西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

上节课要点复习

□信号的采样与保持

信号采样 $e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$ $E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}$

香农定理 $\omega_s\geq 2\omega_h$

零阶保持器 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$

□z变换理论

z变换：级数求和法和部分分式法

$$E(z)=Z[e^*(t)]=Z[e(t)]=Z[E(s)]$$

$$\Rightarrow E(z)=E^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

z反变换：部分分式法、幂级数法和反演积分法(留数法)

线性离散系统的数学模型

- 线性常系数差分方程：迭代法(递推法),z变换法
- 脉冲传递函数定义：

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}y(nT)z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty}r(nT)z^{-n}}$$

- 由传递函数求脉冲传递函数 $G(s)\Rightarrow L^{-1}[G(s)]=k(t)\Rightarrow$ 离散化 $k(t)=k(nT)\Rightarrow Z[k(nT)]=G(z)$
- 开环系统的脉冲传递函数

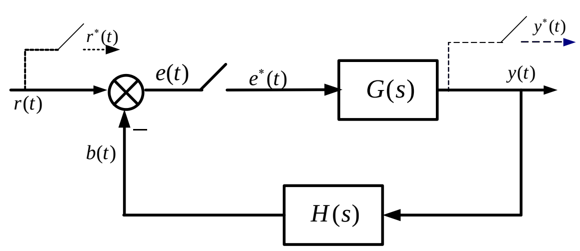
串联环节之间有采样开关时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

串联环节之间无采样开关时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=G_1G_2(z)$$

有零阶保持器时 $$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

- 闭环系统脉冲传递函数

结构图，注意采样开关的位置



$$\Rightarrow W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

7.5 线性离散系统的稳定性与稳态误差

- 本节主要讨论如何在z域和w域中分析离散系统的稳定性，同时给出计算离散系统稳态误差的方法。
- 在z平面上分析离散系统的稳定性，可以借助于连续系统在s平面上稳定性的分析方法。

线性定常离散系统稳定的充要条件

s域到z域的映射关系： $z = e^{Ts}$ (T为采样周期)

$$s = \sigma + j\omega \Rightarrow z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

采样频率： $\omega_s = 2\pi / T \Rightarrow 2\pi = \omega_s T$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega T = \omega T + 2n\pi = (\omega + n\omega_s)T \end{cases}$$

周期性

7.5 线性离散系统的稳定性分析

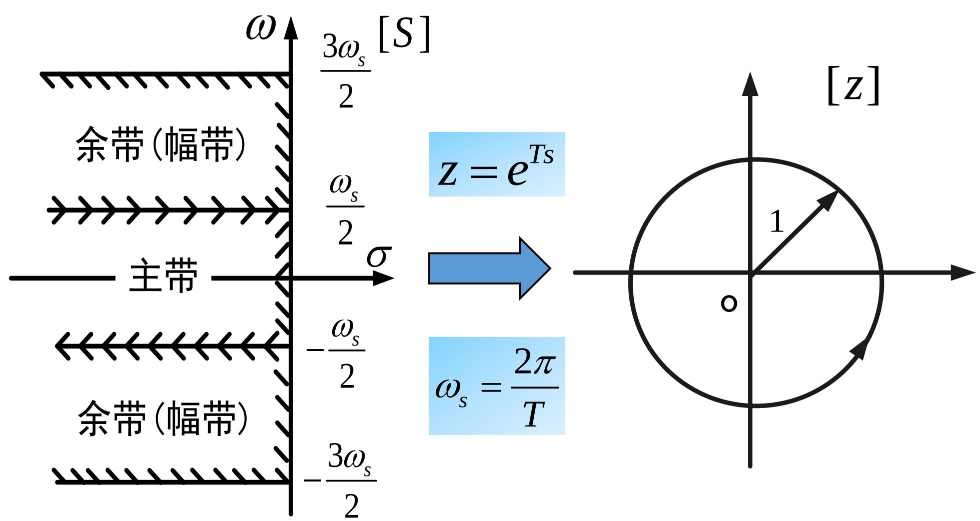
线性定常离散系统稳定的充要条件

$$s=\sigma+j\omega$$

$$\Rightarrow z=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

$$\begin{cases} |z|=e^{\sigma T} \\ \angle z=\omega T=(\omega+n\omega_s)T \end{cases}$$

