ 个常数。也就是说，当一个时间信号 $x(t)$ 的最高频率分量不超过某一定值时，为决定 $x(t)$ 的变化规律，只需要有限个信号的抽样值。

对于带限信号来讲，它的波形最高变化速度受最高频率分量 ω_M 的限制。所以，为了得到描述这一频率分量的信息，应在最高频率分量对应的一个周期内至少抽样两次，即有 $\omega_s > 2\omega_M$ 。

设用于恢复原信号的理想低通滤波器的频率特性为

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4-102)$$

式中 ω_c 是滤波器的通带频率, T_s 为抽样间隔。

若取

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s}$$

由式(4-93), 滤波器的冲激响应为

$$h(t) = T_s \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s} t\right) \quad (4-103)$$

对理想冲激抽样, 已抽样信号 $x_s(t)$ 为

$$x_s(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

于是, 根据时域求系统零状态响应的方法, 理想低通滤波器的输出 $y(t)$ 为

$$\begin{aligned} y(t) &= x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) \right] * \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T_s} t\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{sinc}\left[\frac{\pi}{T_s}(t-nT_s)\right] \end{aligned} \quad (4-104)$$

上式表明, 使用理想低通滤波器从已抽样信号恢复原连续时间信号的过程, 等效于用无限多个不同移位的sinc函数合成原信号, 其系数等于 $x(nT_s)$ 。图 4-40所示的时域波形给出了这一过程。该结果还可以按照线性系统的叠加原理来理解, 即当已抽样信号通过理想低通滤波器时, 每一个抽样冲激产生一个sinc函数形式的响应, $y(t)$ 就是所有冲激响应的叠加。

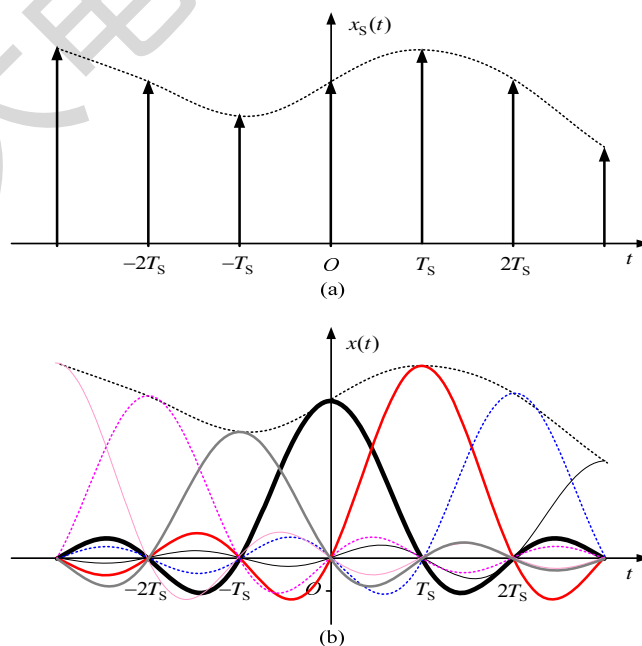


图 4-40 由已抽样信号恢复原信号

由图 4-40 中波形的合成过程来看, 两个 sinc 函数的间隔由 T_s 决定。 T_s 比较小 (对应于较高的抽样频率) 时, 有 $y(t) = x(t)$, 信号被恢复; 但当 T_s 过大时, 各 sinc 函数的波形在时间轴上相隔较远, 无论如何选择低通滤波器的通带频率 ω_c , 都不能使叠加后的波形准确恢复 $x(t)$ 。

实际应用抽样定理时有两个关键因素应加以重视, 其一是有限带宽信号的获得, 另一个是周期抽样序列与抽样方式的选择。

严格来说, 一个具有有限带宽的信号是不存在的。由信号频谱的概念知道, 如果一个信号仅存在于有限的时间内, 那么它就会有无限多个频率成分, 频率从零直到无穷大。但对于实际信号来讲, 随着频率的升高, 信号的幅度频谱 $|X(\omega)|$ 会愈来愈小, 绝大部分能量都集中在某一频段内。若把信号的高频成分忽略不计, 所引起的误差很小。实际应用中往往根据这一特点把信号看作是频带有限的, 最高频率 ω_M 的选择根据需要的精确度而定。应指出的是, 虽然高频分量的取舍对信号本身影响不大, 但如若不把高频分量彻底滤除, 在使用已抽样信号恢复原信号时将产生 “混叠失真”。没有滤除的高频部分将会变为恢复信号的低频部分而造成影响, 这一点在图 4-39 中已经得到说明。所以, 在对一个实际信号进行抽样时, 首先应确定所保留的最高频率分量 ω_M , 再设计一个合适的抗混叠低通滤波器, 其通带频率等于 ω_M , 彻底滤除高于 ω_M 的所有频率分量, 最后才能进行满足 $\omega_s > 2\omega_M$ 的抽样。实际中, 一般取 ω_s 至少为 ω_M 的 3~4 倍。

当抽样函数 $p(t)$ 不为冲激串, 而是图 4-41 所示的脉宽为 τ 、幅度为 A 的脉冲串时, 其傅里叶级数的系数 P_k 为

$$P_k = \frac{A\tau}{T_s} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_s\tau}{2}\right)$$

由式(4-99)知, 已抽样信号的频谱 $X_s(\omega)$ 为

$$X_s(\omega) = \frac{A\tau}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_s\tau}{2}\right) X(\omega - k\omega_s) \quad (4-105)$$

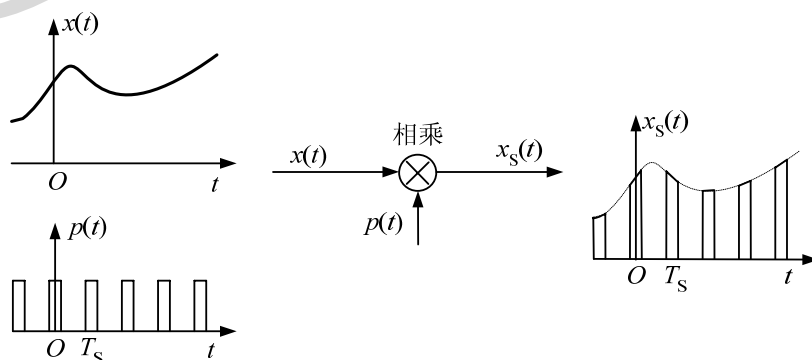


图 4-41 脉冲串抽样

这种情况下 $X(\omega)$ 在延拓的过程中加权系数不为恒定值, 如图 4-42 所示。显然, 这也能够采用低通滤波器无失真地恢复原信号 $x(t)$ 。

理论上讲, 若用理想低通滤波器从已抽样信号恢复原信号, 无论使用哪一种周期抽样函数并不影响恢复的效果, 但最为理想的周期抽样函数是冲激串。

然而, 在实际电路与系统中, 要产生和传输接近 $\delta(t)$ 函数的宽度窄且幅度大的脉冲信号比较困难。为此, 实际应用中经常采用其他抽样方式, 最常用的一种为零阶保持抽样。

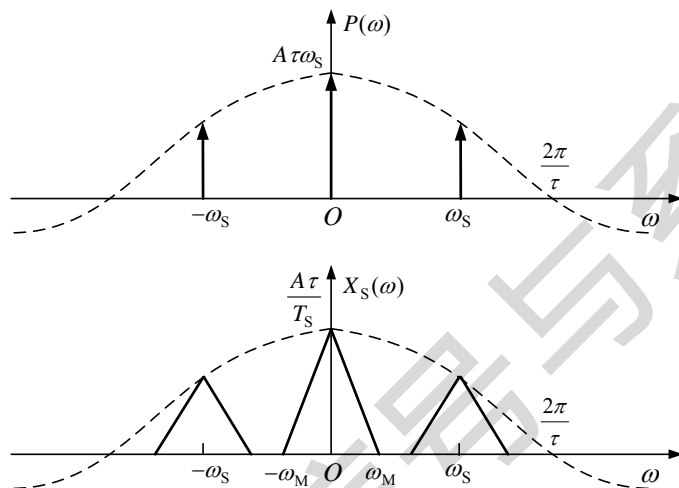


图 4-42 矩形脉冲抽样序列及其已抽样信号的频谱

零阶保持抽样等效于理想抽样再紧跟一个冲激响应为 $h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_s)$ 的系统, 如图 4-43 所示。保持抽样的过程是在抽样瞬间获得信号 $x(t)$ 的样本值, 然后保持这一样本值直到下一个抽样瞬间为止, 得到的已抽样信号为阶梯状。

