

第一章 静电场

习题(1-1)

1-1-1 真空中有一密度为 $2\pi \text{ nC/m}$ 的无限长电荷沿 y 轴放置, 另有密度分别为 0.1 nC/m^2 和 -0.1 nC/m^2 的无限大带电平面分别位于 $z = 3 \text{ m}$ 和 $z = -4 \text{ m}$ 处。试求 P 点(1,7,2)的电场强度 E 。

解 $z = 3 \text{ m}$ 和 $z = -4 \text{ m}$ 的带电平面产生的电场为

$$E_1 = \begin{cases} -\frac{0.1}{\epsilon_0} e_z & (-4 < z < 3) \\ 0 & (z < -4 \text{ 或 } z > 3) \end{cases}$$

沿 y 轴放置的线电荷产生的电场为

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{2\pi}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} e_x + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} e_z \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{(x^2+z^2)} (xe_x + ze_z) \text{ nV/m} \end{aligned}$$

所以, P 点(1,7,2)的电场强度为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= -\frac{0.1}{\epsilon_0} e_z + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{1+4} (e_x + 2e_z) \\ &= 22.59e_x + 33.88e_z \text{ V/m} \end{aligned}$$

应用叠加原理计算电场强度时, 要注意是矢量的叠加。

1-1-2 一充满电荷(电荷体密度为常数 ρ_0)的球, 证明球内各点场强与到球心的距离成正比。

解 应用叠加原理, 将带电球体分割成无限多个同心薄球壳, 它们都可视为一均匀带电球面。所有薄球壳在同一场点上的元场强(可利用教材中例 1-3 的结果求得)的叠加就是需求的总场强。

求球内离球心距离 r 处的场强。半径 r' ($r' < r$)、厚度 dr' 的带电薄壳的电荷元 $dq = \rho_0 4\pi r'^2 dr'$, 它在 r 处的场强为

$$dE_1 = \frac{\rho_0 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

半径 r' ($r' > r$) 的带电薄壳在 r 处的场强

$$dE_2 = 0$$

于是,球内场强

$$dE = dE_1 + dE_2$$

$$E = e_r \frac{\rho_0}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} e_r \quad (r < a)$$

说明球内各点的场强与到球心的距离成正比。

本题应用教材 1-2 节中的高斯定律证明将更简便。

1-1-3 已知电位函数 $\varphi = \frac{10}{x+y^2+z^3}$, 试求 E , 并计算在 $(0,0,2)$ 及 $(5,3,2)$ 点处的 E 值。

$$\begin{aligned} \text{解 } E &= -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}e_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}e_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}e_z\right) \\ &= \frac{10}{(x+y^2+z^3)^2}(e_x + 2ye_y + 3z^2e_z) \end{aligned}$$

代入数据,得

$$E(0,0,2) = (0.156e_x + 1.875e_z) \text{ V/m}$$

$$E(5,3,2) = (0.021e_x + 0.124e_y + 0.248e_z) \text{ V/m}$$

1-1-4 证明两等量而异号的长直平行线电荷场中的等位面是一组圆柱面。

解 设两等量异号长直平行线电荷 τ 和 $-\tau$ 都与 xoy 平面垂直,且分别位于 $(d,0)$ 和 $(-d,0)$,那么 xoy 平面内任一点 $P(x,y)$ 的电位为

$$\varphi(x,y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}$$

这里,已经取 $x=0$ 平面为电位参考点。

由上式可知,当

$$\frac{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} = K$$

时, φ 为常数。故该式为等位线的方程式。平方之,并整理得

$$\left(x - \frac{K^2+1}{K^2-1}d\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2dK}{K^2-1}\right)^2$$

这是圆的方程。可见,在 xoy 平面上,等位线是一族圆心在 x 轴上的偏心圆,即等位面是一些偏心的圆柱面。

习题(1-2)

1-2-1 一点电荷 q 放在无界均匀介质中的一个球形空腔中心,设介质的

介电常数为 ϵ , 空腔的半径为 a , 求空腔表面的极化电荷面密度。

解 由高斯定律, 介质中的电场强度为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} e_r$$

由关系式 $D = \epsilon_0 E + P$, 得电极化强度为

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{4\pi\epsilon r^2} e_r$$

因此, 空腔表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_p = P \cdot e_n \Big|_{r=a} = P(a) \cdot (-e_r) = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{4\pi\epsilon a^2}$$

1-2-2 求下列情况下, 真空中带电面之间的电压:

(1) 相距为 a 的两无限大平行板, 电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$;

(2) 无限长同轴圆柱面, 半径分别为 a 和 b ($b > a$), 每单位长度上电荷: 内柱为 τ 而外柱为 $-\tau$;

(3) 半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球面 ($R_2 > R_1$), 带有均匀分布的面积电荷, 内外球面电荷总量分别为 q 和 $-q$ 。

解 (1) 因两无限大平行板间电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

所以, 电压

$$U = Ea = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a$$

(2) 因两圆柱面间的电场强度为

$$E = E_\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

所以, 电压

$$U = \int_a^b \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

(3) 因两球面间的电场强度为

$$E = E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

所以, 电压

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

1-2-3 高压同轴线的最佳尺寸设计——高压同轴圆柱电缆, 外导体的内半径为 2 cm, 内外导体间电介质的击穿场强为 200 kV/cm。内导体的半径

为 a , 其值可以自由选定, 但有一最佳值。因为若 a 太大, 内外导体的间隙就变得很小, 以致在给定的电压下, 最大的 E 会超过电介质的击穿场强。另一方面, 由于 E 的最大值 E_m 总是在内导体表面上, 当 a 很小时, 其表面的 E 必定很大。试问 a 为何值时, 该电缆能承受最大电压? 并求此最大电压值。

解 设内外导体的半径分别为 a 和 b 。显然, 最大场强出现在 $\rho = a$ 处。由高斯定律, 求得介质中的电场为

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon a} \frac{a}{\rho} = E_m \frac{a}{\rho}$$

内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b E_m \frac{a}{\rho} d\rho = aE_m \ln \frac{b}{a}$$

可见 U 随 a 而变化, 但不是一单调函数, 必存在一极值。为求此极值, 必有

$$\frac{dU}{da} = 0$$

由此, 得

$$\ln \frac{b}{a} - 1 = 0$$

即

$$a = \frac{b}{e}$$

因此, 取 $a = \frac{b}{e}$ 时, 该电缆能承受最大电压

$$U_m = \frac{b}{e} E_m \ln \frac{b}{b/e} = \frac{b}{e} E_m$$

代入数据 $b = 2 \text{ cm}$, $E_m = 20\,000 \text{ kV/m}$, 得

$$a = \frac{2}{e} = 0.736 \text{ cm}$$

$$U_m = \frac{2 \times 10^{-2}}{e} \times 20\,000 = 147 \text{ kV}$$

习题(1-3)

1-3-1 从静电场基本方程出发, 证明当电介质均匀时, 极化电荷密度 ρ_p 存在的条件是自由电荷的体密度 ρ 不为零, 且有关系式 $\rho_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\rho$ 。

解 均匀介质的 ϵ 为常数。从关系式 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 及 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 得介质中的电极化强度

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D}$$

极化电荷密度

$$\begin{aligned}\rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left[\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \mathbf{D} \right] \\ &= -\mathbf{D} \cdot \nabla \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \nabla \cdot \mathbf{D}\end{aligned}$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 和 $\nabla \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) = 0$, 故上式成为

$$\rho_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \rho$$

1-3-2 试证明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时可能有极化电荷体密度, 并导出极化电荷体密度 ρ_p 的表示式。

解 由习题(1-3-1)知, 极化电荷体密度

$$\rho_p = -\mathbf{D} \cdot \nabla \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \nabla \cdot \mathbf{D}$$

对于不均匀介质, $\epsilon \neq$ 常数, 故 $\nabla \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \neq 0$, 没有自由电荷体密度时, $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 。因此

$$\rho_p = -\mathbf{D} \cdot \nabla \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon^2} \mathbf{D} \cdot \nabla \epsilon$$

这说明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时, 可能有极化电荷体密度 ρ_p 。

1-3-3 两种介质分界面为平面, 已知 $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$, 且分界面一侧的电场 $E_1 = 100 \text{ V/m}$, 其方向与分界面的法向成 45° 角, 求分界面另一侧的电场 E_2 的值。

解 介质 1 一侧电场的法向分量和切向分量为

$$E_{1t} = E_1 \sin 45^\circ = 50\sqrt{2} \text{ V/m}$$

$$E_{1n} = E_1 \cos 45^\circ = 50\sqrt{2} \text{ V/m}$$

根据分界面上的衔接条件, E 的切向分量和 D 的法向分量分别连续, 因此

$$E_{2t} = E_{1t} = 50\sqrt{2} \text{ V/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = 4\epsilon_0 \times 50\sqrt{2}$$

面

$$E_{2n} = \frac{D_{2n}}{\epsilon_2} = \frac{4\epsilon_0 \times 50\sqrt{2}}{2\epsilon_0} = 100\sqrt{2} \text{ V/m}$$

最后得

$$\begin{aligned}E_2 &= \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = \sqrt{50^2 \times 2 + 100^2 \times 2} \\ &= 158.11 \text{ V/m}\end{aligned}$$

E_2 与分界面法向间的夹角,由静电场的折射定律 $\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$, 得

$$\tan\alpha_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan\alpha_1 = \frac{2\epsilon_0}{4\epsilon_0} \tan 45^\circ = \frac{1}{2}$$

所以

$$\alpha_2 = 26.57^\circ$$

习题(1-4)

1-4-1 电荷按 $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$ 的规律分布于 $R_1 \leq r \leq R_2$ 的球壳层中,其中 α 为常数,试由泊松方程直接积分求电位分布。

解 选球坐标系,球心与原点重合。由对称性知,电位 φ 仅为 r 坐标的函数,故

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = 0 \quad (0 \leq r < R_1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\alpha}{\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_3}{dr} \right) = 0 \quad (R_2 < r < \infty)$$

积分之,得通解为

$$\varphi_1(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (0 \leq r < R_1)$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln r + \frac{C_3}{r} + C_4 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\varphi_3(r) = \frac{C_5}{r} + C_6 \quad (R_2 < r < \infty)$$

下面来确定积分常数。

因 $r \rightarrow 0$ 时, φ_1 应为有限值,故 $C_1 = 0$; $r \rightarrow \infty$ 时, $\varphi_3(\infty) = 0$, 故 $C_6 = 0$ 。

当 $r = R_1$ 时, $\varphi_1 = \varphi_2$, 故

$$C_2 = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln R_1 + \frac{C_3}{R_1} + C_4$$

及 $\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$, 故有

$$-\frac{\alpha}{\epsilon_0 R_1} - \frac{C_3}{R_1^2} = 0 \Rightarrow C_3 = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} R_1$$

当 $r = R_2$ 时, $\varphi_2 = \varphi_3$ 及 $\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \Big|_{r=R_2}$, 故有

$$-\frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln R_2 + \frac{C_3}{R_2} + C_4 = \frac{C_5}{R_2}$$

$$-\frac{\alpha}{\epsilon_0 R_2} - \frac{C_3}{R_2^2} = -\frac{C_5}{R_2^2}$$

解之,得

$$C_2 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C_3 = -\frac{\alpha}{\epsilon_0} R_1$$

$$C_4 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} (1 + \ln R_2)$$

$$C_5 = \frac{\alpha}{\epsilon_0} (R_2 - R_1)$$

从而有

$$\varphi_1(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (0 \leq r < R_1)$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\varphi_3(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} (R_2 - R_1) \frac{1}{r} \quad (R_2 < r < \infty)$$

本题说明,由泊松方程式拉普拉斯方程求解电位分布时,要注意 $\nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 和 $\nabla^2\varphi = 0$ 适用于各向同性的线性均匀电介质,当所求场域存在多种电介质或不同电荷密度的区域,则需分区设不同的 φ 函数,分别求解,再根据不同区域边界上 φ 的衔接条件定积分常数。

1-4-2 两平行导体平放,相距为 d ,板的尺寸远大于 d ,-板电位为零,另一板电位为 V_0 ,两板间充满电荷,电荷体密度与距离成正比,即 $\rho(x) = \rho_0 x$ 。试求两板间的电位分布(注: $x=0$ 处板的电位为零)。

解 平板可视为无限大平板的情况,且由于 $\rho(x) = \rho_0 x$,则电位 φ 仅为坐标 x 的函数。这样,泊松方程就简化成

$$\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}x$$

积分之,得通解为

$$\varphi(x) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}x^3 + C_1x + C_2$$

应用给定的边界条件: $x=0, \varphi=0; x=d, \varphi=V_0$,故

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ V_0 = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}d^3 + C_1d, \quad \text{即 } C_1 = \frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}d^2 \end{cases}$$

从而得

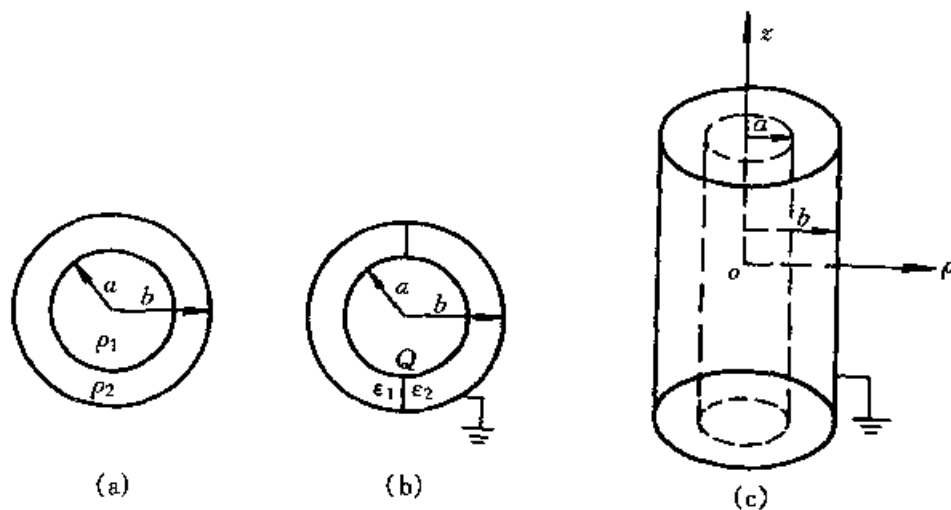
$$\varphi(x) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0}x^3 + \left(\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}d^2\right)x$$

1-4-3 写出下列静电场的边值问题:

(1) 电荷体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 半径分别为 a 与 b 的双层同心带电球体 (如题 1-4-3 图(a));

(2) 在两同心导体球壳间, 左半部和右半部分别填充介电常数为 ϵ_1 与 ϵ_2 的均匀介质, 内球壳带总电荷量为 Q , 外球壳接地 (如题 1-4-3 图(b));

(3) 半径分别为 a 与 b 的两无限长空心同轴圆柱面导体, 内圆柱表面上单位长度的电量为 τ , 外圆柱面导体接地 (如题 1-4-3 图(c))。



题 1-4-3 图

解 (1) 选球坐标系, 球心与原点重合。由对称性可知, 电位 φ 仅为 r 的函数, 故有如下静电场边值问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_1}{dr}) = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0} & (0 \leq r < a) \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_2}{dr}) = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0} & (a < r < b) \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_3}{dr}) = 0 & (b < r < \infty) \\ \varphi_1|_{r=a} = \varphi_2|_{r=a}, \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}|_{r=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{r=a} \\ \varphi_2|_{r=b} = \varphi_3|_{r=b}, \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{r=b} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}|_{r=b} \\ \varphi_1|_{r \rightarrow 0} = \text{有限值}, \varphi_3|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

(2) 选球坐标系, 球心与原点重合。分析可知, 电位 φ 仅为 r 的函数, 故有如下的静电场边值问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_1}{dr}) = 0 & (\text{在介质 } \epsilon_1 \text{ 中}) \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi_2}{dr}) = 0 & (\text{在介质 } \epsilon_2 \text{ 中}) \\ \varphi_1|_{r=b} = \varphi_2|_{r=b} = 0 \\ \int_{S_{\text{左半球}}} -\epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} dS + \int_{S_{\text{右半球}}} -\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} dS = Q \\ \varphi_1 = \varphi_2 & (\text{在介质分界面上}) \end{cases}$$

由于在 $a < r < b$, 有 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, 所以以上边值问题可以简化为

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\varphi}{dr}) = 0 \\ \varphi|_{r=b} = 0 \\ \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = -\frac{Q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \end{cases}$$

(3) 选圆柱坐标系, z 轴与圆柱导体面的轴线重合, 因圆柱导体无限长, 故由对称性可知, 电位 φ 仅为 ρ 的函数, 有如下的静电场边值问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varphi}{d\rho} \right) = 0 & (a < \rho < b) \\ \varphi \Big|_{\rho=b} = 0 \\ -\epsilon \frac{d\varphi}{d\rho} \Big|_{\rho=a} \times 2\pi a = \tau \end{cases}$$

习题(1-5)

1-5-1 一长直接地金属槽,其三壁的电位为零,顶盖电位为 $V_0 \sin \frac{\pi x}{a}$, 如图所示。求金属槽内的电位分布。

解 边值问题为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & (\text{在金属槽内}) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varphi(x, h) = V_0 \sin \frac{\pi x}{a} \end{cases} \quad (3)$$

应用分离变量法,得满足方程(1)和边界条件(2)的解形式为

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

利用边界条件(3),则有

$$V_0 \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi h}{a}$$

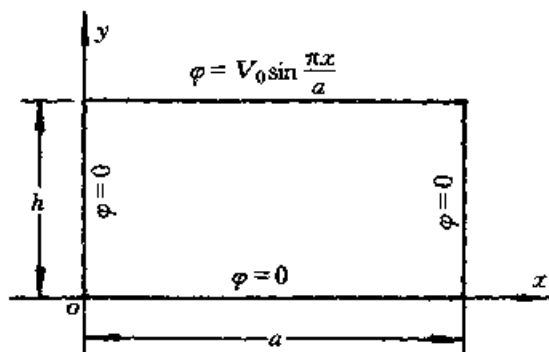
比较系数,便得

$$A_1 = \frac{V_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi h}{a}}$$

$$A_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

所以最终得电位 φ 的解答是

$$\varphi(x, y) = \frac{V_0}{\operatorname{sh} \frac{\pi h}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{a}$$



题 1-5-1 图

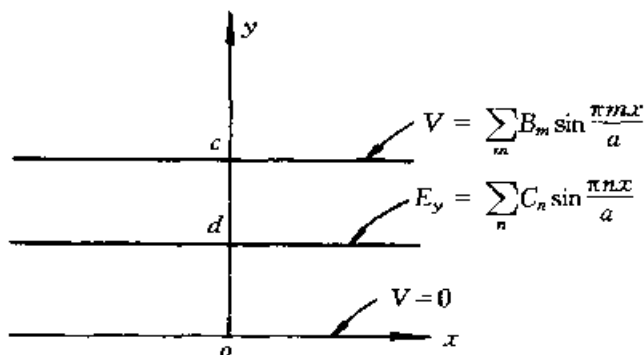
1-5-2 在直角坐标中 $y=0$ 的面是零电位, $y=c$ 的电位是

$$V = \sum_m B_m \sin \frac{\pi m x}{a}$$

若使 $y=d (c > d > 0)$ 处电场的 y 分量是

$$E_y = \sum_n C_n \sin \frac{\pi n x}{a}$$

问 B_m 的表示式如何?



题 1-5-2 图

解 在 $0 \leq y \leq c$ 的两极板间, 无自由电荷分布, 故电位 φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 。从边界条件

$$\varphi \Big|_{y=0} \quad \text{和} \quad \varphi \Big|_{y=d} = V \equiv \sum_m B_m \sin \frac{\pi m x}{a}$$

知, 满足拉普拉斯方程的电位 φ 的解形式可取为

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1} B_m \sin \frac{\pi m x}{a} \operatorname{sh} \frac{\pi m y}{a} / \operatorname{sh} \frac{\pi m c}{a}$$

由此得, 在 $y=d$ 处的电场分量是

$$E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=d} = - \sum_{m=1} B_m \frac{\pi m}{a} \sin \frac{\pi m x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi m d}{a} / \operatorname{sh} \frac{\pi m c}{a}$$

利用已给条件 $E_y \Big|_{y=d} = \sum_n C_n \sin \frac{\pi n x}{a}$, 得

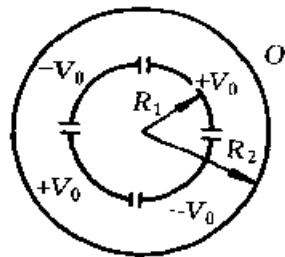
$$- \sum_{m=1} B_m \frac{\pi m}{a} \sin \frac{\pi m x}{a} \operatorname{ch} \frac{\pi m d}{a} / \operatorname{sh} \frac{\pi m c}{a} = \sum_{m=1} C_m \sin \frac{\pi m x}{a}$$

比较两边系数, 得

$$B_m = - \frac{a C_m}{\pi m} \operatorname{sh} \frac{\pi m c}{a} / \operatorname{ch} \frac{\pi m d}{a}$$

1-5-3 一个半径为 R_1 的四片整流子与一个半径为 $R_2 (R_2 > R_1)$ 的接地圆管同轴, 求其间电位的分布。整流片的电位交错为 $\pm V_0$ 。

解 选圆柱坐标系, 使圆管的轴线与 z 轴重合。由于圆管可看作无限长, 电位 φ 仅为 (ρ, ϕ) 的函数, 与 z 坐标无关, 故有静电场边值问题:



题 1-5-3 图

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 & (R_1 < \rho < R_2, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi(R_2, \phi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{\rho=R_1, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}} = V_0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{\rho=R_1, \frac{\pi}{2} < \phi < \pi} = -V_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{\rho=R_1, \pi < \phi < \frac{3}{2}\pi} = V_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{\rho=R_1, \frac{3}{2}\pi < \phi < 2\pi} = -V_0 \end{cases} \quad (6)$$

由边界条件看出, $\varphi(\rho, \phi)$ 是 ϕ 的奇函数, 所以通解中不应该有余弦项; 又因电位分布的周期性 $\varphi(\rho, \phi) = \varphi(\rho, \phi + 2\pi)$, 所有通解中不能含有 ϕ 因子, 因此电位的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \sin n\phi \quad (7)$$

利用边界条件(2), 得

$$A_0 \ln R_2 + B_0 = 0 \quad \text{和} \quad A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} = 0$$

即

$$B_0 = -A_0 \ln R_2 \quad \text{和} \quad B_n = -A_n R_2^{2n}$$

所以, (7) 式可写成

$$\varphi(\rho, \phi) = A_0 \ln \frac{\rho}{R_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_2^n \left[\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^n - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^n \right] \sin n\phi$$

再利用边界条件(3), (4), (5), (6) 式, 确定出系数

$$A_0 = 0$$

$$A_n = \frac{4V_0(1 - \cos \frac{n\pi}{2})}{\pi R_2^n \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n \right]} \quad (n = \text{偶数})$$

最终得电位分布

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{4V_0(1 - \cos \frac{n\pi}{2})}{\left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n \right] \pi n} \left[\left(\frac{\rho}{R_2} \right)^n - \left(\frac{R_2}{\rho} \right)^n \right] \sin n\phi$$

1-5-4 试由教材中例 1-16 的结果说明, 若电介质内部有了细长的夹杂物(如空气泡), 而夹杂物的介电常数小于周围介质的介电常数时, 该处场强可能显著增强; 在某些情况下, 将导致放电并促进介质内部的击穿, 最终使绝缘损坏。

解 设细长的夹杂物的介电常数为 ϵ_2 , 周围电介质的介电常数为 ϵ_1 , 则由例 1-16 的结果知, 细长的夹杂物内的电位为

$$\varphi(\rho, \phi) = -\left(1 - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\right) E_0 \rho \cos \phi$$

其内部的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0 \cos \phi \mathbf{e}_\rho - \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0 \sin \phi \mathbf{e}_\phi$$

或者

$$\mathbf{E} = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0 (\cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0 \mathbf{e}_x$$

由上式可以看出, 当夹杂物的介电常数 ϵ_2 小于周围介质的介电常数 ϵ_1 时, 夹杂物处的场强会显著增强; 在某些情况下, 将导致放电并促进电介质的击穿, 最终使绝缘损坏。

习题(1-6)

1-6-1 如题 1-5-1 图中顶盖电位为 $10 \sin \frac{\pi x}{a}$, $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, 试用有限差分法求槽内电位分布。

解 (略)

1-6-2 题 1-6-2 图所示为一二维拉普拉斯场中的电位函数 φ 的数值解。试验证 M, N 两点用有限差分法所得的结果是否满足求解要求(若数值解的绝对误差要求应不大于 0.03)。

解 给定 M 点的电位数值解为 $\varphi_{OM} = 49.73$, 而根据拉普拉斯方程的差分表达式, 由相邻四点可求得 M 点的电位值为

$$\begin{aligned} \varphi'_{OM} &= \frac{1}{4} (\varphi_{1M} + \varphi_{2M} + \varphi_{3M} + \varphi_{4M}) \\ &= \frac{1}{4} (61.92 + 69.63 + 30.10 + 37.26) \\ &= 49.7275 \end{aligned}$$

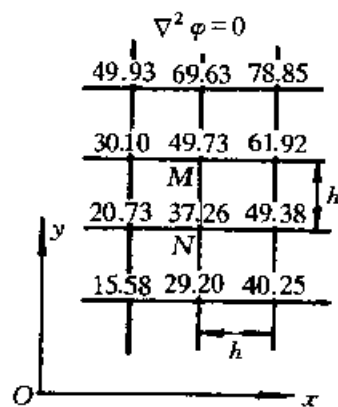
故得 M 点数值解的绝对误差是

$$\varphi_{OM} - \varphi'_{OM} = 49.73 - 49.7275 = 2.5 \times 10^{-3} < 0.03$$

同理, 对于 N 点, $\varphi_{ON} = 37.26$

$$\varphi'_{ON} = \frac{1}{4} (49.38 + 49.73 + 20.73 + 29.20) = 37.26$$

故 N 点的数值解的绝对误差是



题 1-6-2 图

$$\varphi_{ON} - \varphi'_{ON} = 37.26 - 37.26 = 0$$

由此可见, M, N 点的数值解满足求解要求。

1-6-3 如题 1-6-3 图所示, 给定二维拉普拉斯场, 现用长方形网格予以划分, 试求此时与拉普拉斯方程相应的差分格式。

解 在直角坐标系中, 拉普拉斯方程的展开式为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

按附图所示, 由长方形网格划分, 可得

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 \approx \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h_x^2} \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 \approx \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h_y^2}$$

代入式(1), 即得

$$\frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h_x^2} + \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h_y^2} \approx 0$$

所以

$$\varphi_0 = (h_y^2 \varphi_1 + h_y^2 \varphi_3 + h_x^2 \varphi_2 + h_x^2 \varphi_4) / [2(h_x^2 + h_y^2)]$$

即为待求的差分格式。

习题(1-7)

1-7-1 在无限大导体平面上方 h 处, 有一线电荷 τ , 求空间任一点的电位和电场强度。

解 在无限大导板下方的电场和电位都为零。

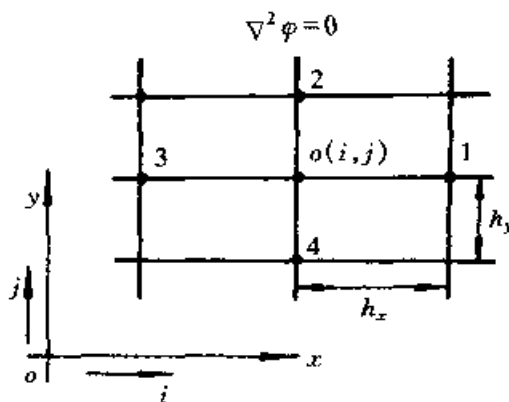
无限大导板上方的电场可用镜像法求得, 如图所示。上半空间($y > 0$)中任一点的电位和电场强度分别为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{(y+h)^2 + x^2}}{\sqrt{(y-h)^2 + x^2}} \end{aligned}$$

和

$$E(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_2} \mathbf{r}_2^0 - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_1} \mathbf{r}_1^0$$

1-7-2 河面上方 h 处, 有一输电线经过(导线半径 $R \ll h$), 其电荷线



题 1-6-3 图

密度为 τ , 河水的介电常数为 $80\epsilon_0$ 。

求镜像电荷的值。

解 应用两介质分界平面的镜像公式, 有

$$\tau' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau = \frac{\epsilon_0 - 80\epsilon_0}{\epsilon_0 + 80\epsilon_0} \tau = -0.96\tau$$

$$\tau'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau = \frac{2 \times 80\epsilon_0}{\epsilon_0 + 80\epsilon_0} \tau = 1.97\tau$$

1-7-3 在无限大接地导体平面两侧各有一点电荷 q_1 和 q_2 , 与导体平面的距离均为 d , 求空间的电位分布。

解 由唯一性定理知, 无限大接地导体平面两侧的电场相互独立, 互相之间没有影响。因此, 左方和右方的电场都可用点电荷与接地导体板的镜像法求解。

左方的电场, 由点电荷 q_1 和它的镜像电荷 $(-q_1)$ 共同产生, 有

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

式中, r_1 和 r_2 分别为到 q_1 与 $(-q_1)$ 的距离。

右方的电场, 由点电荷 q_2 和它的镜像电荷 $(-q_2)$ 共同产生, 有

$$\varphi = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

式中, r_1 和 r_2 分别为到 q_2 与 $(-q_2)$ 的距离。

1-7-4 真空中一点电荷 $q = 10^{-6} \text{ C}$, 放在距金属球壳 (半径为 $R = 5 \text{ cm}$) 的球心 15 cm 处, 求:

(1) 球面上各点 φ, E 的表达式。何处场强最大, 数值如何?

(2) 若将球壳接地, 则情况如何?

解 应用镜像电荷法, 镜像电荷的大小和位置为

$$q' = -\frac{R}{d}q = -\frac{5}{15} \times 10^{-6} \text{ C} = -\frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ C}$$

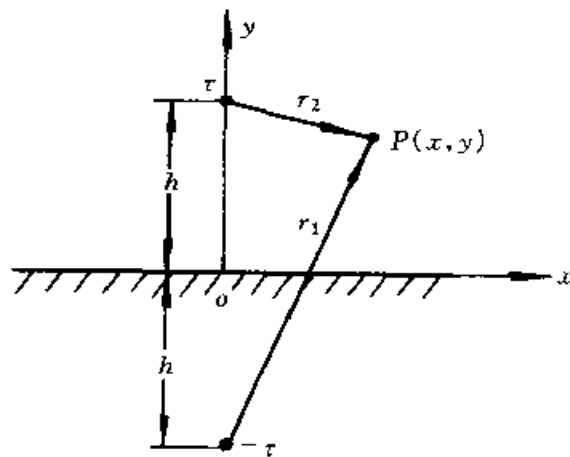
$$b = \frac{R^2}{d} = \frac{5^2}{15} = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

如题 1-7-4 图所示:

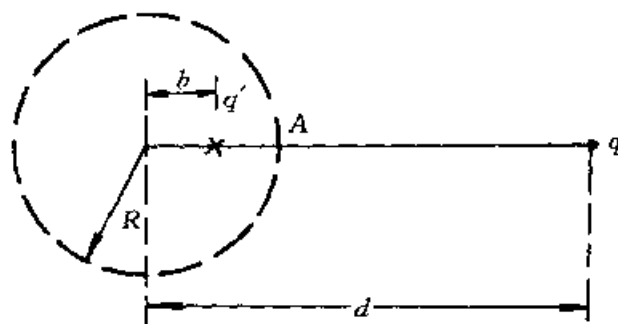
(1) 球壳不接地。此时, 球心处还应放一点电荷

$$q'' = -q' = \frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ C}$$

球外和球表面上任一点的 φ, E 由 q, q' 和 q'' 共同产生。



题 1-7-1 图



题 1-7-4 图

球面上的电位为

$$\varphi = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = 60 \text{ kV}$$

球面上任一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_{r_2} + \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R$$

不难判断,球面上 A 点的场强最大,数值为

$$E_{\max} = 2.46 \times 10^6 \text{ V/m}$$

(2) 若将球壳接地,这时,球外和球表面上任一点的 φ 和 E 由 q 和 q' 共同产生。

球面上的电位为 $\varphi = 0 \text{ V}$

球表面上任一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \mathbf{e}_{r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \mathbf{e}_{r_2}$$

球表面上 A 点的电场强度最大,数值为

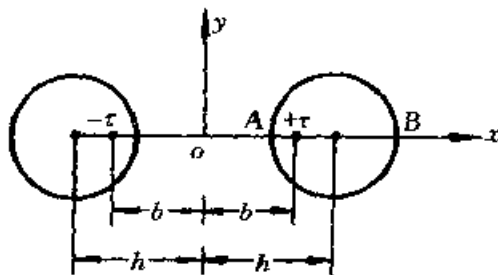
$$E_{\max} = 3.7 \times 10^6 \text{ V/m}$$

1-7-5 两根平行圆柱导体,半径均为 2 cm,相距 12 cm,设加以 1 000 V 电压,求两圆柱体表面上相距最近的点和最远的点的电荷面密度。

解 用电轴法求解,首先确定电轴的位置

$$b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 - 2^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

如题 1-7-5 图所示,此时空间任意点的电



题 1-7-5 图

位为

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

式中 r_2 为 $-\tau$ 至所求点的距离, r_1 为 $+\tau$ 至所求点的距离, 设 $+\tau$ 圆柱的电位为 φ_1 , 带 $-\tau$ 圆柱的电位为 φ_2 , 则

$$\begin{aligned} V_0 = \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-(h-a)}{b+(h-a)} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \times 2 \ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)} \end{aligned}$$

所以, 圆柱单位长度上的电荷 τ 与两柱间的电压关系为

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} = \frac{V_0}{2 \ln \frac{b+(h-a)}{b-(h-a)}} = \frac{1000}{2 \ln \frac{4\sqrt{2}+(6-2)}{4\sqrt{2}-(6-2)}} = 283.65$$

点 A 处, 场强和电荷面密度最大

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \epsilon_0 E_{\max} &= \epsilon_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b-(h-a)} + \frac{1}{b+(h-a)} \right) \\ &= 0.1775 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

点 B 处, 场强和电荷面密度最小

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} = \epsilon_0 E_{\min} &= \epsilon_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+(h-b)} - \frac{1}{a+(h+b)} \right) \\ &= 0.0887 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

习题(1-8)

1-8-1 两个小球半径均为 1 cm, 相距为 20 cm, 位于空气中。

(1) 若已知 φ_1, φ_2 , 求 q_1, q_2 ;

(2) 若已知 φ_1, q_2 , 求 q_1, φ_2 ;

(3) 欲使小球 1 带电荷 $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, 小球 2 不带电荷, 问该用什么方法?

解 两小球和大地构成了 3 导体系统, 假设大地离两小球很远且取它为 0 号导体, 则有各小球的电位 φ_1, φ_2 和电荷 q_1, q_2 之间的下列关系式:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha_{11} = \frac{\varphi_1}{q_1} \Big|_{q_2=0}$, $\alpha_{12} = \frac{\varphi_1}{q_2} \Big|_{q_1=0}$ 。且对于现在的问题, 有

$$\alpha_{22} = \alpha_{11} \quad \text{和} \quad \alpha_{21} = \alpha_{12}$$

容易确定出

$$\alpha_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 10^{-2}} = 9 \times 10^{11}$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{1}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 20 \times 10^{-2}} = 4.5 \times 10^{10}$$

方程组(1)也可表示成另一种形式

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 \\ q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = 1.11385 \times 10^{-12}$$

$$\beta_{22} = \beta_{11} = 1.11385 \times 10^{-12}$$

$$\beta_{12} = \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = -5.56947 \times 10^{-14}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = -5.56947 \times 10^{-14}$$

因此,代入方程式(2),有

$$\begin{cases} q_1 = 1.11385 \times 10^{-12} \varphi_1 - 5.56947 \times 10^{-14} \varphi_2 \\ q_2 = -5.56947 \times 10^{-14} \varphi_1 + 1.11385 \times 10^{-12} \varphi_2 \end{cases} \quad (3)$$

这样:

(1) 若已知 φ_1, φ_2 , 就可由方程(3)求 q_1, q_2 ;

(2) 若已知 φ_1, q_2 , 也可由方程(3)求得 q_1 和 φ_2 分别为

$$\varphi_2 = \frac{1}{1.11385 \times 10^{-12}} q_2 + \frac{5.56947 \times 10^{-14}}{1.11385 \times 10^{-12}} \varphi_1$$

$$q_1 = 1.11385 \times 10^{-12} \varphi_1 - \frac{5.56947 \times 10^{-14}}{1.11385 \times 10^{-12}} q_2 - \frac{5.56947^2 \times 10^{-28}}{1.11385 \times 10^{-12}} \varphi_1$$

(3) 若欲使小球 1 带电荷 $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, 小球 2 不带电荷。这时, 由方程(1)看出, 应使

$$\varphi_2 = \alpha_{21} q_1 = 4.5 \times 10^{10} \times 10^{-8} = 450 \text{ V}$$

1-8-2 若将某对称的三芯电缆中三个导体相联, 测得导体与铅皮间的电容为 $0.051 \mu\text{F}$; 若将电缆中的两导体与铅皮相联, 它们与另一导体间的电容为 $0.037 \mu\text{F}$, 求:

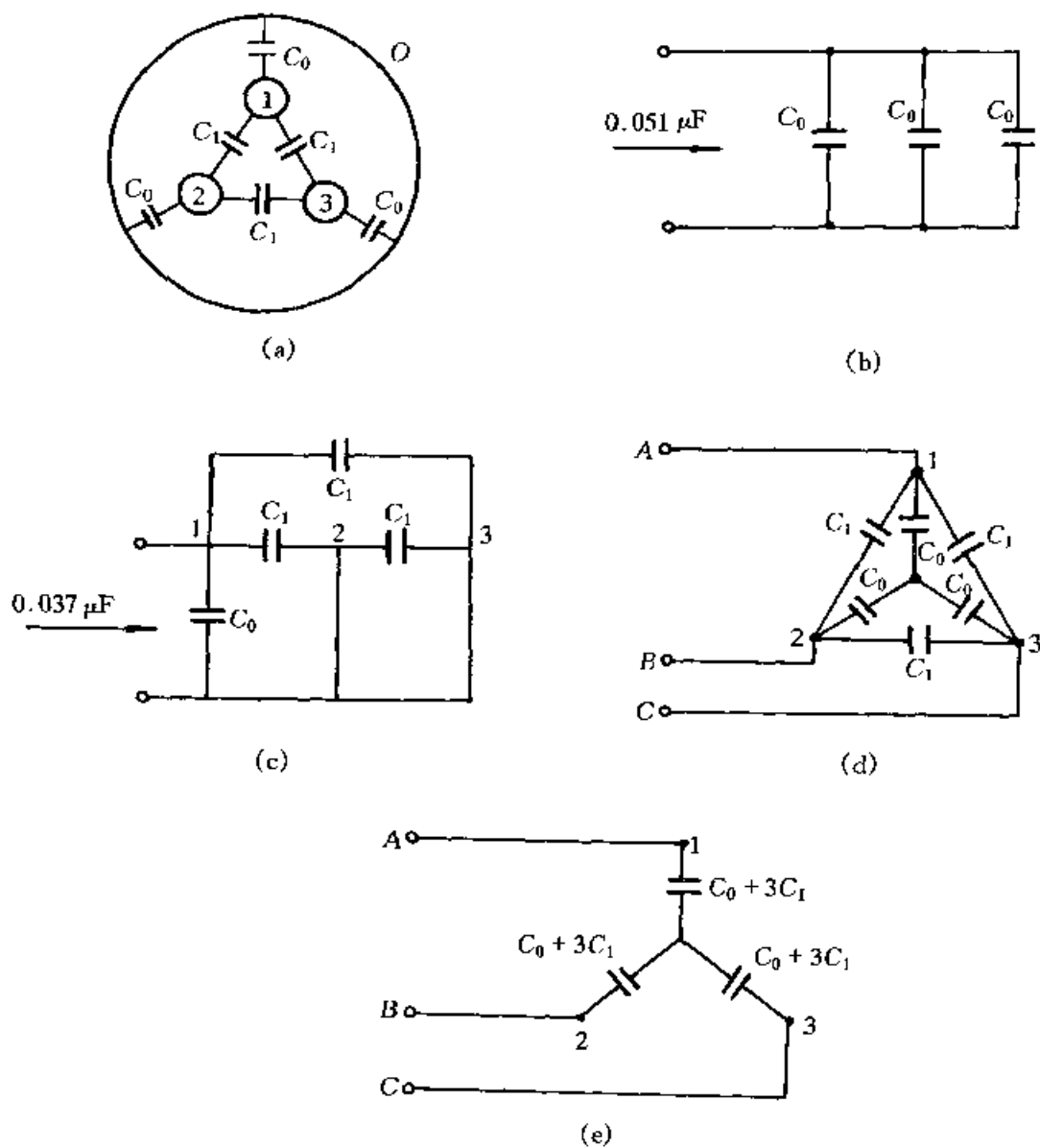
(1) 电缆的各分部电容;

(2) 每一相的工作电容;

(3) 若在导体 1、2 之间加直流电压 100 V , 求导体每单位长度的电荷量。

解 三芯电缆的结构及各部分电容如题 1-8-2 图(a)所示。

(1) 对应于两次测量的等值电容电路分别如题 1-8-2 图(b)和图(c)所示。



题 1-8-2 图

由图(b)

$$3C_0 = 0.051 \mu\text{F}, \quad C_0 = 0.017 \mu\text{F}$$

由图(c)

$$C_0 + C_1 + C_1 = 0.037 \mu\text{F}$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \times (0.037 - 0.017) = 0.01 \mu\text{F}$$

(2) 工作电容是指在一定工作状态下的等值电容, 在这里是指三相工作时一相的电容, 等值电容如题 1-8-2 图(d)和图(e)所示。

所以,一相的工作电容为

$$C = C_0 + 3C_1 = 0.047 \text{ } \mu\text{F}$$

(3) 若在导体 1,2 之间接以直流电压 100 V,则从 A,B 端看进去的等效电容为

$$C_{AB} = C/2 = 0.0235 \text{ } \mu\text{F}$$

所以

$$Q_{AB} = C_{AB}U_{AB} = 0.0235 \times 100 = 2.35 \text{ } \mu\text{C/m}$$

注意:由于电缆是作为无限长来处理的,因而这里的电容均应理解为单位长度的电容。

1-8-3 两平行导线位于与地面垂直的平面内,如题 1-8-3 图所示,已知导体半径为 2 mm,求导线单位长度的部分电容以及两导线间的等效电容。

解 整个系统是由三个导体组成的静电独立系统,共有 3 个部分电容,为计算部分电容,先计算电位系数,有

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 \end{cases}$$

令 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = 0$, 计算此情况下的 φ_1, φ_2 。将地面的影响用镜像电荷代替,并略去导线 2 上感应电荷的影响,则得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2 \times 8}{2 \times 10^{-3}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(8 \times 10^3) \\ \varphi_2 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2 \times 8 - 50 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-2}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 31 \end{aligned}$$

所以,有

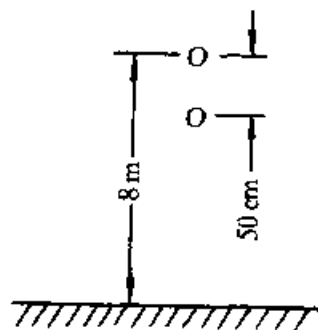
$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(8 \times 10^3), \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 31$$

同理,令 $\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$, 计算此情况下的 φ_1, φ_2 。将地面的影响用镜像电荷代替,并略去导线 1 上感应电荷的影响,则得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{8 + (8 - 0.5)}{0.5} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 31 \\ \varphi_2 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2 \times (8 - 0.5)}{2 \times 10^{-3}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(7.5 \times 10^3) \end{aligned}$$

所以,有

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln 31$$



题 1-8-3 图

$$\alpha_{22} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln(7.5 \times 10^3)$$

根据各个系数之间的关系,可得

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = 2\pi\epsilon_0 \times 0.1301$$

$$\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = 2\pi\epsilon_0 \times 0.1314$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}} = -2\pi\epsilon_0 \times 0.0502$$

再根据部分电容与感应系数之间的关系,可得

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = 2.7889 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} = 4.4389 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$C_{20} = \beta_{21} + \beta_{22} = 4.5111 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

两导线间的等效电容为

$$C_e = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = 5.0263 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

习题(1-9)

1-9-1 两个电容器 C_1 和 C_2 各充以电荷 q_1 和 q_2 。然后移去电源,再将两电容器并联,问总的能量是否减少? 减少了多少? 到哪里去了?

解 两电容器并联后,它们的电压相等,且总电荷与联接前相同,这是一个常电荷系统。并联后,每个电容器的电压为

$$U = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$$

所以,两电容器中的总能量 W'_e 为

$$W'_e = \frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2 = \frac{1}{2} \frac{(q_1 + q_2)^2}{(C_1 + C_2)}$$

而并联之前,两电容器中的总能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C_2}$$

因此,能量的变化为

$$\Delta W_e = W'_e - W_e = -\frac{[C_1 q_2 - C_2 q_1]^2}{2(C_1 + C_2)C_1 C_2}$$

可见,并联后总的能量减少了。减少的这部分能量用于在电容器并联达到稳态的过渡过程中,电位移电流辐射到空间中去了。

1-9-2 半径分别为 a 和 b 的两同轴圆柱, 所带电荷之和为零。试求下列各种电荷分布下, 沿轴向单位长度中储存的能量。

(1) 每一圆柱面上的电荷为 $\sigma_a 2\pi a (= -\sigma_b 2\pi b)$;

(2) 内柱中电荷的体密度为 ρ_a , 外柱有面密度为 σ_b 的面电荷, 且

$$\sigma_a 2\pi b = -\rho_a 2\pi a^2$$

(3) 内柱中电荷体密度为 ρ_a , 两柱之间区域内电荷的体密度为 ρ_b , 且 $\rho_a \pi a^2 = -\rho_b \pi (b^2 - a^2)$ 。

解 由于电荷分布都是轴对称分布, 因此 E 的方向必然是沿径向的且只与半径 r 有关, 则由高斯定律容易求得上述各种情况下的电场分布。但由于 3 种情况下, 净电荷都为零, 因而圆柱外区域中的电场为零。

$$(1) \quad W_e = \frac{1}{2} (\varphi_a \sigma_a 2\pi a + \varphi_b \sigma_b 2\pi b) = \pi a \sigma_a (\varphi_a - \varphi_b)$$

因为

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} = \frac{\sigma_a a}{\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

所以

$$W_e = \frac{\pi a^2 \sigma_a^2}{\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

(2) 由高斯定律, 求得

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_a r}{2\epsilon} & (0 < r < a) \\ \frac{a^2 \rho_a}{2\epsilon r} & (a < r < b) \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V W'_e dV = \frac{\epsilon}{2} \int_0^a \left(\frac{\rho_a r}{2\epsilon} \right)^2 2\pi r dr + \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \left(\frac{a^2 \rho_a}{2\epsilon r} \right)^2 2\pi r dr \\ &= \frac{\pi \rho_a^2 a^4}{16\epsilon} (1 + 4 \ln \frac{b}{a}) \end{aligned}$$

(3) 由高斯定律, 求得

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho_a r}{2\epsilon} & (0 < r < a) \\ \frac{a^2(\rho_a - \rho_b)}{2\epsilon r} + \frac{\rho_b r}{2\epsilon} & (a < r < b) \end{cases}$$

所以

$$W_e = \int_V W'_e dV = \frac{\epsilon}{2} \int_0^a \left(\frac{\rho_a r}{2\epsilon} \right)^2 2\pi r dr + \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \left[\frac{a^2(\rho_a - \rho_b)}{2\epsilon r} + \frac{\rho_b r}{2\epsilon} \right]^2 2\pi r dr$$

$$= \frac{\pi \rho_a^2 a^4}{16\epsilon} + \frac{\pi \rho_b^2}{16\epsilon} (b^4 - a^4) + \frac{\pi(\rho_a - \rho_b)\rho_b}{4\epsilon} (b^2 - a^2)a^2 + \frac{\pi a^4}{4\pi} (\rho_a - \rho_b)^2 \ln \frac{b}{a}$$

1-9-3 用8 mm厚、 $\epsilon_r=5$ 的电介质片隔开的两片金属盘,形成一电容为1 pF的平行板电容器,并接1 kV 的电源。如果不计摩擦,要把电介质片从两金属盘间移出来,问在下列两种情况下各需做多少功?

- (1) 移动前,电源已断开;
 (2) 移动中,电源一直联着。

解 根据带电体系统中的能量守恒关系:

与带电体相联接的各电源提供的能量 = 电场能量的增量 + 电场力所做的功

(1) 对于电源断开的常电荷系统:

电场力做功 = - (电场能量的增量)

移动前,电容器中的电场能量为

$$W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-12} \times 10^6 = 0.5 \text{ } \mu\text{J}$$

移动后,电容器的电容为

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{1}{5} C_1$$

所以,电容器中的储能为 W_{e2} (注 $q_2 = q_1$, 为常电荷系统)

$$\begin{aligned} W_{e2} &= \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{q_2}{C_2} \right)^2 = \frac{1}{2} C_1 \left(\frac{q_1}{C_1} \right)^2 \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 \left(\frac{C_1}{C_2} \right) = 5 W_{e1} \end{aligned}$$

所以

$$\text{外力做的功} = - (\text{电场力做的功}) = W_{e2} - W_{e1} = 2 \text{ } \mu\text{J}$$

(2) 对于电源一直联着的常电位系统,电场力所做的功在数值上等于电场能量的增量。

因为

$$W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = 0.5 \text{ } \mu\text{J}$$

$$W_{e2} = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} C_1 U_1^2 = \frac{1}{5} W_{e1}$$

所以

$$\text{外力做的功} = - (W_{e2} - W_{e1}) = \frac{4}{5} W_{e1} = 0.4 \text{ } \mu\text{J}$$

1-9-4 一个由两只同心导电球壳构成的电容器,内球半径为 a ,外球壳半径为 b ,外球壳很薄,其厚度可略去不计,两球壳上所带电荷分别是 $+Q$ 和 $-Q$,均匀分布在球面上。求这个同心球形电容器的静电能量。

解 同心球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b-a)}$$

所以,同心球形电容器中的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(b-a)Q^2}{4\pi\epsilon_0 ab}$$

1-9-5 板间距离为 d , 电压为 U_0 的两平行电极, 浸于介电常数为 ϵ 的液态介质中, 如题 1-9-5 图所示。已知介质液体的质量密度是 ρ_m , 问两极板间的液体将升高多少?

解 选取坐标系如图中所示。设液体上升的高度为 h , 电容器极板的宽度为 l , 长度为 S , 则它的电容为

$$C(h) = \frac{\epsilon h S}{d} + \frac{\epsilon_0 (l-h) S}{d}$$

所以, 电容器中的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} C(h) U_0^2 = \frac{S U_0^2}{2d} [\epsilon_0 l + (\epsilon - \epsilon_0) h]$$

液体所受的电场力为

$$f = \frac{\partial W_e}{\partial h} = \frac{U_0^2}{2} \frac{S}{d} (\epsilon - \epsilon_0)$$

这个力应与水平面上的液体的重量相平衡, 即

$$\frac{U_0^2 S (\epsilon - \epsilon_0)}{2d} = \rho_m g d S h$$

所以, 得液体上升的高度为

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) U_0^2}{2 \rho_m g d^2}$$

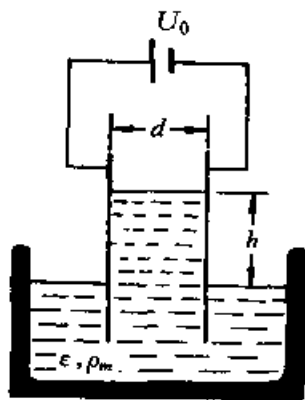
1-9-6 应用虚位移法, 计算教材中例 1-27 平行板电容器中两种介质分界面上每单位面积所受的力。

解

(1) 先讨论题 1-9-6 图(a)。这种情况下, 设介质 ϵ_1 和 ϵ_2 的厚度分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = d$ (d 是平板电容器的两极板间的距离), 则电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 (d - d_1) + \epsilon_2 d_1}$$

所以, 电场能量为



题 1-9-5 图

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 (d - d_1) + \epsilon_2 d_1} U^2$$

则介质分界面上所受的总力为

$$f = \frac{\partial W_e}{\partial d_1} = \frac{1}{2} U^2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_1 \epsilon_2 S}{[\epsilon_1 d + (\epsilon_2 - \epsilon_1) d_1]^2}$$

由于介质 1 和 2 中的电场分别为

$$E_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \quad E_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$$

所以

$$f = \frac{1}{2} E_1 E_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) S = \frac{1}{2} D^2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} S$$

单位面积上所受的力为

$$f' = \frac{f}{S} = \frac{D^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right)$$

这里, f' 的参考方向由介质 ϵ_1 指向介质 ϵ_2 。

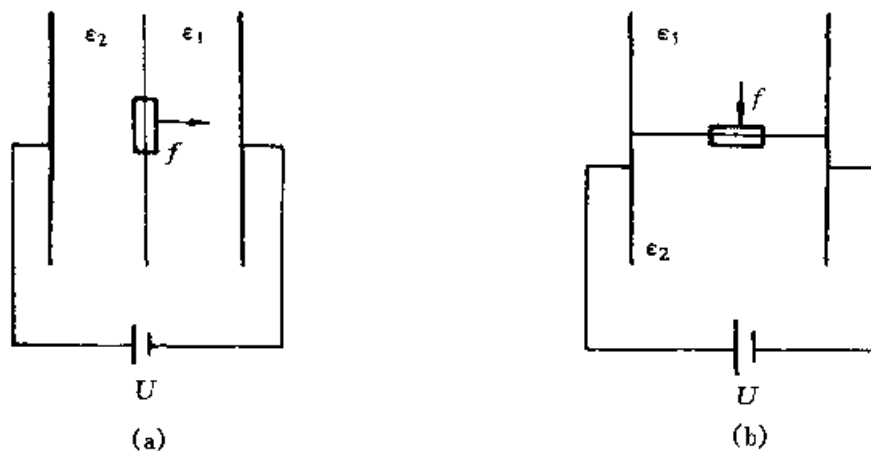
(2) 再看题 1-9-6 图(b)。这种情况下, 两种介质中的 E 是相等的。设介质 ϵ_1 和 ϵ_2 填充极板的面积分别为 $S_1 = l_1 W$ 和 $S_2 = l_2 W$, 且 $l_1 + l_2 = l$ (l 为极板的长度, W 为极板的宽度), 则电容器的电容为

$$C = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d} = \frac{[(\epsilon_2 - \epsilon_1) l_2 + \epsilon_1 l] W}{d}$$

所以, 电场能量为

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} U^2 \frac{[(\epsilon_2 - \epsilon_1) l_2 + \epsilon_1 l] W}{d}$$

则介质分界面上所受的总力为



题 1-9-6 图

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\partial W_{\epsilon}}{\partial l_2} = \frac{U^2}{2} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)W}{d} = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) Wd \\
 &= \frac{1}{2} E^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1) Wd
 \end{aligned}$$

单位面积上所受的力为

$$f' = \frac{f}{S} = \frac{f}{Wd} = \frac{1}{2} E^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

这里, f' 的参考方向由介质 ϵ_2 指向介质 ϵ_1 。

思考题

1-1 试回答下列问题:

(1) 等位面上的电位处处一样, 因此面上各处的电场强度的数值也一样。这句话对吗? 试举例说明。

(2) 某处电位 $\varphi=0$, 因此那里的电场 $E = -\nabla\varphi = -\nabla 0 = 0$ 。对吗?

(3) 甲处电位是 10 000 V, 乙处电位是 10 V 故甲处的电场强度大于乙处的电场强度。对吗?

答 此三问的内容基本一致, 均是不正确的。静电场中电场强度是电位函数的梯度, 即电场强度 E 是电位函数 φ 沿最大减小率方向的空间变化率。 φ 的数值大小与 E 的大小无关, 因此甲处电位虽是 10 000 V, 大于乙处的电位, 但并不等于甲处的电场强度大于乙处的电场强度。在等位面上的电位均相等, 只能说明沿等位面切线方向, 电位的变化率等于零, 因此等位面上任一点的电场强度沿该面切线方向的分量等于零, 即 $E_t = 0$ 。而电位函数沿等位面法线方向的变化率并不一定等于零, 即 E_n 不一定为零, 且数值也不一定相等。即使等位面上 $\varphi=0$, 该面上任一点沿等位面法线方向电位函数的变化率也不一定等于零。例如: 静电场中导体表面为等位面, 但导体表面上电场强度 E 垂直于导体表面, 大小与导体表面各点的曲率半径有关, 曲率半径越小的地方电荷面密度越大, 电场强度的数值也越大。

1-2 电力线是不是点电荷在电场中的运动轨迹(设此点电荷除电场力外不受其它力的作用)?

答 电力线仅表示该线上任一点的切线方向与该点电场强度方向一致, 即表示出点电荷在此处的受力方向, 但并不能表示出点电荷在该点的运动方向, 故电力线不是点电荷在电场中的运动轨迹。

1-3 证明: 等位区的充要条件是该区域内场强处处为零。

证明 若等位区内某点的电场强度不为零, 由 $E = -\nabla\varphi$ 可知 $\nabla\varphi \neq 0$, 即此点的电位函数沿空间某方向的空间变化率不为零, 则在此方向上电位必有变化,

这与等位区的条件矛盾。若等位区内处处电位相等,则等位区内任一点电位函数的空间变化率为零,即任一点的电场强度为零。由此可知命题成立。

1-4 下例说法是否正确?如不正确,请举一反例加以论述。

(1)场强相等的区域,电位亦处处相等。

(2)电位相等处,场强也相等。

(3)场强大处,电位一定高。

(4)电场为零处,电位一定为零。

(5)电位为零处,场强一定等于零。

答 根据电场强度和电位的关系 $E = -\nabla\varphi$ 可知:

(1)不正确。因 E 相等的区域, φ 必为空间坐标的函数。如充电的平行板电容器内场强相等,但其内部电位却是变化的。

(2)不正确。因 φ 相等处,不等于 $\nabla\varphi$ 相等。如不规则带电导体表面上各点电位均相等,但表面上各点处的场强并不相等。

(3)不正确。因 E 大的地方,只表明 φ 的梯度大,而不是 φ 值高。如上例中导体尖端处场强大,但表面上各处电位相等并不一定高,电位值与参考点所选位置有关。

(4)不正确。因 $E=0$,说明 $\nabla\varphi=0$,即 $\varphi=C$ 。如高电压带电导体球,其内部电场等于零,但该球内任一点的电位却不为零,而为某一常数。

(5)不正确。因 $\varphi=0$ 处,不一定 $\nabla\varphi=0$ 所以 E 不一定为零。如充电平行板电容器中,一个极板接地电位为零,但该极板相对另一极板的表面上电场强度不为零。

1-5 两条电力线能否相切?同一条电力线上任意两点的电位能否相等?为什么?

答 电力线的疏密表示电场强度的弱或强,电力线越密,说明该处的场强越大。因此,若两条电力线相切,在切点处两条电力线无限靠近,即表示切点处的场强趋于无限大,这是不符合实际的,所以电力线不能相切。

因为 $\varphi = \int E dl$,说明同一条电力线上任意两点的电位不能相等,沿电力线方向电位在减小。

1-6 不同电位的两个等位面能否相交或相切?同一等位面内任意两点的场强是否一定相等?场强在等位面上的切向分量是否一定等于零?电位在带电面两侧会不会突变?

答 不同电位的两个等位面不能相交或相切,否则在交点或切点上的电位将有两个不同的电位值。

第2,3问可参见思考题1-1的解答。由电位函数在分界面上的衔接条件

$\varphi_1 = \varphi_2$ 可知, 电位函数在带电面两侧不会突变。

1-7 下列叙述是否正确? 在什么情况下正确? 什么情况下不正确? 试举例说明之。

(1) 接地的导体都不带电。

(2) 一导体的电位为零, 则该导体不带电。

(3) 任何导体, 只要它所带的电荷量不变, 则其电位也是不变的。

答 (1) 不一定。当接地导体周围空间无其它带电体存在(即其周围无电场分布), 该导体不带电。否则接地导体仍会带电。如点电荷附近的接地导体球, 其上有负感应电荷。

(2) 不一定。上例即可说明这点。

(3) 不一定。若该导体系统周围空间的电场不发生变化, 其电位可以不改变。但若周围空间带电体的位置、形状、带电量等发生变化, 即周围电场发生变化, 则该导体虽然所带的电荷量不变, 其电位也会改变。此外参考点改变, 电位也会改变。

1-8 在一不带电的导体球内, 挖出一偏心的球形空腔。

(1) 若在空腔中心放一点电荷 q , 试问腔表面和球外表面上的电荷及腔内, 腔外各处的场强分别如何?

(2) 若 q 不在空腔的中心, 则腔表面和球外表面的电荷怎样分布? 球外的场强怎样分布?

(3) 若点电荷 q 放在空腔中心, 但在球外也放一点电荷, 则腔表面和球表面上电荷怎样分布?

答 (1) 空腔表面均匀分布与点电荷电量相等但异号的面电荷。导体球的外表面均匀分布与点电荷电量相等且同号的面电荷。腔内空间的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} \mathbf{e}_{r_1}$$

式中 r_1 为空腔中心(即点电荷所在处)到腔内空间中任一点的距离。导体球内各处电场强度均为零。导体球外电场是均匀带电导体球在空间产生的电场

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

式中 r 为导体中心到球外空间任一点的距离。

(2) 点电荷 q 不在空腔中心时, 则空腔表面分布着与点电荷 q 电量相等且异号的非均匀的面电荷, 在靠近点电荷附近的表面上, 电荷分布的面密度大。此时导体球外表面上的电荷分布及球外空间中场的分布与(1)问中此问题相同。

(3) 若点电荷 q 仍放在空腔中心, 球外也放一点电荷, 则空腔表面上的电荷分布与(1)问中此问题相同。此时导体球外表面上电荷分布不均匀, 靠近球外点

电荷处,分布着非均匀的与球外点电荷异号的面电荷;远离球外点电荷处,分布着非均匀的与球外点电荷同号的面电荷。但导体球外表面上分布的面电荷总量仍与空腔内点电荷 q 的电量相等且同号。

1-9 将一接地的导体 B 移近一带正电的孤立导体 A 时, A 的电位升高还是降低?(从能量观点分析)

答 由于静电感应,接地导体球 B 的外表面带有分布不均匀的负电荷,在电场力的作用下, B 会移近 A , A 为孤立导体,与外界无联系。因此电场力做功,电场能量要减小, A 的电位要降低。

1-10 两绝缘导体 A 和 B 带等量异号电荷,现把第三个不带电的导体 C 插入 A 、 B 之间(不与它们接触),试问电位差 $\varphi_A - \varphi_B$ 是增大还是减小?(从能量观点分析)。

答 导体 C 的外表面将感应分布不均匀的面电荷。靠近 A 导体的表面带负电,靠近 B 导体的表面带正电。插入的过程中,电场力做功, A 、 B 与外界无联系(绝缘导体),所以电场能量要减小。故 A 、 B 之间的电位差 $\varphi_A - \varphi_B$ 要减小。

1-11 若把一个带电体放在一个金属壳附近,这带电体在金属壳内单独产生的场强是否为零?金属壳的静电屏蔽作用是怎样产生的?

答 带电体在金属壳内单独产生的场强不为零。由于静电感应,金属壳中的自由电荷在电场力的作用下,在金属壳的外表面将重新分布,在靠近带电体的表面上产生与带电体异号的电荷,在远离带电体的另一侧表面上感应与带电体同号的电荷,这些电荷称之为感应电荷,它们在金属壳内也要产生电场,且与带电体在金属壳内单独产生的电场的场强之和为零,金属壳外表面以内的自由电荷不再受电场力的作用,达到静电平衡,这时金属壳内合电场为零。这就是金属壳的静电屏蔽作用。

1-12 若把一个带正电的导体 A 移到一个中性导体 B 附近,导体 B 的电位是升高还是降低? A 的电位是升高还是降低?为什么?

答 设无穷远处电位为零。 A 移近中性导体 B 时,由于静电感应,导体 B 中的自由电荷在电场力作用下移动。靠近 A 导体的侧表面将产生负电荷,远离 A 导体的另一侧表面将产生正电荷。电力线由 A 上正电荷发出,一部分将终止在 B 导体表面上的负电荷处,而 B 表面上正电荷发出的电力线必然终止到无限远处,这样导体 B 的电位就介于 A 与参考点之间。所以 B 的电位升高了,而 A 的电位将降低,理由请见思考题 1-9 的解答。

1-13 有一圆形气球,电荷均匀分布在其表面上,在此气球被吹大的过程中,球内外的场强如何变化?

答 在气球膨胀的过程中,球内的场强始终为零。球外的场强也不发生改

变,如同将球面的面电荷量值变为点电荷,置于球心处,在球外产生的电场。只有因为球的膨胀而从球外变为球内的空间,其场强由原来的量值变为零。

1-14 在一个中性导体球壳的中心放一电荷量为 q 的点电荷,这时球壳内外表面各带多少电荷量?若把点电荷从球壳中心移到壳内其它点,球壳内外表面上的电荷分布变不变?球壳内外的场强分布变不变?

答 点电荷 q 放在球心时,球壳内表面带有均匀分布的 $(-q)$ 的电量,外表面带有均匀分布的 q 电量。若把点电荷移至壳内其它点,球壳外表面电荷分布不变,球壳内表面分布的电荷仍是 $(-q)$ 的电量,但分布不均匀,靠近点电荷的内表面上的电荷面密度大于远离点电荷的内表面上的电荷面密度。球壳外的场强分布不变,仍为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$ 。球壳内空间的电场分布改变了,可由镜像法求得。

1-15 电介质的极化和导体的静电感应有何不同?如何考虑电介质和导体在静电场中的效应?自由电荷与束缚电荷的区别是什么?

答 自由电荷在电场力作用下可以自由移动,而束缚电荷虽然也受电场力作用,但不能自由移动。导体中含大量自由电荷,放到外电场中将产生静电感应。介质中含大量束缚电荷,放到外电场中将产生极化。两者由于电荷的重新分布都形成一个附加电场。要考虑电介质和导体在静电场中的效应,就是所产生的附加电场在静电场中的效应,即导体表面感应电荷产生的附加电场的作用及电介质的束缚电荷产生的附加电场的作用。电介质极化所产生的附加电场在电介质内部起到削弱外电场的作用,而导体静电感应产生的附加电场在导体内部与外电场处处相抵消。因此导体内的合电场为零,导体为等位体,而电介质内部的合电场不为零。

1-16 说明 E 、 D 、 P 三个矢量的物理意义。 E 与介质有关, D 与介质无关的说法对吗?

答 E 是电场强度,其物理意义在于是从力的角度描述静电场特性的物理量。其定义为静电场中任一点单位正电荷所受到的电场力。

D 是电位移矢量,是一个辅助物理量,其本身并没有明确的物理意义,然而引入它可以方便地表达出静电场中任一点的场量与场源之间的关系,即电位移矢量的散度等于该点分布的自由电荷体密度。

P 是电极化强度,其物理意义是描述电介质中任一点电极化强弱的物理量。

E 与介质有关, D 与介质无关的说法是不对的。 E 和 D 的分布均与介质有关。但是穿过闭合曲面的 D 通量仅与该闭合面所包围的自由电荷有关,而与介质中的束缚电荷无关。

1-17 若电场中放入电介质后,自由电荷分布未变,电介质中的场强大小是否一定比真空中的场强小?

答 不一定。只能说电介质中的场强比原来没放电介质时同一处真空中的场强小。

1-18 有人说,均匀介质极化后不会产生体分布的极化电荷,只是在介质的表面上才出现面分布的极化电荷,若均匀介质是无限大的,那么它的表面在无限远处,那里的极化电荷对考察点的场无影响,因此均匀的无限大的电介质与真空完全相同。你是否同意这种看法。

答 这种看法是错误的。举一反三例说明。假设均匀介质是无限大的命题成立,要使介质极化,必要有外加电场,而外加电场是由空间分布的自由电荷产生的,这些自由电荷会分布在均匀介质中,使均匀介质内部存在极化电荷体密度,故与真空的情况不能相同。

1-19 均匀介质的极化与均匀极化的介质这两个概念是否有区别?哪种情况(如果有的话)可能出现体分布的极化电荷?

答 均匀介质的极化是指电介质内各点极化性质相同的电介质在外电场被极化。均匀介质放在不均匀电场中也会产生非均匀极化。均匀极化的介质是指介质内部被外电场均匀极化了,表现为极化强度 \mathbf{P} 为常数。这里的介质并非一定为均匀介质,但介质内部是均匀极化。

对于均匀介质而言,如果介质内有自由电荷体密度分布,则会出现体分布的极化电荷。对非均匀介质而言,即使是均匀极化,其内部也会出现体分布的极化电荷。

1-20 证明:任何形状的导体空腔当其内部无电荷时,腔内场强处处为零。

证明 在导体空腔内任选一点 P ,以内部为范围,对任意一个包围 P 点的闭合曲面,由高斯定律均有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

则这只有被积函数 $E = 0$ 。命题成立。

1-21 以下各式哪些是普遍成立的?哪些是有条件的?

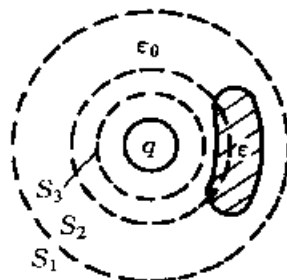
$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = q_P$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad \sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$$

答 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q, -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = q_P, \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 这3式是普遍成立的。 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ 这2式只有当电介质为各向同性介质时才能成立。 $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_n$ 只有在电介质与真空的分界面上才能成立。

1-22 有带电为 q 的球体,附近有一块介电常数为 ϵ 的介质,如思考题 1-22 图所示。请问下列公式成立否?



思考题 1-22 图

$$\oiint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\oiint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\oiint_{S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\oiint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

答 $\oiint_{S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, $\oiint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, $\oiint_{S_3} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ 及 $\oiint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ 成立。 $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$ 和 $\oiint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ 不成立,因为没有考虑介质的影响。

1-23 已证明,在两种不同电介质的分界面上,电场强度的法向分量不连续,即 $E_{1n} \neq E_{2n}$,能求出 $E_{2n} - E_{1n}$ 的值吗? 并由此说明在两种介质的分界面上,电场强度产生突变的原因。

答 利用两种不同电介质分界面上的衔接条件

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

根据 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 有

$$(\epsilon_0 E_{2n} + P_{2n}) - (\epsilon_0 E_{1n} + P_{1n}) = \sigma$$

所以

$$\epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \sigma - (P_{2n} - P_{1n}) = \sigma + \sigma_p$$

由上式可以求出 $E_{2n} - E_{1n}$ 。由此可以看出,在两种介质的分界面上,电场强度产生突变的原因是在分界面上存在自由电荷面密度和束缚电荷面密度。

1-24 试说明:满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的电位函数 φ 无极大值。

答 若空间某点电位为极大值,则该点 φ 对 x, y, z 的一阶偏导数均为零,二阶偏导数 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ 均为负值。但这就不可能满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

因此 φ 无极大值。同理可证明 φ 亦无极小值。因此, 满足 $\nabla^2 \varphi = 0$ 的电位函数 φ 不可能出现极值。在无电荷的空间, 可能出现 φ 对 x, y, z 的一阶偏导数为零的点, 也就是电场为零的点, 但 φ 对三个坐标的二阶偏导数必然有正有负。这也是静电场中的极值定理。

1-25 举例说明边界条件和分界面上的衔接条件在静电场分析计算中的作用。

答 举一个简单例子加以说明。平行板电容器中充满两层均匀介质, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 厚度分别为 d_1 和 d_2 , 介质分界面与极板平行, 已知两极板间的电压为 U_0 , 求两种介质中的电位函数与电场强度。在忽略端部边缘效应的情况下, 两种介质中的电位函数 φ_1, φ_2 分别满足拉普拉斯方程, 由对称性可知 φ_1, φ_2 仅与距板的垂直距离 (设为 x 坐标) 有关。即

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0$$

上式的通解为 $\varphi_1 = c_1 x + c_2, \varphi_2 = c_3 x + c_4$ 。要确定通解中的待定系数, 就要利用边界条件和分界面上的衔接条件

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Big|_{x=0} &= U_0 & \varphi_2 \Big|_{x=(d_1+d_2)} &= 0 \\ \varphi_1 \Big|_{x=d_1} &= \varphi_2 \Big|_{x=d_1} & \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=d_1} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=d_1} \end{aligned}$$

由此可得

$$c_2 = U_0, c_4 = -c_3(d_1 + d_2), c_1 d_1 + U_0 = c_3 d_1 - c_3(d_1 + d_2), c_3 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} c_1$$

$$\varphi_1 = -\frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} x + U_0$$

$$\varphi_2 = -\frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} x + \frac{\epsilon_1 (d_1 + d_2) U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \mathbf{e}_x = -\frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \mathbf{e}_x$$

总之, 要确定泊松方程或拉普拉斯方程通解的待定系数, 必须利用场域的边界条件和分界面上的衔接条件。

1-26 举例说明叠加原理在静电场分析计算中的应用。

答 在使用直接积分法求有限分布电荷系统在均匀介质空间产生的静电场时, 先求出元电荷所产生的电场, 利用叠加原理可得出体电荷或面电荷或线电荷

系统所产生的电场, 即 $\mathbf{E} = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r$ 。

再如在用分离变量法求解拉普拉斯方程时,利用叠加原理,把对应分离常数 k_n^2 的可能值(为零或大于零或小于零)的解进行线性组合,作为电位函数的一般解等。

1-27 唯一性定理在静电场的分析计算中起什么作用?试举例说明。

答 静电场的唯一性定理表明,在分区均匀的场域内,凡满足微分方程 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ (或 $\nabla^2 \varphi = 0$),并满足场域上的边界条件和不同介质分界面上的衔接条件的电位函数 φ ,是给定静电场的唯一解。该定理指出了静电场具有唯一解的充要条件。由此,可以采用任何一种能求出静电场问题的求解的方法,只要得到的解满足上述的条件,这个解就是我们要求的静电场的解。例如我们采用镜像法、电轴法等,就是以唯一性定理为理论根据的。另外,可以应用唯一性定理来检验解的正确性。

1-28 请归纳静电场的分析计算中存在哪些基本问题?可能碰到的边界条件有几种?解决静电场问题有哪些基本方法?

答 静电场的分析计算可分为如下两类基本问题:

第一类问题是给定全空间的电荷分布,求电位和电场的分布。第二类问题是给定空间某一区域内的电荷分布,同时给定该区域边界上的电位或电场,即边界条件,在这种条件下求解区域内的电位和电场分布。这类问题也称为边值问题。

静电场中可能碰到的边界条件有:

(1) 第一类边界条件,即给定边界面 S 上的电位值 $\varphi|_S$;

(2) 第二类边界条件,即给定边界面 S 上电位函数的法向导函数值 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$;

(3) 第三类边界条件,即给定边界面 S 上电位函数值及其法向导数的线性组合 $\varphi + f(S)\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 。

另外,还有不同介质分界面上的衔接条件

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ 和 } \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \sigma$$

对于第一类问题的求解,可以应用静电场中的积分方程,即

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r \quad \varphi = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon r}$$

对于某些对称场的问题,可直接应用高斯定律 $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ 求解。

对于第二类边值问题的求解,一是直接求解微分方程,其中解析计算方法主要有直接积分法(一维问题)和分离变量法(二维和三维问题),数值计算法有差

分法、有限元法、模拟电荷法和矩量法等。二是间接计算法,如镜像法,电轴法。

1-29 电缆为什么要制成多层绝缘的结构(即在内、外导体间用介电常数各不相同的多层介质)?各层介质的介电常数的选取遵循什么原则?为什么?

