大学经济学

金禾经济研究中心

郭誉森 教授

2015/4/7

本节内容：
I 厂商的生产与成本
II 长短期成本分析
III 厂商要素需求
附录：齐次函数与欧拉方程

I 生产与成本

生产函数： $f(a,b)=q$ （假设 $f_a, f_b > 0;\ f_{aa}, f_{bb} < 0;\ f_{ab} = f_{ba}$）

总支出： $p_a a + p_b b$

厂商的优化问题为：

$$\begin{aligned} &\min\ p_a a + p_b b \\ &s.t.\ \ f(a,b)=q \end{aligned}$$

求解： $L = p_a a + p_b b + \lambda[q - f(a,b)]$

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{\partial L}{\partial a} = p_a - \lambda f_a = 0 \\ (2)\quad \dfrac{\partial L}{\partial b} = p_b - \lambda f_b = 0 \\ (3)\quad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = q - f(a,b) = 0 \end{cases}$$

由(1) (2)得，

$$(4)\quad \frac{p_a}{p_b} = \frac{f_a}{f_b} \equiv \frac{MP_a}{MP_b}$$

或 $\dfrac{MP_a}{p_a} = \dfrac{MP_b}{p_b}$，即

$$(5)\quad \frac{1}{p_a} f_a = \frac{1}{p_b} f_b$$

解读：1 元钱可买 $\dfrac{1}{p_a}$ 个 a，而每增加 1 单位 a 可以增加产出 f_a. 所以(5)可解读为：若多花 1 块钱投入，无论用这 1 块钱买何种原料，增加的产出皆相同。

那增加一单位产出需要多花多少成本来买原料呢？答案是(5)式左右两边的倒数：

$$MC \equiv \frac{p_a}{f_a} = \frac{p_b}{f_b}$$

解读：如要增加生产 1 单位产品，必须增加投入 $\dfrac{1}{f_a}$ 个 a 要素，而后者的价格为 p_a，故必须多花 $\dfrac{p_a}{f_a}$ 元成本。注意：$MC = \lambda$

若产品市场为竞争，利润为 $\pi = pq - C(q)$

最大利润的产量满足：

$$(5.5) \quad p = C'(q) \equiv MC$$

故知边际成本函数即该产品的供给函数。

留意：此地的成本函数是指为生产 q，在投入要素优化后还必须投入的最小总支出。换句话说，如果上述(1) (2) (3)联立可解出最优的要素投入为 $a^*(q, p_a, p_b), b^*(q, p_a, p_b)$，带回支出函数 $p_a a + p_b b$，才是这里所说的成本，

即 $C(q, p_a, p_b) = p_a \cdot a^*(q, p_a, p_b) + p_b \cdot b^*(q, p_a, p_b)$，

或 $C(q) = p_a \cdot a^*(q) + p_b \cdot b^*(q)$，当 p_a, p_b 为参数假定不变而可“丢弃”。

定义（规模报酬）：生产过程 $f(a,b)$ 为规模报酬递增（/不变/递减），如果生产要素扩张相同比例 λ 会使产量增加的比率大于（/等于/小于）λ. 我们常假设 $f(\cdot)$ 为 $n\ (>/=/<1)$ 次齐次式来描述此概念。

现在假设 $f(\cdot)$ 为规模报酬不变 (constant return to scale, or CRS), 即 $f(\cdot)$ 为一次齐次式（见附录）。

如果生产 q 成本为 $C(q)=p_a\cdot a^*(q)+p_b\cdot b^*(q)$（$a^*,b^*$ 自然是从(3)(4)联立解得），则 $\lambda a^*,\lambda b^*$ 是不是生产 λq 的最佳投入？当然是。