从图 4-43 中已抽样信号 $x_{s0}(t)$ 的波形可以看到, 它并不等于信号 $x(t)$ 与周期抽样序列 $p(t)$ 的乘积, 因此, 对采用零阶保持抽样获得的已抽样信号进行恢复方式的分析, 不能简单借用前面的结论。

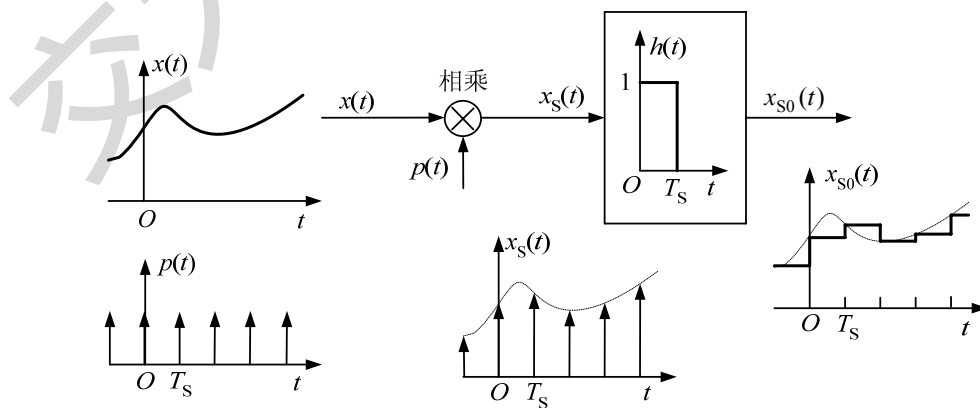


图 4-43 零阶保持抽样

为分析零阶保持已抽样信号的恢复问题, $x_s(t)$ 及其傅里叶变换重写如下:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

图 4-43 中的“保持”方框对应的线性时不变系统的冲激响应为

$$h(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_s) \quad (4-106)$$

于是，已抽样信号 $x_s(t)$ 通过“保持”系统的响应 $x_{s0}(t)$ 为

$$x_{s0}(t) = x_s(t) * h(t)$$

式中 $h(t)$ 的傅里叶变换为

$$H(\omega) = T_s \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \quad (4-107)$$

由时域卷积性质

$$X_{s0}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T_s}{2}} \quad (4-108)$$

由上式可以看出使用零阶保持抽样获得的已抽样信号的频谱不再仅仅是原连续时间信号频谱以 ω_s 为间隔的延拓，而是在原信号频谱 $X(\omega)$ 以 ω_s 为间隔延拓的基础上再乘上 $\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)$ 函数，此外还附加了延时因子项 $e^{-j\frac{\omega T_s}{2}}$ 。

基于已抽样信号频谱的这一特点，仅使用理想低通滤波器已不能恢复原信号的频谱 $X(\omega)$ 。为实现原信号的无失真恢复，需要引入具有如下补偿特性的低通滤波器

$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\frac{\omega T_s}{2}}}{\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)} & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases} \quad (4-109)$$

它的幅频特性 $|H_{LP}(\omega)|$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 如图 4-50 所示。

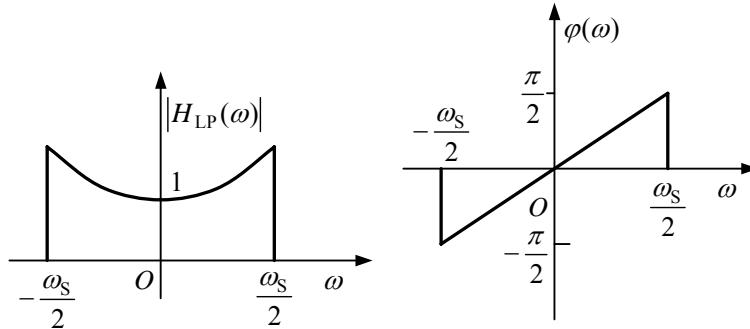


图 4-44 补偿低通滤波器特性

在时域, 当已抽样信号 $x_{s0}(t)$ 通过此补偿低通滤波器后, 即可恢复原信号 $x(t)$ 。实际上, 对给定的一个信号 $x(t)$, 当抽样频率 ω_s 足够高时, 也可以认为已抽样信号 $x_{s0}(t)$ 的波形是对 $x(t)$ 的一种近似表示, 这种近似是用阶梯信号表示连续的函数曲线。显然, 使用阶梯信号的这种表示方法是比较粗糙的。若要获得更精细的近似表示, 可将 $x(t)$ 在各抽样点的值 $x(nT_s)$ 用直线连接或高阶多项式表示的曲线进行连接。例如图 4-45 所示的直线连接情况就具有比阶梯信号更好的近似效果, 这种信号则称为一阶保持已抽样信号。当然, 用高阶多项式表示的曲线连接抽样点获得的信号应称为“高阶保持抽样”。

目前应用中广泛使用的仍是零阶保持抽样, 原因是零阶保持抽样电路容易实现, 但更重要的原因是大多数应用场合对信号抽样的目的不是为了直接从已抽样信号中恢复原信号, 而是为了给 A/D 转换器提供 A/D 转换期间维持一定时间的稳定输入值, 确保 A/D 转换器对抽样值进行准确的量化, 以便对量化的数字信号进行后续的处理, 零阶保持抽样恰恰具有这一其他抽样方式所不具有的特点。

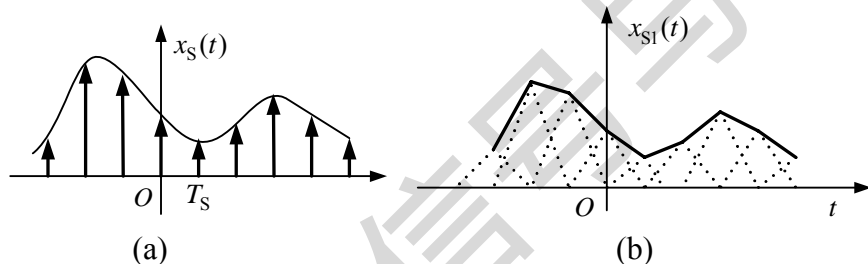


图 4-45 一阶保持抽样波形

频域抽样

根据傅里叶变换时、频域的对偶性质, 在时域对信号的处理以及处理后信号所具有的频域特征, 完全可以对偶到在频域对信号的频谱进行相同的处理以及处理后信号应具有的相同时域特征。按照这一思路, 下面讨论频域连续频谱经周期冲激串抽样后对应于时域信号所具有的特征。

设连续频谱函数 $X(\omega)$ 所对应的时间函数为 $x(t)$, 频域按等间隔 ω_0 抽样, 抽样函数为

$$D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

于是, 抽样频谱 $X_1(\omega)$ 为

$$X_1(\omega) = X(\omega)D(\omega) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \quad (4-110)$$

设 $\mathcal{F}^{-1}[X_1(\omega)] = x_1(t)$, $D(\omega)$ 的傅里叶变换为

$$d(t) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

其中 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

对式(4-110)应用时域卷积性质，有

$$x_1(t) = x(t) * \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) \quad (4-111)$$

上式表明，若 $x(t)$ 的连续频谱 $X(\omega)$ 在频域被冲激串 $D(\omega)$ 以间隔 ω_0 抽样，则在时域中对应于 $x(t)$ 以 T_0 为间隔的延拓。图 4-46 给出了频域和时域的相关波形。