答 在电缆内、外导体之间施加同样电压的情况下,对于多层绝缘结构,其电介质中电场强度的最大值比单层绝缘情况下的电场强度的最大值小,这样多层绝缘的电缆可以承受更大的电压。如果各层介质的介电常数选择为 $\epsilon_1 \rho_1 = \epsilon_2 \rho_2 = \epsilon_3 \rho_3 = \dots$ (ρ_i 为 i 层介质的最小半径),则在各层电介质中,场强的最大值均相等,且均小于单层绝缘情况下的电场强度的最大值。

若各层电介质的击穿场强不同,这时既要考虑介质的介电常数的大小,还要考虑介质排列的顺序及厚度的选取。

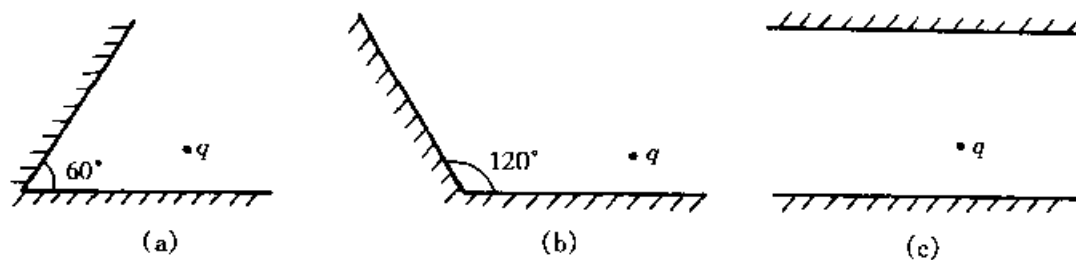
1-30 确定镜像电荷的分布主要有哪两点?已学过的有哪几种典型的镜像问题?并总结之。说明镜像电荷是代替哪些实际存在的电荷分布。

答 首先镜像电荷必须位于待求解的场域(简称有效区域)之外,保证有效区内的电荷分布不变,也就是电位方程不变。另一点是镜像电荷的个数、位置,电荷量的大小和符号的选取要能等效替代有效区以外区域的电荷和有效区场域边界上复杂分布的电荷的作用,以保证边界条件不变,已学过的典型的镜像问题有:

(1)如点电荷对无限大导体平面的镜像;(2)球形导体边界问题,如点电荷对导体球的镜像;(3)圆柱形导体边界问题(也称电轴法);(4)无限大平面介质边界问题。

在上述问题中,镜像电荷主要用以替代有效区场域边界上实际存在的感应电荷或束缚电荷的分布或作用。

1-31 以下各小题(见思考题 1-31 图)能否用镜像法求解?如能,画出其镜像电荷的位置并标明数值;如不能,说明理由。



思考题 1-31 图

答 分界面均按无穷大导体平面对待。对于图(a), $\alpha = 60^\circ$, 故 $n = \frac{180^\circ}{\alpha} = 3$, 有 $(2n-1) = 5$ 个镜像。其位置与平面镜成像的方法相同,数值均为 q , 符号

每成一次像加个负号(图略)。对于图(b),不能用镜像法求解。因为像电荷不能出现在有效区内,而图(b)中不能避免这点,故不能采用镜像法。(c)可选择无穷个镜像,但镜像电荷距有效区的距离越来越远。当问题的精确度要求一定时,可舍去远处不足以影响精度的像电荷,达到满足问题要求的近似解。

1-32 电容量一定的电容器所储存的电能有无上限?为什么?

答 电容量一定的电容器所储存的电能为 $W_e = \frac{1}{2}CU^2$, 其中 U 为两板之间的电压。若要 W_e 不断增加, 则电容器极板间电压 U 要不断增加, 电容器内电介质中的电场强度就会不断增加, 当超过电介质强度后, 电容器将会被击穿。

1-33 说明多导体系统中部分电容与等值电容的含义, 并以计及地面影响的二线输电线为例说明两者的区别。

答 多导体系统中, 一个导体在其它导体的影响下, 与另一导体构成的电容称之为部分电容。而等值电容是指多导体系统中任意两导体间的入端电容。在数值上可以理解为把这两导体视为电容器的两个极板, 若两极板的电压为 U , 则两极板所带电荷分别为 $\pm q$, 则将 $\frac{q}{U}$ 叫做这两导体间的等值电容。

计及地面影响的二线输电线可视为三导体静电系统。若以地面为 0 号导体, 则 C_{10}, C_{20}, C_{12} 为该系统的三个部分电容。1, 2 导体之间的部分电容为 C_{12} , 而 1, 2 导体之间的等值电容 $C_{12\text{等}} = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}}$, 这是 1, 2 导体之间的入端电容, 是部分电容构成的电容网络的组合。若 1, 2 导体间的电压为 U , 则可认为其等值的一个电容器, 极板上的电荷量为 $C_{12\text{等}}U$ 。

1-34 静电场中储存的能量可从哪几个方面来计算, 它们各适用于什么情况? 是否因为 $W'_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2$, 故当电容器中介电常数 ϵ 增加后, 电场能量也增加?

答 $W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \times \frac{Q^2}{C}$, 适用于计算电容器的储能。

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS$$

适用于空间中有有限体电荷和面电荷分布情况下的计算, 其中积分域 V, S 是电荷分布的区域。

$$W_e = \sum_k \frac{1}{2} q_k \varphi_k$$

适用于点电荷系统或导体系统储能的计算。

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$$

说明静电能是储存在电场之中,适用于计算区域 V 内 \mathbf{E} , \mathbf{D} 分布已知的情况。

静电能量密度 $W'_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ 中, ϵ 增大时,由于 \mathbf{E} 的分布也会发生变化,因此电场能量并非一定会增加。

1-35 能否把 $\frac{1}{2} \rho \varphi$ 当作电场能量的体密度? 为什么?

答 不能。首先在公式 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ 中, V 是电荷分布的区域,并非电场存在的区域。在 $\rho=0$ 的空间区域内,只要电场存在 ($\mathbf{E} \neq 0$),该处就存在电场能量,其 $W'_e \neq 0$ 。而该处 $\frac{1}{2} \rho \varphi = 0$,故不能把 $\frac{1}{2} \rho \varphi$ 当作电场能量体密度。

1-36 静电能量计算公式 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ 和 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ 之间有什么样的联系? 两者是否一致?

答 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ 是指分布在 V 域中的体电荷在整个空间中产生的静电场所具有的静电能量。 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$ 是指具有电场强度 \mathbf{E} 和电位移矢量 \mathbf{D} 的静电场在某个区域 V 内所具有的静电能量。如果空间只有分布在 V 域中的体电荷产生的电场,而后式中的 V 又表示整个电场的场域空间,则此二式是一致的。

1-37 有人说,介质存在时静电能量等于没有介质的情况下,把自由电荷和极化电荷(也看作自由电荷)从无穷远搬到场中原来位置过程中外力所作的功。这种说法对吗? 为什么?

答 电介质对电场的影响,可归结为极化后极化电荷在真空中所起的作用。若把极化电荷也视为自由电荷,在忽略极化损耗的情况下,从能量守恒的观点看,可以认为介质存在时的静电能量等于没有介质情况下把自由电荷和极化电荷从无穷远搬到场中原来位置的过程中外力所作的功。

1-38 设平行板电容器始终和电源相连。今把其中一块极板相对另一块极板向外平移一定距离,在这个过程中电场力作正功还是作负功? 电场能量是增加还是减少? 以电容器为系统,这系统的能量是否守恒? 能量变化的部分到哪去了?

答 在此过程中电场力作负功,即外力克服电场力作功,同时电容器内部静电场能量减少,以电容器为系统能量不守恒,电场能量变化的部分对电源作功了。

1-39 应用法拉弟观点说明静电力,并举例说明。将一不带电的导体球放入不均匀电场中,试问该球受力方向如何? 为什么?

答 静电场中的每一段电通密度管沿其轴向要受到纵张力,而在垂直轴向

方向则要受到侧压力。纵张力和侧压力的量值相等,都是 $\frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$ 。这就是法拉弟对静电力的看法。应用法拉弟的观点,分析一个不带电的导体球放入不均匀电场中的情况,由于导体球内部电场为零,电力线与球的外表面垂直相交。在垂直力线的方向上,由于对称性,其侧压力相互抵消。在沿力线的方向上,由于导体内部电场为零,所以有在导体球表面上对球的纵张力,外电场强处的作用力大于外电场弱处的作用力。故导体球将沿电力线(不是沿场强方向),由场强小处向场强大处运动。

习 题

1-1 由方程 $x^3 + y^2 + z = 1\,000$ (其中 x, y 和 z 皆为正值) 决定的曲面是一个电位为 200 V 的等位面。如果已知曲面上 P 点(7 m, 25 m, 32 m) 的 $|\mathbf{E}| = 50\text{ V/m}$, 求该点上的 \mathbf{E} 。

解 在等位面上任一点, 电场强度 \mathbf{E} 与等位面相垂直。电场强度 \mathbf{E} 沿等位面的法向方向, 将曲面 $x^3 + y^2 + z = 1\,000$ 化成如下形式:

$$z = f(x, y) = 1\,000 - x^3 - y^2$$

容易求得, 曲面在点(7 m, 25 m, 32 m) 处的法向方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-f'_x(x, y)}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}} \bigg|_{(7, 25, 32)} = 0.947$$

$$\cos\beta = \frac{-f'_y(x, y)}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}} \bigg|_{(7, 25, 32)} = 0.322$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}} \bigg|_{(7, 25, 32)} = 0.006\,4$$

又知曲面 P 点(7 m, 25 m, 32 m) 处的 $|\mathbf{E}| = 50\text{ V/m}$, 故该点上的

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= |\mathbf{E}|(\cos\alpha\mathbf{e}_x + \cos\beta\mathbf{e}_y + \cos\gamma\mathbf{e}_z) \\ &= (47.3\mathbf{e}_x + 16.1\mathbf{e}_y + 0.322\mathbf{e}_z) \text{ V/m}\end{aligned}$$

1-2 两半径为 a 和 b ($a < b$) 的同心导体球面间电位差为 V_0 。问: 若 b 固定, 要使半径为 a 的球面上场强最小, a 与 b 的比值应是多少?

解 由高斯定律, 容易求得同心球面间任一 r 处的电场强度 E 为

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}$$

所以

$$V_0 = \int_a^b \frac{qdr}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

从中解得

$$\frac{q}{4\pi\epsilon} = \frac{V_0 ab}{b-a}$$

即

$$E(r) = \frac{ab}{b-a} \frac{V_0}{r^2}$$

半径为 a 的球面上的场强为

$$E(a) = \frac{bV_0}{(b-a)a}$$

当 b 和 V_0 一定时, $E(a)$ 随 a 不同而变化, 但不是 a 的单调函数, 它存在极值。为了求出 a 取什么数值时, $E(a)$ 最小, 则令

$$\frac{dE(a)}{da} = 0$$

由此可得

$$2a - b = 0$$

所以

$$a = \frac{b}{2}$$

即 a 与 b 的比值应为 0.5。

1-3 具有两层同轴介质的圆柱形电容器, 内导体的直径为 2 cm, 内层介质的相对介电常数 $\epsilon_{r1} = 3$, 外层介质的相对介电常数 $\epsilon_{r1} = 2$, 要使两层介质中的最大场强相等, 并且内层介质所承受的电压和外层介质的相等, 问两层介质的厚度各为多少?

解 设两层介质的交界面半径为 a , 外导体内半径为 b , 且内、外导体表面单位长度上的电荷分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$, 则由高斯定律可求得介质 ϵ_1 和介质 ϵ_2 中的电场分别为

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\rho} e_\rho = \frac{\tau}{6\pi\epsilon_0\rho} e_\rho$$

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\rho} e_\rho = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\rho} e_\rho$$

根据题意, 要使两层介质中的 E_{\max} 相等, 由于

$$E_{1\max} = \frac{\tau}{6\pi\epsilon_0 \times 1 \times 10^{-2}}, \quad E_{2\max} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a}$$

故

$$E_{1\max} = E_{2\max}$$

解之, 得

$$a = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m} = 1.5 \text{ cm}$$

内、外层介质分别承受的电压为

$$U_1 = \int_{10^{-2}}^{1.5 \times 10^{-2}} \frac{\tau}{6\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\tau}{6\pi\epsilon_0} \ln 1.5$$

$$U_2 = \int_{1.5 \times 10^{-2}}^b \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{1.5 \times 10^{-2}}$$

根据题意,要使两层介质承受的电压相等,即 $U_1 = U_2$,故

$$\frac{\tau}{6\pi\epsilon_0} \ln 1.5 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{1.5 \times 10^{-2}}$$

解之得

$$b = 1.96 \text{ cm}$$

最后,得

$$\text{介质 1 的厚度: } a - 1.0 = 1.5 - 1.0 = 0.5 \text{ cm}$$

$$\text{介质 2 的厚度: } b - a = 1.96 - 1.5 = 0.46 \text{ cm}$$

1-4 用双层电介质制成的同轴电缆如题 1-4 图所示;介电常数 $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$;内、外导体单位长度上所带电荷分别为 τ 和 $-\tau$ 。

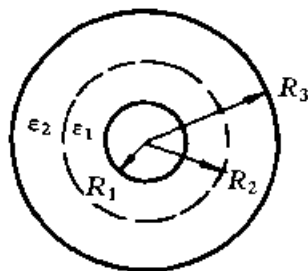
(1)求两种电介质中以及 $\rho < R_1$ 和 $\rho > R_3$ 处的电场强度与电通密度;

(2)求两种电介质中的电极化强度;

(3)问何处有极化电荷,并求其密度。

解 (1)应用高斯定律,不难求得电通密度为

$$\mathbf{D} = \begin{cases} 0 & (\rho < R_1) \\ \frac{\tau}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\rho & (R_1 < \rho < R_3) \\ 0 & (\rho > R_3) \end{cases}$$



题 1-4 图

电场强度 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}$, 故

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (\rho < R_1) \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1\rho} \mathbf{e}_\rho = \frac{\tau}{8\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho & (R_1 < \rho < R_2) \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_2\rho} \mathbf{e}_\rho = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho & (R_2 < \rho < R_3) \\ 0 & (\rho > R_3) \end{cases}$$

(2)由 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 得两种电介质中的电极化强度为

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{3\tau}{8\pi\rho} \mathbf{e}_\rho & (R_1 < \rho < R_2) \\ \frac{\tau}{4\pi\rho} \mathbf{e}_\rho & (R_2 < \rho < R_3) \end{cases}$$

(3)内、外导体圆柱表面上和两种电介质交界面上有极化电荷,它们分别是

$$\text{在 } \rho = R_1 \text{ 处: } \sigma_p = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{e}_\rho) = \frac{-3\tau}{8\pi R_1}$$

$$\text{在 } \rho = R_3 \text{ 处: } \sigma_p = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{e}_\rho) = \frac{\tau}{4\pi R_3}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } \rho = R_2 \text{ 处: } \sigma_p &= \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{e}_\rho + \mathbf{P}_2 \cdot (-\mathbf{e}_\rho) \\ &= \frac{3\tau}{8\pi R_2} - \frac{\tau}{4\pi R_2} = -\frac{\tau}{8\pi R_2} \end{aligned}$$

1-5 一平行板电容,极板面积 $S = 400 \text{ cm}^2$,两板相距 $d = 0.5 \text{ cm}$,两板中间的一半厚度为玻璃所占,另一半为空气。已知玻璃的 $\epsilon_r = 7$,其击穿场强为 60 kV/cm ,空气的击穿场强为 30 kV/cm 。当电容器接到 10 kV 的电源上时,会不会被击穿?

解 因为极板面积较大,而板间距离相对很小,因此可忽略边缘效应,作为无限大平行板电容器中的电场来处理。又由于两介质分界上无自由电荷分布,所以 $D_1 = D_2$,即

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \\ E_2 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 7E_1 \end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{2}(E_1 + E_2) = \frac{d}{2}(E_1 + 7E_1) = 4dE_1 = U_0$$

得

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{U_0}{4d} = \frac{10}{4 \times 0.5 \times 10^{-2}} \text{ kV/m} = 5 \text{ kV/cm} \\ E_2 &= 7E_1 = 35 \text{ kV/cm} \end{aligned}$$

可见空气中的场强 $E_2 = 35 \text{ kV/cm}$ 超过了其击穿场强 30 kV/cm ,因此空气将被击穿,这样 10 kV 的电压将全部加在玻璃上,这时场强为 $E_1 = U_0/(d/2) = 40 \text{ kV/cm}$,但仍小于玻璃的击穿场强,因此玻璃部分不会被击穿。

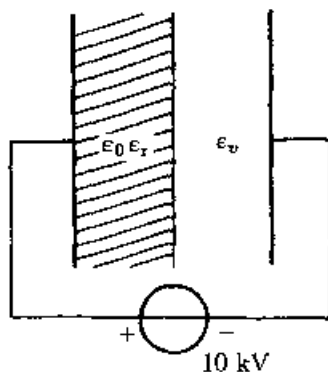
1-6 有一平行板电容器,两极板距离为 $AB = d$,中间平行地放入两块薄金属片 C, D ,且 $AC = CD = DB = d/3$ (见题 1-6 图),如将 A, B 两板充电到电压 U_0 后,拆去电源,问:

(1) AC, CD, BC 间电压各为多少? C, D 片上有无电荷? AC, CD, DB 间电场强度各为多少?

(2) 若将 C, D 两片用导线联结,再断开,重答(1)问;

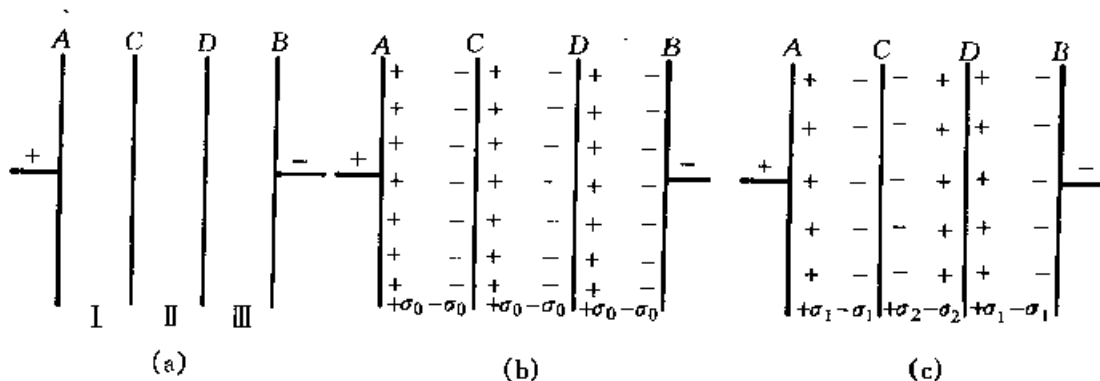
(3) 若充电前先联结 C, D ,然后依次拆去电源和 C, D 的联结线,再答(1)问;

(4) 若继(2)之后,又将 A, B 两板用导线短接,再断开,重新回答(1)问。



题 1-5 图

解 忽略边缘效应,作为均匀带电的无限大平行板电容器来处理,各区域均为均匀电场,方向垂直于极板。



题 1-6 图

(1) 充电到电压 U_0 后, $E_1 = E_2 = E_3$, 且

$$E_1 \frac{d}{3} + E_2 \frac{d}{3} + E_3 \frac{d}{3} = U_0$$

因此,有

$$E_1 d = U_0$$

所以

$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{U_0}{d}$$

$$U_{AC} = U_{CD} = U_{DB} = E_1 \frac{d}{3} = \frac{U_0}{3}$$

各极板上的带电情况如题 1-6 图(b)所示,有

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_0 U_0}{d}$$

(2) 若将 C, D 板用导线联结, C, D 两板内侧的 $+\sigma_0$ 与 $-\sigma_0$ 将中和,有

$$U_{CD} = 0 \quad \text{和} \quad E_2 = 0$$

这样, C, D 板内侧的 $+\sigma_0$ 与 $-\sigma_0$ 将全部中和掉,而其它部分的电荷则由于电场的作用以及电荷守恒(这时电源已拆去)都不变化。再断开联结线时也不会变化,即有

$$E_1 = E_3 = \frac{U_0}{d}$$

$$U_{AC} = U_{DB} = \frac{U_0}{3}$$

$$U_{BC} = -(U_{CD} + U_{DB}) = -\frac{U_0}{3}$$

而 A 板、 B 板、 C 板和 D 板外侧的电荷也都保持不变。

(3) 由于在联结 C, D 时接有电源, 电源的作用将强迫 A, B 板间电压 U_{AB} 保持在 U_0 ; C, D 板被短接, 强迫 $U_{CD} = 0$ 。显然, $E_2 = 0$, 但同时为了又满足 $U_{AB} = U_0$ 的条件, 必须使 E_1 和 E_3 增大, 也即相应的电荷密度由 σ_0 增大到 σ_1 。这时, 有

$$E_1 = E_3 \quad \text{和} \quad E_1 \frac{d}{3} + E_3 \frac{d}{3} = U_0$$

所以

$$E_1 = E_3 = \frac{3U_0}{2d}, \quad E_2 = 0$$

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1 = \frac{3}{2} \times \frac{\epsilon_0 U_0}{d}$$

$$U_{BC} = -(U_{CD} + U_{DB}) = -\frac{U_0}{2}$$

C, D 板内侧没有电荷分布, 而 A 板、 B 板、 C 板和 D 板外侧的电荷密度都由(1)问中的 σ_0 增大到 σ_1 。由于电场力的作用, 依次拆去电源与 C, D 间的连线时, 情况不再变化。

(4) 若在继(2)问之后将 A, B 短接, 由于在(2)的情况下, $U_{AB} = \frac{2}{3} U_0 \neq 0$, 因此 A, B 两板上的电荷将进行中和达到 $U_{AB} = 0$ 的强制条件。而 C, D 板由于与外界没有导线联接, 电荷守恒, 各自板上的总电荷保持不变, 但会在内、外侧板面间发生电荷转移。达到 $U_{AB} = 0$ 后, 一切电荷的转移将停止, 电荷分布如题 1-6 图(c)所示。有

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \quad \text{和} \quad E_2 = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

$$(E_1 + E_2 + E_3)d/3 = 0$$

由电荷守恒, 还应有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0 = \frac{\epsilon_0 U_0}{d}$$

解之得

$$E_1 = E_3 = \frac{U_0}{3d}, \quad E_2 = -2E_1 = -\frac{2U_0}{3d}$$

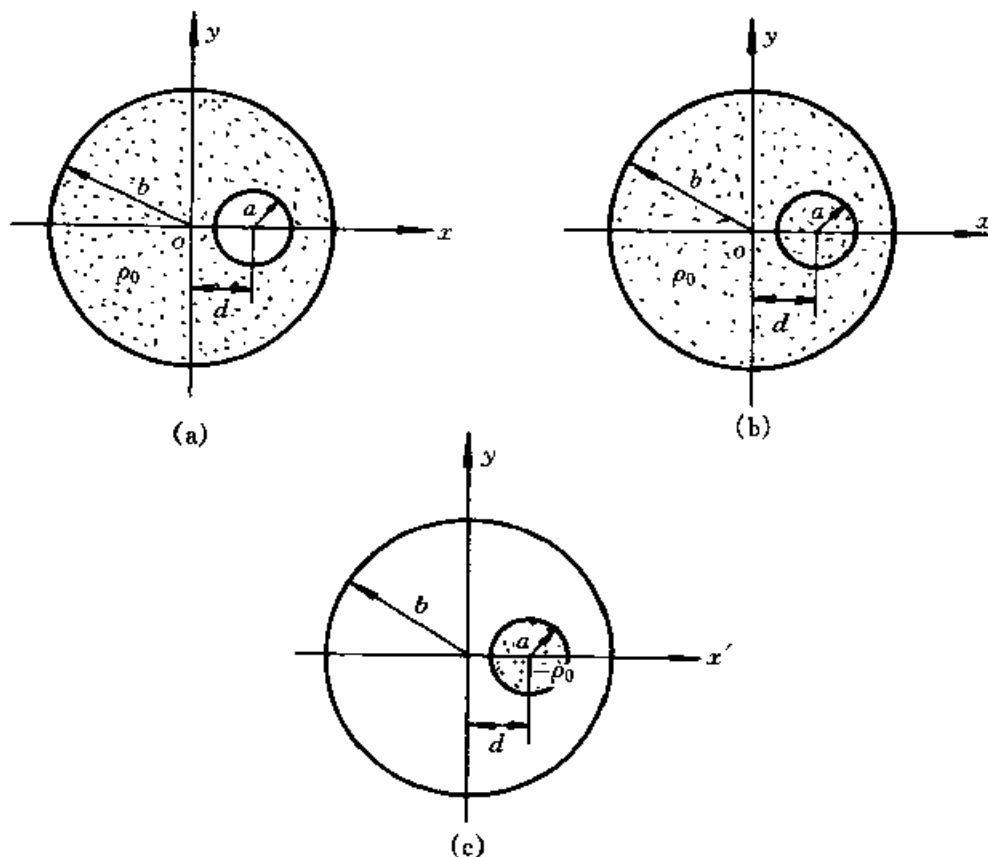
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{3} = \frac{\epsilon_0 U_0}{3d}, \quad \sigma_2 = 2\frac{\sigma_0}{3} = \frac{2\epsilon_0 U_0}{3d}$$

$$U_{AC} = U_{DB} = E_1 \frac{d}{3} = \frac{U_0}{9}, \quad U_{CD} = E_2 \frac{d}{3} = -\frac{2U_0}{9}$$

$$U_{BC} = -(U_{CD} + U_{DB}) = \frac{U_0}{9}$$

由于电场力的作用,再断开 A, B 联接线时,情况不变。

1-7 半径为 b 的无限长圆柱中,有体密度为 ρ_0 的电荷,与它偏轴地放有一半半径为 a 的无限长圆柱空洞,两者的轴线距离为 d 。求空洞内的电场强度(设在真空中)。(提示:可应用叠加原理)



题 1-7 图

解 空洞可看成是密度为 ρ_0 (见题 1-7 图(b))和 $-\rho_0$ (见题 1-7 图(c))的体电荷分布的叠加,而电场为原来电荷分布与空洞中密度为 ρ_0 的体电荷分布共同作用产生的场和由空洞中密度为 $-\rho_0$ 的体电荷分布单独产生的电场叠加而得。

在图(b)中,空洞部分的电场可选取单位长度的同轴圆柱面作为高斯面,利用高斯定律求得

$$E_1 = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} e_r \quad (0 < r < b)$$

在图(c)中,空洞部分的电场可用类似方法求得

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho_0 r'}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_{r'} \quad ((0 < r' < a))$$

空洞实际的电场为上述二者的叠加

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (r\mathbf{e}_r - r'\mathbf{e}_{r'}) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

由图可见, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = d\mathbf{e}_x$

所以

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_x$$

1-8 对于空气中下列各种电位分布, 分别求电场强度和电荷体密度:

(1) $\varphi = Ax^2$

(2) $\varphi = Axyz$

(3) $\varphi = A\rho^2 \sin\phi + B\rho z$

(4) $\varphi = Ar^2 \sin\theta \cos\phi$

其中 A 和 B 为常数。

解 根据 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 和 $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2\varphi$, 有

(1) $\mathbf{E} = -2Ax\mathbf{e}_x$

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -2A\epsilon_0$$

(2) $\mathbf{E} = -A(yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z)$

$$\rho = 0$$

(3) $\mathbf{E} = -[(2A\rho \sin\phi + Bz)\mathbf{e}_\rho + A\rho \cos\phi \mathbf{e}_\phi + B\rho \mathbf{e}_z]$

$$\rho = -\epsilon_0(3A \sin\phi + Bz/\rho)$$

(4) $\mathbf{E} = -(2Ar \sin\theta \cos\phi \mathbf{e}_r + Ar \cos\theta \cos\phi \mathbf{e}_\theta - Ar \sin\phi \mathbf{e}_\phi)$

$$\rho = -4A\epsilon_0 \sin\theta \cos\phi$$

1-9 在平行平板电极上加一直流电压 $U_0 = 2\text{ V}$, 极板间均匀分布着体积电荷 ρ 。试应用泊松方程求出极板间任意一点的电位 φ 和电场强度 \mathbf{E} 。已知 $\rho = -10^{-6}\text{ C/m}^3$, $\epsilon = \epsilon_0$, 极板间距离 $d = 5\text{ mm}$ 。

解 如果令 $yo z$ 平面与电容器的左边极板重合, 且把问题理想化为无限大平板的情况, 则电位 φ 仅为 x 的函数, 这样泊松方程简化成

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

积分之, 并利用边界条件 $x=0, \varphi=0$; $x=d, \varphi=U_0$, 得

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon} x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon} d\right)x$$

电场强度为

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}e_x = \left(\frac{\rho}{\epsilon}x - \frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\epsilon}d\right)e_x$$

代入已给的数据, $U_0 = 2\text{ V}$, $\rho = -10^{-6}\text{ C/m}^3$, $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m}$, $d = 5 \times 10^{-3}\text{ m}$, 得

$$\varphi = 5.65 \times 10^4 x^2 + 117.5x$$

$$E = (-11.30 \times 10^4 x - 117.5)e_x$$

1-10 半径为 a 的圆柱形导体管, 管壁由互相绝缘的两个半圆柱面合并而成。设上半个圆柱面的电位是 V_0 , 下面个圆柱面的电位是零。求导体管内的电位函数。

解 若选圆管轴线为 z 轴的柱坐标系, 由于设圆管为无限长, 故电位 φ 仅为 ρ 和 ϕ 的函数, 与 z 无关。边界条件为

$$\varphi(a, \phi) = \begin{cases} V_0 & (0 < \phi < \pi) \\ 0 & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

且在管内 φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\rho < a, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

现在, 取

$$u = \varphi - \frac{V_0}{2}$$

则有

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\rho < a, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

和边界条件

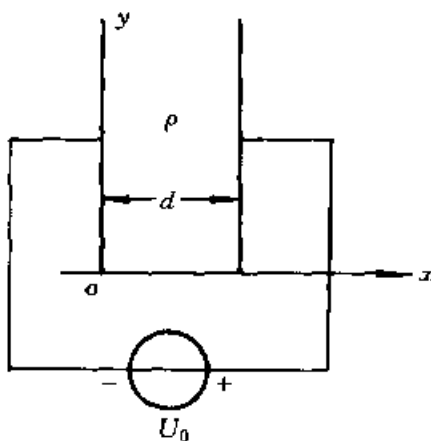
$$u(a, \phi) = \begin{cases} \frac{V_0}{2} & (0 < \phi < \pi) \\ -\frac{V_0}{2} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$

不难看出, $u(\rho, \phi)$ 是 ϕ 的奇函数, 且圆管内包含 $\rho = 0$ 的点, 所以 $u(\rho, \phi)$ 的通解形式应取为

$$u(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \sin n\phi$$

其中的 A_0, A_n 由边界条件确定。在 $\rho = a$ 处, 有

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \sin n\phi = \begin{cases} \frac{V_0}{2} & (0 < \phi < \pi) \\ -\frac{V_0}{2} & (\pi < \phi < 2\pi) \end{cases}$$



题 1-9 图

利用三角函数的正交性,得

$$A_0 = 0$$

$$A_n = \begin{cases} 0 & (n = \text{偶数}) \\ \frac{2V_0}{n\pi a^n} & (n = \text{奇数}) \end{cases}$$

所以,得

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \sin n\phi$$

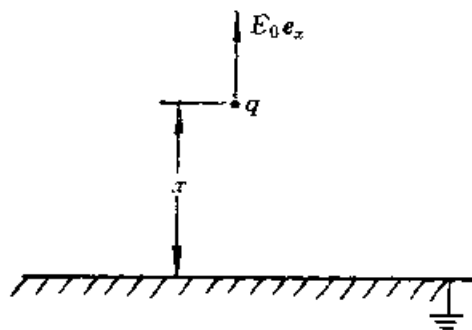
从而圆管内部的电位为

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \phi) &= u(\rho, \phi) + \frac{V_0}{2} \\ &= \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \sin n\phi \end{aligned}$$

1-11 参阅题 1-11 图,在真空中的均匀电场($E_0 e_x$)中,离接地的导电平面 x 远处有一正点电荷 q_0 。问:

(1)要使该点电荷所受之力为零, x 应为何值?

(2)如点电荷原先置于(1)所得 x 值一半处,要使该点电荷向 $x = +\infty$ 运动,所需最小初速为多少?



题 1-11 图

解 用镜像电荷 $-q$ 来代替导电平面上感应电荷的作用。

(1)当镜像电荷($-q$)对 q 的作用力正好与外施均匀电场对 q 的作用力相抵消时,点电荷 q 受力为零。即

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} = E_0 q$$

所以,当

$$x = \sqrt{\frac{q}{16\pi\epsilon_0 E_0}}$$

时,点电荷 q 所受之力为零。

(2)在 $h = \frac{x}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{q}{\pi\epsilon_0 E_0}}$ 处, q 所受合力为

$$F = (qE_0 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2})e_x = -3E_0 q e_x$$

所以 q 若有一初速,将做减速运动。

根据牛顿第二定律, q 在运动过程中, 在任一 x 处, 有

$$F(x) = q(E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(2x)^2})e_x = m \frac{dv}{dt}e_x$$

即

$$m \frac{dv}{dt} = q \frac{d}{dx}(E_0x + \frac{q}{16\pi\epsilon_0x})$$

当 q 位于 $x = \sqrt{\frac{q}{16\pi\epsilon_0E_0}} = 2h$ 时, 受的合力为零; 当 $h < x < 2h$ 时, 合力沿 $(-e_x)$ 方向; $x > 2h$ 时, 合力沿 $(+e_x)$ 方向使其向 $+\infty$ 作加速运动。因此, 在 $x = h$ 处的初速 v_0 至少应使在 $x = 2h$ 处 $v = 0$, 由此确定积分下限如下

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^0 m v dv &= q \int_h^{2h} d(E_0x + \frac{q}{16\pi\epsilon_0x}) \\ -\frac{1}{2} m v_0^2 &= q(E_0x + \frac{q}{16\pi\epsilon_0x}) \Big|_h^{2h} \end{aligned}$$

解得

$$v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{m}} \sqrt{\frac{qE_0}{\pi\epsilon_0}}$$

所以要使点电荷向 $+\infty$ 运动, 必须初速大于 v_0 。

1-12 在离半径为 R 的导体球球心为 d 处 ($d > R$) 有一电荷 q 。问要在球上加多少电荷才能使作用在电荷 q 上的力为零?

解 应用球面镜像法, 在球心处有一镜像电荷

$$q'' = \frac{R}{d}q$$

另在球心与点电荷 q 的连线上, 距球心 $b (= \frac{R^2}{d})$ 处有一镜像电荷

$$q' = -\frac{R}{d}q$$

它们对点电荷 q 的作用力即为导体球对点电荷 q 的作用力。为使作用在点电荷 q 上的作用力为零, 设在球心再加电荷 Q , 则点电荷 q 受的吸引力为

$$F = \frac{(Q + q'')q}{4\pi\epsilon d^2} + \frac{q'q}{4\pi\epsilon(d-b)^2}$$

令

$$F = 0$$

解得

$$Q = \frac{2d^2R^3 - R^5}{(d^2 - R^2)^2} q$$

1-13 一点电荷 q 放置在内表面半径为 b , 厚度为 c 的导体球壳内, 点电荷与球心的距离为 a 。分别求在球壳接地和不接地的两种情况下点电荷所受的力。

解 先讨论球壳接地的情况。由于球壳接地,球壳外的电场 $E=0$ 。求点电荷所受的力时,只需求球壳内的场,球壳的厚度 c 是没有影响的。应用镜像法,在球壳外距球心

$$d = \frac{R^2}{a}$$

处,放置一点电荷

$$q' = -\frac{d}{b}q$$

该点电荷位于球心与点电荷 q 的连线上。它对点电荷 q 的作用力就是球壳对点电荷 q 的作用力,大小为

$$F = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0(d-a)^2} = -\frac{abq^2}{4\pi\epsilon_0(b^2-a^2)^2}$$

负号表示吸引力。

对于球壳不接地的情况,因球壳外表面上的感应电荷在球壳内不产生电场,而球壳内表面的感应电荷仍可用 q' 来代替,即球壳内的电场分布不变。这样,点电荷 q 的受力仍和球壳接地时一样。

1-14 在一半径为 a 的空心导体圆柱中(无限长,接地)放一线电荷(线电荷密度为 τ)。此线电荷与圆柱轴线平行相距为 d 。求圆柱内任意点的电位。

解 该题与习题 1-19 相似,可以看作是带等量异号电荷的偏心圆柱导体间的电场。这里,只需将内导体圆柱的半径 a_1 取为零,外圆柱导体的内半径取为 $a_2=a$ 。这时,有

$$h_1 = (a^2 - d^2)/2d; \quad h_2 = (a^2 + d^2)/2d$$

$$b = (a^2 - d^2)/2d$$

确定了电轴的位置,就可求出圆柱内任一点的电位为

$$\varphi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}$$

1-15 一半径为 a 的球壳,同心地置于半径为 b 的球壳内,外壳接地。一点电荷放在内球内距其球心为 d 处。问大球内各点的电位为多少?

解 (1) 由于半径为 b 的球壳接地,所以其外部的电场强度为零,电位为零。即

$$\varphi = 0 \quad (r > b)$$

(2) 在内球壳与外球壳之间,由于壳是球形的,内球壳外表面上的感应电荷 q 的分布是均匀的,外球壳内表面上的感应电荷 $(-q)$ 的分布也是均匀的。因此,内外球壳间的电场强度由下式决定

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (a < r < b)$$

任一点的电位为

$$\varphi = \int_r^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \quad (a < r < b)$$

(3) 在内球壳内部, 应用球面镜像法。设在内球壳外部离球心为 b 处有镜像电荷 q' 。 q' 和 b 的大小由下式决定

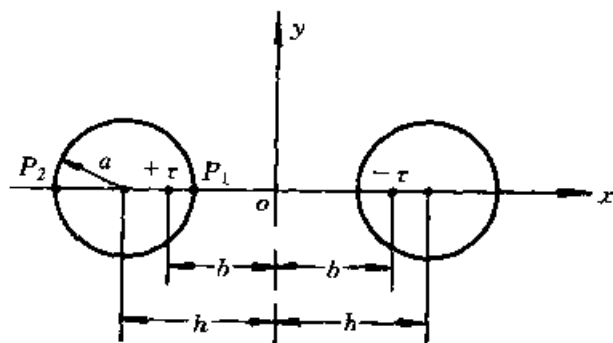
$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad b = \frac{a^2}{d}$$

这样, 内球壳内部任意 P 点的电位由下式决定:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

式中, r_1 和 r_2 分别是 P 点到点电荷 q 和 q' 的距离。 $\frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ 为内球壳表面电位。

1-16 空气中平行地放置两根长直导线, 半径都是 6 cm, 轴线间距离为 20 cm, 若导线间加电压 1 000 V, 求: (1) 电场中的电位分布; (2) 导线表面电荷密度的最大值和最小值。



题 1-16 图

解 用电轴法求解, 首先确定电轴的位置, 如题 1-16 图所示, 有

$$h = \frac{d}{2} = 10 \text{ cm}, \quad a = 6 \text{ cm}, \quad b = \sqrt{h^2 - a^2} = 8 \text{ cm}$$

(1) 电场中的电位分布

$$\varphi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2}}$$

所以有

$$\frac{U}{2} = 500 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b + (h-a)}{b - (h-a)} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 3$$

得

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} = \frac{500}{\ln 3} = 455.12$$

最后,得电位分布为

$$\varphi(x, y) = 228 \ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2}$$

(2)由图可见,在 P_1 点处,场强和电荷面密度最大;在 P_2 点处,场强和电荷密度最小。有

$$\sigma_{\max} = \epsilon_0 E_{\max} = \epsilon_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b - (h-a)} + \frac{-1}{b + (h-a)} \right) = 0.134 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

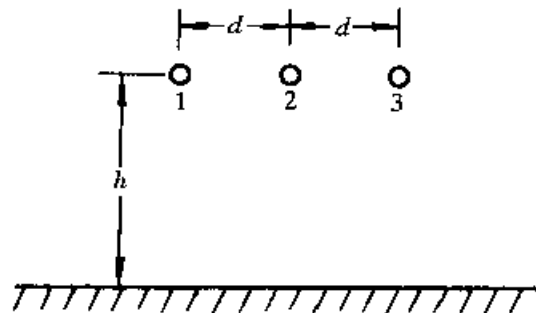
$$\sigma_{\min} = \epsilon_0 E_{\min} = \epsilon_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+h-b} + \frac{-1}{a+h+b} \right) = 0.034 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

1-17 三条输电线位于同一水平面上,导线半径皆为 $r_0 = 4 \text{ mm}$,距地面高度 $h = 14 \text{ m}$,线间距离 $d = 2 \text{ m}$,其中导线 1 接电源,对地电压为 $U_1 = 110 \text{ kV}$,如题 1-17 图所示。

(1)导线 2,3 未接至电源,但它们由于静电感应作用也有电压。问其电压各为多少?

(2)若将导线 2 接地,问导线 2 上的电荷与导线 3 的对地电压分别为多少?

(3)此时,若切断接地线,然后断开电源,问三根线对地的电压为多少?



题 1-17 图

解 此题的关键是求出各电位系数。整个系统是由 4 个导体组成的静电独立系统,选大地为 0 号导体,有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 \\ \varphi_2 &= \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 \\ \varphi_3 &= \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 \end{aligned} \right\}$$

这一方程组说明了各导线的电位与各导线的电荷之间的关系。

令 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = \tau_3 = 0$, 计算此情况下的 φ_1, φ_2 和 φ_3 。将地面影响用镜像电荷代替,又由于 h 和 d 都远大于 r_0 ,所以可以略去导线 2 和 3 上的感应电荷的影响,则得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2 \times 14}{0.004} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln 7000 \\ \varphi_2 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{(2 \times 14)^2 + 2^2}}{2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{197} \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{(2 \times 14)^2 + (2 \times 2)^2}}{2 \times 2} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{50}$$

所以

$$\alpha_{11} = \left. \frac{\varphi_1}{\tau_1} \right|_{\tau_2=\tau_3=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln 7\,000$$

$$\alpha_{21} = \left. \frac{\varphi_2}{\tau_1} \right|_{\tau_2=\tau_3=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{197}$$

$$\alpha_{31} = \left. \frac{\varphi_3}{\tau_1} \right|_{\tau_2=\tau_3=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{50}$$

由图示结构不难看出,这一静电独立系统中的电位系数有如下特征

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{11} \quad \text{和} \quad \alpha_{23} = \alpha_{12}$$

所以,最后得各电位系数分别为

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln 7\,000, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{197}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{50}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{197}$$

(1)当导线2和3未接电源时,有 $\tau_2 = \tau_3 = 0$ 。由上述的方程组,解得导线2和3的电压分别为

$$\varphi_2 = \alpha_{21} \tau_1 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \varphi_1 \quad \text{和} \quad \varphi_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} \varphi_1$$

代入给定数据: $\varphi_1 = 110 \text{ kV}$, 和相关的电位系数,并取 $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。计算得

$$\varphi_2 = 32.81 \text{ kV}, \quad \varphi_3 = 24.31 \text{ kV}$$

(2)若将导线2接地,此时 $\varphi_2 = 0$, 但 $\tau_2 \neq 0$, 又由于导线3未接电源,有 $\tau_3 = 0$ 。因此,由上述方程组,有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{11} \tau_1 + \alpha_{12} \tau_2 \\ 0 &= \alpha_{21} \tau_1 + \alpha_{22} \tau_2 \\ \varphi_3 &= \alpha_{31} \tau_1 + \alpha_{32} \tau_2 \end{aligned} \right\}$$

联立解之,得

$$\tau_2 = \frac{\alpha_{21} \varphi_1}{(\alpha_{21}^2 - \alpha_{11}^2)} \quad \text{和} \quad \varphi_3 = \frac{(\alpha_{32} \alpha_{21} - \alpha_{31} \alpha_{22})}{(\alpha_{21}^2 - \alpha_{11}^2)} \varphi_1$$

代入给定数据: $\varphi_1 = 110 \text{ kV}$, 和相关的电位系数,并取 $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。计算得

$$\tau_2 = 226.06 \text{ nC/m}, \quad \varphi_3 = 15.93 \text{ kV}$$

(3)若切断接地线,然后断开电源,此时导线 1,2 和 3 上的电荷不变,所以它们上的电压都保持不变。有

$$\varphi_1 = 110 \text{ kV}, \quad \varphi_2 = 0 \text{ kV}, \quad \varphi_3 = 15.93 \text{ kV}$$

1-18 空气中,相隔 1 cm 的两块平行导电平板充电到 100 V 后脱离电源,然后将一厚度为 1 mm 的绝缘导电片插入两板间,问:

(1)忽略边缘效应,导电片吸收了多少能量? 这部分能量起到了什么作用? 两板间的电压和电荷的改变量各为若干? 最后储存在其中的能量多大?

(2)如果电压源一直与两平行导电平板相联,重答前问。

解 设导电平板的面积为 S 。两平板间的间隔为 $d = 1 \text{ cm}$ 。显然,绝缘导电片的厚度 $\delta = \frac{1}{10}d = 1 \text{ mm}$ 。平板间的电压为 $U_0 = 100 \text{ V}$ 。

(1)忽略边缘效应,未插入绝缘导电片时

$$q_0 = C_0 U_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0, \quad W_{e0} = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} U_0^2$$

插入导电片后

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d - \delta} = \frac{10\epsilon_0 S}{9d} = \frac{10}{9} C_0$$

$$W_{e1} = \frac{1}{2} \times \frac{q_0^2}{C_1} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{2} \times \frac{q_0^2}{C_0} = \frac{9}{10} W_{e0}$$

所以,导电片中吸收的能量为

$$W_{e0} - W_{e1} = \frac{1}{10} W_{e0} = 4.425 \times 10^{-7} \text{ J}$$

这部分能量使绝缘导电片中的正、负电荷分离,在导电片进入极板间时,做机械功。

这是一常电荷系统,电荷守恒,各极板电荷量不变, $\Delta q = 0$ 。而插入绝缘导电片后的电压为

$$U_{01} = \frac{q_0}{C_1} = \frac{9}{10} \times \frac{q_0}{C_0} = \frac{9}{10} U_0 = 90 \text{ V}$$

所以电压的改变量为

$$\Delta U = U_{01} - U_0 = -10 \text{ V}$$

(2)如果电源一直联接着,则

$$\Delta U = 0, \quad U_{01} = U_0 = 100 \text{ V}$$

$$q_1 = C_1 U_0 = \frac{10}{9} C_0 U_0 = \frac{10}{9} q_0$$

所以,电荷的改变量为

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \frac{1}{9} q_0 = 0.983 \times 10^{-8} \text{ C}$$

而

$$W_{e1} = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{10}{9} \times \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{10}{9} W_{e0}$$

因此,导电片吸收的能量为

$$W_{e1} - W_{e0} = \frac{1}{9} W_{e0} = 4.915 \times 10^{-7} \text{ J}$$

其作用同(1)。

1-19 求题1-19图所示带等量异号电荷的偏心圆柱导体间的电场。已知其间的电介质的介电常数为 ϵ ,尺寸 a_1, a_2 和 d 亦给定。

解 应用电轴法。应注意电轴的位置在两圆柱的轴线的连线上,都应位于待求场域之外。图中 a_1, a_2, d 为给定的尺寸。适当选取坐标原点可使两电轴到原点的距离相等,设为 b ,这时存在关系

$$h_1^2 = a_1^2 + b^2, \quad h_2^2 = a_2^2 + b^2$$

$$h_2 - h_1 = d$$

由这三个方程可解得三个未知量

$$h_1 = \frac{1}{2d} (a_2^2 - a_1^2 - d^2)$$

$$h_2 = \frac{1}{2d} (a_2^2 - a_1^2 + d^2)$$

$$b = \frac{1}{2d} \sqrt{(a_2 + a_1 - d)(a_2 - a_1 + d)(a_2 + a_1 + d)(a_2 - a_1 - d)}$$

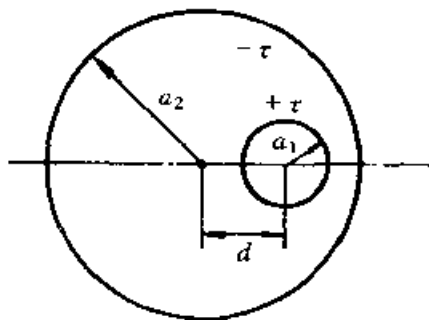
确定了电轴的位置,就可求出偏心圆柱内的电场分布。

1-20 点电荷 q 置于导体A附近,导体有半球形凸起,如题1-20图所示。已知 q, h, R 。求此点电荷所受的力。

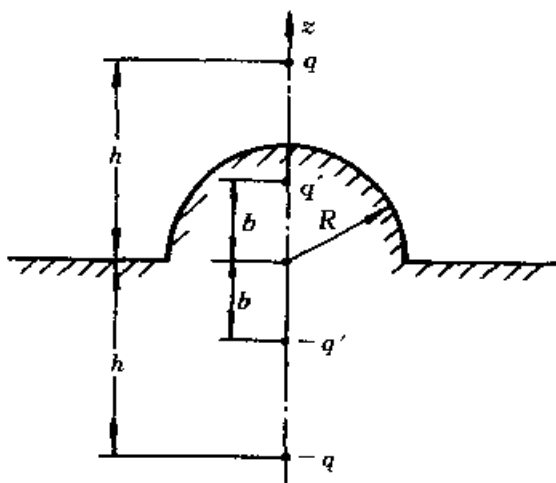
解 应如图所示放置三个镜像电荷来满足边界条件,其中

$$q' = -\frac{Rq}{h}, \quad b = \frac{R^2}{h}$$

三个镜像电荷在 q 处产生的电场强度为



题1-19图



题1-20图

$$\begin{aligned}
 E(0,0,h) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{q'}{(h-b)^2} - \frac{q'}{(d+b)^2} - \frac{q}{(2h)^2} \right] e_z \\
 &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4h^3R^3}{(h^4-R^4)^2} + \frac{1}{4h^2} \right] e_z
 \end{aligned}$$

所以, q 所受之力为

$$\begin{aligned}
 F &= qE(0,0,h) \\
 &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4h^3R^3}{(h^4-R^4)^2} + \frac{1}{4h^2} \right] e_z
 \end{aligned}$$

1-21 真空中半径为 R 的导体球带有电荷 q_1 ; 球外有一点电荷 q_2 , 距球心 d 。若 q_1 与 q_2 均为正电荷, 问导体球与点电荷 q_2 是否可能相吸引? 为什么?

解 本题应采用球面镜像法。在距球心

$$b = \frac{R^2}{d}$$

处, 置一点电荷

$$q' = -\frac{R}{d}q_2$$

同时, 在导体球心处还应置点电荷

$$q_1 - q'$$

这样, 点电荷 q_2 受到导体球和 q_1 的作用力, 就等效成 q' 和 $(q_1 - q')$ 对它的作用力。由库仑定律, 直接得出 q_2 所受之吸引力为

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q'}{(d-b)^2} - \frac{q_1 - q'}{d^2} \right] \\
 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Rdq_2}{(d^2 - R^2)^2} - \frac{Rq_2}{d^3} - \frac{q_1}{d^2} \right] \\
 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R^3(2d^2 - R^2)}{d^3(d^2 - R^2)^2} q_2 - \frac{q_1}{d^2} \right]
 \end{aligned}$$

要保持导体球与电荷 q_2 为吸引力, 则应有 $F > 0$ 。由此得

$$q_1 \leq \frac{R^3(2d^2 - R^2)}{d^3(d^2 - R^2)^2} q_2$$

时, 有可能吸引。

第二章 恒定电场

习题(2-1)

2-1-1 直径为2 mm的导线,如果流过它的电流是 20 A,且电流密度均匀,导体的电导率为 $\frac{1}{\pi} \times 10^8$ S/m。求导线内部的电场强度。

解 因为电流密度是均匀分布,故

$$J = \frac{I}{S} = \frac{20}{\pi \times (0.001)^2} = \frac{20}{\pi} \times 10^6 \quad (\text{A/m})$$
$$E = \frac{J}{\gamma} = 0.2 \quad \text{V/m}$$

2-1-2 已知 $\mathbf{J} = 10y^2ze_x - 2x^2ye_y + 2x^2ze_z$ A/m。求穿过 $x = 3$ m 处, $2 \text{ m} \leq y \leq 3 \text{ m}, 3.8 \text{ m} \leq z \leq 5.2 \text{ m}$ 面积上在 e_x 方向的总电流 I 。

解 因为 $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

$$\text{所以 } I = \int_S \mathbf{J} \cdot e_x dydz = \int_2^3 \int_{3.8}^{5.2} 10y^2z dydz = 39.9 \quad \text{A}$$

2-1-3 平行板电容器板间距离为 d ,其中媒质的电导率为 γ ,两板接有电流为 I 的电流源,测得媒质的功率损耗为 P 。如将板间距离扩为 $2d$,其间仍充满电导率为 γ 的媒质,则此电容器的功率损耗是多少?

解 电容器内电流密度分布均匀,则

$$J = \frac{I}{S}$$

其中 S 为平行板的面积。由于使用同一电流源,故两种情况下,电流密度满足

$$J_1 = J_2 = J = \frac{I}{S}$$

平板电容器内媒质中的电场强度

$$E_1 = E_2 = \frac{J}{\gamma}$$

又因为导电媒质内的功率密度 $p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$

所以

$$p_1 = p_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{J^2}{\gamma}$$

则电容器的功率损耗分别为

$$P_1 = p_1 S d = P \quad P_2 = p_2 S d = 2 p_1 S d = 2P$$

习题(2-3)

2-3-1 有恒定电流流过两种不同媒质(介电常数和电导率分别为 ϵ_1, γ_1 和 ϵ_2, γ_2)的分界面。问若要使两种导电媒质分界面处的电荷密度 $\sigma = 0$, 则 ϵ_1, γ_1 和 ϵ_2, γ_2 应满足什么条件。

解 利用电场中媒质分界面上的衔接条件

$$J_{2n} - J_{1n} = 0 \quad \text{和} \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

利用 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 可以得到

$$\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n} = 0$$

$$\sigma = \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n}$$

由此可以得到

$$\sigma = (\epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}) E_{2n}$$

$$\text{当 } \epsilon_2 - \epsilon_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 0, \text{ 即 } \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{ 时}$$

$$\sigma = 0$$

2-3-2 若恒定电场中有非均匀的导电媒质(其电导率 $\gamma = \gamma(x, y, z)$, 介电常数 $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$), 求媒质中自由电荷的体密度。

解 由于媒质中介电常数和电导率的分布不均匀, 是空间位置的函数, 故媒质中存在自由电荷体密度。其自由电荷体密度为

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

其中 \mathbf{D} 为电位移矢量, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。由此可得

$$\rho = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \epsilon \cdot \mathbf{E}$$

又因为恒定电场中, 电流密度 $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \cdot (\gamma \mathbf{E}) = 0$$

$$\text{所以 } \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \gamma \cdot \mathbf{E} = 0$$

将此式代入自由电荷体密度 ρ 中

$$\begin{aligned} \rho &= (\nabla \epsilon - \frac{\nabla \gamma}{\gamma}) \cdot \mathbf{E} \\ &= (\frac{1}{\gamma} \nabla \epsilon - \frac{\nabla \gamma}{\gamma^2}) \cdot \mathbf{J} \\ &= \nabla \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \right) \cdot \mathbf{J} \end{aligned}$$

2-3-3 求题 2-3-3 图所示边值条件的矩形导电片中的电位分布(导电

片沿 z 方向的厚度很小)。

解 矩形导电片中电位函数 φ 满足的方程为

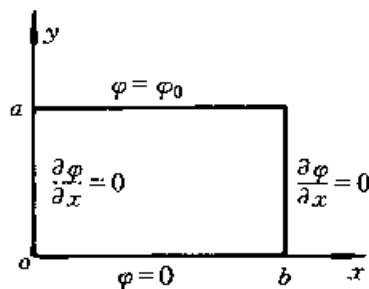
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

建立如图所示的直角坐标系,其满足的边界条件为

$$\varphi \Big|_{y=0} = 0$$

$$\varphi \Big|_{y=a} = \varphi_0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0$$



题 2-3-3 图

由边界条件可分析电位函数 φ 仅与坐标 y 有关,故电位函数满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

其通解为

$$\varphi = C_1 y + C_2$$

代入边界条件可得

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\varphi_0}{a}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{a} y$$

习题(2-4)

2-4-1 金属球形电极 A 和平板电极 B 的周围电介质为空气时,已知其电容为 C 。当将该系统周围的空气全部换为电导率为 γ 的均匀导电媒质,且在两极间加直流电压 U_0 时,求电极间导电媒质损耗的功率是多少?

解 由于恒定电场与静电场在一定条件下可以比拟,分析题意可知两系统的几何形状、边界条件情况相同,则

$$\frac{C}{G} = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

$$G = \frac{\gamma}{\epsilon} C$$

$$P = GU_0^2 = \frac{\gamma}{\epsilon} CU_0^2$$

2-4-2 半径为 a 的长直圆柱导体放在无限大导体平板上方,圆柱轴线距平板的距离为 h ,空间充满电导率为 γ 的不良导电媒质。若导体的电导率远远大于 γ ,求圆柱和平板间单位长度的电阻(请用静电比拟法,先求该系统的电

容)。

解 若导体之间充满介电常数为 ϵ 的电介质,先求此系统的电容。

设圆柱对导体平面的电压为 U 。利用镜像法,在平板导体另一侧作出它的镜像,如题 2-4-2 图所示。再利用电轴法,其电轴位置

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

由此可得圆柱电压

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b+h-a}{b-h+a}$$

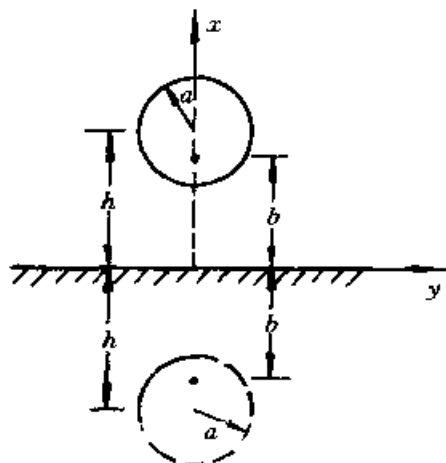
单位长度的电容

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b+h-a}{b-h+a}}$$

由于导体之间充满电导率为 γ 的导电媒质,利用恒定电场与静电场的静电比拟,可得

$$G_0 = \frac{\gamma}{\epsilon} C_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{b+h-a}{b-h+a}}$$

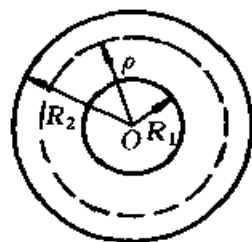
$$R_0 = \frac{1}{G_0} = \frac{\ln \frac{b+h-a}{b-h+a}}{2\pi\gamma}$$



题 2-4-2 图

习题(2-5)

2-5-1 厚度为 d 的法拉弟感应盘的外半径为 R_2 ,中心孔的半径为 R_1 ,设圆盘的电导率为 γ ,试证明孔与圆盘外边缘的电阻为 $R = \frac{1}{2\pi\gamma d} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 。



题 2-5-1 图

解法 1 假设盘内从内孔流向圆盘外边缘的电流为 I 。利用对称性,在半径为 ρ 处的电流密度方向沿径向,其大小为

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi\rho d}$$

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma\rho d}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E d\rho = \frac{I}{2\pi\gamma d} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\gamma d}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\gamma d}$$

解法 2 直接求解恒定电场的边值问题。感应盘内电位函数 φ 满足拉普拉斯方程。利用对称性,建立以孔中心为坐标原点的圆柱坐标系,则

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0$$

设盘的内孔边缘电位为 U , 盘外边缘接地, 写出边界条件为

$$\varphi \Big|_{\rho=R_1} = U$$

$$\varphi \Big|_{\rho=R_2} = 0$$

方程的通解为

$$\varphi = C_1 \ln \rho + C_2$$

代入边界条件得

$$\varphi = -\frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \rho + \frac{U \ln R_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = -\frac{\gamma U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_\rho$$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma U}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \rho d\theta = \frac{2\pi\gamma d U}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\gamma d}$$

2-5-2 一半径为 0.5 m 的导体球当作接地电极深埋地下, 土壤的电导率 $\gamma = 10^{-2} \text{ S/m}$, 求此接地体的接地电阻。

解 由于深埋地下, 可以忽略地面的影响。设接地器通有电流 I , 则

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} e_r$$

$$U = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{0.5}^{\infty} \frac{I}{4\pi\gamma r^2} dr$$

$$= \frac{I}{4\pi\gamma \times 0.5}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-2} \times 0.5} = 15.92 \quad (\Omega)$$

思考题

2-1 在恒定电场中,局外场强 E_e 和库仑场强 E 是否都满足保守场的条件?

答 库仑场强 E 满足保守场的条件

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

而局外场强 E_e 不满足保守场的条件

$$\oint_l \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \epsilon \neq 0$$

式中 ϵ 为电源电动势。

2-2 有恒定电场中的导体,其表面存在自由电荷分布,这些自由电荷是否都是静止不动的? 其电荷面密度是否随时间变化?

答 恒定电场中的导体表面上存在自由电荷分布,由于导体内部有电场,自由电荷在电场力的作用下而运动着。但电荷面密度却不随时间的变化而改变,而是处于一种动态平衡中。这样的电荷称之为驻立电荷。

2-3 恒定电场基本方程的微分形式,表明恒定电场的性质是什么?

答 电源外导电媒质中,恒定电场基本方程的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

表明恒定电场是无源无旋场,即电流密度线是无头无尾的闭合线,恒定电流只能在闭合电路中流动。恒定电场是保守场。

2-4 静电比拟的理论依据是什么? 静电比拟的条件是什么?

答 静电比拟的理论依据是场的边值问题解的唯一性定理。静电比拟的条件是对静电场的无源区域和恒定电场的电源外导电媒质区域,当表征两种场的基本方程有相似的形式时,如果两种场具有相似的边界条件,则已知一种场的解可以通过对偶量替换得到另一种场的解。

2-5 如果导电媒质不均匀,媒质中的电位是否满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$?

答 导电媒质不均匀则 $\nabla\gamma \neq 0$, 由恒定电场的基本方程有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 即 $\nabla \cdot (\gamma \mathbf{E}) = 0$ 。把 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 代入, 则有 $\nabla \cdot (\gamma \nabla\varphi) = 0$, 由此可得

$$\nabla\gamma \cdot \nabla\varphi + \gamma \nabla^2\varphi = 0$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\nabla\gamma \cdot \nabla\varphi}{\gamma} \neq 0$$

2-6 在两种导电媒质的分界面两侧, 在什么条件下 \mathbf{E} 和 \mathbf{J} 具有同一个人射角、折射角?

答 当这两种导电媒质均为各向同性的导电媒质时, 有 $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$, 则 \mathbf{E} 和 \mathbf{J} 具有同一个人射角、折射角。

2-7 当导电媒质中有恒定电流时, 导电媒质外部电介质中的电场应遵循什么规律?

答 通有恒定电流的导电媒质周围电介质中的恒定电场, 是由其分布不随时间变化的导电媒质上的电荷引起的, 因此这类电场也是保守场。虽然严格地说, 导电媒质中通有电流时, 导电媒质就不再是等位体, 它的表面也不再是等位面, 但在很多实际问题中, 导电媒质与电介质的交接面上, 电介质内电场强度 \mathbf{E} 的切线分量较其法线分量小得多, 往往可以忽略不计。这样, 导电媒质表面上的边界条件就可认为与静电场中的相同。因此, 在研究有恒定电流通过的导电媒质周围电介质中的恒定电场时, 就可以应用静电场的规律去解决。

2-8 由钢 ($\gamma = 0.6 \times 10^7 \text{ S/m}$) 和铜 ($\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$) 分别制成形状和尺寸都相同的两个接地体, 当埋入地中时它们的接地电阻是否相同?

答 接地电阻是由接地线、接地体本身的电阻、接地体与大地之间的接触电阻以及接地体到无限远处的大地电阻所组成。由于大地的电导率远远小于金属导体的电导率, 所以接地体到无限远处的大地电阻比前三部分电阻大得多。而大地电阻的大小仅与接地体的形状、尺寸及土壤的电导率有关, 所以虽然钢和铜的电导率有区别, 但同时埋入大地后的接地电阻却可以视为相同。

2-9 加有恒定电压的输电线在有电流通过与没有电流通过的情况下, 导线周围介质中的电场有哪些相似与不同?

答 输电线中若无电流通过时, 导线为等位体, 导线表面分布有相对导线静止不动的电荷面密度。导线与介质交接面上的电场强度垂直于导线表面。介质中的电场是由输电线表面上分布的静止电荷产生的静电场。

若输电线中有电流通过时, 导线不再是等位体, 导线表面分布有相对导线恒定流动的面电荷, 但电荷的面密度保持不变。导线与介质交接面上的电场强度不再与导线表面垂直。只有当导线的电导率较大、导线内的电场强度较小时, 可近似认为介质与导线交接面上的电场强度与导线表面垂直, 这时仍可用静电场的方法去计算介质内的恒定电场。

2-10 在恒定电场中,有下列几种不同情况的边界条件:

- (1)电导率相差极大的两导电媒质的分界面;
- (2)导电媒质与理想介质的分界面;
- (3)两种非理想媒质的分界面。

试问在什么情况下,在分界面哪一侧,电场强度线近似垂直于分界面?在什么情况下平行于分界面?

答 根据恒定电场中电场强度矢量线和电流密度矢量线的折射定律 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ 可知:(1)在电导率很小一侧的导体表面可视为电场强度线近似垂直分界面;(2)在导电媒质的电导率 γ 较大的情况下,分界面上理想介质一侧的电场强度近似垂直于分界面;(3)此时在两媒质分界面上,一般情况下电场强度既不与分界面垂直,也不与分界面平行。

当两种媒质的参数满足 $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$ 时,分界面上的电荷面密度为零,此时两种媒质中若有一种媒质在分界面上的电场强度平行于分界面,则另一种媒质中的电场强度也平行于分界面。

2-11 接地电阻是怎样形成的?何谓接地装置附近的危险区?跨步电压与哪些量有关?

答 接地装置包括接地线、接地体及大地。接地电阻是由接地线、接地体本身的电阻,接地体与大地之间的接触电阻以及接地体到无限远处的大地电阻三部分构成。

由于接地电阻的存在,当大电流流入接地装置时,可使地面行走的人两足之间产生较大的电压(跨步电压),超过安全值时,会对人有致命的危险。跨步电压超过安全值的范围称为危险区。

跨步电压与流入大地的电流以及距接地体中心的距离有关,也与步距、土壤的电导率 γ 有关。

2-12 在电流密度 $J \neq 0$ 的地方,电荷体密度是否可能等于零?

