

# 自动控制理论 Automatic Control Theory

工业自动化系



## 2 上节课要点复习

□ 线性系统的结构图

是描述系统各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型。 作用原理(方框图) + 数学模型 →结构图

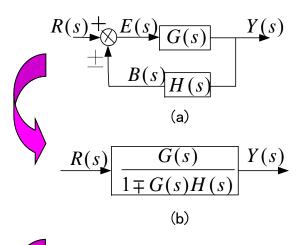
□ 结构图的构成

4种元素:信号线、引出点、比较点、方框

- □ 结构图的等效变换和简化 串联、并联和反馈连接 比较点和引出点的移动
- □ 复杂结构图的简化 解除交叉(同类互移),交叉嵌套变层层嵌套

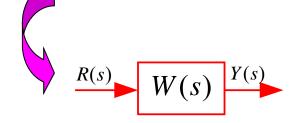
# 2 上节课要点复习

### 反馈连接方框图的等效简化



$$Y(s) = G(s)E(s)$$
  $B(s) = H(s)Y(s)$   $G(s)$ 是前向通道传递函数  $E(s) = R(s) \pm B(s)$   $H(s)$ 反馈通道传递函数  $H(s) = 1$  单位反馈系统

$$Y(s) = G(s)[R(s) \pm H(s)Y(s)] = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}R(s)$$
$$G_o(s) = B(s)/E(s) = G(s)H(s)$$
 开环传递函数



反馈连接及其简化

$$Y(s) = W(s)R(s)$$
 
$$W(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} = \frac{\text{前向通道传递函数}}{1 \mp \text{开环传递函数}}$$
 式中负号对应正反馈连接,正号对应负反馈连接

### 信号流图的基本概念

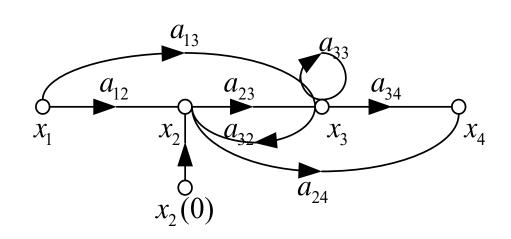
- □ 信号流图,是一种表示一组联立线性代数方程的网络图, 是一种图形表示的数学模型。
- □ 信号流图,是由节点和支路组成的一种信号传递网络图。 (2个要素)

### 线性系统

$$x_2 = a_{12}x_1 + a_{32}x_3 + x_2(0)$$

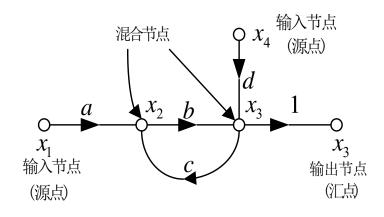
$$x_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

$$x_4 = a_{24}x_2 + a_{34}x_3$$



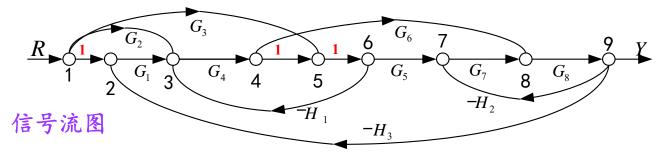
### 信号流图的基本概念

- □ 节点:是用来表示变量;节点可以把所有输入支路的信号叠加,并 把总和信号传送到所有输出支路。
- □ 支路:支路是连接两个节点的有向线段,信号只能沿着支路上的箭 头方向通过。
- 增益: 支路上标明的乘法因子, 反应了节点(信号)间的函数关系;
- 输入节点(源点): 只有输出支路的节 点,对应自变量;
- 输出节点(汇点): 只有输入支路的节 点,对应因变量;
- 混合节点: 既有输入支路, 又有输出 支路;



信号流图

### 信号流图的基本概念

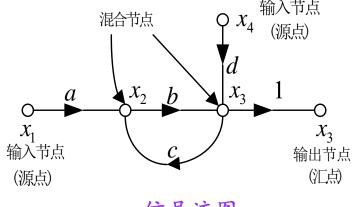


- □ 通路: 沿支路箭头方向而穿过各相连支路的途径叫通路:
- 回环: 通路的终点就是通路的起点, 并且与任何其它节点相交不 多于一次:
- 回环增益: 回环中各支路增益的乘积;
- 不接触回环:如果一些回环没有任何公共节点,则叫做不接触回环;
- 前向通道:如果从输入节点(源点)到输出节点(汇点)的通路上, 通过任何节点不多于一次,则该通路叫做前向通道。
- 前向通道增益:前向通道中,各支路增益的乘积,叫前向通道增益。



### 信号流图的性质

(1) 支路表示了一个信号对另一个信号的函 数关系。信号只能沿着支路上的箭头方 向通过。



信号流图

- (2) 节点可把所有输入支路信号叠加,并把总和信号传送到所有输出支 路。
- (3) 具有输入和输出支路的混合节点,通过增加一个具有单位增益的支 路,可以把它变成输出节点来处理,如图中x3。
- (4) 同一系统的信号流图不是唯一的。由于同一系统的方程可以写成不 同的形式, 所以对于给定的系统, 可以画出许多种不同的信号流图。