由图 4-46 可以看出，如果 $x(t)$ 是一个持续时间有限的信号，类比于时域抽样定理，在频域就可以通过选择抽样间隔 ω_0 ，在

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} > 2T_M \quad (4-112)$$

成立的情况下，保证信号 $x(t)$ 以 T_0 为周期而不重叠，并生成周期信号 $x_1(t)$ 。这一结果也再次证明，时域的周期信号，必对应频域的离散频谱。

结合时域与频域的抽样特性，可以得到傅里叶变换的又一重要性质：时域（或频域）的抽样（离散），必对应于频域（或时域）的周期性。

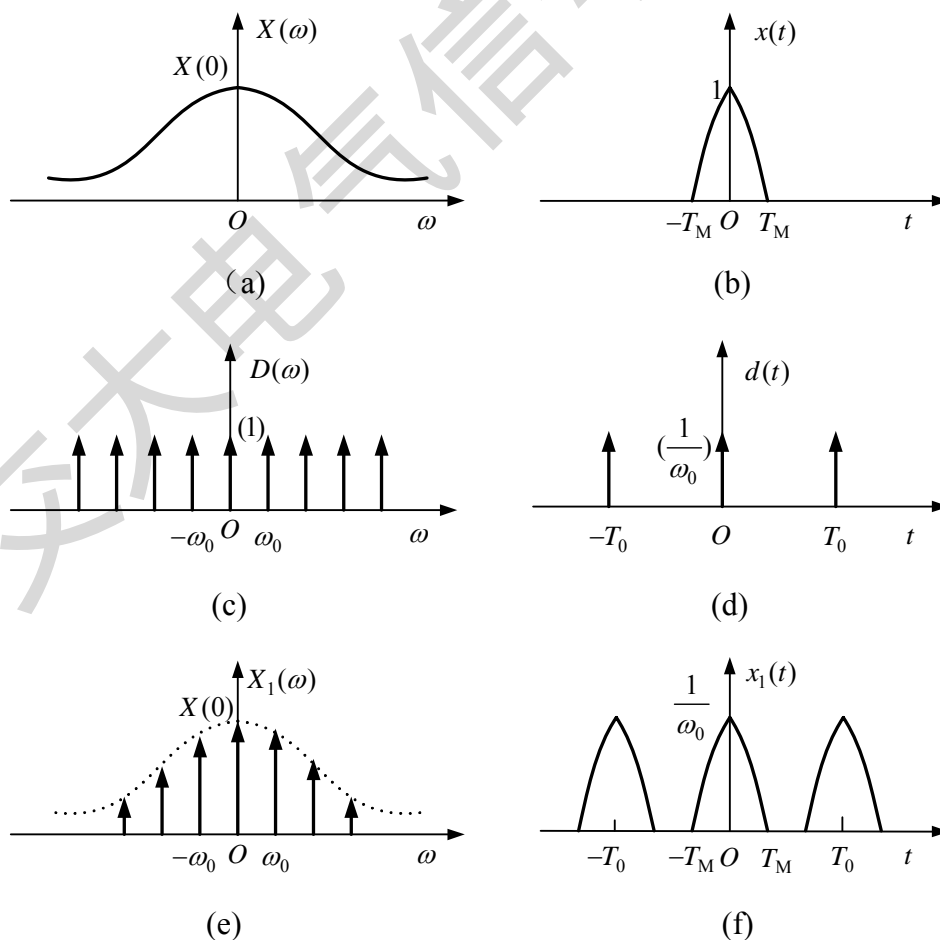


图 4-46 频域抽样及其相关波形

4.9 幅度调制与解调

傅里叶变换的频率移位性质表明, 时间域信号 $x(t)$ 与 $e^{\pm j\omega_0 t}$ 相乘, 在频率域对应于将信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 左右搬移至 $\pm\omega_0$ 处, 也可以通过再次的信号相乘和处理恢复原信号。这一性质提示, 实际应用中可以根据需要把一个信号的频谱搬移至合适的频段, 再根据需要予以恢复。通信和测控系统中广泛使用的调制与解调技术, 既是这一性质的具体应用。

调制是指用一个待传输的低频信号控制用作载波的高频信号的某一参量(幅度、频率或相位)的技术。控制信号称为调制信号, 被控信号称为载波, 调制后信号称为已调信号。

解调是从已调信号中恢复或提取出调制信号的技术。在有些场合对调幅信号的解调也称为检波, 对调频或调相信号的解调称为鉴频和鉴相。

之所以在传输信号的通信与测控系统中采用调制与解调技术有两个方面的原因, 一是无线和高频通信系统是通过辐射方式传送信号, 根据电磁波理论, 为使信号高效的辐射, 用于发射信号的天线的最佳尺寸应等于或大于信号波长的十分之一或更大。对于低频或语音信号而言, 相应的天线尺寸需要几十公里或更大, 显然不现实。二是若所有的信号发送者都使用同一个频率向外传输, 信号就会混在一起, 从而导致各个信号的信息无法分离, 收信者也将无法选择所要的信息。所以, 只有采用调制技术把各种信号的频谱搬移, 使其不重叠地占据不同的频率范围并具有较高的载波频率, 才能顺利实现信息的传递, 完成通信和测控系统的使命。

由于调制技术中的频率与相位调制属于非线性运算关系, 下面仅对幅度调制与解调进行讨论。

设调制信号 $x(t)$ 为包含有最高频率分量 $\omega_M = 2\pi B_M$ 的带限信号, 其频谱为 $X(\omega)$, 如图 4-27 所示。载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$, 载波频率为 ω_0 , 它的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

根据卷积性质, 最直接的频谱搬移可以由二信号时域相乘得到, 有已调信号 $y(t)$

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$$

$y(t)$ 的傅里叶变换 $Y(\omega)$ 为

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \quad (4-113)$$

图 4-47 给出了调幅度制原理与频谱搬移的过程。

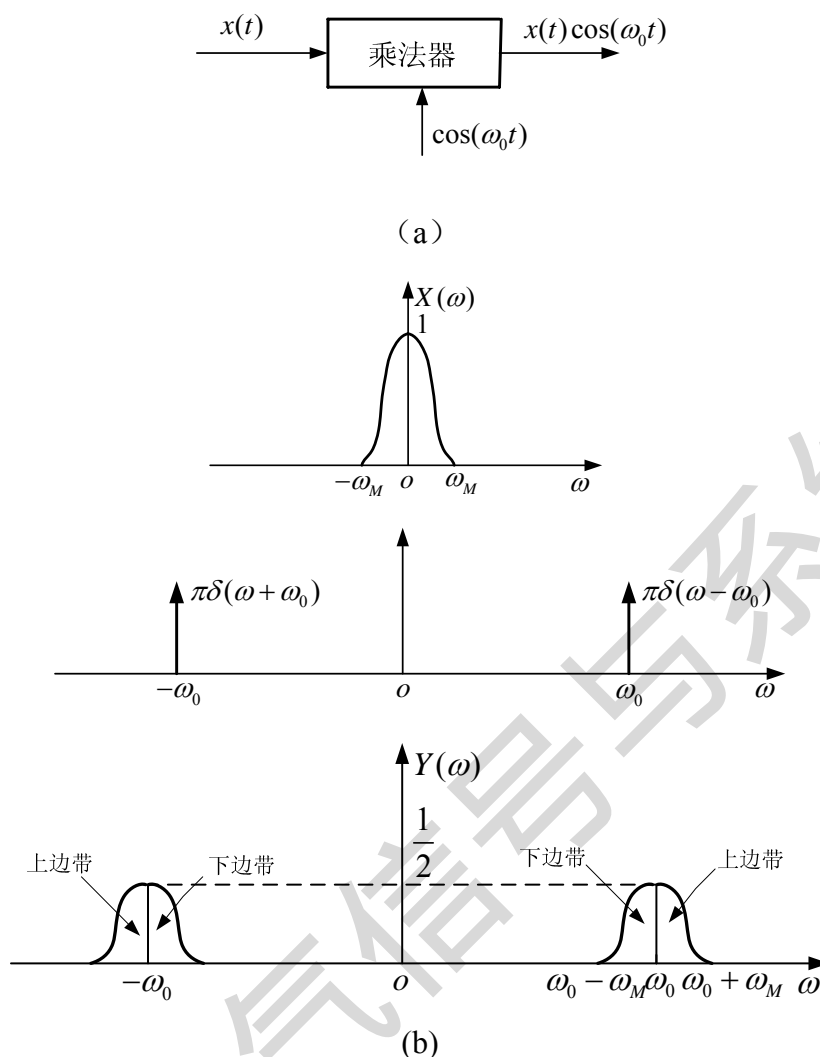


图 4-47 调制原理与频谱搬移

从图中可以看出，以 ω_M 为最高频率分量并称之为基带信号的调制信号 $X(\omega)$ ，调制载波后，从 $-\omega_M \sim \omega_M$ （实际频率是 $0 \sim \omega_M$ ）频率范围的频谱，分别被搬移到了以 $\pm\omega_0$ 为中心、 $\omega_0 \pm \omega_M$ 为上下频率边界的频谱。调制过程既实现了基带信号频谱的搬移，使已调信号的中心频率调制到载波频率 ω_0 ，又确保了调制信号信息的完整，能够使信息正确传递。