- 令σ=0，相当于s平面虚轴；
- ω从-∞到+∞时，z平面轨迹是以原点为圆心的单位圆；



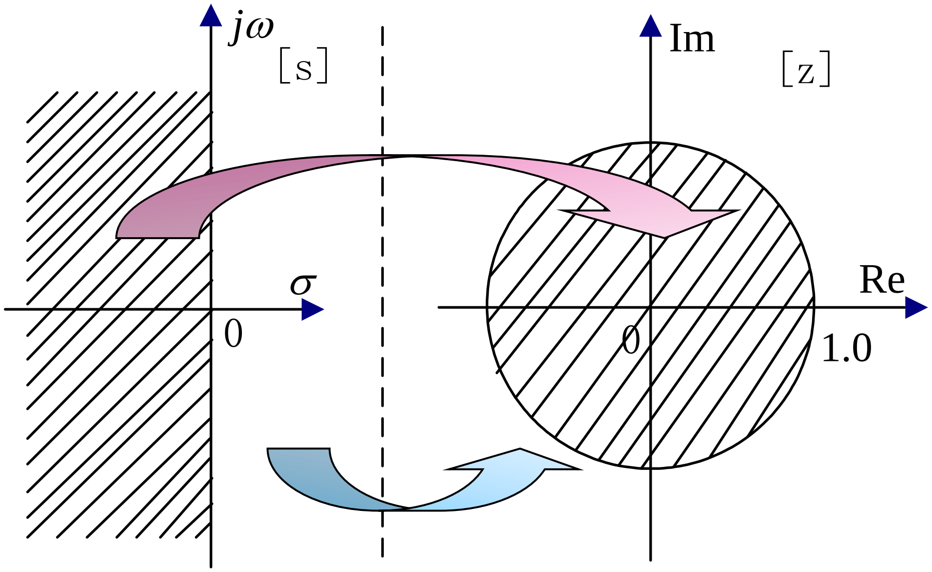
- 当s平面的点从 -ω_s/2移到 ω_s/2时，z平面的相应点沿着单位圆从-π逆时针变化到π，正好转了一圈；
- 当s平面的点从 +ω_s/2移到 3ω_s/2时，z平面的相应点又将逆时针沿着单位圆转过一圈；
- 以此类推，可以把s平面划分为无穷条平行于实轴的周期带，其中从 -ω_s/2到ω_s/2的周期带称为主带，其余的周期带称为辅带。

$$s=\sigma+j\omega$$
$$\Rightarrow z=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$
$$\begin{cases}|z|=e^{\sigma T}\\ \angle z=\omega T=(\omega+n\omega_s)T\end{cases}$$

线性定常离散系统稳定的充要条件

离散系统稳定性的概念与连续系统相同。如果一个线性定常离散系统的脉冲响应序列趋于零，则系统是稳定的，否则系统不稳定。

- s左半平面映射为z平面单位圆内的区域，对应稳定区域；
- s右半平面映射为z平面单位圆外的区域，对应不稳定区域；
- s平面上的虚轴，映射为z平面的单位圆周，对应临界稳定情况，属不稳定。



7.5 线性离散系统的稳定性分析

线性定常离散系统稳定的充要条件

离散控制系统$y(t)$的z变换可以写成：

$$Y(z)=\frac{M(z)}{D(z)}R(z)$$

$M(z)$和$D(z)$是z的多项式，且$D(z)$的阶数高于$M(z)$的阶数。

系统在单位脉冲$R(z)=1$作用下，有：

$$Y(z)=W(z)=\frac{M(z)}{D(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i z}{z-p_i}$$

p_i是$W(z)$的极点。

求$Y(z)$的z反变换，得：

$$y(kT)=\sum_{i=1}^{n}c_i p_i^k$$

要使：$\lim_{k\to\infty} y(kT)=0$ 则：$|p_i|<1,\quad i=1,2,3,\cdots,n$

即，离散系统的全部极点均位于z平面上以原点为圆心的单位圆内。

7.5 线性离散系统的稳定性分析

线性定常离散系统稳定的充要条件

另一方面，如果离散系统的全部极点均位于z平面上以原点为圆心的单位圆内，则有：

$$|p_i|<1, \quad i=1,2,3,\cdots,n$$

则一定有：

$$\lim_{k\to\infty} y(kT)=\sum_{i=1}^{n} c_i p_i^k \to 0$$

脉冲响应序列趋于零，则系统稳定。

综上所述，线性定常离散系统稳定的充要条件是：系统闭环脉冲传递函数的全部极点均分布在平面上以原点为圆心的单位圆内，或者系统所有特征根的模均小于1。

离散系统的稳定性判据(Routh判据)