答 在电流密度 $J \neq 0$ 的地方,电荷体密度也可以为零。例如:均匀导电媒质中通有恒定电流, $J \neq 0$ 满足,但电荷体密度却等于零。证明如下。

$$\text{因为 } \rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \mathbf{J} \right) = \frac{\epsilon}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\gamma}$$

当媒质均匀时, $\nabla \frac{\epsilon}{\gamma} = 0$, 可得

$$\rho = \frac{\epsilon}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

若媒质不均匀,则有

$$\rho = \mathbf{J} \cdot \nabla \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

即有传导电流的地方,就有体电荷分布。

习 题

2-1 电导率为 γ 的均匀,各向同性的导体球,其表面上的电位为 $\varphi_0 \cos \theta$, 其中 θ 是球坐标 (r, θ, ϕ) 的一个变量。试决定表面上各点的电流密度 \mathbf{J} 。

解 利用 \mathbf{J} 与 \mathbf{E} 的关系,再利用 \mathbf{E} 与 φ 的关系可以解决此问题。

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi\right) = \frac{1}{r} \varphi_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} = \frac{\gamma}{r} \varphi_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

2-2 一半径为 a 的均匀带电球,带电总量为 Q ,该球绕直径以角速度 ω 旋转。求:(1)球内各处的电流密度 \mathbf{J} ;(2)通过半径为 a 的半圆的总电流。

解 (1)以球心为原点,旋转轴为 Z 轴建立球坐标系。球内任一点距球心 r 处,与 Z 轴的夹角为 θ ,该点运动的线速度为

$$v = \omega r \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

带电球的电荷体密度为

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \frac{3Q\omega r \sin \theta}{4\pi a^3} \mathbf{e}_\phi$$

(2)利用 \mathbf{J} 与 I 的关系可得

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^a \frac{3Q\omega r \sin \theta}{4\pi a^3} r dr d\theta = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

2-3 已知某一区域中在给定瞬间的电流密度

$$\mathbf{J} = A(x^3 \mathbf{e}_x + y^3 \mathbf{e}_y + z^3 \mathbf{e}_z)$$

其中 A 为常数。求:(1)此瞬间点 $(1, -1, 2)$ 处电荷密度的变化率 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$;(2)求此时

以原点为球心, a 为半径的球内总电荷的变化率 $\frac{dQ}{dt}$ 。

解 (1)利用电荷守恒定律的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -A\left(\frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z}\right) = -A(3x^2 + 3y^2 + 3z^2) = -3Ar^2$$

对点(1, -1, 2), 其电荷密度的变化率为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -18A$$

$$(2) \text{ 因为 } Q = \int_0^t \int_0^a \rho dV dt$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } Q &= \int_0^t dt \int_0^a (-3Ar^2) \times 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{12\pi A}{5} a^5 t \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{dQ}{dt} = -2.4\pi A a^5$$

2-4 同轴线内、外导体半径分别为 a 和 b , 其间充填介质的电导率为 γ , 内、外导体间的电压为 U_0 , 求此同轴线单位长度的功率损耗。

解 在 $a \leq \rho \leq b$ 的范围内, 选一个单位长度的圆柱面, 假设通过其上的漏电流为 I_0 , 可以得到

$$I_0 = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi\rho J$$

$$J = \frac{I_0}{2\pi\rho}$$

利用 $E = \frac{J}{\gamma}$, 得

$$E = \frac{I_0}{2\pi\gamma\rho}$$

由此可得

$$U_0 = \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E d\rho = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{b}{a}$$

$$I_0 = \frac{2\pi\gamma U_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$J = \frac{\gamma U_0}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

圆柱体内的功率密度

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{J^2}{\gamma}$$

同轴线单位长度的功率损耗

$$P = \int_V p dV = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma U_0^2}{[\ln \frac{b}{a}]^2} \frac{1}{\rho} d\rho d\phi = \frac{2\pi\gamma U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}$$

此题也可以用建立圆柱内电位函数 φ 所满足的边值问题, 求解出电位函数 φ 后, 利用 $E = -\nabla\varphi$ 求出圆柱内的电场强度, 后面求解可与以上方法相同, 也可以先求出单位长度圆柱的电导或电阻, 利用 $P = G_0 U_0^2$ 或 $P = \frac{U_0^2}{R_0}$ 去求解。

2-5 内、外导体的半径分别为 R_1, R_2 的圆柱形电容器, 中间的非理想介质的电导率为 γ , 若在内外导体间加电压 U_0 , 求非理想介质中各点的电位和电场强度。

解 设两导体之间的漏电流为 I , 由于系统的轴对称性, 电流密度沿径向, 且只与 ρ 有关, 由此可得

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi\rho l} \mathbf{e}_\rho$$

式中 l 为圆柱的长度。

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma l} \mathbf{e}_\rho$$

若以外导体为电位参考点, 在 $R_1 \leq \rho \leq R_2$ 内, 任一点的电位

$$\varphi = \int_{\rho}^{R_2} E d\rho = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{R_2}{\rho}$$

已知内外导体的电压为 U_0 , 可得

$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} E d\rho = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由此可以得到非理想介质中各点的电位

$$\varphi = \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_2}{\rho}$$

电场强度

$$\mathbf{E}(\rho) = -\frac{U_0}{\rho \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_\rho$$

2-6 球形电容器的内外半径分别为 R_1, R_2 , 中间的非理想介质的电导率为 γ , 已知内外导体间电压为 U_0 , 求非理想介质中各点的电位和电场强度。

解 设两导体球间的漏电流为 I , 由于系统具有球对称性, 电流密度沿径向, 且只与 r 有关, 由此可得

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \mathbf{e}_r$$

若以外导体的电位为零, 在 $R_1 \leq r \leq R_2$ 的非理想介质内任一点的电位

$$\varphi(r) = \int_r^{R_2} E dr = \int_r^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

已知内外导体间的电压为 U_0 , 可得

$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

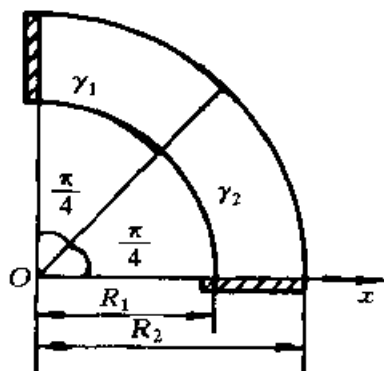
由此可得非理想介质中任一点的电位

$$\varphi(r) = \frac{R_1 R_2 U_0}{R_2 - R_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

电场强度

$$E(r) = \frac{R_1 R_2 U_0}{(R_2 - R_1) r^2} e_r$$

2-7 有两块不同电导率的薄钢片构成一导电弧片, 如题 2-7 图所示。若 $\gamma_1 = 6.5 \times 10^7$ S/m, $\gamma_2 = 1.2 \times 10^7$ S/m, $R_2 = 45$ cm, $R_1 = 30$ cm, 厚度为 2 mm, 电极间电压 $U = 30$ V, 且 $\gamma_{\text{电极}} \gg \gamma_1$ 。求: (1) 弧片内的电位分布 (设 x 轴上的电极为零电位); (2) 总电流 I 和弧片电阻 R ; (3) 在分界面上, D, J, E 是否发生突变; (4) 分界面上的电荷面密度 σ 。



题 2-7 图

解 (1) 因为 $\gamma_{\text{电极}} \gg \gamma_1$, 电极表面可视为等位面, 由对称性分析, 电流密度线是沿图示 e_ϕ 方向, 即垂直于电极表面, 而等位线垂直于 E 线 (即 J 线), 因此 φ 只与坐标 ϕ 有关, 而与坐标 ρ 无关。将系统分为两个均匀的导电媒质区域, 其边值问题为

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \phi^2} = 0 \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \phi^2} = 0 \quad (R_1 \leq \rho \leq R_2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4})$$

$$\varphi_1 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = U$$

$$\varphi_2 \Big|_{\phi=0} = 0$$

$$\varphi_1 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = \varphi_2 \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\frac{\pi}{4}}$$

其通解可写为

$$\varphi_1 = C_1 \phi + C_2$$

$$\varphi_2 = C_3 \phi + C_4$$

利用边界条件, 决定待定系数可得

$$C_1 = \frac{U}{\frac{\pi}{4}(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2})} = 5.95$$

$$C_2 = U - \frac{\pi}{2} C_1 = 20.65$$

$$C_3 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} C_1 = 32.26$$

$$C_4 = 0$$

由此可得弧片内的电位分布为

$$\varphi_1 = 5.95\phi + 20.65 \quad \text{V}$$

$$\varphi_2 = 32.26\phi \quad \text{V}$$

$$(2) \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \mathbf{e}_\phi$$

再利用分界面上电流密度的衔接条件

$$J_{1n} = J_{2n}$$

由此可得到

$$\mathbf{J} = \gamma_1 \mathbf{E}_1 = \gamma_2 \mathbf{E}_2 = -\frac{C_1 \gamma_1}{\rho} \mathbf{e}_\phi$$

弧片内的总电流

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{C_1 \gamma_1}{\rho} d\rho = C_1 \gamma_1 d \ln \frac{R_2}{R_1} = 3.137 \times 10^5 \quad \text{A}$$

式中 $d = 2 \text{ mm}$, 是薄钢片的厚度。

弧片的电阻

$$R = \frac{U}{I} = 9.56 \times 10^{-5} \quad \Omega$$

(3) 利用分界面上的衔接条件 $J_{2n} - J_{1n} = 0$, 则电流密度在分界面上保持连续, 没有突变。

因 $\gamma_2 \mathbf{E}_{2n} - \gamma_1 \mathbf{E}_{1n} = 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, 故电场强度在分界面上不连续, 有突变。又因为两种导电媒质的介电常数均可视为 ϵ_0 , 故电位移矢量也不连续, 有突变。

(4) 利用 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, 将 $E_{1n} = -\frac{C_1}{\rho}$, $E_{2n} = -\frac{C_3}{\rho}$ 代入得

$$\sigma = \frac{4\epsilon_0(\gamma_1 - \gamma_2)U}{\pi(\gamma_1 + \gamma_2)\rho}$$

2-8 如将电极改置于钢片的弧边,重求上题的解。

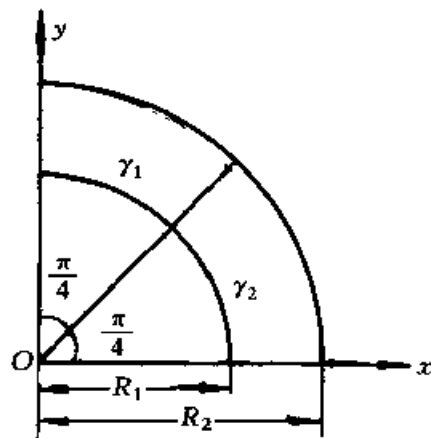
解 (1) 此时电流密度沿 e_ρ 方向,即垂直于电极表面。等位线垂直于 E 线,因此 φ 只与 ρ 有关,而与 ϕ 无关。将此系统分为两个均匀的导电媒质区域,写出边值问题为

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} \right) = 0 \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho} \right) = 0 \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_1 \Big|_{\rho=R_1} = \varphi_2 \Big|_{\rho=R_2} = 0$$

$$\varphi_1 \Big|_{\rho=R_2} = \varphi_2 \Big|_{\rho=R_2} = U$$



题 2-8 图

其通解可写为

$$\varphi_1 = C_1 \ln \rho + C_2$$

$$\varphi_2 = C_3 \ln \rho + C_4$$

利用边界条件决定通解中的待定系数

$$C_1 = C_3 = \frac{U}{\ln R_2 / R_1}$$

$$C_2 = C_4 = -\frac{U \ln R_1}{\ln R_2 / R_1}$$

由此可得弧片内的电位分布为

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1}} (\ln \rho - \ln R_1) = 74 \ln \frac{\rho}{0.03}$$

$$(2) \mathbf{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho = -\frac{74}{\rho} \mathbf{e}_\rho$$

其中 $E_1 = E_2 = E$ 。弧片内任一点的电流密度为

$$\mathbf{J}_1 = \gamma_1 \mathbf{E}_1 = -\frac{74 \gamma_1}{\rho} \mathbf{e}_\rho$$

$$\mathbf{J}_2 = \gamma_2 \mathbf{E}_2 = -\frac{74 \gamma_2}{\rho} \mathbf{e}_\rho$$

弧片内的总电流

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\gamma_2 U}{\ln R_2 / R_1} \frac{d}{\rho} \rho d\phi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\gamma_1 U}{\ln R_2 / R_1} \frac{d}{\rho} \rho d\phi$$

$$= 74(\gamma_2 + \gamma_1)d \frac{\pi}{4} = 8.95 \times 10^6 \text{ A}$$

$$R = \frac{U}{I} = 3.35 \times 10^{-6} \Omega$$

(3) 两媒质分界面上的电场强度沿分界面的切线方向,由分界面上的衔接条件可知 $E_{1t} - E_{2t} = 0, E_1 = E_2$ 。电场强度在分界面上连续,不突变。又因为两种导电媒质的介电常数均为 ϵ_0 ,故 $D_1 = D_2$ 。电位移矢量在分界面上也连续,不突变。但 $J_1 = \gamma_1 E_1, J_2 = \gamma_2 E_2$,由于 $\gamma_1 \neq \gamma_2$,故在分界面上电流密度不连续,有突变。

(4) 由于在分界面上电位移矢量 D 连续,不突变,故

$$D_1 = D_2$$

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = 0$$

分界面上无自由电荷面密度分布。

2-9 两无限大平行金属板,相距为 d ,板间置有两种导电媒质,分界面亦为平面。第一种媒质(电导率 γ_1 ,介电常数 ϵ_1)厚度为 a ,第二种媒质(电导率 γ_2 ,介电常数 ϵ_2)厚度为 $(d-a)$ 。已知金属板的电位分别为 φ_1 和 φ_2 。试求达到稳定状态时分界面上的电位及电荷密度。

解 无限大平行金属板可以忽略端部的边缘效应。由对称性分析可知 E 和 J 都垂直于极板,故分界面为等位面。

利用在媒质分界面上的衔接条件 $J_{2n} = J_{1n}$ 。由于 $J_2 = J_{2n}, J_1 = J_{1n}$,因此可得到

$$\gamma_2 E_2 = \gamma_1 E_1$$

利用 $\int_l E \cdot dl = U$,可以得到

$$E_1 a + E_2 (d-a) = \varphi_2 - \varphi_1$$

若令 $b = d-a$,解上面两式可得

$$E_1 = \frac{\gamma_2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\gamma_1 b + \gamma_2 a}$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 (\varphi_2 - \varphi_1)}{\gamma_1 b + \gamma_2 a}$$

分界面上的电位为

$$\varphi = E_1 a + \varphi_1 = \frac{\gamma_2 a (\varphi_2 - \varphi_1)}{\gamma_1 b + \gamma_2 a} + \varphi_1$$

分界面上的自由电荷面密度为

$$\sigma = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) (\varphi_2 - \varphi_1)}{\gamma_1 b + \gamma_2 a}$$

2-10 球形电容器的内半径 $R_1 = 5 \text{ cm}$, 外半径 $R_2 = 10 \text{ cm}$, 其中设有两层电介质, 其分界面亦为球面, 半径 $R_0 = 8 \text{ cm}$ 。若电导率分别为 $\gamma_1 = 10^{-10} \text{ S/m}$, $\gamma_2 = 10^{-9} \text{ S/m}$ 。若内外导体间施加电压 1 kV , 求: (1) 球面之间的 E, J 和 φ ; (2) 漏电流。

解 设内外导体之间电压为 U , 流过的电流为 I 。由对称性分析可知, 电流沿径向且为球对称。

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r \text{ 且 } J_1 = J_2 = J$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_1} = \frac{I}{4\pi\gamma_1 r^2} \mathbf{e}_r \quad R_1 \leq r \leq R_0$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_2} = \frac{I}{4\pi\gamma_2 r^2} \mathbf{e}_r \quad R_0 \leq r \leq R_2$$

若以外球壳为电位参考点, 则在 $R_0 \leq r \leq R_2$ 的区域内

$$\varphi_2 = \int_r^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma_2 r^2} dr = \frac{I}{4\pi\gamma_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$$

在 $R_1 \leq r \leq R_0$ 的区域内

$$\varphi_1 = \int_r^{R_0} E_1 dr + \int_{R_0}^{R_2} E_2 dr = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{I}{4\pi\gamma_2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right)$$

若 $r = R_1$ 时, $\varphi_1 = U$, 则

$$U = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

球形电容器的漏电导为

$$\begin{aligned} G = \frac{I}{U} &= \frac{4\pi\gamma_1\gamma_2 R_1 R_2 R_0}{(R_2 - R_0) R_1 \gamma_1 + (R_0 - R_1) R_2 \gamma_2} \\ &= 0.162 \times 10^{-9} \text{ S} \end{aligned}$$

2-11 以橡胶作为绝缘的电缆漏电阻是通过下述办法测定的。把长度为 l 的电缆浸入盐水溶液中, 然后在电缆导体和溶液之间加电压, 从而测得电流。有一段 3 m 长的电缆浸入溶液后加电压 200 V , 测得电流为 $2 \times 10^{-9} \text{ A}$ 。已知绝缘层的厚度与中心导体的半径相等, 求绝缘层的电阻率。

解 由于盐水溶液的电导率要远远大于橡胶的电导率, 因此电压主要降在橡胶上。设电缆的内导体半径为 a , 橡胶的外表面半径为 b , 内外电压为 200 V 。假设橡胶内的漏电流为 I , 由电缆的轴对称性可得

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi l \rho J$$

$$J = \frac{I}{2\pi l \rho}$$

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma l \rho}$$

$$U = \int_l E \cdot dl = \frac{I}{2\pi\gamma l} \ln \frac{b}{a}$$

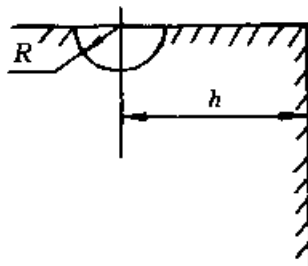
由此可得到

$$\rho_r = \frac{1}{\gamma} = \frac{2\pi l U}{I \ln b/a}$$

其中 $b/a=2$, 代入数据可得

$$\rho_r = 2.72 \times 10^{12} \Omega \cdot \text{m}$$

2-12 半球形电极置于一个直而深的陡壁附近, 如题 2-12 图所示。已知 $R=0.3 \text{ m}$, 半球中心距陡壁的距离 $h=10 \text{ m}$, 土壤的电导率 $\gamma=10^{-2} \text{ S/m}$, 求接地电阻。



题 2-12 图

解 根据解的唯一性定理, 在保证边界条件不变的情况下, 利用镜像法, 在距陡壁右侧 h 处对称地引出接地半球的镜像。由于 $2h \gg R$, 可近似认为两半球之电流沿球的径向均匀分布, 电流终止于无限远处, 由此可得

$$E = \frac{I}{2\pi\gamma r_1^2} e_{r_1} + \frac{I}{2\pi\gamma r_2^2} e_{r_2}$$

式中 r_1 和 r_2 分别为接地器中心和它的镜像的中心到土壤内任意一点的距离; e_{r_1} 、 e_{r_2} 分别为该距离连线上的单位矢量。若以无限远处为电位的参考点, 半球的电位为

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma R} + \frac{I}{2\pi\gamma \cdot 2h}$$

半球电极的接地电阻为

$$R = \frac{\varphi}{I} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2h} \right) = 53.87 \Omega$$

2-13 一个电钢条组成的接地体系统, 已知其接地电阻为 100Ω , 土壤的电导率 $\gamma=10^{-2} \text{ S/m}$ 。设有短路电流 500 A 从钢条流入地中, 有人正以 0.6 m 的步距向此接地体系统前进, 前足距钢条中心 2 m , 试求跨步电压。(解题时可把接地系统用一等效的半球形接地器代替之)。

解 半球形接地器沿地面的电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

土壤中电场强度的分布为

$$E = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}$$

设人的两脚与地面的接触点为 A, B , 则

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_{r_A}^{r_B} \frac{I}{2\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\ &= \frac{500}{2\pi \times 10^{-2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+0.6} \right) = 918 \quad \text{V} \end{aligned}$$

第三章 恒定磁场

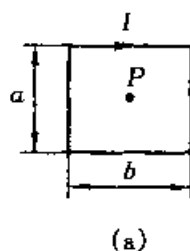
习题(3-1)

3-1-1 分别求出题 3-1-1 图所示各种形状的线电流在真空中的 P 点所产生的磁感应强度。

解 (1) 由题 3-1-1 图(a), 根据真空中载电流 I 的长为 $2l$ 的长直细导线, 在其中垂面上任一点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \left[\frac{2l}{\rho^2 + l^2} \right] e_\phi$$

可将边长分别为 a, b 的矩形边视为长为 $2l$ 的直导线, 利用叠加定理求出矩形中心点 P 处的磁感应强度。



利用右手螺旋法则, 可判断出各边在 P 点产生的磁感应强度的方向是垂直纸面向里, 设此方向为 e_z 方向, 则 P 点的磁感应强度为

$$\begin{aligned} B &= \left\{ 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{a}{2})} \left[\frac{b}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2}} \right] + 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{b}{2})} \left[\frac{a}{\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}} \right] \right\} e_z \\ &= \left\{ \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{b}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{b}{2})^2}} + \frac{\mu_0 I}{\pi b} \frac{a}{\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2}} \right\} e_z \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi ab} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} e_z \end{aligned}$$

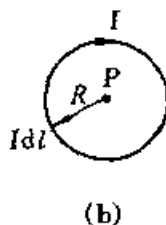
解 (2) 如题 3-1-1 图(b)所示, 选择元电流 Idl , 在 P 点产生的磁感应强度的方向沿垂直纸面向里, 大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}$$

利用叠加定理

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I}{R^2} R d\phi = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

考虑垂直纸面向里的方向为 e_z 方向, 则

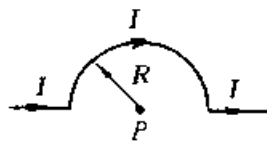


题 3-1-1 图(b)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{e}_z$$

解 (3) 如题 3-1-1 图(c)所示,该题可视为两个半无限长直线和一个半圆环在 P 点产生磁感应强度的叠加。由于半无限长直导线的延长线通过 P 点,故两个半直线到 P 点的垂直距离为零,所以它们在 P 点产生的磁感应强度为零。因此, P 点的磁感应强度只是半圆环电流在 P 点产生的磁感应强度。利用上题的结果可知

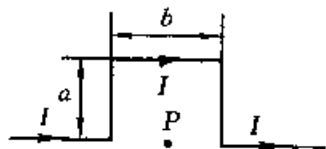
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{e}_z$$



(c)

题 3-1-1 图(c)

解 (4) 如题 3-1-1 图(d)所示。与上题相同,两个半无限长导线在 P 点产生的磁感应强度为零。矩形线框产生的磁感应强度可视为三条边在 P 点产生的磁感应强度之和。其中两条边长为 a 的边产生的磁感应强度可视为边长为 $2l$ 的半直线在 P 点产生的磁感应强度,方向均沿垂直纸面向里的方向,设此方向为 \mathbf{e}_z 的方向,则此矩形线框在 P 点产生的磁感应强度为

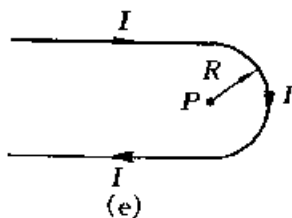


(d)

题 3-1-1 图(d)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left[2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{b}{2})} \frac{a}{\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + a^2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{b}{\sqrt{a^2 + (\frac{b}{2})^2}} \right] \mathbf{e}_z \\ &= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \right) \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\frac{b}{2})^2}} \right] \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi ab} \left[a^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

解 (5) 如题 3-1-1 图(e)所示,可视为两个半无限长直载流导线和一个半圆环线电流在 P 点产生的磁感应强度的叠加。磁感应强度的方向按右螺旋法则是垂直纸面向里的方向,设此方向为 \mathbf{e}_z 方向,则 P 点处的磁感应强度为



(e)

题 3-1-1 图(e)

$$\mathbf{B} = \left[2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} \right] \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{e}_z$$

3-1-2 设在空气中有一个边长分别为 1 m 和 0.5 m 的长方形回路,通以电流 $I=4$ A,求其中心垂直轴线上离回路平面 1 m 处的磁感应强度。

解 由于对称性,可分析长方形回路四条边上的电流在 P 点产生的磁感应强度的方向沿题 3-1-2 图所示 \mathbf{e}_z 方向。利用叠加定理,在 P 点的磁感应强度

可视为两组对边的线电流在 P 点产生的磁感应强度的矢量和。

$$\mathbf{B} = 2 \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_1} \frac{2l_1}{\sqrt{\rho_1^2 + l_1^2}} \cos\alpha_1 + \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho_2} \frac{2l_2}{\sqrt{\rho_2^2 + l_2^2}} \cos\alpha_2 \right] \mathbf{e}_z$$

式中 $\rho_1 = \sqrt{1^2 + (0.25)^2} = \sqrt{1.0625} \text{ m}$

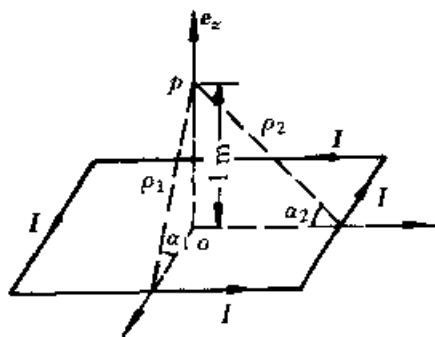
$$\rho_2 = \sqrt{1^2 + (0.5)^2} = \sqrt{1.25} \text{ m}$$

$$l_1 = \frac{1}{2} \times 1 = 0.5 \text{ m}$$

$$l_2 = \frac{1}{2} \times 0.5 = 0.25 \text{ m}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{0.25}{\rho_1}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{0.5}{\rho_2}$$



题 3-1-2 图

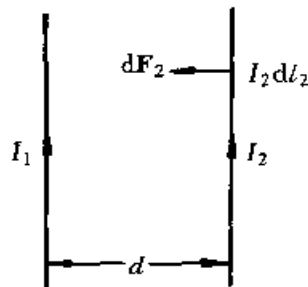
将上面各数字代入 \mathbf{B} 式中

$$\mathbf{B} = 2 \times \frac{\mu_0 I \times 0.25}{4\pi \times 1.146} \left[\frac{1}{1.0625} + \frac{1}{1.25} \right] \mathbf{e}_z = 3.039 \times 10^{-7} \mathbf{e}_z (\text{T})$$

3-1-3 两平行放置无限长直导线分别通有电流 I_1 和 I_2 , 它们之间的距离为 d , 分别求两导线单位长度上所受的磁场力。

解 由毕奥-沙伐定律可知, 无限长直导线周围的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$



题 3-1-3 图

由此可知, I_2 线电流所在的位置处, I_1 线电流所产生的恒定磁场磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{e}_\phi$$

在 I_2 线电流上选电流元 $I_2 dl_2$, 它受到 I_1 线电流在该处的磁场作用力为

$$d\mathbf{F}_2 = I_2 dl_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \mathbf{e}_\phi$$

根据右手螺旋法则, $d\mathbf{F}_2$ 的方向如题 3-1-3 图所示, 是吸引力, 其大小为

$dF_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2$ 。故线电流 I_2 上单位长度所受到的磁场力

$$F_2 = \int_0^1 \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

同理, 线电流 I_1 上单位长度受到电流 I_2 的磁场作用力为

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

方向与 F_2 的方向相反,是相互吸引力。若所设的两电流方向是相反的情况,则两电流的相互作用力互为斥力。

习题(3-2)

3-2-1 一半径为 a 的长直圆柱形导体,被一同样长度的同轴圆筒导体所包围,圆筒半径为 b ,圆柱导体与圆筒载有相反方向的电流 I 。求圆筒内外的磁感应强度(导体和圆筒内外导磁媒质的磁导率均为 μ_0)。

解 由对称性分析,电流所产生的磁场是轴对称的磁场。选择以圆柱导体轴线为中心的圆形回路作为安培环路,则

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I' \quad 0 \leq \rho \leq a$$

其中 $I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = \frac{\rho^2}{a^2} I$ 。代入上式可得

$$2\pi \rho B = \frac{\mu_0 \rho^2}{a^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

方向沿圆形环路的切线方向。当 $a \leq \rho \leq b$ 时

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

当 $b \leq \rho$ 时,

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$B = 0$$

3-2-2 有一半径为 a 的长直圆柱形导体,通有电流密度 $\mathbf{J} = J_0 \frac{\rho}{a} \mathbf{e}_z$ 的恒定电流,其中 z 轴就是圆柱导体的轴线。试求导体内外的磁场强度 \mathbf{H} 。

解 由对称性分析,电流产生的磁场为对称的平行平面场,可用安培环路定理求解。选择以 z 轴为中心的圆形安培环路,则当 $0 \leq \rho \leq a$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\rho J_0 \frac{2\pi \rho^2}{a} d\rho = \frac{2\pi J_0}{3a} \rho^3$$

$$2\pi \rho H = \frac{2\pi J_0 \rho^3}{3a}$$

$$H = \frac{J_0 \rho^2}{3a}$$

方向沿圆环回路的切线方向,即 e_ϕ 方向。故

$$\mathbf{H} = \frac{J_0 \rho^2}{3a} \mathbf{e}_\phi$$

当 $a \leq \rho$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a \frac{2\pi J_0}{a} \rho^2 d\rho = \frac{2\pi J_0 a^2}{3}$$

$$\mathbf{H} = \frac{J_0 a^2}{3\rho} \mathbf{e}_\phi$$

3-2-3 一根截面积为 2 cm^2 , 长为 10 cm 的圆柱状磁介质被均匀磁化, 磁化强度 $\mathbf{M} = 2\mathbf{e}_x \text{ A/m}$, 试计算它的磁矩 \mathbf{m} 。

解 根据磁化强度的定义

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

由题意可知磁介质被均匀磁化, 故

$$\Delta V = 2 \times 10^{-4} \times 0.1 = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

由此可得

$$\mathbf{m} = \sum \mathbf{m}_i = \mathbf{M} \Delta V = 4 \times 10^{-5} \mathbf{e}_x \text{ Am}^2$$

习题(3-3)

3-3-1 下列矢量中哪些可能是磁感应强度 \mathbf{B} ? 如果是, 请求相应的电流密度 \mathbf{J} 。

$$(1) \mathbf{F} = K(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) \quad (2) \mathbf{F} = (x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)$$

$$(3) \mathbf{F} = K\rho\mathbf{e}_\rho \quad (4) \mathbf{F} = K\rho\mathbf{e}_\phi$$

解 由恒定磁场的基本方程, 磁感应强度 \mathbf{B} 一定要满足

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

因此, 此方程可作为判断一个矢量是否磁感应强度 \mathbf{B} 的条件。

(1) $\mathbf{F} = K(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x)$ 时

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = K \left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} \right] = 0$$

\mathbf{F} 可以作为磁感应矢量, 相应的电流密度 \mathbf{J} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{K}{\mu_0} \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] \mathbf{e}_z = 2 \frac{K}{\mu_0} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(2) $F = (xe_x - ye_y)$ 时

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] = 0$$

\mathbf{F} 可以作为磁感应矢量, 相应的电流密度 \mathbf{J} 为

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right] \mathbf{e}_z = 0$$

(3) $F = k\rho\mathbf{e}_\rho$ 时

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho k\rho) = 2K \neq 0$$

故 \mathbf{F} 不能为磁感应强度矢量。

(4) $F = Kre_\phi$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(kr) = 0 \end{aligned}$$

故 \mathbf{F} 可以作为磁感应矢量, 相应的电流密度 \mathbf{J} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\phi \sin \theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r F_\phi) \mathbf{e}_\theta \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(kr \sin \theta) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(kr^2) \mathbf{e}_\theta \right] \\ &= \frac{k}{\mu_0} \cot \theta \mathbf{e}_r - 2 \frac{k}{\mu_0} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

3-3-2 在 $\mu_1 = 1500\mu_0$ 和 $\mu_2 = \mu_0$ 两种导磁媒质分界面一侧的磁感应强度 $B_1 = 1.5 \text{ T}$, 与法线方向的夹角为 35° , 求分界面另一侧的磁感应强度 B_2 的大小及它与法线方向的夹角 θ_2 。

解 利用分界面上的衔接条件和折射定律可得

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1500$$

$$\tan \theta_2 = \tan \theta_1 / 1500 = 0.0004668$$

$$\theta_2 = 0.0267^\circ \approx 0$$

$$B_{2n} = B_{1n} = B_1 \cos \theta_1 = 1.5 \times 0.819 = 1.23 \text{ T}$$

$$B_{2t} = \mu_0 H_{2t} = \mu_0 H_{1t} = \frac{\mu_0}{\mu} B_{1t} \approx 0$$

3-3-3 在恒定磁场中, 若两种不同媒质的分界面为 xoz 平面, 其上有电流线密度 $\mathbf{K} = 2\mathbf{e}_z \text{ A/m}$, 已知 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, 求 \mathbf{H}_2 。

解 两种媒质的分界面为 xoy 平面, 则分界面的法线方向为 \mathbf{e}_y 的方向。由分界面上的衔接条件可知

$$B_{1y} = B_{2y}$$

$$\mu_1 H_{1y} = \mu_2 H_{2y}$$

$$H_{2y} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1y} = \frac{2\mu_1}{\mu_2}$$

e_y 即为法线方向,由题意可知,是由媒质 2 指向媒质 1,故

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{H}_{1t} + \mathbf{K} = \mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_z + 2\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{e}_x + \frac{2\mu_1}{\mu_2} \mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z \quad \text{A/m}$$

习题(3-4)

3-4-1 在某一场域内,如果磁矢位 $\mathbf{A} = 5x^3 \mathbf{e}_x$,试求电流密度 \mathbf{J} 的分布。

解 $\because \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$

采用直角坐标系,得

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x$$

$$J_x = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_x = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] = -\frac{30}{\mu} x$$

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{e}_x = -\frac{30}{\mu} x \mathbf{e}_x$$

3-4-2 在恒定磁场中,已知磁矢位 \mathbf{A} 在圆柱坐标系中的表达式为

$$A_z = \begin{cases} -\frac{\mu I}{4\pi\rho_0^2} \rho^2 & \rho \leq \rho_0 \\ \frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{1}{2} \right) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

试求 \mathbf{H} 的分布。

解 $\because \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\therefore \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \mathbf{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi \right\} = -\frac{1}{\mu} \times \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi$$

当 $\rho \leq \rho_0$ 时

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{\mu I}{4\pi\rho_0^2} \rho^2 \right) = \frac{I\rho}{2\pi\rho_0^2} \mathbf{e}_\phi$$

当 $\rho > \rho_0$ 时

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi\rho_0^2}\mathbf{e}_\phi & \rho \leq \rho_0 \\ \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

3-4-3 已知电流分布为 $\mathbf{J} = J_0\rho\mathbf{e}_z$ ($\rho \leq a$), 其中 J_0 为常数, 求磁矢位 A 和磁感应强度 \mathbf{B} (注: A 的参考点选在 $\rho = \rho_0 > a$ 处)。

解 由对称性分析, 电流分布 \mathbf{J} 仅有 z 分量, 此问题系轴对称。采用圆柱坐标系, 可知

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z$$

又因为轴对称, $A = A_z\mathbf{e}_z$, 且 A_z 仅为 ρ 的函数, 与 ϕ, z 坐标无关, 根据题意写出磁矢位满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_0 \rho & \rho \leq a \\ \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0 & \rho > a \end{cases}$$

再根据题意, 写出磁矢位所满足的边界条件为

$$A_{z1}|_{\rho=0} \rightarrow \text{有限值}$$

$$A_{z1}|_{\rho=\rho_0}=0 \quad (\text{参考点}) \quad \rho_0 > a$$

$$A_{z1}|_{\rho=a} = A_{z2}|_{\rho=a}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}$$

由于 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}$$

由磁矢位满足的方程可求出磁矢位的通解

$$A_{z1} = -\frac{\mu_0 J_0}{9} \rho^3 + C_1 \ln \rho + C_2$$

$$A_{z2} = C_3 \ln \rho + C_4$$

利用边界条件决定通解中的待定系数

$$\because \rho=0 \text{ 时 } A_{z1}|_{\rho=0} \rightarrow \text{有限值, 故 } C_1=0$$

$$\because \rho=\rho_0 \text{ 时 } A_{z2}=0, \text{ 则 } C_4 = -C_3 \ln \rho_0$$

再利用分界面上的衔接条件

$$A_{z1}|_{\rho=a} = A_{z2}|_{\rho=a}, \text{ 得}$$

$$-\frac{\mu_0 J_0}{9} a^3 + C_2 = C_3 \ln \frac{a}{\rho_0}$$

$$\left. \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \left. \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a}, \text{得}$$

$$-\frac{\mu_0 J_0}{3} a^2 = \frac{C_3}{a}$$

由此可得

$$C_3 = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^3$$

$$C_4 = -\frac{\mu_0 J_0}{3} a^3 \ln \rho_0$$

$$C_2 = \frac{\mu_0 J_0}{9} a^3 - \frac{\mu_0 J_0}{3} a^3 \ln \frac{a}{\rho_0}$$

$$A_{z1} = \frac{\mu_0 J_0}{9} (a^3 - \rho^3 + 3 \ln \frac{\rho_0}{a}) \quad \rho \leq a$$

$$A_{z2} = \frac{\mu_0 J_0}{3} (a^3 \ln \frac{\rho_0}{\rho}) \quad \rho > a$$

利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 可求出两区域内的磁感应强度

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (A_{z1} \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2}{3} \mathbf{e}_\phi \quad \rho \leq a$$

$$\mathbf{B}_2 = \nabla \times (A_{z2} \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3\rho} \mathbf{e}_\phi \quad \rho > a$$

习题(3-5)

3-5-1 截面为圆环形的中空长直导线沿轴向流过的电流为 I , 导线圆环的内外半径分别为 R_1, R_2 。求导体以外空间各处的磁位和磁场强度。

解 由于在 $R_1 \leq \rho \leq R_2$ 的范围内有恒定电流存在, 因此该范围内不能用磁位函数 φ_m 。在 $0 \leq \rho < R_1$ 及 $\rho > R_2$ 的空间范围内, 无电流存在, 故可以引入磁位函数 φ_m 。

建立磁位所满足的拉普拉斯方程及边界条件为

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \quad 0 \leq \rho < R_1$$

$$\nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad \rho > R_2$$

令 $\varphi_{m1}|_{\phi=0} = 0$ (参考点)

$$\varphi_{m2}|_{\phi=0} = 0$$

$$\varphi_{m1}|_{\phi=2\pi} = 0$$

$$\varphi_{m2}|_{\phi=2\pi} = -I$$

利用磁位函数所满足的方程, 可求出通解为

$$\varphi_{m1} = C_1 \phi + C_2 \quad 0 \leq \rho < R_1$$

$$\varphi_{m2} = C_3\phi + C_4 \quad \rho > R_2$$

利用边界条件决定通解中的待定系数

$$\varphi_{m1}|_{\phi=0} = 0 \quad C_2 = 0$$

$$\varphi_{m2}|_{\phi=0} = 0 \quad C_4 = 0$$

$$\varphi_{m1}|_{\phi=2\pi} = 0 \quad C_1 = 0$$

$$\varphi_{m2}|_{\phi=2\pi} = -I \quad C_3 = -\frac{I}{2\pi}$$

由此可得

$$\varphi_{m1} = 0 \quad 0 \leq \rho < R_1$$

$$\varphi_{m2} = -\frac{I}{2\pi}\phi \quad \rho > R_2$$

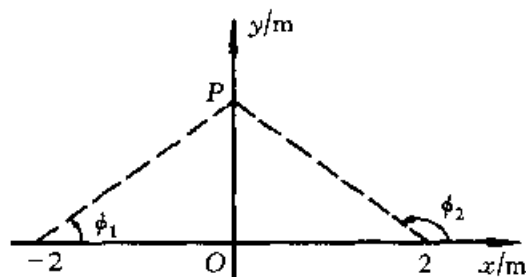
再利用 $\mathbf{H} = -\nabla\varphi_m$, 可得两区域内的磁场强度

$$\mathbf{H}_1 = -\nabla\varphi_{m1} = 0 \quad 0 \leq \rho < R_1$$

$$\mathbf{H}_2 = -\nabla\varphi_{m2} = \frac{I}{2\pi\rho}\mathbf{e}_\phi \quad \rho > R_2$$

注:此题也可用安培环路定律先求出 \mathbf{H} , 再求 φ_m 。

3-5-2 真空中在 $x = -2\text{ m}$, $y = 0$ 处有一沿 \mathbf{e}_z 方向 6 mA 的线电流, 另外在 $x = 2\text{ m}$, $y = 0$ 处有一沿 $(-\mathbf{e}_z)$ 方向 6 mA 的线电流, 设原点处磁位 $\varphi_m = 0$, 试求沿 y 轴的磁位 φ_m 。



题 3-5-2 图

解 如题 3-5-2 图所示, 由题意可知

$$\varphi_{m1}|_{\phi_1=0} = 0$$

$$\varphi_{m2}|_{\phi_2=\pi} = 0$$

y 轴上任意点 P 的磁位是两电流在该点产生磁位的叠加

$$\varphi_m = \varphi_{m1} + \varphi_{m2}$$

$$\varphi_{m1} = \int_{l_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_{\phi_1}^0 \frac{I}{2\pi\rho} \rho d\phi_1 = -\frac{I}{2\pi}\phi_1$$

$$\varphi_{m2} = \int_{\phi_2}^{\pi} \left(-\frac{I}{2\pi\rho}\right) \rho d\phi = -\frac{I}{2\pi}(\pi - \phi_2)$$

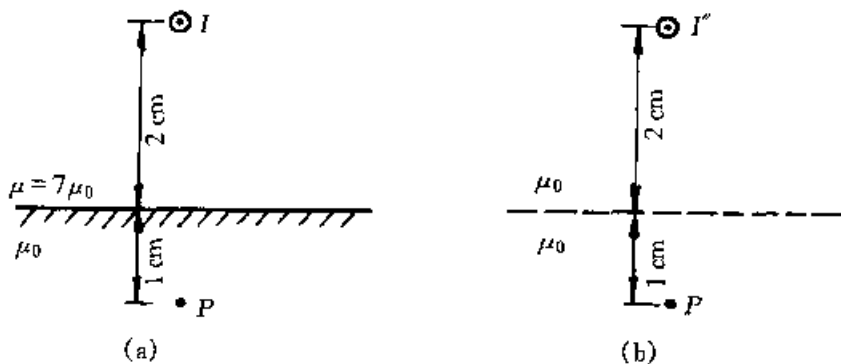
$$\varphi_m = -\frac{I}{2\pi}\phi_1 - \frac{I}{2\pi}(\pi - \phi_2) = \frac{I}{2\pi}(\phi_2 - \phi_1 - \pi)$$

$$\therefore \phi_2 = \pi - \phi_1$$

$$\therefore \varphi_m = -\frac{I}{\pi}\phi_1 = -\frac{I}{\pi}\arctan \frac{y}{2}$$

习题(3-6)

3-6-1 在磁导率 $\mu = 7\mu_0$ 的无限大导磁媒质中,有一载流为 10 A 的长直细导线距媒质分界面 2 cm 处,试求媒质分界面另一侧(空气)中距分界面 1 cm 处 P 点的磁感应强度 B 。



题 3-6-1 图

解 利用恒定磁场中的镜像法,有效区域为空气,则可假设将媒质分界面去掉,上下空间的均为空气($\mu = \mu_0$)。在原导磁媒质所在上半空间内,引入镜像电流

$$I' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I$$

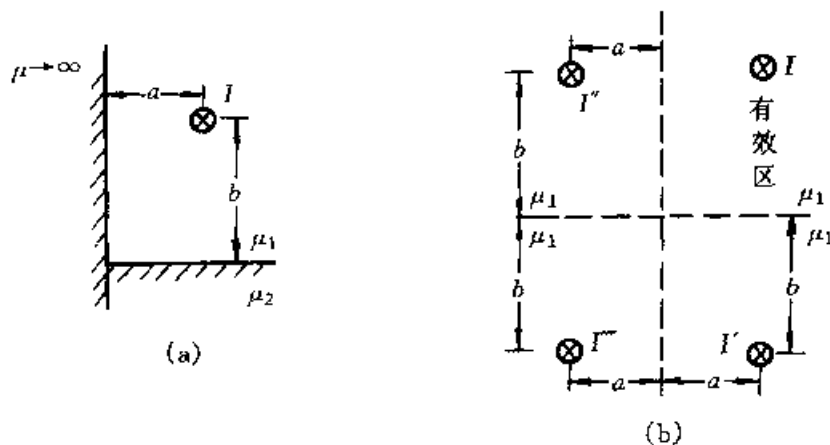
位于原电流所在处,则 P 点的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} e_\phi$$

方向沿以电流所在处为中心的圆的切向方向。其大小为

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{14}{8} I}{2\pi \times 0.03} = 11.67 \times 10^{-5} \text{ T}$$

3-6-2 如题 3-6-2 图(a)所示,求电流 I 所在区域为有效区时,镜像电流的大小与位置。



题 3-6-2 图

解 镜像电流的大小与位置均如题 3-6-2 图(b)所示。镜像电流的参考方向设与原电流 I 的方向一致。其大小分别为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

$$I'' = I$$

$$I''' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

习题(3-7)

3-7-1 真空中一长直导线通有电流 I , 如题 3-7-1 图所示。求回路 $abcd$ 和 $klmn$ 交链的磁通。

解 (1) 先求回路 $abcd$ 的磁通。由安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I'$$

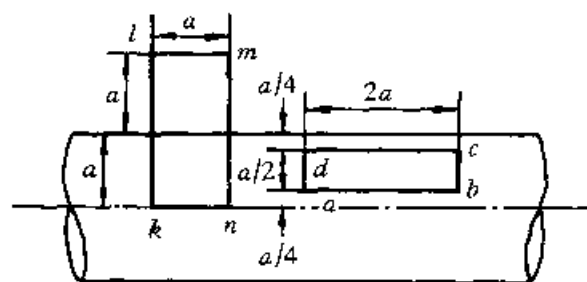
可以先求出在导体内部某一点的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

其中 a 为长直导线的半径。通过回路 $abcd$ 的磁通为

$$\phi_{mabcd} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{a/4}^{3a/4} \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi a^2} 2a d\rho = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \text{ Wb}$$

(2) 求 $klmn$ 的磁通。回路 $klmn$ 有一部分在导线内, 另一部分在导线外, 故将通过回路的磁通分为两部分。



题 3-7-1 图

$$\phi_{m1} = \int_0^a \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} a d\rho = \frac{\mu_0 I a}{4\pi}$$

$$\phi_{m2} = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} a d\rho = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$$

$$\phi_{mklmn} = \phi_{m1} + \phi_{m2} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} (1 + 2\ln 2) \quad \text{Wb}$$

3-7-2 有一横截面为正方形的铁磁镯环,均匀绕有 500 匝导线,镯环内、外半径分别为 $R_1 = 6 \text{ cm}$ 和 $R_2 = 7 \text{ cm}$,高 $h = 1 \text{ cm}$, $\mu = 800\mu_0$,求线圈的自感系数。

解 由于对称性,可以以镯环中心为圆心,作圆形安培环路。当 $\rho < R_1$ 时,内部没有电流,故 $H = 0$ 。

当 $\rho > R_2$ 时,同样 $H = 0$ 。

当 $R_1 \leq \rho \leq R_2$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

方向沿圆形回路的切线方向。故磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

穿过 $dS = h d\rho$ 的元磁通为

$$d\phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu NI}{2\pi\rho} h d\rho$$

与此元磁通交链的磁通链为

$$d\phi_m = N d\phi_m = \frac{\mu N^2 I}{2\pi\rho} h d\rho$$

由此可得出穿过镯环内的磁通链为

$$\phi_m = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} h \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{\mu N^2 I}{2\pi} h \ln \frac{R_2}{R_1}$$

线圈的自感系数为

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \frac{800\mu_0 \times 500^2 \times 0.01}{2\pi} \ln \frac{0.07}{0.06} = 0.0616 \quad \text{H}$$

3-7-3 如题 3-7-3 图所示。求真空中:

- (1) 沿 Z 轴放置的无限长线电流和匝数为 1 000 的矩形回路之间的互感;
- (2) 如矩形回路及其长度所标尺寸的单位不是米而是厘米,再重新求其互感。

解 设无限长直线电流为 I ,则在 N 匝矩形回路内产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

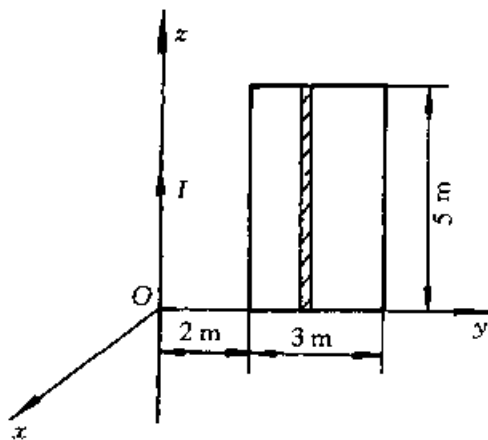
在 $2 \leq y \leq 5$ 的范围内, 距电流 I y 处选一个 $dS = 5dy$ 的小面元, 穿过小面元的磁通为

$$d\phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \times 5dy$$

该磁通与电流交链的磁通链为

$$d\psi_m = Nd\phi_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi y} \times 5dy$$

$$\psi_m = \int_2^5 \frac{\mu_0 NI}{2\pi y} \times 5dy = \frac{5\mu_0 NI}{2\pi} \ln \frac{5}{2}$$



题 3-7-3 图

无限长线电流和匝数为 1 000 的矩形回路之间的互感为

$$M = \frac{\psi_m}{I} = 0.916 \text{ mH}$$

当图中标尺寸为厘米时, 上式可得

$$M = \frac{0.05 \times \mu_0 N}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.02} = 9.16 \text{ } \mu\text{H}$$

习题(3-8)

3-8-1 求无限长同轴电缆单位长度内导体和内外导体之间区域所储存的磁场能量。设内导体半径为 R_1 , 外导体很薄, 半径为 R_2 。内外导体及内外导体之间媒质的磁导率均为 μ_0 且通有电流 I 。

解 由于轴对称性, 应用安培环路定律可以很方便地得出内导体内部的磁场强度和磁感应强度分别为

$$H_1 = \frac{I\rho}{2\pi R_1^2}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R_1^2}$$

内、外导体之间的磁场强度和磁感应强度分别为

$$H_2 = \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

外导体以外的磁场强度和磁感应强度均为零。由此可以得出内导体内部单位长度储存的磁场能量为

$$\begin{aligned}
 W_{m1} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_1 dV = \frac{1}{2} \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{4\pi^2 R_1^4} 2\pi \rho d\rho \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad 0 \leq \rho \leq R_1
 \end{aligned}$$

在内、外导体之间单位长度储存的磁场能量为

$$\begin{aligned}
 W_{m2} &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{H}_2 dV = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho^2} 2\pi \rho d\rho \\
 &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad R_1 \leq \rho \leq R_2
 \end{aligned}$$

电缆单位长度所储存的磁场能量为

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right)$$

3-8-2 在题3-7-2的钨环线圈中, 通以电流 $I=1\text{ A}$ 。求磁场能量:

(1) 用 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 的表达式求解;

(2) 用 $W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$ 求解。

解 (1) 因为 $L=0.0616\text{ H}$

$$\text{所以 } W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 0.0616 \times 1^2 = 0.0308 \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad W_m &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi^2 \rho^2} 2\pi \rho d\rho \\
 &= \frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{800 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 500^2 \times 0.01}{4\pi} \ln \frac{0.07}{0.06} \\
 &= 0.0308 \text{ J}
 \end{aligned}$$

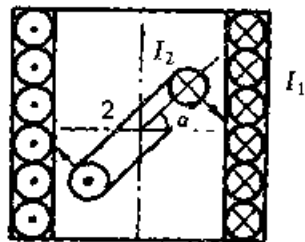
3-8-3 电动式仪表有两个线圈, 其中一个固定不动, 另一个可以绕轴转动, 如题3-8-3图所示。设两线圈中的电流分别为 I_1, I_2 , 且两线圈的互感为 $M(\alpha)$, 试求线圈2所受的转矩。

解 两线圈的相互作用能为

$$W_m = M(\alpha) I_1 I_2$$

故线圈2受的转矩为

$$T = \frac{\partial W_m}{\partial \alpha} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \alpha}$$



题3-8-3图

习题(3-9)

3-9-1 一电磁铁铁心的形状如题3-9-1图所示, 线圈匝数为1000, 空

气隙长度 $l = 2.0 \text{ mm}$, 磁路的 a, b, c 三段长度与截面面积都相等, 气隙的磁阻比它们每段的大 30 倍, 当线圈中有电流 $I = 1.8 \text{ A}$ 时, 气隙内的磁感应强度 B 为多少? (忽略漏磁通及左右边框的磁阻)

解 设气隙的磁阻

$$R_{ml} = \frac{l}{\mu_0 S}$$

a, b, c 三段的磁阻可视为相同

$$R_m = \frac{1}{30} R_{ml}$$

由磁路基本定律可知

$$\phi_{mc} = \phi_{ma} + \phi_{mb}$$

$$\phi_{ma} R_m + \phi_{ma} R_{ml} + \phi_{mc} R_m = NI$$

$$\phi_{ma} R_m + \phi_{ma} R_{ml} = \phi_{mb} R_m$$

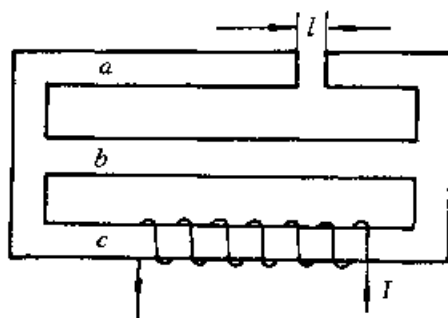
解以上三式可得

$$\phi_{mb} = 31 \phi_{ma}$$

$$\phi_{mc} = 32 \phi_{ma}$$

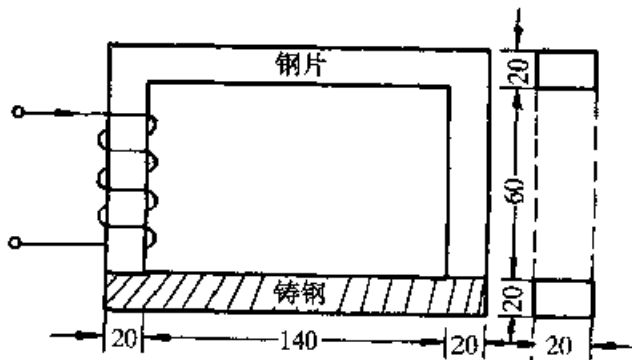
$$\phi_{ma} R_{ml} = \frac{30 NI}{63}$$

$$B = \frac{\phi_{ma}}{S} = \frac{\mu_0 NI \times 30}{63 l} = 0.54 \text{ T}$$



题 3-9-1 图

3-9-2 如题图 3-9-2 图所示, 磁路由铸钢和电工钢片构成, 尺寸单位为毫米, 若要使铸钢中的磁通为 $3.2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$, 求所需的磁动势 (铸钢和电工钢片的基本磁化曲线用下列表格表示)。



题 3-9-2 图

铸钢和电工钢片的基本磁化曲线的表格表示

铸钢

$H/(\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100
B/T	0.27	0.39	0.50	0.61	0.72	0.82	0.90	0.98	1.05	1.11

电工钢片

$H/(\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	40	60	80	100	120	140	160	180	200	
B/T	0.12	0.30	0.45	0.57	0.65	0.70	0.76	0.80	0.85	

解 (1) 此磁路由电工钢片和铸钢两种材料构成, 可分两部分来计算。

(2) 每段的截面积和平均长度分别为

$$S_1 = 0.02 \times 0.02 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$S_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$l_1 = 2 \times 0.07 + 0.16 = 0.3 \text{ m}$$

$$l_2 = 0.18 \text{ m}$$

(3) 每段的磁感应强度为

$$B_1 = \frac{\phi}{S_1} = \frac{3.2 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-4}} = 0.8 \text{ T}$$

$$B_2 = \frac{\phi}{S_2} = 0.8 \text{ T}$$

(4) 每段的磁场强度(查表可得)为

$$H_1 = 180 \text{ A/m}$$

$$H_2 = 680 \text{ A/m}$$

(5) 每段的 HI 为

$$H_1 l_1 = 54 \text{ A}$$

$$H_2 l_2 = 680 \times 0.18 = 122.4 \text{ A}$$

(6) 总磁通势为

$$F_m = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 176.4 \text{ At}$$

思考题

3-1 在均匀磁场中, 能否证明通电流 I 的闭合线圈所受合力为零。

答 设均匀磁场的磁感应强度为 B , 则磁场对闭合线圈的作用力为

$$\mathbf{F} = \oint_l I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \oint_l IB d\mathbf{l} \sin\theta$$

其中 θ 为电流元 $I dl$ 与磁场 B 的夹角。由于 I 和 B 为常量, 而 $dl \sin \theta$ 为 dl 在垂直磁场方向的投影, 对闭合电流线圈而言 $\oint_I dl \sin \theta = 0$, 所以 $F = 0$ 。故可以证明。

3-2 静电场中 $\nabla \times E = 0$ 引入了电位 φ , 而恒定磁场中引入了 φ_m , 所以恒定磁场必有 $\nabla \times H = 0$ 。

答 静电场是无旋场, $\nabla \times E = 0$, 可以引入电位函数 φ , 它表示在静电场中将单位正电荷从参考点移至某点外力所作的功。而恒定磁场是有旋场, $\nabla \times H = J$, 因而不存在磁位函数 φ_m 。但在 $J = 0$ 的区域, $\nabla \times H = 0$ 存在, 为了求解方便, 引入磁位函数 φ_m 作为辅助量帮助分析计算。 φ_m 没有明确的物理意义。因此, 恒定磁场中不是必有 $\nabla \times H = 0$ 。

3-3 在什么条件下, 两种不同媒质分界面一侧的 B 线垂直于分界面?

答 根据磁场中的折射定律 $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ 可知, 当 B 线由铁磁物质(磁导率 μ 很大)进入非铁磁物质(磁导率 μ 很小)时, 在分界面的非铁磁质一侧, 都可认为 B 线是与分界面相垂直的。

3-4 解决磁位多值性的方法是什么? 磁位的适用条件是什么?

答 解决磁位多值性的方法是设立磁屏障, 即在电流回路引起的磁场中, 可以规定积分路径不准穿过回路所限定的曲面。磁位只适用于传导电流密度 $J = 0$ 的区域。

3-5 平行平面磁场中 B 线即为等 A 线的含义是什么?

答 平行平面磁场中, 每一条 B 线都表示该线上各点的 A 值均相等。利用磁矢位边值问题求解出磁矢位函数, 其等值线就是 B 线, 为分析计算平行平面磁场提供了方便。若该平面为 xoy 平面, 且 A 垂直该平面沿 z 方向时, 则磁感应强度 $B_x = \frac{\partial A}{\partial y}$, $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$ 。

3-6 两线圈 L_1 、 L_2 的形状、尺寸和相互距离不改变, 当

(1) 两线圈处在铁板同一侧时

(2) 铁板放在两线圈之间时

请回答, 两线圈的自感、互感将如何发生变化?

答 (1) 两线圈处在铁板同一侧时, 由于铁板表面会产生磁化电流, 对两线圈的自感磁通和互感磁通均有影响。利用镜像法可在铁板另一侧用镜像电流替代磁化电流的作用, 这时可以看出自感磁通和互感磁通均会增加, 所以两线圈的自感和互感均会增加。

(2) 若铁板放在两线圈之间, 采用上面相同的分析方法, 可以看出自感仍将增加, 但互感将减少。

3-7 在无限大被均匀磁化的导磁媒质中,有一圆柱形空腔,其轴线平行于磁化强度 M ,则空腔中一点 P 的磁场强度 H_P 与导磁媒质中的磁场强度 H 满足什么关系?

答 导磁媒质被均匀磁化,利用媒质分界面上的衔接条件,在空腔与导磁媒质分界面上,磁化电流线密度

$$K_m = M \times (-e_\rho) = Me_z \times (-e_\rho) = -Me_\phi$$

其中 K_m 的量值等于 M 。在导磁媒质与空腔内的磁场就是磁化电流 K_m 产生的。故可以计算出空腔内任一点的磁场强度

$$H_P = -K_m e_z = -Me_z$$

而在导磁媒质中, K_m 产生的磁感应强度为零。则导磁媒质内的磁场强度为

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = -M = -Me_z$$

由此可以得出

$$H_P = H$$

3-8 磁矢位在 $\mu \rightarrow \infty$ 的铁磁质与空气分界面上所满足的衔接条件是什么?

答 在 $\mu \rightarrow \infty$ 的铁磁质内部磁场强度 $H=0$, 它和空气分界面上空气一侧的磁场强度与分界面垂直。因此,沿分界面磁场强度的切线分量等于零。以平行平面磁场为例,磁矢位在铁磁质与空气分界面上所满足的衔接条件为

$$A_1 = A_2 = \text{常量}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial n} = 0$$

式中 n 为分界面的法线。

3-9 载流回路 I_1 单独作用时,在空间产生 B_1 和 H_1 ,载流回路 I_2 单独作用时,在空间产生 B_2 和 H_2 ,当两者同时作用时,在空间总的能量密度 ω'_m 等于什么?

答 利用场的叠加定理,两者同时作用时

$$B = B_1 + B_2, \quad H = H_1 + H_2$$

故可以得到空间的能量密度

$$\begin{aligned} \omega'_m &= \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) \cdot (H_1 + H_2) \\ &= \frac{1}{2} (B_1 \cdot H_1 + B_2 \cdot H_2) + \frac{1}{2} (B_2 \cdot H_1 + B_1 \cdot H_2) \end{aligned}$$

上式中前一项是载流回路 I_1, I_2 分别在空间产生的磁场所具有的磁场能量密度,称为自有能量密度。后一项是两个载流回路产生的磁场相互作用的互有能量密度。

3-10 由自由电流激发的磁场中存在有导磁媒质时,磁场仅由自由电流产

生吗? 还应考虑什么的作用?

答 此时磁场不仅由自由电流产生, 还应考虑导磁媒质在磁场中要发生磁化, 产生磁化电流。磁化电流也要激发磁场, 所以磁场是由自由电流(又称传导电流)和媒质内的磁化电流共同作用产生的。

3-11 何谓媒质的磁化? 表征磁化程度的物理量是什么? 它是如何定义的? 如何考虑媒质在磁场中的效应?

答 将媒质放在外磁场中, 外磁场对媒质分子磁矩将有转矩作用, 使得分子磁矩的排列比较有序化, 媒质内总的磁矩不再等于零, 而呈现磁性的现象, 称为媒质的磁化。表征磁化程度的物理量是磁化强度。媒质内某一点处的磁化强度定义为该点单位体积内所有分子磁矩的矢量和, 即

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

由于媒质的磁化, 使媒质中出现了宏观的附加电流——磁化电流。磁化电流也会产生磁场, 媒质在磁场中产生的效应可以视为磁化电流产生的作用。只要把磁化电流考虑进去, 与通常所称自由电流一起计算它们在真空中产生的磁感应强度即可。

3-12 在两维场中, \mathbf{B} 线即等 A 线, 能否说等 A 线上各点的 \mathbf{B} 值都相等, 为什么?

答 只能说 \mathbf{B} 线上各点的 A 相等, 不能说等 A 线上各点的 \mathbf{B} 值都相等。因为等 A 线就是 \mathbf{B} 线, 而同一条 \mathbf{B} 线上, 各点的 \mathbf{B} 值大小和方向并不一定相同。 \mathbf{B} 线上任一点的切线方向仅表示该点磁感应强度的方向, 并不反映该点磁感应强度的大小。磁感应强度的大小是利用 \mathbf{B} 线分布的疏密来表示的。

3-13 列出自感计算的步骤。自感、互感与哪些因素有关? 现有一个线圈置于空气中, 其周围放入一块铁磁物质, 此线圈的自感有何变化? 如果放入一块铜, 自感有何变化?

答 计算自感(包括计算内自感和外自感)一般采用假设流过回路的电流为 I , 然后按 $I \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \phi_m \rightarrow \psi_m \rightarrow L$ 的步骤求得。也可以由 $I \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \phi_m \rightarrow \psi_m \rightarrow L$ 的步骤求得。还可以用聂以曼公式计算。对单个电流回路, 还可以先计算磁场能量再求自感。即

$$L = \frac{2W_m}{I^2}$$

自感和互感均与本身回路的形状、尺寸、大小、材料及周围媒质的特性有关。互感还与两回路的相互位置有关。

当一个线圈置于空气中, 在其周围放入一块铁磁物质时, 此线圈的自感将会增加。但若是放入一块铜, 自感的变化将不明显, 因为铜的磁导率与空气相差不

多。

3-14 总结磁场能量的计算方法。何谓自有能和互有能？现有的磁场能量计算公式能否适用于非线性媒质？试解释之。

答 若为单个电流回路, $W_m = \frac{1}{2}LI^2$; 若为两个电流回路组成的系统, $W_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$; 若为 n 个电流回路组成的系统, $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n M_{kj} I_k I_j$ 。若能计算出恒定磁场的磁感应强度和磁场强度, 则 $W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \cdot dV$, 其中 \mathbf{H}, \mathbf{B} 为空间某点的磁场强度和磁感应强度, 而积分区域 V 为所研究范围内整个磁场分布的区域。

由各自的回路电流分别单独在空间中产生的磁场所具有的能量的叠加, 称之为自有能, 它仅与自身的电流和其自感系数有关, 自有能恒为正。由电流回路之间相互作用产生磁场能量的叠加, 称之为互有能, 它与两回路电流和互感系数有关, 互有能可正可负, 随电流的流向及两电流回路的同名端而定。当电流同时从两电流回路同名端流入(出)时, 互有能为正, 否则为负。

现有的磁场能量计算公式不能适用于非线性媒质。因为我们在推导现有的磁场能量计算公式时, 首先假设周围均为线性媒质, 进而利用了叠加定理, 得出磁场能量仅与回路电流最终状态有关, 而与电流建立的过程无关的结论, 这对于非线性媒质均是不适合的。

习 题

3-1 四条平行的载流 I 无限长直导线垂直地通过一边长为 a 的正方形顶点, 求正方形中心点 P 处的磁感应强度值。

解 利用无限长直导线, 若有线电流 I 通过, 在真空中产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

再利用叠加定理可求出四条平行载流长直导线在 P 点所产生的磁感应强度。由右手螺旋法则, 可以判断出其方向如题 3-1 图所示垂直向下, 大小为

$$B = \frac{4\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a} \cos 45^\circ = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}$$

3-2 真空中, 在 $z=0$ 平面上的 $0 < x < 10$ 和 $y > 0$ 范围内, 有以线密度 $\mathbf{K} = 500\mathbf{e}_y$ A/m 均匀分布的电流, 求在点 $(0, 0, 5)$ 所产生的磁感应强度。

解 如题 3-2 图所示。选择 $dI = k dx$, 视为半无限长直导线, 它在 P 点产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 dI}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 K}{4\pi\rho} dx$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + 5^2}$ 。由右手螺旋法则可判断 dB 的方向, 并将 dB 分解为 x 方向和 z 方向两个分量

$$dB_x = dB \cos\theta = \frac{5\mu_0 K}{4\pi(x^2 + 5^2)} dx$$

$$dB_z = dB \sin\theta = \frac{\mu_0 K x}{4\pi(x^2 + 5^2)} dx$$

利用叠加定理, P 点的磁感应强度的 x 分量和 z 分量分别为

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{10} \frac{5\mu_0 K}{4\pi(x^2 + 5^2)} dx \\ &= \frac{5\mu_0 K}{4\pi} \times \frac{1}{5} \arctan \frac{x}{5} \Big|_0^{10} \\ &= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \arctan 2 = 44.1 \mu_0 \text{ T} \end{aligned}$$

$$B_z = \int_0^{10} \frac{\mu_0 k x}{4\pi(x^2 + 5^2)} dx = 32 \mu_0 \text{ T}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (44.1 \mathbf{e}_x + 32 \mathbf{e}_z) \text{ T}$$

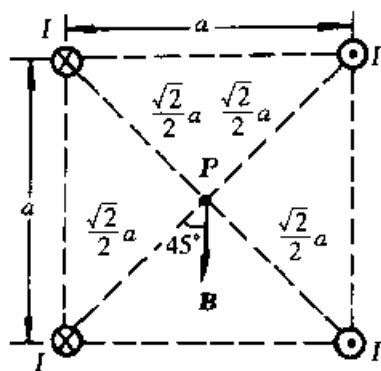
3-3 真空中一通有电流 (密度 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$)、半径为 b 的无限长圆柱内, 有一半径为 a 的不同轴圆柱形空洞, 两轴线之间相距 d , 如题 3-3 图所示。求空洞内任一点的 \mathbf{B} 。

解 若假设空洞处有大小同为 J , 但流向分别为 \mathbf{e}_z 方向和 $(-\mathbf{e}_z)$ 方向的电流, 这样可将此问题视为半径为 b 的无限长圆柱内整体载有电流 $J_0 \mathbf{e}_z$ 和半径为 a 的无限长圆柱内载有电流 $(-J_0 \mathbf{e}_z)$ 的两个长圆柱在 P 点产生的磁感应强度的叠加。

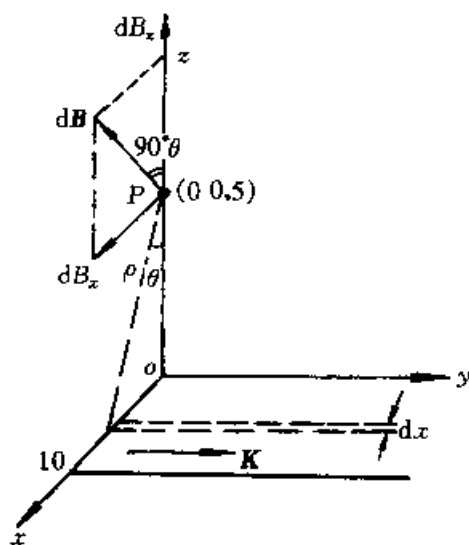
利用安培环路定律, 半径为 b 的大圆柱在空洞内 P 点所产生的磁感应强度大小为

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

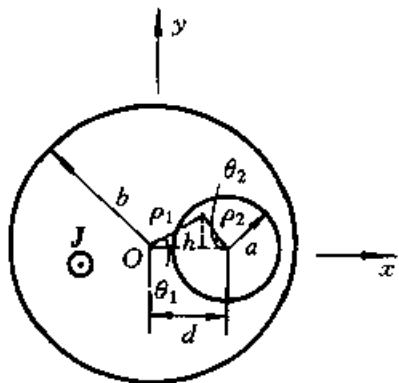
$$2\pi\rho_1 B_1 = \mu_0 J_0 \pi \rho_1^2$$



题 3-1 图



题 3-2 图



题 3-3 图

$$B_1 = \frac{\mu_0 J_0 \rho_1}{2}$$

其方向用右手螺旋法则判断,它沿以大圆柱轴线为中心, ρ_1 为半径圆环的切线方向。对半径为 a 的小圆柱,在空洞内 P 点所产生的磁感应强度大小为

$$B_2 = \frac{\mu_0 J_0 \rho_2}{2}$$

其方向也用右手螺旋法则判断,只是电流沿 $(-e_z)$ 方向。若设大圆柱与小圆柱中心连线为 x 正方向,则 P 点的磁感应强度应为两圆柱各自在 P 点产生的磁感应强度的矢量和

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = B_{1x} - B_{2x} + B_{1y} + B_{2y} \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{2} [(-\rho_1 \sin \theta_1 + \rho_2 \sin \theta_2) \mathbf{e}_x + (\rho_1 \cos \theta_1 + \rho_2 \cos \theta_2) \mathbf{e}_y] \\ &= \frac{\mu_0 J_0}{2} [(-\rho_1 \frac{h}{\rho_1} + \rho_2 \frac{h}{\rho_2}) \mathbf{e}_x + (\rho_1 \frac{x_1}{\rho_1} + \rho_2 \frac{x_2}{\rho_2}) \mathbf{e}_y] \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 J_0}{2} (x_1 + x_2) \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 J_0}{2} d \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

式中 h 为 P 点到 x 轴的垂直距离, x_1 为 ρ_1 在 x 轴上的投影, x_2 为 ρ_2 在 x 轴上的投影, d 为两圆柱轴线的距离。

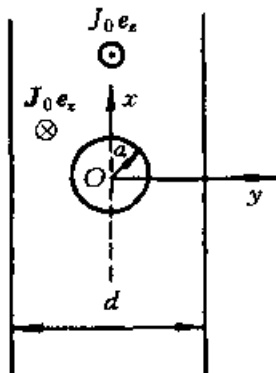
3-4 真空中有一厚度为 d 的无限大载流(均匀密度 $J_0 \mathbf{e}_z$) 平板,在其中心位置有一半径等于 a 的圆柱形空洞,如题 3-4 图所示。求各处的磁感应强度。

解 与上题思路相同,假设空洞中存在 $J_0 \mathbf{e}_z$ 和 $(-J_0 \mathbf{e}_z)$ 的电流,求各点处的磁感应强度可视为一个无限大均匀载流 $J_0 \mathbf{e}_z$ 的平板与一个载流为 $(-J_0 \mathbf{e}_z)$ 的无限长直圆柱各自在该处产生的磁感应强度的矢量和。

通有 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$ 的无限大平板在空间各点产生的磁感应强度,可利用安培环路定律求出

$$\mathbf{B}_1 = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 d}{2} \mathbf{e}_x & y \geq \frac{d}{2} \\ -\mu_0 J_0 y \mathbf{e}_x & \frac{d}{2} < y < \frac{d}{2} \\ \frac{\mu_0 J_0 d}{2} \mathbf{e}_x & y \leq -\frac{d}{2} \end{cases}$$

通有 $\mathbf{J} = -J_0 \mathbf{e}_z$ 的无限长直圆柱产生的磁感应强度,也可利用安培环路定律求出



题 3-4 图

$$B_2 = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 a^2}{2(x^2 + y^2)} [-ye_x + xe_y] & \rho > a \\ -\frac{\mu_0 J_0}{2} [-ye_x + xe_y] & \rho < a \end{cases}$$

各处的场强为它们的矢量和

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

3-5 一电流线密度 $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{e}_z$ 的无限大电流片, 置于 $x=0$ 平面, 如取 $Z=0$ 平面上半径为 a 的一个圆为积分回路, 求 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ 。

解 利用安培环路定律

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$I = \int_l (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_n) dl = 2aK_0$$

$$\therefore \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2aK_0$$

3-6 如题 3-6 图所示的两个无限大电流片, 试分别确定区域①, ②和③中的 \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{M} 。设已知: (1) 所有区域中 $\mu_r = 0.998$; (2) 区域②中 $\mu_r = 1000$, 区域①, ③中 $\mu = \mu_0$ 。

解 (1) 由于两个无限大电流片的电流方向相反, 因此在区域①, ③内

$$H_1 = H_3 = 0$$

$$B_1 = B_3 = 0$$

$$M_1 = M_3 = 0$$

在区域(2)内

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= \mathbf{B}'_2 + \mathbf{B}''_2 = \frac{\mu K}{2} \mathbf{e}_y + \frac{\mu K}{2} \mathbf{e}_y \\ &= 0.998 \mu_0 \times 80 \mathbf{e}_y = 100.3 \times 10^{-6} \mathbf{e}_y \quad \text{T} \end{aligned}$$

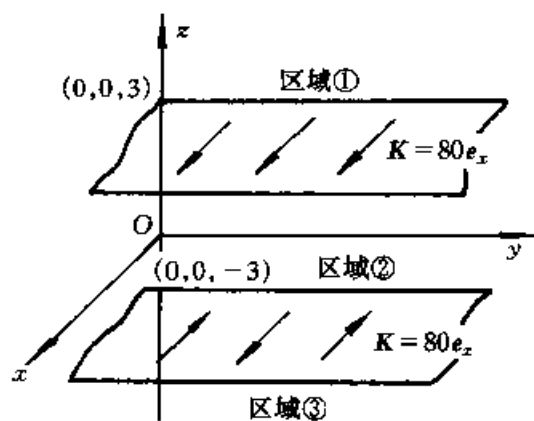
$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu} = 80 \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu} - \mathbf{H}_2 = -0.16 \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

(2) 在区域①, ③内与上面的结论一致。在区域②内

$$\mathbf{H}_2 = 80 \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 = 1000 \mu_0 \times 80 \mathbf{e}_y = 0.1005 \mathbf{e}_y \quad \text{T}$$



题 3-6 图

$$\mathbf{M}_2 = \frac{\mathbf{B}_2}{\mu_0} - \mathbf{H}_2 = 1\,000 \times 80\mathbf{e}_y - 80\mathbf{e}_y = 79\,920\mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

3-7 半径为 a , 长度为 l 的圆柱, 被永久磁化到磁化强度为 $M_0\mathbf{e}_z$ (Z 轴就是圆柱的轴线)。

(1) 求沿轴各处的 \mathbf{B} 及 \mathbf{H} ;

(2) 求远离圆柱 ($\gg a, \rho \gg l$) 处的磁场。

解 先分析该圆柱的磁化现象。由于是均匀磁化, M_0 为常数。在圆柱内部磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times M\mathbf{e}_z = 0$$

磁化电流线密度为

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_n$$

其 \mathbf{e}_n 为表面的法向方向。在圆柱的两个端面, 其外法线方向分别为 $\pm \mathbf{e}_z$, 代入上式可知端面上 $\mathbf{K}_m = 0$, 不存在磁化电流线密度。在圆柱的侧面 $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\rho$, 故侧面上的磁化电流线密度为

$$\mathbf{K}_m = M_0\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = M_0\mathbf{e}_\phi$$

由此可见, 要求永久磁化圆柱沿轴线的磁场, 就是求磁化电流线密度 $\mathbf{K}_m = M_0\mathbf{e}_\phi$ 在空间沿轴各处的磁感应强度。圆柱面上的磁化电流可以视为若干个小圆环电流, 每个小圆环电流为

$$dI_m = K_m dz' = M_0 dz'$$

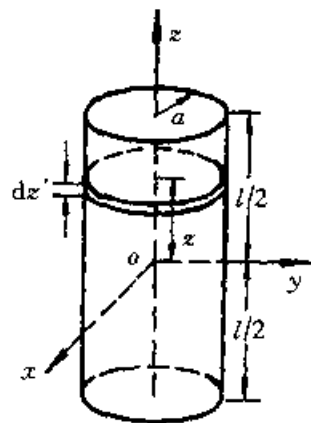
式中 dz' 是小圆环的宽度, 每个小圆环电流在轴线上某点均产生磁感应强度。利用圆环电流在其中心轴线一点的磁感强度的表达式, 可写出 dI_m 在轴线上产生沿轴线方向的磁感应强度为

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 dI_m a^2}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 a^2 M_0 dz'}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ B &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu_0 a^2 M_0 dz'}{2[a^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 M_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2} - z}{[a^2 + (z - \frac{l}{2})^2]^{1/2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{[a^2 + (z + \frac{l}{2})^2]^{1/2}} \right\} \end{aligned}$$

磁感应强度的方向沿 \mathbf{e}_z 的方向, 故

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2} - z}{[a^2 + (z - \frac{l}{2})^2]^{1/2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{[a^2 + (z + \frac{l}{2})^2]^{1/2}} \right\} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$



题 3-7 图

当 $-\frac{l}{2} \leq Z \leq \frac{l}{2}$ 时

$$\mathbf{H} = \frac{M_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2} - z}{[a^2 + (z - \frac{l}{2})^2]^{1/2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{[a^2 + (z + \frac{l}{2})^2]^{1/2}} \right\} \mathbf{e}_z - M_0 \mathbf{e}_z$$

当 $Z > \frac{l}{2}$ 或 $Z < -\frac{l}{2}$ 时, $M=0$

$$\mathbf{H} = \frac{M_0}{2} \left\{ \frac{\frac{l}{2} - z}{[a^2 + (z - \frac{l}{2})^2]^{1/2}} + \frac{\frac{l}{2} + z}{[a^2 + (z + \frac{l}{2})^2]^{1/2}} \right\} \mathbf{e}_z$$

(2) 当远离圆柱时, 即 $|z| \gg \frac{l}{2}, \rho \gg a$ 时, 可将此圆柱视为一个磁偶极子, 磁偶极矩

$$\mathbf{m} = I_m \mathbf{S} \mathbf{e}_z = M_0 l \pi a^2 \mathbf{e}_z$$

它在空间中产生的磁场可用磁矩 \mathbf{m} 表示为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r^3} [2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta] = \frac{\mu_0 a^2 l M_0}{4r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{a^2 l M_0}{4r^3} (2\cos\theta \mathbf{e}_r + \sin\theta \mathbf{e}_\theta)$$

若仍求轴线上 $|Z| \gg \frac{l}{2}$ 的磁感应强度, 由于 $r = Z, \sin\theta = 0, \cos\theta = 1$, 则

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 M_0 a^2}{2z^3} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi z^3} \mathbf{e}_z$$

3-8 有一圆形截面铁环, 环的内外半径分别为 10 cm, 与 12 cm 铁环的 $\mu_r = 500$, 环上绕有 50 匝通有 2 A 电流的线圈, 求环的圆截面内外的磁场强度与磁感应强度(忽略漏磁, 且环外的磁导率为 μ_0)。

解 从对称性分析, 此题可用安培环路定律求解。圆环的截面之外即 $\rho < 10$ cm 及 $\rho > 12$ cm 处, 作以圆环中心为圆心的安培环路, 则

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

所以环的截面以外各处 $B = 0, H = 0$ 。在环的截面内可认为磁场分布均匀, 选

$\rho = \frac{10+12}{2} = 11$ cm 为半径, 作一安培环路

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

$$2\pi\rho H = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} = 144.69 \text{ A/m}$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = 4\pi \times 10^{-7} \times 500 \times 144.69 = 9.1 \times 10^{-2} \text{ T}$$

B, H 的方向均沿安培环路的切线方向。

3-9 已知在 $Z > 0$ 的区域中 $\mu_{r1} = 4$, 在 $Z < 0$ 的区域中 $\mu_{r2} = 1$, 设在 $Z > 0$ 处 B 是均匀的, 其方向为 $\theta = 60^\circ, \phi = 45^\circ$, 量值为 1 Wb/m^2 , 试求 $Z < 0$ 处的 B 和 H 。

解 利用媒质分界面上的衔接条件, 因为 $B_t = 1 \text{ Wb/m}^2$, 则 $B_{1n} = B_1 \cos \theta = 0.5 \text{ Wb/m}^2, B_{1t} = B_1 \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Wb/m}^2$ 。利用

$$B_{2n} = B_{1n} = 0.5 \text{ Wb/m}^2$$

$$H_{2t} = H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_{r1} \mu_0} = \frac{\sqrt{3}}{8\mu_0} \text{ A/m}$$

$$B_{2t} = \mu_{r2} \mu_0 H_{2t} = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ Wb/m}^2$$

由此可得

$$\tan \theta_2 = \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2t}^2} = \frac{\sqrt{19}}{8} \text{ Wb/m}^2$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{19}}{8\mu_0} \text{ A/m}$$

由于入射面与折射面共面, 故 $\phi_2 = 45^\circ$ 。

3-10 对真空中下列电流分布求 B 。

$$(1) J = J_0 \frac{y}{a} e_z \quad -a < y < a$$

$$(2) J = J_0 \frac{\rho}{a} e_z \quad \rho < a$$

解 (1) $y=0$ 处 $J=0, 0 < y < a$ 处 J 沿 e_z 方向, $-a < y < 0$ 处 J 沿 $(-e_z)$ 方向, 由对称性分析, 可视为一组组流向相反的无限大平板电流产生的磁场问题, 因此可知在 $y > a$ 及 $-a > y$ 的空间内, $B=0$ 。

当 $-a < y < a$ 空间内距中心 y' 处 ($|y'| < a$) 选对称的两薄板, 其电流线密度分别为 $K_1 = J_0 \frac{y'}{a} dy' e_z, K_2 = -J_0 \frac{y'}{a} dy' e_z$ 。该两个薄平板在 $-y' < y < y'$ 的空间内产生的磁感应强度为

$$dB = \mu_0 K_1 e_x = \mu_0 J_0 \frac{y'}{a} dy' e_x$$

该两个薄平板在 $|y| > |y'|$ 处的磁感应强度均为零。由此可知, 凡 $|y'| < |y|$ 的电流片对 y 点的磁场无贡献, 只有 $|y'| > |y|$ 的电流片对 y 点的磁场有贡献。因此

$$\mathbf{B} = \left[\int_y^a \mu_0 J_0 \frac{y'}{a} dy' \right] \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 J_0}{2a} (a^2 - y^2) \mathbf{e}_x$$

所以磁场的分布为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0}{2a} (a^2 - y^2) \mathbf{e}_x & -a < y < a \\ 0 & -a > y, y > a \end{cases}$$

(2) 这是轴对称的电流分布, 可直接用安培环路定律求解。当 $\rho < a$ 时

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$2\pi\rho B = \frac{2\pi\mu_0 J_0}{a} \times \frac{1}{3}\rho^3$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 \rho^2}{3a}$$

方向沿环路的切线方向。当 $\rho > a$ 时

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$2\pi\rho B = \frac{2\pi\mu_0 J_0}{3a} a^3$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{3\rho}$$

方向也是沿安培环路的切线方向。

3-11 对于真空中的下列电流分布, 求磁矢位及磁感应强度:

(1) 半径为 a 的无限长圆柱通有电流, 其电流线密度 $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{e}_z$

(2) 厚度为 d 的无限长电流片通有电流, 电流面密度 $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{e}_z$

解 (1) 由题意, 圆柱侧面通有沿轴线方向的线密度为 K 的电流。由对称性分析, 它产生的磁场为平行平面场, 且磁矢位也沿 \mathbf{e}_z 方向, 仅为圆柱坐标系中 ρ 的函数

$$\mathbf{A} = A_z(\rho) \mathbf{e}_z$$

将研究区域分为圆柱内与圆柱外, 由此写出圆柱坐标系下磁矢位所满足的边值问题。

$$\nabla^2 \mathbf{A}_1 = \nabla^2 A_{z1} \mathbf{e}_z = 0 \quad \rho < a$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_2 = \nabla^2 A_{z2} \mathbf{e}_z = 0 \quad \rho > a$$