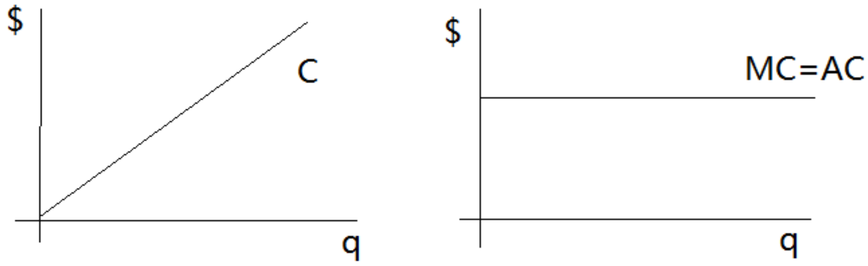
因为从 $\dfrac{\lambda a^*}{\lambda b^*}=\dfrac{a^*}{b^*}$ 与齐次式附录(4)得知本节(4)式 $\dfrac{p_a}{p_b}=\dfrac{f_a}{f_b}$ 必然保持满足；又有齐次式定义知 $(\lambda a^*,\lambda b^*)$ 时产量必为 λq，所以得知 $(\lambda a^*,\lambda b^*)$ 必可解

$$\begin{cases}(6) & \dfrac{p_a}{p_b}=\dfrac{f_a}{f_b}\\(7) & \lambda q-f(a,b)=0\end{cases}$$

这一联立方程也就是生产 λq 时的最佳投入，所以知道

$$C(\lambda q)=p_a\cdot\lambda a^*+p_b\cdot\lambda b^*=\lambda C(q)$$

也就是在 CRS 时，产品的成本函数为线性，如图（1）所示。



（图 1）

顺便把前面对边际成本即 $\dfrac{p_a}{f_a}=\dfrac{p_b}{f_b}$ 的结论证明一下。

由(3) (4)联立，可改写如下：

$$\begin{cases}(4') & \dfrac{p_a}{f_a}=\dfrac{p_b}{f_b}\\(3) & q-f=0\end{cases}\qquad (a^*,b^*)\text{ 为产量为 } q \text{ 时的解。}$$

边际成本

$$(8)\quad MC=\frac{dC(a^*(q),b^*(q))}{dq}$$

$$=p_a\frac{da^*}{dq}+p_b\frac{db^*}{dq}$$

$$=p_a\frac{da^*}{dq}+p_b\frac{1-f_a\frac{da^*}{dq}}{f_b}\qquad [(a^*,b^*)\text{满足}(3),\text{得}f_a\frac{da^*}{dq}+f_b\frac{db^*}{dq}=1]$$

$$=(p_a-\frac{p_bf_a}{f_b})\frac{da^*}{dq}+\frac{p_b}{f_b}$$

$$=\frac{p_b}{f_b}\qquad [\text{由}(4')\text{得}p_a-\frac{p_bf_a}{f_b}=0]$$

II 长短期

在短期，假设一个要素 b 已不可变动，固定为 $\bar{b}$，则厂商的问题变成

$$\min\ p_aa+p_b\bar{b}$$
$$s.t.\ \ f(a,\bar{b})=q\qquad \text{where, } \bar{b} \text{ is a constant.}$$

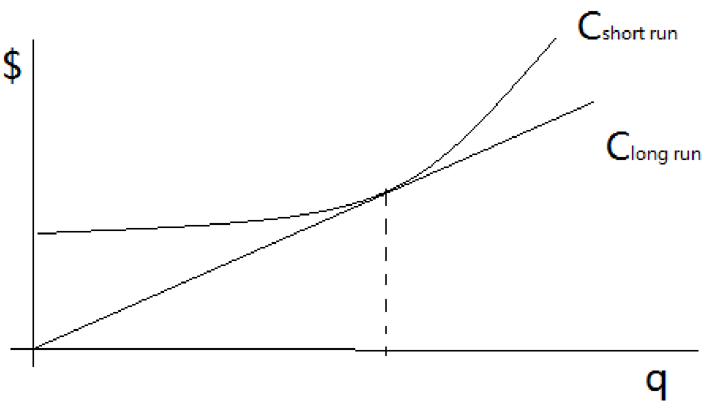
令 $h(\cdot)$ 为 $f(\cdot)$ 之反函数，此时 a 已无从选择优化，完全由生产函数决定。故生产成本就是