- 连续系统中的劳斯稳定判据，实质上是用来判断系统特征方程的根是否都在左半s平面；而离散系统的稳定性判断需要确定系统特征方程的根是否都在z平面的单位圆内。
- 在z域中不能直接套用劳斯判据，必须引入z域到w域的线性变换，使z平面单位圆内的区域，映射成w平面上的左半平面，这种新的坐标变换，称为w变换。

离散系统的稳定性判据(Routh判据)

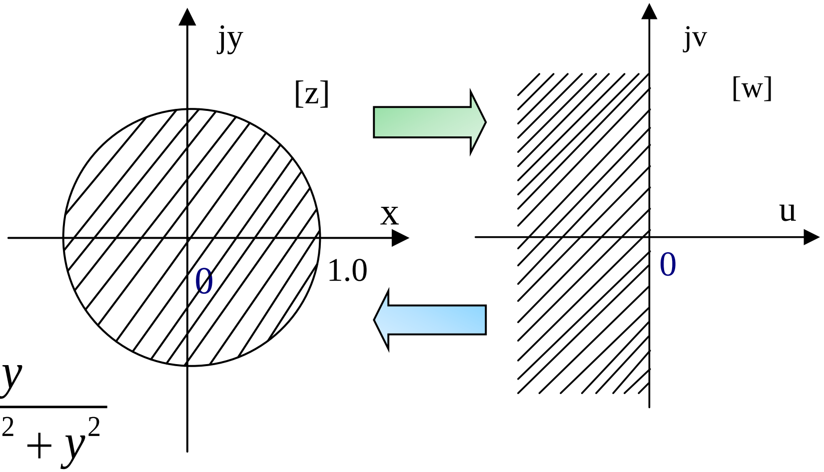
$$z = x + jy \qquad w = u + jv$$

令：

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

则：

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$



$$u + jv = \frac{x+1+jy}{x-1+jy} = \frac{(x^2+y^2)-1}{(x-1)^2+y^2} - j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

- □ $u = 0$ 等价 $x^2+y^2 = 1$，表明w平面的虚轴对应于z平面的单位圆周；
- □ $u < 0$ 等价 $x^2+y^2 < 1$，表明左半w平面对应于z平面的单位圆内的区域；
- □ $u > 0$ 等价 $x^2+y^2 > 1$，表明右半w平面对应于z平面的单位圆外的区域。

离散系统的稳定性判据(Routh判据)

■通过线性变换:

将以z为变量的特征多项式

$\rightarrow$以w为变量的特征多项式

z为变量的特征根是否都位于z平面的单位圆内

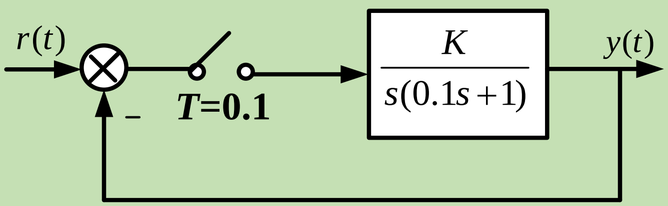
$\rightarrow$ 以w为变量的特征根是否都位于w左半平面

■ w平面上用劳斯判据:

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$

7.5 线性离散系统的稳定性分析

例7.15： 求系统稳定时K的取值



解：

$$G(z)=Z[\frac{K}{s(0.1s+1)}]=\frac{Kz}{z-1}-\frac{Kz}{1-e^{-10T}}$$

$$\xrightarrow{T=0.1} G(z)=\frac{0.632Kz}{z^2-1.368z+0.368}$$

特征方程1+G(z)为：

$$z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

$$\xrightarrow{z=\frac{w+1}{w-1}} \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2+(0.632K-1.368)\left(\frac{w+1}{w-1}\right)+0.368=0$$