### 信号流图的绘制

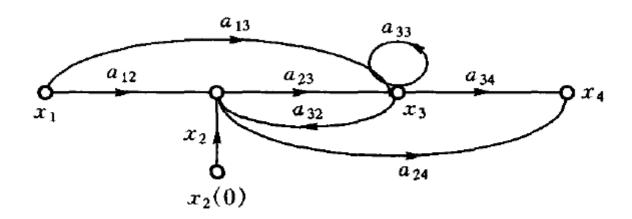
(1) 由微分方程绘制

$$x_2 = a_{12}x_1 + a_{32}x_3 + x_2(0)$$
  

$$x_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$
  

$$x_4 = a_{24}x_2 + a_{34}x_3$$

节点 x1, x2, x3, x4, x2(0)



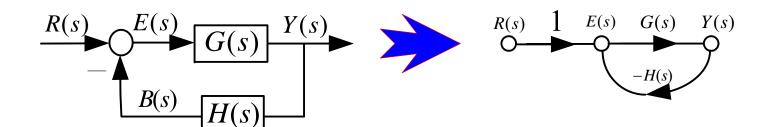
### 信号流图的绘制

(2) 由方框图绘制 分支点、比较点 → 节点

信号线、方框 →支路

必要时增加支路、节点



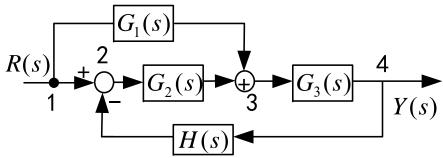


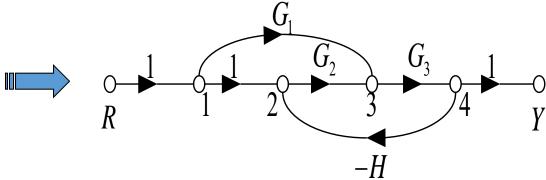
### 信号流图的绘制

(2) 由方框图绘制 分支点、比较点 → 节点

信号线、方框 →支路

必要时增加支路、节点





### 羅梅逊增益公式

利用梅逊增益公式可以很方便地求出信号流图 的总增益或系统的总传递函数

输入节点与输出节点之间的总增益P是:

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

n — 前向通道数;

 $p_k$  — 从输入节点到输出节点之间第k条前向通道的增益,输入节 点到输出节点不止一条前向通道,只要有一条新的支路,就 可以当做一条新的前向通道(选择回环也是如此)。

靈梅逊增益公式

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

 $\sum L_1$  — 所有单独回环的增益之和;

 $\sum L_2$  — 所有两两互不接触回环的增益乘积之和:

 $\Sigma_{L_3}$  — 所有三个互不接触回环的增益乘积之和;

 $\Delta_{k}$  — 第k个残余流图的特征式: 把第k条前向通道 (包括其中所有的节点和支路) 去掉之后, 在余下的信 号流图(残余流图)上求得的△。

靈梅逊增益公式

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

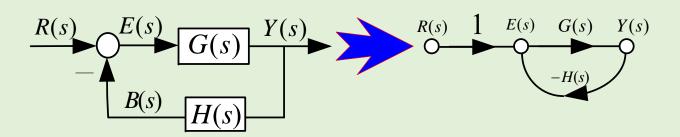
$$-\sum_{k=1}^{n} I_k + \dots = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

### 用Mason增益公式计算总增益的要点:

- ① 前向通道(数目,增益;残余流图);
- ② 回环(数目,增益;不相接触回环);
- ③ 不论前向通道还是回环,每个节点只允许经过一次;
- 4 牢记公式。

### 翼梅逊增益公式—示例

例:



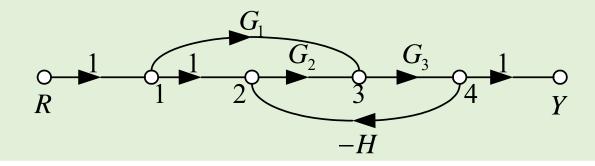
1条前向通道:  $P_1 = G(s)$   $\Delta_1 = 1$ 

1个回环:  $\sum L_1 = -G(s)H(s)$ 

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta} \qquad \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

### 整梅逊增益公式—示例

例2.9:



### 2条前向通道:

$$P_1 = G_2 G_3 \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Delta_1 = 1$$

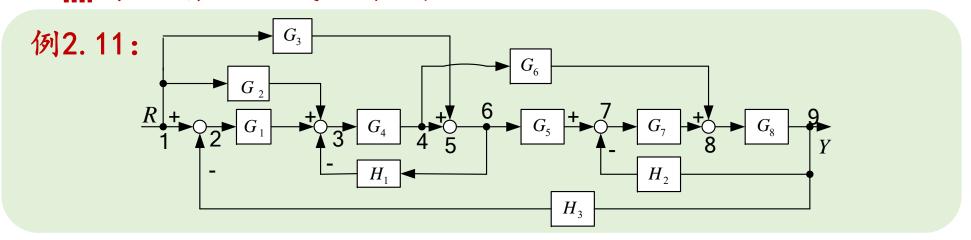
$$P_2 = G_1 G_3 \qquad \Delta_2 = 1$$

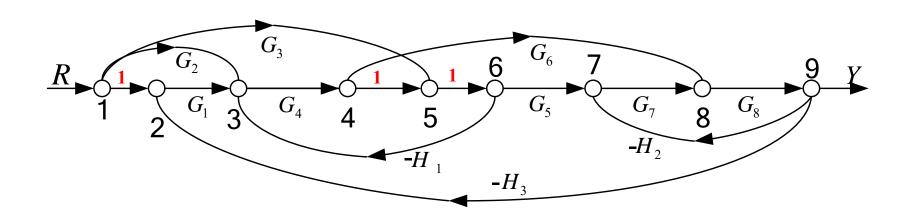
$$\Delta_2 = 1$$

$$\sum L_1 = -G_2 G_3 H$$

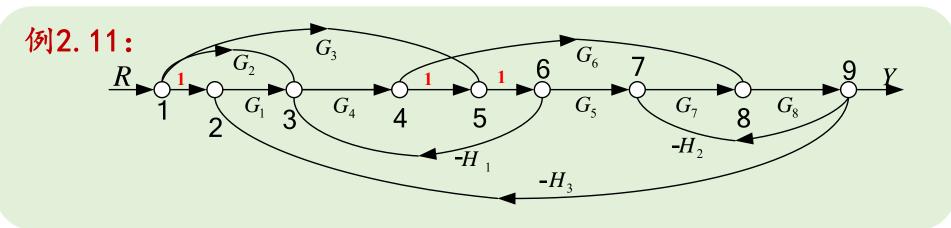
$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta} \qquad \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H(s)}$$