从图中还可以看出，带宽为 ω_M 的基带信号 $x(t)$ ，经过调制后得到的已调信号的带宽变成了 $2\omega_M$ ，以 ω_0 为中心并由两部分组成：位于 ω_0 以上的部分称为上边带，位于 ω_0 以下的部分称为下边带；根据频谱的对称性关系，在以 $-\omega_0$ 为中心的频谱也有上、下边带。基于已调信号中包含有上、下两个边带的原因，此种调制形式称为双边带调制。由于该种调制方式已调信号中不包含载波，又称该种双边带调制为抑制载波的双边带调制。

在基带调制信号带宽为 ω_M 的前提下，为确保信息不丢失或已调信号的频谱不产

生重叠, 该种调制方式要求载波频率满足如下关系

$$\omega_0 > 2\omega_M \quad (4-114)$$

若上式不能满足, 频谱产生重叠, 信息丢失且不可能从已调信号 $y(t)$ 中恢复。

这种调制方式中已调信号的上、下边带都完整的包含有调制信号的信息, 既只要单纯的得到上、下边带中的任一个边带, 就可以恢复调制信号。通信技术中称只保留和发送已调信号双边带中的一个边带而抑制另一个边带的传输方式为单边带调制。由于单边带调制中需要增加设备复杂度为代价的技术方面的限制, 有时也采用残留边带调制方式。残留边带调制方式是在双边带调制方式的基础上, 通过设计滤波器使已调信号一个边带的频谱成分保留, 另一个边带频谱成分只保留小部分(残留)。该种调制方式既比双边带节省频谱空间, 又比单边带容易解调, 得到较广泛应用, 例如模拟电视的图像信号就是采用残留边带调制方式传送的。

解调的目的是从已调信号 $y(t)$ 中恢复出调制信号 $x(t)$ 。针对抑制载波的双边带调制方式, 图 4-48(a) 给出了一种实现解调的原理框图。实际上, 解调过程仍然是频率移位性质的再应用。由于解调过程中再次使用的 $\cos(\omega_0 t)$ 出现在信号的接收端, 常称为本地载波信号, 并且要求它与调制时使用的载波信号同频同相。

根据解调的原理框图, 有

$$\begin{aligned} x_0(t) &= y(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} x(t) [1 + \cos(2\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos(2\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4-115)$$

对应的傅里叶变换为

$$X_0(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} [X(\omega + 2\omega_0) + X(\omega - 2\omega_0)] \quad (4-116)$$

式中, $X_0(\omega)$ 为 $x_0(t)$ 的傅里叶变换。

为从 $x_0(t)$ 中恢复出调制信号 $x(t)$, 选取理想低通滤波器的通带频率 ω_c 应该满足条件

$$\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M \quad (4-117)$$

具体过程如图 4-48(b) 所示。

从图中可以看出, 调制信号的解调过程除了应用频移性质, 把在载波频率 $\pm\omega_0$ 处的频谱搬移回以 $\omega=0$ 为中心处外, 使用通带频率为 ω_c 的理想低通滤波器滤除 $\omega=\pm 2\omega_0$ 处的信号也起着很重要的作用。实际应用中, 由于一般有 $\omega_c \ll 2\omega_0$ 和 $\omega_c \gg \omega_M$, 解调时不需要采用理想低通滤波器, 采用一般的低通滤波器即可满足要求。

抑制载波的双边带调制与解调方式, 看起来似乎非常简单, 调制与解调过程仅需各使用一个乘法器就可以实现频谱的搬移, 可以完成信号的传输任务。由于解调过程

中要求接收端所加的载波信号必须与发送端调制过程中所加的载波信号严格的同频同相的原因，该种解调方式称为同步调制与解调，又称为相干调制与解调。进一步的理论分析知道，如若发送和接收端的载波信号不能同步，有频率不等或相位差的情况出现，有可能会产生解调不出调制信号或产生解调信号失真，严重影响信号的传输质量与效果。为保证信号无失真传输必须要求两载波严格同步，这在实际应用中实现起来有一定困难，而且会增加接收设备的复杂度和成本，因此该种调制解调方式常用于点对点信号传输的专用场合。

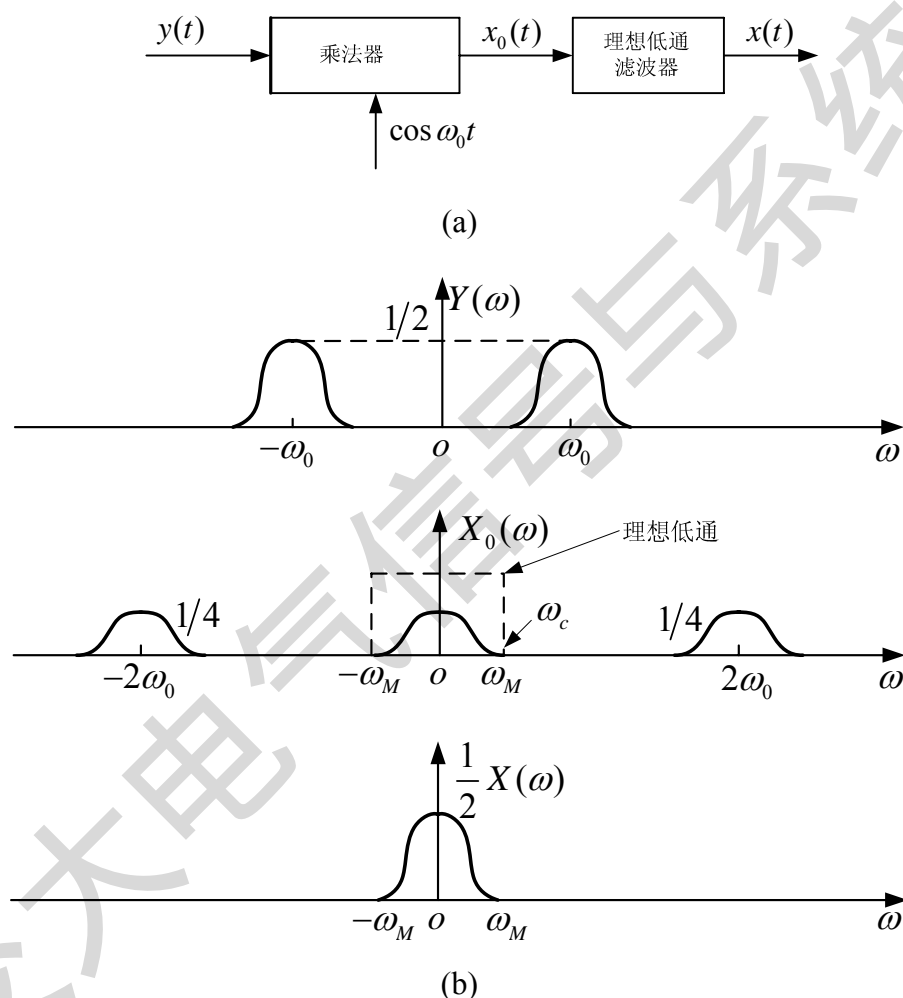


图 4-48 解调原理、频谱搬移与恢复

针对广泛使用的一点对多点信号传输的广播方式，降低接收端设备的成本是非常必要的。下面介绍在接收端省去本地载波的幅度调制（AM），大家熟悉的中、短波调幅广播就采用该种调制方式。