$$p_ah(q)+p_b\bar{b}$$

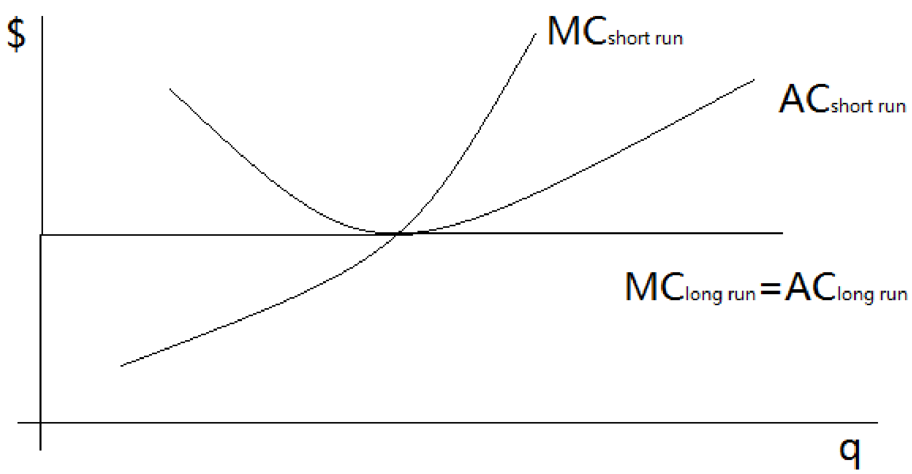
边际成本就是

$$\frac{d}{dq}p_ah(q)=p_a\frac{dh}{dq}=p_a\frac{1}{f_a}\equiv MC_{short\ run}$$

假如 $\bar{b}$ 刚好是“应该”选择的 b^*，则长短期的成本与边际成本相等（见(8)）。



（图 2）



（图 3）

当然，平均成本

$$AC \equiv \frac{C}{q} = \frac{p_a h(q) + p_b \bar{b}}{q}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{dAC}{dq} &= \frac{p_a h'(q)}{q} - \frac{p_a h(q) + p_b \bar{b}}{q^2} \\ &= \frac{1}{q}\left(\frac{p_a}{f_a} - \frac{p_a h + p_b \bar{b}}{q}\right)\end{aligned}$$

故知，当 AC 在它的最低点时，因为 $\frac{dAC}{dq}=0$ 会使 $\frac{p_a}{f_a}-\frac{p_a h+p_b\bar{b}}{q}=0$，即 $MC=AC$. 换句话说，边际成本曲线一定会交平均成本曲线于其最低点。

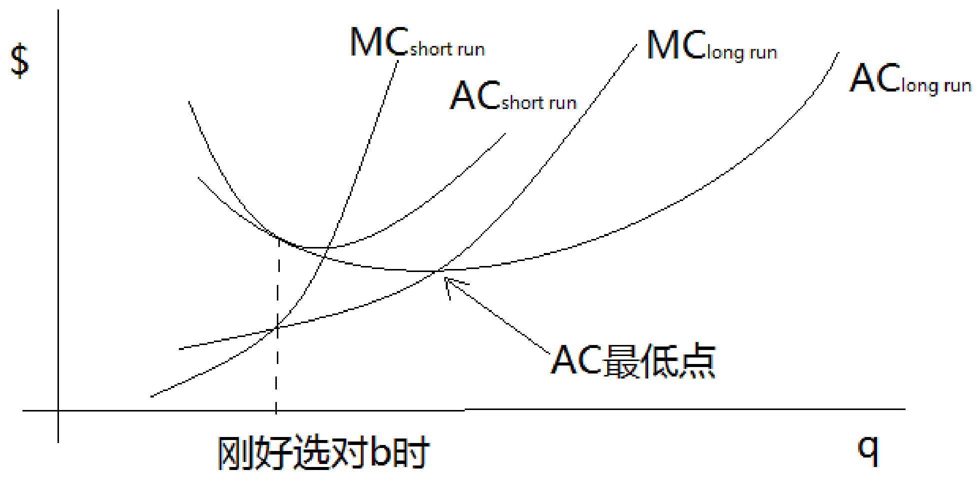
但因长短期边际成本在 $\bar{b}$ 正好选对时（b^*）会相等，而此时长短期的总成本与平均成本也会相等。

一般而言，即生产函数不止两个要素时，长期与短期之分通常是指短期比长期被固定的要素要多。

上面关于 MC 交于 AC 最低点的证明不好，做了短期的假设。其实，此结论为一般结论，长短期都对，因为从任意成本函数皆可证明之。

$$
\begin{aligned}
\frac{dAC(q)}{dq} &= \frac{d}{dq}\frac{C(q)}{q} \\
&= \frac{C'}{q}-\frac{C}{q^2} \\
&= \frac{1}{q}(C'-\frac{C}{q}) \\
&= \frac{1}{q}(MC-AC)
\end{aligned}
$$

故知: AC 为最低点，iff　MC=AC.