### 器梅逊增益公式—示例





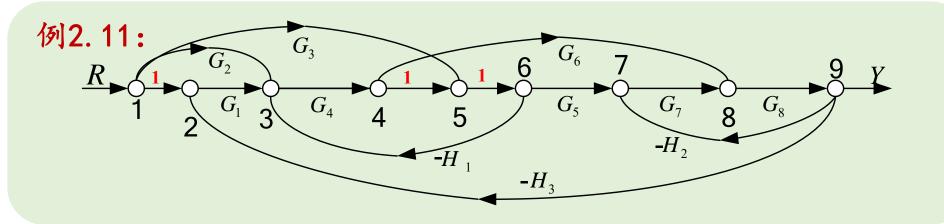
### 置梅逊增益公式—示例



### 6条前向通道:

$$P_{1} = G_{1}G_{4}G_{5}G_{7}G_{8}$$
  $\Delta_{1} = 1$   
 $P_{2} = G_{2}G_{4}G_{5}G_{7}G_{8}$   $\Delta_{2} = 1$   
 $P_{3} = G_{3}G_{5}G_{7}G_{8}$   $\Delta_{3} = 1$   
 $P_{4} = G_{1}G_{4}G_{6}G_{8}$   $\Delta_{4} = 1$   
 $P_{5} = G_{2}G_{4}G_{6}G_{8}$   $\Delta_{5} = 1$   
 $P_{6} = G_{3}(-H_{1})G_{4}G_{6}G_{8}$   $\Delta_{6} = 1$ 

### 整梅逊增益公式—示例



4个回环:

$$\sum L_1 = (-G_4H_1) + (-G_7G_8H_2) + (-G_1G_4G_5G_7G_8H_3) + (-G_1G_4G_6G_8H_3)$$

一对两互不相接触回环:

$$\sum L_2 = (-G_4 H_1)(-G_7 G_8 H_2)$$

$$G = \frac{Y}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Lambda}$$



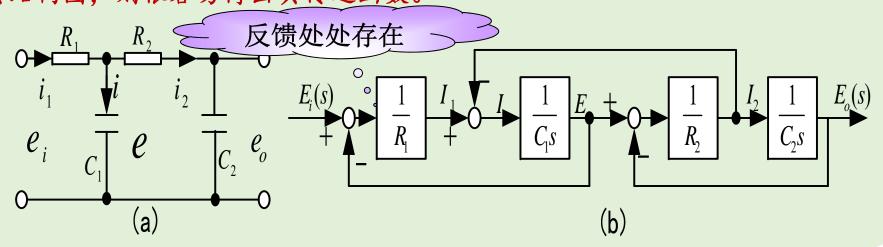
### **羅**梅逊增益公式—总结

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k}{\Delta}$$

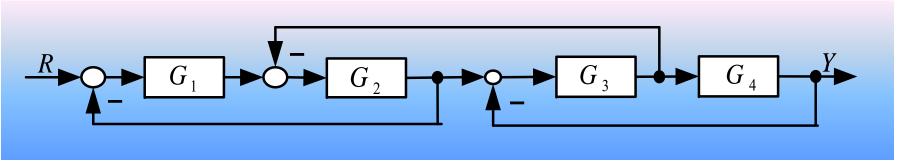
### 用Mason增益公式计算总增益的要点:

- ① 前向通道(数目,增益;残余流图);
- ② 回环(数目,增益:不相接触回环);
- ③ 不论前向通道还是回环,每个节点只允许经过一次;
- 4 牢记公式。

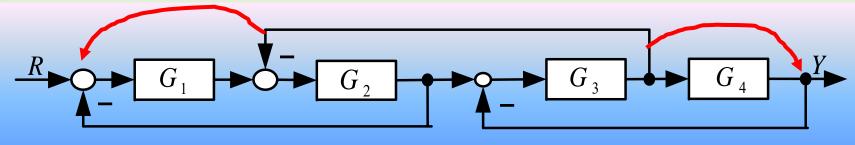
例2.12:图(a)是两级RC滤波电路,若从控制系统角度看待它,则图(b)是 其结构图,则很容易得出其传递函数。