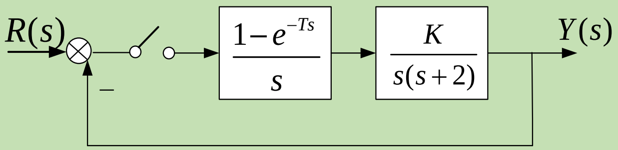
$$\Rightarrow 0.632Kw^2+1.264w+(2.736-0.632K)=0$$

w^2	$0.632K$	$2.736-0.632K$
w^1	1.264	0
w	$2.736-0.632K$	

$$\begin{cases}0.632K>0\\ 2.736-0.632K>0\end{cases} \Rightarrow 0<K<4.33$$

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定当T取0.4s和3s，以及有无保持器时，系统稳定时K的取值



解： 如果没有采样器和保持器，系统为典型二阶系统，对于任意K值，系统总是稳定，采样器和保持器引入将对系统稳定性产生不利影响。

前向通道脉冲传递函数：

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+2)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(s+2)}\right]$$

$$=(1-z^{-1})KZ\left[\frac{-0.25}{s}+\frac{0.5}{s^2}+\frac{0.25}{s+2}\right]=\frac{K}{4}\frac{[2T-(1-e^{-2T})]z+[(1-e^{-2T})-2Te^{-2T}]}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

闭环系统脉冲传递函数：

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

特征方程为：

$$1+G(z)=0$$

分四种情况进行讨论

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定当T取0.4s和3s，以及有无保持器时，系统稳定时*K*的取值

$$G(z)=\frac{K}{4}\frac{[2T-(1-e^{-2T})]z+[(1-e^{-2T})-2Te^{-2T}]}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

① 当 *T* =0.4 sec.时，且有零阶保持器：

$$G(z)=\frac{K}{4}\cdot\frac{0.249z+0.192}{(z-1)(z-0.449)}$$

特征方程1+G(z)=0：

$$z^2+(0.062K-1.449)z+0.048K+0.449=0$$

令$z=\dfrac{w+1}{w-1}$ ，则：

$$0.1215Kw^2+(1.102-0.096K)w+(2.898-0.014K)=0$$

$$\begin{cases}K>0\\1.102-0.096K>0\\2.898-0.014K>0\end{cases}\Rightarrow 0<K<11.479$$

系统稳定。

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定当T取0.4s和3s，以及有无保持器时，系统稳定时K的取值

$$G(z)=\frac{K}{4}\frac{[2T-(1-e^{-2T})]z+[(1-e^{-2T})-2Te^{-2T}]}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

② 当T=3 sec.时，且有零阶保持器：

$$G(z)=\frac{K(1.251z+0.246)}{(z-1)(z-0.002)}$$

特征方程为：

$$z^2+(1.251K-1.002)z+(0.246K+0.002)=0$$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$，则：

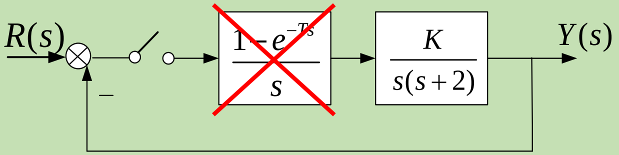
$$1.496Kw^2+(1.995-0.491K)w+(2.005-1.005K)=0$$

$$\begin{cases} K>0 \\ 1.995-0.491K>0 \\ 2.005-1.005K>0 \end{cases} \Rightarrow 0<K<1.995$$

系统稳定。

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定当T取0.4s和3s，以及有无保持器时，系统稳定时K的取值



③ 当T =3 sec.时，去掉零阶保持器：

$$G(z)=Z\left[\frac{K}{s(s+2)}\right]=KZ\left[\frac{0.5}{s}-\frac{0.5}{s+2}\right]$$

$$=0.5K\frac{(1-e^{-2T})z}{(z-1)(z-e^{-2T})}\xrightarrow{T=3}G(z)=0.5K\frac{(1-e^{-6})z}{(z-1)(z-e^{-6})}$$

特征方程为：

$$z^2+[0.5K(1-e^{-6})-(1+e^{-6})]z+e^{-6}=0$$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ ，则：

$$(1-e^{-6})Kw^2+2(1+e^{-6})w+[2(1+e^{-6})-(1-e^{-6})K]=0$$

$$\begin{cases}K>0\\2(1+e^{-6})-(1-e^{-6})K>0\end{cases}\Longrightarrow 0<K<2.010$$