(图 4)

上述的短期成本包括了 $p_b\bar{b}$，也就是假设过去花在 b 上的成本还没有“沉

没”（sunk），也就是该已买要素（例如已建好的厂房设备，已训练好的人力等）尚有别的用途，在二手市场还值 p_b. 如果 $\bar{b}$ 已经沉没，即 $\bar{b}$ 除了在本厂使用外已无别的用途（例如专用设备，专用人事信息等），即 $\bar{b}$ 在外面的卖价只能是零，此时的短期成本仅为

$$p_a h(q) + 0 \cdot \bar{b} = p_a h(q).$$

（图 5 to be inserted）

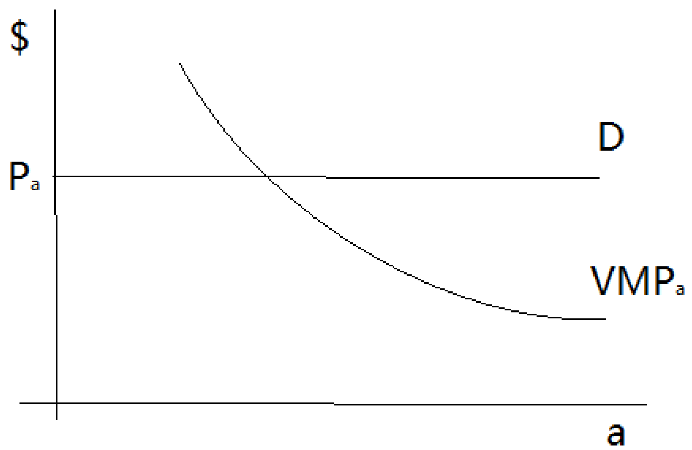
III 要素需求

由上面利润最大化的必要条件 $p = MC = C'$（即 5.5）与 $MC = \frac{p_b}{f_b}$（即 8 式）两条件知，

$$p = \frac{p_b}{f_b} = \frac{p_a}{f_a}，即$$

$$(9)\quad p_b = f_b p,\ p_a = f_a p$$

f_a 是 a 要素的边际产量，乘上产品的价格 p， $f_a p$ 即是要素 a 的边际产量价值。(9)式可读成：每单位要素的边际产量价值会等于它的价格。讲穿了，(9)式就是个要素的需求曲线的隐函数。



（图 6）

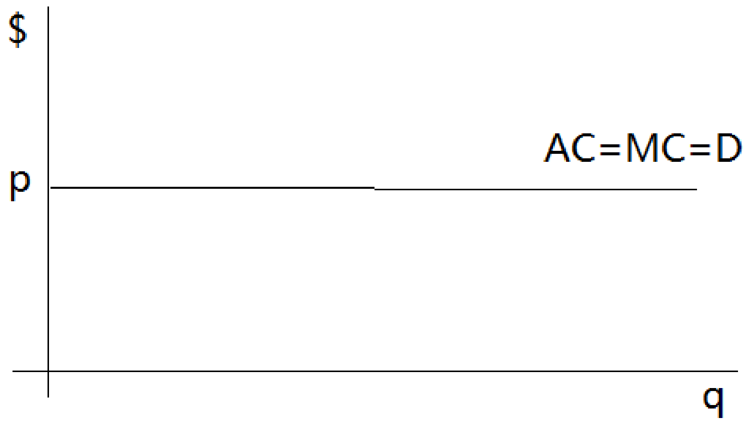
横线为该厂要素 a 的需求曲线（假设该厂在要素市场上为价格接受者）。重要问题出现了：如果该厂必须付出价格等于边际生产价值 VMP_i 去购买各个要素，