### 例2.8

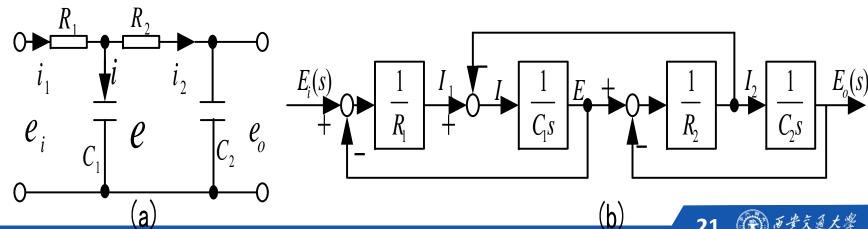




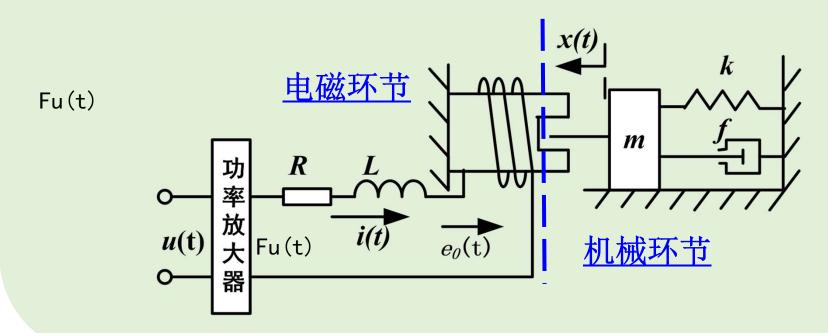


$$G = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + G_1 G_2)(1 + G_3 G_4) + G_2 G_3}$$

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$



例2.13 设图2.27所示机电系统的初始条件为零, u(t)为输入电 压, x(t)为输出位置, R和L分别为铁芯线圈的电阻和电感, m为 物体的质量, k为弹簧的刚度, f为阻尼器的阻尼系数。功率放大 器增益为F,铁芯线圈的反电动势为e0=k2dx/dt,线圈电流i(t) 在质量m上产生的电磁力为k2i(t)。试画出系统结构图并求总传 递函数。



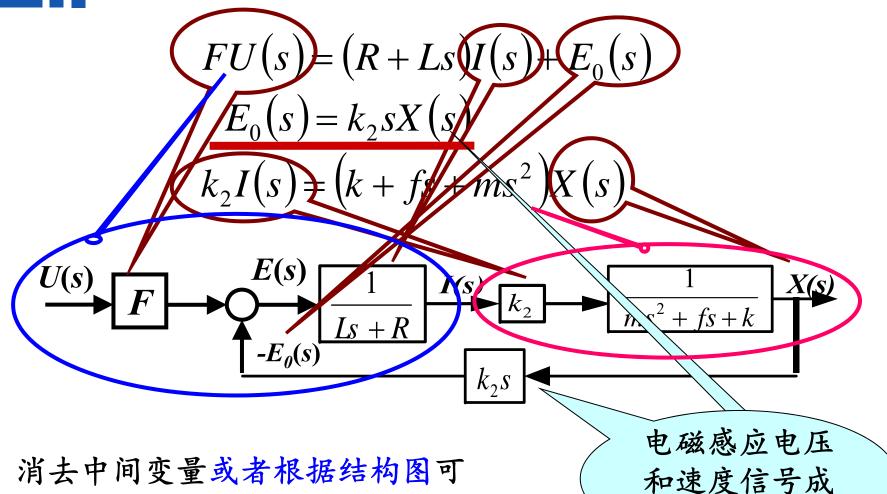
例2.13

电磁环节:  $\begin{cases} Fu(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + e_0 \\ e_0 = k_2 \frac{dx}{dt} \end{cases}$ 

机械环节:  $k_2 i(t) = kx + f \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2x}{dt^2}$ 

在零初始条件下对上述方程组进行拉氏变换并整理得:

$$FU(s) = (R + Ls)I(s) + E_0(s)$$
$$E_0(s) = k_2 sX(s)$$
$$k_2 I(s) = (k + fs + ms^2)X(s)$$



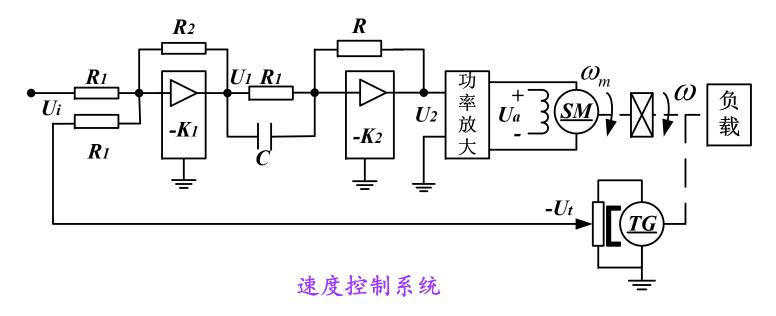
得系统总传递函数为:

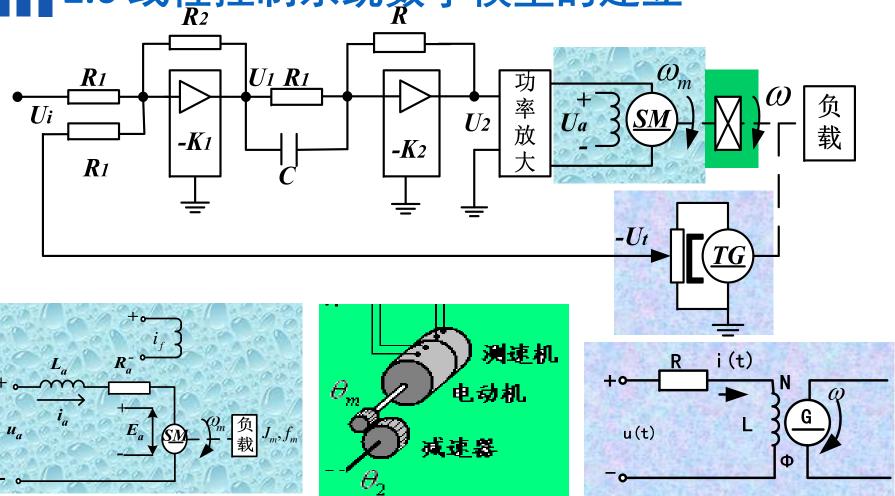
$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{Fk_2}{mLs^3 + (Lf + Rm)s^2 + (kL + Rf + k_2^2)s + Rk}$$