为了在接收端省去本地载波，在已调信号中加入一定强度的载波信号 $A \cos \omega_0 t$ 是一种解决问题的思路。于是，加入载波信号后的已调信号为

$$y_{AM}(t) = [A + x(t)] \cos \omega_0 t \quad (4-118)$$

该信号又称为调幅波信号。两种可能的调幅波信号时域波形如图 4-49 所示。

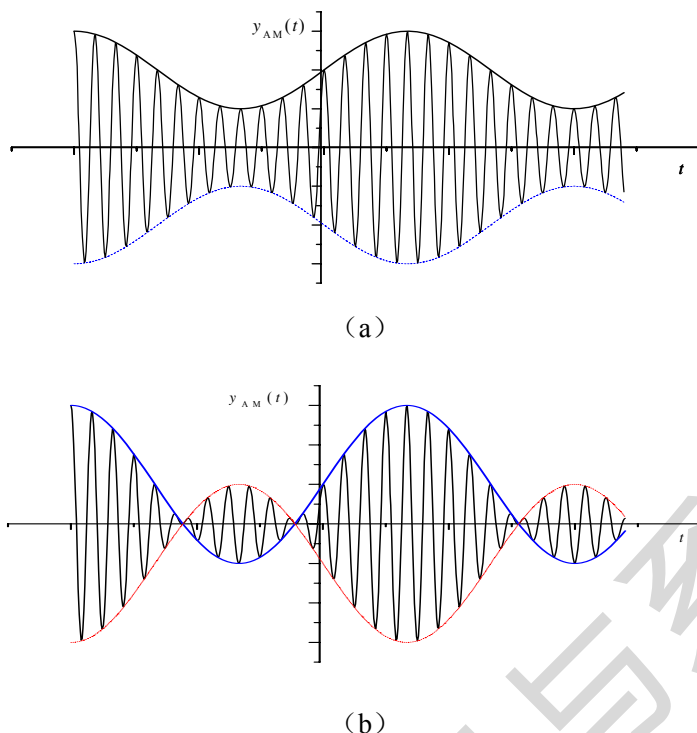


图 4-49 调制信号（粗实线）与调幅波（细实线）

图 4-49 (a)中的调幅波属于

$$A + x(t) > 0 \quad (4-119)$$

情况，该种情况下调幅波的包络形状与调制信号 $x(t)$ 相同，通过检波电路就可以恢复调制信号；图 4-49 (b)中的调幅波属于在某些时刻

$$A + x(t) < 0 \quad (4-120)$$

情况，该种情况下调幅波的包络形状与调制信号 $x(t)$ 不一样，即经过调制后，调幅波的包络产生了失真，单纯地通过检波电路不能不失真地恢复调制信号。所以，要想不失真地通过简单检波电路检出调幅信号的包络，调幅信号中载波的幅度与调制信号之间的关系一定要满足式(4-119)给出的条件。

为了衡量在已调信号中加入载波强度的大小，在设基带调制信号 $x(t)$ 的振幅为 X_p 的前提下定义调制指数 μ 为

$$\mu = \frac{X_p}{A} \quad (4-121)$$

显然，理论上定义的调制指数可取值的范围是没有限制的，都可以采用同步解调得到调制信号。若要采用包络检波电路获得调制信号，调制指数 μ 必须满足

$$0 < \mu \leq 1 \quad (4-122)$$

图 4-50给出了包络检波电路，其工作过程如图 4-51所示。在调幅信号的正半波期间二极管导通，电容 C 充电至调幅信号的峰值电压，当调幅信号幅度下降时，二极管截止，

电容器经由电阻 R 以时间常数 RC 缓慢放电；并在下一个正半波内重复同一过程。因此，电容的电压 $u_C(t)$ 紧随调幅信号的包络变化，输出一个带有纹波的调制信号，纹波的频率为 ω_0 。

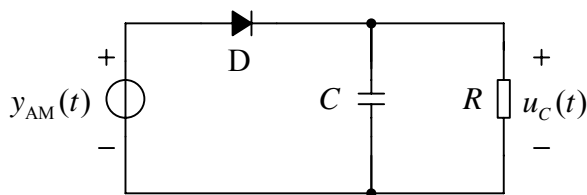


图 4-50 包络检波解调电路

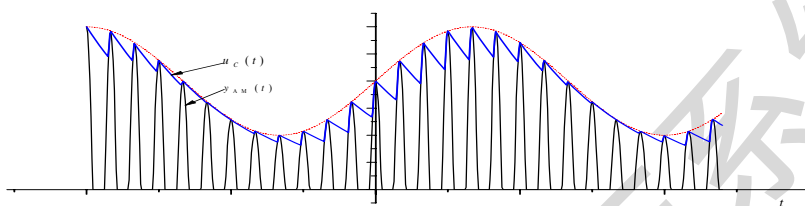


图 4-51 包络检波的充放电过程

为降低纹波的幅度同时又要确保电容电压紧随调幅信号的包络变化，电容放电电路的时间常数设计是关键。根据经验，时间常数 RC 的选择应同时满足

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll RC \ll \frac{2\pi}{\omega_M}$$

即选择电阻与电容的乘积既要远大于载波的周期，又要远小于调制信号中最高频率分量的周期。

为消除检波信号中的纹波，仅需再用一个低通滤波器，就可以完整恢复基带调制信号。

4.10 频分复用与时分复用

调制与解调技术解决了基带信号传输过程中频率较低电磁波辐射困难和同一个频率范围的信号向外传输混在一起导致信息无法分离的问题。实际上解决同一个频率范围的多个信号向外传输问题的调制解调技术，就是频分复用技术。具体的讲，所谓频分复用技术就是为了充分利用信道带宽，把信道的可用频带划分成若干个互不重叠的频段，每个频段传输一路信号的方法。

调制与解调技术是频分复用的基础，在信号的发送端，首先将待传输的各个基带信号用不同频率的载波进行调制，把已调信号的频谱搬移到不同的频段，确保搬移后已调信号的频谱互不重叠，然后将各已调信号合成，合成信号使用一个信道向外传输。在接收端，采用一系列中心频率与载波频率对应的带通滤波器，分离出各个已调信号，

然后分别进行解调，恢复出各个基带调制信号。具体频分复用的原理框图与复用信道的频谱如图 4-52 所示。

根据频分复用原理，实际应用时发送端和接收端应注意以下要点：在信号的发送端，一是要确保各待传送基带信号是带限信号，二是载波信号频率的选择要确保已调信号间的频谱不产生混叠并留有一定的防护频带；在信号的接收端，各带通滤波器的中心频率和通带宽度一定要与发送端的载波频率和待传送基带信号的带限频率相对应，以确保在接收端准确和无失真地得到各个已调信号。

频分复用技术的优势是信道复用率高，在一个信道中容许复用的路数多，且分路方便；缺点是需要大量的带通滤波器和相对要求较高的放大器，使接收设备复杂。否则在信号处理过程例如信号放大过程中的放大器如有非线性失真，会出现多项频率倍乘成分，引起各路信号之间的串话干扰，使通信质量下降。

作为模拟通信应用典范的调幅广播、调频立体声广播、电视等无线广播系统均采用的是频分复用技术。在无线广播系统中，每个电台都按规定分配有各自的载波频率，各电台都以自己特定的载波频率向空间中辐射电磁波信号，利用频分多路复用同时进行广播而互不干扰。广播接收者根据自己的需要，采用特定的广播接收机从空间中有选择地接收广播信号，例如最常见的调幅中波广播的频率范围为 525kHz~1610kHz，在该频率范围内可以等间隔地设置多家广播电台。使用普通的超外差收音机就可以有选择的收听广播信息。