系统稳定。

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定当T取0.4s和3s，以及有无保持器时，系统稳定时*K*的取值

$$G(z)=0.5K\frac{(1-e^{-2T})z}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

④ 当 T =0.4 sec.时，去掉零阶保持器：

$$G(z)=K\frac{0.551z}{(z-1)(z-0.449)}$$

特征方程为：

$$z^2+(0.551K-1.449)z+0.449=0$$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ ，则：

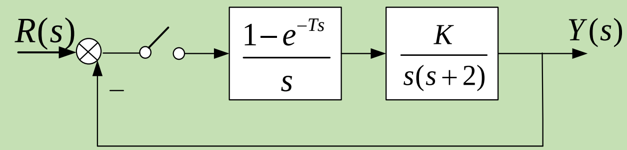
$$0.551Kw^2+(0.551K+1.449)w+(2.898-0.551K)=0$$

$$\begin{cases}K>0\\0.551K+1.449>0\\2.898-0.551K>0\end{cases}\Rightarrow\quad 0<K<5.260$$

系统稳定。

采样周期和保持器对稳定性的影响

例7.16： 确定系统稳定时K的取值



① 当$T=0.4$ sec.时，且有零阶保持器：　$0<K<11.479$　稳定性最好

② 当$T=3$ sec.时，　且有零阶保持器：　$0<K<1.995$

③ 当$T=3$ sec.时，　去掉零阶保持器：　$0<K<2.010$

稳定性较差，T太大频谱混叠，保持器发挥不出作用。

④ 当$T=0.4$ sec.时，去掉零阶保持器：　$0<K<5.260$　稳定性次之

总结：

- □ 稳定性主要受采样周期的影响。$T\uparrow$，稳定性$\downarrow$
- □ 保持器的相位滞后随T增加而变大，将使系统稳定性恶化。

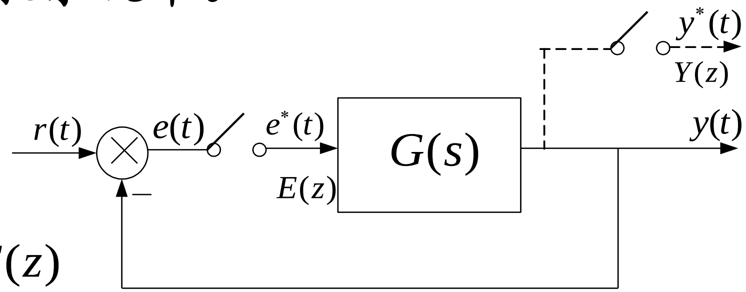
线性离散系统的稳态误差

连续	离散
□ 定义： $e(t)=r(t)-y(t)$	$e(kT)=e^*(t)=r^*(t)-y^*(t)$ $=r(kT)-y(kT)$
$e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{s\to 0}sE(s)$	$e_{ss}^*=\lim\limits_{k\to\infty}e(kT)=\lim\limits_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$
	$z=e^{Ts}\qquad s\to 0\Rightarrow\begin{cases}z\to 1\\ z^{-1}\to 1\end{cases}$
□ 误差传递函数： $E(s)=\dfrac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$	$E(z)=\dfrac{R(z)}{1+G(z)H(z)}$
	注：与采样开关位置有关

线性离散系统的稳态误差

连续系统中计算稳态误差的一般方法和稳态误差系数法，在一定的条件下可以推广到离散系统中。

■ 一般方法（利用终值定理）



$$E(z)=R(z)-Y(z)=R(z)-G(z)E(z)$$

$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z) \qquad W_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e^*(t)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

线性定常离散系统的稳态误差，与系统本身的结构和参数有关，与输入序列有关，而且与采样周期的选取也有关。

线性离散系统的稳态误差

稳态误差系数法

连续 $z=e^{Ts}$ $s\to 0\Rightarrow\begin{cases} z\to 1\\ z^{-1}\to 1\end{cases}$ 离散

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e^{*}(t)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

$$\lim_{z\to 1}G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{K}{(z-1)^{\gamma}}\cdots$$

γ=0、1、2，分别称为0型、I型和II型（离散）系统

线性离散系统的稳态误差

□ 稳态误差系数法

$$\lim_{z\to 1} G(z) = \lim_{z\to 1} \frac{K}{(z-1)^{\gamma}} \cdots$$

① 阶跃输入时的稳态误差

$$r(t) = A\cdot 1(t) \ \Rightarrow R(z) = \frac{Az}{z-1}$$

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]} = \lim_{z\to 1} \frac{A}{1+G(z)} = \frac{A}{1+\lim_{z\to 1} G(z)} = \frac{A}{1+K_p}$$