正比

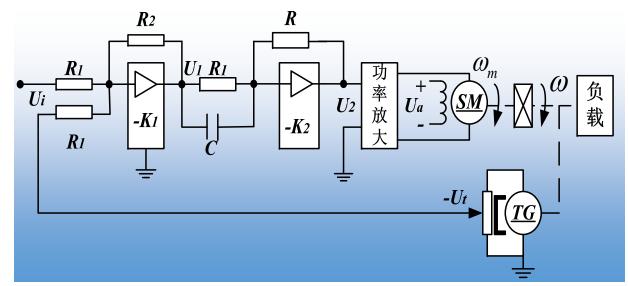
例2.14 试列写图2.29所示速度控制系统的微分方程。

解: 系统的被控对象是电动机(带负载), 系统的输出量 是转速  $\omega$ , 给定电压是 $U_i$ 。控制系统由给定电位器、运算 放大器|(含比较作用)、运算放大器||(含RC校正网 络)、功率放大器、测速发电机、减速器等部分组成。





现分别列出各元部件的微分方程(结构图略)。



①运算放大器 | 给定电压ui与速度反馈电压ut在此合成,产生偏差电 压并经放大,即运算放大器| 为加法电路

$$u_1 = -K_1(u_i - u_i) = -K_1u_e$$
 $K_1 = R_2 / R_1$ 

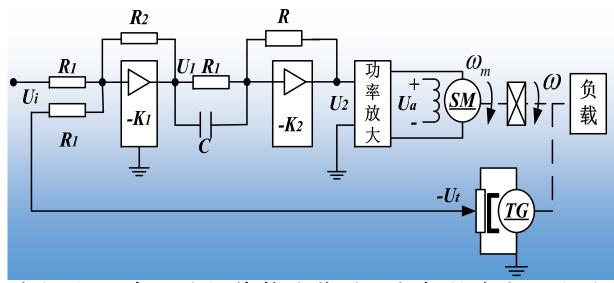
$$K_1 = R_2 / R_1$$
——运放  $I$  的比例系数

U<sub>2</sub>与 U<sub>1</sub> 间微分方程 运算放大器| 与 $R_1C$ 网络构成微分电路,

$$u_2 = -K_2 \left( \tau \frac{du_1}{dt} + u_1 \right) \qquad \begin{array}{c} \tau = R_1 C \quad - \text{微分时间常数} \\ \hline K_2 = R/R_1 \quad - \text{运放 II 的比例系数} \end{array}$$

$$\tau = R_1 C$$
 —微分时间常数

$$K_2 = R/R_1$$
 —运放11的比例系数



③ 功率放大器 设采用晶闸管整流装置,包括触发电路和晶闸管主回路。 忽略晶闸管控制电路的时间滞后, 输入输出方程为:

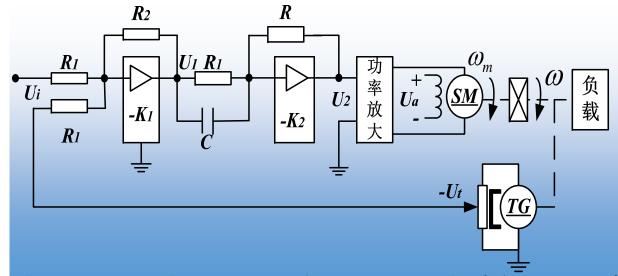
$$u_a = K_3 u_2$$

直流电动机 忽略电枢电感

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t)$$

5 <u>齿轮系</u> 设齿轮系的速比为 $\alpha$  ,则电动机转 速 $\omega_m$  经齿轮系减速后变为 $\omega$ ,则

$$\omega = \frac{1}{\alpha} \omega_m$$



测速发电机 测速发电机的输出电压  $U_{t}$  与其转速  $\omega$  成正比

$$u_t = K_t \omega$$
  $K_t$  —测速发电机比例系数

从上述各方程中消去中间变量  $u_t$  、 $u_1$  、 $u_2$  、 $u_a$  及  $\omega_m$  , 整理后便得到控

制系统的微分方程

$$T'_{m}\frac{d\omega}{dt} + \omega = K'_{g}\frac{du_{i}}{dt} + K_{g}u_{i} - K'_{c}M'_{c}$$

式中

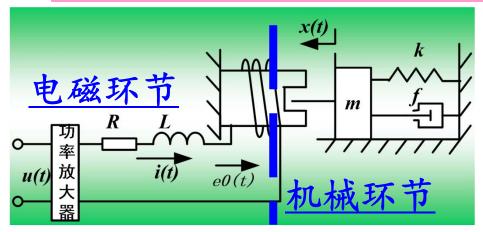
$$T_{m}' = (\alpha T_{m} + K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}K_{t}\tau)/(\alpha + K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}K_{t}) \quad K_{C}' = K_{C}/(\alpha + K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}K_{t})$$

$$K_{g} = K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}/(\alpha + K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}K_{t}) \quad K_{g}' = K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}\tau/(\alpha + K_{1}K_{2}K_{3}K_{m}K_{t})$$