即

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_{z1}}{d\rho} \right) = 0 \quad \rho < a$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_{z2}}{d\rho} \right) = 0 \quad \rho > a$$

$A_{z1}|_{\rho=0} \rightarrow \text{有限值}$, 令 $A_{z1}|_{\rho=0} = 0$ (参考点)

$$A_{z1}|_{\rho=a} = A_{z2}|_{\rho=a}$$

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} - \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \mu_0 K_0$$

方程的通解为

$$A_{z1} = C_1 \ln \rho + C_2 \quad \rho < a$$

$$A_{z2} = C_3 \ln \rho + C_4 \quad \rho > a$$

由边界条件决定待定系数

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\mu_0 K_0 a, \quad C_4 = \mu_0 K_0 a \ln a,$$

$$A_{z1} = 0$$

$$A_{z2} = -\mu_0 K_0 a \ln \rho + \mu_0 K_0 a \ln a = \mu_0 K_0 a \ln \frac{a}{\rho}$$

由此可知

$$\mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \rho \leq a \\ \mu_0 K_0 a \ln \frac{a}{\rho} \mathbf{e}_z & \rho > a \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{cases} 0 & \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 K_0 a}{\rho} \mathbf{e}_\phi & \rho > a \end{cases}$$

解 (2) 如题 3-11 图所示, 建立坐标系。由对称性分析, 沿 z 轴与 y 轴方向都是平行平面场, 因此 \mathbf{A} 仅与 x 有关。所以

$$\mathbf{A} = A_z(x) \mathbf{e}_z$$

将研究的区域分布为三部分, 分别写出 \mathbf{A} 满足的边值问题

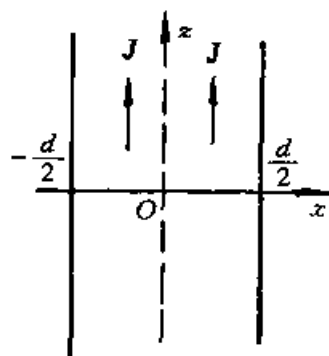
$$\nabla^2 A_{z1}(x) = \frac{d^2 A_{z1}}{dx^2} = 0 \quad -\infty < x < -\frac{d}{2}$$

$$\nabla^2 A_{z2}(x) = \frac{d^2 A_{z2}}{dx^2} = -\mu_0 J_0 \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$$

$$\nabla^2 A_{z3}(x) = \frac{d^2 A_{z3}}{dx^2} = 0 \quad \frac{d}{2} < x < \infty$$

$$A_{z2}|_{x=0} = 0 \text{ (参考点)}$$

$$A_{z1}(-x) = A_{z3}(x)$$



题 3-11 图

$$A_{z1}|_{x=-\frac{d}{2}} = A_{z2}|_{x=-\frac{d}{2}}$$

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial x}|_{x=-\frac{d}{2}} = \frac{\partial A_{z2}}{\partial x}|_{x=-\frac{d}{2}}$$

$$A_{z2}|_{x=\frac{d}{2}} = A_{z3}|_{x=\frac{d}{2}}$$

$$\frac{\partial A_{z2}}{\partial x}|_{x=\frac{d}{2}} = \frac{\partial A_{z3}}{\partial x}|_{x=\frac{d}{2}}$$

方程的通解为

$$A_{z1}(x) = C_1x + C_2$$

$$A_{z2}(x) = -\frac{\mu_0 J_0}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

$$A_{z3}(x) = C_5x + C_6$$

利用边界条件决定解的待定系数

$$C_1 = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}, \quad C_2 = C_6 = \frac{\mu_0 J_0 d^2}{8}$$

$$C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = -\frac{\mu_0 J_0 d}{2}$$

磁矢位为

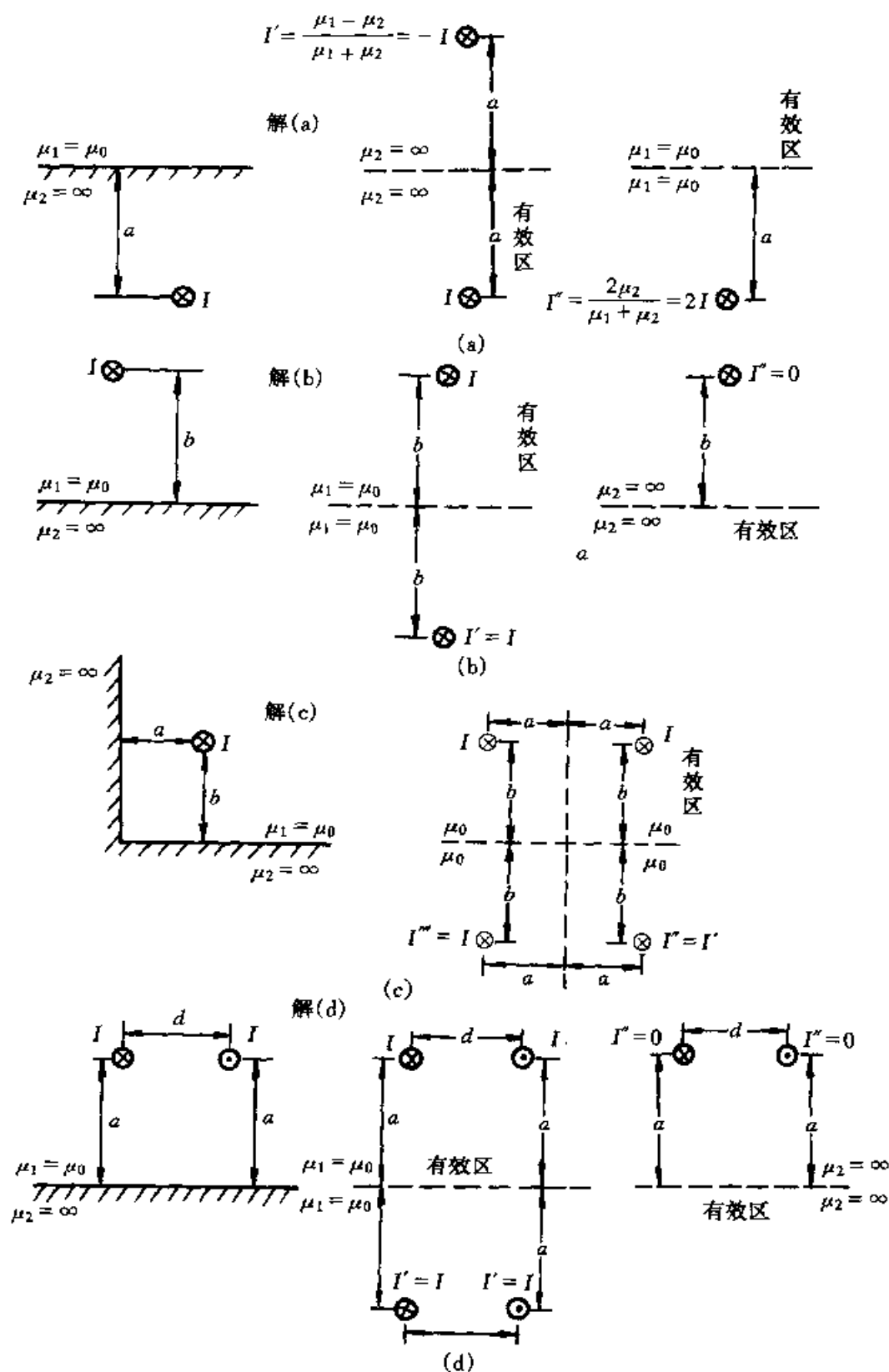
$$A_z(x) = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_0 d}{2}x + \frac{\mu_0 J_0 d^2}{8} & -\infty < x < -\frac{d}{2} \\ -\frac{\mu_0 J_0}{2}x^2 & -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \\ -\frac{\mu_0 J_0 d}{2}x + \frac{\mu_0 J_0 d^2}{8} & \frac{d}{2} < x < \infty \end{cases}$$

磁感应强度为

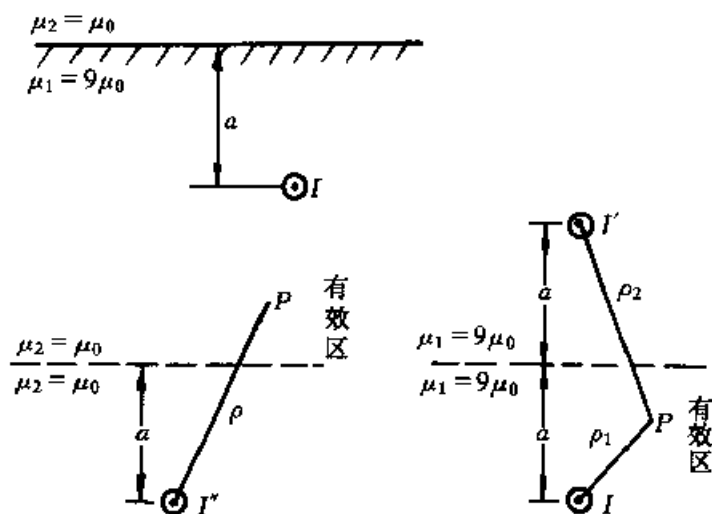
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{e}_y = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 d}{2} \mathbf{e}_y & -\infty < x < -\frac{d}{2} \\ \mu_0 J_0 x \mathbf{e}_y & -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \\ \frac{\mu_0 J_0 d}{2} \mathbf{e}_y & \frac{d}{2} < x < \infty \end{cases}$$

3-12 点出如题 3-12 图(a)~(d)所示各种情况下的镜像电流,注明电流的方向、量值及有效的计算区域。

3-13 在磁导率为 μ_1 的媒质中,有载流直导线与两种媒质分界面平行,垂直距离为 a ,设 $\mu_2 = \mu_0, \mu_1 = 9\mu_0$,如题 3-13 图所示。求两种媒质中的磁场强度和载流导线每单位长度所受的力,并回答对于 μ_2 媒质中的磁场,由于 μ_1 的存在,磁场强度比全部为均匀媒质(μ_2)时变大还是变小。



题 3-12 图及其解



题 3-13 图

解 有效区为 $\mu_1 = 9\mu_0$ 所分布的区域时,采用镜像法,镜像电流 I' 为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I = -\frac{4}{5} I$$

其所在位置如题 3-13 图所示。这时有有效区内 P 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho_1} \mathbf{e}_{\rho_1} + \frac{\mu_1 I'}{2\pi\rho_2} \mathbf{e}_{\rho_2}$$

磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_1} = \frac{I}{2\pi\rho_1} \mathbf{e}_{\rho_1} + \frac{I'}{2\pi\rho_2} \mathbf{e}_{\rho_2}$$

载流导线单位长度所受力为

$$F = \frac{\mu_1 I'}{2\pi(a+a)} I = -\frac{1.8\mu_0 I^2}{\pi a} \text{ N/m}$$

上式中负号表示斥力。当有效区为 $\mu_2 = \mu_0$ 所分布的区域时,镜像电流 I'' 为

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I = -1.8I$$

其所在位置如题 3-13 图所示。这时有有效区内 P 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_2 I''}{2\pi\rho} \mathbf{e}_{\rho} = \frac{9\mu_0 I}{10\pi\rho} \mathbf{e}_{\rho}$$

磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_2} = \frac{9\mu_0 I}{10\mu_0 \pi \rho} \mathbf{e}_{\rho} = \frac{9I}{10\pi\rho} \mathbf{e}_{\rho}$$

对 μ_2 媒质中的磁场,若电流 I 不变,而全部充满 $\mu_2 = \mu_0$ 的媒质,则它在 P 点产

生的磁感应强度为

$$B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

磁场强度为

$$H' = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi\rho}$$

由此可以看出,存在 μ_1 媒质时使 μ_2 媒质内的磁场比全部为均匀媒质(μ_2)时变大了。

3-14 求题 3-14 图所示两同轴导体壳系统中储存的磁场能量及自感。

解 设同轴导体壳长为 l , 内部与外部通有大小相等、方向相反的电流 I 。采用安培环路定律, 可分别求出导体壳内外各部分的磁感应强度和磁场强度。当 $\rho < R_1$ 时

$$B_1 = 0, \quad H_1 = 0$$

当 $R_1 \leq \rho \leq R_2$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} I$$

$$H_2 = \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$B_2 = \frac{\rho^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\mu_1 I}{2\pi\rho}$$

当 $R_2 \leq \rho \leq R_3$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi\rho}$$

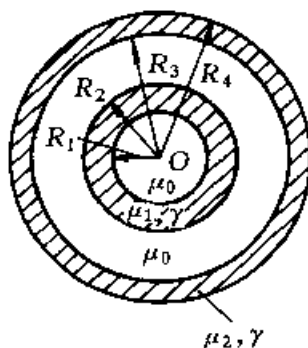
$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

当 $R_3 \leq \rho \leq R_4$ 时

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I - \frac{\rho^2 - R_3^2}{R_4^2 - R_3^2} I = \frac{R_4^2 - \rho^2}{R_4^2 - R_3^2} I$$

$$H_4 = \frac{R_4^2 - \rho^2}{R_4^2 - R_3^2} \frac{I}{2\pi\rho}$$

$$B_4 = \frac{R_4^2 - \rho^2}{R_4^2 - R_3^2} \frac{\mu_2 I}{2\pi\rho}$$



题 3-14 图

当 $\rho > R_4$ 时

$$H_5 = 0$$

$$B_5 = 0$$

由此可求出储存于导体壳系统的磁场能量

$$\begin{aligned} W_m &= W_{m2} + W_{m3} + W_{m4} \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_1} B_2 H_2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} B_3 H_3 dV + \frac{1}{2} \int_{V_3} B_4 H_4 dV \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_1 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \times \frac{(\rho^2 - R_1^2)^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} l 2\pi \rho d\rho + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho^2} l 2\pi \rho d\rho + \right. \\ &\quad \left. \int_{R_3}^{R_4} \frac{\mu_2 I^2}{4\pi^2 \rho^2} \times \frac{(R_4^2 - \rho^2)^2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} l 2\pi \rho d\rho \right\} \\ W_m &= \frac{I^2 l}{4\pi} \left\{ \frac{\mu_1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mu_0 \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\mu_2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \left[\frac{R_4^4 - R_3^4}{4} + R_4^4 \ln \frac{R_4}{R_3} - R_4^2 (R_4^2 - R_3^2) \right] \right\} \\ L &= \frac{2W_m}{I^2} = \frac{l}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} + R_1^4 \ln \frac{R_2}{R_1} - R_1^2 (R_2^2 - R_1^2) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mu_0 \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\mu_2}{(R_4^2 - R_3^2)^2} \left[\frac{R_4^4 - R_3^4}{4} + R_4^4 \ln \frac{R_4}{R_3} - R_4^2 (R_4^2 - R_3^2) \right] \right\} \end{aligned}$$

3-15 如题 3-15 图所示, 计算两平行长直导线对中间线框的互感; 当线框通有电流 I_2 , 且线框为不变形的刚体时, 求长导线对它的作用力。

解 对如题 3-15 图所示的电流 I , 它在线框处距左方导线中心线 x 处的磁感应强度为

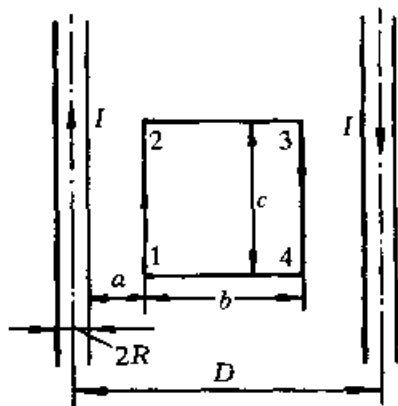
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right]$$

该磁场在中间线框产生的磁通和磁通链为

$$\begin{aligned} \psi_m = \phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{a+R}^{a+b+R} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) C dx \\ &= \frac{\mu_0 I C}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-R-a)}{(R+a)(D-R-a-b)} \end{aligned}$$

平行长直导线与中间线框的互感为

$$M = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0 C}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-R-a)}{(R+a)(D-R-a-b)}$$



题 3-15 图

当中间线框的电流 I_1 的方向为题 3-15 图中所示方向时, I_1 与 I 在线框中产生的磁场方向一致, 互有能为正。此时互有能为

$$W_m = MI I_1 = \frac{\mu_0 c I I_1}{2\pi} \ln \frac{(a+b+R)(D-R-a)}{(R+a)(D-R-a-b)}$$

平行通电导线时通有电流的线框的作用力为

$$F = \left. \frac{\partial W_m}{\partial a} \right|_{I \text{ 不变}} = \frac{\mu_0 c I I_1}{2\pi} \frac{D(b-a)(a+b-D)}{ab(D-a)(D-b)}$$

3-16 计算如题 3-16 图所示的长直导线与线框之间的互感。请给出所需镜像电流的大小、方向及位置, 并给出此时导线与线框的互感。

解 由于有 $\mu \rightarrow \infty$ 的无限大导磁媒质在导线的左侧, 此题要用镜像法求解。镜像电流在所研究区域之外, 位于媒质分界面左侧距分界面 d 处, 镜像电流 $I' = I$, 且与所设导线上的电流方向一致。这样, 电流 I 与镜像电流 I' 在线框中距导线 x 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2d} \right]$$

电流 I 与镜像电流在线框中产生的磁通和交链的磁通链为

$$\begin{aligned} \psi_m = \phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2d} \right] c dx \\ &= \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(a+b+2d)}{a(a+2d)} \end{aligned}$$

导线与线框的互感为

$$M = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)(a+b+2d)}{a(a+2d)}$$

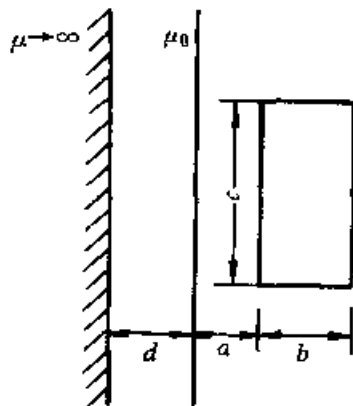
3-17 对于题 3-17 图所示厚度为 D (垂直纸面方向) 的磁路, 求:

- (1) 线圈的自感;
- (2) 可动部件所受的力。

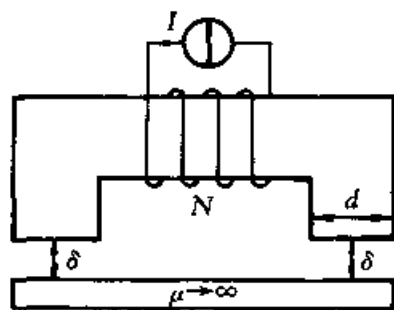
解 由于铁磁物质的磁导率 $\mu \rightarrow \infty$, 磁场限制在磁路内。铁芯内 $H=0$, 故由安培环路定律得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

$$H \times 2\delta = NI$$



题 3-16 图



题 3-17 图

$$H = \frac{NI}{2\delta}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{2\delta}$$

穿过气隙的磁通为

$$\phi_m = BS = \frac{\mu_0 NI d D}{2\delta}$$

利用媒质分界面上的衔接条件,可知铁芯内的磁感应强度与气隙中的磁感应强度相同

$$B_2 = B_{2n} = B_{1n} = B_1$$

由此可知电流线圈所交链的磁通链为

$$\psi_m = N\phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I d D}{2\delta}$$

由于可得到线圈的自感为

$$L = \frac{\psi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 d D}{2\delta}$$

系统储存的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 d D}{2\delta} I^2$$

可动部件所受的作用力为

$$F = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \delta} \right|_{I \text{ 不变}} = - \frac{\mu_0 N^2 d D}{4\delta^2} I^2 < 0$$

故作用力的方向将使广义坐标 δ 减小,为吸引力。

3-18 试证明在两种媒质分界面上,不论磁场方向如何,磁场力总是垂直于分界面,且总是由磁导率大的媒质指向磁导率小的媒质。

解 设两种媒质的磁导率分别为 μ_1, μ_2 , e_n 为分界面的法线方向,且由媒质 1 指向媒质 2。在两种媒质分界面上的场量分别为 B_1, H_1, B_2, H_2 , 将它们的法线分量视为一个力管,切线分量视为另一个力管。法线分量力管在分界面处受的是纵张力,则单位面积所受的力为

$$f_0^{(1)} = f_2^{(1)} - f_1^{(1)} = \frac{1}{2} B_{2n} H_{2n} - \frac{1}{2} B_{1n} H_{1n}$$

切线分量力管受到的是侧压力,单位面积的受力为

$$f_0^{(2)} = f_1^{(2)} - f_2^{(2)} = \frac{1}{2} H_{1t} B_{1t} - \frac{1}{2} H_{2t} B_{2t}$$

媒质分界面上单位面积受到的磁场力是它们的叠加

$$f_0 = f_0^{(1)} + f_0^{(2)} = \frac{1}{2} [B_{2n} H_{2n} - B_{1n} H_{1n} + H_{1t} B_{1t} - B_{2t} H_{2t}]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{B_{2n}^2}{\mu_2} - \frac{B_{1n}^2}{\mu_1} + \mu_1 H_{1t}^2 - \mu_2 H_{2t}^2 \right]$$

利用媒质分界面上的衔接条件

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

代入 f_0 中可得

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 \mu_1} B_{1n}^2 + (\mu_1 - \mu_2) H_{1t}^2 \right] \\ &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1 \mu_2} [B_{1n}^2 + \mu_1 \mu_2 H_{1t}^2] \end{aligned}$$

当 $\mu_1 > \mu_2$ 时, $f_0 > 0$, 说明力沿 e_n 的正方向, 由媒质 1 指向媒质 2。当 $\mu_1 < \mu_2$ 时, $f_0 < 0$, 说明力沿 $(-e_n)$ 方向, 即从媒质 2 指向媒质 1。由此可知, 磁场力总是由磁导率大的媒质指向磁导率小的媒质。

第四章 时变电磁场

习题(4-1)

4-1-1 长直导线载有电流 $i = I_m \sin \omega t$, 在其附近有一矩形线框, 如题 4-1-1 图所示。求线框中的感应电动势。

解 应用安培环路定律, 可以解得导线周围任一点的磁感应强度为

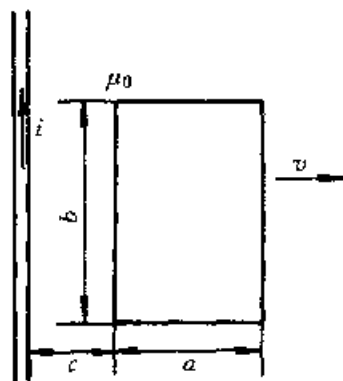
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I_m \sin \omega t}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

穿过以速度 v 运动的矩形线框的磁链为

$$\begin{aligned} \psi_m &= \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{c+vt}^{c+a+vt} \frac{\mu_0 I_m \sin \omega t}{2\pi\rho} b d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I_m b}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{c+a+vt}{c+vt} \end{aligned}$$

线框的感应电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= - \frac{d\psi_m}{dt} = - \frac{\mu_0 I_m b}{2\pi} \times \\ &\quad \left[\omega \cos \omega t \ln \frac{c+a+vt}{c+vt} - \frac{av}{(c+vt)(c+a+vt)} \sin \omega t \right] \end{aligned}$$



题 4-1-1 图

4-1-2 设电场强度 $E(t) = E_m \cos \omega t$ V/m, $\omega = 10^3$ rad/s。计算下列各种媒质中的传导电流密度和位移电流密度幅值的比值:

- (1) 铜 $\gamma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$;
- (2) 蒸馏水 $\gamma = 2 \times 10^{-4}$ S/m, $\epsilon_r = 80$;
- (3) 聚苯乙烯 $\gamma = 10^{-16}$ S/m, $\epsilon_r = 2.53$

解 传导电流密度 J_C 和位移电流密度 J_D 分别由以下公式求得

$$J_C = \gamma E = \gamma E_m \cos \omega t$$

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = -\epsilon \omega E_m \sin \omega t$$

幅值的比值为

$$K = \frac{J_C}{J_D} = \frac{\gamma E_m}{\epsilon \omega E_m} = \frac{\gamma}{\epsilon \omega}$$

将已知条件代入上式,可得各种媒质的 K 值:

$$\text{铜} \quad K = \frac{5.8 \times 10^7}{8.854 \times 10^{-12} \times 1\,000} = 6.55 \times 10^{15}$$

$$\text{蒸馏水} \quad K = \frac{2 \times 10^{-4}}{80 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1\,000} = 2.83 \times 10^2$$

$$\text{聚苯乙烯} \quad K = \frac{10^{-16}}{2.53 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1\,000} = 4.47 \times 10^{-9}$$

由此可知,当频率较低时, γ 较大的媒质中可以忽略位移电流, γ 很小的媒质中以位移电流为主,如聚苯乙烯。

习题(4-2)

4-2-1 证明下述电磁场满足理想介质中的电磁场基本方程组的条件

$$\mathbf{E} = \cos(y - ct) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \cos(y - ct) \mathbf{e}_x$$

证明 只要证明电磁场 \mathbf{E}, \mathbf{B} 满足独立的电磁场基本方程,即麦克斯韦第一、二方程即可。

$$\text{先证明 } \mathbf{E}, \mathbf{B} \text{ 满足 } \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu} \times \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{e}_z = \frac{1}{c\mu} \sin(y - ct) \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c\epsilon \sin(y - ct) \mathbf{e}_z \quad (2)$$

所以,当式(1)与式(2)相等时,有 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 。或者说,当 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 时, \mathbf{E}, \mathbf{B} 满足麦克斯韦第一方程。

$$\text{再证明 } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}:$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{e}_x = -\sin(y - ct) \mathbf{e}_x$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \times c \cos(y - ct) \mathbf{e}_x = -\sin(y - ct) \mathbf{e}_x$$

说明无论 c 为何值, \mathbf{E}, \mathbf{B} 均能满足麦克斯韦第二方程。综合考虑,当 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 时, \mathbf{E}, \mathbf{B} 可以满足电磁场基本方程组。

4-2-2 已知分界面一侧媒质 1 为空气,另一例媒质 2 为干土, $\epsilon_{r2} = 3$, $\gamma_2 = 10^3 \text{ S/m}$ 。现有 $E_1 = 100 \sin(1\,000t + 30^\circ) \text{ V/m}$,其方向与分界面法线成 45° 角,求 E_2 。

解 根据已知条件,媒质 1 中电场的切向、法向分量分别为

$$E_{1t} = E_1 \sin 45^\circ = \sqrt{2} 50 \sin(1000t + 30^\circ)$$

$$E_{1n} = E_1 \cos 45^\circ = \sqrt{2} 50 \sin(1000t + 30^\circ)$$

由衔接条件,电场切向分量连续,所以

$$E_{2t} = E_{1t} = \sqrt{2} 50 \sin(1000t + 30^\circ)$$

电流的法向分量连续

$$J_{2n} = J_{1n}, \quad \text{即} \quad \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$$

得

$$E_{2n} = \gamma_1 E_{1n} / \gamma_2 = 0$$

所以,在媒质 2 侧仅有电场的切线分量

$$\mathbf{E} = \sqrt{2} 50 \cos(1000t + 30^\circ) \mathbf{e}_t$$

4-2-3 设 $z=0$ 处为空气与理想导体的分界面, $z<0$ 一侧为理想导体,分界面处的磁场强度为

$$H(x, y, 0, t) = H_0 \sin \beta x \cos(\omega t - \beta y) \mathbf{e}_z$$

试求理想导体表面上的电流分布、电荷分布和分界面处的电场强度 \mathbf{E} 的切线分量。

解 理想导体内部电磁场为零。导体表面有感应面电流,其线密度为

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{H} = H_0 \sin \beta x \cos(\omega t - \beta y) \mathbf{e}_y$$

根据 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 有

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_z \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\mathbf{e}_z H_0 \beta \sin \beta x \sin(\omega t - \beta y) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

上式对时间 t 积分

$$\epsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt = -\mathbf{e}_z H_0 \beta \sin \beta x \int \sin(\omega t - \beta y) dt$$

得

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{H_0 \beta}{\omega \epsilon_0} \sin \beta x \cos(\omega t - \beta y) + c$$

设无恒定场,所以 $c=0$ 。由此可看出 \mathbf{E} 的切向分量为零。

分界面存在感应面电荷,其密度为

$$\sigma = \epsilon_0 E_n = \frac{H_0 \beta}{\omega} \sin \beta x \cos(\omega t - \beta y)$$

习题(4-3)

4-3-1 在时变电磁场中,已知矢量位函数

$$\mathbf{A} = A_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x$$

其中 A_m 和 β 均为常数。试求电场强度 \mathbf{E} 和磁场强度 \mathbf{H} 。

解 根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 及 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$, 可得磁场强度

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = -\frac{\beta}{\mu_0} A_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

应用麦克斯韦第一方程

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{\beta^2}{\mu_0} A_m \sin(\omega t - \beta z)$$

上式对时间 t 积分, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt = -\frac{\beta^2}{\omega \mu_0 \epsilon} A_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x \\ &= -\omega A_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

4-3-2 试用直接代入法证明, 以 $(t - R \sqrt{\mu\epsilon})$ 或 $(t + R \sqrt{\mu\epsilon})$ 为变量的具有二阶连续偏导数的任意函数 u , 均是齐次波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ 的解。

证明 设以 $(t - R \sqrt{\mu\epsilon})$ 为变量的函数 $u = u(t - R \sqrt{\mu\epsilon})$, 那么, u 对 R 的两次偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial R} &= -\sqrt{\mu\epsilon} u' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} &= -\sqrt{\mu\epsilon} (-\sqrt{\mu\epsilon}) u'' = -\mu\epsilon u'' \end{aligned} \quad (1)$$

u 对时间 t 的两次偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u' \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'' \quad (2)$$

将式(1), (2)代入齐次波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\epsilon u'' - \mu\epsilon u'' = 0$$

同理可以证明, 以 $(t + R \sqrt{\mu\epsilon})$ 为变量的函数满足齐次波动方程。

习题(4-4)

4-4-1 已知一电磁波的电场和磁场分量为

$$\mathbf{E} = 1000 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H} = 2.65 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

试写出坡印亭矢量 \mathbf{S} 。

解 坡印亭矢量等于 \mathbf{E} 与 \mathbf{H} 的叉积

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 2650 \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z \quad \text{W/m}^2$$

电磁波沿 z 轴方向传播。

4-4-2 圆柱形导线长为 l , 电阻为 R , 载有电流 I 。求证: 电磁场通过表面输入导线的功率 $\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$ 等于焦耳热功率 $I^2 R$ 。

证明 设电流在导体中均匀分布, 导体内部的电场与磁场分别为

$$\mathbf{E} = \frac{I}{\gamma} = \frac{I}{\pi \gamma \rho^2} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{\pi \gamma a^2} \rho \mathbf{e}_\phi$$

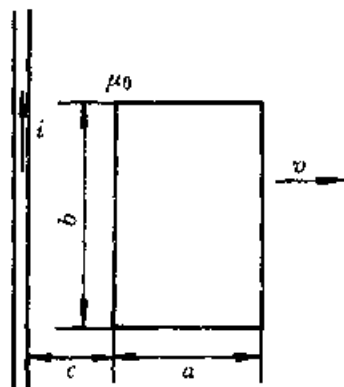
式中 a 为导线半径。坡印亭矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi^2 a^2 \gamma} \rho (-\mathbf{e}_\rho)$$

取闭合面为圆柱表面, 则圆柱吸收的功率为

$$\begin{aligned} P &= - \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{I^2}{2\pi a^2 \gamma} \int_0^l a (-\mathbf{e}_\rho) \cdot 2\pi a dl (\mathbf{e}_\rho) \\ &= \frac{I^2 a^2 l}{\pi a^4 \gamma} = I^2 \frac{l}{\pi a^2 \gamma} = I^2 R \end{aligned}$$

证毕。



题 4-4-1 图

习题(4-5)

4-5-1 改写下列电场或磁场的表达式:

(1) 将瞬时形式改写为复数形式

$$\mathbf{E} = E_m \cos 2x \sin \omega t \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{H} = H_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{E} = E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z + E_m \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

(2) 将复数形式改写为瞬时形式

$$\dot{\mathbf{E}} = E \sin \frac{\pi y}{a} e^{-(\alpha + j\beta)} \mathbf{e}_x$$

$$\dot{\mathbf{H}} = jH \cos \beta z \mathbf{e}_y$$

解 (1) 电磁场的复数形式为

$$\dot{\mathbf{E}} = -j \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cos 2x \mathbf{e}_x$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y$$

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} e_x - j \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} e_y$$

(2) 电磁场的瞬时形式

$$E = \sqrt{2} E \sin \frac{\pi y}{a} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta z) e_x$$

$$H = \sqrt{2} H \cos \beta z \cos(\omega t + 90^\circ) e_y$$

4-5-2 已知无限大均匀媒质中电场与磁场的瞬时表达式为

$$E = E_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) e_x$$

$$H = H_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) e_y$$

式中 α, β 为常数。试求:

(1) E 和 H 的复数形式;

(2) 坡印亭矢量 S 的平均值 S_{av} 。

解 (1) E 和 H 的复数形式分别为

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{j(-\beta z + \phi_x)} e_x$$

$$\dot{H} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{j(-\beta z + \phi_y)} e_y$$

(2) 坡印亭矢量为

$$S = E \times H = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha x} \cos(\omega t - \beta z + \phi_x) \cos(\omega t - \beta z + \phi_y) e_z$$

坡印亭矢量平均值为

$$S_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} E_m H_m e^{-2\alpha x} \cos(\phi_x - \phi_y) e_z$$

4-5-3 在正弦电磁场中,若已知矢量位 \dot{A} 是

$$\dot{A} = \dot{\phi}(x, y, z) e_z$$

试求相应的电场强度 E 和磁感应强度 B 。

解 根据 $\dot{B} = \nabla \times \dot{A}$, 有磁感应强度 \dot{B} 为

$$\dot{B} = \nabla \times [\dot{\phi}(x, y, z) e_z] = \frac{\partial \dot{\phi}(x, y, z)}{\partial y} e_x - \frac{\partial \dot{\phi}(x, y, z)}{\partial x} e_y \quad (1)$$

从洛伦兹规范

$$\nabla \cdot \dot{A} = -j\omega\mu\epsilon\dot{\phi} \quad (2)$$

得到标量位函数

$$\dot{\phi} = j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \dot{A} \quad (3)$$

在正弦电磁场中,电场 E 与动态位函数的关系为

$$\dot{E} = -j\omega\dot{A} - \nabla\dot{\phi} \quad (4)$$

将式(3)代入式(4),得到

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla \left(j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} \right) = -j\omega\vec{A} - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$$

将 $A = \psi(x, y, z)$ 代入上式,得电场强度为

$$\vec{E} = -j\omega\psi\vec{e}_z - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \vec{e}_z \right]$$

习题(4-6)

4-6-1 在自由空间中,有一单元偶极子天线,已知 $l=0.1\text{ m}$, $\lambda=10\text{ m}$, 电流振幅 $I_m=1\text{ A}$,求 $r=1\ 000\text{ m}$, $\theta=90^\circ$ 时

- (1) 电场强度振幅值及磁场强度振幅值;
- (2) 坡印亭矢量的最大值;
- (3) 该单元偶极子天线的总辐射功率;
- (4) 该单元偶极子天线的辐射电阻。

解 (1) 由于 $r \gg \lambda$, 因此属于远区场问题, E_θ 和 H_ϕ 的振幅分别为

$$E_{\theta m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times \frac{I_m l}{2\lambda r} \sin\theta = 377 \times \frac{1 \times 0.1}{2 \times 10 \times 1\ 000} = 1.89 \times 10^{-3} \quad (\text{V/m})$$

$$H_{\phi m} = \frac{I_m l}{2\lambda r} \sin\theta = \frac{E_{\theta m}}{377} = 5 \times 10^{-6} \quad (\text{A/m})$$

(2) 坡印亭矢量的最大值为

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{1}{2} E_{\theta m} H_{\theta m} \\ &= \frac{1}{2} \times 1.89 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-6} = 4.73 \times 10^{-9} \quad (\text{W/m}^2) \end{aligned}$$

(3) 总的辐射功率为

$$P = I^2 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2} 80\pi^2 \left(\frac{0.1}{10}\right)^2 = 3.94 \times 10^{-2} \quad (\text{W})$$

(4) 辐射电阻为

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 78.96 \quad \text{m}\Omega$$

4-6-2 试证:若仅考虑远区场,则当电流沿 z 轴流动时, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 可以简化为 $H_\phi = -\frac{1}{\mu} \sin\theta \frac{\partial A}{\partial r}$ 。

证明 在远区场,可以认为电流线的长度 Δl 与场点到电流线的距离 r 相比,有 $r \gg \Delta l$ 。设电流沿 z 轴方向运动,任一点的磁矢位可以表示为

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta l} \frac{i(t - \frac{r}{v})}{r} dl \approx \frac{\mu_0 i \Delta l}{4\pi r} \vec{e}_z = A_z \vec{e}_z$$

将 A_z 分解为球坐标系下的 A_r 和 A_θ

$$A_r = A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta$$

根据球坐标系下 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 的展开公式

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r} \left[A_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} A_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right] \mathbf{e}_\phi$$

将 A_r 和 A_θ 的表达式代入上式, 得到

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \left[-A_z \sin \theta - r \sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + A_z \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

由于 A_z 与 θ 无关, 所以 $\frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0$,

$$\mathbf{B} = -\sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\phi$$

则磁场强度为

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_\phi$$

证毕。

思考题

4-1 何谓时变电磁场? 时变电磁场中, 电流连续性原理应如何表示? 此时应包括哪几种电流? 各具有什么特点?

答 (1) 场量随时间变化的电磁场称为时变电磁场。

(2) 在时变电磁场中, 电流连续性原理表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{微分形式})$$

$$\oint_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (\text{积分形式})$$

(3) 时变电磁场中应该包括传导电流、运流电流和位移电流。它们各自所具备的特点为:

传导电流是导电媒质中的带电粒子的定向运动;

运流电流是带电粒子在真空中的定向运动;

位移电流是变化的电场产生的一种假想电流。

4-2 试按下述几方面比较传导电流与位移电流: (1) 由什么变化引起的? (2) 可以在哪类物质中存在? (3) 两者是否都能引起热效应? 规律是否相同?

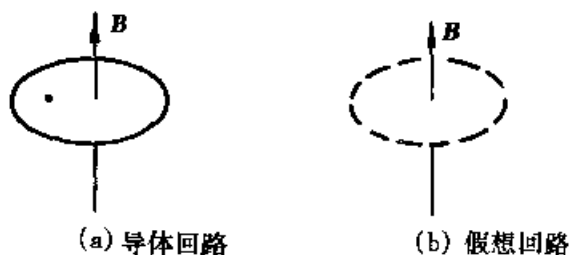
答 (1) 位移电流是由变化的电场产生的; 传导电流是导电媒质中带电粒

子的定向运动形成的。

(2) 传导电流存在于导电媒质中;位移电流可以在导电媒质和理想介质中存在。

(3) 两种电流均能引起热效应,传导电流是由于电子运动时相互碰撞消耗能量引起的焦耳热效应;位移电流的热效应是由于电荷的极化引起的。

4-3 在理想介质中,存在磁场 $B = B_m \sin \omega t$, 试问在思考题 4-3 图所示的两种情况下,回路中是否存在感应电动势与感应电流?



题 4-3 图

答 (a),(b)两图中的导体回路和假想回路均存在感应电动势,图(a)中的回路由导体构成,所以存在感应电流。

4-4 试述电磁感应定律的各种形式和它们各自的适用范围,并举例说明。

答 当磁感应强度 B 随时间变化,而闭合回路的任一部分对媒质没有相对运动时,这样产生的感应电动势称为感生电动势

$$\epsilon = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

当 B 不随时间变化,而闭合回路相对于媒质在运动时,这样产生的电动势称为动生电动势

$$\epsilon = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

当 B 随时间变化且闭合回路也有运动时,感应电动势为

$$\epsilon = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

如变压器、互感器、感应线圈等是利用感生电动势的原理工作的,而发电机、电磁系仪表的阻尼系统工作原理就是动生电动势。

4-5 写出电磁场基本方程组的积分形式和微分形式,并阐述各方程的物理意义。

对静电场有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 对普遍的电磁场也有 $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q$, 二者在理解上有什么不同?

对于恒是磁场有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 对于普遍的电磁场也有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 二者在理解上有何不同?

答 电磁场基本方程组表示为

积分形式

微分形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1')$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2')$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3')$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (4) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4')$$

上述方程组中,式(1),式(1')称为麦克斯韦第一方程,又称全电流定律,说明不仅传导电流产生磁场,而且变化的电场也产生磁场;式(2),式(2')称为麦克斯韦第二方程,又称为电磁感应定律,说明不仅电荷产生电场,而且变化的磁场也产生电场;式(3),式(3')称为磁通连续性原理,说明磁力线是闭合曲线;式(4),式(4')称为高斯定律,说明电荷以发散的形式产生电场。

磁通连续性原理适用于恒定磁场和时变场。在恒定磁场中, \mathbf{B} 是空间坐标的函数;在时变场中, \mathbf{B} 不仅是空间坐标的函数,也是时间坐标的函数。

高斯定理既适用于静电场,又适用于时变场。在静电场中, \mathbf{D} 和 q 仅是空间坐标的函数,而在时变场中, \mathbf{D} 和 q 是空间和时间坐标的函数。

4-6 若位移电流的磁场可以忽略,则全电流定律就退化为恒定磁场的安培环路定律,这种看法对吗?

答 不对。忽略了位移电流,各场量仍是空间位置和时间 t 的函数,而恒定磁场中的场量是不随时间变化的。位移电流忽略后,全电流定律的表达形式与安培环路定律相同,说明这时的磁场虽然随时间变化,但其分布与恒定磁场分布相似,因此,可以采用与安培环路定律相同的计算方法求解时变场问题。

4-7 试回答关于麦克斯韦方程组的一些问题。

(1) 方程组中某一方程能否由其余的三个方程推导出来?

(2) 为什么说积分形式和微分形式等效?

(3) 为什么要写成两种形式?

(4) 麦克斯韦方程组在电磁理论中的地位如何?

答 (1) 可以从旋度方程导出散度方程,即可由麦克斯韦第一、第二方程导出磁通连续性原理和高斯定理。

(a) 对 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 方程的两边取散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D}$$

得 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 代入上式, 并且利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, 得到

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0$$

即 $\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \text{常数}$ 。该式具有普遍意义, 对静电场和时变场均成立, 而在时变场中, 物理量均随时间变化, 故该与时间无关的常数必须为零, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

(b) 对 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 方程的两边取散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

同上分析, 必有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

这说明, 麦克斯韦方程组中的 4 个方程, 仅有第一、第二方程是独立的, 借助于电流连续性方程, 可由第一、第二方程推导得到两个散度方程。

(2) 麦克斯韦方程组的积分形式和微分形式反映的物理意义相同, 利用斯托克斯定理和散度定理, 积分形式的方程可以转变为微分形式, 反之亦然。

(3) 积分形式是反映电磁场在某一区域内的特性, 微分形式是反映某一点处场的特性。不同的研究对象采用不同形式的方程。例如媒质分界面处场量发生跃变, 微分形式已不适用, 要用积分形式的方程推导出场量发生跃变的规律, 即衔接条件。

(4) 略

4-8 变化的电场产生的磁场, 是否一定随时间变化? 反之, 变化的磁场产生的电场是否也一定随时间变化?

答 变化的电场产生的磁场不一定随时间变化, 如平行极板外加一个随时间 t 作线性变化的电压源 $u = U_0 t$, 此时, 极板间的电场强度为 $\mathbf{E}(t) = (U_0 t/d)\mathbf{e}_i$, d 为极板之间的距离, 那么, 根据 $\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -(U_0/d)\mathbf{e}_i$ 可以知道, 磁场 \mathbf{H} 不随时间变化。

同理, 变化的磁场产生的电场也不一定随时间变化。

4-9 当一块金属在均匀磁场中作什么样的运动时, 才会出现感应电流?

答 当金属在均匀磁场中作切割磁力线运动时, 就会产生感应电流。

4-10 试把感应电场与静电场、恒定电场、恒定磁场分别作一比较。

答 用下面的表格将四种场进行比较。

	产生场的源	微分方程	场的性质	力线
感应电场	变化的磁场	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	有旋无源	电力线自呈闭合曲线
静电场	静止电荷	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	无旋有源	电力线从正电荷发出,终止于负电荷
恒定电场	动态平衡下的电荷	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	无旋无源	电力线从正电极发出、终止于负电极
恒定磁场	直流电流 (匀速定向运动的电荷)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	有旋无源	磁力线自呈闭合曲线

4-11 试证明穿出闭合面的位移电流等于其内的电荷增加率。

证明 根据位移电流的定义,穿过闭合面 S 的 i_D 为

$$i_D = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

利用散度定理

$$i_D = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial q}{\partial t}$$

证毕。

4-12 在无源自由空间中, $B = B_m \sin \omega t$ 是否满足麦克斯韦方程组? 由此能得出什么样的结论?

答 从麦克斯韦方程组的 4 个方程入手。

(1) 将 $B = B_m \sin \omega t$ 代入 $\nabla \cdot \mathbf{B}$, 可以得到 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的结论;

(2) 建立坐标系, 使 $\mathbf{B} = B_m \sin \omega t \mathbf{e}_x$, 则 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 展开为

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -B_m \omega \cos \omega t$$

选择横向坐标, 使 $E_z = 0$, 得到

$$\frac{dE_y}{dz} = \omega B_m \cos \omega t$$

$$E_y = z \omega B_m \cos \omega t, \quad \mathbf{E} = z \omega B_m \cos \omega t \mathbf{e}_y$$

(3) 由于 $\mathbf{E} = E_y(z) \mathbf{e}_y$, 所以

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

(4) 根据 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -z\omega^2 \epsilon B_m \cos \omega t \mathbf{e}_y$$

可以得到二次源 \mathbf{D} 产生的磁场

$$H_x = B_m \omega^2 \epsilon \sin \omega t$$

由此可以看出, $B = B_m \sin \omega t$ 满足麦克斯韦方程组。变化的磁场产生变化的电场, 变化的电场又产生变化的磁场, 磁场和电场相互交链 ($\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 说明无散度源), \mathbf{D} 线、 \mathbf{B} 线自成闭合曲线, 但电场和磁场没有波动。

4-13 怎样用复数写出正弦稳态电磁场的基本方程组?

答 正弦稳态电磁场基本方程组的复数形式为

积分形式	微分形式
$\oint_L \dot{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + j\omega \dot{\mathbf{D}}) \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J} + j\omega \dot{\mathbf{D}}$
$\oint_L \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S j\omega \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}$
$\oint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$
$\oint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{S} = \dot{\rho}$	$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}$

4-14 当媒质的物理参数 ϵ 、 μ 和 γ 在不同媒质交界面上发生突变时, 对电磁场的分析研究必须作怎样的处理? 试写出时变电磁场中不同媒质分界面上的衔接条件。理想介质与理想导体分界面处的衔接条件如何?

答 在媒质参数发生突变的交界面处, 电磁场基本方程组的微分形式已不适用, 要用其积分形式来分析媒质交界面上电场、磁场所遵循的规律。

设 \mathbf{n} 代表从媒质 2 指向媒质 1 的分界面法线方向, 场量的衔接条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= 0 & \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{K} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \sigma & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 \end{aligned}$$

在理想介质与理想导体分界面处, 由于理想导体内部场强为零, 所以, 在理想介质侧的衔接条件为

$$E_t = 0, \quad H_t = K, \quad D_n = \sigma, \quad B_n = 0$$

4-15 什么是时变电磁场的折射定律?

答 时变电磁场的折射定律为 (当不同媒质的分界面上没有面分布的自由电荷和传导电流时)

$$\text{电场} \quad \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \text{磁场} \quad \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

4-16 设空间电磁场中, 电场强度 \mathbf{E} 只有 y 方向分量

$$E_y = \begin{cases} E_0 \cos \omega(z/c - t) & z > 0 \\ E_0 \cos \omega(z/c + t) & z < 0 \end{cases}$$

试问 $z=0$ 处,产生此电磁场的电流源分布如何?

答 根据电磁场基本方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, 有

$$-\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

当 $z > 0$ 时,上式写为

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\omega}{C} E_0 \sin \omega \left(\frac{z}{C} - t \right)$$

等式两端同时对 t 积分,有

$$H_{x1} = -\frac{1}{C\mu_0} E_0 \cos \omega \left(\frac{z}{C} - t \right) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos \omega \left(\frac{z}{C} - t \right)$$

同理, $z < 0$ 时,有

$$H_{x2} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos \omega \left(\frac{z}{C} - t \right)$$

在 $z=0$ 处场量不连续,必有面电流分布,而 $z=0$ 两侧均为自由空间,根据衔接条件 $H_{1t} - H_{2t} = K$, 有

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

$$K_y = 2E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos \omega t$$

4-17 时变电磁场中是如何引入动态位 \mathbf{A} 和 φ 的? 它们各自满足什么方程? 何谓洛伦兹条件? 动态位 \mathbf{A} 和 φ 与恒定电场和恒定磁场中的电位 φ 、磁矢位 \mathbf{A} 之间的关系如何? 为什么常把它们叫做推迟位?

答 (1) 从电磁场基本方程出发,由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 根据矢量恒等式:任一矢量的旋度的散度恒等于零。因此,引入矢量位函数 \mathbf{A} 。 \mathbf{A} 满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

又由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 将 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入, 即

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

移项,整理得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

根据矢量恒等式:任一标量函数梯度的旋度恒等于零。引入标量位函数 φ , 有

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

(2) 动态位函数各自满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon$$

(3) 洛伦兹条件定义了时变电磁场中的 \mathbf{A} 的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(4) 动态位 \mathbf{A} 和 φ 不仅是空间坐标的函数,还是时间坐标的函数,当 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$,动态位 \mathbf{A} 和 φ 就蜕变为恒定磁场和恒定电场中的磁矢位和电位,达朗贝尔方程变为泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon$$

可以说,恒定场中的 \mathbf{A} 和 φ 是动态位的一种特殊形式。

(5) 从 \mathbf{A} 和 φ 的表达式中可以看出,响应与激励不是同时发生的,响应落后激励 $\frac{r}{v}$ 时间,故称之为推迟位(参见思考题 4-23)。

4-18 何谓电磁场的能量守恒定律? 叙述坡印亭定理的物理意义,并解释其中各项的含意是什么。

答 电磁场的能量守恒定律是坡印亭定律,表述为

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{J^2}{r} dV + \int_V \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{J} dV - \frac{\partial W}{\partial t}$$

等号右边第一项表示电磁场在体积 V 内的导体中的焦耳热损耗能量;第二项为 V 内电源提供的能量;第三项为 V 内增加的电磁能量。等号左边是通过 S 面从 V 中流出的电磁能量。

4-19 试证在同轴电缆(设其内、外导体均为理想导体)中沿任一横截面内传输的坡印亭矢量的通量等于负载吸收的功率。

证明 设内外导体间的电压为 U ,通过的电流为 I ,导体本身的电阻可以忽略,电缆内、外半径分别为 a 和 b ,容易求出内外导体之间的电场和磁场分别为

$$\mathbf{E} = \frac{U}{\rho \ln b/a} \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi$$

内外导体间任意截面上的坡印亭矢量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln b/a} \mathbf{e}_z$$

单位时间内通过内外导体间横截面的总能量为

$$P = \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln b/a} 2\pi\rho d\rho = UI$$

而 UI 等于负载吸收的功率。

4-20 利用坡印亭定理,如何求导电媒质在交流情况下的等效电路参数?

答 坡印亭定理是时变电磁场中的能量守恒定理,如果是正弦电磁场,坡印亭定理可以写为

$$-\oint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{A} = \int_V \frac{|\dot{\mathbf{J}}|^2}{\gamma} \cdot dV + j\omega \int_V (\mu |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV - \int_V \dot{\mathbf{E}}_e \cdot \dot{\mathbf{J}}^* dV$$

上式左边表示流入闭合面 A 的复功率;右边第一项表示体积 V 内导电媒质损耗的功率,即有功功率 P ;右边第二项表示体积 V 内电磁能量的平均值,即无功功率;右边最后一项是体积 V 内电源提供的复功率。若体积内不含有电源,上式可化成

$$-\oint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{A} = P + jQ$$

根据等值观点

$$P = I^2 R, \quad Q = I^2 X$$

因此,体积 V 内媒质的等效电路参数 R 和 X 可由下式计算

$$R = -\frac{1}{I^2} \operatorname{Re} \left[\oint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{A} \right]$$

$$X = -\frac{1}{I^2} \operatorname{Im} \left[\oint_A (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{A} \right]$$

4-21 复数坡印亭定理的方程式中各项的物理意义如何解释?

答 复数形式的坡印亭定理为

$$-\oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \frac{|\dot{\mathbf{J}}|^2}{\gamma} \cdot dV - j\omega \int_V (\mu |\dot{\mathbf{H}}|^2 - \epsilon |\dot{\mathbf{E}}|^2) dV + \int_V \dot{\mathbf{E}}_e \cdot \dot{\mathbf{J}}^* dV$$

等号右边第一项表示体积 V 内导电媒质消耗的功率,即有功功率;第二项表示 V 内电磁能量的平均值,即无功功率 Q ;第三项是 V 内电源提供的复功率;等号左边表示流出闭合面的复功率。

4-22 似稳电磁场是如何定义的? 它的特性是什么? 似稳条件是什么?

答 在时变电磁场中,满足 $\beta r \ll 1$ 的区域内的电磁场在每一瞬间,电场与磁场的分布规律分别和静电场及恒定磁场的分布规律相同,称之为似稳电磁场。

似稳电磁场中,位函数 A 和 φ 虽然随时间变化,但它们分别满足泊松方程;忽略推迟效应,激励与响应同时发生;每一瞬间的电场、磁场分布与静电场和恒定磁场分布相同。

似稳条件为 $\beta r \ll 1$ 或 $r \ll \lambda$ 。

4-23 写出动态位解答的一般表达式,并由此讨论时变电磁场的波动性及推迟效应。

答 动态位的一般表达式(λ 射波)为

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV'$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV'$$

式中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, 是场点 \mathbf{r} , 到源点 \mathbf{r}' 的距离。

当时间由 t 增加到 $t + \Delta t$, 空间坐标由 R 增加到 $R + v\Delta t$ (场点坐标相应增加到 $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$) 时, A 的表达式为

$$A(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t) = \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t + \Delta t - \frac{R + v\Delta t}{v})}{4\pi R} dV'$$

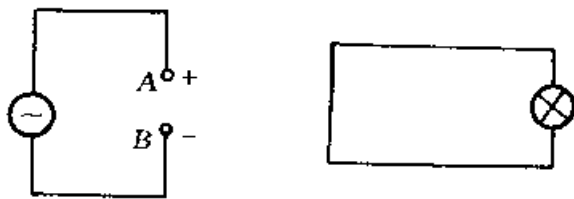
$$= \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v})}{4\pi R} dV' = A(\mathbf{r}, t)$$

由此可以看出,在时刻 t , 距源点 R 处的 A 为某个值,则经过时间 Δt 后, A 的这一值出现在比 R 远一个距离的 $v\Delta t$ 处,这意味着 $A(\mathbf{r}, t)$ 是从源点出发,以速度 v 向 \mathbf{R} 方向前进的波。这就是电磁场的波动性。

在时刻 t , 场中某点 \mathbf{r} 处的动态位以及场量取决于在此之前的某一时刻,即 $(t - \frac{R}{v})$ 时刻激励源的情况,这就是推迟效应。

φ 有相同的结论。

4-24 在一个振荡偶极子附近有一个线圈,其中接上一个灯泡,如图所示。



题 4-24 图

- (1) 当偶极子的两端与交流电源相接时,灯泡就会亮起来,为什么?
- (2) 如果偶极子与直流电源相接时,灯泡是否会亮?
- (3) 当偶极子 A 带正电, B 带负电,而且电荷在增加,问此时流过灯泡的电

流方向怎样?

(4) 如果把线圈平面转过 90° , 使线圈平面垂直于纸面, 此时上述各种变化对灯泡的影响如何?

答 (1) 当偶极子与交流电源相接时, 振荡偶极子相当于一个偶极子天线, 有电磁波向外传播, 附近的线圈中由于电磁感应而产生感应电流, 灯泡发亮。

(2) 因为偶极子可以等效为一个电容器, 在与直流电源相连接(稳态)时, 电极的两端储存有恒定不变的电荷, 但线路中没有电流流过, 也就没有磁场, 更没有时变的磁场。因此, 连接灯泡的线路不产生感应电流, 灯泡不亮。

(3) 根据已知条件, A, B 两端分别带有正、负电荷, 且呈增加趋势, 那么, 位移电流的方向由 A 指向 B, 连接灯泡的线圈所包围的磁场方向垂直穿出纸面, 且磁场是增加的。根据电磁感应定律, 感应电动势 $\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt}$, 感应电流的方向由灯泡的上方至下方。

(4) 若线圈平面转过 90° , 由于线圈平面的法线方向与磁场方向垂直, 故 $\psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 所以, 上述三种情况对灯泡均无影响, 即灯泡不亮。

4-25 在单元偶极子激励的电磁场中, 按什么条件将其分成“近区”与“远区”? 又在远区中, 电场 \mathbf{E} 、磁场 \mathbf{H} 和坡印亭矢量 \mathbf{S} 各具有什么特征?

答 $\beta r \ll 1$ 或 $r \ll \lambda$ 的区域称为近区, $\beta r \gg 1$ 或 $r \gg \lambda$ 的区域称为远区。

在远区, (1) 推迟效应不能忽略; (2) 等相面是球面, 故称远区场的电磁波为球面波; (3) 在空间上, $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{S}$ 三者相互垂直, 且 $Z_0 = E_\theta/H_\phi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$, 称为波阻抗; (4) 在时间上, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 同相位, 所以复坡印亭矢量只有实部, 说明远区中只有不断向外辐射的能量, 故远区又称为辐射区。

4-26 辐射电阻是否意味着天线在辐射电磁能量时的损耗或阻力? 它与哪些参数有关?

答 辐射电阻的大小不表示辐射能量时的损耗和阻力, 它意味着天线的辐射能力。辐射电阻表示为

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2$$

它与天线的尺寸、波的发射频率有关, 天线愈长、频率愈高, 辐射能量愈强。

4-27 试用直接代入法证明推迟位满足达朗贝尔方程。

证明 先介绍几个在证明中用到的公式

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(R) \quad (1)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mathbf{R}^0}{R^2} \quad (2)$$

$$\nabla R = \mathbf{R}^0 \quad (3)$$

$$\nabla \rho(t - \frac{R}{v}) = -\frac{\rho'}{v} \mathbf{R}^0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{R}^0 = \frac{2}{R} \quad (5)$$

式中 $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ 。

下面证明推迟位

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v})}{R} dV' \quad (6)$$

\mathbf{r}' 为源点坐标。满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon \quad (7)$$

将式(6)代入(7)等号左端第一项,有

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \nabla^2 \left(\frac{\rho}{R} \right) dV' \quad (8)$$

由矢量恒等式

$$\nabla^2 (uv) = u \nabla^2 v + v \nabla^2 u + 2 \nabla u \cdot \nabla v$$

式(8)转化成

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \left[\rho \nabla^2 \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla^2 \rho + 2 \nabla \rho \cdot \nabla \frac{1}{R} \right] dV' \quad (9)$$

由式(1)可得

$$\rho \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\rho\delta \quad (10)$$

由式(2)和式(4)可得

$$2 \nabla \rho \cdot \nabla \frac{1}{R} = -2 \frac{\rho'}{v} \mathbf{R}^0 \cdot \left(-\frac{\mathbf{R}^0}{R^2} \right) = \frac{2\rho'}{vR^2} \quad (11)$$

又

$$\begin{aligned} \nabla^2 \rho &= \nabla \cdot (\nabla \rho) = \nabla \cdot \left(-\frac{\rho'}{v} \mathbf{R}^0 \right) = -\frac{1}{v} \nabla \cdot (\rho' \mathbf{R}^0) \\ &= -\frac{1}{v} [\rho' \nabla \cdot \mathbf{R}^0 + \mathbf{R}^0 \cdot \nabla \rho'] \end{aligned}$$

把式(5)代入上式,且 $\nabla \rho' = -\frac{\rho''}{v} \mathbf{R}^0$, 上式表示为

$$\nabla^2 \rho = -\frac{1}{v} \left[\rho' \cdot \frac{2}{R} \cdot \mathbf{R}^0 \cdot \left(-\frac{\rho''}{v} \mathbf{R}^0 \right) \right] = -\frac{2\rho'}{vR} + \frac{\rho''}{v^2} \quad (12)$$

现在,将式(10)~(12)代入式(9),得到

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\left[-4\pi\rho\delta + \frac{\rho''}{Rv^2} - \frac{2\rho'}{vR^2} + \frac{2\rho'}{vR^2}\right]dV' \\ &= -\frac{\rho}{\epsilon} + \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\rho''}{Rv^2}dV'\end{aligned}\quad (13)$$

式(7)等号左端第二项

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^24\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\rho}{R}\right)dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{V'}\frac{\rho''}{Rv^2}dV'\quad (14)$$

显然,把式(13),式(14)代入式(7),即证明了 φ 满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2\varphi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

关于推迟位 A 满足达朗贝尔方程的证明,可以将矢量微分方程分解为三个标量微分方程,然后类似于上述方法证明之。

4-28 当电磁波到达天线时,天线中是否有电流产生?

答 当电磁波到达天线(由导体组成)后,由于电磁感应,天线中将感应出相同频率的电动势和感应电流,从而在天线中形成电磁波,信号便通过该接收天线送入到专门的设备中去。

4-29 设有一内阻为零的高频电源向某一单元辐射子天线供电,该天线的长度 $\Delta l = 5\text{ m}$,天线中的电流 $I = 35\text{ A}$,电源的频率 $f = 10^6\text{ Hz}$,求电源的电压及输出的功率。

解 辐射电阻为

$$R_e = 80\pi^2\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{\Delta l \cdot f}{v}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{5 \times 10^6}{3 \times 10^8}\right)^2 = 0.22\ \Omega$$

辐射功率为

$$P = R_e I^2 = 0.22 \times 35^2 = 268.67\text{ W}$$

电源电压

$$U = R_e I = 0.22 \times 35 = 7.67\text{ V}$$

4-30 什么叫波阻抗?它与哪些物理量有关?是否意味着电磁波在传播过程中的损耗?

答 波阻抗是入射波或反射波的电场强度与磁场强度的比值,它与媒质的物理参数有关,如在自由空间中传播的电磁波的波阻抗为

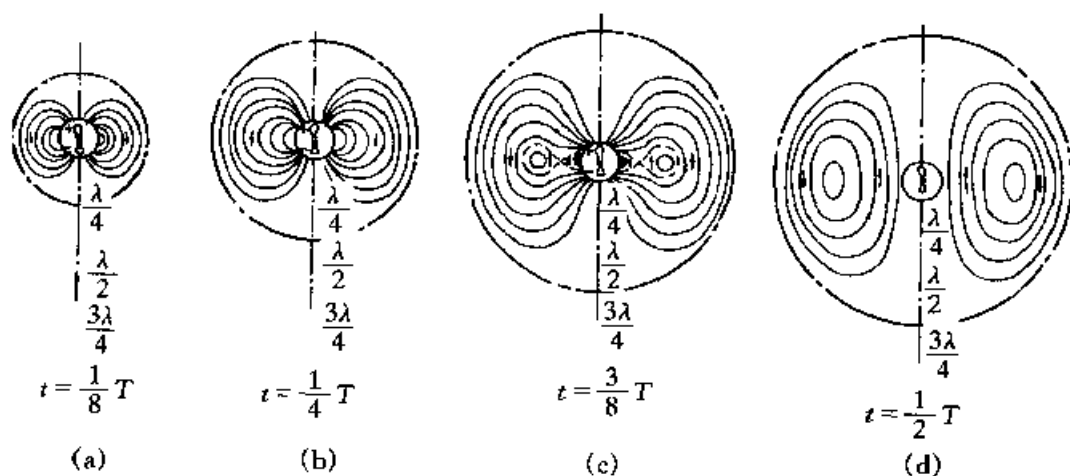
$$Z_0 = \frac{E_x^+}{H_y^+} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\ \Omega$$

Z_0 并不表示电磁波在传播过程中的损耗。

4-31 什么是电磁辐射?为什么会产生电磁辐射?

答 电磁辐射是电磁能量脱离源而单独存在于空间的现象。下面以电偶极子为例,说明电磁辐射的过程。

电偶极子邻近的电场可以看作是由电偶极子两端累积的电荷所产生,在不同的时刻,电荷经历了由小到大、由大到小的周期性变化,电场也随之作相应的变化。并且,在电偶极子附近,电场与电荷同相地变化,在离开偶极子较远处,由于推迟效应,电磁场变化的相位将滞后。例如,在离开电偶极子 $\frac{\lambda}{4}$ 处,其推迟时间为 $\Delta t = \frac{\lambda/4}{v} = \frac{T}{4}$,该处的电场变化较 q 的变化滞后 90° 相角。在 $t = \frac{T}{4}$ 时, q 已经由最大值开始变小,但在 $\frac{\lambda}{4}$ 处的电场反而由零增大。也就是说,在电偶极子附近的 E 线在收缩(因为 q 在减小),而 $\frac{\lambda}{4}$ 处的 E 线却在扩张。当 $t = \frac{T}{2}$ 时,电偶极子附近的电场为零,但在 $\frac{\lambda}{4}$ 处,由于磁场的变化而产生的电场使 E 线在此处闭合,显然,这种 E 线不是由电偶极子上的 q 产生的。这种闭合的 E 线将在更远的地方以同样的进程重现。电磁波脱离电偶极子向外传播出去,这就是电磁辐射。思考题4-31图给出了电场在电磁辐射形成过程中的变化。未画出的 H 线是以电偶极子为轴线的一些同心圆。



题4-31图

习 题

4-1 长直导线中通过电流 i ,一矩形导线框置于其近旁,两边与直导线平行,且于直导线共面,如题4-1图所示。

(1) 设 $i = I_m \cos \omega t$,求回路中的感应电动势(设框的尺寸远小于正弦电流的波长)。

(2) 设 $i = I_0$,线框环路以速度 v_0 向右平行移动,求感应电动势。

(3) 设 $i = I_m \cos \omega t$, 且线框又向右平行移动, 再求感应电动势。

解 长直载流导线产生的磁场为

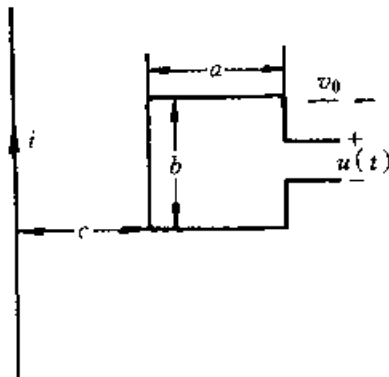
$$B_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi\rho} \cos \omega t$$

穿过矩形线框的磁通为

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 I_m}{2\pi\rho} \cos(\omega t) b d\rho \\ &= \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_m \cos \omega t \ln \frac{c+a}{c} \end{aligned}$$

由电磁感应定律求得感应电动势为

$$\epsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 b \omega}{2\pi} I_m \sin \omega t \ln \frac{c+a}{c}$$



题 4-1 图

(2) 线框在起始 c 的位置上以速度 v_0 向右平移, 此时的磁通为

$$\phi_m = \int_{c+v_0 t}^{c+a+v_0 t} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} b d\rho = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \ln \frac{c+a+v_0 t}{c+v_0 t}$$

相应的感应电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \times \frac{av_0}{(c+v_0 t)(c+a+v_0 t)}$$

(3) 电流是交变的, 同时伴随有线框的运动, 此时穿过线框的磁通为

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int_{c+v_0 t}^{c+a+v_0 t} \frac{\mu_0 I_m}{2\pi\rho} \sin(\omega t) b d\rho \\ &= \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_m \cos \omega t \ln \frac{c+a+v_0 t}{c+v_0 t} \end{aligned}$$

感应电动势为

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 b I_m}{2\pi} \times \\ &\quad \left[\omega \sin \omega t \ln \frac{c+a+v_0 t}{c+v_0 t} + \frac{v_0 a}{(c+v_0 t)(c+a+v_0 t)} \cos \omega t \right] \end{aligned}$$

显然, 这时的感应电动势由两部分组成: 一部分是由磁场的变化(回路视为静止)而产生的电动势; 另一部分是回路的运动(电流视为恒定)切割磁力线而产生的电动势。

4-2 已知一种有耗媒质中的传导电流密度为 $J = 0.02 \sin 10^9 t$ A/m², 若媒质的 $\gamma = 10^3$ S/m, $\epsilon_r = 6.5$, 求位移电流密度。

解 有损耗媒质的内部电场强度为

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{0.02}{10^3} \sin 10^9 t = 2 \times 10^{-5} \sin 10^9 t \quad \text{V/m}$$

电位移矢量的模为

$$\begin{aligned} D &= \epsilon E = 6.5 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^5 \sin 10^9 t \\ &= 1.15 \times 10^{-15} \sin 10^9 t \quad \text{C/m}^2 \end{aligned}$$

位移电流密度为

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = 1.15 \times 10^{-6} \cos 10^9 t \quad \text{A/m}^2$$

4-3 由圆形极板构成的平行板电容器,板间距离为 d ,板间充满了有损耗媒质,其电导率为 γ ,介电常数为 ϵ ,磁导率为 μ_0 ,当外加电压 $u = U_m \sin \omega t$ 时,求极板间任一点的位移电流密度和磁感应强度(忽略边缘效应,且不考虑变化的磁场对电场的影响)。

解 平板电容器极板间的电场强度为

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m}{d} \sin \omega t$$

传导电流密度为

$$J_C = \gamma E = \frac{\gamma U_m}{d} \sin \omega t$$

位移电流密度为

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \omega \frac{U_m}{d} \cos \omega t$$

根据全电流定律

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S (\mathbf{J}_D + \mathbf{J}_C) \cdot d\mathbf{S} \\ H 2\pi \rho &= (J_D + J_C) \pi \rho^2 = \frac{U_m}{d} \pi \rho^2 (\epsilon \omega \cos \omega t + \gamma \sin \omega t) \end{aligned}$$

整理得

$$H = \frac{U_m}{2d} \rho (\epsilon \omega \cos \omega t + \gamma \sin \omega t)$$

相应的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 U_m}{2d} \rho (\epsilon \omega \cos \omega t + \gamma \sin \omega t)$$

4-4 圆柱形电容器的内导体半径为 a ,外导体半径为 b ,长为 l ,外加一正弦电压 $u = U \sin \omega t$ 。设 ω 不大,故电场分布与静态场情形相同。求介质中的位移电流密度,并计算穿过半径为 ρ 的圆柱表面的总位移电流,证明此电流就等于电容器引线中的传导电流($a < \rho < b$)。

解 忽略变化的磁场产生电场,则电场满足 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$,利用静电场中求解 E 的公式,得

$$E = \frac{u}{\rho \ln b/a} = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \sin \omega t$$

位移电流密度为

$$J_D = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon \omega \frac{U}{\rho \ln b/a} \cos \omega t$$

穿过半径为 ρ 的圆柱表面的总位移电流为

$$I_D = \int_S J_D dS = \epsilon \omega \frac{U}{\ln b/a} \cos(\omega t) \frac{1}{\rho} 2\pi \rho l = \frac{2\epsilon \omega U \pi}{\ln b/a} \cos \omega t$$

圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a}$$

在电路理论中, 电容器两端的电压和电流的关系为

$$i_C = C \frac{dU}{dt} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln b/a} \omega U \cos \omega t$$

可以看出, $i_D = i_C$, 电容器引线中的传导电流就等于电容器中的位移电流, 电流是连续的。

4-5 如题 4-5 图所示, 由圆形极板构成的平板电容器, 两板之间充满电导率为 γ , 介电常数为 ϵ , 磁导率为 μ_0 的非理想介质。把电容器接到直流电源上, 求该系统中的电流及电容器极板之间任一点的坡印亭矢量, 并证明其中消耗的功率等于电源供给的功率。

解 由于电容器两端的电压是直流电压, 因此没有位移电流, 只有漏电流

$$I = \frac{U}{R} = \gamma \pi R^2 U / d$$

电流均匀分布且垂直于极板, 在导电媒质内部, 电场

强度是均匀的, $E = \frac{U}{d} e_z$ 。

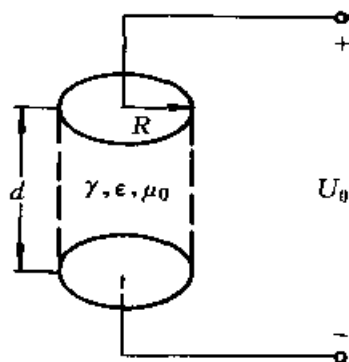
任一点的电流密度为

$$J = \gamma E = \frac{\gamma U}{d} e_z$$

任一点的磁场强度为

$$H = \frac{I'}{2\pi\rho} e_\phi = \frac{\gamma U}{d} \pi \rho^2 \frac{1}{2\pi\rho} e_\phi = \frac{\gamma U}{2d} \rho e_\phi$$

由 E 和 H 可得坡印亭矢量



题 4-5 图

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (-\mathbf{e}_\rho) \frac{\gamma U^2}{2d^2} \rho$$

从外部空间进入电容器的总功率为

$$P = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\gamma U^2 R}{2d^2} 2\pi R d = \frac{\pi R^2 \gamma}{d} U^2 = GU^2 = IU$$

这也正是电源发出的功率。

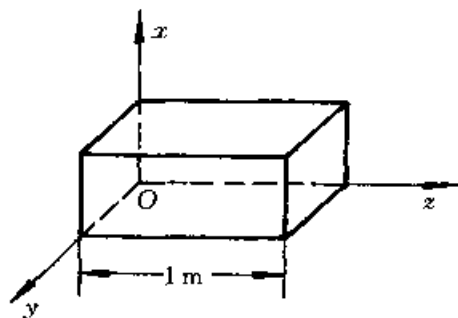
4-6 已知自由空间中电磁波的两个场分量为

$$E_x = 1000 \cos(\omega t - \beta z) \quad \text{V/m}$$

$$H_y = 2.65 \cos(\omega t - \beta z) \quad \text{A/m}$$

式中 $f = 20 \text{ MHz}$, $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.42 \text{ rad/m}$ 。求

- (1) 瞬时坡印亭矢量;
- (2) 平均坡印亭矢量;
- (3) 流入题 4-6 图示的平行六面体(长为 1 m, 横截面积为 0.25 m^2)中的净瞬时功率。



题 4-6 图

解 (1) 瞬时坡印亭矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 2650 \cos^2(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z \\ &= 1325[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] \mathbf{e}_z \\ &= 1325[1 + \cos(8\pi \times 10^7 t - 0.84z)] \mathbf{e}_z \quad \text{W/m}^2 \end{aligned}$$

(2) 平均坡印亭矢量

解法一: 用复坡印亭矢量取实部的的方法求 \mathbf{S}_{av} 。

复坡印亭矢量为

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} (1000 e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x) \times (2.65 e^{j\beta z} \mathbf{e}_y) = 1325 \mathbf{e}_z$$

平均坡印亭矢量为

$$\mathbf{S}_{av} = \text{Re}[\tilde{\mathbf{S}}] = 1325 \mathbf{e}_z \quad \text{W/m}^2$$

解法二: 用求平均值的积分方法求 \mathbf{S}_{av} 。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1325[1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] \mathbf{e}_z dt \\ &= 1325 \mathbf{e}_z \quad \text{W/m}^2 \end{aligned}$$

(3) 流入平行六面体中的净瞬时功率为

$$P = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S}$$

在与电磁波传播方向平行的四个侧面上, 由于面的法线方向与坡印亭矢量 \mathbf{S} 的方向垂直, 因此 $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。而在 $z=0$ 的表面有 $\int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = -S|_{z=0} \times 0.25$, 以及在 $z=1$ 的表面有 $\int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} = S|_{z=1} \times 0.25$, 所以上式积分结果为

$$\begin{aligned}
 P &= 0.25 \times 1.325 [(1 + \cos(2\omega t - 2\beta z))_{z=0} - (1 + \cos(2\omega t - 2\beta z))_{z=1}] \\
 &= 331.25 [\cos 2\omega t - \cos(2\omega t - 2\beta)] = -331.25 \times 2 [\sin(2\omega t - \beta) \sin \beta] \\
 &= -270.14 \cos(8\pi \times 10^7 t - 0.42) \text{ W}
 \end{aligned}$$