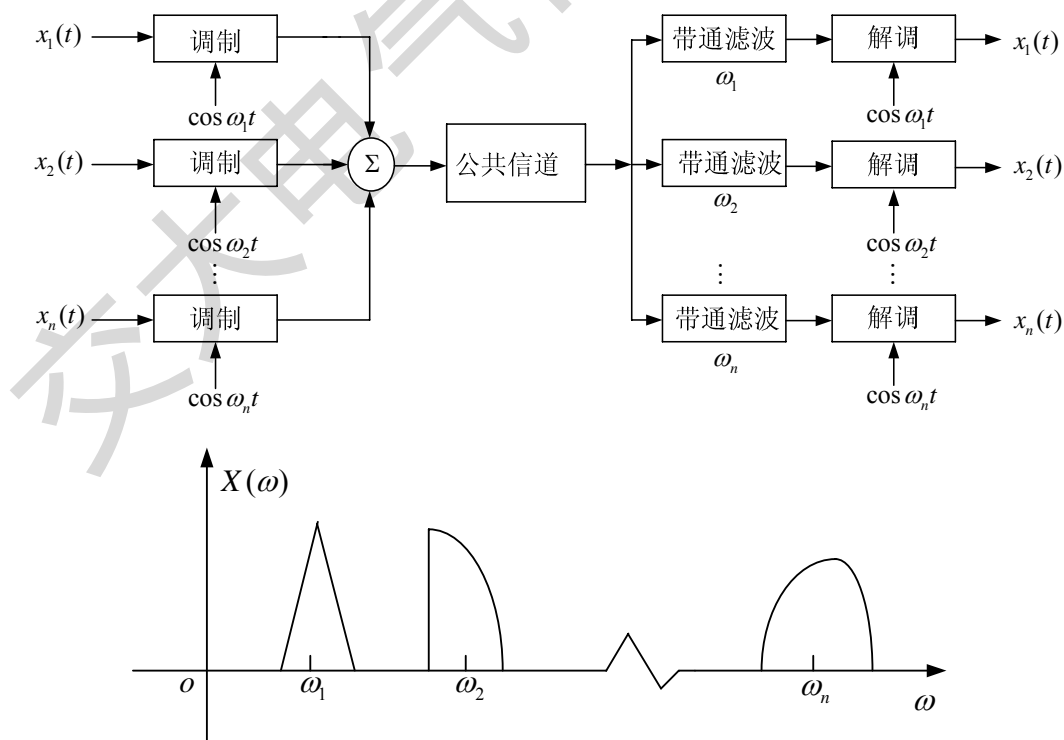


图 4-52 频分复用原理框图与复用信道频谱

时分复用技术以时域抽样定理为基础,通过等间隔的交替传递多个连续时间信号有限个离散时间点上的离散信号,进而实现在一个信道中进行多路信号的传输。

根据抽样定理,带限频率为 f_M 的基带连续时间信号,可以使用 $f_s \geq 2f_M$ 个抽样值不失真的恢复。这也既是说,在连续的时间上传递一路信号只需要占用 f_s 个时间瞬间,显然,连续的时间还有大量的空闲。如若能把第 2 个,第 3 个, ..., 以至第 n 个待传输的信号按照抽样定理进行抽样,分别把抽样值等间隔地安插在空闲的时间间隔中,就生成了一个新的信号。该信号在时间域中等间隔的承载了 n 路基带信号的信息,可以通过一个信道传送,实现了时间的分配复用。图 4-53 给出了两路信号有序排列时分复用成一个信号传送的波形。在接收端,用与发送端同步的时序电路按照相等的时间间隔点得到分离的各信号离散时间序列,经过低通滤波器就可以容易地恢复原基带信号。

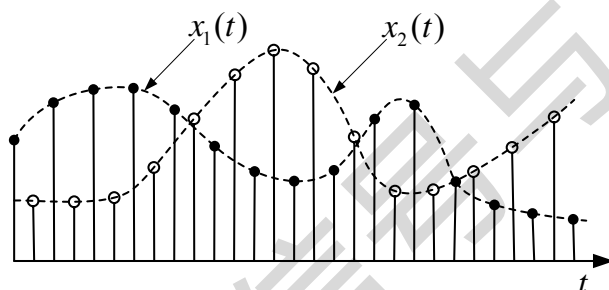


图 4-53 两路信号时分复用示意图

图 4-53 给出的是理想抽样情况,也可以采用图 4-41 所示的矩形脉冲进行抽样。从时域来看,矩形脉冲抽样与理想抽样的区别是一个抽样样本点占用时间的长短不同,理论上讲,理想抽样时分复用的路数可以很多,而矩形脉冲抽样由于脉冲宽度的限制复用的路数受到一定的限制。实际应用的时分复用系统很少直接传输多路脉冲幅度信号 (PAM),而是将抽样后信号的脉冲幅度量化编码为脉冲编码调制信号 (PCM),以利用脉冲编码调制信号的诸多优点。

相对于频分复用技术而言,时分复用技术的优势一是各路信号的发送、收电路结构相同,可以用数字电路实现且易于调试;二是抗信号之间的相互串扰能力强。在数字通信中得到了广泛应用。

从频分复用和时分复用信号的时、频域特征来看,实现频分复用的本质要求是各路复用信号的频谱在频域要相互分离,在时域观察信号则是各路信号混叠在一起;实现时分复用的本质要求是各路复用信号在时域要相互分离,交替排列,在频域观察信号的频谱则是各路信号的频谱混叠在一起。这些特征决定了各自不同的应用领域。

习 题

4-1 请判断下列信号中哪些是能量信号，哪些是功率信号，或者都不是。

(1) $x(t) = 5\sin(2t + \theta)$ (2) $x(t) = 2e^{-5t}$ (3) $x(t) = 3t \quad t \geq 0$

4-2 试证明 $\cos(t)$ 、 $\cos(2t)$ 、 \dots 、 $\cos(nt)$ ， n 为整数，是区间 $(0, 2\pi)$ 中的正交函数集。

4-3 请判断 1 ， x ， x^2 ， x^3 是否是区间 $(0, 1)$ 的正交函数集。

4-4 求图 p4-4 所示的奇对称周期矩形信号的傅里叶级数，并画出幅度频谱。

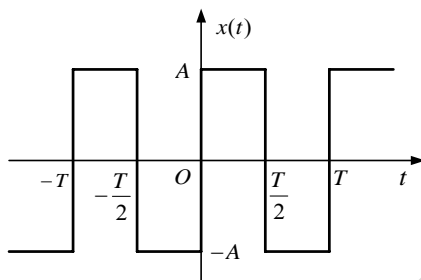


图 p4-4

4-5 若周期矩形信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的波形如图 p4-5 所示， $x_1(t)$ 的参数为 $\tau = 0.5\mu\text{s}$ ， $T = 1\mu\text{s}$ ， $A = 1\text{V}$ ； $x_2(t)$ 的参数为 $\tau = 1.5\mu\text{s}$ ， $T = 3\mu\text{s}$ ， $A = 3\text{V}$ ，分别求：

- (1) $x_1(t)$ 的谱线间隔和带宽；
- (2) $x_2(t)$ 的谱线间隔和带宽；
- (3) $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的基波幅度之比；
- (4) $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 三次谐波幅度之比。

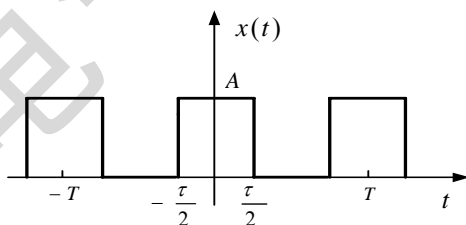


图 p4-5

4-6 若信号的波形如图 p4-5 图所示，已知 $\tau = 0.5\mu\text{s}$ ， $T = 1\mu\text{s}$ ， $A = 1\text{V}$ 。

- (1) 若波形向左平移 $\frac{\tau}{2}$ ，求 $x(t + \frac{\tau}{2})$ 的傅里叶级数；
- (2) 若波形向右平移 $\frac{\tau}{2}$ ，求 $x(t - \frac{\tau}{2})$ 的傅里叶级数。

4-7 已知周期函数 $x(t)$ 前四分之一周期的波形如图 p4-7 所示。试根据下列各种情况的要求画出 $x(t)$ 在一个周期 $(0 < t < T)$ 的波形。

- (1) $x(t)$ 是偶对称函数，只含有偶次谐波；
- (2) $x(t)$ 是偶对称函数，只含有奇次谐波

- (3) $x(t)$ 是偶对称函数, 含有偶次和奇次谐波;
 (4) $x(t)$ 是奇对称函数, 只含有偶次谐波;
 (5) $x(t)$ 是奇对称函数, 只含有奇次谐波;
 (6) $x(t)$ 是奇对称函数, 含有偶次和奇次谐波。