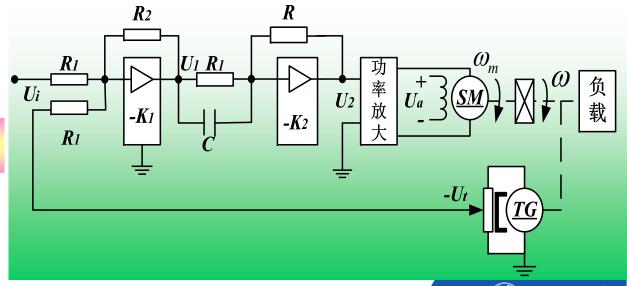


▶ 注意例2.13、2.14中负反馈电压的接线方式。



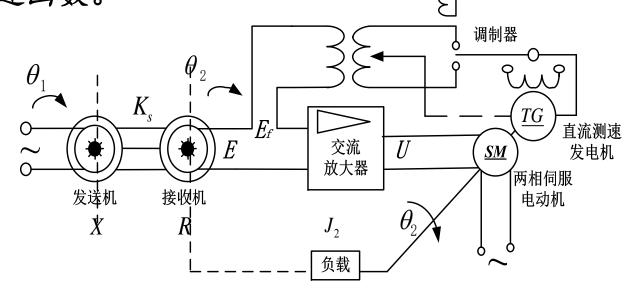
例2.13自然形成

本例依靠接线倒向

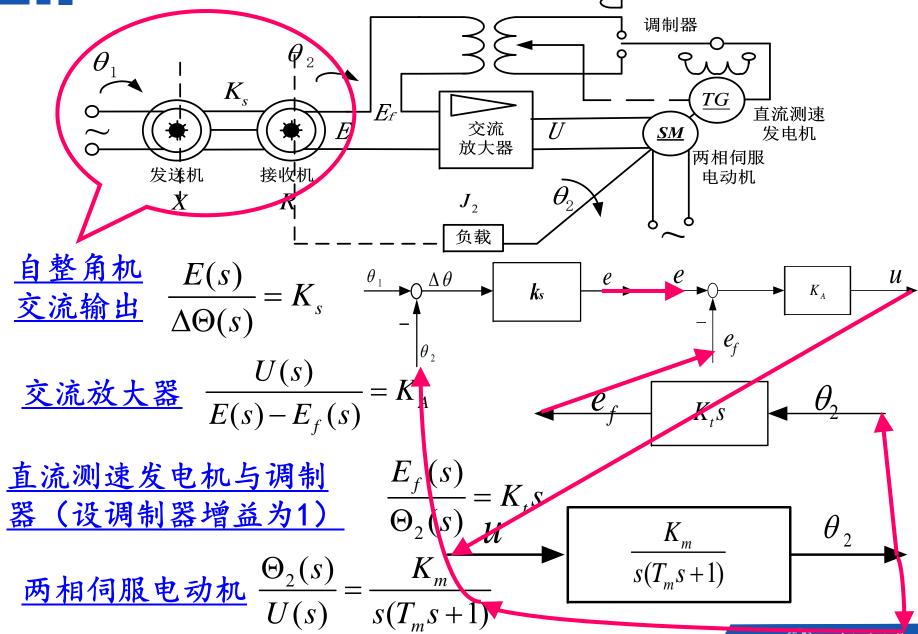


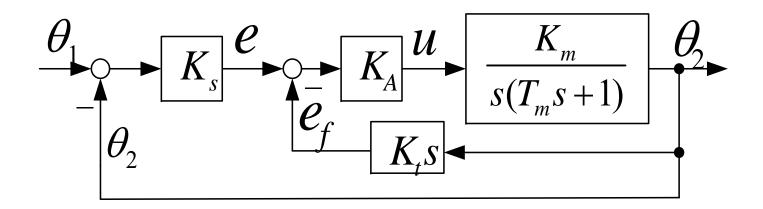


例2.15 交流-直流位置随动系统如图2.30所示,试 列写系统的元部件传递函数,绘出系统结构图并求系 统传递函数。



解:设负载效应满足且初始条件为零,列写微分 方程→环节传递函数→结构图→ 总传递函数。





### 系统总传递函数:

$$G(s) = \frac{K_A K_m K_s}{T_m s^2 + (K_A K_t K_m + 1) s + K_A K_m K_s}$$

### 线性控制系统数学模型建立过程

- □ 分析物理系统, 环节划分
- □ 列写环节微分方程/传递函数
- □ 画环节结构图
- □ 连接环节结构获得系统结构图
- □ 结构图简化求总传递函数(数学模型)

## 2 2.7 非线性数学模型的线性化

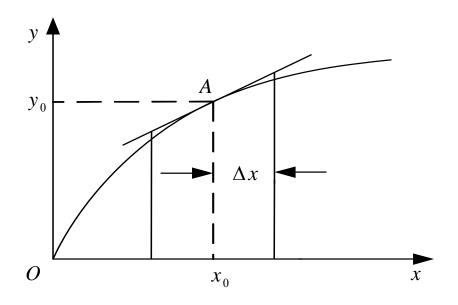
- □ 以上所举例数学模型都是针对线性定常系统的,它们的一个重要性质是具有齐次性和叠加性。
- □ 绝对线性系统是不存在的,系统的运动方程应该都是非线性的。
- □ 非线性微分方程的建立和求解较为困难, 非线性系统复杂。
- □ 在一定条件下,用近似的线性方程代替非线性方程。