4-7 已知空气中的电场为

$$\mathbf{E} = 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

求相应的 \mathbf{H} 和 β 。

解 先利用 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ 求解出 \mathbf{H} ：

由于

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z - \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x = -0.1\beta \sin(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x + \\
 &\quad 0.1 \times 10\pi \cos(10\pi x) \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \times \mathbf{E} dt = \frac{1}{\mu_0} \times \\
 &\quad \left[\frac{0.1\beta}{\omega} \sin(10\pi x) \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_x - \frac{\pi}{\omega} \cos(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_z \right]
 \end{aligned}$$

再利用 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ 求 β

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y = -\frac{1}{\mu_0} \\
 &\quad \left[\frac{0.1\beta^2}{\omega} \sin(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z) + \frac{\pi}{\omega} \times 10\pi \sin(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z) \right] \mathbf{e}_y
 \end{aligned}$$

和

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \times 0.1 \omega \sin(10\pi x) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{e}_y$$

由于 $\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 所以

$$\frac{1}{\mu_0} \times \frac{0.1\beta^2}{\omega} + \frac{10\pi^2}{\mu_0 \omega} = 0.1 \omega \epsilon_0$$

整理得

$$\begin{aligned}
 \beta^2 &= \mu_0 \omega^2 \epsilon_0 - 100\pi^2 \\
 \beta &= \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times (6\pi \times 10^9)^2 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} - 100\pi^2} \\
 &= 10\pi\sqrt{3} = 54.38 \text{ rad/m}
 \end{aligned}$$

将 β 代入 \mathbf{H} 的表达式, 得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= [2.3 \times 10^{-4} \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - 54.4z)] \mathbf{e}_x - \\
 &\quad [1.33 \times 10^{-4} \cos(10\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.4z)] \mathbf{e}_z
 \end{aligned}$$

注意:由于场量 E 不是无界空间的均匀平面波,故 $\beta = \frac{\omega}{v}$ 中的 $v \neq 3 \times 10^8$ m/s。

4-8 同轴电缆内导体半径为 $a = 1$ mm,外导体半径为 $b = 4$ mm,内外导体均是理想导体。两导体之间充满聚乙烯($\epsilon_r = 2.25$, $\mu_r = 1$, $\gamma = 0$)。已知聚乙烯中的电场强度为

$$E = \frac{100}{\rho} \cos(10^8 t - \beta z) e_\rho \quad \text{V/m}$$

式中 z 是沿电缆轴线的长度坐标。

- (1) 说明 E 的表达式是否表示有波动性;
- (2) 求 β 值;
- (3) 求 H 的表达式;
- (4) 求内导体表面的电流线密度;
- (5) 求沿轴线 $0 \leq z \leq 1$ m 区段中的位移电流。

解 (1) E 中含有变量 $(t - \frac{\beta}{\omega} z) = (t - \frac{z}{v})$, 它表示 E 是以速度 v 向 z 轴方向前进的波。

(2) 相位常数为

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} \sqrt{\mu_r \epsilon_r} = \frac{1}{3} \sqrt{2.25} = 0.5 \quad \text{rad/m}$$

(3) 由 $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 计算 H

$$\nabla \times H = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} e_\phi = \frac{100\beta}{\rho} \sin(10^8 t - \beta z) e_\phi$$

所以

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{100\beta}{\rho} \sin(10^8 t - \beta z) dt \\ &= \frac{1}{\mu_0} \frac{100\beta}{10^8 \rho} \cos(10^8 t - \beta z) e_\phi \\ &= \frac{100 \times 0.5}{4\pi \times 10^{-7} \times 10^8} \times \frac{1}{\rho} \cos(10^8 t - 0.5z) e_\phi \\ &= \frac{0.398}{\rho} \cos(10^8 t - 0.5z) e_\phi \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

(4) 在理想导体内部,场强等于零,在其表面的电流线密度用下式计算

$$\begin{aligned} K &= n \times H|_{\rho=R_1} = \frac{0.398}{10^{-3}} \cos(10^8 t - 0.5z) (e_\rho \times e_\phi) \\ &= 398 \cos(10^8 t - 0.5z) e_z \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

(5) 通过已知电场求得位移电流密度为

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = -\epsilon \frac{100}{\rho} \times 10^8 \sin(10^8 t - 0.5z)$$

$$J_D = -\frac{2.25 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{10} \sin(10^8 t - 0.5z)}{\rho} e_\rho$$

$$= \frac{1}{\rho} 0.199 \sin(10^8 t - \beta z) (-e_\rho)$$

在 $0 \leq z \leq 1$ m 区域中, 位移电流 i_D 可从下式得到

$$i_D = \int_S J_D \cdot dS = \int_0^1 \frac{0.199}{\rho} \sin(10^8 t - 0.5z) (-e_\rho) \cdot e_\rho 2\pi \rho dz$$

$$= -\frac{1}{0.5} \times 0.199 \times 2\pi \cos(10^8 t - 0.5z) \Big|_0^1$$

$$= -2.5 [\cos(10^8 t - 0.5) - \cos 10^8 t]$$

$$= -1.237 \sin(10^8 t - 0.25)$$

4-9 已知动态位函数 A 和 φ 分别是(圆柱坐标)

$$A = e_z \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \sin at + \nabla \psi$$

$$\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ψ 是任意函数, a 是常数。试求 E 和 B 。

解 动态矢量位函数可以写为

$$A = A_z e_z + \nabla \psi$$

其中 $A_z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \sin at = \frac{1}{2} \rho^2 \sin at$ 。

根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \psi = 0$ 及 $\nabla \times A = B$, 可以得到

$$B = \nabla \times (A_z e_z + \nabla \psi) = \nabla \times (A_z e_z) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} e_\phi = -\rho \sin at e_\phi$$

由电场强度 E 与动态位函数 A, φ 的关系, 得到 E 为

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi = -\left[\frac{1}{2} \rho^2 a \cos at + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi \right] e_z - \nabla \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \rho^2 a \cos at e_z$$

4-10 垂直放置的单元偶极子作为辐射天线。已知 $q_m = 3 \times 10^{-7}$ C, $f = 5$ MHz, $\Delta l = 10$ m, 分别求与地面成 40° 角度、离偶极子中心为 30 m 和 5 km 处的 E 和 H 表达式。

解 在自由空间, 电磁波以光速 c 传播, 当 $f = 5$ MHz 时, 波长为

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^6} = 60 \text{ (m)}$$

相位常数

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 0.1 \text{ rad/m}$$

由源点到场点的矢径与 z 轴的夹角 $\theta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

(1) 当 $r = 30 \text{ m} < \lambda = 60 \text{ m}$ 时, 可视为近区, 场量的复数形式分别为

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{q_m \Delta l}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos\theta e_r + \sin\theta e_\theta) \\ &= \frac{3 \times 10^{-7} \times 10}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 30^3} (2\cos 50^\circ e_r + \sin 50^\circ e_\theta) \\ &= 1.284 e_r + 0.765 e_\theta \\ \dot{H} &= \frac{I_m \Delta l}{4\pi r^2} \sin\theta e_\phi = j \frac{\omega q_m \Delta l}{4\pi r^2} \sin\theta e_\phi \\ &= j \frac{2\pi \times 5 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-7} \times 10}{4\pi \times 30^2} \sin 50^\circ e_\phi \\ &= j 6.38 \times 10^{-3} e_\phi\end{aligned}$$

场量的瞬时形式分别为

$$\begin{aligned}E &= (1.284 e_r + 0.765 e_\theta) \cos(10\pi + 10^6 t) \quad \text{r/min} \\ H &= -6.38 \times 10^{-3} \sin(10\pi \times 10^6 t) e_\phi \quad \text{r/min}\end{aligned}$$

(2) 当 $r = 5 \text{ km} \gg \lambda$ 时, 可视为远区场, 场量的复数形式分别为

$$\begin{aligned}E &= j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times \frac{I \Delta l \sin\theta}{2\lambda r} e^{-j\beta r} e_\theta \\ &= j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times \frac{j \omega q_m \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-j\beta r} e_\theta \\ &= -377 \times \frac{2\pi \times 5 \times 10^6 \times 3 \times 10^{-7} \times 10}{2 \times 60 \times 5000} \sin 50^\circ e^{-j\frac{2\pi}{60} \times 5000} \\ &= -4.54 \times 10^{-2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e_\theta \\ H &= j \frac{I \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-j\beta r} e_\phi = j \frac{j \omega q_m \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-j\beta r} = \frac{E_\theta}{377} e_\phi \\ &= -1.203 \times 10^{-4} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e_\phi\end{aligned}$$

场量的瞬时形式为

$$\begin{aligned}E &= -4.536 \times 10^{-2} \cos(10\pi \times 10^6 t - \frac{2\pi}{3}) e_\theta \\ H &= -1.203 \times 10^{-4} \cos(10\pi \times 10^6 t - \frac{2\pi}{3}) e_\phi\end{aligned}$$

4-11 单元偶极子辐射电磁波频率 $f = 10^6 \text{ Hz}$, 天线长度 $\Delta l = 10 \text{ m}$, 天线中电流 $I = 35 \text{ A}$, 求天线的辐射电阻与辐射功率。

解 在自由空间中电磁波的传播速度为光速 c , 所以

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^6} = 300 \text{ m}$$

辐射电阻及辐射功率分别为

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{10}{300}\right)^2 = 0.877 \Omega$$

$$P = R_e I^2 = 35^2 \times 0.877 = 1074.69 \text{ W}$$

4-12 一发射天线位于坐标原点,离天线较远处测得天线激发的电磁波的场强为

$$E(r, t) = E_0 \frac{\sin\theta}{r} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{e}_\theta \quad \text{V/m}$$

式中 c 为光速。求天线辐射的平均功率。

解 根据场量与波阻抗的关系,可得磁场强度为

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{Z_0} = \frac{E_0 \sin\theta}{Z_0 r} \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

平均功率可由下式计算

$$\begin{aligned} P &= R_e \left[\frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_m^*) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \oint_S R_e \frac{E_0 \sin\theta}{r} e^{-j\beta r} (\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi) \frac{E_0 \sin\theta}{Z_0 r} e^{j\beta r} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_0^2 \sin^2\theta}{2Z_0 r^2} r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{E_0^2}{90} \end{aligned}$$

4-13 在均匀的非导电媒质中,已知时变电磁场为

$$\mathbf{E} = 30\pi \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}z\right) \mathbf{e}_x \quad \text{V/m}$$

$$\mathbf{H} = 10 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}z\right) \mathbf{e}_y \quad \text{A/m}$$

且媒质的 $\mu_r=1$ 。由麦克斯韦方程求出 ω 和 ϵ_r 。

解 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的复数形式分别为

$$\dot{\mathbf{E}} = 30\pi e^{-j\frac{4}{3}z} \mathbf{e}_x$$

$$\dot{\mathbf{H}} = 10 e^{-j\frac{4}{3}z} \mathbf{e}_y$$

根据麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}$, 有

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = j\omega\mu_0 10 e^{-j\frac{4}{3}z} \mathbf{e}_y$$

将 $\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\dot{\mathbf{H}}$ 表达式代入上式,得

$$j \frac{4}{3} \times 30\pi = j\mu_0 \omega \times 10$$

所以

$$\omega = \frac{40\pi}{10\mu_0} = 10^7 \text{ rad/s}$$

再由麦克斯韦第一方程 $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E}$, 有

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}e_x = j\omega\epsilon \times 30\pi e^{-j\frac{4}{3}z}e_x$$

$$j\frac{4}{3} \times 10 = j10^7\epsilon_r \times 8.85 \times 10^{-12} \times 30\pi$$

解得相对介电常数为

$$\epsilon_r = \frac{\frac{4}{3} \times 10}{10^7 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 30\pi} = 1598.5$$

4-14 已知正弦电磁场的电场瞬时值为

$$\mathbf{E}(z, t) = 0.03\cos(10^8\pi t - \beta z)e_x + 0.04\sin(10^8\pi t - \beta z - \frac{\pi}{3})e_x$$

试求: (1) 电场的复数形式;

(2) 磁场的复数形式和瞬时值。

解 (1) 电场强度可改写为

$$\mathbf{E} = 0.03\cos(10^8\pi t - \beta z)e_x - 0.04\cos(10^8\pi t - \beta z + \frac{\pi}{6})e_x$$

其复数形式为

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{0.03}{\sqrt{2}}e^{-j\beta z}e_x - \frac{0.04}{\sqrt{2}}e^{-j(\beta z - \frac{\pi}{6})}e_x$$

(2) 根据场量与波阻抗的关系, 有

$$H_y = \frac{\dot{E}_x}{Z_0} = \frac{0.03}{\sqrt{2}Z_0}e^{-j\beta z} - \frac{0.04}{\sqrt{2}Z_0}e^{-j(\beta z - \frac{\pi}{6})}$$

其瞬时形式为

$$\mathbf{H} = \frac{0.03}{Z_0}\cos(\omega t - \beta z)e_y - \frac{0.04}{Z_0}\cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{6})e_y$$

第五章 准静态电磁场

习题(5-1)

5-1-1 由圆形极板构成的平行板电容器,间距为 d ,其间的介质是非理想的,电导率为 γ ,介电常数为 ϵ ,磁导率为 μ_0 ,当外加电压为

$$u = U_m \cos \omega t \text{ V}$$

时,忽略电容器的边缘效应。试求电容器中任意点的位移电流密度和磁场强度(假设变化的磁场产生的电场远小于外加电压产生的电场)。

解 由题意知,电场可看作是电准静态场。根据静电场的计算,得平行平板电容器中的电场为

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U_m}{d} \cos \omega t$$

所以,电容器中的位移电流密度为

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon E) = -\frac{\epsilon U_m}{d} \omega \sin \omega t$$

设圆柱坐标系的 z 轴与电容器的轴线重合。选择一半径为 ρ 的圆形回路 l ,运用全电流定律,得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = J_d \pi \rho^2 + \gamma E \pi \rho^2$$

$$2\pi \rho H = \pi \rho^2 \left(-\frac{\epsilon \omega U_m}{d} \sin \omega t + \gamma \frac{U_m}{d} \cos \omega t \right)$$

所以

$$H = \frac{U_m}{2d} \rho (-\epsilon \omega \sin \omega t + \gamma \cos \omega t)$$

\mathbf{H} 的方向为 $\mathbf{J}_d \times \boldsymbol{\rho}$ 方向。

5-1-2 已知大地的电导率 $\gamma = 5 \times 10^{-3} \text{ S/m}$,相对介电常数 $\epsilon_r = 10$,试问可把大地视为良导体的最高工作频率是多少?

解 良导体的条件是

$$\omega \epsilon \ll \gamma$$

所以,有

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon}, \quad f \ll \frac{\gamma}{2\pi\epsilon}$$

代入数据,得

$$f \ll \frac{5 \times 10^{-3}}{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10}$$

$$f \ll 9 \text{ MHz}$$

习题(5-2)

5-2-1 同题 5-1-1,假设圆形极板的面积是 A ,在频率不很高时,用坡印亭定理证明电容器内由于介质的损耗所吸收的平均功率是

$$P = \frac{U^2}{R}$$

式中 R 是极板间介质的漏电阻。

解 设圆形极板的半径为 a ,则

$$H|_{\rho=a} = \frac{U_m}{2d}a(-\epsilon\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t)$$

所以,坡印亭矢量的模为

$$S(t)|_{\rho=a} = EH|_{\rho=a} = \frac{U_m^2}{2d^2}a(-\epsilon\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t)\cos\omega t$$

$S(t)$ 的方向沿 $(-\rho)$ 方向。

流入电容器中的总瞬时功率为

$$p(t) = - \oint_S S(t) dS = \frac{U_m^2}{2d^2}a(-\epsilon\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t)\cos(\omega t)2\pi ad$$

而电容器中由于介质损耗所吸收的平均功率是

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_m^2}{d} \pi a^2 (-\epsilon\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t) \cos\omega t dt$$

$$= \frac{\gamma\pi a^2}{d} \left(\frac{U_m}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{U^2}{R}$$

式中, $R = \frac{d}{\gamma\pi a^2}$ 是极板间介质的漏电阻。

5-2-2 同轴电缆接至正弦电源 u ,负载为一 RC 串联电路。电缆长度远小于波长,电缆本身的电阻可以忽略不计。试用坡印亭向量计算电缆传输的功率。

解 由题意,同轴电缆的内外导体是用理想导体做成,加上电源之后,忽略

边缘效应,同轴电缆中的电场、磁场强度分别是

$$\vec{E} = \frac{U}{\rho \ln b/a} \vec{e}_\rho, \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

式中, U 是内外导体间的复电压, I 是沿导体流过的纵向复电流。

内外导体之间的坡印亭向量是

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{UI^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a} \vec{e}_z$$

同轴电缆传输的总功率为

$$P = \operatorname{Re} \left[\int_a^b \frac{UI^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a} 2\pi\rho d\rho \right] = \operatorname{Re} [UI^*]$$

因为

$$I = \frac{U}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{U(R + j\frac{1}{\omega C})}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

所以

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{Re} [UI^*] = \operatorname{Re} \left[\frac{U^2(R + j\frac{1}{\omega C})}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \right] \\ &= \frac{U^2 R}{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = I^2 R \end{aligned}$$

习题(5-3)

5-3-1 $y < 0$ 下半空间区域 b 充以均匀导体(电导率 γ , 介电常数 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$); $y > 0$ 上半空间区域 a 属于真空。 $t < 0$ 时处处无电荷。在 $t = 0$ 时, 有一点电荷 q 突然放置在上半空间 $(x, y, z) = (0, h, 0)$ 处。试证明:

(1) 在 $t = 0_+$ 时

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + z^2}} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + z^2}} \\ \varphi_b &= \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + z^2}} \end{aligned}$$

式中

$$q' = q \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}, \quad q'' = q \frac{2}{\epsilon_r + 1}$$

(2) 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$q' \rightarrow q, \quad \varphi_b \rightarrow 0$$

(3) 当 $t > 0$ 期间

$$q' = q \left(1 - \frac{2}{\epsilon_r + 1} e^{-t/\tau_e} \right)$$

$$q'' = q \left(\frac{2}{\epsilon_r + 1} e^{-t/\tau_e} \right)$$

式中 $\tau_e = \frac{\epsilon + \epsilon_0}{\gamma}$

解 (1) 在 $t = 0_+$ 时刻, 即电荷突变的瞬时, 空气与均匀导体分界面上的自由电荷 σ 来不及突变, 仍保持为零。因此, 开始时两介质中的电场就如同两层都可看成理想介质时那样。这时, 采用镜像法, 空气中的电场由 q 和其镜像电荷 $-q'$ 共同产生, 利用教材中的公式(1-82), 有

$$-q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

所以

$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} q$$

而均匀导体中的电场(看成是介质常数 $\epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0$ 的理想介质)由镜像电荷 $\epsilon_r q''$ 单独产生, 利用教材中的公式(1-83), 有

$$\epsilon_r q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

所以

$$q'' = \frac{2}{1 + \epsilon_r} q$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2 + z^2}} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + z^2}} \\ \varphi_b &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q''}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2 + z^2}} \end{aligned}$$

(2) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 即随着空气与均匀导体分界面上的自由电荷 σ 的积累, 场趋近于和稳定传导一致。这时, 均匀导体中的电场趋于零, 即

$$\varphi_b = 0$$

而空气中的电场是由点电荷 q 与导电平面的镜像电荷 $(-q')$ 共同产生的, 有

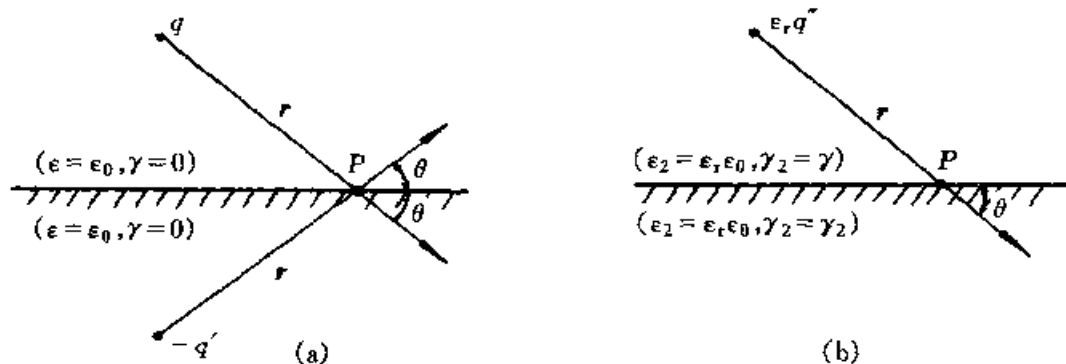
$$-q' = -q$$

所以

$$q' = q$$

(3) 当 $t > 0$ 期间, 即从 $t = 0_+$ 到 ∞ 的过渡过程中, 这时仍可看作是电准静态的, 采用镜像法, 如题 5-3-1 图所示。

q' 和 q'' 的值未知, 可以应用分界面上的条件确定之, 见教材中的公式



题 5-3-1 图

(5-27)和(5-31),有

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1)$$

和

$$\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n}) = 0 \quad (2)$$

参阅题 5-3-1 图,对于分界面上的 P 点,根据式(1)和(2)可列出

$$\begin{aligned} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta &= \frac{\epsilon_r q''}{r\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} \cos\theta \\ \gamma \frac{\epsilon_r q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_r \epsilon_0 \frac{\epsilon_r q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \epsilon_0 \sin\theta + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \epsilon_0 \sin\theta \right) &= 0 \end{aligned}$$

整理之,即

$$q - q' = q'' \quad (3)$$

$$\gamma q'' = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_r \epsilon_0 q'' - \epsilon_0 q - \epsilon_0 q') = 0 \quad (4)$$

联立解之,得

$$q''(t) = q''(0)e^{-t/\tau_e}$$

式中, $q''(0)$ 为 $q''(t)$ 在 $t=0$ 时的初始值,而 τ_e 为

$$\tau_e = \frac{\epsilon + \epsilon_0}{\gamma}$$

因为在(1)问中已得到 $q''(0) = \frac{2}{1+\epsilon_r} q$, 所以

$$q''(t) = \left(\frac{2q}{1+\epsilon_r} \right) e^{-t/\tau_e}$$

代入式(3),得

$$q' = q - q'' = q \left(1 - \frac{2}{1+\epsilon_r} \right) e^{-t/\tau_e}$$

5-3-2 具有双层介质的电容器如教材中图 5-5 所示(见教材)。已知 $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$, $\gamma_1 = 3 \times 10^{-8} \text{ S/m}$, $\gamma_2 = 10^{-8} \text{ S/m}$, $a = b = 10^{-3} \text{ m}$, $U = 100 \text{ V}$ 。计算电容器接至直流电压源 U 后电场的过渡过程。

解 将已给定的数据代入教材中的公式(5-39)和(5-40)。

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{b\gamma_1 + a\gamma_2} (1 - e^{-t/\tau_e}) + \frac{\epsilon_2 U}{b\epsilon_1 + a\epsilon_2} e^{-t/\tau_e}$$

和

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U}{b\gamma_1 + a\gamma_2} (1 - e^{-t/\tau_e}) + \frac{\epsilon_1 U}{b\epsilon_1 + a\epsilon_2} e^{-t/\tau_e}$$

其中

$$\tau_e = \frac{b\epsilon_1 + a\epsilon_2}{b\gamma_1 + a\gamma_2}$$

得到

$$E_1 = 0.25 \times 10^5 (1 - e^{-240\pi t}) + 0.67 \times 10^5 e^{-240\pi t}$$

$$E_2 = 0.75 \times 10^5 (1 - e^{-240\pi t}) + 0.33 \times 10^5 e^{-240\pi t}$$

5-3-3 同上题,但接至工频交流电源。试计算进入交流稳态后两介质内电场之间的相位差。

解 若外施激励电源为工频交流电源,今采用相量法分析其稳态。方程式(5-35)(见教材)的复数形式为

$$j\omega(b\epsilon_1 + a\epsilon_2)\dot{E}_1 + (b\gamma_1 + a\gamma_2)\dot{E}_1 = \gamma_2 \dot{U} + j\omega\epsilon_2 \dot{U}$$

得

$$\dot{E}_1 = \frac{(\gamma_2 + j\omega\epsilon_2)\dot{U}}{(b\gamma_1 + a\gamma_2) + j\omega(b\epsilon_1 + a\epsilon_2)}$$

而

$$\dot{E}_1 a + \dot{E}_2 b = \dot{U} \text{ 由此得}$$

$$\dot{E}_2 = \frac{(\gamma_1 + j\omega\epsilon_1)\dot{U}}{(b\gamma_1 + a\gamma_2) + j\omega(b\epsilon_1 + a\epsilon_2)}$$

所以,进入稳态后两介质内电场之间的比值为

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{\gamma_2 + j\omega\epsilon_2}{\gamma_1 + j\omega\epsilon_1} = \frac{9 + j10}{27 + j5} = 0.489e^{j37.5^\circ}$$

或者

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} = 2.04e^{-j37.5^\circ}$$

得相位差

$$|\theta| = 37.5^\circ$$

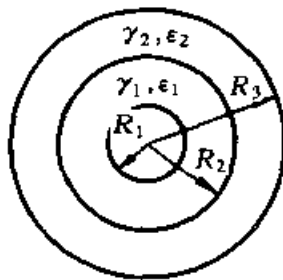
5-3-4 有一圆柱形电容器,尺寸如题 5-3-4 图,其中的介质有两层。由于介质有漏电流,故考虑为导电媒质。电容器不带电。当 $t=0$ 时,突然接至直流电压源 U ,内外导体分别接正负极。分析:(1) $t=0_+$ 时,电场的分布;(2)

$t \rightarrow \infty$ 时,电场的分布。

解 (1) $t = 0_+$ 时,两介质中的电场可看成理想介质时那样,介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ,根据静电场计算,得

$$E_1 = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_3}{R_2}} \frac{1}{\rho} \quad (R_1 < \rho < R_2)$$

$$E_2 = \frac{U}{\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{\rho} \quad (R_2 < \rho < R_3)$$



题 5-3-4 图

(2) $t \rightarrow \infty$ 时,两介质中的场趋于和稳定传导一样,可看成是恒定电场,介质的电导率分别为 γ_1 和 γ_2 ,根据恒定电场的计算,得

$$E_1 = \frac{U}{\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \ln \frac{R_3}{R_2}} \frac{1}{\rho} \quad (R_1 < \rho < R_2)$$

$$E_2 = \frac{U}{\ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln \frac{R_2}{R_1}} \frac{1}{\rho} \quad (R_2 < \rho < R_3)$$

习题(5-4)

5-4-1 试计算铜和铁通以 50 Hz 交流电流时的透入深度 d 。结果对设计大型汇流排(工作于 50 Hz)有何作用(铜: $\gamma = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu_r = 1$; 铁: $\gamma = 10^7$ S/m, $\mu_r = 10^4$)?

解 透入深度

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$$

代入数据,得

$$\text{铜: } d = 9.35 \text{ mm}$$

$$\text{铁: } d = 0.23 \text{ mm}$$

习题(5-5)

5-5-1 电工钢做成的钢片的位置与磁场平行。设磁场以 50 Hz, 200 Hz 和 5 000 Hz 的频率作正弦变化,求钢片表面和中间处磁感应强度的比值。已知钢片厚 0.5 mm, $\gamma = 10^7$ S/m, $\mu = 1\,000\mu_0$ 。

解 由教材中的式(5-57)

$$\dot{B}(x) = \dot{B}_0 \operatorname{ch} kx$$

代入 $x = \frac{a}{2}$, 得钢片表面和中间处磁感应强度的比值为

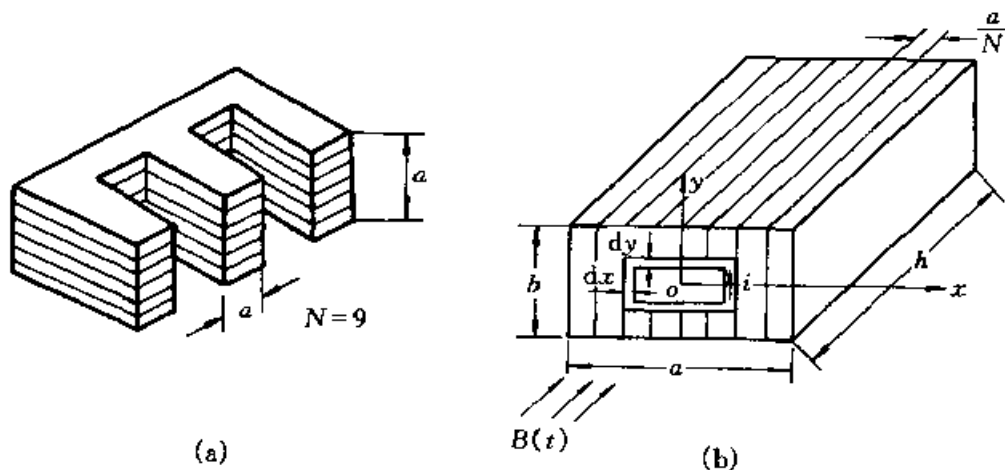
$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{B}(\frac{a}{2})}{\dot{B}_0} \right| &= \left| \operatorname{ch} k \frac{a}{2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} Ka + \cos Ka)} \end{aligned}$$

式中, $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = (1+j)K$, $K = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$ 。

代入数据 ω, μ, γ , 计算得

$f(\text{Hz})$	50	200	5 000
$ \dot{B}/\dot{B}_0 $	1.004	4.55	16.6

5-5-2 铁心截面为正方形的 **50 Hz** 电源变压器, 若选用一整块硅钢做成会因集肤效应, 产生涡流损耗使变压器发热。通常用硅钢片叠成, 如题 5-5-2 图(a)所示。假设磁通在铁心截面上是均匀分布的, 证明采用硅钢片后(钢片厚度仍远大于透入深度), 铁心的涡流损耗只有原来的 $\frac{2}{N^2+1}$ 。式中 N 是钢片数。



题 5-5-2 图

解 考虑如题 5-5-2 图(b)所示的硅钢块, 横截面的长和宽分别为 a 和 b , 钢块的厚度为 h 。设穿过硅钢块的磁通量是均匀的。在钢块中取一矩形面积 $4xy$, 则穿过该面积的磁通 $\Phi_m = -4xyB(t)$, 式中忽略了感应电流所产生的磁场, 负号表示与 $B(t)$ 的方向相反。该回路的电阻

$$R_x = \frac{4}{\gamma h} \left(\frac{y}{dx} + \frac{x}{dy} \right) = \frac{4}{\gamma h} \frac{b}{a} \frac{x}{dx} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]$$

γ 为硅钢的电导率。由电磁感应定律,对该回路有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = iR_x = -\frac{d\phi_m}{dt} = 4xy \frac{dB}{dt} = \frac{4b}{a} x^2 \frac{dB}{dt}$$

上式用了 $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ 关系。该回路消耗的功率为

$$dP = i^2 R_x = \frac{4hx^3 \gamma b \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dx}{a \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

整块硅钢消耗的功率(即涡流损耗)为

$$P_1 = \int_0^{a/2} dP = \frac{bha^3 \gamma \left(\frac{dB}{dt}\right)^2}{16 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} \quad (1)$$

设钢块分成 N 片,各片间绝缘,每片的涡流损耗仍为上式,但 a 应换为 $\frac{a}{N}$ 。全部涡流损耗应是一片片的 N 倍,即

$$P_N = \frac{bha^3 \gamma \left(\frac{dB}{dt}\right)^2}{1bN^2 \left[1 + \left(\frac{a}{Nb}\right)^2\right]} \quad (2)$$

由式(1)和(2)得出,采用硅钢片后的铁心涡流损耗 P_2 与整块硅钢中的涡流损耗 P_1 的比值为

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}{N^2 \left[1 + \left(\frac{a}{Nb}\right)^2\right]} = \frac{a^2 + b^2}{(Nb)^2 + a^2} \quad (3)$$

对于本题,铁心的截面为正方形, $a = b$,代入 $a = b$ 于式(3)中,得

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2}{N^2 + 1} \quad (4)$$

这一结果说明,采用硅钢片后,铁心的涡流损耗只有原来的 $\frac{2}{N^2 + 1}$ 。

应注意的是,在上述计算中,忽略了感应电流所产生的磁场,因此与从涡流方程出发得到的结果是有差别的。

习题(5-6)

5-6-1 铜质同轴电缆内导体半径为 $R_1 = 0.4 \text{ cm}$,外导体的内半径为 $R_2 = 1.5 \text{ cm}$, $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$,电流频率为 1 MHz ,外导体的厚度远大于透入深度。求单位长度内、外导体的交流电阻。

解 由教材的例 5-6 知,单位长度圆导线上的交流电阻是

$$R = \frac{1}{2\pi a \gamma d}$$

式中, $d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}}$ 。代入数据,计算得

$$d = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^6 \times 5.8 \times 10^7 \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 0.066 \text{ mm}$$

所以内导体单位长度的交流电阻为

$$R = \frac{1}{2\pi \times 0.4 \times 10^{-2} \times 5.8 \times 10^7 \times 0.066 \times 10^{-3}} = 1.039 \times 10^{-2} \text{ } \Omega/\text{m}$$

外导体单位长度的交流电阻

$$R = \frac{1}{2\pi \times 1.5 \times 10^{-2} \times 5.8 \times 10^7 \times 0.066 \times 10^{-3}} = 2.772 \times 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m}$$

5-6-2 在半径为 1 cm 的铜导线中,通以 50 Hz 及 5 000 kHz 的正弦交流电时,其交流电阻各为若干($\gamma_{\text{铜}} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$)

解 50 Hz 时,铜的透入深度 $d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 9.35 \text{ mm}$,与导线的半径相当,即集肤效应不明显,则单位长度铜线的交流电阻近似等于直流电阻为

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\gamma \pi d^2} = \frac{1}{5.8 \times 10^7 \times 3.14 \times 10^{-4}} \\ &= 5.49 \times 10^{-5} \text{ } \Omega \end{aligned}$$

5 000 kHz 时,铜的透入深度 $d = 2.96 \times 10^{-2} \text{ mm}$,则单位长度铜线的交流电阻为

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi a \gamma d} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-2} \times 5.8 \times 10^7 \times 2.96 \times 10^{-5}} \\ &= 9.27 \times 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{m} \end{aligned}$$

5-6-3 在要求导线的交流电阻很小的场合通常使用多股纱包线代替单股线。证明,相同截面积的 N 股纱包线的交流电阻只有单股线的 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 。

解 设单根纱包线的半径为 a ,则 N 股纱包线单位长度的总高频电阻为 N 个单根纱包线交流电阻的并联为

$$R_N = \frac{1}{2\pi a \gamma d} \frac{1}{N}$$

又设与 N 股纱包线截面相同的单根导线的等效半径为 a_1 ,则

$$\pi a_1^2 = \pi a^2 N$$

即

$$a_1 = a \sqrt{N}$$

所以单根导线的单位长度的高频电阻为

$$R_1 = \frac{1}{2\pi a_1 \gamma d} = \frac{1}{2\pi a \gamma d} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

则

$$\frac{R_N}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

习题(5-7)

5-7-1 长薄壁铜圆管如教材中图 5-15(a)所示。已知, 电导率 $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, 壁厚 $\Delta = 1 \text{ mm}$, 管的内径 $a = 4 \text{ cm}$ 。(1)求其磁扩散时间 τ_m ; (2)若外激磁电流为阶跃电流, 由零突变为直流, 求阶跃后 τ_m 瞬时 H_i 和 H_o 的比值。

解 见教材中的公式(5-69)和(5-70), 有

$$\tau_m = \frac{1}{2} \mu_0 \gamma a \Delta$$

$$H_i(t) = H_o(1 - e^{-t/\tau_m})$$

代入已给数据, 计算得

$$\tau_m = 1.458 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\frac{H_i(\tau_m)}{H_o} = 0.632$$

5-7-2 为了得到有效的电磁屏蔽, 试计算:

(1)收音机中周变压器的铝屏蔽罩的厚度;

(2)电源变压器铁屏蔽罩的厚度;

(3)若中周变压器用铁而电源变压器用铝作屏蔽是否也可以(铝: $\gamma = 3.72 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$; 铁 $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 10^4$)?

解 (1)中周变压器使用的频率为 $f = 465 \text{ kHz}$ 。在中周频率时, 铝的透入深度

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = 0.121 \text{ mm}$$

所以铝屏蔽罩的厚度为

$$h \approx 2\pi d = 0.76 \text{ mm}$$

(2)电源变压器工作在工频 $f = 50 \text{ Hz}$, 铁的透入深度

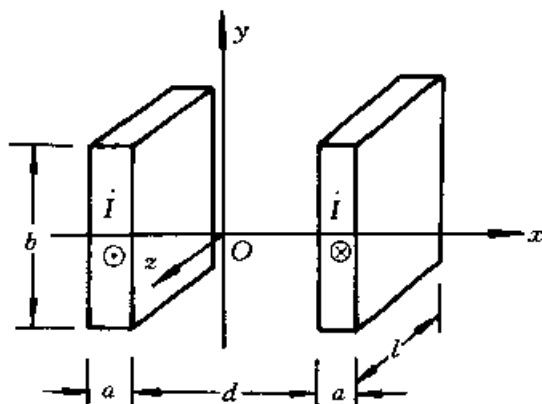
$$d = 0.23 \text{ mm}$$

所以铁屏蔽罩的厚度应为

$$h \approx 2\pi d = 1.414 \text{ mm}$$

(3)原理上中周可用铁屏蔽罩, 但电源变压器不能用铝。因 50Hz 时铝的透入深度 $d = 1.167 \text{ cm}$, 而 $2\pi d = 7.37 \text{ cm}$ 显然厚度太大。

5-7-3 两条平行的汇流排,截面为矩形,如题5-7-3图所示,其中通以大小相等、方向相反的交变电流 I 。导线宽 $a = 1 \text{ mm}$,高 $b = 10 \text{ mm}$,导线间距离 $d = 2 \text{ mm}$,导线的电导率 $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$,磁导率 $\mu = 250\mu_0$,电流频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 。计算:



题5-7-3图

(1) 导线各处的电流密度;

(2) 汇流排单位长度的电阻。

解 (1) 见教材中例5-7的结果,有公式

$$J_z = \frac{Ik}{b \operatorname{sh}(ka)} \operatorname{ch}k\left(\frac{d}{2} + a - x\right)$$

代入给定数据 $a = 1 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ mm}$, $\mu = 250\mu_0$, $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$ 和 $k = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$, 得

$$J_z = -99\,350 e^{-j9.4^\circ} I \operatorname{ch}[993.5 e^{j45^\circ} (0.002 - x)] \quad \text{A/m}^2$$

$$\left(\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2} + a\right)$$

(2) 见教材中例5-7的结果,在 $x = \frac{d}{2}$ 处,电场和磁场分别是

$$H_y = \frac{I}{b}, \quad E_z = -\frac{Ik \operatorname{ch}ka}{\gamma b \operatorname{sh}ka}$$

所以,该表面处的坡印亭矢量的复数形式为

$$\tilde{S}_x \Big|_{x=\frac{d}{2}} = -E_z H_y^* = \frac{I^2}{b^2 \gamma} \frac{k \operatorname{ch}ka}{\operatorname{sh}ka}$$

在 $x = (\frac{d}{2} + a)$ 处,电场和磁场分别为

$$E_z = 0, H_y = 0$$

所以,该表面处的坡印亭矢量为

$$\tilde{S}_x = 0$$

这样,应用教材公式(5-62),得右边导体单位长度的交流阻抗为

$$Z_{\text{右}} = R_{\text{右}} + jX_{\text{右}} = \frac{\tilde{S} \Big|_{x=\frac{d}{2}+a}}{|I|^2} = \frac{1}{b\gamma} \frac{k \operatorname{ch}ka}{\operatorname{sh}ka}$$

代入数据 $a = 1 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$, $\gamma = 10^7 \text{ S/m}$, $\mu = 250\mu_0$, $f = 50 \text{ Hz}$ 和 $k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$

$(1+j)$, 得

$$k = 7.0248 \times 10^2 (1+j) = 7.0248 \times 10^2 \times \sqrt{2} e^{j45^\circ}$$

$$ka = 7.0248 \times 10^2 \times 10^{-3} (1+j) = (1+j)K$$

$$K = 0.70248$$

$$\operatorname{sh} ka = \operatorname{sh}(1+j)K = 0.99882 e^{j54.4^\circ}$$

$$\operatorname{ch} ka = \operatorname{ch}(1+j)K = 1.07828 e^{j27.2^\circ}$$

$$\frac{\operatorname{ch} ka}{\operatorname{sh} ka} = 1.07955 e^{-j27.2^\circ}$$

$$\frac{k}{b\gamma} = 9.93457 \times 10^{-3} e^{j45^\circ}$$

所以

$$Z_{\text{右}} = R_{\text{右}} + jX_{\text{右}} = 9.93457 \times 10^{-3} e^{j45^\circ} \times 1.07955 \times e^{-j27.2^\circ}$$

$$= 10.72486 \times 10^{-3} e^{j17.8^\circ}$$

$$= (10.21145 \times 10^{-3} + j3.27853) \quad \Omega/\text{m}$$

最后, 得汇流排单位长度的交流电阻为

$$R = 2R_{\text{右}} = 2 \times 10.21145 \times 10^{-3}$$

$$= 20.4229 \times 10^{-3} \quad \Omega$$

思考题

5-1 有人想用铝制菜盒装置一台半导体收音机, 行不行? 为什么?

答 导电性能好的导体对高频电磁场有屏蔽作用, 当导体的厚度 h 接近于它的透入深度的 3~6 倍, 即

$$h \approx 2\pi d$$

时, 电磁场实际上便不能透过。铝的电导率 $\gamma = 3.6 \times 10^7 \text{ S/m}$, 广播电台的频率范围在 $10^5 \sim 10^9 \text{ Hz}$, 因此可以算出在这一频率范围内铝的最大透入深度为

$$d = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3.6 \times 10^7}}$$

$$= 0.27 \text{ mm}$$

在 $f = 10^9 \text{ KHz}$ 时, $d = 0.27 \times 10^{-2} \text{ mm}$, 即当菜盒的厚度 $h > 2\pi d = 2\pi \times 0.27 \times 10^{-2} = 1.7 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 时, 已不能接收所有广播节目, 所以不能用铝制菜盒装置半导体收音机。

5-2 一块金属在均匀恒定磁场中平移, 金属中是否会有涡流? 若金属块在均匀恒定磁场中旋转, 金属中是否会有涡流?

答 当通过大块导体的磁通发生变化时,导体内部会感应出电流。这些电流的特点是:在大块导体的内部自成闭合回路,呈旋涡状流动,因此称之为涡流。所以产生涡流的关键是通过导体的磁通是否发生了变化,显然当金属块在均匀恒定磁场中平移时,由于通过金属块的磁通是不变的,因此金属中没有涡流。如果金属块在均匀恒定磁场中旋转,则通过金属块的磁通随时间变化,金属中将产生涡流,这个涡流产生的磁场将阻碍磁通的变化。

5-3 把一铜片放在磁场中。如果将铜片从磁场中拉出或推入,都会感到阻力。试说明此阻力的来源。

答 当把铜片从磁场中拉出,通过铜片的磁通 ϕ 减小,铜片中产生涡流,由涡流产生的磁场与原磁场方向一致,表现为原磁场与铜片相互吸引,即涡流起了阻碍磁通 ϕ 变小的作用。因此,要把铜片从磁场中拉出,会感到阻力。同样,当把铜片推入磁场中时,通过铜片的磁通 ϕ 增大, ϕ 的变化使铜片中产生涡流,这个涡流产生的磁场与原磁场方向相反,表现为原磁场与铜片相斥,即涡流起了阻碍磁通变大的作用。因此,要把铜片推入磁场也会感到阻力。总之,把铜片拉出或推入磁场中,外力都要作功,这个功转化为涡流损耗产生的热。

5-4 x 射线为何可透过金属块?

答 金属块一般可视为良导体。但在时变场中,良导体是一个相对的概念。 x 射线的频率高达 10^{19} Hz,金属块的介电常数 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m,金属块的电导率约为 10^7 S/m,由此可知

$$\frac{\omega\epsilon}{\gamma} \approx 55.6 > 1$$

不满足良导体的条件, x 射线在金属块内衰减较小,故可以透过金属块。

5-5 用场的观点分析静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽。

答 静电屏蔽是利用导体在静电场中达到平衡状态时具有的下列性质:(1)导体内的电场为零;(2)导体是等位体;(3)电荷只分布在导体表面。因而把导体空腔接地,就可以把导体内、外的场分割为两个互不影响的独立系统,达到屏蔽的目的。

磁屏蔽主要利用高磁导率材料具有低磁阻的特性,将其制成有一定厚度的外壳,起到磁分路作用,使壳内设备少受磁干扰,达到磁屏蔽。

电磁屏蔽一是利用电磁波在金属表面产生涡流,从而抵消原来的磁场;二是利用电磁波在金属表面产生反射损耗和透射波在金属内的传播过程中衰减产生吸收损耗,达到屏蔽的作用。

5-6 电准静态场是如何定义的?它的特点是什么?准静态条件是什么?

答 时变电磁场中,忽略电磁感应项 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 时,称为电准静态场。它的微分形

式的基本方程组是

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &\approx 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

从上述方程组可以看出,电准静态场的特点是:电场 \mathbf{E} 和电通密度 \mathbf{D} 的方程与静电场中对应的方程完全一样,所不同的是 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 是时间的函数,但它们和源 ρ 之间的关系类似于静电场中场和源的关系。因此,只要知道了源的分布,就可以利用静电场的计算方法确定 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} ,继而求出 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 。

时变电磁场中当忽略位移电流密度 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 时,为磁准静态场,此时磁场可按恒定场处理。

电准静态场和磁准静态场统称为准静态场。因此,准静态的条件是可以忽略电磁感应和位移电流,这样的忽略在缓变场中,或满足条件 $\frac{\omega \epsilon}{\gamma} \ll 1$ 的导电媒质中,或满足条件 $r \ll \lambda$ (r 为场点至源点的距离)的介质中都是正确的。

5-7 在时变电磁场中,判别一种媒质是否属于良导体的条件是什么?

答 在时变电磁场中,满足条件

$$\frac{\omega \epsilon}{\gamma} \ll 1 \text{ 或 } \omega \epsilon \ll \gamma$$

的导电媒质称为良导体。上述条件表明,良导体中的位移电流密度远小于传导电流密度,可以忽略位移电流,因此良导体中的时变场为磁准静态场。

由于良导体的条件与 ω 有关,因而时变场中良导体是一个相对的概念,一种媒质在某一频率下可视为良导体,而在另一频率下则视为有损耗的介质。

5-8 电荷在导电媒质中的弛豫过程中,位移电流是否刚好抵消了传导电流的磁效应?

答 若在导电媒质中由于局外力作用已积累有体密度为 ρ 的自由电荷,则它在导电媒质中建立有电场 \mathbf{E} ,并伴随有电荷运动。这样, ρ 将随时间 t 而衰减,形成弛豫过程。根据电荷守恒关系

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

式中传导电流 $\mathbf{J}_c = \gamma \mathbf{E}$, $\rho = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}$ 。代入上式中得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon} \rho = 0$$

该一阶微分方程的解为

$$\rho = \rho_0(x, y, z) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon} t}$$

式中 $\rho_0(x, y, z)$ 为 $t=0$ 时的 ρ 。

对于电准静态场, 有 $E = -\nabla\varphi$, 而在无限大均匀媒质的空间, 有

$$\varphi = \int_V \frac{\rho_0(x, y, z)}{4\pi\epsilon r} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t} dV$$

所以空间任意一点的电场为

$$E = \frac{\rho_0(x, y, z)}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}$$

任意一点的传导电流密度为

$$J_c = \gamma E = \frac{\gamma\rho_0(x, y, z)}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}$$

任意一点的位移电流密度为

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{-\gamma\rho_0(x, y, z)}{4\pi\epsilon r^2} e^{-\frac{\gamma}{\epsilon}t}$$

即 $J_c = -\frac{\partial D}{\partial t}$, 所以电荷在导电媒质中的驰豫过程中, 位移电流刚好抵消了传导电流的磁效应。

5-9 何谓透入深度? 它是怎样定义的? 它与哪些量有关? 在良导体情形下的计算公式是怎样的?

答 时变电磁场中, 电流密度、电场强度和磁场强度的振幅沿导体的纵深都按指数规律 $e^{-\alpha z}$ 衰减, 即愈深入导体的内部, 场量愈小。当频率很高时, 场量几乎只在导体表面附近一薄层中存在。这种场量主要集中在导体表面附近的现象, 称为集肤效应。工程上常用透入深度 d 表示场量在良导体中的集肤程度。 d 定义为场量振幅衰减到其表面值的 $1/e$ 时所经过的距离, 即

$$e^{-\alpha d} = e^{-1} \quad d = \frac{1}{\alpha}$$

在良导体情形下, d 的计算公式近似为

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

上式说明, 频率越高、导电和导磁性能越好的导体, 集肤效应越显著, d 越小。

5-10 导线的电阻与电感值仅决定于导线的几何形状、尺寸及媒质的参数, 而与所加的电压无关, 这一结论在时变电磁场中是否仍然适用? 为什么?

答 在恒定电磁场中, 导线的电阻与电感值仅决定于导线的几何形状、尺寸及媒质的参数, 而与所加的电压无关。但在交变电磁场中, 由于集肤效应, 可以证明半径为 a 的圆截面导线单位长度上的阻抗为

$$Z = \frac{1}{2\pi a \gamma d} (1 + j)$$

故交流电阻为

$$R = \frac{1}{2\pi a \gamma d} = \frac{1}{2\pi a \gamma} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}$$

交流电感为

$$L = \frac{1}{2\pi a \gamma \omega d} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu}{2\gamma \omega}}$$

以上两式说明,在时变电磁场中,导线的 R 和 L 不仅与导线的几何形状、尺寸及媒质参数有关,而且与所加电压的频率有关,频率越高,交流电阻越大,交流电感越小。

5-11 何谓集肤效应、邻近效应?

答 集肤效应见思考题 5-9 的解答。

时变电磁场中,相互靠近的导体不仅处于自身电流产生的电磁场中,同时还处于其它导体中的电流产生的电磁场中。这时各个导体中的场量的分布和它单独存在时不同,会受到邻近导体的影响,这种现象称为邻近效应。频率愈高,导体靠得愈近,邻近效应愈显著。

邻近效应与集肤效应是共存的,它会使导体的电流分布更不均匀。

5-12 随着电源频率的提高,以平板型导体(板厚远大于透入深度)为例,其等效电阻、电抗和内电感将作怎样的变化?

解 根据教材例 5-5 的解答,可得平板型导体单位面积的阻抗为

$$Z = \frac{1}{\gamma d} (1 + j)$$

故其等效电阻为

$$R = \frac{1}{\gamma d} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}}$$

等效电抗和内感分别为

$$X = \frac{1}{\gamma d} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\gamma}} \quad L = \frac{X}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu}{2\gamma \omega}}$$

以上 R 、 X 和 L 的计算式表明,随着电源频率的提高,电阻 R 和电抗 X 增大,内电感 L 减小。

5-13 在无限大的均匀导电媒质中,放置一初始值为 Q_0 的点电荷,试求导电媒质中任一时刻的电流密度。

答 根据导电媒质中自由电荷的驰豫过程可知,无限大均匀导电媒质中任一点的电位为(以 Q_0 所在处为坐标原点)

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中 $\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$ 。此时的场为电准静态场, 因此, 电场强度 $E = -\nabla\varphi$, 即

$$E = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{t}{\tau}} e_r$$

所以导电媒质中任一时刻的电流密度为

$$J = \gamma E = \frac{\gamma Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\frac{t}{\tau}} e_r$$

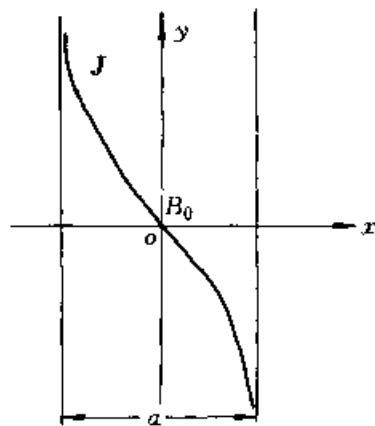
5-14 涡流是怎样产生的? 应采取哪些措施来减少电工钢片中的涡流损耗?

答 当导体放在交变磁场中时, 导体中出现感应电流, 该感应的电流呈漩涡状, 故称涡流。

处于交变磁场中的薄导电平板中的涡流可以表示为

$$j = -\frac{B_0 k}{\mu} \text{sh} kx$$

式中 B_0 为板中心处的磁感应强度, $k = \sqrt{\omega\mu\gamma/2}$ 。 j 的分布见图示。显然板的厚度 a 越大, 集肤效应越显著。板表面处的涡流密度最大, 因此, 要减少电工钢片中的涡流损耗, 钢片要尽量薄, 导电率要尽量小。



思考题 5-14 图

5-15 当有 $f_1 = 4 \times 10^3$ Hz 和 $f_2 = 4 \times 10^5$ Hz 的两种频率的信号, 同时通过厚度为 1 mm 铜板时, 试问在铜板的另一侧能接收到哪个频率的信号? (注 $\gamma_{\text{cu}} = 5.8 \times 10^7$ S/m, $\mu_{\text{cu}} = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m)

答 在 f_1 和 f_2 频率下, 铜板为良导体, 故可以得透入深度分别为

$$d_1 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 4 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 1 \text{ mm}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 4 \times 10^5 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} \approx 0.1 \text{ mm}$$

因为钢板的厚度 $h < 2\pi d_1$, 但 $h > 2\pi d_2$, 所以频率为 f_1 的信号可以透过铜板。即在板的另一侧能接收到 f_1 信号。

5-16 试分析在高频情况下, 为什么导线可以采用空心管状结构。

答 高频时, 由于集肤效应, 导线中的电流将分布在靠近导线表面的一薄层中, 导线中心部位没有电流, 故高频时导线可以采用空心管状结构。

习 题

5-1 在无限大均匀导电媒质中,放置一个初始值为 q_0 的点电荷,试问该点电荷的电量如何随时间变化? 空间任一点的电流密度和磁场强度是多少?

解 这是一个电准静态场,电荷在导电媒质中发生弛豫过程,有

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau_e}$$

式中, $\tau_e = \frac{\epsilon}{\gamma}$, 称为弛豫时间。若设 $q(t)$ 位于原点, 则空间任意的电场强度为

$$\mathbf{E}(\gamma) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{e}_r = \frac{q_0}{4\pi\epsilon r^2} e^{-t/\tau_e} \mathbf{e}_r$$

电流密度为

$$\mathbf{J}(\gamma) = \gamma \mathbf{E} = \frac{\gamma q_0}{4\pi\epsilon r^2} e^{-t/\tau_e} \mathbf{e}_r$$

而磁场处处为零。(原因见思考题 5-8)

5-2 (1) 长直螺线管中载有随时间变化相当慢的电流 $i = I_0 \sin \omega t$ 。先由安培环路定律求半径为 a 的线圈内产生的磁准静态场的磁感应强度, 然后利用法拉第定律求线圈里面和外面的感应电场强度。

(2) 试论证上述磁准静态的解只在 $\omega \rightarrow 0$ 的静态极限情况下, 才精确地满足麦克斯韦方程组。

解 (1) 对于长直螺线管, 在均匀密绕的条件下, 磁场方向与电流方向成右螺旋关系, 为

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 N I_0 \sin \omega t \mathbf{e}_z & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases}$$

N 是每单位长度上线圈的匝数。

由于磁场分布具有轴对称性, 因而它感应出的电场亦具有这一性质, 其方向则与磁场成右螺旋。

取半径为 ρ 的同心圆周为积分路径, 应用法拉第定律, 可求得由沿 \mathbf{e}_z 方向的磁场产生的电场为

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 2\pi\rho E_\phi(\rho, t) = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \begin{cases} -\mu_0 N \pi \rho^2 \frac{di}{dt} = -\mu_0 N \pi \rho^2 I_0 \omega \cos \omega t & (\rho < a) \\ -\mu_0 N \pi a^2 \frac{di}{dt} = -\mu_0 N \pi a^2 I_0 \omega \cos \omega t & (\rho > a) \end{cases} \end{aligned}$$

所以有

$$E_{\phi}(\rho, t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 N \omega I_0}{2} \rho \cos \omega t & (\rho < a) \\ -\frac{\mu_0 N \omega I_0 a^2}{2\rho} \cos \omega t & (\rho > a) \end{cases}$$

(2) 将上面求出的 $\mathbf{B}(t) = B(t)\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{E} = E_{\phi}(\rho, t)\mathbf{e}_{\phi}$ 代入麦克斯韦方程中

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

容易验证, 左、右两边不相等。只有在 $\omega \rightarrow 0$ 的静态场极限情况下, 才精确地满足麦克斯韦方程组。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_{\phi} \left(-\frac{\partial B_z}{\partial \rho} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_0 N i(t)) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_{\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_0 N i(t)) \right) = 0 & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \begin{cases} \mathbf{e}_{\phi} \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mu_0 N \omega I_0}{2} \rho \cos \omega t \right) & (\rho < a) \\ \mathbf{e}_{\phi} \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\mu_0 N a^2 \omega I_0}{2\rho} \cos \omega t \right) & (\rho > a) \end{cases} \end{aligned}$$

或者

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \begin{cases} \mathbf{e}_{\phi} \frac{\epsilon_0 \mu_0 N \rho \omega^2}{2} I_0 \sin \omega t & (\rho < a) \\ \mathbf{e}_{\phi} \frac{\epsilon_0 \mu_0 N a^2 \omega^2}{2\rho} I_0 \sin \omega t & (\rho > a) \end{cases}$$

可见 $\nabla \times \mathbf{H} = 0 \neq \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 。但当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, 则 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, 精确地满足麦克斯韦方程组。

5-3 由两层有损介质组成的平板电容器, 如题 5-3 图所示。分析两层介质中的电场强度。忽略感应电场。板间电压分四种情况:

(1) 直流电压, 稳态;

(2) 交流电压, 稳态, 角频率 $\omega \ll \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$ 和 $\omega \ll \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$;

(3) 交流电压, 稳态, $\omega \gg \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$ 和 $\omega \gg \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$;

(4) 交流电压, 稳态, $\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \ll \omega \ll \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$ 。

解 (1) 直流电压, 稳态。这时电场按电导率分布, 由恒定电场计算, 得

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}, \quad E_2 = \frac{\gamma_1 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}$$

(2) 交流电压, 稳态, 角频率 $\omega \ll \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$ 和 $\omega \ll$

$\frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$ 。这时, 两种介质中的位移电流远小于漏电流, 则电场按电导率分布。按恒定电场计算, 得

$$\dot{E}_1 = \frac{\gamma_2 \dot{U}}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\gamma_1 \dot{U}}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}$$

(3) 交流电压, 稳态, 角频率 $\omega \gg \frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$ 和 $\omega \gg \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$ 。这时, 两种介质中的漏电流远小于位移电流, 则电场按介电常数分布, 属静电场问题。根据静电场计算, 得

$$\dot{E}_1 = \frac{\epsilon_2 \dot{U}}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\epsilon_1 \dot{U}}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$$

(4) 交流电压, 稳态, $\frac{\gamma_1}{\epsilon_1} \ll \omega \ll \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$ 。这时, 介质 1 中的位移电流远大于漏电流, 属静电场问题; 而介质 2 中的位移电流远小于漏电流, 属恒定电场问题。其等值电路相当于电阻 R 和电容 C 的串联电路, 有

$$R = \frac{d_2}{\gamma_2 S} \quad \text{和} \quad C = \frac{\epsilon_1 S}{d_1}$$

这里 S 是电容器极板的面积。由电路分析计算, 得电阻 R 和电容 C 上的电压分别为

$$\dot{U}_R = \frac{j\omega\epsilon_1 d_2}{\gamma_2 d_1 + j\omega\epsilon_1 d_2} \dot{U}, \quad \dot{U}_C = \frac{\gamma_2 d_1}{\gamma_2 d_1 + j\omega\epsilon_1 d_2} \dot{U}$$

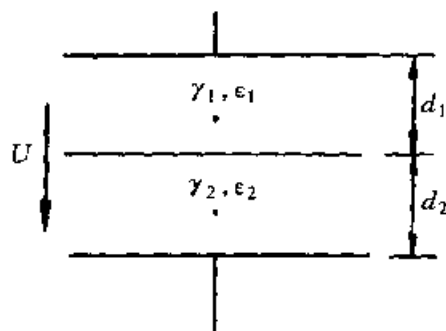
所以, 两种介质中的电场分别为

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{U}_C}{d_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 d_1 + j\omega\epsilon_1 d_2} \dot{U}, \quad \dot{E}_2 = \frac{\dot{U}_R}{d_2} = \frac{j\omega\epsilon_1}{\gamma_2 d_1 + j\omega\epsilon_1 d_2} \dot{U}$$

5-4 题 5-4 图示一薄铜板 ($b \gg a$), 其电导率 $\gamma = 5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$, 通有电流 $i = 5 \cos 10^5 t \text{ A}$, $b = 50 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$ 。求电流密度 J 随 x 变化的曲线。

注: 因 $b \gg a$, 故 H 可视为只有 y 分量。

解 因薄铜板沿 y, z 方向的尺寸远大于它的厚度, 故其中的电磁场分布除 y 和 z 向的两端部局部范围内有较大的变化外, 在中间部分可假设电磁场分布



题 5-3 图

沿 y 向和 z 向是不变的,即只随 x 方向变化。

又由于电流沿 z 方向流动,所以电流密度也只有 z 分量 J_z ,即 $\mathbf{J} = J_z(x)\mathbf{e}_z$,且满足扩散方程

$$\frac{d^2 J_z}{dx^2} = k^2 J_z$$

这个方程的解是

$$J_z = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

式中, $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ 。显然,电流在 $x=0$ 平面两侧的分布应是对称的,故有 $C_1 = C_2 = C/2$ 。因此有

$$J_z = C \cosh kx$$

如果沿薄铜板截面流过的总电流的复振幅为 \dot{I} ,则应有

$$\dot{I} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} J_z b dx = bC \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cosh kx dx = \frac{2bC}{k} \operatorname{sh} \frac{ka}{2}$$

所以,得常数

$$C = \frac{k\dot{I}}{2b \operatorname{sh} \frac{ka}{2}}$$

于是,薄铜板中的电流密度为

$$J_z = \frac{k\dot{I}}{2b \operatorname{sh} \frac{ka}{2}} \cosh kx$$

代入题中给定的数据: $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\gamma = 5.6 \times 10^7 \text{ S/m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $a = 0.01 \text{ m}$, $\dot{I} = 5 \text{ A}$,得

$$J_z(x) = 2.24 e^{-1132^\circ} \cosh[1876(1+j)x] \text{ A/m}^2$$

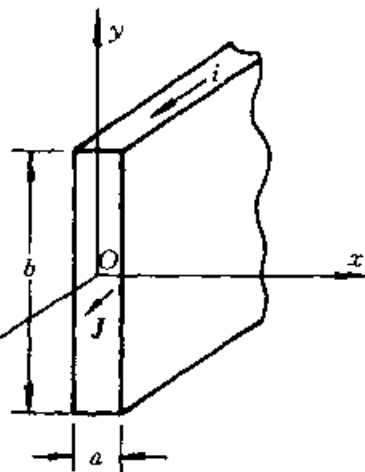
从上式看出,电流密度沿 x 方向的分布是不均匀的,愈靠近表面处愈大,在中心点处为最小值。

5-5 今测得在 13.56 MHz 的电磁波照射下,脂肪的相对介电常数 $\epsilon_r = 20$,电阻率 $\rho = 34.4 \Omega \cdot \text{m}$ 。试计算其透入深度。

解 取脂肪的磁导率为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$,则其透入深度为

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2 \times 34.4}{2\pi \times 13.56 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}} \\ &= 0.801 \text{ m} \end{aligned}$$

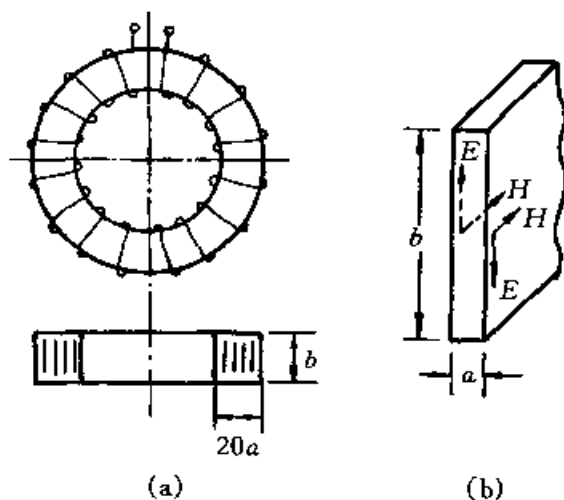
5-6 有一环形电感,如题 5-6 图(a)所示。铁心由 0.5 cm 宽的薄片卷



题 5-4 图

成,每片厚度 $a = 0.15 \text{ mm}$,共 20 层,平均每层周长 $l = 6 \text{ cm}$,宽度 $b = 0.5 \text{ cm}$ 。铁心材料的磁导率 $\mu = 800\mu_0$,电导率 $\gamma = 5 \times 10^6 \text{ S/m}$ 。线圈匝数 $N = 60$ 匝。求此铁心线圈在频率为 50 kHz 时的等效阻抗(电阻及电感)。导线的电阻不计。

注:因薄片周长 $l \gg a, b \gg a$,故可当成平板考虑,如题 5-6 图(b)所示。



题 5-6 图

解 因每一层薄片的平均周长 $l \gg a$ 和 $b \gg a$,故可当成薄导电平板中的涡流问题求解。整个铁心可看成是横截面尺寸为 $a \times b$ 和长度 $L = 20l$ 的薄导电平板。假设线圈中通过电流 I ,在磁准静态近似下,由安培环路定律得到薄片两表面处($x = \pm \frac{a}{2}$)的磁场强度为

$$\dot{H}_S = \frac{NI}{l} \quad (1)$$

应用上式和教材中的式(5-56),确定出薄片中的磁场分布为

$$\dot{H}_z(x) = \frac{\dot{H}_S}{\text{ch} \frac{ka}{2}} \text{ch} kx \quad (2)$$

式中, $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+j)$ 。

利用 $\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{J}$ 和 $\mathbf{J} = \gamma \dot{\mathbf{E}}$,可得薄片中的电场分布为

$$\dot{E}_y(x) = -\frac{k}{\gamma} \times \frac{\dot{H}_S}{\text{ch} \frac{ka}{2}} \text{sh} kx \quad (3)$$

从坡印亭定理知道,流入整个铁心薄片的复功率为

$$P + jQ = - \oint_S (\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \dot{E}_y \left(+ \frac{a}{2} \right) \dot{H}_z^* \left(+ \frac{a}{2} \right) dy dz - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \left[- \dot{E}_y \left(- \frac{a}{2} \right) \dot{H}_z^* \left(- \frac{a}{2} \right) \right] dy dz \\
&= - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \left(- \frac{k}{\gamma} \frac{\dot{H}_s}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \operatorname{sh} \frac{ka}{2} \right) \dot{H}_s^* dy dz \\
&\quad - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^L \left(- \frac{k}{\gamma} \frac{\dot{H}_s}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \operatorname{sh} \frac{ka}{2} \right) \dot{H}_s^* dy dz \\
&= \frac{2kbL}{\gamma} \left| \dot{H}_s \right|^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{ka}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \\
&= \frac{40kbl}{\gamma} \left(\frac{N}{l} \right)^2 I^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{ka}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \tag{4}
\end{aligned}$$

最后,得到铁心线圈的等效阻抗(见教材中的式(5-62))为

$$\begin{aligned}
Z &= R + jX = \frac{1}{I^2} (P + jQ) \\
&= \frac{40kbl}{\gamma} \left(\frac{N}{l} \right)^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{ka}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} \tag{5}
\end{aligned}$$

代入题中给定的数据: $b = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $l = 6 \times 10^{-2} \text{ m}$, $a = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}$, $N = 60$ 匝, $\gamma = 5 \times 10^6 \text{ S/m}$, $\mu = 800\mu_0 = 800 \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$ 和 $f = 5 \times 10^4 \text{ Hz}$, 计算得

$$Z = (70.15 + j66.60) \ \Omega$$

有关数据计算过程:

若取 $K = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}$, 则

$$\frac{ka}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} (1 + j) = (1 + j)K$$

$$\operatorname{sh} \frac{ka}{2} = \operatorname{sh}(1 + j)K = \operatorname{sh}K \cos K + j \operatorname{ch}K \sin K$$

$$\operatorname{ch} \frac{ka}{2} = \operatorname{ch}(1 + j)K = \operatorname{ch}K \cos K + j \operatorname{sh}K \sin K$$

代入给定数据, 计算得

$$K = \frac{1.5 \times 10^{-4}}{2} \sqrt{\frac{2\pi \times 5 \times 10^4 \times 800 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10^6}{2}}$$

$$= 2.1074$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} \frac{ka}{2} &= \operatorname{sh} 2.1074 \cos 2.1074 + j \operatorname{ch} 2.1074 \sin 2.1074 \\ &= -2.0717 + j3.5873\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} \frac{ka}{2} &= \operatorname{ch} 2.1074 \cos 2.1074 + j \operatorname{sh} 2.1074 \sin 2.1074 \\ &= -2.1339 + j3.4828\end{aligned}$$

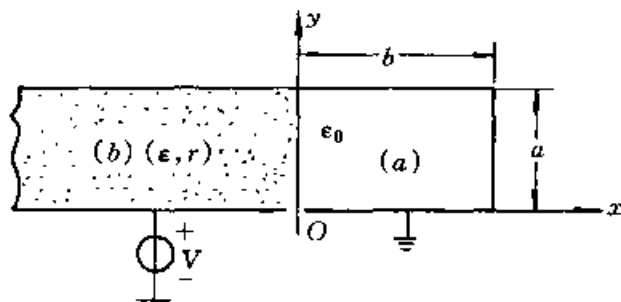
$$\frac{\operatorname{sh} \frac{ka}{2}}{\operatorname{ch} \frac{ka}{2}} = \frac{-2.0717 + j3.5873}{-2.1339 + j3.4828} = 1.0139 - j0.0263$$

$$\begin{aligned}\frac{40kbl}{\gamma} \left(\frac{N}{l} \right)^2 &= \frac{40bN^2}{\gamma l} \times \frac{2}{a} \times \frac{ka}{2} \\ &= \frac{80bN^2K}{\gamma la} (1+j) \\ &= \frac{80 \times 5 \times 10^{-3} \times 60^2 \times 2.1074}{5 \times 10^6 \times 6 \times 10^{-2} \times 1.5 \times 10^{-4}} (1+j) \\ &= 67.4368(1+j)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}Z = R + jX &= 67.4368(1+j)(1.0139 - j0.0263) \\ &= 70.15 + j66.60 \quad \Omega\end{aligned}$$

5-7 题 5-7 图示系统沿 z 轴向无限长。 $x=0$ 平面左边的平行平板电容器延伸到 $x=-\infty$; 上电极向右延伸到 $x=b$ 平面后向下弯曲到 $y=0$, 然后沿 $y=0$ 向左弯曲到 $x=0$ 平面。该系统的下电极电位为 $V(t)$, 上电极接地。区域 a 是自由空间, 而 $x=0$ 平面左边的区域 b 是有损介质(介电常数 ϵ 和电导率 γ)。外施电压 $V(t)$ 是一量值为 V_0 的阶跃函数。



题 5-7 图

(1) 电压已加上很长时间, 求区域 a 和 b 中的电场和电位分布。

(2) 现在要求 $t > 0$ 时的电位 φ , 并证明在 $t \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 这一结果变成(1)中的结果。

解 (1) 电压已加上很长时间时, 即建立稳态后, 由于区域 a 是自由空间, 其中的电场就是静电场, 电位 φ_a 满足 $\nabla^2 \varphi_a = 0$; 而区 b 相当于纯电阻, 其中的电场就是恒定电场, 电位 φ_b 也满足 $\nabla^2 \varphi_b = 0$ 。

根据边界条件: $x=0$ 处, $\frac{\partial \varphi_b}{\partial x}=0$; $y=0$ 处, $\varphi_b=V_0$; $y=b$ 处, $\varphi_b=0$, 容易得区域 b 中的电位解为

$$\varphi_b = V_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

同理, 根据边界条件: $x=b$ 处, $\varphi_a=0$; $y=0$ 和 $y=a$ 处, $\varphi_a=0$, 得到区域 a 中的电位的解形式为

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi(b-x)}{a}$$

式中, A_n 为待定常数。

又因在 $x=0$ 处, $\varphi_a = \varphi_b$, 所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = \left(1 - \frac{y}{a}\right) V_0$$

利用三角函数的正交性, 得

$$A_n = \frac{2V_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}}$$

所以, 区域 a 中的电位解为

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

(2) $t>0$ 的电位 φ , 即从刚接通的瞬间到稳态建立这一过程的电位。在这一瞬变过程期间, 区域 a 和 b 中的电场都属于电准静态场。电位 φ_a 和 φ_b 仍然满足拉普拉斯方程。取它们的解分别为如下形式

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \operatorname{sh} \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (1)$$

和

$$\varphi_b = V_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (2)$$

容易验证, 它们满足条(1)问中给出的边界条件。这里, $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 分别是待定的时间函数。

在 $x=0$ 处, 有分界面上的衔接条件

$$\varphi_a \Big|_{x=0} = \varphi_b \Big|_{x=0} \quad (3)$$

和

$$\mathbf{n} \cdot (\gamma_a \mathbf{E}_a - \gamma_b \mathbf{E}_b) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_a \mathbf{E}_a - \epsilon_b \mathbf{E}_b) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

现在, 将式(1), (2)代入式(3), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} = V_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi y}{a}$$

利用三角函数的正交性,由上式得

$$A_n(t) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2V_0}{n\pi} + B_n(t) \quad (5)$$

再利用 $E = -\nabla\varphi$, 并将式(1)、(2)代入式(4), 并利用式(5), 得

$$\frac{dB_n(t)}{dt} + \left[\frac{\epsilon - \epsilon_0 \coth \frac{n\pi b}{a}}{\gamma} \right] B_n(t) = 0 \quad (6)$$

解这个常微分方程, 得

$$B_n(t) = B_n(0) e^{-t/\tau} \quad (7)$$

式中, $\tau = \gamma / (\epsilon - \epsilon_0 \coth \frac{n\pi b}{a})$ 。

现在确定 $B_n(0)$ 的值。在 $x=0$ 处, 利用 $t=0_+$ 的初始条件 $(\epsilon_a E_a - \epsilon_b E_b) \cdot n = 0$, 有

$$\epsilon_0 A_n(0) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = -\epsilon B_n(0) \quad (8)$$

又由式(5)知, 在 $t=0_+$ 时, 有

$$A_n(0) \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2V_0}{n\pi} + B_n(0) \quad (9)$$

联立方程式(8)和(9), 并解之, 得

$$B_n(0) = -\frac{2V_0}{n\pi} \frac{\epsilon_0}{(\epsilon_0 + \epsilon)}$$

代入式(7), 有

$$B_n(t) = -\frac{2V_0}{n\pi} \frac{\epsilon_0}{(\epsilon_0 + \epsilon)} e^{-t/\tau}$$

代入式(8), 有

$$A_n(t) = \frac{2V_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} e^{-t/\tau}\right)$$

最后, 将 $A_n(t)$ 和 $B_n(t)$ 代入式(1)和(2), 得 $t>0$ 时的电位 φ 为

$$\varphi_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} e^{-t/\tau}\right) \operatorname{sh} \frac{n\pi(b-x)}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

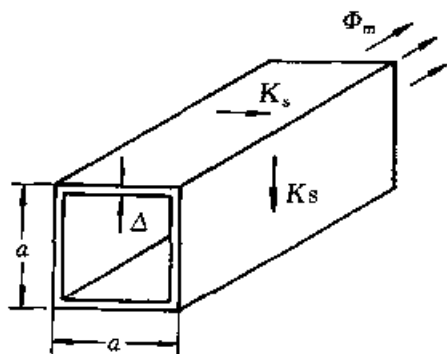
和

$$\varphi_b = V_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0}{n\pi} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + \epsilon} e^{-t/\tau} e^{\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