它贩卖产品所得的总收入够不够支付它的成本呢？会不会有剩余利润呢？答案是要看其生产函数的性质。

如果 $f(\cdot)$ 是一次齐次式，即规模报酬不变，则

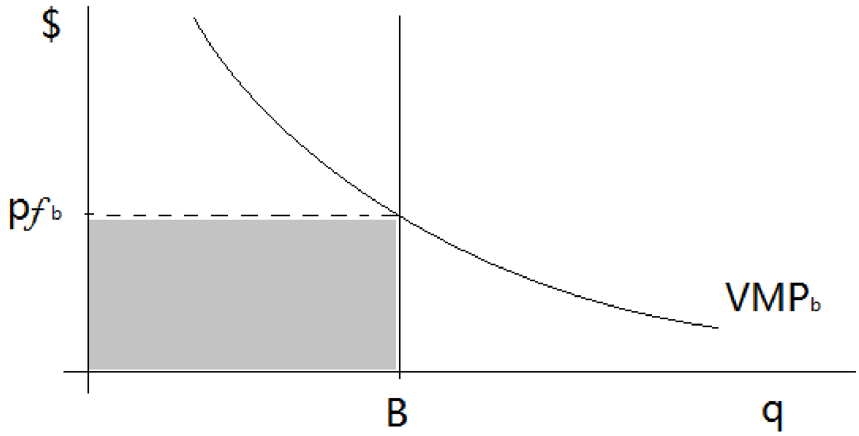
$$
\begin{aligned}
R &= p \cdot q; \\
C &= p_a \cdot a^* + p_b \cdot b^* \\
&\overset{(9)}{=} p \cdot f_a \cdot a^* + p \cdot f_b \cdot b^* \\
&= p \cdot (f_a \cdot a^* + f_b \cdot b^*) \\
&= p \cdot q \\
&= R
\end{aligned}
$$

总收入会刚好等于总成本，厂商正好回收要素支出不会有利润（剩余，即 surplus）。同样容易证明，如果规模报酬递增（/递减）则无法回收成本（/会有剩余）。



（图 7）

假定要素 b 的供给为老天或政府固定（供给无弹性，如肥沃的土地、都市规划内土地、矿、出租车牌照、二氧化碳指标、无线电频宽放送权、铁矿石进口指标、天才等等），B，则此财产在产权市场上的价格会被竞标到它的 VMP。该厂仍无利润，而所有的该财产人的收入，即 $p \cdot f_b \cdot B$ 都为剩余。但因它们为老天或政府所赠予，不需花成本生产，故经济学上叫这一长方形（如图 8 中阴影所示）为**租金**，是已有财产的收入，与利润这一概念区别。



（图 8）

更常见的情况是，B 已属于厂商，在它的账上看不到或无需支付任何价格去购买，则它的会计利润为 $\pi = pq - p_a a^* = pq - pf_a a^* \overset{Euler\ Equation}{=} pf_b b^*$，也就是它的所谓利润不过是某些已有财产的租金而已。

为何一般的平均成本曲线呈现 U 形？

基本巧看法：所有的生产函数都是 CRS，长期平均成本曲线都是水平。一般用的 U 形成本曲线，因为：在产量大时会有一些要素被用光无法再增加供应，造成了此时（平均）成本曲线朝上，具有短期曲线的性质；而在产量小的时候，长期平均成本曲线会呈下降状，乃是因为有些要素不可分割，以致其用得太多了，即其边际生产力为负，而此时用其它要素计算的平均成本变为下降，呈规模报酬递增的样子。