离散系统的稳态位置误差系数：

$$K_p = \lim_{z\to 1} G(z) = \begin{cases} \not\to \infty & \Rightarrow \quad e_{ss} \neq 0 \quad \textbf{0 型} \\ \to \infty & \Rightarrow \quad e_{ss} = 0 \quad \textbf{I型} \\ \to \infty & \Rightarrow \quad e_{ss} = 0 \quad \textbf{II型} \end{cases}$$

线性离散系统的稳态误差

□ 稳态误差系数法

$$\lim_{z\to 1} G(z) = \lim_{z\to 1} \frac{K}{(z-1)^{\gamma}} \cdots$$

② 斜坡输入时的稳态误差

$$r(t) = At \quad \Rightarrow R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]} = \lim_{z\to 1} \frac{AT}{(z-1)[1+G(z)]} = \frac{AT}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)} = \frac{AT}{K_v}$$

离散系统的稳态速度误差系数：

$$K_v = \lim_{z\to 1}(z-1)G(z) = \begin{cases} \to 0 & \Rightarrow \quad e_{ss} \to \infty & \textbf{0 型} \\ \not\to \infty & \Rightarrow \quad e_{ss} \neq 0 & \textbf{I型} \\ \to \infty & \Rightarrow \quad e_{ss} = 0 & \textbf{II型} \end{cases}$$

线性离散系统的稳态误差

□ 稳态误差系数法

$$\lim_{z\to1} G(z)=\lim_{z\to1}\frac{K}{(z-1)^{\gamma}}\cdots$$

③ 加速度输入时的稳态误差

$$r(t)=\frac{At^2}{2}\ \Rightarrow R(z)=\frac{AT^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}=\lim_{z\to1}\frac{AT^2(z+1)}{2(z-1)^2[1+G(z)]}=\frac{AT^2}{\lim\limits_{z\to1}(z-1)^2G(z)}=\frac{AT^2}{K_a}$$

离散系统的稳态加速度误差系数：

$$K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2G(z)=\begin{cases}\to 0 & \Rightarrow & e_{ss}\to\infty & \textbf{0 型}\\ \to 0 & \Rightarrow & e_{ss}\to\infty & \textbf{I型}\\ \not\to\infty & \Rightarrow & e_{ss}\neq 0 & \textbf{II型}\end{cases}$$

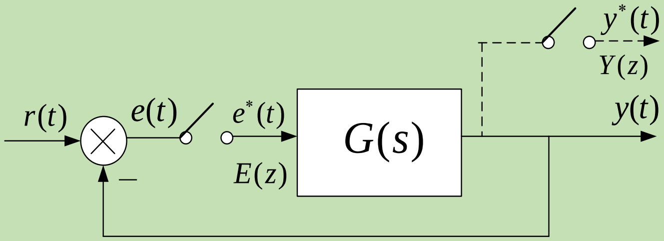
线性离散系统的稳态误差

表7.2 单位反馈离散系统的稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t)=A\cdot 1(t)$	速度误差 $r(t)=A\cdot t$	加速度误差 $r(t)=\frac{At^2}{2}$
0型	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
Ⅰ型	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
Ⅱ型	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

与连续系统相比较，离散系统的速度、加速度稳态误差不仅与K_v、K_a有关，而且与采样周期T有关。

例7.17-7.18： 输入连续信号分别为 $1(t)$, t 和 $t^2/2$ ，试求离散系统的稳态误差系数和稳态误差。



$$T = 1\ \text{sec.} \qquad G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

解：

$$G(z) = Z[G(s)] = \frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} \Rightarrow W_e(z) = \frac{1}{1+G(z)}\bigg|_{T=1} = \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}$$

闭环极点为：
$$\begin{cases} z_1 = 0.368 + j0.482 \\ z_2 = 0.368 - j0.482 \end{cases}$$
闭环极点全部位于平面的单位圆内，系统稳定。

直接求根比劳斯判据简单

① 当 $r(t)=1(t)$ 时：

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \qquad e_{ss} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]} = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368} = 0$$

$$K_p = \lim_{z\to 1} G(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})} = \infty \qquad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