很容易证明, 在 $t \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 这一结果可变成(1)中的结果。

5-8 一薄壁方筒,如题 5-8 图所示。

其电导率为 γ , 磁导率 μ_0 , 壁厚 Δ , 方截面边长为 a , 筒长很长。在 $t=0$ 时, 由于外加磁通 Φ_m 突减至零, 感生一面电流, 其面电流的线密度为 K_0 。试证 $t>0$ 时, $K_s(t) = K_0 e^{-t/\tau_m}$, 这里 $\tau_m = \mu_0 \gamma a \Delta / 4$ 。



题 5-8 图

解 起初 $t=0_+$ 时, 外加磁通 Φ_m 突然减至零, 薄壁方筒外部空间的磁场 $H_0=0$ 。但是由于薄壁方筒中感应电流 K_0 的作用, 方筒所围内部空间的磁场 H_i 不会突变, 仍保持原值。随后 $t>0$ 时, 随着感应电流的衰减, H_i 逐渐减小, 直至消失。根据连续性条件, 有

$$H_i = K_s \quad (1)$$

式中 K_s 是薄壁方筒中面电流的线密度, 如题 5-8 图所示。若薄壁方筒的厚度记为 Δ , 则

$$K_s = \gamma E \Delta \quad (2)$$

在薄壁方筒中取回路 l , 如题 5-8 图所示, 根据电磁感应定律, 得

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

将式(2)代入上式, 并假定薄壁方筒所围空间内 H_i 处处分布均匀, 则得

$$K_s \oint_l \frac{dl}{\gamma \Delta} = - \mu_0 \frac{dH_i}{dt} a^2 \quad (4)$$

将式(1)代入上式并整理之, 得

$$\tau_m \frac{dK_s}{dt} + K_s = 0 \quad (5)$$

式中 $\tau_m = \frac{1}{4} \mu_0 \gamma a \Delta$ 。

一阶微分方程式(5)的解为

$$K_s = K_0 e^{-t/\tau_m}$$

式中 K_0 是 K_s 在 $t=0$ 时的值。这个结果表明: $t>0$ 时, $K_s(t) = K_0 e^{-t/\tau_m}$, 这里 $\tau_m = \frac{1}{4} \mu_0 \gamma a \Delta$ 。

5-9 某高灵敏度仪器必须高度地屏蔽外界电磁场, 使外界磁场强度下降到 0.01 A/m 以下。但根据实测结果, 该处可能受到的最大干扰磁场强度达 12 A/m 。试计算用铝板屏蔽以及用 $\mu_r = 2000$ 的铁板屏蔽所需的厚度 ($\gamma_{\text{Al}} = 35.7 \times 10^6 \text{ S/m}$, $\gamma_{\text{Fe}} = 8.3 \times 10^6 \text{ S/m}$)。

解 最大干扰磁场的频率可认为是工频, $f = 50 \text{ Hz}$ 。这样, 铝板和铁板的衰减常数分别为

$$\alpha_{\text{Al}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 35.7 \times 10^6}{2}} = 83.95 \text{ Np/m}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{Fe}} &= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^3 \times 8.3 \times 10^6}{2}} \\ &= 1810.17 \text{ Np/m}\end{aligned}$$

设铝板中的磁场从表面处的 $H = 12 \text{ A/m}$, 经过厚度 h_{Al} 后衰减到 0.01 A/m , 则有

$$\begin{aligned}12e^{-\alpha_{\text{Al}}h_{\text{Al}}} &= 0.01 \\ 12000 &= e^{83.95h_{\text{Al}}}\end{aligned}$$

所以, 得

$$h_{\text{Al}} = 8.45 \text{ cm}$$

同理, 求得

$$h_{\text{Fe}} = 3.92 \text{ mm}$$

5-10 题 5-10 图示出一交流电机铁心上的导线槽, 槽内导线为铜, 电导率 $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。已知 $h = 1.5 \text{ cm}$, $b = 0.5 \text{ cm}$, $\mu_{\text{Fe}} = \infty$, $I = 100 \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$ 。求:

- (1) 电流密度;
- (2) 单位长度上所消耗的功率;
- (3) 单位长度导线的交流阻抗, 交流电阻与直流电阻的比值。

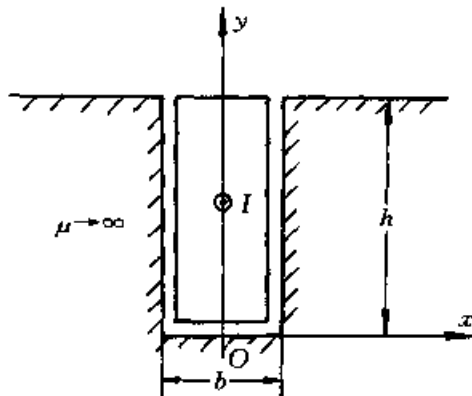
解 (1) 槽内导体中电流密度 \mathbf{J} 只有 J_z 分量, 从而电场 \mathbf{E} 也只有 E_z 分量, 磁场 \mathbf{H} 也只有 H_x 分量, 这是因为假设铁心的 μ_{Fe} 是无限大, 导体电流产生的槽漏磁通垂直地从槽侧面穿出, 平行地跨过槽宽而在铁心内闭合。又因槽宽很小, 所以可假定磁场的分布沿 x 方向是不变的, 即随 y 方向变化。将 $\mathbf{H} = H_x \mathbf{e}_x$ 代入教材中的方程式 (5-42), 得

$$\frac{d^2 H_x}{dy^2} = k^2 H_x \quad (1)$$

式中 $k = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ 。其解是

$$H_x = C_1 e^{-ky} + C_2 e^{ky} \quad (2)$$

由于认为铁心的 $\mu_{\text{Fe}} = \infty$, 故铁心中的 $\mathbf{H} = 0$ 。因此, 边界条件是:



题 5-10 图

$$y = h, \dot{H}_x = \frac{\dot{I}}{b} \text{ 和 } y = 0, \dot{H}_x = 0 \quad (3)$$

其中 \dot{I} 为导体中电流的复振幅。将式(3)代入式(2),得

$$C_2 = -C_1 = \frac{\dot{I}}{2b \operatorname{sh} kh}$$

所以,得磁场分布为

$$\dot{H}_x = \frac{\dot{I}}{b} \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh} \quad (4)$$

由 $\dot{\mathbf{J}} = \nabla \times \dot{\mathbf{H}}$, 得电流密度为

$$\dot{J}_z = -\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = -\frac{\dot{I}k}{b} \times \frac{\operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh} \quad (5)$$

而电场强度为

$$\dot{E}_z = \frac{\dot{J}_z}{\gamma} = -\frac{\dot{I}k}{\gamma b} \times \frac{\operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} kh} \quad (6)$$

代入题中给出的已知数据: $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$, $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $h = 1.5 \times 10^{-2} \text{ m}$, $b = 0.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ 及 $\dot{I} = 100$, 得

$$\dot{J}_z = 1169e^{j46.8^\circ} \operatorname{ch}[107(1+j)y] \text{ KA/m}^2$$

(2)单位长度上所消耗的功率为

$$P_e = \int_0^h \frac{|\dot{J}_z|^2}{\gamma} b dy = 3.385 \text{ W/m}$$

(3)上面已求出电场强度 \dot{E}_z \dot{H}_x 。在现在的情况下,坡印亭矢量的方向沿 y 轴,并且其通量只在导体上表面 $y = h$ 处才不为零。应用教材中的公式(5-62),有

$$\begin{aligned} Z = R + jX &= \frac{-(\dot{E}_z \dot{H}_x^*) \Big|_{y=h} \times b}{|\dot{I}|^2} \\ &= \frac{k}{b\gamma} \times \frac{\operatorname{ch} kh}{\operatorname{sh} kh} \\ &= 3.84 \times 10^{-4} (1+j) \text{ } \Omega/\text{m} \end{aligned}$$

同时,我们知道矩形导线单位长的直流电阻是

$$R_0 = \frac{1}{\gamma ha} = 2.3 \times 10^{-4} \text{ } \Omega/\text{m}$$

因此,交流电阻与直流电阻的比值是

$$\frac{R}{R_0} = \frac{3.83 \times 10^{-4}}{2.3 \times 10^{-4}} = 1.67 \text{ 倍}$$

第六章 平面电磁波的传播

习题(6-1)

6-1-1 导出等相面为 xoy 平面的均匀平面波满足的一维波动方程。

解 均匀平面电磁波是 TEM 波,其传播方向垂直于等相位面,电场强度和磁场强度与传播方向满足右手螺旋法测,且有 $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{V}$,所以均匀平面波的电场强度和磁场强度仅是传播方向的函数。因此,对于等相位面为 xoy 平面的均匀平面波,不难推得其传播方向为 z 方向,即

$$\mathbf{E} = E(z, t) \text{ 和 } \mathbf{H} = H(z, t)$$

而且 $E_z = 0, H_z = 0$

代入教材(6-5)和(6-6)式电磁波动方程中,有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

如果设 $\mathbf{E} = E_x(z, t)\mathbf{e}_x$, 则有 $\mathbf{H} = H_y(z, t)\mathbf{e}_y$, 对应的波动方程简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

如果设 $\mathbf{E} = E_y(z, t)\mathbf{e}_y$, 则有 $\mathbf{H} = H_x(z, t)(-\mathbf{e}_x)$, 对应的波动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\gamma \frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

以上两组方程式皆为等相位面为 xoy 平面的均匀平面波满足的一维波动方程。

本题的关键在于抓住均匀平面波的传播特性,了解场量、传播方向和等相位面之间方向的关系。沿着某一坐标轴方向传播的平面波,可以看成是两组平面波的叠加。

习题(6-2)

6-2-1 试证明 $E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$

$$H_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]$$

满足电磁场基本方程组。

证明 对 E_y 取旋度

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z = [f_1'(x - vt) + f_2'(x + vt)] \mathbf{e}_z$$

把 H_z 对时间求导

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial t} \mathbf{e}_z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [f_1'(x - vt)(-v) - f_2'(x + vt)(v)] \mathbf{e}_z$$

把 $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 代入上式中, 然后比较以上两式, 显然有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

同理对 \mathbf{H} 取旋度, 把 \mathbf{E} 对时间求导, 可以证明

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

对 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 进行散度运算, 有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial y} (\mathbf{e}_y) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\partial H_z}{\partial z} (\mathbf{e}_z) = 0$$

以上所得各式说明 E_y 和 H_z 满足电磁场基本方程组。

本题中给出的 E_y, H_z 的函数表示式实际是一维波动方程的解。证明过程说明, 电磁场波动方程和电磁场基本方程组是等价的。

6-2-2 已知自由空间中均匀平面波的电场表达式为 $\mathbf{E}(x, t) = [100\sin(\omega t - \beta x)\mathbf{e}_z + 200\cos(\omega t - \beta x)\mathbf{e}_y]$ V/m, 求该波的磁场 \mathbf{H} 和坡印亭矢量 \mathbf{S} 。

解 由电场强度 \mathbf{E} 的表达式可知, 该平面波向 $+x$ 方向传播且由两组平面波叠加而成, 即

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$$

由均匀平面波的传播特性可知, 磁场强度有两个分量

$$\mathbf{H} = H_y(-\mathbf{e}_y) + H_z \mathbf{e}_z$$

其中 $H_y(-\mathbf{e}_y)$ 和 $E_z \mathbf{e}_z$ 构成一组向 $+x$ 方向传播的平面波, $H_z \mathbf{e}_z$ 和 $E_y \mathbf{e}_y$ 构成另一组向 $+x$ 方向传播的平面波。

根据关系式 $\frac{E^+}{H^+} = Z_0$

自由空间 $Z_0 = 377 \Omega$

所以 $H_y = \frac{E_z}{Z_0} = \frac{100}{377} \sin(\omega t - \beta x) \text{ A/m}$

$H_z = \frac{E_y}{Z_0} = \frac{200}{377} \cos(\omega t - \beta x) \text{ A/m}$

$\mathbf{H} = H_y(-\mathbf{e}_y) + H_z(\mathbf{e}_z)$

$= 0.27 \sin(\omega t - \beta x)(-\mathbf{e}_y) + 0.53 \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z \text{ A/m}$

坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z) \times (H_y(-\mathbf{e}_y) + H_z \mathbf{e}_z)$

$= (E_z H_y + E_y H_z) \mathbf{e}_x$

$= \frac{1}{377} [100^2 \sin^2(\omega t - \beta x) + 200^2 \cos^2(\omega t - \beta x)] \mathbf{e}_x$

$= [26.53 + 79.58 \cos^2(\omega t - \beta x)] \mathbf{e}_x \text{ W/m}^2$

已知均匀平面波的一个场量去求解另一个场量,是求解均匀平面波中经常遇到的问题。根据已知场量的表示式,正确判断出均匀平面波的传播方向和待求场量的方向,是求解这一类问题的关键。

6-2-3 已知自由空间电磁场的电场分量表示式为 $E = 37.7 \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi z) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$ 。这是一种什么性质的场? 试求出其频率、波长、速度、相位常数、传播方向以及磁场分量 \mathbf{H} 的表达式。

解 由电场分量的表示式可知,这是一个在理想介质中向 $(-z)$ 方向传播的均匀平面电磁波。其中

波的角频率 $\omega = 6\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$

相位常数 $\beta = 2\pi \text{ rad/s}$

自由空间波的速度为 $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

根据关系式 $\omega = 2\pi f$

$\lambda = vT = v/f$

所以频率 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6\pi \times 10^8}{2\pi} = 3 \times 10^8 \text{ Hz}$

波长 $\lambda = 3 \times 10^8 / 3 \times 10^8 = 1 \text{ m}$

因为电场分量为 y 方向,传播方向为 $-z$ 方向,所以磁场分量为 x 方向。引入自由空间波阻抗 $Z_0 = 377 \Omega$,所以磁场分量 \mathbf{H} 的表示式为

$\mathbf{H}(z, t) = \frac{E_y}{Z_0} \mathbf{e}_x = \frac{37.7}{377} \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi z) \mathbf{e}_x$

$= 0.1 \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi z) \mathbf{e}_x \text{ A/m}$

本题由均匀平面波的一个场分量求出所有参数,这一类问题的关键在于对

均匀平面波场量的表示式中每一项的含义及相互之间的联系有深刻的理解。

6-2-4 某电台发射 600 kHz 的电磁波,在离电台足够远处可以认为是平面波。设在某一点 a ,某瞬间的电场强度为 $10 \times 10^{-3} \text{ V/m}$,求该点瞬间的磁场强度。若沿电磁波的传播方向前行 100 m,到达另一点 b ,问该点要迟多少时间,才具有此 $10 \times 10^{-3} \text{ V/m}$ 的电场。

解 由于电磁波在自由空间传播,所以波阻抗 $Z_0 = 377 \Omega$,波速 $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

在 a 点的磁场强度

$$H = \frac{E}{Z_0} = \frac{10 \times 10^{-3}}{377} = 0.027 \text{ mA/m}$$

a 处的电磁波传播到 b 点,所需的时间为

$$t = \frac{100}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ s}$$

即 b 点要迟 $\frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ (s)}$ 的时间,才出现 $10 \times 10^{-3} \text{ V/m}$ 的电场。

对理想介质中的入射波,其电场和磁场的瞬时值、最大值及有效值都满足关系式 $Z_0 = \frac{E}{H}$ 。

习题(6-3)

6-3-1 均匀平面电磁波在海水中垂直向下传播,已知 $f = 0.5 \text{ MHz}$,海水的 $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\gamma = 4 \text{ S/m}$,在 $x = 0$ 处, $H = 20.5 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 35^\circ) e_y$ 。求:

- (1) 海水中的波长及相位速度;
- (2) 在 $x = 1 \text{ m}$ 处, E 和 H 的表达式;
- (3) 由表面到 1 m 深处,每 m^3 海水中损耗的平均功率。

解 (1) 由题意可知海水是导电媒质,因为

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon} = \frac{4}{2\pi \times 0.5 \times 10^6 \times 80 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 1800 \gg 1$$

所以海水可视为良导体,参数的计算可以引用良导体的计算公式。

$$\text{相位常数 } \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = \sqrt{\pi \times 0.5 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 2.81 \text{ rad/m}$$

$$\text{衰减常数 } \alpha = \beta = 2.81 \text{ Np/m}$$

$$\text{相位速度 } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 0.5 \times 10^6}{2.81} = 1.12 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\text{波长 } \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2.81} = 2.24 \text{ m}$$

(2) 海水的波阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 0.5 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \angle 45^\circ$$

$$= 0.99 \angle 45^\circ \Omega$$

设海水表面为 $x=0$ 的平面, 如图示, 则电磁波沿 x 方向传播。由于磁场是 y 方向, 所以电场应该是 $-z$ 方向。因此, 正弦稳态时, 海水中任一点的场量的表示式为

$$H(x, t) = H_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \theta) e_y$$

$$E(x, y) = -|Z_0| H_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \theta + 45^\circ) e_z$$

已知 $x=0$ 处有

$$H(0, t) = 20.5 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 35^\circ) e_y \quad \text{A/m}$$

$$\text{所以 } H_m = 20.5 \times 10^{-7} \quad \text{A/m}$$

$$\theta = -35^\circ$$

$x=1$ m 处, 有

$$H(1, t) = 20.5 \times 10^{-7} e^{-2.81} \cos(\omega t - 2.81 - 35^\circ) e_y$$

$$= 1.23 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 196^\circ) e_y \quad (\text{A/m})$$

$$E(1, t) = -0.99 \times 20.5 \times 10^{-7} e^{-2.81} \cos(\omega t - 2.81 - 35^\circ + 45^\circ) e_z$$

$$= -1.22 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 151^\circ) e_z \quad \text{V/m}$$

(3) 良导电媒质中, 坡印亭矢量的平均值为

$$S_{av} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha x} \cos 45^\circ$$

所以由海水表面到 1 m 深处, 每 m^3 海水中损耗的平均功率为

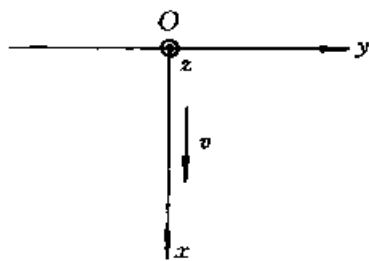
$$P = \oint \mathbf{S}_{av} \cdot d\mathbf{S} = S_{av} \Big|_{x=0} - S_{av} \Big|_{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{|Z_0|} \cos 45^\circ (1 - e^{-2.81})$$

$$= \frac{(1.22 \times 10^{-7})^2}{2 \times 0.99} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0.941 = 0.50 \times 10^{-14} \quad \text{W}$$

以上求解过程说明, 对于计算导电媒质中均匀平面波的问题, 首先应判断媒质是否为良导体。一般当 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \geq 100$ 时, 认为是良导体, 可以应用良导体的计算公式计算各参数。电磁波在导电媒质中传播时的功率损耗为 $\oint \mathbf{S}_{av} d\mathbf{S}$ 。

6-3-2 计算并比较下列材料的波阻抗、衰减常数和透入深度: 铜 ($\gamma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$), 银 ($\gamma = 6.15 \times 10^7 \text{ S/m}$)。已知频率为 (1) $f = 50 \text{ Hz}$, (2) $f = 1 \text{ GHz}$ 。



题 6-3-1 图

解 首先判断材料是否为良导体。以铜为例,在 $f=1\text{ GHz}$ 时有

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{5.80 \times 10^7}{2\pi \times 10^9 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 104.4 \times 10^7 \gg 1$$

所以铜和银都可视为良导体。在 $f=50\text{ Hz}$ 的低频下,铜和银可视为良导体。应用良导体的计算公式计算各参数,有以下结果。

(1) $f=50\text{ Hz}$

$$\begin{aligned}\text{铜: } Z_0 &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 50}{5.80 \times 10^7}} \angle 45^\circ \\ &= 26.1 \times 10^{-7} \angle 45^\circ \quad \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\gamma} = \sqrt{\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7} \\ &= 107 \quad \text{Np/m}\end{aligned}$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = 9.35 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

$$\begin{aligned}\text{银: } Z_0 &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7}}{6.15 \times 10^7}} \angle 45^\circ \\ &= 25.34 \times 10^{-7} \angle 45^\circ \quad \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\gamma} = \sqrt{\pi \times 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 6.15 \times 10^7} \\ &= 110.18 \quad \text{Np/m}\end{aligned}$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = 9.08 \times 10^{-3} \quad \text{m}$$

(2) $f=1\text{ GHz}$

$$\begin{aligned}\text{铜: } Z_0 &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.80 \times 10^7}} \angle 45^\circ \\ &= 11.67 \times 10^{-3} \angle 45^\circ \quad \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\pi f\mu\gamma} = \sqrt{\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.80 \times 10^7} \\ &= 4.79 \times 10^5 (\text{Np/m})\end{aligned}$$

$$d = 2.09 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\text{银: } Z_0 &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}}{6.15 \times 10^7}} \angle 45^\circ \\ &= 11.33 \times 10^{-3} \angle 45^\circ \quad \Omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{\pi f\mu\gamma} = \sqrt{\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 6.15 \times 10^7} \\ &= 4.93 \times 10^5 \quad \text{Np/m}\end{aligned}$$

$$d = \frac{1}{\alpha} = 2.03 \times 10^{-6} \quad \text{m}$$

本题说明在同一频率下,电导率大的材料波阻抗小,但衰减大。同一材料在不同频率下,随着频率的增大,波阻抗增大,衰减增大。所以在高频时,电磁波不能深入到导体内部。

6-3-3 设一均匀平面电磁波在一良导体内传播,其传播速度为光在自由空间波速的0.1%,且波长为0.3 mm,设媒质的磁导率为 μ_0 ,试决定该平面电磁波的频率及良导体的电导率。

解 由题意可得电磁波在良导体内的传播速度为

$$v = 3 \times 10^8 \times 0.1\% = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

因为

$$\lambda = v/f$$

所以

$$f = v/\lambda = \frac{3 \times 10^5}{0.3 \times 10^{-3}} = 10^9 \text{ Hz}$$

在良导体内电磁波的相位常数为

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu_0\gamma}$$

根据关系式

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\sqrt{\pi f\mu_0\gamma}} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0\gamma}}$$

可解出电导率

$$\gamma = \frac{4\pi f}{\mu_0 v^2} = \frac{4\pi \times 10^9}{4\pi \times 10^{-7} \times (3 \times 10^5)^2} = \frac{1}{9} \times 10^6 \text{ S/m}$$

解答过程说明电磁波从理想介质传播到导电媒质中,波速变小,波长变短。

习题(6-4)

6-4-1 试证:一个在理想介质中传播的圆极化波,其瞬时坡印亭矢量是与时间和距离都无关的常数。

证明 设电磁波向 x 方向传播,构成圆形极化波的电场和磁场有 y 方向和 z 方向两个分量,可以表示成

$$\mathbf{E} = E_m [\cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y + \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z]$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_m}{Z_0} [\cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z - \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y]$$

因此坡印亭矢量为

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{E_m^2}{Z_0} [\cos^2(\omega t - \beta x) + \sin^2(\omega t - \beta x)] \mathbf{e}_x$$

$$= \frac{E_m^2}{Z_0} e_x$$

即 $S(x, t)$ 是一个与时间和距离都无关的常数。

注意 构成圆极化波的电场或磁场的两个分量满足: (1) 幅值相同, (2) 在空间相互垂直, (3) 在时间上相差 $\pi/2$ 的相位。

6-4-2 有一垂直穿出纸面 ($x=0$) 的平面电磁波, 由两个直线极化波 $E_z = 3\cos\omega t$ 和 $E_y = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ 组成, 试证明合成波是椭圆极化波。它是右旋波还是左旋波?

证明 因为

$$E_z = 3\cos\omega t, \quad E_y = 2\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -2\sin\omega t$$

所以 $\cos^2\omega t = \frac{E_z^2}{9} \quad \sin^2\omega t = \frac{E_y^2}{4}$

把以上两式相加, 有

$$\frac{E_z^2}{9} + \frac{E_y^2}{4} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

这是一个椭圆方程, 长轴为 3, 短轴为 2, 所以该电磁波是椭圆极化波。

由于 E_y 超前 $E_z 90^\circ$, 随着时间的变化, 合成电场矢量末端旋转方向与波的传播方向构成右手螺旋关系, 所以该波是右旋椭圆极化波。

注意 构成椭圆极化波的电场或磁场的两个分量, 其幅值不相等, 在时间上有相位差。当圆极化波或椭圆极化波的合成电场矢量的末端旋转方向与传播方向构成右手螺旋关系时, 为右旋极化波, 如为左手螺旋关系, 就是左旋极化波。

习题(6-5)

6-5-1 $f=1\text{ MHz}$ 的均匀平面电磁波, 由自由空间分别垂直入射到(1)无限大铜板 ($\gamma=5.8\times 10^7\text{ S/m}$, $\epsilon_r=1$, $\mu_r=1$); (2)无限大铁板 ($\gamma=10^7\text{ S/m}$, $\epsilon_r=1$, $\mu_r=10^4$); (3)海水平面上 ($\gamma=4\text{ S/m}$, $\epsilon_r=80$, $\mu_r=1$)。分别求电场的反射系数、折射系数。

解 均匀平面电磁波垂直入射(正入射)到无限大的介质交界面, 其反射系数和折射系数分别为

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad \mathcal{T} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$$

设自由空间为媒质 1, 波阻抗 $Z_{01}=377\ \Omega$, 其它为媒质 2。显然铜和铁为良导体, 因此有以下结果。

(1)铜板的波阻抗为

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{5.8 \times 10^7}} = 3.69 \times 10^{-4} \angle 45^\circ \Omega$$

$$\text{所以 } \Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{3.69 \times 10^{-4} \angle 45^\circ - 377}{3.69 \times 10^{-4} \angle 45^\circ + 377} \approx -1$$

$$\bar{T} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} = \frac{2 \times 3.69 \times 10^{-4} \angle 45^\circ}{3.69 \times 10^{-4} \angle 45^\circ + 377} \approx 0$$

(2) 铁板的波阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{10^7}} \angle 45^\circ \\ &= 8.89 \times 10^{-4} \angle 45^\circ \Omega \end{aligned}$$

显然 $Z_{02} \ll Z_{01}$

$$\text{所以 } \Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \approx \frac{-Z_{01}}{Z_{01}} = -1$$

$$\bar{T} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \approx 0$$

(3) 海水的参数满足

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{2\pi \times 10^6 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} = 900 \gg 1$$

把海水视为良导体,海水的波阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \angle 45^\circ \\ &= 1.40 \angle 45^\circ \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{1.40 \angle 45^\circ - 377}{1.40 \angle 45^\circ + 377} \approx 0.995 \angle 180^\circ \approx -1$$

$$\bar{T} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times 1.4 \angle 45^\circ}{1.4 \angle 45^\circ + 377} \approx 0.007 \angle 45^\circ \approx 0$$

本题的结果说明,电磁波投射到良导体表面将发生全反射。

6-5-2 一个在空气中传播的均匀平面电磁波,以 $\vec{E}_i(x) = 10e^{-j6x}\vec{e}_y$ 垂直入射到 $x=0$ 处的理想介质表面,介质的 $\epsilon_r=2.5, \mu_r=1$ 。求:

(1) 反射波和折射波的瞬时表示式;

(2) 空气中及介质中的坡印亭矢量的平均值。

解 由题意可知,这是一个均匀平面波正入射到无限大介质交界面的问题。其中媒质 1 为空气,媒质 2 为介质,且有

$$Z_{01} = 377, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\epsilon_0}} = \frac{377}{\sqrt{2.5}} = 238.44 \Omega$$

相位常数 $\beta_1 = 6 \text{ rad/m}$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega \sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_r} = \beta_1 \sqrt{2.5} \\ &= 6 \times \sqrt{2.5} = 9.49 \text{ rad/m}\end{aligned}$$

电磁波的角频率 $\omega = \beta_1 v_1 = 6 \times 3 \times 10^8 = 18 \times 10^8 \text{ rad/s}$

$$\text{反射系数 } \Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}} = \frac{238.44 - 377}{238.44 + 377} = -0.225$$

$$\text{折射系数 } T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times 238.44}{238.44 + 377} = 0.775$$

由于入射波电场为 $E_i(x) = 10e^{-j6x}e_y \text{ V/m}$

所以其瞬时表示式为

$$E_i(x, t) = \sqrt{2} \times 10 \cos(18 \times 10^8 t - 6x)e_y \text{ V/m}$$

反射波的瞬时表示式为

$$\begin{aligned}E^-(x, t) &= \Gamma \sqrt{2} \times 10 \cos(18 \times 10^8 t + 6x)e_y \\ &= -2.25 \sqrt{2} \times \cos(18 \times 10^8 t + 6x)e_y \text{ V/m}\end{aligned}$$

折射波的瞬时表示式为

$$\begin{aligned}E'(x, t) &= T \sqrt{2} \times 10 \cos(18 \times 10^8 t - \beta_2 x) \\ &= 7.75 \sqrt{2} \cos(18 \times 10^8 t - 9.49x)e_y \text{ V/m}\end{aligned}$$

(2)空气中有入射波,又有反射波,所以坡印亭矢量的平均值为

$$S_{av_1} = \frac{E^{+2}}{Z_{01}} - \frac{E^{-2}}{Z_{01}} = \frac{1}{377} [10^2 - 2.25^2] = 0.252 \text{ W/m}^2$$

介质中只有入射波,所以

$$S_{av_2} = \frac{E'^2}{Z_{02}} = \frac{7.75^2}{238.44} = 0.252 \text{ W/m}^2$$

本题的解答说明,入射波携带的功率减去反射波的功率等于折射波携带的功率。

6-5-3 试证明下述两种情况时,在分界面上无反射的条件是布儒斯特角与折射角之和为 $\frac{\pi}{2}$:

(1)垂直极化($\mu_1 \neq \mu_2$);

(2)平行极化($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$)。

证明 在界质分界面上没有波的反射,反射系数 $\Gamma = 0$,电磁波在分界面上发生了全折射,产生全折射的入射角为布儒斯特角,即 $\theta_1 = \theta_B$ 。

(1)垂直极化波(设 $\mu_1 \neq \mu_2, \epsilon_1 = \epsilon_2$)

垂直极化波的反射系数表示式为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_{02} \cos \theta_1 - Z_{01} \cos \theta_2}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2}$$

当

$\Gamma_{\perp} = 0$, 应有 $Z_{02} \cos \theta_1 - Z_{02} \cos \theta_2 = 0$ 。把 $\theta_1 = \theta_B, \epsilon_1 = \epsilon_2$ 代入, 则

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cos \theta_B = \cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$$

应用斯耐而定律

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_B}$$

所以

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \cos \theta_B = \sqrt{1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin^2 \theta_B}$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} (1 - \sin^2 \theta_B) = (1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin^2 \theta_B)$$

求解得 $\sin \theta_B = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_1}}$, 即 $\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}}, \text{ 即 } \tan \theta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \cot \theta_B$$

因此有

$$\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

(2) 平行极化波 (设 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2$)

平行极化波的反射系数表示式为

$$\Gamma_{//} = \frac{Z_{02} \cos \theta_2 - Z_{01} \cos \theta_1}{Z_{01} \cos \theta_1 + Z_{02} \cos \theta_2}$$

当 $\Gamma_{//} = 0$, 应有 $Z_{01} \cos \theta_1 = Z_{02} \cos \theta_2$ 与垂直极化波同样的证明, 得

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad \tan \theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad \tan \theta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \cot \theta_B$$

所以

$$\theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

对于垂直极化波, 当 $\mu_1 = \mu_2, \epsilon_1 \neq \epsilon_2$ 时, 可以证明没有任何入射角能使反射系数等于零。同样对于平行极化波, 当 $\epsilon_1 = \epsilon_2, \mu_1 \neq \mu_2$ 时, 在介质分界面上总有反射。

习题(6-6)

6-6-1 平面电磁波由空气正入射到金属导体的表面上, 若导体为理想导

体,入射波的波长为 10 m,磁场强度为 1 A/m,求入射波的电场强度及形成驻波后的磁场强度的波腹值及其位置。

解 空气的波阻抗 $Z_0 = 377 \ \Omega$

入射波电场强度的有效值

$$E = Z_0 H = 377 \text{ V/m}$$

由于电磁波正入射到理想导体的表面,所以发生全反射,在空气中形成纯驻波,电磁场波腹值为入射波幅值的两倍,有

$$H_{\max} = \sqrt{2} \times 2H^+ = 2\sqrt{2} \text{ A/m}$$

设平面波沿 x 方向传播,媒质的交界面为 $x=0$ 处。空气中磁场的驻波表示式为

$$H = 2\sqrt{2}\cos\beta x \cos\omega t e_z$$

波腹的位置在

$$\cos\beta x = 1$$

$$\beta x = -n\pi, \quad x = \frac{-n\pi}{\beta} = -\frac{n\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

电磁波在理想导体表面发生全反射,在导体表面出现电场的最小值 $E_{\min} = 0$ 和磁场的最大值,电场和磁场的波腹位置或波节位置在空间相差 $1/4$ 波长。

6-6-2 设一平面电磁波,其电场沿 y 轴取向,频率为 1 GHz,振幅为 100 V/m,初相位为零。令该波由媒质 1 正入射媒质 2,媒质 1 与媒质 2 的分界面为 $x=0$ 平面,且它们的参数分别为 ϵ_1, μ_1 和 ϵ_2, μ_2 。求:

(1)每一区域中的波阻抗和传播常数;

(2)两区域中的电场、磁场的瞬时形式。

解 (1)由于两种媒质都是理想介质,所以有

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

$$k_1 = j\beta_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad k_2 = j\beta_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$$

其中 $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9 \text{ rad/s}$

(2)电磁波在两种媒质的交界面发生了反射和折射。

反射系数

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

折射系数

$$T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

媒质 1 中的电场和磁场为入射波和反射波的叠加,有

$$\begin{aligned}
 E_1(x, t) &= [100\cos(\omega t - \beta_1 x) + 100\Gamma\cos(\omega t + \beta_1 x)]e_y \\
 &= [100(1 + \Gamma)\cos(\omega t - \beta_1 x) + 2\Gamma 100\sin\beta_1 x \sin\omega t]e_y \quad \text{V/m} \\
 H_1(x, t) &= \left[\frac{100}{Z_{01}}\cos(\omega t - \beta_1 x) - \frac{100\Gamma}{Z_{01}}\cos(\omega t + \beta_1 x)\right]e_z \\
 &= \frac{100}{Z_{01}}[(1 - \Gamma)\cos(\omega t - \beta_1 x) + 2\Gamma\cos\beta_1 x \cos\omega t]e_z \quad \text{A/m}
 \end{aligned}$$

在媒质 2 中只有入射波,有

$$\begin{aligned}
 E_2(x, t) &= 100T\cos(\omega t - \beta_2 x)e_y \quad \text{V/m} \\
 H_2(x, t) &= \frac{100}{Z_{02}}T\cos(\omega t - \beta_2 x)e_z \quad \text{A/m}
 \end{aligned}$$

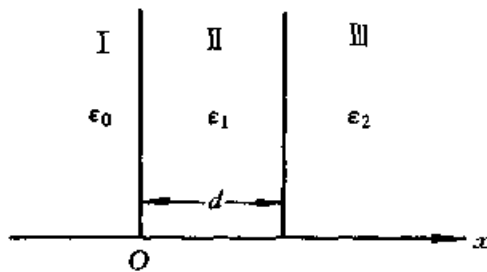
本题的解答过程说明,平面电磁波从理想介质 1 正入射至理想介质 2,发生反射和折射。此时介质 1 中电磁波为行波和驻波的叠加,形成行驻波。电场的最大值 $E_{\max} = (1 + |\Gamma|)E^+$, 最小值为 $(1 - |\Gamma|)E^+$ 。

6-6-3 在 $x > 0$ 区域,媒质的介电常数为 ϵ_2 ,在此媒质的表面放置厚度为 d ,介电常数为 ϵ_1 的介质板。对由左面自由空间正入射过来的均匀平面电磁波,证明当 $\epsilon_{r1} = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ 和 $d = \lambda_0 / (4\sqrt{\epsilon_{r1}})$ 时,不产生反射。 λ_0 是自由空间的波长。

证明 根据题意画出如题 6-6-3 图所示的空间介质分布。设空气和介质板的分界面为 $x=0$ 的平面。

区域 I 中无反射波时,电磁场为

$$\begin{aligned}
 E_0 &= E_0^+ e^{-j\beta_0 x} \\
 H_0 &= \frac{E_0^+}{Z_0} e^{-j\beta_0 x}
 \end{aligned}$$



题 6-6-3 图

区域 II 中的电磁场为

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_1^+ e^{-j\beta_1 x} + E_1^- e^{-j\beta_1 x} \\
 H_1 &= \frac{E_1^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 x} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 x}
 \end{aligned}$$

区域 III 中仅有向 $+x$ 方向前进的波,即

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_2^+ e^{-j\beta_2 x} \\
 H_2 &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 x}
 \end{aligned}$$

在不同介质的分界面,电场和磁场的切线分量是连续的,所以在 $x=0$ 处

$$E_0^+ = E_1^+ + E_1^-$$

$$\frac{\dot{E}_0^+}{Z_0} = \frac{\dot{E}_1^+}{Z_{01}} - \frac{\dot{E}_1^-}{Z_{01}}$$

把以上两式相比,且令 $\Gamma = \frac{\dot{E}_1^-}{\dot{E}_1^+}$, 可得

$$Z_0 = Z_{01} \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

从中解出 Γ

$$\Gamma = \frac{Z_0 - Z_{01}}{Z_0 + Z_{01}}$$

在 $x = d$ 处

$$\begin{aligned} \dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 d} + \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 d} &= \dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} \\ \frac{1}{Z_{01}} (\dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 d} - \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 d}) &= \frac{1}{Z_{02}} \dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} \end{aligned}$$

把上面两式相比,代入 $\Gamma = \frac{\dot{E}_1^-}{\dot{E}_1^+}$, 有

$$Z_{01} \frac{1 + \Gamma e^{j2\beta_1 d}}{1 - \Gamma e^{j2\beta_1 d}} = Z_{02}$$

从中解出

$$\Gamma e^{j2\beta_1 d} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

因此

$$\begin{aligned} e^{j2\beta_1 d} &= \cos(2\beta_1 d) + j\sin(2\beta_1 d) = \frac{1}{\Gamma} \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \\ &= \frac{Z_0 + Z_{01}}{Z_0 - Z_{01}} \times \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \end{aligned}$$

由于 Z_0, Z_{01} 和 Z_{02} 都是实数, 所以

$$\sin(2\beta_1 d) = 0 \quad \text{或} \quad 2\beta_1 d = n\pi$$

$$d = \frac{n\pi}{2\beta_1} = \frac{n\lambda_1}{4}$$

取 $n=1, d = \frac{\lambda_1}{4}$ 。由

$$\lambda_0 = \frac{v_0}{f} \quad \text{或} \quad f = \frac{v_0}{\lambda_0}$$

有

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{f} = \frac{v_1}{v_0} \lambda_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

所以

$$d = \frac{\lambda_0}{4\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

当 $n=1$, 有

$$\cos 2\beta_1 d = \cos \pi = -1 = \frac{Z_0 + Z_{01}}{Z_0 - Z_{01}} \times \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

解得

$$Z_{01}^2 = Z_0 Z_{02}$$

$$\left[\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \right]^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

设介质的 $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$

所以

$$\epsilon_{r1} = \sqrt{\epsilon_{r2}}$$

本题说明, 有三层介质的空间, 区域 I 中无反射波的条件是区域 II 的波阻抗必须等于区域 I 和 III 的波阻抗的几何平均值, 且区域 II 的介质厚度 d 必须是四分之一波长的奇整数倍。可以证明, 当 d 为 $1/2$ 波长的整数倍时, 只有当满足区域 I 和 III 为同一介质时, 才能消除区域 I 中的反射波。本题也可根据入端阻抗的概念证明。

6-6-4 证明: 平面电磁波正入射至两种理想介质的分界面, 若其反射系数与折射系数大小相等, 则其驻波比等于 3。

证明 两种介质分界面的反射和折射系数分别为

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

当

$$|\Gamma| = |T|$$

有

$$3Z_{02} = Z_{01}$$

所以

$$|\Gamma| = \left| \frac{Z_{02} - 3Z_{02}}{Z_{02} + 3Z_{02}} \right| = \frac{1}{2}$$

驻波比

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

思考题

6-1 什么是平面电磁波? 何谓均匀平面电磁波? 何谓 TEM 电磁波? 它们具有哪些异同点?

答 在电磁波的传播过程中, 对应于每一时刻 t , 空间电磁场中电场强度 E 或磁场强度 H 具有相同相位的点构成的等相位面为平面的电磁波称为平面电磁波。如果在平面电磁波的等相位面上, 每一点的电场强度 E 均相同, 磁场强度 H 也均相同, 这样的电磁波称为均匀平面电磁波。当电磁波的电场强度 E 和磁场强度 H 与波的传播方向相垂直, 即对传播方向来说, 场量是横向的, 这样

的电磁波称为横电磁波,即 TEM 波。

平面电磁波不一定是均匀平面电磁波,也不一定是 TEM 波,但均匀平面电磁波是 TEM 波。

6-2 在理想介质中, $\rho=0$ 的条件下, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别满足什么方程? 写出数学表达式,并讨论其通解所表征的性质。

答 在理想介质中,若 $\rho=0$,则电磁场基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

对(1)式取旋度,并利用(2)式得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, 结合(3)式可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

同理,可以证明磁场强度 \mathbf{H} 满足方程

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

即 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 满足波动方程。其通解形式为

$$\mathbf{E} = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

$$\mathbf{H} = g_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + g_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

式中 f_1 和 g_1 表示以速度 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 向 $+r$ 方向前进的入射波, f_2 和 g_2 表示以速度 v 向 $-r$ 方向前进的反射波。 f_1 、 f_2 、 g_1 和 g_2 的具体形式与场源和边界条件有关。可以证明入射波和反射波中电场与磁场间的关系为

$$\frac{f_1}{g_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_0 \quad \frac{f_2}{g_2} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = -Z_0$$

式中 Z_0 为波阻抗。

6-3 说明电磁波的频率 f 、周期 T 、角频率 ω 、波长 λ 、传播常数 k 、衰减常数 α 、相位常数 β 和速度 v 的定义,它们与哪些量有关? 彼此间怎样关联?

答 若电磁波随时间周期变化,即每隔一定的时间 T ,波形完成一个循环重复出现,这个时间 T 称为周期。单位时间内,波形循环变化的次数称为频率

f , 显然频率与周期的关系为

$$f = \frac{1}{T}$$

若电磁波按正弦周期变化, 以入射波电场为例, 其波动方程的复数形式为 (设电磁波向 $+x$ 方向传播, $E = E_y e_y$)

$$\frac{d^2 \hat{E}_y}{dx^2} + k^2 \hat{E}_y = 0$$

方程解的相量形式为

$$\hat{E}_y = E_{y0} e^{-kx} = E_{y0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (1)$$

方程解的瞬时形式为

$$E_y(x, t) = E_{ym} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \theta) \quad (2)$$

(2) 式中相位随时间的变化为

$$\frac{d(\omega t - \beta x + \theta)}{dt} = \omega$$

即 ω 表示了单位时间正弦信号变化的弧度数, 称为角频率, 且有

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}$$

(1) 式中的 k 称为传播常数, 表示式为

$$k = j\omega \sqrt{\mu \left(\epsilon + \frac{\gamma}{j\omega} \right)} = \alpha + j\beta$$

式中 α 为衰减常数, 它决定电磁波衰减的快慢; β 称为相位常数, 它决定电磁波在传播过程中相位改变的快慢。 k 、 α 和 β 与媒质参数及电磁波的频率有关。在导电媒质中有

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]}$$

在理想介质中, 由于 $\gamma=0$, 有

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

在良导体中, 由于 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1$, 近似有

$$k = \alpha + j\beta = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

在低损耗介质中, 由于 $\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \ll 1$, 有

$$k = \alpha + j\beta = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j\omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

均匀平面电磁波的速度 v 又称相速, 为电磁波恒定相位点的传播速度, 因此由相位

$$\omega t - \beta x + \theta = \text{常数}$$

得

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$$

所以 v 也与媒质参数和电磁波的频率有关。

电磁波在一个周期内行进的距离称为波长 λ , 所以

$$\lambda = vT = v/f$$

或

$$\lambda = \frac{\omega}{\beta} / f = \frac{2\pi}{\beta}$$

所以波长 λ 又等于在波传播方向上相位改变 2π 时的两点间的距离。

显然, 以上所述的参数彼此间是关联的, 这些关联式反映了电磁波的时空关系。掌握这些关联式对分析求解均匀平面电磁波问题是重要的。

6-4 比较在理想介质与导电媒质中传播的均匀平面电磁波的异同点, 并解释为何会产生这些差异。

答 沿 $+x$ 方向传播的正弦均匀平面电磁波的一般表达式

$$E_y^+(x, t) = \sqrt{2} E_y^+ e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_e) \quad (1)$$

$$H_z^+(x, t) = \sqrt{2} \frac{E_y^+}{|Z_0|} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \theta_H)$$

当媒质为理想介质时, 有

$$E_y^+(x, t) = \sqrt{2} E_y^+ \cos(\omega t - \beta x + \theta_e) \quad (2)$$

$$H_z^+(x, t) = \sqrt{2} \frac{E_y^+}{Z_0} \cos(\omega t - \beta x + \theta_e)$$

比较(1)式和(2)式可知, 理想介质与导电媒质中的均匀平面电磁波都具有思考题 6-1 的解答中所叙述的均匀平面电磁波的一般特点, 但又存在差异, 表现在:

(1) 理想介质中的均匀平面波为等幅行波, 导电媒质中的均匀平面波为衰减的行波。

(2) 理想介质的波阻抗 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为实数, 故电磁波的电场分量和磁场分量的相位相同, 导电媒质的波阻抗 $Z_0 = |Z_0| \angle \varphi_z$ 为复数, 电磁波的电场分量和磁场分量出现相位差, 即 $\theta_e - \theta_H = \varphi_z$, 当媒质为良导体时, 磁场滞后于电场 45° 。

(3) 理想介质中电磁波的波速和波长分别为

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\mu\epsilon}$$

v 和 λ 都是与频率无关的量。而导电媒质中的 v 与 λ 均与频率有关, 因此在同一媒质中, 不同频率的信号经过同一距离后, 幅值的衰减、相位和波长都是不同的, 这种现象称为色散, 因此导电媒质称为色散媒质。

(4) 对理想介质中的均匀平面电磁波, 其在空间任意点的平均电场能量密度等于平均磁场能量密度, 平均坡印亭矢量为

$$S_{av} = \frac{1}{Z_0} (E_y^+)^2$$

在导电媒质中, 坡印亭矢量的平均值为

$$S_{av} = \frac{1}{|Z_0|} (E_y^+)^2 e^{-2\alpha x} \cos\varphi_z$$

即能量在传播过程中是衰减的。

均匀平面电磁波在理想介质和导电媒质中传播时, 产生上述差异的原因是导电媒质的电导率 $\gamma \neq 0$, 因此导电媒质中只要有电磁波存在, 就必然伴随着出现传导电流, 产生能量的损耗, 这样就带来了不同于理想介质中的电磁波传播特性。

6-5 比较在 $\gamma \ll \omega\epsilon$ 及 $\gamma \gg \omega\epsilon$ 的两种媒质中平面电磁波的传播特性。

答 满足条件 $\gamma \ll \omega\epsilon$ 的媒质称为低损耗介质, 电磁波在其中传播时, 衰减常数和相位常数分别为

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

波阻抗

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

以上各式说明, 低损耗介质的相位常数和波阻抗近似等于理想介质中的相应值, 不同的只是电磁波有衰减。

满足条件 $\gamma \gg \omega\epsilon$ 的媒质称为良导体, 电磁波在其中传播时, 可近似有

$$k \approx \alpha + j\beta = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ$$

相速和波长分别为

$$v \approx \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

分析以上各式可见:

(1) 由于 γ 很大, 衰减常数 α 变得很大, 因此, 电磁波急剧衰减, 以致无法进入良导体深处, 集肤效应非常显著;

(2) 磁场的相位滞后电场 45° ;

(3) 波阻抗的值很小, 故电场能量密度远小于磁场能量密度, 说明良导体中的电磁波以磁场为主;

(4) 相速 v 和波长 λ 都较小。

6-6 什么是波的极化? 如有两互相垂直的线性极化波, 试述二者叠加时会发生下列哪种情况: (1) 另一直线极化波; (2) 圆极化波; (3) 椭圆极化波。

答 波的极化是指给定点的电场强度矢量 E 的端点随时间变化时在空间所画的轨迹。在两个或更多个同频率的波在同一方向传播时, 极化则按所有波叠加后的合成波定义。若电场的端点沿直线振荡, 称之为直线极化波; 若电场的端点沿圆运动, 称为圆极化波; 若电场沿椭圆路径, 则称为椭圆极化波。无一定极化的波, 比如光波, 通常称为随机极化波。

设沿 x 方向传播的两互相垂直的线性极化波由下式给出

$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_1)$$

$$E_z = E_{zm}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_2)$$

(1) 若 E_y 和 E_z 同相位, 即 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, 则在 $x=0$ 的平面上, 合成电场的量值为

$$E = \sqrt{E_{ym}^2 + E_{zm}^2}\cos(\omega t + \varphi)$$

它与 y 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_{zm}}{E_{ym}}\right)$$

E 的方向保持在一斜直线上, 为另一直线极化波。

(2) 若 $E_{ym} = E_{zm} = E_m$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2}$, 则在 $x=0$ 的平面上, 合成电场的大小为

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_m$$

它与 y 轴的夹角为

$$\tan\alpha = \frac{E_z}{E_y} = \pm \tan(\omega t + \varphi_1)$$

合成电场的大小不随时间改变, 但方向以角速度 ω 旋转, E 的端点轨迹为圆, 为圆极化波。

(3)若 E_y 和 E_z 的振幅和相位都不相等,合成电场的矢端在 $x=0$ 的平面上沿椭圆旋转,为椭圆极化波。合成电场的方程为椭圆方程

$$\frac{E_y^2}{E_{ym}^2} + \frac{E_z^2}{E_{zm}^2} - \frac{2E_y E_z}{E_{ym} E_{zm}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

式中 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 。

6-7 何谓反射系数和折射系数? 它们的关系怎样? 在什么情况下反射系数和折射系数是常数? 在介质与理想导体的分界面上,反射系数与折射系数的大小为何?

答 反射系数为反射波电场与入射波电场的比值。折射系数为折射波电场与入射波电场的比值。当平面电磁波正入射到两种媒质的分界面时,反射系数 Γ 和折射系数 T 分别为

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

显然 Γ 和 T 满足关系

$$\Gamma + 1 = T$$

当两种媒质都为理想介质时,其波阻抗 Z_{01} 和 Z_{02} 为实数,则 Γ 和 T 为实常数。

在介质与理想导体的分界面上,由于理想导体的波阻抗为零(设 $Z_{02}=0$),则

$$\Gamma = -1 \quad T = 0$$

即入射波在边界完全反射。

6-8 在何种情况下,垂直极化波的反射系数及折射系数和平行极化波的反射系数及折射系数相同?

答 垂直极化波的反射系数及折射系数的表示式为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{\perp}^{-}}{E_{\perp}^{+}} = \frac{Z_{02} \cos \theta_1 - Z_{01} \cos \theta_2}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2}$$

$$T_{\perp} = \frac{E_{\perp}'}{E_{\perp}^{+}} = \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{02} \cos \theta_1 + Z_{01} \cos \theta_2}$$

式中 θ_1 为入射角, θ_2 为折射角。

平行极化波的反射系数及折射系数的表示式为

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}^{-}}{E_{\parallel}^{+}} = \frac{Z_{02} \cos \theta_2 - Z_{01} \cos \theta_1}{Z_{01} \cos \theta_1 + Z_{02} \cos \theta_2}$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_{\parallel}'}{E_{\parallel}^{+}} = \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{01} \cos \theta_1 + Z_{02} \cos \theta_2}$$

比较以上各式可知,当入射角等于折射角时,即正入射时, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, 有

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{//} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

$$T_{\perp} = T_{//} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

6-9 平面电磁波正入射到两种媒质的分界面时,应满足怎样的条件? 反射系数和折射系数如何?

答 设两种媒质的分界面为坐标原点。平面电磁波正入射到分界面时,电场和磁场必须满足边界条件,即场量的切向分量必须连续,因此有方程

$$\begin{cases} E^+ + E^- = E' \\ \frac{1}{Z_{01}}(E^+ - E^-) = \frac{E'}{Z_{02}} \end{cases}$$

求解上式,可得

$$E^- = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} E^+$$

$$E' = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} E^+$$

根据反射系数及折射系数的定义,有

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

$$T = \frac{E'}{E^+} = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

6-10 何谓驻波? 形成驻波的条件是什么? 它和行波的差异如何?

答 驻波是这样一种波,虽然空间各点的场量随时间作正弦振动,但沿着传播方向没有波的移动。形成驻波的条件是产生波的全反射。当均匀平面电磁波由理想介质正入射到理想导体平面时,发生全反射,有 $E^- = -E^+$ 和 $H^- = H^+$,此时理想介质中形成驻波,其电场强度为(设波沿 $+x$ 方向传播)

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_y^+(x, t) + E_y^-(x, t) \\ &= \sqrt{2}E_y^+ \cos(\omega t - \beta x) + \sqrt{2}E_y^+ \cos(\omega t + \beta x + 180^\circ) \\ &= 2\sqrt{2}E_y^+ \sin \beta x \cos(\omega t - 90^\circ) \end{aligned}$$

同理可得磁场强度为

$$H_z(x, t) = \frac{2\sqrt{2}E_y^+}{Z_{01}} \cos \beta x \cos \omega t$$

从以上驻波的电场和磁场表示式可以看出,驻波与行波的差异为:

(1) 驻波的场随时间脉动, 但不传播。行波则向前传播。

(2) 驻波的场在空间有最大值点—波腹和零点—波节, 而且 E 场的最大值点对应 H 场的零点。反之亦然, 即 E 场和 H 场的时间和空间相位都相差 90° 。理想介质中的行波则为等幅波, E 场和 H 场在时间和空间上都是同相位的。

(3) 驻波的平均功率流密度为零, 即没有电磁波能量的传输, 只有电场能量和磁场能量的互相交换, 这个交换在波节点和相邻波腹点之间的 $\lambda/4$ 空间范围内进行。而行波的平均功率流密度最大。

6-11 试计算由两个同频率、同方向传播的直线极化波合成的平面电磁波的能量流密度的平均值。

答 设两个同频率的直线极化波向 $+x$ 方向传播, 若在理想介质中传播, 其合成的平面电磁波的表示式为

$$\mathbf{E}(x, t) = \sqrt{2}E_y^+ \cos(\omega t - \beta x + \theta_1) \mathbf{e}_y + \sqrt{2}E_z^+ \cos(\omega t - \beta x + \theta_2) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \sqrt{2} \frac{E_y^+}{Z_0} \cos(\omega t - \beta x + \theta_1) \mathbf{e}_z - \sqrt{2} \frac{E_z^+}{Z_0} \cos(\omega t - \beta x + \theta_2) \mathbf{e}_y$$

所以功率流密度的瞬时表示式为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &= \mathbf{E}(x, t) \times \mathbf{H}(x, t) \\ &= \left[\frac{2(E_y^+)^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - \beta x + \theta_1) + \frac{2(E_z^+)^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - \beta x + \theta_2) \right] \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

其平均值为

$$\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(x, t) dt = \left[\frac{(E_y^+)^2}{Z_0} + \frac{(E_z^+)^2}{Z_0} \right] \mathbf{e}_x$$

若平面波在导电媒质中传播, 采用同样解法得

$$\mathbf{S}_{av} = \left[\frac{(E_y^+)^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_z + \frac{(E_z^+)^2}{|Z_0|} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_z \right] \mathbf{e}_x$$

式中 φ_z 为波阻抗角。

6-12 当平面电磁波是圆极化波时, 试证瞬时坡印亭矢量为—常数。

证明 因为圆极化波是由两个振幅相同、相位相差 $\pm \frac{\pi}{2}$ 且互相垂直的直线极化波合成的, 因此理想介质中的圆极化波可以表示为(设传播方向为 $+x$ 方向)

$$\mathbf{E}(x, t) = \sqrt{2}E_0 \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y + \sqrt{2}E_0 \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \sqrt{2} \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_z - \sqrt{2} \frac{E_0}{Z_0} \sin(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y$$

所以瞬时坡印亭矢量为

$$\mathbf{S}(x, t) = \mathbf{E}(x, t) \times \mathbf{H}(x, t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[2 \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - \beta x) + 2 \frac{E_0^2}{Z_0} \sin^2(\omega t - \beta x) \right] \mathbf{e}_x \\
 &= \frac{2E_0^2}{Z_0} \mathbf{e}_x
 \end{aligned}$$

即 $S(x, t)$ 为一常数

6-13 什么是无反射与全反射？在什么情况下会发生这些现象？

答 当反射系数 $|\Gamma| = 1$ 时，电磁波在介质分界面上发生了全反射，此时入射波被全部反射回介质 1 中。如果入射角 $\theta_1 \neq 90^\circ$ ，由菲涅尔公式可知，只有当折射角 $\theta_2 = 90^\circ$ 时，才会产生全反射，使 $\theta_2 = 90^\circ$ 的入射角为临界入射角。设介质的磁导率 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ 。把 $\theta_2 = 90^\circ$ 代入折射定律，得临界入射角

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

显然 ϵ_1 应大于 ϵ_2 ，这表明，电磁波只有由光密介质射向光疏介质，同时满足 $\theta_1 \geq \theta_c$ 时，才会发生全反射现象。

无反射也称全折射，当 $|\Gamma| = 0$ 时，认为电磁波在分界面上发生了全折射。可以证明，当 $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ 时，对于垂直极化波，没有任何入射角能使反射系数等于零，即垂直极化波在两种介质分界面上总有反射。然而对于平行极化波，当 $\Gamma_{//} = 0$ 时，结合斯耐尔定律，可得

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad \text{或} \quad \tan \theta_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

即当入射角满足上式时，入射波全部折射到介质 2 中。满足上式的角为布儒斯特角 θ_B ，即

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

因此当任意极化波以布儒斯特角 θ_B 入射到两种介质的分界面时，反射波只含垂直极化分量，而波的平行极化分量已全折射了。

6-14 入端阻抗 $Z(x)$ 是如何定义的？它在分析多层媒质中的反射和折射问题时都有哪些应用？

答 定义空间任意点 x 处合成波的电场强度与磁场强度的比值为 x 处的入端阻抗，用 $Z(x)$ 表示，即

$$Z(x) = \frac{E(x)}{H(x)} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}$$

在分析多层媒质的反射和折射问题时，可用 $Z(x)$ 等值替代自该处起沿 $+x$ 方向上所有不同媒质的共同特性。也就是说，可用波阻抗 $Z_0 = Z(x)$ 的均匀无限大媒质来代替该处沿 $+x$ 方向向右的所有媒质， Z_0 对 x 处左方电磁波的作用

与原来媒质的影响是相同的。引入入端阻抗 $Z(x)$ 可使分析多层媒质中波的正入射问题简化。

习 题

6-1 在空气中,均匀平面电磁波的电场强度为 $E = 800\cos(\omega t - \beta x)e_y$, 波长为 0.61 m, 求:

- (1) 电磁波的频率;
- (2) 相位常数;
- (3) 磁场强度的振幅和方向。

解 (1) 由题意知电磁波在空气中传播, 所以传播速度和波阻抗分别为

$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad Z_0 = 377 \text{ } \Omega$$

故频率
$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.61} = 4.92 \times 10^8 \text{ Hz}$$

(2) 相位常数

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.61} = 10.3 \text{ rad/s}$$

(3) 因为电场强度 $E = 800\cos(\omega t - \beta x)e_y$, 即电场为 y 方向, 电磁波沿 x 方向传播, 所以磁场为 z 方向, 其振幅为

$$H = \frac{E}{Z_0} = \frac{800}{377} = 2.12 \text{ A/m}$$

6-2 自由空间中传播的电磁波的电场强度 E 的复数形式为

$$\dot{E} = e^{-j20\pi x} e_y \text{ V/m}$$

(1) 求频率 f 及 E, H 的瞬时表达式;

(2) 当 $x = 0.025 \text{ m}$ 时, 场在何时达到最大值和零值?

(3) 若在 $t = t_0, x = x_0$ 处场强达到最大值, 现从这点向前走 100 m, 问在该处要过多少时间, 场强才达到最大值。

解 (1) 由电场强度 $\dot{E} = e^{-j20\pi x} e_y \text{ V/m}$ 可知, 这是一个沿 y 方向极化、向 x 方向传播的均匀平面电磁波, 其相位常数 $\beta = 20\pi \text{ rad/s}$

根据自由空间

$$v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_0 = 120\pi = 377 \text{ } \Omega$$

得

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v\beta}{2\pi} = \frac{20\pi \times 3 \times 10^8}{2\pi} = 3 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$E(x, t) = \sqrt{2}\cos(\omega t - 20\pi x)e_y \text{ V/m}$$

$$H(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{377}\cos(\omega t - 20\pi x)e_z \text{ A/m}$$

其中 $\omega = v\beta = 20\pi \times 10^8 \times 3 = 60\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$

(2) 把 $x = 0.025 \text{ m}$ 代入 $E(x, t)$ 和 $H(x, t)$ 中, 显然当

$$\cos(60\pi \times 10^8 t - 20\pi \times 0.025) = \pm 1$$

时, 场达到最大值。此时有

$$6\pi \times 10^9 t - 0.5\pi = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$t = \frac{n + 0.5}{6} \times 10^{-9} \text{ s}$$

当

$$\cos(60\pi \times 10^8 t - 20\pi \times 0.025) = 0$$

时, 场达到零值, 此时有

$$6\pi \times 10^9 t - 0.5\pi = \frac{2n + 1}{2}\pi$$

$$t = \frac{n + 1}{6} \times 10^{-9} \text{ s}$$

(3) $x = x_0$ 处的电磁波向前传播 100 m , 所花费的时间为

$$t = \frac{100}{v} = \frac{100}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ s}$$

即 $t = t_0$ 时, $x = x_0$ 处的场强达到最大值, 则在 $t = t_0 + \frac{1}{3} \times 10^{-6} \text{ s}$, $x = x_0 + 100 \text{ m}$ 处场强也达到最大值。

6-3 一信号发生器在自由空间产生一均匀平面电磁波, 波长为 12 cm , 通过理想介质后, 波长减小为 8 cm , 在介质中电场振幅为 50 V/m , 磁场振幅为 0.1 A/m , 求发生器的频率、介质的 ϵ_r 及 μ_r 。

解 自由空间电磁波的波长 $\lambda = \frac{c}{f}$

所以电磁波的频率

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^{-2}} = 25 \times 10^8 \text{ Hz}$$

在理想介质中电磁波的波速为

$$v = \lambda f = 8 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^8 = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

根据

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{E}{H} = \frac{50}{0.1} = 500 \quad \Omega$$

联立求解以上两式得

$$\epsilon_r = 1.13 \quad \mu_r = 1.99$$

6-4 据估计, 晴天时太阳辐射到地球的功率为 1.34 kW/m^2 (对入射波而言), 假设阳光为一单色平面电磁波, 计算入射波中的电场强度 E_{max} 和磁感应强

度 B_{\max} 。

解 辐射到地球的太阳光可以看成是均匀平面电磁波,其坡印亭矢量的平均值为

$$S_{av} = \frac{E^2}{Z_0} = \frac{E^2}{377} = 1.34 \times 10^3 \text{ W/m}^2$$

所以

$$E = \sqrt{377 \times 1.34 \times 10^3} = 710.76 \text{ V/m}$$

$$E_{\max} = \sqrt{2}E = \sqrt{2} \times 710.76 = 1005.17 \text{ V/m}$$

$$\begin{aligned} B_{\max} &= \mu_0 H_{\max} = \mu_0 \frac{E_{\max}}{Z_0} \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \frac{1005.17}{377} = 33.50 \times 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$

6-5 一频率为 3 GHz,沿 y 方向极化的均匀平面电磁波,在 $\epsilon_r = 2.5$, $\gamma = 1.67 \times 10^{-3} \text{ S/m}$ 的非磁性媒质中,沿 $+x$ 方向传播,求:

(1) 波的振幅衰减至原来的一半时,传播了多少距离;

(2) 媒质的波阻抗、波长和相速;

(3) 设在 $x=0$ 处, $E = 50\sin(6\pi \times 10^9 t + \frac{\pi}{3})e_y$, 写出 H 在任何时刻 t 和 x 值时的瞬时表达式。

解 这是均匀平面电磁波在导电媒质中传播的问题。因此电磁波的瞬时表示式为

$$E = E_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) e_y$$

$$H = H_m e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \varphi_z) e_z$$

根据

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{1.67 \times 10^{-3}}{2\pi \times 10^9 \times 3 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 2.5} = 4.01 \times 10^{-3} \ll 1$$

知这种非磁性媒质是低损耗媒质,可以取近似计算式,所以衰减常数和相位常数分别为

$$\alpha \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1.67 \times 10^{-3}}{2} \frac{377}{\sqrt{2.5}} = 0.2 \text{ Np/m}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi \times 3 \times 10^9 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \\ &= \frac{6\pi \times 10^9}{3 \times 10^8} \sqrt{2.5} = 99.35 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

(1) 因为波的振幅为 $E_m e^{-\alpha x}$, 衰减到该值的一半时有

$$\frac{E_m e^{-\alpha(x+\Delta x)}}{E_m e^{-\alpha x}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\alpha(\Delta x)} = \frac{1}{2}$$

所以传播的距离为

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha} \ln 2 = \frac{1}{0.2} \ln 2 = 3.47 \text{ m}$$

$$(2) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{377}{\sqrt{2.5}} = 238.44 \quad \Omega$$

波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{99.35} = 0.063 \text{ m}$

波速 $v \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{2.5}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.5}} = 1.9 \times 10^8 \text{ m/s}$

(3) 由 $x=0$ 处 $E = 50 \sin(6\pi \times 10^9 t + \frac{\pi}{3}) e_y$, 可得任何时刻 t 和任一位置 x 处的电场为

$$E(x, t) = 50 e^{-\alpha x} \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta x + \frac{\pi}{3}) e_y$$

$$= 50 e^{-0.2x} \sin(6\pi \times 10^9 t - 99.35x + \frac{\pi}{3}) e_y \quad \text{V/m}$$

所以磁场为

$$H(x, t) = \frac{E(x, t)}{Z_0} e_z = \frac{50 e^{-0.2x}}{238.44} \sin(6\pi \times 10^9 t - 99.35x + \frac{\pi}{3}) e_z$$

$$= 0.21 e^{-0.2x} \sin(6\pi \times 10^9 t - 99.35x + \frac{\pi}{3}) e_z \quad \text{A/m}$$

当电磁波在低损耗媒质中传播时, 其相位常数 β 和波阻抗 Z_0 近似等于理想介质中的相应值, 不同的只是电磁波有衰减, 但衰减常数 α 是一实常数。

6-6 有一非磁性的良导体, 电磁波在其内的传播速度是自由空间光速的 0.1%, 波长为 0.3 mm, 求材料的电导率及波的频率。

解 由题意知电磁波在该种材料中的传播速度为

$$v = c \times 0.1\% = 3 \times 10^8 \times 0.1\% = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

因为

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

所以频率 $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3 \times 10^5}{0.3 \times 10^{-3}} = 10^9 \text{ Hz}$

由于该种材料为非磁性的良导体, 故应用良导体的公式有

$$v = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma}} = 3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

从中解得电导率

$$\gamma = \frac{2\omega}{\mu_0 v^2} = \frac{2 \times 2\pi \times 10^9}{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{10}} = \frac{1}{9} \times 10^6 \text{ S/m}$$

6-7 在导电媒质(物理参数为 μ_0, ϵ_0 和 γ)中有一向 $+x$ 方向传播的均匀平面电磁波。

(1)试决定单位体积中热功率损耗的瞬时值和平均值;

(2)决定横截面为单位面积,长度为 $0 \rightarrow \infty$ 的体积中耗散的平均功率;

(3)决定坡印亭矢量的平均值,并计算横截面为单位面积,长度为 $0 \rightarrow \infty$ 的体积中耗散的平均功率;

(4)试将(2)和(3)的结果相比较,以良导体为例说明两者是否相等。

解 设电磁波的场量为

$$\mathbf{E}(x, t) = \sqrt{2} E e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \sqrt{2} H e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \varphi_z) \mathbf{A/m}$$

导电媒质的波阻抗

$$Z_0 = |z| \angle \varphi_z$$

而

$$H = \frac{E}{|z|}$$

(1)导电媒质单位体积中热功率损耗的瞬时值为

$$p(x, t) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \gamma |\mathbf{E}|^2 = 2\gamma E^2 e^{-2\alpha x} \cos^2(\omega t - \beta x)$$

其平均值

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(x, t) dt = 2\gamma E^2 e^{-2\alpha x} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \beta x) d(\omega t) \\ &= 2\gamma E^2 e^{-2\alpha x} / 2 = \gamma E^2 e^{-2\alpha x} \text{ W/m}^3 \end{aligned}$$

(2) $x=0$ 至 $x \rightarrow \infty$ 之间单位横截面积的柱体中耗散的平均功率为

$$W = \int_0^\infty P dx = \gamma E^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha x} dx = \frac{\gamma E^2}{2\alpha} \text{ W}$$

(3)坡印亭矢量的平均值为

$$S_{av} = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{E^2}{|z|} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_z$$

在上述柱体中, S_{av} 的净通量为

$$-\oint S_{av} dS = -\oint \frac{E^2}{|z|} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_z dS$$

式中的 S 为柱体的外表面积。由于坡印亭矢量为 x 方向,上式的积分只在 $x=0$ 和 $x=\infty$ 的面进行,所以

$$-\oint S_{av} dS = \frac{-E^2}{|z|} e^{-2\alpha x} \cos \varphi_z \Big|_x=0^{x=\infty} = \frac{E^2}{|z|} \cos \varphi_z$$

(4) 当媒质为良导体时有

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \angle 45^\circ, \text{ 可得 } |z| = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}, \varphi_z = 45^\circ$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

所以(2)中的耗散功率为

$$W = \frac{\gamma}{2\alpha} E^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} E_0^2$$

(3) 中的耗散功率

$$-\oint S_{av} dS = \frac{E^2}{|z|} \cos \varphi_z = \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu}} E^2 \cos 45^\circ = \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega\mu}} E^2$$

即满足

$$W = -\oint S_{av} dS$$

本题的解答实际上给出了均匀平面电磁波在导电媒质中传播时耗散功率的两种求解方法。

6-8 已知一平面电磁波在空间某点的电场表达式为 $E = (E_y e_y + E_z e_z)$ V/m, 其中

$$E_y = (a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t) \quad \text{V/m}$$

$$E_z = (3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t) \quad \text{V/m}$$

若此波为圆极化波, 求 a_1, a_2 为何值。

解 电磁波为圆极化波时, 其合成电场的幅值为一常数, 即

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_m$$

本题中, 因为

$$E_y^2 = a_1^2 \sin^2 \omega t + a_2^2 \cos^2 \omega t + 2a_1 a_2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$$E_z^2 = 3^2 \sin^2 \omega t + 4^2 \cos^2 \omega t + 24 \sin \omega t \cos \omega t$$

显然当

$$a_1 = 4, \quad a_2 = -3$$

或

$$a_1 = -4, \quad a_2 = 3 \quad \text{时,}$$

有

$$E = E_m = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = 5$$

6-9 均匀平面电磁波的电场为 $E = 100e^{j0}$ V/m, 从空气垂直入射到理想介质平面上(介质的 $\mu_1 = \mu_0, \epsilon_2 = 4\epsilon_0, \gamma = 0$)。求反射波和折射波的电场有效值。

解 这是均匀平面波正入射到两种理想介质分界面的问题。两种介质的波阻抗分别为

$$Z_{01} = 377 \, \Omega, \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\epsilon_0}} = \frac{377}{2} \, \Omega$$

因而反射系数

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{3}$$

折射系数

$$T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$$

根据

$$\Gamma = \frac{E^-}{E^+}, \quad T = \frac{E'}{E^+}$$

而

$$E^+ = 100 \, \text{V/m}$$

可得反射波电场有效值 $E^- = |\Gamma|E^+ = \frac{1}{3} \times 100 = \frac{100}{3} \, \text{V/m}$

折射波电场有效值 $E' = |T|E^+ = \frac{2}{3} \times 100 = \frac{200}{3} \, \text{V/m}$

6-10 均匀平面电磁波在自由空间的 $\lambda = 3 \, \text{cm}$, 正入射到玻璃纤维罩上, 罩的 $\epsilon_r = 4.9$, $\gamma = 0$, 求:

(1) 不发生波反射时罩的厚度;

(2) 若入射波的频率降低 10%, 透射功率为入射功率的百分之几?