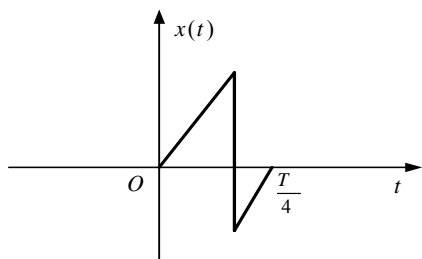


图 p4-7

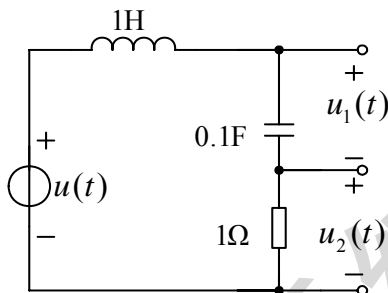


图 p4-8

- 4-8 电路如图 p4-8 所示, 设 $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\omega_0)$ 为一无限冲激串, 试求 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 的傅里叶系数, 并画出相应的幅度频谱和相位频谱。设 $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ 。

- 4-9 傅里叶级数的帕斯瓦尔定理为

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

试证明之。

- 4-10 求图 p4-10 所示半波余弦脉冲的傅里叶变换, 并画出频谱图。

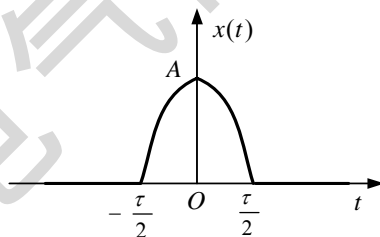


图 p4-10

- 4-11 求图 p4-11 所示锯齿脉冲的傅里叶变换。

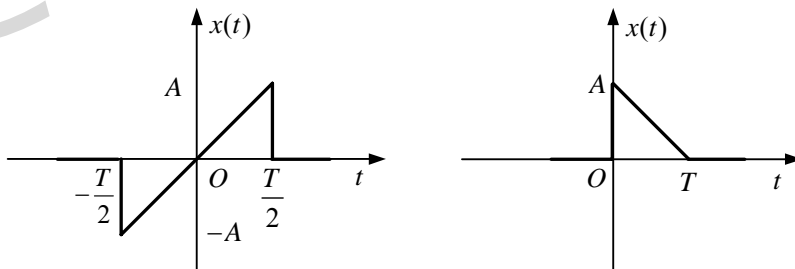


图 p4-11

- 4-12 设 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, 试求以下各函数的傅里叶变换。

- (1) $x(\frac{t}{2} - 5)$ (2) $x(-t + 3)$

(3) $x(3-3t)$

(4) $x(2+5t)$

(5) $x(at-t_0)$

4-13 $x(t)$ 的波形如图 p4-13 所示, 设 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(\omega)$, 试根据已知的 $X_1(\omega)$ 求 $x_2(t)$ 的傅里叶变换 $X_2(\omega)$ 。

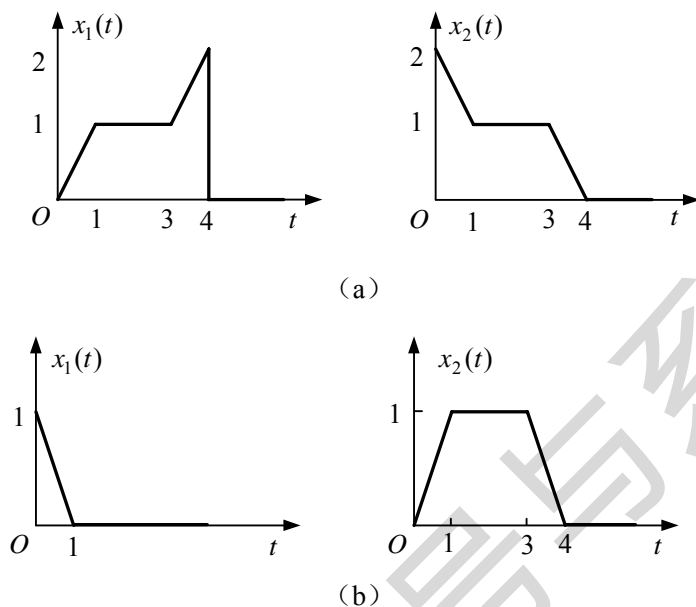


图 p4-13

4-14 试证以下傅里叶变换成立

(1) 应用时域微分性质试证: $-\frac{1}{\pi t^2} \leftrightarrow |\omega|$

(2) 应用频域微分性质试证: $t \cdot \frac{1}{t} = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

(3) 应用对偶性试证: $\frac{2a}{t^2 + a^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|\omega|}$

4-15 求图 p4-14 所示 $X(\omega)$ 的逆傅里叶变换。

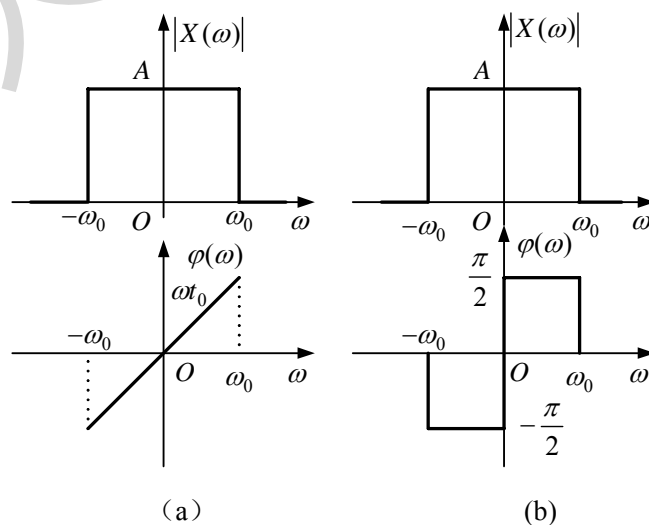


图 p4-15

4-16 已知阶跃函数和正弦、余弦函数的傅里叶变换：

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

求单边正弦函数和单边余弦函数的傅里叶变换。

4-17 假设某系统的系统函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 5}$$

输入信号为 $x(t) = e^{-4t}\varepsilon(t)$ ，求零状态响应 $y(t)$ 。

4-18 假设某系统的系统函数为

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + j3\omega + 2}$$

输入信号为 $x(t) = e^{-4t}\varepsilon(t)$ ，求零状态响应 $y(t)$ 。

4-19 假设某系统的系统函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

输入信号为 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ ，求响应 $y(t)$ 。

4-20 假设某系统的系统函数为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

输入信号为 $x(t) = \sin(t) + \sin(3t)$ ，试求响应 $y(t)$ ，示意画出 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的波形，讨论经传输产生的失真问题。

4-21 已知两信号分别为

$$x_1(t) = \sin(300t) + 2\cos(1000t) + \cos(2000t)$$

$$x_2(t) = \cos(5000t)$$

若有 $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ ，求信号 $y(t)$ 的频谱函数，并画出频谱。

4-22 某理想相移器的系统函数为

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & (\omega > 0) \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & (\omega < 0) \end{cases}$$

- (1) 求该相移器的单位冲激响应 $h(t)$ ；
- (2) 对任一输入 $x(t)$ ，求该相移器的输出 $y(t)$ ；
- (3) 当 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ 时，求该相移器的输出 $y(t)$ 。

4-23 由电阻 R_1 和 R_2 组成的衰减器用以得到适当的电压 $u(t)$ ，如图 p4-23 所示，为了得到无失真传输，电阻和电容应满足何种关系。

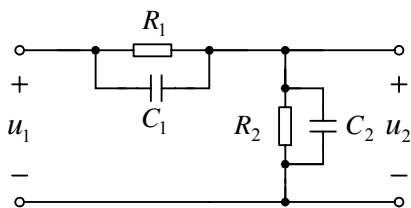


图 p4-23

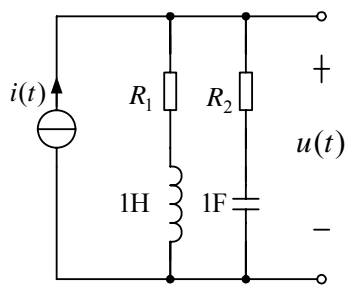


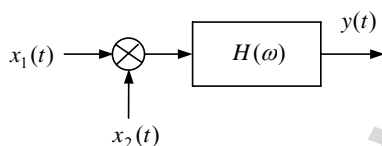
图 p4-24

4-24 图 p4-24 所示电路，系统函数 $H(\omega) = U(\omega) / I(\omega)$ ，为了能无失真地传输，试确定 R_1 、 R_2 的值。