7.5 线性离散系统的稳态误差

例7.17-7.18： 输入连续信号分别为 $1(t)$，t 和 $t^2/2$，试求离散系统的稳态误差系数和稳态误差。

$$G(z)=\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

$$W_e(z)=\frac{1}{1+G(z)}\bigg|_{T=1}=\frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}$$

② 当 $r(t)=t$ 时：

$$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}\qquad e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{T(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}=T=1$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}=1\qquad e_{ss}=\frac{T}{K_v}=1$$

③ 当 $r(t)=t^2/2$ 时：

$$R(z)=\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}\qquad e_{ss}=\lim_{z\to 1}\frac{T^2(z+1)(z-0.368)}{2(z-1)(z^2-0.736z+0.368)}=\infty$$

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{z(1-e^{-1})}{(z-1)(z-e^{-1})}=0\qquad e_{ss}=\frac{T^2}{K_a}=\infty$$

7.6 离散系统的动态性能分析

离散系统单位阶跃响应

离散系统闭环脉冲传递函数：

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}$$

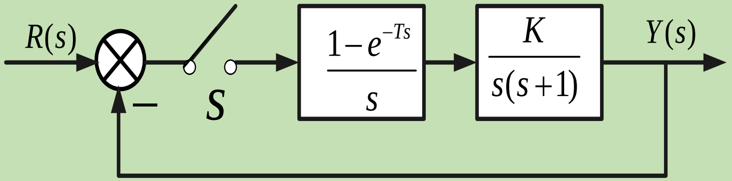
离散系统单位阶跃响应：

$$Y(z)=\frac{z}{(z-1)}W(z)$$

通过z反变换，可求得输出信号**$Y(z)$**的脉冲序列**$y^*(t)$**。设离散系统时域指标的定义与连续系统相同，则根据单位阶跃响应序列**$y^*(t)$**可以方便地分析离散系统的动态性能。

7.6 离散系统的动态性能分析

例7.19： 试分析系统动态性能，其中 $r(t)=1$，$T=1$ sec.，$K=1$。



解：

开环脉冲传递函数：$G(z)=Z\left[\dfrac{1-e^{-sT}}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right]=\dfrac{0.368z+0.264}{(z-1)(z-0.368)}$

闭环脉冲传递函数：$W(z)=\dfrac{G(z)}{1+G(z)}=\dfrac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$ $\Rightarrow$ 分析稳定性

代入 $R(z)=\dfrac{z}{(z-1)}$，则：$Y(z)=W(z)R(z)=\dfrac{0.368z^{-1}+0.264z^{-2}}{1-2z^{-1}+1.632z^{-2}-0.632z^{-3}}$