解 由题意可知, 空间有三种理想介质, 即空气、玻璃纤维、空气。因而这是三层媒质中波的正入射问题。该电磁波的频率为

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{-2}} = 10^{10} \, \text{Hz}$$

在玻璃纤维中电磁波的波速为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{4.9}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{4.9}} = 1.36 \times 10^8 \, \text{m/s}$$

波长为

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1.36 \times 10^8}{10^{10}} = 1.36 \, \text{cm}$$

(1) 由习题 6-6-3 的结论可知, 当玻璃纤维罩的厚度为半波长的厚度时, 可以消除空气中的反射波(因为媒质 I 和 III 都为空气), 即

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{1.36}{2} = 0.68 \, \text{cm}$$

(2) 设空间介质分布及坐标如题 6-10 图所示, 各区域的波阻抗分别为

$$Z_{01} = Z_{03} = 377 \, \Omega$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{4.9}} \, \Omega$$

若玻璃纤维厚度为(1)中的计算值,则当频率改变为

$$f = 10^{10} \times 90\% = 9 \times 10^9 \text{ Hz}$$

时,区域 I 中有入射波,也有反射波。

设各区域的电磁场分别为

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 x} + \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 x}$$

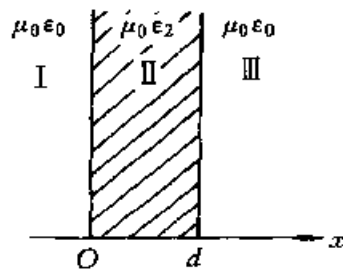
$$\dot{H}_1 = \frac{1}{Z_{01}} (\dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 x} - \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 x})$$

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 x} + \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 x}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{1}{Z_{02}} (\dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 x} - \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 x})$$

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 x}$$

$$\dot{H}_3 = \frac{\dot{H}_3^+}{Z_{03}} e^{-j\beta_3 x}$$



题 6-10 图

其中 $\beta_1 = \beta_3, \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{2\pi \times 10^9 \times 9 \times \sqrt{4.9}}{3 \times 10^8}$
 $= 417.25 \text{ rad/m}$

在介质分界面电场和磁场的切向分量连续,所以

在 $x = d$ 处 $\dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} + \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 d} = \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 d}$

$$\frac{1}{Z_{02}} (\dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} - \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 d}) = \frac{1}{Z_{03}} \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 d}$$

上面两式相比,且令 $\Gamma = \frac{\dot{E}_2^-}{\dot{E}_2^+}$, 可得

$$Z_{02} \frac{1 + \Gamma e^{j2\beta_2 d}}{1 - \Gamma e^{j2\beta_2 d}} = Z_{03}$$

因此 $\Gamma = \frac{Z_{03} - Z_{02}}{Z_{03} + Z_{02}} e^{-j2\beta_2 d}$

$$= \frac{377 - \frac{377}{\sqrt{4.9}}}{377 + \frac{377}{\sqrt{4.9}}} e^{-j2 \times 417.25 \times 0.68 \times 10^{-2}}$$

$$= 0.38 e^{-j5.67} = 0.38 \angle 35.13^\circ$$

在 $x = 0$ 处

$$\dot{E}_1^+ + \dot{E}_1^- = \dot{E}_2^+ + \dot{E}_2^-$$

$$\frac{1}{Z_{01}} (\dot{E}_1^+ - \dot{E}_1^-) = \frac{1}{Z_{02}} (\dot{E}_2^+ - \dot{E}_2^-)$$

把以上两式相比,且代入 $\Gamma = \frac{\dot{E}_2^-}{\dot{E}_2^+}$, 有

$$Z_{01} \frac{\dot{E}_1^+ + \dot{E}_1^-}{\dot{E}_1^+ - \dot{E}_1^-} = Z_{02} \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

因此

$$\begin{aligned}\dot{E}_1^- &= \frac{\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}}{\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \dot{E}_1^+ = \frac{1 - \sqrt{4.9} + \Gamma(1 + \sqrt{4.9})}{1 + \sqrt{4.9} + \Gamma(1 - \sqrt{4.9})} \dot{E}_1^+ \\&= \frac{-1.21 + 3.21 \times 0.38 \angle 35.13^\circ}{3.21 - 1.21 \times 0.38 \angle 35.13^\circ} \dot{E}_1^+ \\&= \frac{-0.21 + 0.70j}{2.83 - 0.26j} \dot{E}_1^+ = 0.26 \angle 111.95^\circ \dot{E}_1^+\end{aligned}$$

所以 $\frac{|\dot{E}_1^-|}{|\dot{E}_1^+|} = 0.26$

介质 1 中的入射功率和反射功率分别为

$$S_{av1}^+ = \frac{|\dot{E}_1^+|^2}{Z_{01}} \quad S_{av1}^- = \frac{|\dot{E}_1^-|^2}{Z_{01}}$$

透射到玻璃纤维罩中的功率为

$$S_{av2} = S_{av1}^+ - S_{av1}^- = \frac{1}{Z_{01}} [|\dot{E}_1^+|^2 - |\dot{E}_1^-|^2]$$

而

$$\begin{aligned}\frac{S_{av2}}{S_{av1}^+} &= \frac{|\dot{E}_1^+|^2 - |\dot{E}_1^-|^2}{|\dot{E}_1^+|^2} = 1 - \frac{|\dot{E}_1^-|^2}{|\dot{E}_1^+|^2} \\&= 1 - 0.26^2 = 0.93\end{aligned}$$

即透射功率为入射功率的 93%。

6-11 平行极化的平面电磁波由 $\epsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$ 和 $\gamma = 0$ 的介质入射到空气中,问:

- (1) 波能否全部折入空气中? 若能,其条件是什么?
- (2) 波能否全反射回介质中? 若能,其条件又是什么?
- (3) 当波从空气中斜入射到介质时,重答(1)、(2)。

解 (1) 平行或垂直极化的平面电磁波,当反射系数 $|\Gamma_{//}| = 0$ 或 $|\Gamma_{\perp}| = 0$ 时,电磁波在介质分界面上发生全折射,产生全折射的入射角 θ_B ,称为布儒斯特角。对于平行极化波,当 $\mu_1 = \mu_2$ 时,有

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

代入数据得

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{1}{2.56}} = 32.01^\circ$$

即当入射角 $\theta_1 \geq 32.01^\circ$ 时, 该平行极化电磁波能全部折入空气中。

(2) 当反射系数 $|\Gamma_{//}| = 1$ 或 $|\Gamma_{\perp}| = 1$ 时, 电磁波在介质分界面上发生全反射, 此时折射角 $\theta_2 = 90^\circ$, 使 $\theta_2 = 90^\circ$ 时的临界入射角为

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

显然 ϵ_1 应大于 ϵ_2 , 表明电磁波只有从光密介质射入光疏介质, 同时满足 $\theta_1 \geq \theta_c$ 时, 才会发生全反射。

本题中 $\epsilon_1 = 2.56\epsilon_0 > \epsilon_0$, 所以当入射角

$$\theta_1 \geq \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2.56\epsilon_0}} = 38.68^\circ$$

时, 波将全部反射回介质中。

(3) 当波从空气中斜入射到介质中时, 由于此时

$$\epsilon_1 = \epsilon_0, \quad \epsilon_2 = 2.56\epsilon_0$$

且

$$\epsilon_1 < \epsilon_2$$

所以 θ_c 不存在, 不能发生全反射。而

$$\theta_B = \arctan \sqrt{\frac{2.56\epsilon_0}{\epsilon_0}} = 58^\circ$$

即当 $\theta_1 \geq 58^\circ$ 时, 波将全部折入介质中。

6-12 垂直极化的平面电磁波由 $\epsilon_r = 2.56$, $\mu_r = 1$ 和 $\gamma = 0$ 的介质斜入射到空气中, 问:

(1) 波能否发生全反射现象? 为什么?

(2) 波能否发生全折射现象? 为什么?

(3) 当波从空气中斜入射到介质中时, 重答(1)及(2)问。

解 (1) 因为 $\epsilon_1 = 2.56\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$, 且 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 所以当入射角

$$\theta_1 \geq \theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2.56}} = 38.68^\circ$$

时, 波发生全反射现象。

(2) 当 $\mu_1 = \mu_2$ 时, 没有任何入射角能使垂直极化波的反射系数等于零, 所以波不能发生全折射现象。

(3) 当波从空气中斜入射到介质中时, 由于 $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2.56\epsilon_0$, 且 $\epsilon_1 < \epsilon_2$, 所以波不能发生全反射。由(2)可知波也不能发生全折射现象。

6-13 从水底下光源射出来的垂直极化电磁波, 以 $\theta_1 = 20^\circ$ 的入射角入射到水、空气的界面, 水的 $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ 。求:

(1) 临界角 θ_c ;

(2) 反射系数 Γ_{\perp} ;

(3) 折射系数 T_{\perp} 。

解 (1) 因为 $\epsilon_1 = 81\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$, 所以临界角

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{1}{81}} = 6.38^\circ$$

(2) 由于入射角 $\theta_1 = 20^\circ > \theta_c$, 可知波发生了全反射现象, 所以反射系数

$$\Gamma_{\perp} = 1$$

(3) 折射系数

$$T_{\perp} = \frac{2Z_{02}\cos\theta_1}{Z_{02}\cos\theta_1 + Z_{01}\cos\theta_2}$$

全反射时, 折射角 $\theta_2 = 90^\circ$, 代入上式有

$$T_{\perp} = 2$$

此时形成了分界面上的表面波。

6-14 设在空间有一沿 x 轴取向, 频率为 100 MHz, 振幅为 100 V/m, 初相为零的均匀平面电磁波, 正入射于一个无损耗的介质面, 如题 6-14 图所示。

(1) 求每一区域中的波阻抗及传播常数;

(2) 求反射波和折射波的振幅;

(3) 分别求两区域中电场强度和磁场强度的复数形式和瞬时形式;

(4) 证明场量在分界面上满足边界条件;

(5) 写出坡印亭矢量的复数形式和瞬时形式。

解 (1) 两个区域的波阻抗分别为

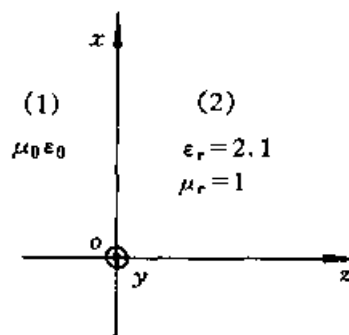
$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \quad \Omega$$

$$\begin{aligned} Z_{02} &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} \\ &= \frac{377}{\sqrt{2.1}} = 260.15 \quad \Omega \end{aligned}$$

相位常数分别为

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 100 \times 10^6}{3 \times 10^8} = 2.09 \quad \text{rad/m}$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{\epsilon_r} \beta_1$$



题 6-14 图

$$= \sqrt{2.1} \times 2.09 = 3.04 \text{ rad/m}$$

由于是理想介质,所以传播常数为

$$k_1 = j\beta_1 = j2.09$$

$$k_2 = j\beta_2 = j3.04$$

(2)这是一个电磁波的正入射问题,所以在介质分界面处,有

$$\text{反射系数} \quad \Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{260.15 - 377}{260.15 + 377} = -0.18$$

$$\text{折射系数} \quad T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times 260.15}{260.15 + 377} = 0.82$$

$$\text{根据} \quad \Gamma = \frac{E_{1m}^-}{E_{1m}^+} \quad T = \frac{E_{2m}^+}{E_{1m}^+}$$

$$\text{得反射波振幅} \quad |E_{1m}^-| = |\Gamma E_{1m}^+| = 100 \times 0.18 = 18 \text{ V/m}$$

$$\text{折射波振幅} \quad |E_{2m}^+| = |T E_{1m}^+| = 100 \times 0.82 = 82 \text{ V/m}$$

(3)介质 1 中电场和磁场的复数形式为

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(z) &= (\dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 z} + \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 z}) e_x \\ &= \left(\frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j2.09z} - \frac{18}{\sqrt{2}} e^{j2.09z} \right) e_x \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(z) &= \frac{1}{Z_{01}} (\dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 z} + \dot{E}_1^- e^{j\beta_1 z}) (-e_y) \\ &= (0.19 e^{-j2.09z} + 0.03 e^{j2.09z}) (-e_y) \text{ A/m} \end{aligned}$$

介质 2 中电场和磁场的复数形式为

$$\dot{E}_2(z) = \dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 z} e_x = \frac{82}{\sqrt{2}} e^{-j3.04z} e_x \text{ V/m}$$

$$\dot{H}_2(z) = \frac{\dot{E}_2^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 z} (-e_y) = 0.22 e^{-j3.04z} (-e_y) \text{ A/m}$$

介质 1 中电场和磁场的瞬时形式为

$$E_1(z, t) = [100 \cos(2\pi \times 10^8 t - 2.09z) - 18 \cos(2\pi \times 10^8 t + 2.09z)] e_x \text{ V/m}$$

$$\begin{aligned} H_1(z, t) &= [0.19 \sqrt{2} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2.09z) - \\ &\quad 0.03 \sqrt{2} \cos(2\pi \times 10^8 t + 2.09z)] (-e_y) \text{ A/m} \end{aligned}$$

介质 2 中电场和磁场的瞬时表示式为

$$E_2(z, t) = 82 \cos(2\pi \times 10^8 t - 3.04z) e_x \text{ V/m}$$

$$H_2(z, t) = 0.22 \sqrt{2} \cos(2\pi \times 10^8 t - 3.04z) (-e_y) \text{ A/m}$$

(4)在 $z=0$ 的介质分界面上

$$\dot{E}_1(0) = \frac{100}{\sqrt{2}} - \frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{82}{\sqrt{2}} \text{ V/m}$$

$$\dot{E}_2(0) = \frac{82}{\sqrt{2}} \text{ V/m}$$

$$\dot{H}_1(0) = 0.19 + 0.03 = 0.22 \text{ A/m}$$

$$\dot{H}_1(0) = 0.22 \text{ A/m}$$

所以

$$\dot{E}_2(0) = \dot{E}_2(0)$$

$$\dot{H}_1(0) = \dot{H}_2(0)$$

即满足边界条件

(5) 介质 1 中坡印亭矢量的复数形式为

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= (\dot{E}_1 \times \dot{H}_1^*) e_z = (E_1^+ e^{-j\beta_1 z} + E_1^- e^{j\beta_1 z}) \times \frac{1}{Z_{01}} (E_1^+ e^{-j\beta_1 z} - E_1^- e^{j\beta_1 z}) e_z \\ &= \left[\frac{1}{Z_{01}} (E_1^{+2} - E_1^{-2}) + j^2 \frac{E_1^+ E_1^-}{Z_{01}} \sin 2\beta_1 z \right] e_z \\ &= [12.83 + j4.77 \sin 4.18z] e_z \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

瞬时形式为

$$\begin{aligned} S_1(z, t) &= E_1(z, t) \times H_1(z, t) e_z \\ &= [19\sqrt{2} \cos^2(2\pi \times 10^8 t - 2.09z) - 0.54\sqrt{2} \cos^2(2\pi \times 10^8 t + 2.09z) \\ &\quad - 0.42\sqrt{2} \cos(2\pi \times 10^8 t - 2.09z) \cos(2\pi \times 10^8 t + 2.09z)] e_z \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

介质 2 中坡印亭矢量的复数形式为

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= (\dot{E}_2 \times \dot{H}_2^*) e_y = E_2^+ e^{-j\beta_2 z} \frac{E_2^+}{Z_{02}} e^{j\beta_2 z} e_x \\ &= \frac{E_2^{+2}}{Z_{02}} e_z = 12.92 e_z \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

瞬时形式为

$$\begin{aligned} S_2(z, t) &= E_2(z, t) \times H_2(z, t) e_z \\ &= \frac{2E_2^{+2}}{Z_{02}} \cos^2(2\pi \times 10^8 t - 3.04z) e_z \\ &= 18.04\sqrt{2} \cos^2(2\pi \times 10^8 t - 3.04z) e_z \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

理论上应有 $\text{Re}(\dot{S}_1) = \text{Re}(\dot{S}_2)$, 本题计算结果相差了 0.09, 这是由计算误差造成的。

6-15 已知 $H_1 = 2\cos(\omega t - \beta_1 x) e_z$ A/m, 在 $\epsilon_{r1} = 4, \mu_{r1} = 1$ 和 $\gamma_1 = 0$ 的媒质中传播, $x = 0$ 处为该媒质和另一媒质的分界面, 后者的 $\epsilon_{r2} = 2, \mu_{r2} = 5$ 和 $\gamma_2 = 0$, 设频率 $f = 5 \times 10^9$ Hz。求

(1) 媒质 1 中的 E_{\max} 和 E_{\min} ;

(2) 媒质 1 中的驻波比;

(3) 输入媒质 2 中的平均功率密度。

解 (1) 这是均匀平面电磁波对两种理想介质分界面的正入射问题。两种介质的波阻抗分别为

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = \frac{Z_0}{2}$$

$$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r2}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} Z_0 = \sqrt{2.5} Z_0$$

因此分界面上的反射系数

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{\sqrt{2.5} - 0.5}{\sqrt{2.5} + 0.5} = 0.52$$

所以

$$E_{\max} = (1 + |\Gamma|) E_{1m}^+ = (1 + |\Gamma|) Z_{01} H_{1m}^+$$

$$= (1 + 0.52) \times \frac{377}{2} \times 2 = 573.04 \text{ V/m}$$

$$E_{\min} = (1 - |\Gamma|) E_{1m}^+ = (1 - |\Gamma|) Z_{01} H_{1m}^+$$

$$= (1 - 0.52) \times \frac{377}{2} \times 2 = 180.96 \text{ V/m}$$

(2) 驻波比
$$S = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{573.04}{180.96} = 3.17$$

(3) 由 $H_1 = 2 \cos(\omega t - \beta_1 x) e_z \text{ A/m}$, 可知

$$H_1^+ = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ A/m} \quad E_1^+ = Z_{01} H_1^+ = \frac{377}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{377}{\sqrt{2}} \text{ V/m}$$

所以输入媒质 2 中的平均功率密度为

$$S_{av2} = \frac{1}{Z_{01}} [E_1^{+2} - E_1^{-2}] = \frac{1}{Z_{01}} E_1^{+2} (1 - |\Gamma|^2)$$

$$= \frac{2}{377} \times \frac{377^2}{2} (1 - 0.52^2) = 275.06 \text{ W/m}^2$$

6-16 一段长 300 m, 半径 $a = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ 的圆柱形导体, 其电导率 $\gamma = 5.1 \times 10^6 \text{ S/m}$, 磁导率 $\mu = 100\mu_0$, 流过交变电流 $i(t) = 1.5 \cos 3 \times 10^4 t$ 。试求:

- (1) 透入深度 d ;
- (2) 交流电阻 R_s ;
- (3) 直流电阻 R_d ;
- (4) 该段导体的功率损耗。

解 (1) 根据判断式

$$\frac{\gamma}{\omega \epsilon} = \frac{5.1 \times 10^6}{3 \times 10^4 \times 8.85 \times 10^{-12}} \gg 1$$

知导体是良导体,所以透入深度

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{3 \times 10^4 \times 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.1 \times 10^6}}$$

$$= 0.32 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 认为 $d \ll a$, 则交流电阻

$$R_s = \frac{l}{2\pi a \gamma d} = \frac{300}{2\pi \times 2.5 \times 10^{-3} \times 5.1 \times 10^6 \times 0.32 \times 10^{-3}}$$

$$= 11.7 \ \Omega$$

(3) 直流电阻 $R_d = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} = \frac{300}{\pi \times 2.5^2 \times 10^{-6} \times 5.1 \times 10^6} = 3 \ \Omega$

(4) 该段导体的功率损耗

$$P = R_s I^2 = 11.7 \times \frac{1.5^2}{2} = 13.16 \text{ W}$$

6-17 设有三种不同的均匀无损耗媒质平行放置, 媒质参数分别为 ϵ_1 、 μ_1 ; ϵ_2 、 μ_2 ; ϵ_3 、 μ_3 。媒质 2 的厚度为 d 。

(1) 若波在媒质 1 中的电场振幅为 E_{10} , 垂直入射后, 求媒质 1 中的反射波和媒质 3 中的折射波, 并写出媒质 1 中的反射系数和媒质 3 中的折射系数;

(2) 如何选择媒质 2 的参量 ϵ_2 和 μ_2 及其厚度 d , 才可实现由媒质 1 到媒质 3 的全折射。

解 (1) 这是平面电磁波对三层媒质的正入射问题, 见图 6-17 图所示。三个区域的波阻抗分别为

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}, Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}, Z_{03} = \sqrt{\frac{\mu_3}{\epsilon_3}}$$

相位常数为

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}, \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}, \beta_3 = \omega \sqrt{\mu_3 \epsilon_3}$$

介质 1 中的电场和磁场为

$$E_1 = E_1^+ e^{-j\beta_1 x} + E_1^- e^{+j\beta_1 x}$$

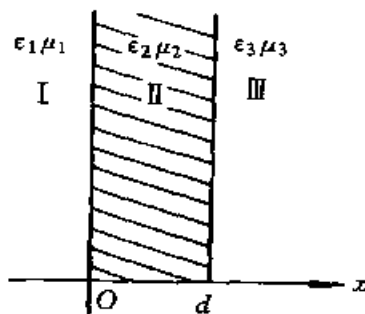
$$H_1 = \frac{1}{Z_{01}} [E_1^+ e^{-j\beta_1 x} - E_1^- e^{+j\beta_1 x}]$$

介质 2 中的电场和磁场为

$$E_2 = E_2^+ e^{-j\beta_2 x} + E_2^- e^{+j\beta_2 x}$$

$$H_2 = \frac{1}{Z_{02}} [E_2^+ e^{-j\beta_2 x} - E_2^- e^{+j\beta_2 x}]$$

介质 3 中的电场和磁场为



题 6-17 图

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 x}$$

$$\dot{H}_3 = \frac{1}{Z_{03}} \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 x}$$

在不同介质的分界面上电场和磁场的切向分量连续,所以在 $x=d$ 处,有

$$\dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} + \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 d} = \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 d}$$

$$\frac{1}{Z_{02}} [\dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 d} - \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 d}] = \frac{1}{Z_{03}} \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 d}$$

以上两式相比,且设 $\Gamma_2 = \frac{\dot{E}_2^-}{\dot{E}_2^+}$, 有

$$Z_{02} \frac{1 + \Gamma_2 e^{j2\beta_2 d}}{1 - \Gamma_2 e^{j2\beta_2 d}} = Z_{03}$$

解得

$$\Gamma_2 = \frac{Z_{03} - Z_{02}}{Z_{03} + Z_{02}} e^{-j2\beta_2 d}$$

把 Γ_2 代入电场等式中,且设 $T_3 = \frac{\dot{E}_3^+}{\dot{E}_2^+}$, 得

$$\begin{aligned} T_3 = \frac{\dot{E}_3^+}{\dot{E}_2^+} &= \frac{e^{-j\beta_2 d} + \Gamma_2 e^{j\beta_2 d}}{e^{-j\beta_2 d}} = \frac{\left(1 + \frac{Z_{03} - Z_{02}}{Z_{03} + Z_{02}}\right) e^{-j2\beta_2 d}}{e^{-j\beta_3 d}} \\ &= \frac{2Z_{03}}{Z_{03} + Z_{02}} e^{-j(\beta_2 - \beta_3)d} \end{aligned}$$

在 $x=0$ 处,有

$$\dot{E}_1^+ + \dot{E}_1^- = \dot{E}_2^+ + \dot{E}_2^-$$

$$\frac{1}{Z_{01}} [\dot{E}_1^+ - \dot{E}_1^-] = \frac{1}{Z_{02}} [\dot{E}_2^+ - \dot{E}_2^-]$$

以上两式相比,令 $\Gamma_1 = \frac{\dot{E}_1^-}{\dot{E}_1^+}$, 有

$$Z_{01} \frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1} = Z_{02} \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2}$$

所以解得媒质 1 中的反射系数为

$$\Gamma_1 = \frac{(1 + \Gamma_2)Z_{02} - (1 - \Gamma_2)Z_{01}}{(1 + \Gamma_2)Z_{02} + (1 - \Gamma_2)Z_{01}}$$

由

$$\dot{E}_1^+ + \Gamma_1 \dot{E}_1^+ = \dot{E}_2^+ + \Gamma_2 \dot{E}_2^+$$

可得

$$T_2 = \frac{\dot{E}_2^+}{\dot{E}_1^+} = \frac{1 + \Gamma_1}{1 + \Gamma_2}$$

媒质 3 相对媒质 1 的折射系数为

$$T = \frac{\dot{E}_3^+}{\dot{E}_1^+} = \frac{\dot{E}_3^+}{\dot{E}_2^+} \frac{\dot{E}_2^+}{\dot{E}_1^+} = T_3 T_2$$

设媒质 1 中的入射波为

$$\dot{E}^+ = E_{10} e^{-j\beta_1 x}$$

则反射波为

$$\dot{E}^- = \Gamma_1 E_{10} e^{j\beta_1 x}$$

媒质 3 中的折射波

$$\dot{E}_3 = T E_{10} e^{j\beta_3 x}$$

(2) 如要实现由媒质 1 到媒质 3 的全折射, 则媒质 1 中的反射系数 $\Gamma_1 = 0$, 即

$$Z_{02}(1 + \Gamma_2) = Z_{01}(1 - \Gamma_2)$$

代入 Γ_2 的值, 整理得

$$Z_{02}(Z_{03} \cos \beta_2 d + j Z_{02} \sin \beta_2 d) = Z_{01}(Z_{02} \cos \beta_2 d + j Z_{03} \sin \beta_2 d)$$

使实部、虚部分别相等, 有

$$Z_{03} \cos \beta_2 d = Z_{01} \cos \beta_2 d$$

$$Z_{02}^2 \sin \beta_2 d = Z_{01} Z_{03} \sin \beta_2 d$$

由于 $Z_{01} \neq Z_{02} \neq Z_{03}$, 所以以上等式成立的条件是

$$\cos \beta_2 d = 0 \quad \beta_2 d = \frac{n+1}{2} \pi \quad (n = 0, 1, 2)$$

或媒质厚度

$$d = \frac{n+1}{4} \lambda_2$$

同时满足

$$Z_{02} = \sqrt{Z_{01} Z_{03}}$$

6-18 某高灵敏度仪器必须高度屏蔽外界电磁场, 使外界磁场强度影响减小到 0.01 A/m 以下。但由于它所工作的地点邻近电力线路, 据实测干扰磁场强度为 12 A/m。试计算用铝板 ($\mu_r = 1$, $\gamma = 35.7 \times 10^6$ S/m) 屏蔽及采用铁板 ($\mu_r = 2000$, $\gamma = 8.3 \times 10^6$ S/m) 屏蔽所需的厚度。

解 电力线路的工作频率为 50 Hz, 所以铝板的透入深度

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \sqrt{\frac{2}{100\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 35.7 \times 10^6}} = 1.19 \text{ cm}$$

铁板的透入深度为

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \sqrt{\frac{2}{100\pi \times 2000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 8.3 \times 10^6}} = 5.52 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

如果把磁场强度从 12 A/m 降为 0.01 A/m, 需满足

$$12e^{-\alpha x} \leq 0.01$$

$$e^{-\alpha x} \leq \frac{0.01}{12}$$

$$x \geq \frac{1}{\alpha} \ln \frac{12}{0.01} = d \ln \frac{12}{0.01}$$

所以铝板所需的厚度为 $x_1 = 1.19 \ln \frac{12}{0.01} = 8.44 \text{ cm}$

铁板所需的厚度为 $x_2 = 5.52 \times 10^{-2} \ln \frac{12}{0.01} = 0.39 \text{ cm}$

6-19 海水的 $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$, $\gamma = 4 \text{ S/m}$, 一频率为 300 MHz 的均匀平面电磁波自海面垂直进入海水。设在海面场强为 $E = 10^{-3} \text{ V/m}$ (合成波电场幅度)。求:

- (1) 波在海水中的速度及波长;
- (2) 海水与空气分界面处的磁场强度;
- (3) 进入海水每单位面积的电磁能流;
- (4) 海水中距海面 0.1 m 处的电场强度与磁场强度的振幅;
- (5) 问波进入海水多少距离后使场强振幅衰减为原来的 1% ?

解 (1) 把海水的参数代入判断式中有

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} = \frac{4}{2\pi \times 3 \times 10^8 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 81} = 2.96$$

海水不能看作是良导体, 所以波在海水中的速度为

$$\begin{aligned} v &= \left[\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{-1} \\ &= \left[\sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 81 \times 10^{-9}}{2 \times 36\pi}} \left(\sqrt{1 + 2.96^2} + 1 \right) \right]^{-1} = 2.32 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

波长为 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2.32 \times 10^7}{3 \times 10^8} = 7.73 \text{ cm}$

(2) 海水的波阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \times \sqrt{\frac{1}{1 + j \frac{\gamma}{\omega\epsilon}}} = \frac{377}{9} \sqrt{\frac{1}{1 + j2.96}} = 23.70 \angle 35.67^\circ$$

因为进入海水中的电磁波的电场强度为 $E = 10^{-3} \text{ V/m}$, 所以海水与空气分界面的磁场强度为

$$H = \frac{E}{|Z_0|} = \frac{10^{-3}}{23.70} = 4.22 \times 10^{-5} \text{ A/m}$$

(3) 海水中的电场和磁场的复数形式为(设电场为 y 方向)

$$\dot{E} = \frac{10^{-3}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \mathbf{e}_y \text{ V/m}$$

$$\dot{H} = \frac{4.22 \times 10^{-5}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - 35.67^\circ)} \mathbf{e}_z \text{ A/m}$$

式中衰减常数 α 为

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right)} \\ &= 2\pi \times 3 \times 10^8 \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-9} \times 81}{2 \times 36\pi} (\sqrt{1 + 2.96^2} - 1)} \\ &= 58.28 \text{ Np/m}\end{aligned}$$

进入海水每单位面积的电磁能流为

$$\dot{S} = \dot{E} \times \dot{H}^* = \frac{4.22 \times 10^{-8}}{2} e^{-2\alpha x} e^{j35.67^\circ} e_x \text{ W/m}^2$$

(4) 距海面 0.1 m 处电场和磁场的振幅分别为

$$E = 10^{-3} e^{-58.28 \times 0.1} = 2.94 \times 10^{-6} \text{ V/m}$$

$$H = 4.22 \times 10^{-5} e^{-58.28 \times 0.1} = 1.24 \times 10^{-7} \text{ A/m}$$

(5) 根据 $10^{-3} e^{-\alpha x} = 10^{-3} \times 1\%$

$$\text{得} \quad x = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{1}{58.28} \ln 100 = 7.90 \text{ cm}$$

即波进入海水 7.9 cm 后场强振幅衰减为原来的 1%。

6-20 一均匀平面电磁波由空气正入射到理想介质表面上, 介质参数为 $\mu_r = 1, \epsilon_r = 9, \gamma = 0$ 。如果在介质中距介质分界面 5 m 处的磁场强度表达式为

$$\dot{H}_2 = 10e^{-j\beta_2 x} = 10e^{-j\frac{\pi}{4}} (\text{A/m})$$

(介质表面在 $x=0$ 处, 初相位 $\varphi=0$)。试求:

(1) 电磁波的频率 f ;

(2) 写出空气和理想介质中的电场和磁场瞬时表达式;

(3) 介质中的坡印亭矢量的瞬时值和平均值;

(4) 介质中电场和磁场的能量密度 W'_e 与 W'_m , 以及电场与磁场的最大能量密度 $W'_{e\max}$ 与 $W'_{m\max}$ 的大小。

解 (1) 因为在介质中距介质分界面 5 m 处的磁场强度

$$\dot{H}_2 = 10e^{-j\beta_2 x} = 10e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ A/m}$$

设坐标如图所示, 则有

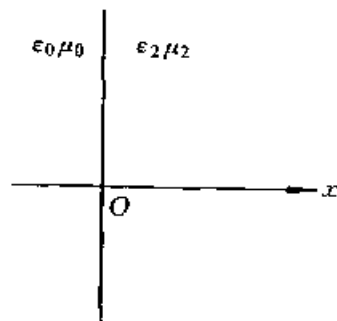
$$\beta_2 \times 5 = \frac{\pi}{4} \quad \beta_2 = \frac{\pi}{20} \text{ rad/m}$$

由

$$\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

得

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 40 \text{ m}$$



题 6-20 图

电磁波在介质中的传播速度为

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} = \frac{c}{\sqrt{9}} = \frac{3 \times 10^8}{3} = 10^8 \text{ m}$$

所以电磁波的频率 $f = \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{10^8}{40} = 2.5 \times 10^6 (\text{Hz})$

(2) 设 $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y$, $\mathbf{H} = H_z \mathbf{e}_z$, 则介质中场量的瞬时表达式为

$$\mathbf{H}_2(x, t) = 10\sqrt{2} \cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{20}x) \mathbf{e}_z \text{ A/m}$$

$$\mathbf{E}_2(x, t) = Z_{02} H_2(x, t) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$$

其中 $Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi \ \Omega$

所以 $\mathbf{E}_2(x, t) = 400\pi\sqrt{2} \cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{20}x) \mathbf{e}_y \text{ V/m}$

在 $x=0$ 的分界面上, 电磁波的反射系数为

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{40\pi - 120\pi}{40\pi + 120\pi} = -\frac{1}{2}$$

折射系数为 $T = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{2 \times 40\pi}{40\pi + 120\pi} = \frac{1}{2}$

波在空气中的传播常数为

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi \times 2.5 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{\pi}{60} \text{ rad/m}$$

空气中电场的人射波振幅为

$$E_1^+ = \frac{E_2^+}{T} = 2 \times 400\sqrt{2}\pi = 800\sqrt{2}\pi \text{ V/m}$$

反射波振幅为 $E_1^- = \Gamma E_1^+ = -\frac{1}{2} \times 800\sqrt{2}\pi = -400\sqrt{2}\pi \text{ V/m}$

所以空气中场量的瞬时表达式为

$$\mathbf{E}_1(x, t) = 800\pi\sqrt{2} [\cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{60}x) - \frac{1}{2} \cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{60}x)] \mathbf{e}_y \text{ V/m}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(x, t) &= \frac{1}{Z_{01}} [E_1^+(x, t) - E_1^-(x, t)] \\ &= \frac{20}{3} \sqrt{2} [\cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{60}x) + \frac{1}{2} \cos(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{60}x)] \mathbf{e}_z \text{ A/m} \end{aligned}$$

(3) 介质中

$$\mathbf{S}_2(x, t) = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 = 8 \times 10^3 \pi \cos^2(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{20}x) \mathbf{e}_x \text{ W/m}^2$$

平均值 $S_{av} = \text{Re}(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2^*) = 10 \times 400\pi = 4\pi \times 10^3 \text{ W/m}^2$

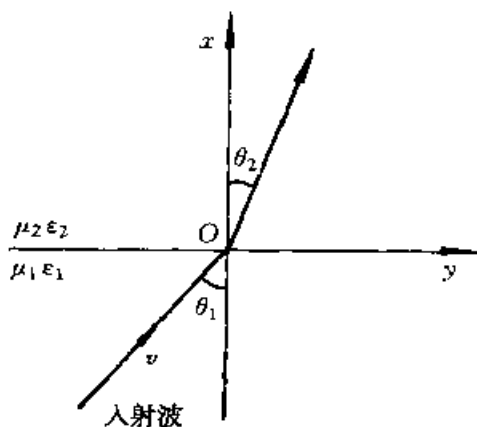
(4) 介质中电场的能流密度等于磁场能流密度, 即

$$\begin{aligned}
 W'_e(x, t) &= \frac{1}{2} \epsilon_2 E_2^2(x, t) = W'_m(x, t) = \frac{1}{2} \mu H_2^2(x, t) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{9 \times 10^{-9}}{36\pi} \times (400\pi\sqrt{2})^2 \cos^2(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{20}x) \\
 &= 4\pi \times 10^{-5} \cos^2(5\pi \times 10^6 t - \frac{\pi}{20}x) \quad \text{J/m}^3
 \end{aligned}$$

所以介质中电场与磁场的最大能量密度为

$$W'_{e\max} = W'_{m\max} = 4\pi \times 10^{-5} \quad \text{J/m}^3$$

6-21 介质 1 为理想介质, $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, $\gamma_1 = 0$; 介质 2 为空气。平面电磁波由介质 1 向分界面上斜入射, 入射波电场与入射面平行, 见图 6-21 图所示。试求:



题 6-21 图

当入射角 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 时

- (1) 全反射的临界角;
- (2) 介质 2 中(空气)折射波的折射角 θ_2 ;
- (3) 反射系数 $\Gamma_{//}$;
- (4) 折射系数 $T_{//}$;

当入射角 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 时

- (5) 是否满足无反射条件? 布儒斯特角 θ_B 是多少?
- (6) 入射波在入射方向的相速度 v ;
- (7) 入射波在 x 方向的相速度 v_x ;
- (8) 入射波在 y 方向的相速度 v_y ;
- (9) 在媒质 2 中, 波以什么速度传播以及沿什么方向传播?
- (10) 在媒质 2 中的平均功率流密度 S_{av} 。

解 当入射角 $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ 时:

(1) 临界入射角

$$\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\epsilon_0}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) 因为入射角 $\theta_1 = \theta_c$, 所以折射波的折射角 $\theta_2 = 90^\circ$, 即产生了全反射。也可利用斯耐尔定律计算。因为 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, 有

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{2}$$

$$\sin \theta_2 = \sqrt{2} \sin \theta_1 = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

折射角 $\theta_2 = 90^\circ$

(3) 由(2)中的计算可知, 此时发生了反全射, 所以反射系数 $|\Gamma_{//}| = 1$, 由菲涅耳公式得

$$|\Gamma_{//}| = \frac{Z_{02} \cos \theta_2 - Z_{01} \cos \theta_1}{Z_{01} \cos \theta_1 - Z_{02} \cos \theta_2} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{(4) 折射系数 } T_{//} &= \frac{2Z_{02} \cos \theta_1}{Z_{01} \cos \theta_1 + Z_{02} \cos \theta_2} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01}} \\ &= \frac{2 \times Z_{01} \sqrt{2}}{Z_{01}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

当 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ 时:

$$\begin{aligned} \text{(5) 布儒斯特角 } \theta_B &= \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\epsilon_0}} \\ &= \arctan \sqrt{\frac{1}{2}} = 35.26^\circ \end{aligned}$$

显然入射角 $\theta_1 \neq \theta_B$, 因此不满足无反射条件。

(6) 入射波在入射方向的相速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = 2.12 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{(7) } v_x = \frac{v}{\cos \theta_1} = \frac{2.12 \times 10^8}{\cos \frac{\pi}{3}} = 4.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

v_x 为波在 x 方向的相速度

(8) 波在 y 方向的相速度为

$$v_y = \frac{v}{\sin \theta_1} = \frac{2.12 \times 10^8}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2.45 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(9) 因为入射角 $\theta_1 = \frac{\pi}{3} > \theta_c$, 所以波发生全反射, 折射波沿分界面传播形成分界面上的表面波。

(10) 媒质 2 中的平均功率流密度 $S_{av} = 0$

第七章 均匀传输线中的 导行电磁波

习题(7-1)

7-1-1 不计边缘效应,试证明沿着两平行板,向(+z)方向传播的沿y方向极化的 TEM 波具有下列性质:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

证 对于向+z方向传播,沿Y方向极化的 TEM 波而言,电场和磁场为

$$\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y \quad \mathbf{H} = H_x (-\mathbf{e}_x)$$

所以电磁场基本方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{e}_z = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} (-\mathbf{e}_x)$$

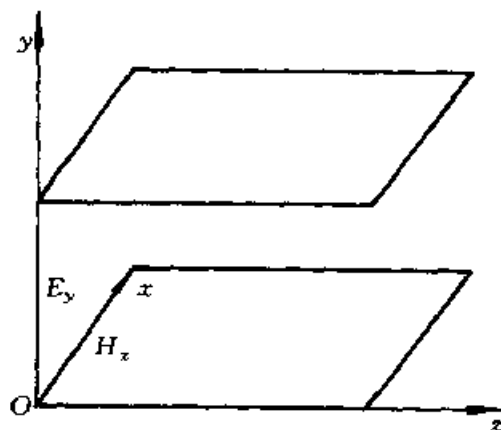
$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \mathbf{e}_z + \frac{\partial H_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{e}_y$$

根据矢量等式的两边分量相等,有

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad \text{及} \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0$$

本题的证明结果说明,对于平行板传输线(不计边缘效应),在任一个z等于常数的平面上,TEM 波的电场和磁场的分布类似于恒定场的分布。这一结论也适用于其它的两线传输线。

7-1-2 对于一沿着传输线向(+z)方向传播的 TEM 波,其电场和磁场可能同时包含x和y两分量,此两分量可能都是x和y的函数。



题 7-1-1 图

(1) 试找出 $E_x(x, y)$, $E_y(x, y)$, $H_x(x, y)$ 和 $H_y(x, y)$ 彼此间的关系;

(2) 证明(1)中四个分量在稳态情况下,均满足二维的拉普拉斯方程。

解 (1) 根据电磁场基本方程 (认为空间介质是理想介质)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

代入 $E_z = H_z = 0$, 可得如下方程

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (1) \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2) \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3) \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (6)$$

以上六个方程即为 E_x, E_y, H_x 和 H_y 彼此间的关系。

(2) 将上述①式对 y 求偏导, ②式对 x 求偏导, 代入⑥式得

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

即
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = 0 \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0$$

把③式代入以上两式得

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = 0, \text{ 即 } \nabla^2 E_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0, \text{ 即 } \nabla^2 E_y = 0$$

同理, 把④式对 y 求偏导, ⑤式对 x 求偏导, 代入③式得 $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$

即
$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = 0 \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = 0$$

把⑥式代入以上两式中有

$$\nabla^2 H_x = \nabla^2 H_y = 0$$

上述结果说明, E_x, E_y, H_x, H_y 在稳态情况下, 均满足二维的拉普拉斯方程。

本题的结果表明, 二导体传输线导行的 TEM 波在垂直于传输线的任一横截面内的电场和磁场分布都与相同情况下的静态场分布相似, 因此传输线的原参数计算可以应用静态场的计算结果。

习题(7-2)

7-2-1 一无损耗的平板传输线, 其特性阻抗固定。

- (1) 在板宽 W 一定时,若介电常数 ϵ_r 加倍,介质厚度 d 会如何变化?
- (2) 在 d 一定时,若 ϵ_r 加倍, W 会如何变化?
- (3) 在 ϵ_r 一定时,若 d 加倍, W 会如何变化?
- (4) 在(1)、(2)、(3)的情形下,沿线波的传播速度如何变化?

解 平板传输线单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\epsilon W \times 1}{d} = \frac{\epsilon W}{d}$$

利用关系式 $L_0 C_0 = \mu \epsilon$, 式中 L_0 为平板传输线单位长度的电感,得特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 C_0}{C_0^2}} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{C_0}} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\epsilon W} d = \frac{d}{W} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

所以当 Z_0 固定时有

- (1) 若 W 一定, ϵ_r 加倍,则 d 变为 $\sqrt{2}d$ 。
- (2) 若 d 不变, ϵ_r 加倍,则 W 变为 $W/\sqrt{2}$ 。
- (3) 若 ϵ_r 不变, d 加倍,则 W 变为 $2W$ 。
- (4) 因为波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

所以在(1)、(2)情况下,由于 ϵ_r 加倍, v 将减小 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍,在(3)情形下, v 不变。

本题计算中平板传输线单位长度的电容公式直接应用了静电场中平行板电容器电容的计算式。

7-2-2 利用 $\epsilon_r = 2.25$ 的介质来制造一无损耗均匀传输线。

(1) 若为二线传输线,导线半径为 0.6 mm ,则二线间距离需为多少,方能使特性阻抗为 300Ω ?

(2) 若为同轴电缆,内导体半径为 0.6 mm ,则外导体半径需为多少,方能使特性阻抗为 75Ω ?

解 (1) 设二线传输线线间距离为 D ,导线半径为 R ,导线上单位长度上的电荷线密度为 τ ,利用静电场的计算结果,得两线间的电压为

$$U = \frac{\tau}{\pi \epsilon} \ln \frac{D-R}{R}$$

则传输线单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{D-R}{R}}$$

$$\text{特性阻抗 } Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 C_0}{C_0^2}} = \frac{\sqrt{\mu \epsilon}}{\pi \epsilon} \ln \frac{D-R}{R}$$

从中可以解出 D 为

$$D = R(e^{Z_0\pi/\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} + 1) = 0.6 \times 10^{-3}(e^{300\pi\sqrt{2.25}/120\pi} + 1) \\ = 26.11 \text{ mm}$$

(2) 设同轴电缆的内、外导体半径分别为 R_1 和 R_2 , 单位长度上的电荷线密度为 τ , 由静电场的理论可知, 同轴电缆两导体间的电压为

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

所以同轴电缆单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$\text{特性阻抗 } Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 C_0}{C_0^2}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

从上式中解出 R_2 为

$$R_2 = R_1 e^{2\pi Z_0/\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} = 0.6 \times 10^{-3} e^{2\pi \times 75 \times \sqrt{2.25}/120\pi} \\ = 3.91 \text{ mm}$$

以上求解结果表明, 无损耗传输线的特性阻抗的大小与传输线的原参数 C_0 和 L_0 有关, L_0, C_0 的计算采用静态场的计算式, 因而熟练掌握静态场中参数的计算有助于解决传输线中的参数计算问题。

7-2-3 设有一无损耗的同轴电缆长为 10 m, 内外导体间的电容为 600 pF。若电缆的一端短路, 另一端接有一脉冲发生器及示波器, 则发现一个脉冲信号来回一次需时 $0.1 \mu\text{s}$, 问该电缆的特性阻抗 Z_0 是多少?

解 由题意可知, 脉冲信号的传播速度为

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2 \times 10}{0.1 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

传输线的特性阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C_0}$$

把 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ 和 $C_0 = 600 \text{ pF}$ 代入上式中, 得

$$Z_0 = \frac{1}{C_0 v} = \frac{l}{C_0 v} = \frac{10}{600 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^8} = \frac{1000}{12} = 83.33 \Omega$$

习题(7-3)

7-3-1 一无损耗传输线, 特性阻抗为 75Ω , 终端接有负载 $Z_L = R_L +$

jX_L 。

- (1) 要使沿线驻波比为 3, 求 R_L 与 X_L 的关系;
- (2) 若 $R_L = 150 \Omega$, 求 X_L ;
- (3) 在 (2) 情况下, 求离负载最近的电压最小点距负载的距离。

解 (1) 根据反射系数与驻波比 S 的关系可得

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

又因为 $|\Gamma| = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| = \sqrt{\frac{(R_L - 75)^2 + X_L^2}{(R_L + 75)^2 + X_L^2}} = \frac{1}{2}$

所以有 $4(R_L - 75)^2 + 4X_L^2 = (R_L + 75)^2 + X_L^2$

化简上式得 R_L 与 X_L 的关系式

$$R_L^2 + X_L^2 - 250R_L + 75^2 = 0$$

- (2) 当 $R_L = 150 \Omega$, 代入上式中有

$$150^2 - 250 \times 150 + X_L^2 + 75^2 = 0$$

所以

$$X_L = \pm 96.82 \Omega$$

- (3) 当 $R_L = 150 \Omega$, $X_L = \pm 96.82 \Omega$ 时, 反射系数为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{150 - 75 \pm j96.82}{150 + 75 \pm j96.82} = \frac{75 \pm j96.82}{225 \pm j96.82} \\ &= \frac{1}{2} \angle \pm 28.96^\circ = |\Gamma| e^{j\varphi_L} \end{aligned}$$

离负载最近的电压最小点距负载的距离为

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4\pi} \times (\pm 0.51) + \frac{\lambda}{4}$$

所以当 $X_L = 96.82 \Omega$ 时, 有

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \times 0.51 + \frac{\lambda}{4} = 0.29\lambda$$

当 $X_L = -96.82 \Omega$ 时, 有

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \times (-0.51) + \frac{\lambda}{4} = 0.21\lambda$$

本题的计算结果表明, 传输线的终端负载决定了传输线的反射系数和驻波比的大小, 也决定了沿线电压最大和最小点的位置, 即决定了传输线的工作状态。

7-3-2 一特性阻抗为 300Ω 的无损耗均匀传输线, 终端接一未知负载, 测得驻波比为 2, 离负载 0.3λ 处为第一个电压最小点, 求:

- (1) 负载端的反射系数;

(2) 负载 Z_L 。

解 (1) 由驻波比 $S=2$, 可得反射系数的绝对值为

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

第一个电压最小点离终端的距离为

$$|Z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = 0.3\lambda$$

从上式解出 φ_L 为

$$\varphi_L = (0.3\lambda - \frac{\lambda}{4}) / \frac{\lambda}{4\pi} = 0.2\pi = 36^\circ$$

所以负载端的反射系数为

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\varphi_L} = \frac{1}{3} \angle 36^\circ = 0.27 + j0.20$$

$$(2) \text{ 因为 } \Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

所以负载为

$$\begin{aligned} Z_L &= \frac{(1 + \Gamma)Z_0}{1 - \Gamma} = \frac{(1.27 + j0.2)}{(0.73 - j0.2)} \times 300 \\ &= 509.57 \angle 24.27^\circ \end{aligned}$$

本题给出了用测量的方法计算负载 Z_L 的步骤。通过测取 U_{\min} 和 U_{\max} : 可得驻波比 $S = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$ 和 Z_{\min} 及 Z_{\max} 的位置, 进而算出反射系数和负载 Z_L 。通过测量 U_{\min} 点之间的距离 ΔZ , 也可算出电磁波的波长 $\lambda = 2\Delta Z$ 和电磁波的频率。

7-3-3 一无损耗均匀传输线的特性阻抗 $Z_0 = 75 \Omega$, 终端接负载阻抗 $Z_L = (100 - j50) \Omega$, 求:

(1) 传输线上的反射系数 Γ_z ;

(2) 传输线上的电压、电流表示式;

(3) 距负载第一个电压波节点和电压波腹点的距离 $|z|_{\min}$ 和 $|z|_{\max}$ 。

解 (1) 传输线终端的反射系数为

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - j50 - 75}{100 - j50 + 75} = \frac{25 - j50}{175 - j50} \\ &= 0.31 \angle -47.49^\circ \end{aligned}$$

所以沿线的反射系数为

$$\Gamma_z = |\Gamma| e^{j\varphi_L e^{j2\beta z}} = 0.31 e^{j(2\beta z - 47.49^\circ)}$$

即沿线的反射系数的模等于终端反射系数的模, 但两者的幅角相差 $2\beta z$ 。

(2) 沿线的电压、电流的复数表示式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z} = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} (1 + \dot{\Gamma}_z) \quad \text{V}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} (\dot{U}^+ e^{-j\beta z} - \dot{U}^- e^{j\beta z}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\beta z} (1 - \dot{\Gamma}_z) \quad \text{A}$$

瞬时表示式为

$$u(z, t) = \sqrt{2} U^+ \cos(\omega t - \beta z) + |\dot{\Gamma}| \sqrt{2} U^+ \cos(\omega t + \beta z + \varphi_L) \quad \text{V}$$

$$I(z, t) = \frac{\sqrt{2} U^+}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z) - \frac{\sqrt{2} U^+}{Z_0} |\dot{\Gamma}| \cos(\omega t + \beta z + \varphi_L) \quad \text{A}$$

$$(3) |z|_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} (-0.264 + 1) = 0.18\lambda$$

$$|z|_{\max} = |z|_{\min} + \frac{\lambda}{4} = 0.18\lambda + \frac{\lambda}{4} = 0.43\lambda$$

习题(7-4)

7-4-1 一长 2 m 的无损耗传输线, 特性阻抗为 50Ω , 一端接阻抗为 $(40 + j30) \Omega$ 的负载, 在 $f = 200 \text{ MHz}$ 时, 求 λ 端阻抗 Z_{in} 。

解 传输线上波的相位常数为

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 2 \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{4}{3}\pi \quad \text{rad/m}$$

所以入端阻抗

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 50 \frac{(40 + j30) + j50 \tan(\frac{4}{3}\pi \times 2)}{50 + j(40 + j30) \tan(\frac{4}{3}\pi \times 2)} \\ &= 50 \frac{40 - 56.60j}{101.96 - 69.28j} = 28.11 \angle -20.56^\circ \end{aligned}$$

计算传输线的入端阻抗 Z_{in} , 要注意 Z_{in} 与线长 l , 频率 f , 特性阻抗 Z_0 和负载阻抗 Z_L 有关, 且呈周期性的变化。

7-4-2 特性阻抗 $Z_0 = 100 \Omega$, 长度为 $\lambda/8$ 的无损耗传输线, 输出端接有负载 $Z_L = (200 + j300) \Omega$, 输入端接有内阻为 100Ω , 电压为 $500 \angle 0^\circ \text{ V}$ 的电源。试求:

- (1) 传输线输入端的电压;
- (2) 负载吸收的平均功率;
- (3) 负载端的电压。

解 (1) 传输线输入端的入端阻抗为

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 100 \frac{200 + j300 + j100 \tan(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8})}{100 + j(200 + j300) \tan(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8})}$$

$$= 100 \frac{1+2j}{-1+j} = 50 - j150 \quad \Omega$$

传输线输入端的等效电路如题 7-4-2 图所示, 传输线输入端的电压 \dot{U}_1 为 Z_{in} 上的电压,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_s Z_{in}}{100 + Z_{in}} = \frac{(50 - j150) \times 500 \angle 0^\circ}{100 + (50 - j150)} \\ &= \frac{500 - 1500j}{3 - 3j} = 372.68 \angle -26.57^\circ \quad \text{V} \end{aligned}$$

(2) 流过 Z_{in} 的电流 \dot{I}_1 为

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{100 + Z_{in}} = \frac{500 \angle 0^\circ}{100 + (50 - j150)} = \frac{10}{3\sqrt{2}} \angle 45^\circ \quad \text{A}$$

已知传输线始端的电压和电流 \dot{U}_1, \dot{I}_1 , 可以计算出负载上的电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 。

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \cos \beta l - j \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \sin \beta l \\ &= \frac{10}{3\sqrt{2}} \angle 45^\circ \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8} \right) - j \frac{372.68 \angle -26.57^\circ}{100} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{8} \right) \\ &= \frac{5}{3} \angle 45^\circ - j2.64 \angle -26.57^\circ = -1.18j \quad \text{A} \end{aligned}$$

因此负载吸收的平均功率为

$$P = R_L I_2^2 = 200 \times 1.18^2 = 278.48 \quad \text{W}$$

(3) 负载端的电压

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \dot{U}_1 \cos \beta l - j Z_0 \dot{I}_1 \sin \beta l \\ &= 372.68 \angle -26.57^\circ \cos \frac{\pi}{4} - j100 \times \frac{10}{3\sqrt{2}} \angle 45^\circ \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= 353.54 - j235.72 \quad \text{V} \end{aligned}$$

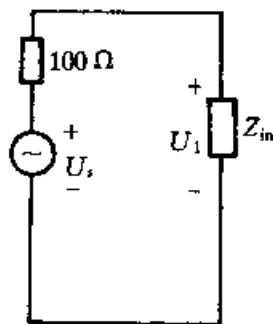
也可利用 $\dot{U}_2 = Z_L \dot{I}_2$ 计算。

本题由始端电压、电流计算终端处的电压和电流时, 取传输线终端为坐标零点。虽然是无损耗传输线, 由于有反射波, 所以负载吸收的平均功率不等于始端输入的功率。

习题(7-5)

7-5-1 一特性阻抗为 $Z_{01} = 50 \Omega$ 的传输线经由另一长度为 l' , 特性阻抗为 Z_{02} 的传输线达到与 $Z_L = (40 + j10) \Omega$ 的负载匹配, 求 l' 和 Z_{02} 。

解 传输线的联接如题 7-5-1 图所示, 从 AB 端向负载端看去的人端阻抗为



题 7-4-2 图

$$Z_{in} = Z_{02} \frac{Z_L + jZ_{02} \tan \beta' l_1}{Z_{02} + jZ_L \tan \beta' l_1}$$

达到匹配时应有 $Z_{01} = Z_{in}$ 。设 $\tan \beta' l_1 = x$

则有 $Z_{02}(Z_L + jZ_{02}x) = Z_{01}(Z_{02} + jZ_Lx)$

$$Z_{02}(40 + j10 + jZ_{02}x) = 50(Z_{02} + j(40 + j10)x)$$

令上述方程的实部、虚部分别相等,有

$$40Z_{02} = 50Z_{02} - 500x$$

$$10Z_{02} + Z_{02}^2x = 2000x$$

求解得 $Z_{02} = 50x$

$$x^2 = \frac{3}{5}$$

所以 $x = \tan \beta' l_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.78$ (舍去负值)

$$\beta' l_1 = \arctan \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.21\pi$$

$$l'_1 = \frac{0.21\pi}{\beta} = \frac{0.21\pi}{2\pi/\lambda} = 0.105\lambda$$

特性阻抗 $Z_{02} = 50x = 50 \times \sqrt{\frac{3}{5}} = 38.73 \Omega$

注意:当 $Z_{01} = Z_{in}$ 时,只是在 $Z_0 = Z_{01}$ 的主传输线上消去了反射波,而在 $Z_0 = Z_{02}$ 的传输线上仍有反射波。

7-5-2 利用单短截线匹配法使 $(25 + j25) \Omega$ 负载阻抗与 50Ω 无损耗均匀传输线匹配。若短截线也是相同的 50Ω 线,试求所需要的短截线的长度 l_2 和接入位置 l_1 。

解 并接一段单短截线来实现阻抗匹配的方法如题 7-5-2 图所示。匹配时阻抗间的关系为

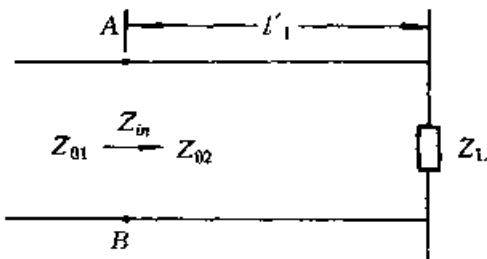
$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{i1}} + \frac{1}{Z_{i2}}$$

而式中

$$\frac{1}{Z_{i1}} = \frac{1}{Z_0} \frac{Z_0 + jZ_L \tan \beta l_1}{Z_L + jZ_0 \tan \beta l_1}$$

令 $\tan \beta l_1 = x$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{i1}} &= \frac{1}{50} \times \frac{50 + j(25 + j25)x}{25 + j25 + j50x} = \frac{1}{50} \frac{2 - x + jx}{1 + j(1 + 2x)} \\ &= \frac{1}{50} \times \frac{2 + 2x^2 - 2j(1 + x - x^2)}{1 + (1 + 2x)^2} \end{aligned}$$



题 7-5-1 图

令上式中的实部 $= \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{50}$, 则有

$$2 + 2x^2 = 1 + (1 + 2x)^2 = 2 + 4x + 4x^2$$

整理之, 将 $x^2 + 2x = 0$.

所以
$$x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

由于 $\tan \beta l_1 = x$

最后得单短截线的接入位置为

$$l_1 = \frac{1}{\beta} \arctan x = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \pi & (\text{当 } x = 0) \\ \frac{1}{\beta} \times 0.648\pi & (\text{当 } x = -2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.5\lambda \\ 0.324\lambda \end{cases}$$

把 x 的值代入 $\frac{1}{Z_{in}}$ 的虚部中, 则

当 $x = 0$ 时, 虚部 $= \frac{1}{50} \times \frac{-2j}{2} = -\frac{j}{50}$

当 $x = -2$ 时, 虚部 $= \frac{1}{50} \times \frac{10j}{10} = \frac{j}{50}$

故实现匹配, 应有

$$\frac{1}{Z_2} \pm \frac{j}{50} = 0, \text{ 即 } \frac{-j}{50 \tan \beta l_2} \pm \frac{j}{50} = 0$$

所以 $\tan \beta l_2 = \pm 1 \quad \beta l_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{3}{4}\pi \end{cases}$

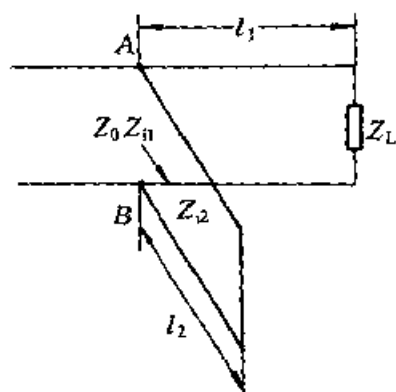
单短截线的长度 $l_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{8} & (\text{当 } x = -2) \\ \frac{3}{4}\pi \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{3}{8}\lambda & (\text{当 } x = 0) \end{cases}$

l_1 和 l_2 的两组解答分别为

$$\begin{cases} l_1 = 0.5\lambda \\ l_2 = \frac{3}{8}\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = 0.324\lambda \\ l_2 = \frac{\lambda}{8} \end{cases}$$

因第二组解答中的 l_1, l_2 均小于第一组解答中的值, 故选第二组解答的值较好。

由于传输线的入端阻抗与波的频率有关, 所以传输线的任何一种匹配方法都与频率有关, 当频率改变时, 匹配线的长度和接入位置也要改变。



题 7-5-2 图

习题(7-6)

7-6-1 一长 4 m 的有损耗均匀传输线,当短路和开路时,其入端阻抗分别为 $360 \angle 20^\circ \Omega$ 和 $250 \angle -50^\circ \Omega$ 。试求:

(1) 此线的特性阻抗 Z_0 , α 及 β ;

(2) R_0 , ωL_0 , G_0 , ωC_0 。

解 (1) 本题中的传输线是有损耗线,其入端阻抗为

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{th} kl}{Z_0 + Z_L \operatorname{th} kl}$$

当传输线终端短路时, $Z_L = 0$, 有

$$Z_{ins} = Z_0 \operatorname{th} kl = 360 \angle 20^\circ$$

当传输线终端开路时, $Z_L = \infty$, 有

$$Z_{ino} = \frac{Z_0}{\operatorname{th} kl} = 250 \angle -50^\circ$$

因此 $Z_{ins} Z_{ino} = Z_0^2 = 360 \angle 20^\circ \times 250 \angle -50^\circ = 9 \times 10^4 \angle -30^\circ$

故此线的特性阻抗 $Z_0 = \sqrt{9 \times 10^4 \angle -30^\circ} = 300 \angle -15^\circ \Omega$

又因为

$$\frac{Z_{ins}}{Z_{ino}} = (\operatorname{th} kl)^2$$

所以有 $\operatorname{th} kl = \frac{e^{2kl} - 1}{e^{2kl} + 1} = \sqrt{\frac{Z_{ins}}{Z_{ino}}} = \sqrt{\frac{360 \angle 20^\circ}{250 \angle -50^\circ}} = 1.2 \angle 35^\circ$

$$e^{2kl} = \frac{1 + 1.2 \angle 35^\circ}{1 - 1.2 \angle 35^\circ} = \frac{1.98 + j0.69}{0.02 - j0.69} = 3.04 \angle 107.55^\circ$$

即 $e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = 3.04 e^{j107.55^\circ}$

最后解得衰减常数

$$\alpha = \frac{1}{2l} \ln 3.04 = \frac{\ln 3.04}{2 \times 4} = 0.139 \text{ NP/m}$$

相位常数 $\beta = \frac{1}{2l} \times \frac{107.55}{180} \pi = \frac{1}{2 \times 4} \times \frac{107.55}{180} \pi = 0.235 \text{ rad/m}$

(2) 有损耗传输线的传播常数可表示为

$$k = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

特性阻抗可表示为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

以上两式相乘,代入 Z_0 和 k 的值,有

$$Z_0 k = R_0 + j\omega L_0 = 300 \angle -15^\circ \times (\alpha + j\beta)$$

$$= 300 \angle -15^\circ \times (0.139 + j0.235)$$

$$= 81.91 \times \angle 44.4^\circ = 58.52 + j57.31 \quad \Omega$$

所以传输线单位长度的电阻 R_0 和电感 L_0 分别为

$$R_0 = 58.52 \quad \Omega/\text{m}$$

$$L_0 = \frac{57.31}{\omega} \quad \text{H/m}$$

把 k 和 Z_0 相除,有

$$\frac{k}{Z_0} = G_0 + j\omega C_0 = \frac{0.139 + j0.235}{300 \angle -15^\circ} = 9.1 \times 10^{-4} \angle 74.4^\circ$$

$$= 2.45 \times 10^{-4} + j8.76 \times 10^{-4}$$

即传输线单位长度的电导和电容分别为

$$G_0 = 2.44 \times 10^{-4} \quad \text{S/m}$$

$$C_0 = \frac{8.76 \times 10^{-4}}{\omega} \quad \text{F/m}$$

有损耗均匀传输线的入端阻抗、沿线电压和电流分布的计算式中都是双曲函数,传播常数和特性阻抗为复数,在计算中要区别于无损耗线。

7-6-2 对于一开路或短路的有损耗传输线,其入端阻抗同时包含电阻及电抗。若其长度 l 很短, ($\alpha l \ll 1$ 及 $\beta l \ll 1$), 证明其入端阻抗约为:

$$(1) Z_{in} = (R_0 + j\omega L_0)l \quad (\text{短路线});$$

$$(2) Z_{in} = (G_0 - j\omega C_0) / [G_0^2 + (\omega C_0)^2]l \quad (\text{开路线})。$$

证 (1) 由题 7-6-1 的求解可知

$$Z_0 k = R_0 + j\omega L_0$$

$$k/Z_0 = G_0 + j\omega C_0$$

而当传输线短路时

$$Z_{in} = Z_0 \text{th} kl$$

若 $kl \ll 1$, 有 $Z_{in} \approx Z_0 kl = (R_0 + j\omega L_0)l$

(2) 当传输线开路时

$$Z_{in} = \frac{Z_0}{\text{th} kl}$$

若 $kl \ll 1$, 有

$$Z_{in} \approx \frac{Z_0}{kl} = \frac{1}{(G_0 + j\omega C_0)l} = \frac{G_0 - j\omega C_0}{(G_0^2 + (\omega C_0)^2)l}$$

思考题

7-1 试比较在无限大均匀媒质中传播的均匀平面电磁波和沿传输线传播

的 TEM 波两者之间的相同之处与不同之处。

答 在无限大均匀媒质中传播的均匀平面电磁波和沿传输线传播的 TEM 波的电场与磁场都是互相正交的,且场量与传播方向互相垂直。所不同的是,在等相位面上,均匀平面波的电场在每一点都是相同的,磁场也是相同的。而沿传输线传播的 TEM 波则不一定是均匀的,如同轴线和平行双导线周围的 TEM 波,在等相位平面上每一点的电场和磁场是不相同的。

7-2 试比较 TEM 波沿传输线传播的速度和在无限大均匀媒质中传播的速度。

答 TEM 波在无限大均匀媒质中的速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

在自然空间

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c(\text{光速})$$

TEM 波沿传输线传播的速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

对于两导体传输线,由于 $L_0 C_0 = \mu\epsilon$, 所以有

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

即两者的波速表示式是相同的。

7-3 在什么情况下,必须用分布参数电路的观点来分析传输线上的电磁过程?

答 当电磁波的频率较高,波长较短,波长和传输线的实际长度接近时,就必须用分布参数的观点来分析其上的电磁过程。因为此时,电磁场不仅随时间变化,而且还随空间位置变化,电磁波在电路中传播的滞后效应很显著。另外,由于频率高,传输线上的电感、电阻和线间的电容、电导都不能忽略,线上处处有储能和损耗,表现为线上各点的电压和电流不相同,它们不仅是时间的函数,也是传播距离的函数,即电路的参数是分布的。

7-4 为什么无损耗均匀传输线周围的电磁波属于 TEM 波? 高频传输线的参数 L_0 、 C_0 可应用在恒定磁场和静电场中所得的相应计算结果,对此应怎样理解?

答 因为构成无损耗均匀传输线的导体是理想导体,因此,导体内没有沿导体轴向的电场分量,即 $E_z = 0$, 所以根据电场切向分量必须连续的条件,传输线周围介质中也有 $E_z = 0$ 。又由于电流只有沿导线轴向的分量,这个电流在导线

周围介质中只产生横向磁场。因此,无损耗均匀传输线周围的电磁波只有横向分量,即传输的是 TEM 波。

设 TEM 波的电场和磁场为 \mathbf{E}_T 和 \mathbf{H}_T , 则导线周围介质中的电磁场方程为

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_T = \partial \mathbf{E}_T + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_T = 0 \quad (4)$$

把向量算子 ∇ 分为对横向坐标和纵向坐标的微分,即

$$\nabla = \nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (5)$$

把(5)式代入(1)式中,得

$$(\nabla_T + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z) \times \mathbf{E}_T = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial t}$$

上式中 $\nabla_T \times \mathbf{E}_T$ 为轴向分量,而等式右端仅有横向分量,根据矢量等式两边的分量应分别相等的原则,应有

$$\nabla_T \times \mathbf{E}_T = 0 \quad (6)$$

经同样的分析可知, \mathbf{H}_T 应满足

$$\nabla_T \times \mathbf{H}_T = 0 \quad (7)$$

将(5)式代入(3)式和(4)式中,有

$$\nabla_T \cdot \mathbf{E}_T = 0 \quad (8)$$

$$\nabla_T \cdot \mathbf{H}_T = 0 \quad (9)$$

上面的(6)~(8)式与二线传输线静态电磁场的基本方程完全相同。由于在同一系统中,静态场和 TEM 波又满足相同的边界条件,所以其解是完全相同的,即 TEM 波的电磁场在传输线横截面内的分布和静态场的分布完全一样。根据无损耗线周围 TEM 波的这一特点,可直接应用静态电磁场中所得的相应计算结果来计算高频传输线的参数 L_0 和 C_0 。

7-5 均匀传输线中的电压、电流的定义如何? 它们满足什么方程?

答 由思考题 7-4 的解答可知,无损耗均匀传输线周围的 TEM 波在横截面上的电磁场方程与静态场的基本方程相同,因此可以引入位函数,即

$$\mathbf{E}_T = -\nabla_T \varphi \quad \mathbf{B}_T = \nabla_T \times \mathbf{A}_z$$

且位函数满足拉普拉斯方程

$$\nabla_T^2 \varphi = 0, \quad \nabla_T^2 A_z = 0$$

由以上方程可以方便地把传输线系统的电压 U 与电场、电流 I 与磁场联系起

来。

在 z 等于定值的任一平面内, 定义导线 1 和导线 2 之间的电压为

$$U(z, t) = \int_2^1 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} = \int_2^1 (-\nabla_T \varphi) \cdot d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1$$

穿过两导体之间单位长度内的磁通为

$$\varphi_m = \oint_l \mathbf{A}_z \cdot d\mathbf{l} = A_{z2} - A_{z1} = \Delta z L_0 I(z, t)$$

因此对图示长度为 Δz 的双导体传输线有

$$\begin{aligned} U(z_2, t) - U(z_1, t) &= \oint_l \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\Delta z \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = -\Delta z L_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial U(z, t)}{\partial z} + L_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} = 0$$

把 $A_{z1}, A_{z2}, \varphi_1, \varphi_2$ 代入洛伦兹规范, 得

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial z} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial A_{z2}}{\partial z} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0$$

把上面两式相减, 并利用 $L_0 C_0 = \mu\epsilon$, 可得

$$\frac{\partial (A_{z2} - A_{z1})}{\partial z} + L_0 C_0 \frac{\partial (\varphi_2 - \varphi_1)}{\partial t} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{\partial I}{\partial z} + C_0 \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

综上所述, 无损耗均匀传输线中的电压、电流满足方程

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + C_0 \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

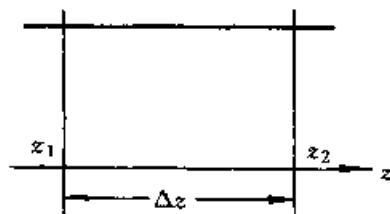
对有损耗均匀传输线, 考虑到传输线单位长度上导体电阻 R_0 上的附加电压和单位长度导体间介质漏电导 G_0 上的附加电流, 则传输线中的电压、电流满足方程

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} + R_0 I = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + C_0 \frac{\partial U}{\partial t} + G_0 U = 0$$

这就是均匀传输线方程的一般形式。

7-6 均匀传输线的原参数和副参数指的是什么? 写出无损耗线的传播常



思考题 7-5 图

数 k 和特性阻抗 Z_0 的表达式。

答 均匀传输线的原参数指的是传输线单位长度的电阻 R_0 、电导 G_0 、电感 L_0 和电容 C_0 ，副参数是指由 R_0 、 G_0 、 L_0 和 C_0 决定的传播常数 k 和特性阻抗 Z_0 。

均匀传输线的特性阻抗 Z_0 和传播常数 k 的表达式分别为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

$$k = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

对于无损耗线, 由于 $R_0 = G_0 = 0$, 故

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad k = j\omega \sqrt{L_0 C_0} = j\omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

7-7 在不同终端情况下, 写出无损耗传输线电压和电流的正弦稳态解。

答 无损耗传输线电压和电流的正弦稳态解的一般相量形式为

$$\begin{cases} U(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z} \\ I(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_0} e^{j\beta z} \end{cases}$$

式中的 \dot{U}^+ 和 \dot{U}^- 由传输线的终端或始端条件决定。

取传输线终端为坐标原点 $z = 0$, 则若已知终端电压 $U(0) = \dot{U}_2$ 和电流 $I(0) = \dot{I}_2$ 时, 沿线电压、电流分布的一般表示式为

$$\begin{aligned} \dot{U}(Z) &= \dot{U}_2 \cos \beta z - jZ_0 \dot{I}_2 \sin \beta z \\ \dot{I}(Z) &= \dot{I}_2 \cos \beta z - j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta z \end{aligned}$$

且有

$$\dot{U}_2 = Z_L \dot{I}_2$$

式中 $Z_L = R + jX$ 为终端负载。此时传输线工作在行驻波状态。在几种特殊的终端情况下, 如

(1) $Z_L = Z_0$, 传输线处于匹配状态, 则沿线电压和电流的分布为

$$\begin{aligned} \dot{U}(Z) &= Z_0 \dot{I}_2 \cos \beta z - jZ_0 \dot{I}_2 \sin \beta z \\ &= Z_0 \dot{I}_2 (\cos \beta z - j \sin \beta z) = Z_0 \dot{I}_2 e^{-j\beta z} \\ \dot{I}(z) &= \dot{I}_2 \cos \beta z - j \dot{I}_2 \sin \beta z = \dot{I}_2 e^{-j\beta z} \end{aligned}$$

其瞬时值为

$$\begin{aligned} U(z, t) &= \sqrt{2} Z_0 I_2 \cos(\omega t - \beta z + \theta_i) \\ I(z, t) &= \sqrt{2} I_2 \cos(\omega t - \beta z + \theta_i) \end{aligned}$$

即传输线的工作状态为行波状态。

(2) $Z_L = 0$, 传输线处于短路状态, 即 $\dot{U}_2 = 0$, 故电压、电流的正弦稳态解为

$$\dot{U}(z) = -jZ_0 I_2 \sin \beta z$$

$$\dot{I}(z) = I_2 \cos \beta z$$

其瞬时值为

$$U(z, t) = \sqrt{2} Z_0 I_2 \sin \beta z \cos(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$$

$$I(z, t) = \sqrt{2} I_2 \cos \beta z \cos(\omega t + \theta_i)$$

(3) $Z_L = \infty$, 传输线处于开路状态, 即 $I_2 = 0$, 故沿线电压、电流的解为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_2 \cos \beta z$$

$$\dot{I}(z) = -j \frac{\dot{U}_2}{Z_0} \sin \beta z$$

其瞬时值为

$$U(z, t) = \sqrt{2} U_2 \cos \beta z \cos(\omega t + \theta_u)$$

$$I(z, t) = \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_0} \sin \beta z \cos(\omega t + \theta_u - 90^\circ)$$

(4) $Z_L = jX$, 传输线接纯电抗负载, 沿线电压、电流的解为

$$\dot{U}(z) = jX I_2 \cos \beta z - jZ_0 I_2 \sin \beta z$$

$$= jI_2 (X \cos \beta z - Z_0 \sin \beta z)$$

$$\dot{I}(z) = I_2 \cos \beta z - j \frac{jX I_2}{Z_0} \sin \beta z$$

$$= \frac{I_2}{Z_0} (Z_0 \cos \beta z + X \sin \beta z)$$

其瞬时值为

$$U(z, t) = \sqrt{2} I_2 (X \cos \beta z - Z_0 \sin \beta z) \cos(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$$

$$I(z, t) = \sqrt{2} \frac{I_2}{Z_0} (Z_0 \cos \beta z + X \sin \beta z) \cos(\omega t + \theta_i)$$

显然当 $Z_L = 0, \infty, jX$ 时, 传输线工作在驻波状态。

7-8 何谓传输线的匹配? 无损耗线在匹配状态下, 沿线的电压、电流的分布及能量的传输各具有什么特点? 如何利用四分之一波长传输线实现匹配?

答 当传输线的终端负载阻抗等于其特性阻抗, 即 $Z_L = Z_0$ 时, 传输线工作在匹配状态。这时传输线上只有入射波, 没有反射波。沿线电压、电流的分布呈行波状态, 即

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} e^{-j\beta z}$$

其特点为:(1) 电压、电流的振幅沿线不变;(2) 同一 z 处的电压、电流同相位;(3) 线上的波是从波源到负载的单向行波;(4) 入射功率全被负载吸收,没有反射功率。因此,匹配状态是传输能量所希望的一种工作状态,此时传输功率为

$$P = \frac{(U^+)^2}{Z_0} = \frac{U_2^2}{Z_0}$$

若传输线的 $Z_L = R \neq Z_{01}$, 为了达到匹配, 可将特性阻抗为 Z_0 的 $\frac{\lambda}{4}$ 波长的无损耗线串联在主传输线(设其特性阻抗为 Z_{01})和负载 R 之间, 当满足关系

$$Z_0 = \sqrt{RZ_{01}}$$

时, 主传输线达到匹配。

若负载阻抗 $Z_L = R + jX$ 时, 可沿主传输线向左找一入端阻抗为实数的位置, 然后把 $\frac{\lambda}{4}$ 波长线接入该处, 就可达到匹配。

7-9 一般市里传输线用户是否可像高频传输线那样短路? 为什么? 当长度与波长可比拟时, 线路允许开路吗?

答 一般市电的频率为 50 Hz, 波长为 6 000 km, 电路通常是集中参数的, 因此用户不能将电路短路, 若短路将损坏电源和设备。当线路的波长和线路的长度可比拟时, 线路为分布参数的, 线路开路, 只改变沿线电压、电流分布。

7-10 入端阻抗 Z_{in} 是怎样定义的? 它和那些量有关? 它和特性阻抗有何差异? 什么情况下 $Z_{in} = Z_0$?

答 传输线的特性阻抗定义为线上行波电压和行波电流之比, 即

$$Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Z_0 是由传输线的结构尺寸、填充的媒质及工作频率所决定的量, 所以 Z_0 为传输线的特性参数。

传输线的入端阻抗定义为线上任一点的总电压与总电流之比, 常用的形式有

$$Z_{in} = \frac{U(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{Z_L \operatorname{ch} k_z + Z_0 \operatorname{sh} k_z}{Z_0 \operatorname{ch} k_z + Z_L \operatorname{sh} k_z} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{th} k_z}{Z_0 + Z_L \operatorname{th} k_z}$$

对于无损耗线, 上式变为

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta z}{Z_0 + jZ_L \tan \beta z}$$

显然, $Z_{in}(z)$ 不仅与传输线的结构尺寸、填充的媒质及工作频率有关, 而且与终端负载和计算点到终端的距离有关。因此, 传输线上各点的 Z_{in} 是不同的, 它随距离呈 $\frac{\lambda}{2}$ 周期性的变化。 Z_{in} 是传输线的工作参数。

综上所述传输线的人端阻抗和特性阻抗在定义、表达式及性质上都是不同的。但在传输线匹配状态下,由于 $Z_L = Z_0$,代入 $Z_{in}(z)$ 的表达式中,可得

$$Z_{in} = Z_0$$

7-11 当负载阻抗 Z_L 不等于特性阻抗 Z_0 时,可采用什么方法使无损耗传输线处于匹配工作状态?