上述“巧看法”的后半段需要一个证明。

证明：

如果要素 b 在生产是不可不用，但要用就至少用 B 个（比如说至少要使用一个人）。根据要素 a 计算的平均生产力 APP_a 为

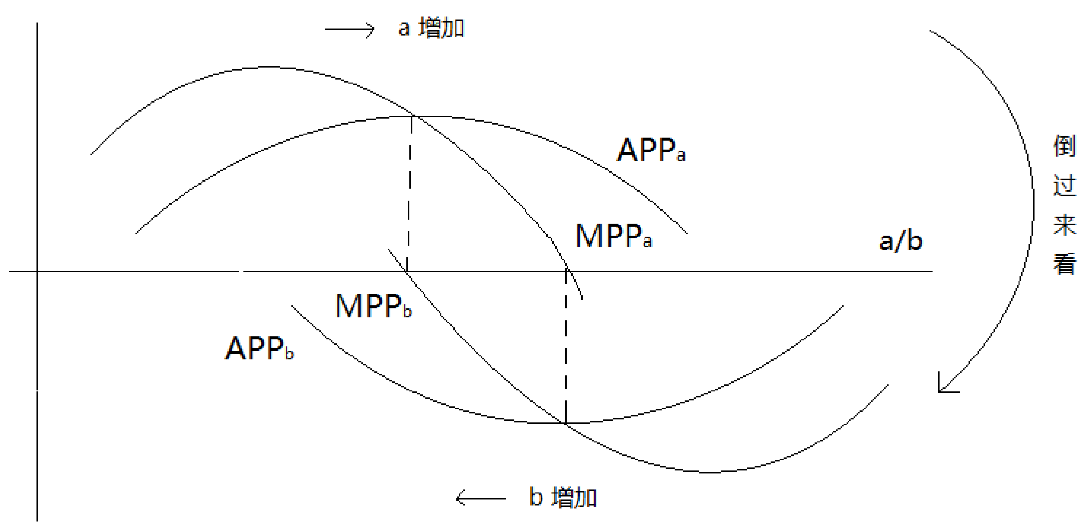
$$APP_a \equiv \frac{f(a,B)}{a}$$

对 a 微分

$$\begin{aligned}\frac{dAPP_a}{da} &\equiv \frac{d}{da}\frac{f(a,B)}{a}\\ &= \frac{f_a}{a} - \frac{f}{a^2}\\ &= \frac{f_a a - f_b B - f_a a}{a^2}\\ &= -\frac{f_b B}{a^2}\end{aligned}$$

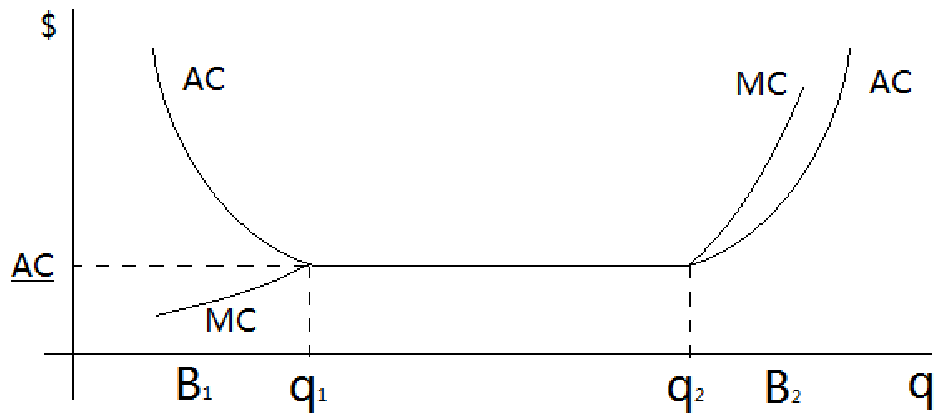
故知，$\dfrac{dAPP_a}{da} \begin{smallmatrix}>\\<\end{smallmatrix} 0 \quad iff \quad f_b(a,B) \begin{smallmatrix}<\\>\end{smallmatrix} 0$.

如果 B 大到使 f_b 变负（即减少其投入反而会增加产量，如一个人种一块很小的地会把禾苗踩坏，个子变小反而产量会增加；又如，要灌溉就必须撒一大缸水，反而会把花泡烂等），则从 a 角度计算的平均产量会上升。由此不难证明，只算入非 b 要素（这里就是 a 要素）支出的成本会呈报酬递增状（平均成本下降）。而在此段（小 q 时）b 要素已经投入太多，故随 q 增加，只会增加投入 a 不会再增加 b 的投入，故对 b 要素的支出仍维持 $P_b B$，故算入二要素支出的总成本 $p_a a + p_b b$ 在 q 较小时为 $p_a a + p_b B$，B 为常数。故如此计算的平均成本 $\dfrac{p_a a^* + p_b B}{q}$ 会随 q 增大而下降。