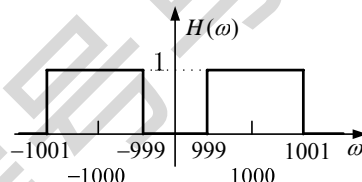
4-25 图 p4-25 (a) 所示系统，带通滤波器的幅频特性如图 p4-25 (b) 所示，相频特性 $\varphi(\omega) = 0$ ，求系统在两输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 作用下的输出信号 $y(t)$ 。其中

$$x_1(t) = \frac{\sin(2t)}{2\pi t} \quad -\infty < t < \infty$$

$$x_2(t) = \cos(1000t) \quad -\infty < t < \infty$$



(a)



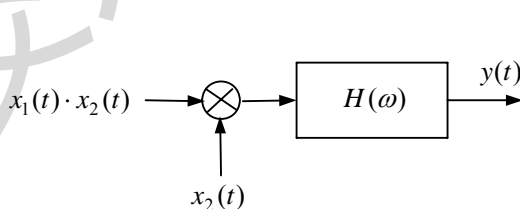
(b)

图 p4-25

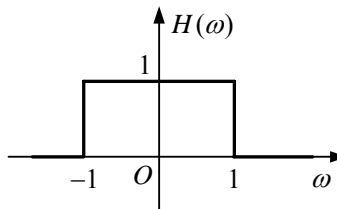
4-26 图 p4-26 (a) 图所示系统，低通滤波器的幅频特性如图 p4-26 (b) 图所示，相频特性 $\varphi(\omega) = 0$ ，求系统在两输入信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 作用下的输出信号 $y(t)$ 。其中

$$x_1(t) = \frac{\sin(2t)}{2\pi t} \quad -\infty < t < \infty$$

$$x_2(t) = \cos(1000t) \quad -\infty < t < \infty$$



(a)



(b)

图 p4-26

4-27 求图示周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换，并示意画出它们的频谱图。

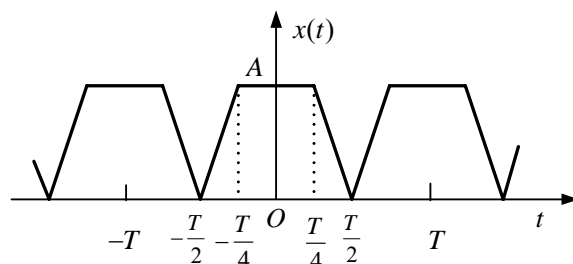


图 p4-27

4-28 求图示周期全波余弦信号的傅里叶变换 $X(\omega)$ 。

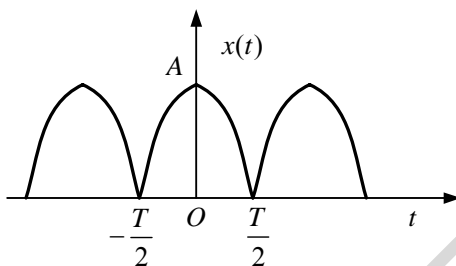


图 p4-28

4-29 确定下列信号的最低抽样率。

- (1) $\sin(100t)$ (2) $\sin(100t) + \sin(50t)$
 (3) $\sin^2(100t)$ (4) $\sin(100t) + \sin^2(60t)$

4-30 设 $x(t)$ 为一带限信号，频带宽度为 f_M 赫兹，试求 $x(2t)$ 及 $x(t/2)$ 的奈奎斯特抽样率和抽样间隔。

4-31 两信号 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的傅里叶变换为

$$X_1(\omega) = \begin{cases} \cos(\omega) & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = X_1(\omega - \omega_0) + X_1(\omega + \omega_0)$$

- (1) 求 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ ；
 (2) 试确定对 $x_2(t)$ 抽样应满足的奈奎斯特抽样频率。
 (3) 解调系统如题图所示，欲使 $y(t) = x_1(t)$ ，试求 A ， ω_1 ，和 ω_2 。（提示选取 $\omega_2 = \omega_0$ ）。

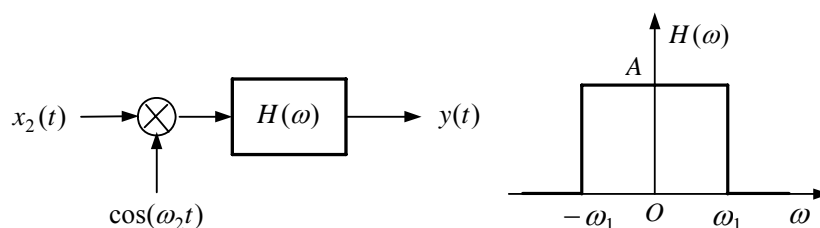


图 p4-31

- 4-32 题图所示系统中, $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 相乘得 $g(t)$, 再被周期冲激串 $p(t)$ 抽样。设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是带限信号, 即

$$X_1(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_1$$

$$X_2(\omega) = 0 \quad |\omega| > \omega_2$$

试决定抽样信号 $g_s(t)$ 经过理想低通滤波器重现 $g(t)$ 时的最大抽样周期 T_s 。

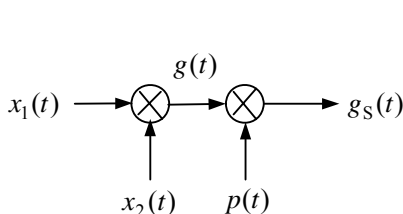


图 p4-32

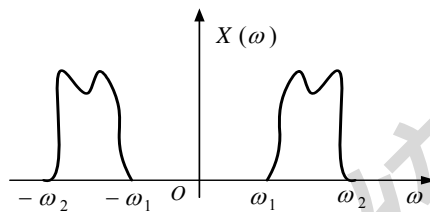


图 p4-33

- 4-33 若连续信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 如题图所示。

- (1) 利用卷积定理说明当 $\omega_2 = 2\omega_1$ 时, 最低抽样率只要等于 ω_2 就可以使抽样信号不产生频谱混叠;
- (2) 证明带通抽样定理, 该定理要求最低抽样率 ω_s 满足下列关系

$$\omega_s = \frac{2\omega_2}{m}$$

其中 m 为不超过 $\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ 的最大整数。

- 4-34 试分析对 $\cos(100\pi t)$ 和 $\cos(750\pi t)$ 二信号采用 $(1/400)s$ 的周期进行抽样时, 哪个抽样信号能不失真地恢复, 并请画出抽样信号的频谱图。
- 4-35 已知 $x(t)$ 为一个带限信号, 它的有效带宽为 B (单位 Hz), 请给出 $x(2t)$ 和 $x(t/2)$ 的奈奎斯特抽样频率。当三个信号采用时分复用方式传送时, 线路上每秒内至少要通过多少个抽样值。
- 4-36 图 p4-36 所示系统中, 已知输入信号的频谱 $X(\omega)$ 如图所示。请画出输出信号的频谱 $Y(\omega)$ 。

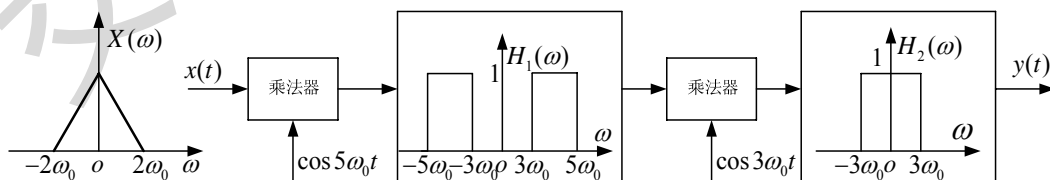


图 p4-36