答 (1) 当 $Z_L = R \neq Z_0$ 时,可在 R 和主传输线之间插入 $\frac{\lambda}{4}$ 阻抗变换器,其特性阻抗为 Z_{01} ,使得

$$Z_{01} = \sqrt{R \cdot Z_0}$$

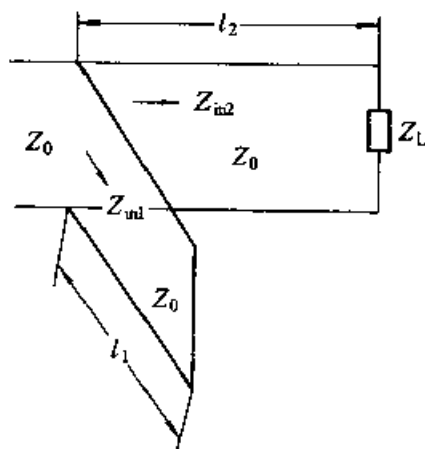
以达到匹配。

(2) 当 $Z_L = R + jX \neq Z_0$ 时,可用长度为 l_1 、特性阻抗为 Z_0 的单短截线和主传输线并联,如图所示,通过调节 l_1 和离负载的距离 l_2 ,使 AA' 处的人端阻抗满足关系

$$\frac{1}{Z_{AA'}} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{in1}} + \frac{1}{Z_{in2}}$$

以达到匹配。

单短截线匹配法在 Z_L 改变时,必须改变并接点的位置,这在实际操作时有一定的困难,一种替代的阻抗匹配方法是在主传输线上的固定点并入双短截线或多短截线。



思考题 7-11 图

7-12 一高频传输线(特性阻抗为 Z_0),线长为 $\frac{\lambda}{8}$,分别将其终端短路或开路,试问此时输入端阻抗 Z_{in} 是否分别为 $Z_{in} = 0$ 或 $Z_{in} = \infty$? 为什么?

答 无损耗传输线的人端阻抗为

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

当 $l = \frac{\lambda}{8}$, $Z_L = 0$ 时,有

$$Z_{in} = +jZ_0 \tan \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \right) = +jZ_0 \tan \frac{\pi}{4} = jZ_0$$

当 $Z_L = \infty$ 时,有

$$Z_{in} = -jZ_0 \cot \beta l = -jZ_0 \cot \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{8} \right) = -jZ_0$$

所以 $Z_{in} \neq 0$ 或 ∞ 。

7-13 若一无损耗线的长度为(a) $\lambda/4$, (b) $\frac{\lambda}{2}$, (c) $3\lambda/4$, 试问该线的人端阻抗。

(a) 当 $l = \frac{\lambda}{4}$ 时

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = 0$$

(b) 当 $l = \frac{\lambda}{2}$ 时

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \pi}{Z_0 + jZ_L \tan \pi} = Z_L = \infty$$

(c) 当 $l = \frac{3\lambda}{4}$ 时

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{3\pi}{2}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{3\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = 0$$

以上结果说明, 传输线的人端阻抗 Z_{in} 呈 $\frac{\lambda}{2}$ 周期变化。即阻抗具有 $\frac{\lambda}{2}$ 的还原性。

7-14 一条长度为 l 的无损耗传输线, 其特性阻抗与传播常数和该线的开路、短路之人端阻抗满足怎样的关系?

答 设长度为 l 的无损耗传输线的特性阻抗为 Z_0 , 则其开路时的人端阻抗为

$$Z_{ino} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = -jZ_0 \frac{1}{\tan \beta l}$$

短路时的人端阻抗为

$$Z_{ins} = jZ_0 \tan \beta l$$

所以有

$$Z_{ino} \cdot Z_{ins} = Z_0^2$$

即开路、短路之人端阻抗的乘积为特性阻抗的平方。

传输线的传播常数为

$$k = j\beta$$

而

$$\frac{Z_{ins}}{Z_{ino}} = \frac{jZ_0 \tan \beta l}{-jZ_0 \frac{1}{\tan \beta l}} = -(\tan \beta l)^2$$

因此, 可得传播常数 k 与 Z_{ino} 和 Z_{ins} 的关系为

$$k = j \frac{1}{l} \arctan \sqrt{-\frac{Z_{\text{ins}}}{Z_{\text{ino}}}}$$

7-15 什么是电压反射系数？它与电流反射系数相同吗？试解释之。

答 电压反射系数定义为反射波电压与入射波电压之比。由于传输线上任一点的电压、电流为

$$U(z) = U^+ e^{-j\beta z} + U^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

若给定终端 $z=0$ 处的电压 U_2 和电流 I_2 ，则有

$$U_2 = U^+ + U^-$$

$$I_2 = \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0}$$

联立求解，可得

$$U^+ = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} \quad U^- = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2}$$

所以沿线电压分布为

$$U(z) = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{-j\beta z} + \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2Z_0} e^{j\beta z}$$

根据上式可得电压反射系数

$$\Gamma(z) = \frac{U^-(z)}{U^+(z)} = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_2 + Z_0 I_2} e^{2j\beta z} = \Gamma_L e^{j\beta z}$$

式中

$$\Gamma_L = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_2 + Z_0 I_2} = \frac{\frac{U_2}{I_2} - Z_0}{\frac{U_2}{I_2} + Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L}$$

称为传输线终端或负载反射系数， φ_L 为 Γ_L 的幅角。

用同样的方法，可定义电流反射系数为

$$\Gamma_I(z) = \frac{I^-(z)}{I^+(z)} = -\frac{U_2 - Z_0 I_2}{U_2 + Z_0 I_2} e^{2j\beta z} = -\Gamma(z)$$

可见，电流反射系数与电压反射系数仅差一负号，一般只用电压反射系数，或简称反射系数。

7-16 无损耗均匀传输线上出现纯驻波的几种可能负载情况是什么？试列表归纳。

负载	反射系数	沿线电压分布	沿线阻抗分布
$Z_L = 0$	$\Gamma_L = -1$	$\dot{U}(z) = 2\dot{U}^+ \sin \beta z$	$Z_{in} = jZ_0 \tan \beta z$
$Z_L = \infty$	$\Gamma_L = 1$	$\dot{U}(z) = 2\dot{U}^+ \cos \beta z$	$Z_{in} = -jZ_0 \cot \beta z$
$Z_L = jX$	$ \Gamma_L = 1$	$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ (1 + e^{j(\varphi_L - 2\beta z)})$	$Z_{in} = jZ_0 \frac{X + Z_0 \tan \beta z}{Z_0 - X \tan \beta z}$

7-17 什么是驻波比？它与电压反射系数的关系如何？对一终端开路的无损传输线而言，反射系数和驻波比的值为多少？对一终端短路的无损传输线其值又为多少？

答 一般情况下，传输线上存在入射波和反射波，它们相互干涉形成驻波。入射波与反射波同相叠加得电压最大值，反相叠加得电压最小值。传输线上电压最大值与电压最小值之比，称为电压驻波系数或电压驻波比，简称驻波比，用 S 表示。

由驻波比的定义可得它与电压反射系数的关系为

$$S = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{|\dot{U}^+| + |\dot{U}^-|}{|\dot{U}^+| - |\dot{U}^-|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

当传输线终端开路 and 短路时，有 $|\Gamma| = 1$ ，因此，驻波比

$$S = \infty$$

7-18 接有电阻负载的无损传输线，若 (a) $R_L > Z_0$ ，(b) $R_L < Z_0$ ，试问电压波的最小值在线上出现的位置。

答 传输线终端电压为

$$\dot{U}(0) = \dot{U}^+ (1 + \Gamma_L)$$

当负载为纯电阻时，终端反射系数 Γ_L 为实数，有

$$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$$

因此

(a) 当 $R_L > Z_0$ 时，有 $\Gamma_L > 0$ ，可得

$$\dot{U}(0) = \dot{U}^+ (1 + \Gamma_L) = \dot{U}_{\max}$$

即传输线终端为电压最大点，离终端 $\frac{\lambda}{4}$ 处将出现电压最小值， U_{\min} 沿线出现的位置为 $(\frac{\lambda}{4} + \frac{n\lambda}{2})$ ($n=0, 1, 2$)。

(b) 当 $R_L < Z_0$ 时，有 $\Gamma_L < 0$ ，可得

$$\dot{U}(0) = \dot{U}^+ (1 - |\Gamma_L|) = \dot{U}_{\min}$$

即传输线终端为电压最小点，因此离终端每隔 $\frac{\lambda}{2}$ 的位置为电压波的最小值处。

7-19 试叙述如何通过测量无损耗线上的驻波比,来求出该线之负载阻抗的值。

答 根据电压表的最大和最小读数计算出驻波比 $S = U_{\max}/U_{\min}$, 继而算出反射系数的绝对值

$$|\Gamma_L| = \frac{S-1}{S+1}$$

测量传输线上相邻两个电压最小值读数之间的距离 $|\Delta z|$, 可得出波长 $\lambda = 2|\Delta z|$, 继而算出频率

$$f = v/\lambda$$

由线上电压分布

$$\begin{aligned} U(z) &= \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \Gamma_L \dot{U}^+ e^{j\beta z} \\ &= \dot{U}^+ e^{-j\beta z} (1 + |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} e^{j2\beta z}) \end{aligned}$$

看出, 当

$$2\beta z + \varphi_L = 0, \quad \text{即 } z = -\frac{\varphi_L}{2\beta} = -\frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L$$

时, 该处出现距终端最近的第一个电压最大值, 显然负载端与出现第一个电压最小值处的距离为

$$|z|_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4}$$

因此, 通过测量 $|z|_{\max}$ 或 $|z|_{\min}$ 的值, 可计算出负载端反射系数的幅角 φ_L , 最后得

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| e^{j\varphi_L}$$

而负载阻抗为

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

7-20 当一传输线的 R_0 和 G_0 都小, 但不能忽略时, 证明衰减常数是

$$\alpha \approx \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

相位常数是

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

证明 当一传输线的 R_0 和 G_0 都小, 或频率较高, 满足 $R_0 \ll \omega L_0$ 和 $G_0 \ll \omega C_0$ 时, 称其为低损耗传输线, 其传播常数为

$$\begin{aligned} k &= \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \\ &= j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{R_0}{j\omega L_0}\right) \left(1 + \frac{G_0}{j\omega C_0}\right)} \end{aligned}$$

$$\approx j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left(1 + \frac{R_0}{j\omega L_0}\right) \left(1 + \frac{G_0}{j\omega C_0}\right)$$

所以有

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \left(R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}$$

7-21 何谓无畸变线? 无畸变条件是什么?

答 一般有损耗传输线的 α 和 β 都是传输线分布参数和频率的复杂函数。因此,当非正弦信号在这样的传输线上传播时,必然引起信号的畸变(或失真)。但是,如果能使衰减常数 α 不是频率的函数,而是一个常量,相位常数 β 与 ω 成正比,即 k 具有如下形式

$$k = \alpha + j\beta = \alpha + j\omega K$$

式中 α 和 K 都与 ω 无关,就可以消除传输线上由 α 和 β 引起的振幅畸变和相位畸变。没有信号畸变的传输线称为无畸变线。由传播常数 k 的表达式

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \\ &= \sqrt{R_0 G_0} \sqrt{\left(1 + \frac{j\omega L_0}{R_0}\right) \left(1 + \frac{j\omega C_0}{G_0}\right)} \end{aligned}$$

可知,如满足

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$$

则有

$$k = \sqrt{R_0 G_0} \left(1 + \frac{j\omega L_0}{R_0}\right)$$

即 $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ 与 ω 无关, $\beta = \omega \sqrt{R_0 G_0} \frac{L_0}{R_0} = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ 与 ω 成正比。因此,称

$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$ 为无畸变条件。

注意,无损耗传输线一定是无畸变线。

习 题

7-1 利用传输线的入端电压 \dot{U}_1 和电流 \dot{I}_1 及传输线的 k 和 Z_{01} 分别(1)以指数形式,(2)双曲线形式,表示出 $U(z)$ 及 $I(z)$ 。

解 (1) 传输线沿线电压、电流的复数表达式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-kz} + \dot{U}^- e^{kz}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} (\dot{U}^+ e^{-kz} - \dot{U}^- e^{kz})$$

取传输线终端为坐标原点, 则当 $z = -l$ 时 $\dot{U}(-l) = \dot{U}_1$, $I(-l) = I_1$, 代入以上两式, 有

$$\dot{U}_1 = \dot{U}^+ e^{kl} + \dot{U}^- e^{-kl}$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0} [\dot{U}^+ e^{kl} - \dot{U}^- e^{-kl}]$$

从上述两式解出 \dot{U}^+ , \dot{U}^- , 有

$$\dot{U}^+ = (\dot{U}_1 + I_1 Z_0) \frac{e^{-kl}}{2}$$

$$\dot{U}^- = (\dot{U}_1 - I_1 Z_0) \frac{e^{kl}}{2}$$

把 \dot{U}^+ , \dot{U}^- 代入 $\dot{U}(z)$, $I(z)$ 表达式中, 得其指数形式为

$$\dot{U}(z) = \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_0}{2} e^{-k(l+z)} + \frac{\dot{U}_1 - I_1 Z_0}{2} e^{k(l+z)}$$

$$I(z) = \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_0}{2Z_0} e^{-k(l+z)} + \frac{\dot{U}_1 - I_1 Z_0}{2Z_0} e^{k(l+z)}$$

(2) 把 $\dot{U}(z)$, $I(z)$ 的指数形式加以整理, 可得双曲线形式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \operatorname{ch} k(l+z) - I_1 Z_0 \operatorname{sh} k(l+z)$$

$$I(z) = I_1 \operatorname{ch} k(l+z) - \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \operatorname{sh} k(l+z)$$

若设传输线始端为坐标零点, 采用同样的推导方式, 可得传输线沿线 $\dot{U}(z)$, $I(z)$ 的指数形式为

$$\dot{U}(z) = \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_0}{2} e^{-kz} + \frac{\dot{U}_1 - I_1 Z_0}{2} e^{kz}$$

$$I(z) = \frac{\dot{U}_1 + I_1 Z_0}{2Z_0} e^{-kz} - \frac{\dot{U}_1 - I_1 Z_0}{2Z_0} e^{kz}$$

双曲线形式为 $\dot{U}(z) = \dot{U}_1 \operatorname{ch} kz - I_1 Z_0 \operatorname{sh} kz$

$$I(z) = I_1 \operatorname{ch} kz - \frac{\dot{U}_1}{Z_0} \operatorname{sh} kz$$

7-2 已知一双线无损耗传输线的线间距 $D = 8 \text{ cm}$, 导线直径为 $d = 1 \text{ cm}$, 传输线的周围介质为空气。试计算:

(1) 单位长度电感和单位长度电容;

(2) 当 $f = 600 \text{ MHz}$ 时的特性阻抗和相位常数。

解 (1) 应用静电场的结果, 两线传输线间的电压近似为

$$U = \frac{\tau}{\pi \epsilon} \ln \frac{D - R}{R}$$

所以传输线单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{D-R}{R}} = \frac{\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}{\ln \frac{8-0.5}{0.5}} = 10.27 \text{ pF/m}$$

由 $L_0 C_0 = \mu\epsilon$, 得单位长度的电感为

$$L_0 = \frac{\mu\epsilon}{C_0} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12}}{10.27 \times 10^{-12}} = 1.08 \text{ mH/m}$$

(2) 传输线的特性阻抗为

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C_0} = \frac{1}{v C_0} \\ &= \frac{1}{3 \times 10^8 \times 10.27 \times 10^{-12}} = 324.57 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

$$\text{相位常数 } \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 6 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 4\pi \text{ rad/m}$$

7-3 计算外导体半径 $b=23 \text{ cm}$, 内导体半径 $a=10 \text{ cm}$, 填充介质分别为空气和 $\epsilon_r=2.25$ 介质时的同轴线的特性阻抗。

解 应用静电场的计算结果, 同轴传输线内外导体间的电压为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_\rho d\rho = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} d\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

当介质为空气时

$$C_0 = \frac{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12}}{\ln \frac{23}{10}} = 66.76 \text{ pF/m}$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\sqrt{L_0 C_0}}{C_0} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{C_0} = \frac{1}{v C_0} = \frac{1}{3 \times 10^8 \times 66.76 \times 10^{-12}} \\ &= 49.93 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

当填充 $\epsilon_r=2.25$ 的介质时, 有

$$C_0 = 66.76 \times 2.25 = 150.21 \text{ pF/m}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{2.25}}{C_0 v} = \sqrt{2.25} \frac{1}{3 \times 10^8 \times 150.21 \times 10^{-12}} = 33.29 \text{ } \Omega$$

7-4 一无损耗线的特性阻抗 $Z_0 = 70 \text{ } \Omega$, 终端接负载阻抗 $Z_L = (100 - j50) \text{ } \Omega$, 求:

(1) 传输线上的反射系数 Γ_Z ;

(2) 传输线上的电压、电流表示式;

(3) 距线上终端第一个电压波节和电压波腹的距离 z_{\min} 和 z_{\max} ;

(4) 画出传输线上电压、电流的振幅分布。

解 (1) 传输线终端反射系数为

$$\begin{aligned}\dot{F}_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{100 - j50 - 70}{100 - j50 + 70} = \frac{30 - j50}{170 - j50} \\ &= 0.33 \angle -42.65^\circ\end{aligned}$$

沿线的反射系数为

$$\dot{F}_Z = |\dot{F}_L| e^{j(2\beta z + \varphi_L)} = 0.33 e^{j(2\beta z - 42.65^\circ)}$$

(2) 传输线上电压、电流的复数形式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z} = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} (1 + \dot{F}_Z)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} [\dot{U}^+ e^{-j\beta z} - \dot{U}^- e^{j\beta z}] = \frac{\dot{U}^+ e^{-j\beta z}}{Z_0} (1 - \dot{F}_Z)$$

(3) 因为 $\varphi_L = -42.65^\circ < 0$, 传输线上距终端最近的是电压最小点, 有

$$z_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{-42.65}{180} + 1 \right) = 0.191\lambda$$

距终端第一个电压最大点的位置为

$$z_{\max} = z_{\min} + \frac{\lambda}{4} = 0.191\lambda + 0.25\lambda = 0.441\lambda$$

(4) 沿线电压最大值和最小值分别为

$$U_{\max} = |\dot{U}^+| (1 + |\dot{F}_Z|) = 1.33 |\dot{U}^+|$$

$$U_{\min} = |\dot{U}^+| (1 - |\dot{F}_Z|) = 0.67 |\dot{U}^+|$$

在 $z=0$ 处 $\dot{U}(0) = \dot{U}^+ (1 + \dot{F}_L) = \dot{U}^+ (1 + 0.33 \angle -42.65^\circ)$

$$= \dot{U}^+ (1.26 \angle -10.2^\circ)$$

即

$$|\dot{U}(0)| = 1.26 |\dot{U}^+|$$

$$\dot{I}(0) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} (1 - \dot{F}_L) = \frac{\dot{U}^+}{Z_0} (1 - 0.33 \angle -42.65^\circ)$$

$$= 0.78 \frac{\dot{U}^+}{Z_0} \angle -16.45^\circ = 0.011 \dot{U}^+ \angle -16.45^\circ$$

即

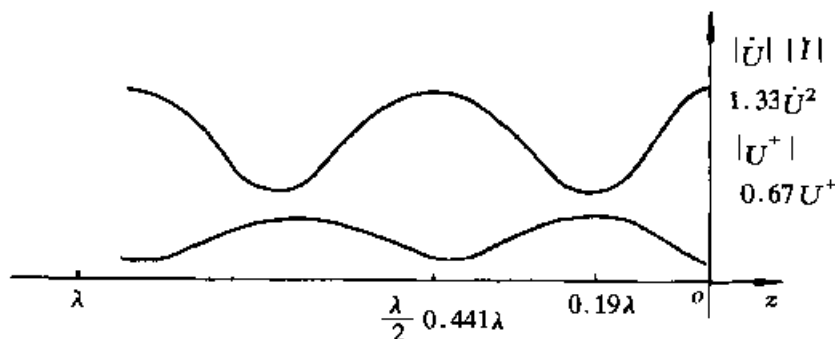
$$|\dot{I}(0)| = 0.011 |\dot{U}^+|$$

沿线电流的最大和最小值为

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_0} = 0.019 |\dot{U}^+|$$

$$I_{\min} = \frac{U_{\min}}{Z_0} = 0.01 |\dot{U}^+|$$

根据以上的计算数据,绘出沿线电压、电流的振幅分布如题 7-4 图所示。



题 7-4 图

7-5 一无损耗的 $\lambda/4$ 传输线,特性阻抗为 Z_0 ,一端被接以一感性负载 $Z_L = R_L + jX_L$ 。

(1) 证明其入端阻抗相当于一个电阻 R_i 和一个电容 X_i 的并联;

(2) 求出输入端与负载端的电压大小的比值。

解 入端阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = Z_0 \frac{R_L + jX_L + jZ_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + j(R_L + jX_L) \tan \frac{\pi}{2}} \\ &= j \frac{Z_0^2}{j(R_L + jX_L)} \end{aligned}$$

因此
$$\frac{1}{Z_{in}} = \frac{R_L}{Z_0^2} + j \frac{X_L}{Z_0^2} = G_i + jX_i$$

上式表明, Z_{in} 相当于一个电阻 $R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{Z_0^2}{R_L}$ 和一个容抗 $\omega C = X_i = \frac{Z_0^2}{X_L}$ 的并联。

(2) 沿线电压、电流的分布为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{1}{Z_0} (\dot{U}^+ e^{-j\beta z} - \dot{U}^- e^{j\beta z})$$

在负载端, 设 $z=0$, 有

$$\dot{U}(0) = \dot{U}^+ + \dot{U}^-$$

$$\dot{I}(0) = (\dot{U}^+ - \dot{U}^-) \frac{1}{Z_0}$$

$$Z_L = \frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)} = Z_0 \frac{\dot{U}^+ + \dot{U}^-}{\dot{U}^+ - \dot{U}^-}$$

在传输线始端 $z = -\frac{\lambda}{4}$ 处,

$$U_1 = \dot{U}^+ e^{j\frac{\pi}{2}} + \dot{U}^- e^{-j\frac{\pi}{2}} = j(\dot{U}^+ - \dot{U}^-)$$

所以传输线输入端与负载端的电压大小的比值为

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_1}{U(0)} \right| &= \left| \frac{\dot{U}^+ - \dot{U}^-}{\dot{U}^+ + \dot{U}^-} \right| = \left| \frac{Z_0}{Z_L} \right| = \left| \frac{Z_0}{R_L + jX_L} \right| \\ &= \frac{Z_0}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}} \end{aligned}$$

7-6 一无损耗传输线,接有负载 $Z_L = (40 + j30) \Omega$,求:

(1) 此线特性阻抗为多少时沿线有最小驻波比;

(2) 最小驻波比对应的电压反射系数;

(3) 离负载最近的最小电压发生处。

解 (1) 传输线上的驻波比为

$$S = \frac{1 + |\dot{\Gamma}_L|}{1 - |\dot{\Gamma}_L|}$$

而终端反射系数

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{40 - Z_0 + j30}{40 + Z_0 + j30}$$

$$|\dot{\Gamma}_L| = \left(\frac{(40 - Z_0)^2 + 30^2}{(40 + Z_0)^2 + 30^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

因此驻波比 S 是特性阻抗 Z_0 的函数。把 S 对 Z_0 求导,有

$$S' = \frac{2|\dot{\Gamma}_L|'}{(1 - |\dot{\Gamma}_L|)^2}$$

当 $S' = 0$; 即 $|\dot{\Gamma}_L|' = 0$ 时, S 有极小值点。而 $|\dot{\Gamma}_L|' = 0$ 时, 有 $Z_0 = 50 \Omega$ 。此时,

$$|\dot{\Gamma}_L| = \left[\frac{(40 - 50)^2 + 30^2}{(40 + 50)^2 + 30^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

最小驻波比
$$S = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

(2) 最小驻波比对应的 $Z_0 = 50 \Omega$, 所以对应的反射系数为

$$\dot{\Gamma}_L = \frac{40 - 50 + j30}{40 + 50 + j30} = \frac{1}{3}j$$

(3) 离负载最近的最小电压发生处为

$$|z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4\pi} \times \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{8} \lambda$$

7-7 一无损耗传输线,特性阻抗为 Z_0 ,一端接一负载 Z_L 。

(1) 以 Z_0, Z_L 表示出驻波比 S ;

- (2) 求从最大电压处看向负载的入端阻抗,以 S 和 Z_0 表示;
 (3) 求从最小电压处看向负载的入端阻抗,以 S 和 Z_0 表示。

$$\text{解 (1) 驻波比 } S = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = \frac{1 + \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right|}{1 - \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right|}$$

$$= \frac{|Z_L + Z_0| + |Z_L - Z_0|}{|Z_L + Z_0| - |Z_L - Z_0|}$$

- (2) 离负载最近的最大电压发生处的坐标为(以终端为 $z=0$)

$$|Z_{\max}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L, \text{ 即 } Z_{\max} = -\frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L$$

最大电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\max} &= \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z} = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma_L e^{2j\beta z}) \\ &= \dot{U}^+ e^{-j\beta z_{\max}} (1 + |\Gamma_L| e^{j\varphi_L} e^{-j2z \times \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L}) \\ &= \dot{U}^+ e^{-j\beta z_{\max}} (1 + |\Gamma_L|) \end{aligned}$$

在最大电压处对应的电流为最小的电流,有

$$\dot{I}_{\min} = \frac{1}{Z_0} (\dot{U}^+ e^{-j\beta z} - \dot{U}^- e^{j\beta z}) = \frac{1}{Z_0} e^{-j\beta z_{\max}} (1 - |\Gamma_L|)$$

则该点的入端阻抗为

$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_{\max}}{\dot{I}_{\min}} = Z_0 \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = Z_0 S$$

因为传输线的入端阻抗是周期函数,每隔 $\lambda/2$ 重复出现,即周期是 $\lambda/2$,而传输线上电压最大点的距离也是 $\lambda/2$,因此从最大电压处看向负载的入端阻抗均为 $Z_0 S$ 。

- (3) 同理可知,传输线上最小电压和最大电流分别为

$$\dot{U}_{\min} = \dot{U}^+ e^{-j\beta z_{\min}} (1 - |\Gamma_L|)$$

$$\dot{I}_{\max} = \frac{1}{Z_0} \dot{U}^+ e^{-j\beta z_{\min}} (1 + |\Gamma_L|)$$

式中 $|z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4}$, 即 $z_{\min} = -\frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L - \frac{\lambda}{4}$

所以从最小电压处看向负载的入端阻抗为

$$Z_{\text{in}} = \frac{\dot{U}_{\min}}{\dot{I}_{\max}} = Z_0 \frac{1 - |\Gamma_L|}{1 + |\Gamma_L|} = \frac{Z_0}{S}$$

以上结果说明,传输线上最大电压和最小电压处的入端阻抗均为一个纯电阻。因此,当负载为纯电阻时,负载端一定是最大或最小电压。

7-8 已知传输线在 1 GHz 时的分布参数为: $R_0 = 10.4 \Omega/\text{m}$; $C_0 = 8.35 \times$

10^{-12} F/m ; $L_0 = 1.33 \times 10^{-6} \text{ H/m}$; $G_0 = 0.8 \times 10^{-6} \text{ S/m}$ 。试求传输线的特性阻抗、衰减常数、相位常数、传输线上的波长及传播速度。

解 因为 $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9$

所以有 $\omega L_0 \gg R_0$; $\omega C_0 \gg G_0$

此线为低损耗传输线,其特性阻抗近似为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{1.33 \times 10^{-6}}{8.35 \times 10^{-12}}} = 399.1 \quad \Omega$$

衰减常数

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left[R_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + G_0 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{Z_0} + G_0 Z_0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10.4}{399.1} + 0.8 \times 10^{-6} \times 399.1 \right) = 1.32 \times 10^{-2} \quad \text{NP/m} \end{aligned}$$

相位常数

$$\begin{aligned} \beta &= \omega \sqrt{L_0 C_0} = 2\pi \times 10^9 \sqrt{1.33 \times 10^{-6} \times 8.35 \times 10^{-12}} \\ &= 20.94 \quad \text{rad/m} \end{aligned}$$

传播速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{1.33 \times 10^{-6} \times 8.35 \times 10^{-12}}} \\ &= 3 \times 10^8 \quad \text{m/s} \end{aligned}$$

波长 $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^9} = 0.3 \quad \text{m}$

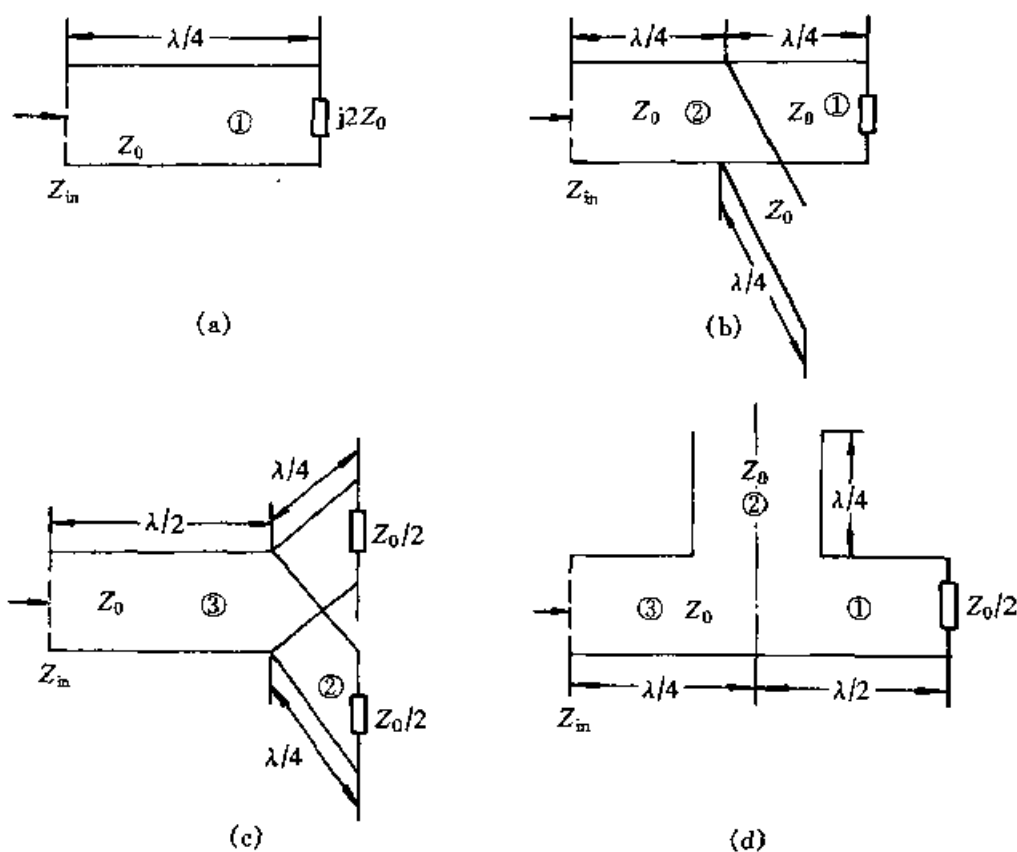
7-9 求题 7-9 图所示分布参数的传输线的人端阻抗。

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4}} \\ &= \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{Z_0^2}{j2Z_0} = -j \frac{Z_0}{2} \end{aligned}$$

以上解答说明, $1/4$ 波长传输线的人端阻抗与特性阻抗的平方成正比, 与负载阻抗成反比, 因此若 Z_L 大, Z_{in} 则小; Z_L 小, Z_{in} 则大。 Z_L 为感性负载, Z_{in} 则为容性, Z_L 为容性负载, Z_{in} 则为感性。 $1/4$ 波长传输线的这一特点可被用来做阻抗变换器。

(b) 图示传输线可以看成是由三段传输线联接而成。从连接点处向右端看去, 传输线①的人端阻抗为(应用(a)中的结果)

$$Z_{in1} = \frac{Z_0^2}{Z_{L1}} = \frac{Z_0^2}{Z_0} = Z_0$$



题 7-9 图

传输线②的入端阻抗为 $Z_{in2} = \frac{Z_0^2}{Z_{L2}} = \frac{Z_0^2}{\infty} = 0$

传输线③的负载可以看成是 Z_{in1} 和 Z_{in2} 的并联, 即

$$Z_{L3} = \frac{Z_{in1} Z_{in2}}{Z_{in1} + Z_{in2}} = 0$$

所以传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_{L3}} = \infty$$

(c) 采用与(b)中同样的解法, 有

$$Z_{in1} = \frac{Z_0^2}{Z_{L1}} = \frac{Z_0^2}{\frac{Z_0}{2}} = 2Z_0$$

$$Z_{in2} = \frac{Z_0^2}{Z_{L2}} = 2Z_0$$

$$Z_{L3} = \frac{Z_{in1} Z_{in2}}{Z_{in1} + Z_{in2}} = Z_0$$

由于 $Z_{L3} = Z_0$, 所以传输线③处于匹配状态, 故沿线任一点处的入端阻抗等于特性阻抗, 即

$$Z_{in} = Z_0$$

(d) 传输线①和②为串联。传输线①的入端阻抗为

$$Z_{in1} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}}{Z_0 + jZ_L \tan \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}} = Z_{L1} = \frac{Z_0}{2}$$

以上结果表明, $1/2$ 波长的传输线, 其入端阻抗就等于负载阻抗, 这也反映了传输线阻抗分布呈 $\lambda/2$ 周期变化的特点。传输线②的入端阻抗为

$$Z_{in2} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = 0$$

所以

$$Z_{L3} = Z_{in1} + Z_{in2} = Z_L = \frac{Z_0}{2}$$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_{L3}} = \frac{Z_0^2}{\frac{Z_0}{2}} = 2Z_0$$

7-10 有一段特性阻抗为 $Z_0 = 500 \Omega$ 的无损耗传输线, 当其终端短路时, 测得始端的入端阻抗为 250Ω 的感抗, 求该传输线的长度。如果该线的终端为开路, 长度又该为多少?

解 传输线终端短路时, 其入端阻抗为

$$Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$$

代入 $Z_{in} = j250 \Omega$, 有

$$\tan \beta l = \frac{Z_{in}}{jZ_0} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$$

所以传输线的长度为

$$l = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2\pi} \times 0.148\pi = 7.4 \times 10^{-2} \lambda$$

传输线开路时的入端阻抗为

$$Z_{in} = -jZ_0 \cot \beta l$$

所以

$$\cot \beta l = \frac{Z_{in}}{-jZ_0} = \frac{250}{-500} = -\frac{1}{2}$$

传输线的长度为

$$l = \frac{1}{\beta} \operatorname{arccot}(-\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{2\pi} \times 0.648\pi = 0.324\lambda$$

7-11 把一电压为 $V(t) = (10 \cos 8000\pi t) \text{ V}$, 内阻抗 $Z_g = (40 + j30) \Omega$ 的电源接到一特性阻抗为 50Ω 的无畸变传输线上, 此线长 50 km , 单位长度的电

阻为 $0.5 \Omega/\text{m}$, 单位长度的电感为 $1.11 \times 10^{-2} \text{ H/m}$, 另一端为匹配负载。求:

- (1) 线上各点的瞬时电压和电流;
- (2) 负载端的瞬时电压和电流;
- (3) 传至负载的平均功率。

解 (1) 由于传输线是无畸变线, 根据无畸变条件 $\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$, 得特性阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

所以传输线单位长度的电导为

$$G_0 = \frac{R_0}{Z_0^2} = \frac{0.5}{50^2} = 2 \times 10^{-4} \text{ S/m}$$

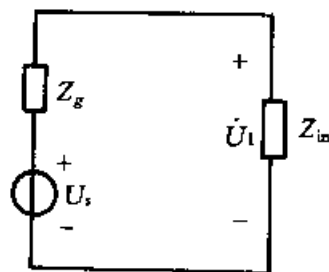
衰减常数为

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{0.5 \times 2 \times 10^{-4}} = 10^{-2} \text{ NP/m}$$

$$\begin{aligned} \text{相位常数 } \beta &= \omega \sqrt{L_0 C_0} = \omega L_0 \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} = 8000\pi \times 1.11 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-4}}{0.5}} \\ &= 5.58 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

因为传输线接的是匹配负载 $Z_L = Z_0$, 所以传输线输入端的入端阻抗 $Z_{\text{in}} = Z_0 = Z_L$, 则输入端的电压为 (见图 7-11 图)

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_s Z_{\text{in}}}{Z_g + Z_{\text{in}}} = \frac{\frac{10}{\sqrt{2}} \times 50}{40 + j30 + 50} \\ &= \frac{5.27}{\sqrt{2}} \angle -18.43^\circ \end{aligned}$$



题 7-11 图

传输线匹配时, $\dot{U}_1 = \dot{U}^+$, $\dot{U}^- = 0$, 所以线上各点的瞬时电压和电流分别为

$$U(z, t) = 5.27 e^{-0.01z} \cos(8000\pi t - 5.58z - 18.43^\circ) \text{ V}$$

$$I(z, t) = \frac{U(z, t)}{Z_0} = 10.54 \times 10^{-2} e^{-0.01z} \cos(8000\pi t - 5.58z - 18.43^\circ) \text{ A}$$

(2) 把 $z = l = 50 \times 10^3 \text{ m}$ 代入上述 $U(z, t)$ 和 $I(z, t)$ 中, 得负载端的瞬时电压和电流值为

$$\begin{aligned} U(50000, t) &= 5.27 \times e^{-500} \cos(8000\pi t - 5.58 \times 50 \times 10^3 - 18.43^\circ) \\ &= 0 \text{ V} \end{aligned}$$

$$I(50000, t) = 0 \text{ A}$$

即电磁波已衰减完。

(3) 传至负载的平均功率为

$$P = UI \cos \varphi = 5.27 \times 10.54 \times 10^{-2} e^{-2 \times 500} / 2 \\ \approx 0.28 e^{-1000} \approx 0 \text{ W}$$

7-12 一特性阻抗为 300Ω 的无损耗传输线, 一端接一未知负载, 驻波比为 2, 距负载 0.3λ 为最接近负载的最小值电压。求:

(1) 负载处的反射系数;

(2) 未知负载 Z_L ;

(3) 若将 Z_L 拿掉换一电阻, 问电阻值及离电阻多少距离处其入端阻抗等于 Z_L ?

解 (1) 负载处的反射系数的模值为

$$|\Gamma_L| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

根据

$$|Z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = 0.3\lambda$$

解得

$$\varphi_L = (0.3\lambda - \frac{\lambda}{4}) \frac{4\pi}{\lambda} = 0.2\pi$$

最后得

$$\Gamma_L = \frac{1}{3} \angle 0.2\pi = \frac{1}{3} \angle 36^\circ = 0.27 + j0.20$$

(2) 由于反射系数与负载 Z_L 满足关系式

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

所以有

$$Z_L = \frac{(1 + \Gamma_L)Z_0}{1 - \Gamma_L} = 300 \times \frac{1 + 0.27 + j0.2}{1 - 0.27 - j0.2} \\ = 509.57 \angle 24.27^\circ = 464.57 + j209.45 \Omega$$

(3) 由于传输线上电压最小点处的入端阻抗为一纯电阻, 其值为

$$R = \frac{Z_0}{S} = \frac{300}{2} = 150 (\Omega)$$

又根据传输线长度每增加 $1/2$ 波长, 入端阻抗 Z_{in} 重复出现一次, 因此负载阻抗可看成是与 R 相距 $\frac{\lambda}{2} - Z_{\min}$ 的入端阻抗, 见题 7-12 图所示。即当负载为 150Ω 的电阻时, 离负载

$$z = \frac{\lambda}{2} - z_{\min} = \frac{\lambda}{2} - 0.3\lambda \\ = 0.2\lambda$$

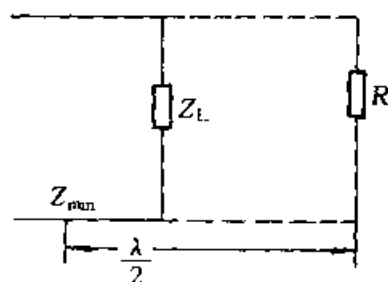
处有 $Z_{in} = Z_L$ 。

上述结论给出 Z_L 的又一计算方法, 即

$$Z_L = Z_0 \frac{R + jZ_0 \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - Z_{\min})}{Z_0 + jR \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - Z_{\min})}$$

$$= 300 \times \frac{150 + j300 \tan 0.4\pi}{300 + j150 \tan 0.4\pi} = 509.7 \angle 23.79^\circ$$

(2)和(3)中 Z_L 的值不相同是由计算误差引起。



题 7-12 图

7-13 实验中将一特性阻抗为 50Ω 的无损耗传输线接一未知负载阻抗,测得驻波比为 2.0,两最小电压值出现的间隔为 25 cm,且最小电压出现处与负载间的最短距离为 5 cm。求

- (1) Z_L ;
- (2) 反射系数;
- (3) 若终端短路,则最小电压值与终端之间的最短距离为多少?

解 (1) 应用 7-12(3)中的解法。最小电压处的人端电阻为

$$R = \frac{Z_0}{S} = \frac{50}{2} = 25 \Omega$$

所以负载阻抗为

$$Z_L = Z_0 \frac{R + jZ \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - Z_{\min})}{Z_0 + jR \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - Z_{\min})}$$

代入 $Z_{\min} = 5 \text{ cm}$, $\lambda = 2 \times 25 = 50 \text{ cm}$, 有

$$Z_L = 50 \frac{25 + j50 \tan 144^\circ}{50 + j25 \tan 144^\circ} = 50 \frac{1 + j2 \times (-0.73)}{2 + j(-0.73)}$$

$$= 41.45 \angle -35.5^\circ = 33.75 - 24.07j \Omega$$

$$(2) \text{ 反射系数 } \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\text{或 } |\Gamma_L| = \frac{S - 1}{S + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{由 } |Z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{10} = 5 \text{ cm}$$

$$\text{有 } \varphi_L = (\frac{\lambda}{10} - \frac{\lambda}{4}) \frac{4\pi}{\lambda} = -0.6\pi$$

$$\text{所以 } \Gamma_L = \frac{1}{3} \angle -0.6\pi = \frac{1}{3} \angle -108^\circ$$

(3) 若终端短路, 则终端为电压最小点, 离终端最近的最小电压处距终端的距离为 $\lambda/2$, 即

$$Z_{\min} = \frac{\lambda}{2} = 25 \text{ cm}$$

7-14 设有一无损耗传输线, 其特性阻抗为 Z_0 , 当其终端接有阻抗 Z_2 时, 测得线上的驻波系数为 S , 由负载到第一个电压波节点距离为 l_{\min} 。试证明负载 Z_2 可由下式计算

$$Z_2 = Z_0 \frac{S - j(S^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi}{S^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

式中, $\varphi = \beta l_{\min} = \frac{2\pi}{\lambda} l_{\min}$ 。

证明 因为终端反射系数的模值为

$$|\Gamma_L| = \frac{S-1}{S+1}$$

由 $|Z_{\min}| = l_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi}\varphi_L + \frac{\lambda}{4}$

得 $\varphi_L = (l_{\min} - \frac{\lambda}{4})\frac{4\pi}{\lambda} = 2\beta l_{\min} - \pi$

所以有 $\Gamma_L = \frac{S-1}{S+1}e^{j(2\beta l_{\min} - \pi)} = -\frac{S-1}{S+1}e^{j2\beta l_{\min}}$
 $= -\frac{S-1}{S+1}e^{j2\varphi}$

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} = Z_0 \frac{1 - \frac{S-1}{S+1}e^{j2\varphi}}{1 + \frac{S-1}{S+1}e^{j2\varphi}} \\ &= Z_0 \frac{(S+1)e^{-j\varphi} - (S-1)e^{j\varphi}}{(S+1)e^{-j\varphi} + (S-1)e^{j\varphi}} \\ &= Z_0 \frac{\cos\varphi - jS\sin\varphi}{S\cos\varphi - j\sin\varphi} = Z_0 \frac{(\cos\varphi - jS\sin\varphi)(S\cos\varphi + j\sin\varphi)}{S^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \\ &= Z_0 \frac{S - j(S^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi}{S^2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \end{aligned}$$

7-15 一无损耗线分别接有不同负载时, 在线上都要产生驻波, 设第一个 U_{\min} (即波节) 分别位于

- (1) 负载端;
- (2) 离负载 $\lambda/4$ 处;
- (3) 离负载 $\lambda/4$ 距离之间;
- (4) $\lambda/4$ 和 $\lambda/2$ 之间

试说明不同状态下的负载各具有什么特点(如感抗,容抗或纯电阻等等)。

解 (1) U_{\min} 位于负载时,由

$$\dot{U}_{\min} = \dot{U}^+ (1 + \Gamma_L e^{j\varphi_L})$$

$$|U_{\min}| = U^+ (1 - |\Gamma_L|)$$

可知, $\varphi_L = 0$, $\Gamma_L < 0$, 所以传输线终端为短路或接一纯电阻 R , 且 $R < Z_0$ 。

(2) 当 U_{\min} 位于离负载 $\lambda/4$ 处, 说明传输线终端是最大电压处, 即

$$\dot{U}_{\max} = \dot{U}^+ (1 + \Gamma_L e^{j\varphi_L})$$

$$|U_{\max}| = U^+ (1 + |\Gamma_L|)$$

故有 $\varphi_L = 0$, $\Gamma_L > 0$, 终端为开路或接一纯电阻 R , 但满足 $R > Z_0$ 。

(3) 当 U_{\min} 离负载 $\lambda/4$ 距离之间时, 有

$$|z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} < \frac{\lambda}{4}$$

所以 $\varphi_L < 0$, 即负载为容性负载, 且负载的实部小于特性阻抗。

(4) 当 U_{\min} 位于 $\lambda/4$ 与 $\lambda/2$ 之间时, 有

$$|Z_{\min}| = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi_L + \frac{\lambda}{4} > \frac{\lambda}{4}$$

所以 $\varphi_L > 0$, 即负载为感性负载, 且负载的实部大于特性阻抗。

7-16 有一特性阻抗 $Z_0 = 50 \Omega$ 的无损耗线, 周围电介质参数 $\epsilon_r = 2.26$, $\mu_r = 1$, 接有 1Ω 的负载。当 $f = 100 \text{ MHz}$ 时的线长为 $\lambda/4$, 试计算:

- (1) 线的几何长度;
- (2) 负载端的反射系数;
- (3) 驻波比, 并问第一个 U_{\min} 出现在何处?
- (4) 传输线的人端阻抗。

解 (1) 由于波在传输线上的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{C}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.26}} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

波长为

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 2 \text{ m}$$

所以传输线的几何长度 $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ m}$

(2) 负载端的反射系数为

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{1 - 50}{1 + 50} = -\frac{49}{51} = -0.961$$

$$(3) \text{ 驻波比 } S = \frac{1+|F|}{1-|F|} = \frac{1+\frac{49}{51}}{1-\frac{49}{51}} = \frac{51+49}{51-49} = 50$$

当负载为纯电阻时,负载端出现电压的最大或最小值。当 $R_L < Z_0$ 时, U_{\min} 位于负载端,本题中 $R_L = 1 \Omega < Z_0$,所以第一个 U_{\min} 位于终端。

(4) 由于线长为 $\lambda/4$,线的终端是波节点,所以线的始端是波腹点,即出现 U_{\max} ,因而始终的入端阻抗为纯电阻,其值为 $Z_{in} = SZ_0 = 50 \times 50 = 2500(\Omega)$

7-17 长度为 $\lambda/4$ 的无损耗线联接如题 7-17 图所示。其特性阻抗 Z_0 为 50Ω 。若要使电源发出最大功率,试决定集中参数 B 的值及电源内阻 R_0 。

解 传输线的长度 $l = \frac{\lambda}{4}$,负载 $Z_L = 100 - j100 \Omega$,所以传输线始端的入端阻抗为

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{50^2}{100(1-j)} = \frac{25}{1-j} \Omega$$

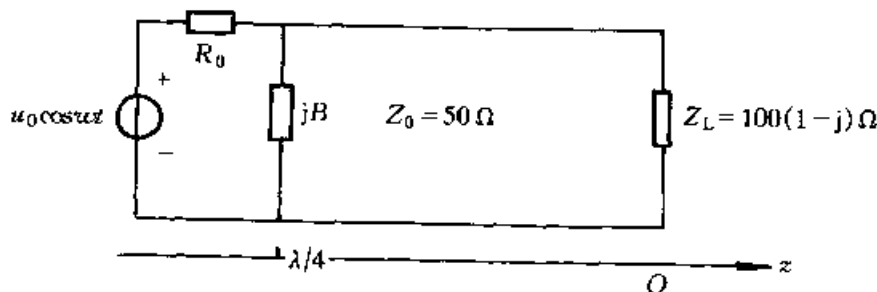
则 $Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{1-j}{25}$

若要电源发出最大功率,电源内阻和负载应匹配,即要满足

$$\frac{1}{R_0} = jB + Y_{in} = jB + \frac{1-j}{25}$$

所以有 $jB - \frac{j}{25} = 0 \quad B = \frac{1}{25} \Omega$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{25} \quad R_0 = 25 \Omega$$



题 7-17 图

7-18 无损耗线上的测量表明,当驻波比 $S = 1.8$ 时,第一个 U_{\min} 位于 $z = -l$ 处,若负载短路,第一个 U_{\min} 移到 $z = -(l+8)$ cm 处。设无损耗线的特性阻抗 $Z_0 = 50 \Omega$,波长 $\lambda = 80$ cm,试决定负载阻抗 Z_L 。

解 当终端负载短路时,终端出现电压最小值 U_{\min} ,因而离终端最近的 U_{\min} 与终端相距 $\lambda/2$,即

$$l + 8 = \frac{\lambda}{2}$$

所以
$$l = \frac{\lambda}{2} - 8 = \frac{80}{2} - 8 = 32 \text{ (cm)} = \frac{2}{5} \lambda$$

当电压最小值 U_{\min} 位于 l 处时, 此处的入端电阻为

$$R = \frac{Z_0}{S} = \frac{50}{1.8}$$

应用 7-12(3) 中的解法, 负载阻抗为

$$\begin{aligned} Z_L &= Z_0 \frac{R + jZ_0 \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - l)}{Z_0 + jR \tan \beta (\frac{\lambda}{2} - l)} \\ &= 50 \frac{\frac{50}{1.8} + j50 \tan \frac{2\pi}{\lambda} (\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{5} \lambda)}{50 + j \frac{50}{1.8} \tan \frac{2\pi}{\lambda} (\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{5} \lambda)} \\ &= 50 \frac{1 + j1.8 \tan 0.2\pi}{1.8 + j \tan 0.2\pi} = 50 \frac{1 + 1.31j}{1.8 + 0.73j} \\ &= 42.41 \angle 30.62^\circ \Omega \end{aligned}$$

7-19 设电视天线接收的信号电压可用等效发电机定理表示成: 当 $\omega = 5 \times 10^8 \text{ rad/s}$ 时, 电压为 $1 \angle 0^\circ \text{ mV}$ 及内阻为 300Ω 。若用特性阻抗为 300Ω , 线长 l 等于 λ 的无损耗线将电视天线接收的信号传输到输入电阻为 300Ω 的电视机:

(1) 问电视机能吸收多少平均功率?

(2) 若有两台 300Ω 的电视机并联, 要求每台电视机仍能接收单独一台时的平均功率是否可能? 如果不行, 试证明之; 如果行, 试设计一个系统以达到上述目的。

解 (1) 由题意可知, 传输线的负载 $Z_L = 300 \Omega$, 等于传输线的特性阻抗, 所以传输线处于匹配状态, 其始端的入端阻抗 $Z_{in} = Z_L = 300 \Omega$ 。

由于电源内阻 $R_g = 300 = Z_{in}$, 故传输线和电源匹配, 又由于传输线是无损耗线, 因此输入传输线的平均功率将全部为负载所吸收。该平均功率为电源输出的最大功率

$$P_L = \left(\frac{U_s}{R_0 + Z_{in}} \right)^2 Z_{in} = \frac{U_s^2}{4Z_{in}} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4 \times 300} = 8.33 \times 10^{-7} \text{ W}$$

(2) 当两台 300Ω 的电视机并联时, $Z_L = \frac{300}{2} = 150 \Omega$, 经过长度为 λ 的传输线, 在始端将重现负载阻抗, 即

$$Z_{in} = 150 \Omega$$

$$\text{始端电压 } \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_s Z_{in}}{R_g + Z_{in}} = \frac{150 \times 1 \times 10^{-3}}{300 + 150} = \frac{1}{3} \text{ mV}$$

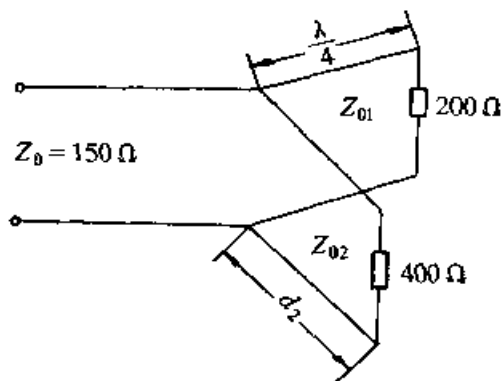
$$\text{负载端的电压 } \dot{U}_2 = \dot{U}_1$$

所以每台电视机接收的平均功率为

$$P_L = \frac{1}{300} |\dot{U}_2|^2 = \frac{1}{27} \times 10^{-8} \text{ W}$$

显然此时每台电视机不可能获得单独一台时的平均功率。

7-20 若原有特性阻抗为 150Ω 的无损耗线, 通过一段 $\lambda/4$ 的无损耗线 ($Z_{01} = 173.2 \Omega$) 供电给 200Ω 的负载, 另有 400Ω 的负载按题 7-20 图联接。若 400Ω 负载上的电压和 200Ω 负载上的电压的相位相反(指 $Z_{01} = Z_{02}$ 时), 问 d_2 该为多少? 若要使 400Ω 负载吸收的功率和 200Ω 负载吸收的功率相等, 试决定该线的特性阻抗 Z_{02} 。



题 7-20 图

解 当 $Z_{01} = Z_{02}$ 时, 由于传输线的负载 $R_{L1} = 200 \Omega$, $R_{L2} = 400 \Omega$, 所以沿线的驻波比

$$S_1 \neq S_2$$

但由于 R_{L1} 和 R_{L2} 均为纯电阻, 且均大于特性阻抗, 所以当 $\frac{\lambda}{4}$ 线和 d_2 线并联时, 两线上的电压波同步变化, 因此要使 400Ω 负载上的电压与 200Ω 负载上的电压相位相反, d_2 需为

$$d_2 = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{4} \lambda = 0.75 \lambda$$

从 Z_{01} 线和 Z_{02} 线向负载端看去的 λ 端阻抗分别为

$$Z_{in1} = \frac{Z_{01}^2}{R_{L1}} \quad Z_{in2} = \frac{Z_{02}^2}{R_{L2}}$$

若要使两负载消耗的功率相同, 必须使 $Z_{in1} = Z_{in2}$ 所以有

$$\frac{Z_{01}^2}{R_{L1}} = \frac{Z_{02}^2}{R_{L2}}$$

$$Z_{02} = Z_{01} \sqrt{\frac{R_{L2}}{R_{L1}}} = 173.2 \sqrt{\frac{400}{200}} = 245 \Omega$$

第八章 波导与谐振腔

习题(8-1)

8-1-1 两块平行的金属板,相距为 a ,已知其中传输的电磁波的电、磁场纵向分量是: $H_z = A \cos k_c x + B \sin k_c x$, $E_z = 0$ 。试求:

- (1) 电磁场的其余分量;
- (2) 用边界条件确定常数 A (或 B), k_c (A, B 有一个决定于波源);
- (3) 说明是什么波型,求相应的截止波长 λ_c 。

解 (1) 根据电磁场基本方程组,可以推导出电磁场的其余分量分别为

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2} j \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} = j \frac{\omega \mu}{k_c} (-A \sin k_c x + B \cos k_c x) \quad (2)$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\gamma}{k_c} (-A \sin k_c x + B \cos k_c x) \quad (3)$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2} \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

(2) 设金属板为理想导体,所以 $E_{1t} = E_{2t} = 0$ 。场量的边界条件为

$$E_y|_{x=0} = E_y|_{x=a} = 0$$

代入式(2),得

$$E_y|_{x=0} = j \frac{\omega \mu}{k_c} B = 0$$

解得 $B = 0$,

$$E_y|_{x=a} = -j \frac{\omega \mu}{k_c} A \sin k_c a = 0$$

解得 $k_c = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

(3) 由于在传播方向上没有电场分量,故为 TE 波型。相应的截止波长 λ_c 为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2\pi}{n\pi/a} = \frac{2a}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

习题(8-2)

8-2-1 一空气填充的矩形波导, $a \times b = 6 \times 4 \text{ cm}^2$, 信号源频率是 3 GHz, 试计算对于 TE_{10} , TE_{01} , TE_{11} , TM_{11} 四种波型的截止波长 λ_c , 波导波长 λ_g , 相位常数 β 和波的相速度 v_p 。

解 截止波长的计算公式为

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}}$$

代入已知条件, 得到不同模式的截止波长为

$$\text{TE}_{10}: \lambda_c = 2a = 12 \text{ cm}$$

$$\text{TE}_{01}: \lambda_c = 2b = 8 \text{ cm}$$

$$\text{TE}_{11} \text{ 和 } \text{TM}_{11}: \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{6})^2 + (\frac{1}{4})^2}} = 6.66 \text{ cm}$$

相应的截止频率分别为

$$\text{TE}_{10}: f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^{-2}} = 2.5 \text{ GHz}$$

$$\text{TE}_{01}: f_c = \frac{3 \times 10^8}{8 \times 10^{-2}} = 3.75 \text{ GHz}$$

$$\text{TE}_{11} \text{ 和 } \text{TM}_{11}: f_c = \frac{3 \times 10^8}{6.66 \times 10^{-2}} = 4.51 \text{ GHz}$$

在波导中, 只有满足条件 $f > f_c$ 的电磁波才能通过该波导。根据上述计算结果, 波导中只能传播 TE_{10} 模。

TE_{10} 模的波导波长为

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}} = \frac{3 \times 10^8}{10^9 \sqrt{3^2 - 2.5^2}} = 18.09 \text{ cm}$$

相位常数为

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{18.09 \times 10^{-2}} = 34.90 \text{ rad/m}$$

相速度为

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - (\frac{2.5}{3})^2}} = 5.43 \times 10^8 \text{ m/s}$$

8-2-2 矩形波导中 TM 模的纵向电场为

$$\dot{E}_z = E \sin(\frac{\pi}{3}x) \sin(\frac{\pi}{3}y)$$

式中 x, y 的单位是 cm 。求 λ_c 。如果这是 TM_{32} 模, 求波导尺寸 a 和 b 。

解 由已知电场 E_z 的表达式, 可以得到 TM 模的截止波长

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 4.24 \text{ cm}$$

如果这是 TM_{32} 模, 则

$$\frac{m}{a} = \frac{1}{3}, m = 3, a = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{n}{b} = \frac{1}{3}, n = 2, b = 6 \text{ cm}$$

即波导尺寸为 $a \times b = 9 \times 6 \text{ cm}^2$ 。

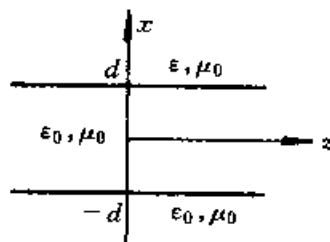
习题(8-3)

8-3-1 证明: 介质波导传播的电磁波速度介于电介质和介质外自由空间中的平面波传播速度之间。

证明 在无界电介质和自由空间中传播的平面波的相速度分别为

$$v_{\text{介}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \text{和} \quad v_{\text{空}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

设介质波导如题 8-3-1 图所示, 电磁波沿 z 轴方向传播, 场量与 y 无关。电磁场分量 E_z 和 H_z 分别满足齐次波动方程



题 8-3-1 图

$$\frac{d^2 \dot{E}_z}{dx^2} + k_c^2 \dot{E}_z = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_z}{dx^2} + k_c^2 \dot{H}_z = 0 \quad (2)$$

在 $|x| > d$ 的区域, 电磁波沿 x 方向呈指数形式衰减, 故 $k_c^2 < 0$, 即

$$k_c^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + \gamma^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2 = -k_1^2 \quad (3)$$

式中 $k_1^2 > 0$ 。

在 $|x| < d$ 的区域, 电磁波沿 z 轴方向传播, 没有衰减, 所以 $k_c^2 > 0$, 即

$$k_c^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon + \gamma^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 = k_2^2 \quad (4)$$

对 TE 模式而言, 有

$$H_z = \begin{cases} A e^{-k_1 |x|} e^{-j\beta z} & |x| > d \\ B \cos k_2 x e^{-j\beta z} & |x| \leq d \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

将式(5)代入式(2), 得到

$$k_1^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2 = 0 \quad (7)$$

将式(6)代入式(2),得到

$$-k_2^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 = 0 \quad (8)$$

整理式(7),(8),有

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + k_1^2}$$

和

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon - k_2^2}$$

由于 $k_1^2 > 0, k_2^2 > 0$, 因此

$$\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 < \beta^2 < \omega^2 \mu_0 \epsilon$$

即

$$\frac{\omega^2}{v_{\text{空}}^2} < \frac{\omega^2}{v_{\text{p}}^2} < \frac{\omega^2}{v_{\text{介}}^2}$$

整理得 $v_{\text{空}} > v_{\text{p}} > v_{\text{介}}$

证毕。

习题(8-4)

8-4-1 有一空气填充的矩形谐振腔的尺寸为 $a = 3.8 \text{ cm}$, $b = 1.9 \text{ cm}$, $l = 3.26 \text{ cm}$ 。试求 $m = 1, n = 0, p = 1$ 的振荡模式的谐振频率。

解 将已知条件代入下列公式

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

可得谐振频率为

$$f_0 = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\frac{1}{(3.8 \times 10^{-2})^2} + \frac{1}{(3.26 \times 10^{-2})^2}} = 6.06 (\text{GHz})$$

8-4-2 有两个矩形空气谐振腔,工作模式都是 TE_{101} , 谐振波长分别为 $\lambda_0 = 3 \text{ cm}$ 和 $\lambda_0 = 10 \text{ cm}$ 。试问哪一个空腔的尺寸大? 为什么?

解 TE_{101} 模的谐振波长可用下式计算

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}}$$

整理后,得

$$\frac{4}{\lambda_0^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}$$

当 $\lambda_0 = 3 \text{ cm}$ 时

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{l_1^2}$$

当 $\lambda_0 = 10 \text{ cm}$ 时

$$\frac{4}{100} = \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{l_2^2}$$

设两个谐振腔 a 相同, 即 $a_1 = a_2 = a$, 从上两式可以判断出, λ_0 愈小, l 亦愈小, 即 $l_1 < l_2$, $\lambda_0 = 10 \text{ cm}$ 的空腔大。若设两个空腔的 l 相同, 则结论相同。

思考题

8-1 什么是横电磁波? 它具有什么特点? 举例说明。

答 在电磁波的传播方向上没有电场 E 和磁场 H 的分量, 称为横电磁波, 用 TEM 表示。

TEM 波的特点: TEM 波在横截面上的场分量满足拉普拉斯方程。因此, 传播 TEM 波的导波系统的电场、磁场分布与静态场中相同边界条件下的场分布相同。

例如二线传输线、同轴电缆都可以传播 TEM 波, 其周围任一横截面上的场分布与静态场分布相同。

8-2 什么是横电波? 什么是横磁波? 它们之间有什么区别?

答 在传播方向上有磁场分量而无电场分量的电磁波称为横电波, 即 TE 波。

在传播方向上有电场分量而无磁场分量的电磁波称为横磁波, 即 TM 波。

它们之间的区别已表述在各自的定义之中。

8-3 什么是截止波长? 什么是波导波长? 什么是工作波长?

答 截止波长 λ_c 是允许电磁波在某种波导中能够传输的最大波长, 当激励源波长小于 λ_c 时, 波导才有传播波。

波导波长 λ_g 是指在波导内沿传播方向相位相差 2π 的两点间的距离, $\lambda_g = 2\pi/\beta$ 。一般情况下, $\lambda_g > \lambda$ (工作波长)

工作波长 λ 是指频率为 f 的电磁波在无界空间中的波长, 即信号源发出的频率所对应的波长。

工作波长 λ 和截止波长 λ_c 分别与工作频率 f 和截止频率 f_c 相对应, 而波导波长 λ_g 与工作频率 f 相对应。

8-4 介质波导的截止频率与金属波导的截止频率在概念上有何不同?

答 对于金属波导, 传播波的工作频率必须大于截止频率, 即 $f > f_c$, 才能在波导中传播。而在介质波导中, 传播波的频率要小于截止频率, 即 $f < f_c$, 才能在波导中传播。

8-5 金属波导管内能传播的电磁波有哪几类?

答 金属波导管内能传播的电磁波只有 TE 波和 TM 波。

8-6 什么是谐振腔的谐振频率和谐振波长?

答 谐振腔的谐振频率是谐振腔中能够存在电磁振荡时的频率, 矩形谐振

腔的谐振频率为

$$f_{\text{mp}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

式中 a, b, c 是谐振腔的尺寸, 对应的谐振波长为

$$\lambda_{\text{mp}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}$$

习 题

8-1 求矩形波导中 TM_{11} 模在波导壁上的电流密度

解 TM_{11} 模的磁场分量为

$$\dot{H}_x = j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

$$\dot{H}_y = -j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

根据 $\mathbf{k} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$, 在 $x=0$ 的平面上, 面的法线方向 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, 电流线密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}|_{x=0} &= \mathbf{e}_x \times (\dot{H}_x \mathbf{e}_x + \dot{H}_y \mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_z \dot{H}_y|_{x=0} \\ &= \mathbf{e}_z \left[-j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \right] \end{aligned}$$

在 $x=a$ 的平面上, $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_x$, 所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{k}|_{x=a} &= -\mathbf{e}_x \times (\dot{H}_x \mathbf{e}_x + \dot{H}_y \mathbf{e}_y) = -\mathbf{e}_z \dot{H}_y|_{x=a} \\ &= -\mathbf{e}_z \left[j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \right] = \mathbf{k}|_{x=0} \end{aligned}$$

说明在 $x=0$ 时, a 的平面上只有 z 轴方向的面电流。

同理, 在 $y=0, b$ 的平面上, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ 和 $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$, 电流线密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{k}|_{y=0} &= \mathbf{e}_y \times (\dot{H}_x \mathbf{e}_x + \dot{H}_y \mathbf{e}_y) = -\mathbf{e}_z \dot{H}_x|_{y=0} \\ &= -\mathbf{e}_z \left[j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}|_{y=b} = \mathbf{e}_z \left[-j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right]$$

说明在 $y=0$ 时, b 的平面上也只有 z 轴方向的面电流。

8-2 空气填充的矩形波导 $a=2.3 \text{ cm}$, $b=1 \text{ cm}$ 。若 $f=20 \text{ GHz}$, 求 TM_{11} 模的 $f_c, \beta, \lambda_g, v_p$; 又若 $f=10 \text{ GHz}$, 求传播常数 γ 。

解 TM_{11} 模的截止频率为

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\frac{1}{(2.3 \times 10^{-2})^2} + \frac{1}{(10^{-2})^2}} = 16.36 \text{ GHz}$$

相位常数为

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$= \frac{2\pi \times 20 \times 10^9}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - \left(\frac{16.356}{20}\right)^2} = 241.07 \text{ rad/m}$$

波导波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{241.07} = 2.62 \text{ cm}$$

波导中波传播的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 20 \times 10^9}{241.07} = 5.21 \times 10^8 \text{ m/s}$$

可见,电磁波在波导中传播的速度大于在无界媒质(与波导中媒质相同)中传播的速度。

当 $f = 10 \text{ GHz}$ 时,由于 $f < f_c$,该波不能在这个波导中传播,它的传播常数为

$$\gamma = \alpha = k \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1} = \frac{\omega}{v} \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{2\pi \times 10 \times 10^9}{3 \times 10^8} \sqrt{\left(\frac{16.36}{10}\right)^2 - 1} = 271.07 \text{ Nb}$$

衰减常数很大,电磁波以 $e^{-271.07z}$ 的形式衰减很快,因此不能在波导中传播。

8-3 如上题的波导,求 TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} , TE_{11} , TM_{21} 和 TM_{12} 的截止频率;
 $f = 10 \text{ GHz}$ 时,可能有哪些传播模? 若填充介质 $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$,结果又如何?

解 根据截止频率计算公式

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

可以得到各模的截止频率

	TE_{10}	TE_{01}	TE_{20}	TE_{11}	TM_{11}	TE_{21}	TM_{12}
$f_c(\text{GHz})$	6.52	15	13.04	16.35	16.35	19.88	30.7

波传播的条件是工作频率 f 大于截止频率 f_c 。因此,当 $f = 10 \text{ GHz}$ 时,只有 TE_{10} 模可以通过波导。

如果波导填充介质,那么,截止频率的计算公式为

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

各模的截止频率列表如下

	TE ₁₀	TE ₀₁	TE ₂₀	TE ₁₁	TM ₁₁	TM ₂₁	TM ₁₂
$f_c(\text{GHz})$	4.61	10.6	9.19	11.56	11.56	14.06	21.71

只有 TE₁₀ 和 TE₂₀ 模可以通过波导。

8-4 空气填充的矩形波导, $a=7.2\text{ cm}$, $b=3.4\text{ cm}$ 。(1) 当工作波长($\lambda=c/f$)分别是 16, 8, 6.5 cm 时, 此波导可能出现哪几个传播模? (2) 求 TE₁₀ 单模传输的频率范围, 并要求此频带的低端比 TE₁₀ 的 f_c 大 5%, 其高端比第一阶模的 f_c 低 5%。

解 (1) 由截止波长的计算公式

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{7.2}\right)^2 + \left(\frac{n}{3.4}\right)^2}}$$

可以得到各传播模的 λ_c 为

	TE ₀₁	TE ₁₀	TE ₀₂	TE ₂₀	TE ₁₁ (TM ₁₁)	TE ₂₁ (TM ₂₁)
$\lambda_c(\text{cm})$	6.8	14.4	3.4	7.2	6.15	4.94

只有当工作波长 λ 小于截止波长 λ_c 时, 波才能传播。因此可以判断:

当 $\lambda=16\text{ cm}$ 时, 没有传播模;

当 $\lambda=8\text{ cm}$ 时, 可以传播 TE₁₀ 模;

当 $\lambda=6.5\text{ cm}$ 时, 可以传播 TE₀₁, TE₁₀ 和 TE₂₀ 模。

(2) 要使 TE₁₀ 单模传输, 必须满足条件

$$f_{c(\text{TE}_{10})} < f < f_{c(\text{TE}_{20})}$$

其中

$$f_{c(\text{TE}_{10})} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{3 \times 10^8}{2a} = 2.08(\text{GHz})$$

$$f_{c(\text{TE}_{20})} = \frac{3 \times 10^8}{2} \times \frac{2}{7.2 \times 10^{-2}} = 4.16(\text{GHz})$$

根据题目对频带的要求, 有

$$2.08 \times (1 + 0.05) < f < 4.16(1 - 0.05)$$

TE₁₀ 模单模传播的频率范围为

$$2.184\text{ GHz} < f < 3.952\text{ GHz}$$

8-5 一频率为 10 GHz 的横电波在一矩形波导中传输,磁场的纵向分量为

$$\dot{H}_z = 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right) e^{-\gamma z} \quad \text{A/m}$$

其传播常数为

$$\gamma = j \frac{\sqrt{2}}{3} \pi \quad \text{rad/cm}$$

式中 x 和 y 均以 cm 为单位。试求波导内其他场分量的表示式,并求出 $\lambda_g, \lambda_c, v_p$ 和 v_g 各量。

解 由电磁场基本方程组,可以推导得到其余场量

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{k_c^2} j \omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \times \frac{\pi}{3} \times 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}y\right) e^{-\gamma z}$$

$$\dot{E}_y = \frac{1}{k_c^2} j \omega \mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \times \frac{\pi}{3} \times 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right) e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_x = -\frac{1}{k_c^2} \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = \frac{\gamma}{k_c^2} \times \frac{\pi}{3} \times 10^{-3} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}y\right) e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{k_c^2} \gamma \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = \frac{\gamma}{k_c^2} \times \frac{\pi}{3} \times 10^{-3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}y\right) e^{-\gamma z}$$

该传播模的特性参数分别为

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}}} = 4.24 \quad \text{cm}$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi/3} = 4.24 \quad \text{cm}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2 \times 10^{10}}{\sqrt{2}\pi \times 100/3} = 4.24 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

其中 $\lambda = \frac{v}{f} = 3 \text{ cm}$, 所以

$$v_g = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4.24}\right)^2} = 2.12 \times 10^8 \quad \text{m/s}$$

8-6 如果用 BJ-100 的矩形波导 ($a \times b = 22.86 \times 10.16 \text{ mm}^2$) 来传输电磁波能量,波导中的介质为空气。试计算

(1) 当工作波长 $\lambda = 20 \text{ mm}$ 时,波导中能存在哪些波型;

(2) 波导中传输 TE_{10} 模,且 $\lambda = 30 \text{ mm}$ 时, v_p, v_g, λ_c 和 λ_g 各为多少?

解 (1) 由截止波长计算公式

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

可以得到各传播模的截止波长

	TE ₁₀	TE ₀₁	TE ₂₀	TE ₁₁ (TM ₁₁)	TE ₁₂ (TM ₁₂)	TE ₂₁ (TM ₂₁)
$\lambda_c(\text{cm})$	45.72	20.32	22.86	18.57	9.92	15.19

当工作波长 λ 小于截止波长 λ_c 时,波才能传播。因此,工作波长 $\lambda = 20 \text{ mm}$ 时,可以传播的模为 TE₁₀、TE₀₁ 和 TE₂₀ 波。

(2) 若波导中仅传播 $\lambda_c = 45.72 \text{ mm}$ 的 TE₁₀ 模,当工作波长 $\lambda = 30 \text{ mm}$ 时,各参数分别为

$$v_g = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - \left(\frac{30}{45.72}\right)^2} = 2.26 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{30}{\sqrt{1 - \left(\frac{30}{45.72}\right)^2}} = 39.76 \text{ mm}$$

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1 - \left(\frac{30}{45.72}\right)^2}} = 3.98 \times 10^8 \text{ m/s}$$

8-7 在一矩形谐振腔中激发 TE₁₀₁ 型波,设空腔的尺寸为 $a \times b \times l = 5 \times 3 \times 5 \text{ cm}^3$,求谐振波长。

解 谐振波长为

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2}}} = 7.07 \text{ cm}$$

8-8 当上题中的腔体填充以 $\epsilon_r = 4$ 的介质时,若空腔尺寸不变,激发的波型亦不变,谐振频率为多少?

解 谐振频率为

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{4}} \sqrt{\left(\frac{100}{5}\right)^2 + \left(\frac{100}{5}\right)^2} = 2.12 \text{ GHz} \end{aligned}$$

8-9 若用一矩形波导制成一矩形谐振腔,要求当 $\lambda = 10 \text{ cm}$ 时,对 TE₁₀₁ 振荡模式发生谐振,当 $\lambda = 5 \text{ cm}$ 时,对 TE₁₀₃ 模式发生谐振,求此矩形空腔谐振腔的尺寸。

解 将已知条件代入谐振波长计算公式

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 + (\frac{p}{l})^2}}$$

可得

$$\text{当 } \lambda = 10 \text{ cm 时, 有} \quad 10 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}} \quad (1)$$

$$\text{当 } \lambda = 5 \text{ cm 时, 有} \quad 5 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + (\frac{3}{l})^2}} \quad (2)$$

联立求解式(1),(2),得谐振腔尺寸为

$$a = 6.325 \text{ cm} \quad l = 8.165 \text{ cm}$$

通常取 $b = \frac{a}{2}$, 所以

$$b = \frac{a}{2} = 3.163 \text{ cm}$$