## 2 2.7 非线性数学模型的线性化

- □ 控制系统都有一个平衡的工作状态和相应的工作点。
- 基本假设——非线性系统在工作点附近运动(变量对于平衡工作点的偏差很小)。
- □ 微偏法或小邻域法( △x→0 ) ——若非线性函数连续, 且各阶导数均存在,则可在给定工作点的小邻域内将其展 开为泰勒级数,并略去二阶以上各项,即为非线性函数的 线性化模型。
- □ 本质非线性系统(在平衡工作点处的特性不连续),不能应用微偏法。

设非线性元件的输入是x,输出为y,它们的关系如

图所示:



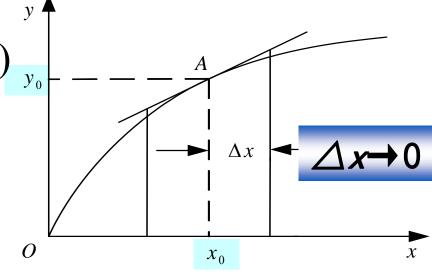
非本质非线性特性的线性化

相应的非线性数学表达式为: y = f(x)

在给定工作点 $(x_0, y_0)$ 附近展开成泰勒级数。

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \cdots$$



非本质非线性特性的线性化

$$y = y_0 + K(x - x_0)$$

$$\Delta y = K \Delta x$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$\Delta y = y - y_0$$
  $\Delta x = x - x_0$ 

例:三相晶闸管整流装置的输入电压u,与晶闸管 的导通角 $\alpha \propto u_2$ ,  $\alpha$ 与整流输出电压 $u_\alpha$ 有如下非 线性关系:

$$u_a = 2.34 E_2 \cos \alpha$$
  $E_2 - 交流电源相$ 电压有效值。

在工作点 $(a_0, u_{a0})$ 的小邻域内线性化:

$$u_{a} = u_{a0} + \frac{du_{a}}{d\alpha}(\alpha - \alpha_{0})$$
  $u_{a0} = 2.34E_{2}\cos\alpha_{0}$  令  $\frac{du_{a}}{d\alpha}|_{\alpha=\alpha_{0}} = K$  ←工作点处的切线斜率

$$u_a - u_{a0} = K(\alpha - \alpha_0)$$
  $\Delta u_a = K\Delta \alpha$ 

例2.4中的直流他励发电机的数学模型  $\phi = k_2 i$  实际上也是从 非线性模型经线性化后得到的。

设原非线性模型为:

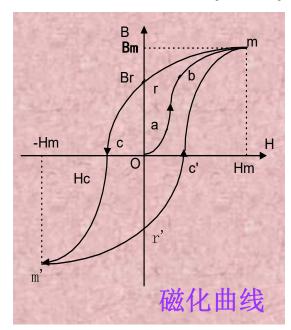
$$\varphi = f(i)$$

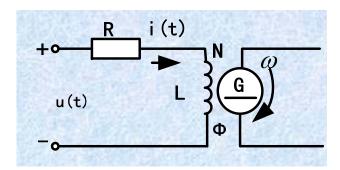
$$\varphi = K_2 i$$

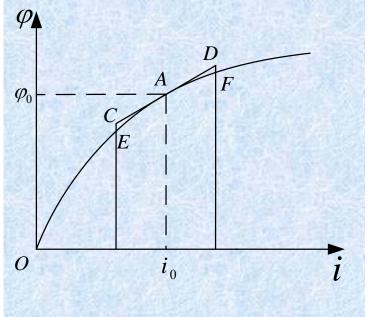
如图2.40所示,设工作点在( $i_0$ ,  $\phi_0$ )

利用泰勒级数 进行线性化后 得到上述方程, 其中:

$$K_2 = \frac{d\varphi}{dt} | i = i_0$$







》实际对控制系统建模过程中,我们可以不必关心 具体的非线性模型,大多数系统都可以满足小临域条件,唯一与非线性模型相关的线性比例系数K可以通 过实验手段测得。

> 仅适用于非本质非线性,不适应本质非线性系统。

# 2 本节课小结

□线性系统信号流图的定义、构成

节点(源点、汇点、混合节点)、支路、增益、通路、回环、回路增益、前向通道

□ 信号流图的绘制

方框图→信号流图

□ 信号流图求传递函数 (梅逊增益公式)

前向通道、前向通道增益、回环、不接触回环、系统特征式、残余流图  $\sum_{k=1}^{n} p_k \Delta_k$ 

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{k} P_k \Delta_k}{\Lambda}$$

□线性控制系统数学模型的建立过程及非线性化(了解)

任务:认识驱动器、传感器和控制器。

建立被控对象G(s)和传感器的模型。

### 硬盘驱动系统典型参数取值:

读写头和臂的惯性系数上1 N·m·s²/rad;

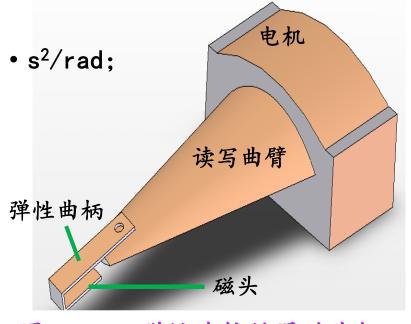
摩擦系数*b=*20 kg/m/s;

放大倍数K=10~1000;

电枢电阻*R*=1 Ω:

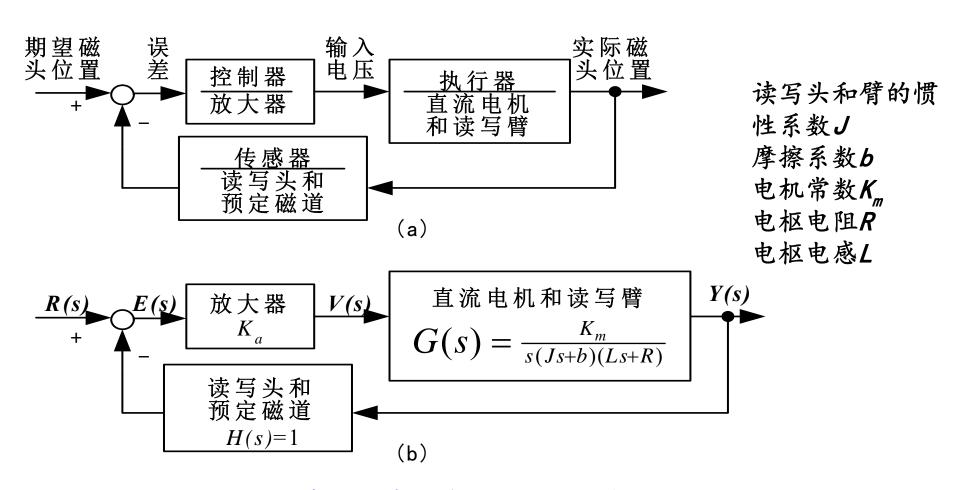
电机常数K<sub>m</sub>=5 N⋅m/A;

电枢电感L=1mH



弹性连接的滑动曲柄示意 图 1-17

### 硬盘驱动系统的控制模型



硬盘驱动读写系统的方框图模型 图 2-48

### 硬盘驱动系统的控制模型

被控对象传递函数:

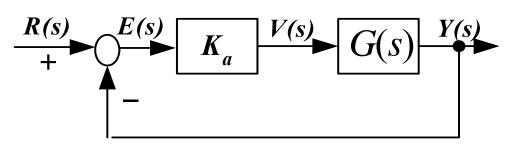
$$G(s) = \frac{K_m}{s(Js+b)(Ls+R)} = \frac{5000}{s(s+20)(s+1000)}$$

改写为: 
$$G(s) = \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)}$$

其中, $\tau_L=J/b=50$  ms 和  $\tau$  =L/R=1 ms,由于  $\tau$  <<  $\tau$ , 所以可以忽略 7, 因而传递函数可简化为典型二阶系统

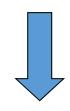
$$G(s) = \frac{K_m / bR}{s(\tau_L s + 1)} = \frac{0.25}{s(0.05s + 1)}$$
 或者  $G(s) = \frac{5}{s(s + 20)}$ 

### 硬盘驱动系统的控制模型



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)}$$

$$= \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a}$$



$$\frac{R(s)}{s^2 + 20s + 200} \frac{Y(s)}{s^2 + 20s + 200}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{200}{s^2 + 20s + 200}$$

- □控制系统的数学模型:定义、种类(动态、静态);
- □输入—输出模型:微分方程的建立(分析法、步骤):
- □传递函数的定义、性质和特点;
- □传递函数的三种形式(多项式、零极点、时间常数)
- □典型系统的传递函数 (6种:比例、惯性、振荡、积分、微分、延迟)。

# 2 第2章 线性系统的数学模型 总结

### 传递函数的几种形式

多项式形式:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

零极点形式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^{m} (s + z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}$$

时间常数形式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K' \prod_{j=1}^{m} (T_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n} (T_i s + 1)}$$

# 2 第2章 线性系统的数学模型 总结

环节名称	传递函数	特点	实例
比例环节 (放大环节)	K	输出量无延迟、无失 真地反映输入量变化	电位器(输入电压-输出电压) 晶体管放大器(输入电压-输出电压) 测速机(转速-电压) 齿轮箱(主动轴转速-从动轴转速)
惯性环节 (非周期环节)	$\frac{K}{Ts + 1}$	输出量变化落后于输 入量的变化	它激直流发电机(激磁电压-电势) RC滤波器(电源电压-电容电压)
振荡环节	$\frac{K}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$ $0 < \zeta < 1$	有两种储能元件, 所 储能量相互转换	RLC 振荡电路(输入电压-输出电压)
积分环节	$\frac{K}{s}$	输出量正比于输入量 的积分	传动轴(转速-转角) 积分器 (输入电压-输出电压)
理想微分环节 实际微分环节	$\frac{KS}{Ts+1}$	输出量正比于输入量 的导数	直流测速机(转角-电势) RC串联微分电路(电源电压-电阻电压)
延迟环节 (时滞环节)	$Ke^{-\tau s}$	输出量经过延迟 τ 后,才复现输入量	晶闸管整流装置(控制电压-输出电压) 传输带(输入流量-输出流量)

# 2 第2章 线性系统的数学模型 总结

□ 线性系统的结构图

是描述系统各元部件之间信号传递关系的图形化数学模型。 作用原理(方框图) + 数学模型 →结构图

□ 结构图的构成

4种元素:信号线、引出点、比较点、方框

- □ 结构图的等效变换和简化 串联、并联和反馈连接 比较点和引出点的移动
- □ 复杂结构图的简化 解除交叉,交叉嵌套变层层嵌套

□ 线性系统信号流图的定义、构成

节点(源点、汇点、混合节点)、支路、增益、通路、回 环、回路增益、前向通道

- □ 信号流图的绘制 方框图→信号流图
- □ 信号流图求传递函数(梅逊增益公式)

前向通道、前向通道增益、回环、不接触回环、系统特征  $\sum^{n} p_{k} \Delta_{k}$ 式、残余流图

$$P = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k \Delta_k}{\Lambda}$$

□线性控制系统数学模型的建立过程及非线性化(了解)