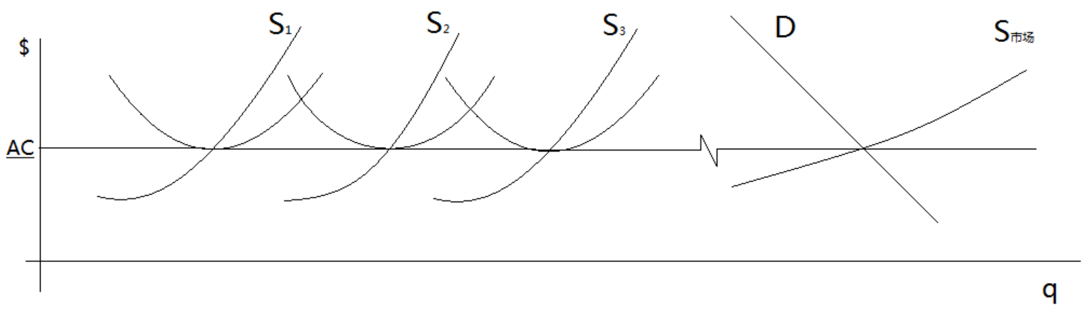
（图 9）

一般的 U 形成本时，市场价格与要素价格的关系如何？零利润的结论能维持吗？



（图 10）

如图 10 所示，设在产量小于q_1时，最优的对b要素的需求量小于其不可分割量B_1，而在其产量大于q_2时，对b要素的供给已经不可能在增加，维持在B_2，而在B_1和B_2之间b要素的供给为正常的水平线。



（图 11）

假如有许多同样的厂，则真正长期市场均衡价格仍会等于最低平均成本。

故如果市价 $p > \underline{AC}$，则此类工厂有利润。

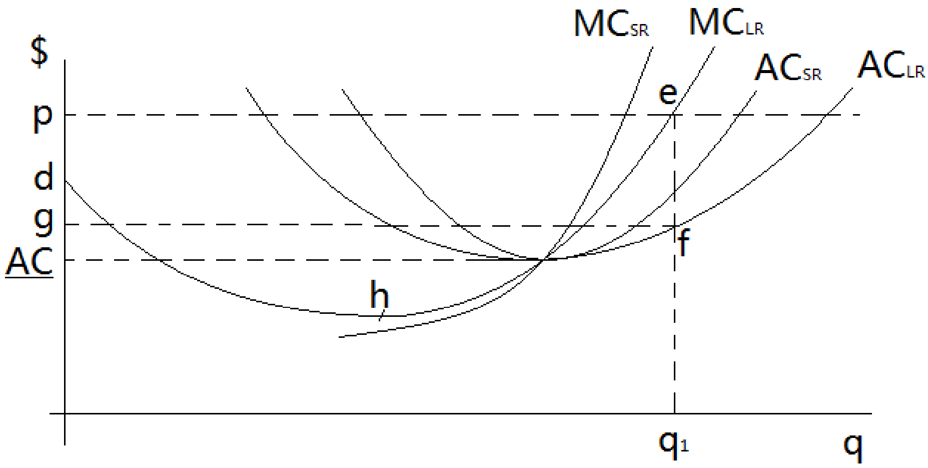
新厂预期利润为

$pefg = pehd$

$=$生产者剩余

=总收入−总成本

$= pq_1 -$（MC_{LR}下的积分）



（图 12）

老厂的产量与利润则会根据其短期的 MC 和 AC 计算（算法与上述预期利润计算相同）。

这种因为市场上价格波动……

附录： 齐次式与欧拉方程

一函数 $f(x,y)$ 为 n 次齐次式，如果对于任何实数 λ 它满足

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

假设 f 为一次齐次式而且可微，

$$(1) \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$$

对 λ 微分，得 $f_x(\lambda x, \lambda y)\cdot x + f_y(\lambda x, \lambda y)\cdot y = f(x,y)$.

让 $\lambda = 1$，得

$$(2) \quad f_x \cdot x + f_y \cdot y = f,$$

即欧拉方程。

而且 f 的一次偏导 f_x, f_y 皆为零次齐次式：

用 x 对(1)式微分得 $\lambda f_x(\lambda x, \lambda y) = \lambda f_x(x, y)$,

两边约掉 λ 得

$$(3) \quad f_x(\lambda x, \lambda y) = f_x(x, y) = \lambda^0 f_x(x, y).$$

同理可证 $f_y(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f_y(x, y)$.

令 $\lambda = \dfrac{1}{y}$，代入(3)式，得

$$(4) \quad f_x(\frac{x}{y}, 1) = f_x(x, y),$$

即，二变数一次齐次式的偏微分只由二变数的比例而定，而不受二变数的绝对量大小影响。