长除法求得 $Y(nT)$：

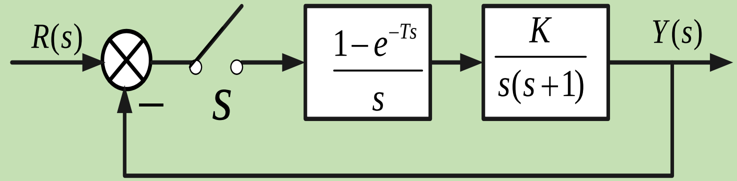
$$y(0T)=0$$

$$y(1T)=0.3679 \qquad y(2T)=1.0000$$

$$y(3T)=1.3996 \qquad y(4T)=1.3996 \qquad \cdots\cdots$$

7.6 离散系统的动态性能分析

例7.19： 试分析系统动态性能，其中 $r(t)=1$，$T=1$ sec.，$K=1$。



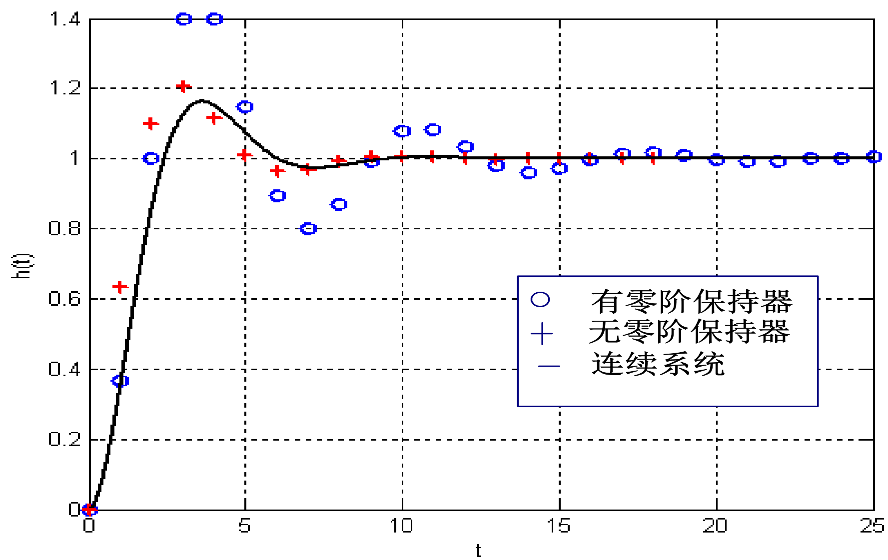
绘出离散系统单位阶跃响应$y^*(t)$图：

由图可以求得离散系统的近似(采样点)性能指标：

超调量： $\sigma\% = 40\%$

峰值时间：$t_p = 4$

调节时间：$t_s = 12$



闭环极点与动态响应的关系

设闭环脉冲传递函数为：

$$W(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{M(z)}{D(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(z-z_j)}{a_n\prod_{k=1}^{n}(z-p_k)}\qquad(m\le n)$$

当$r(t)=1(t)$时，离散系统输出的z变换为：

$$Y(z)=W(z)R(z)=\frac{M(z)}{D(z)}\frac{z}{z-1}\Rightarrow Y(z)=\underbrace{\frac{M(1)}{D(1)}\frac{z}{z-1}}_{\text{稳态分量}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k z}{z-p_k}}_{\text{瞬态分量}}$$

其中： $c_i=\dfrac{M(p_i)}{(p_i-1)D'(p_i)}\qquad D'(p_i)=\left.\dfrac{dD(z)}{dz}\right|_{z=p_i}$

$p_k=|p_k|e^{j\theta_k}\quad \bar{p}_k=|p_k|e^{-j\theta_k}$ θ_k为相角，或者为实数，即 $p_k=\pm|p_k|$

闭环极点与动态响应的关系

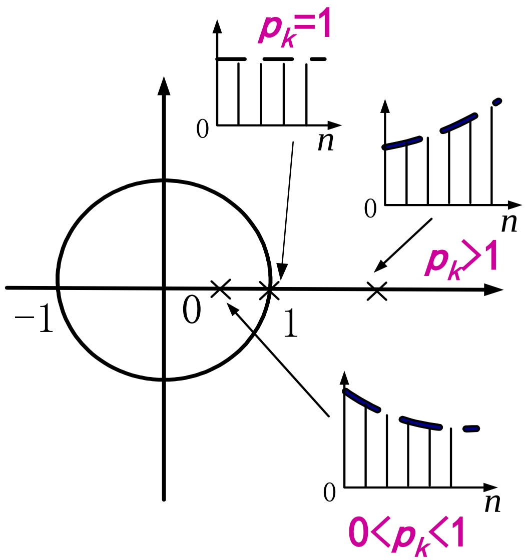
$$Y(z)=\frac{M(1)}{D(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k z}{z-p_k}$$

① 正实轴上的闭环单极点

第k个瞬态分量为：

$$y_k^*(t)=Z^{-1}\left[\frac{c_k z}{z-p_k}\right]\Rightarrow y_k(nT)=c_k p_k^n \qquad k=1,2,3,\cdots,n$$

令 $a=\frac{1}{T}\ln p_k$ ，则：$y_k(nT)=c_k e^{anT} \qquad k=1,2,3,\cdots,n$



- 若$p_k>1$，闭环单极点位于单位圆外的正实轴上，有$a>0$，动态响应$y_k(nT)$是指数规律发散脉冲序列；
- 若$p_k=1$，闭环单极点位于右半z平面单位圆周上，有$a=0$，故动态响应$y_k(nT)=c_k$，为等幅脉冲序列；
- 若$0<p_k<1$，闭环单极点位于单位圆内的正实轴上，有$a<0$，故动态响应$y_k(nT)$是指数规律衰减的脉冲序列，且p_k越接近原点，$|a|$越大，$y_k(nT)$衰减的越快。

闭环极点与动态响应的关系

$$Y(z)=\frac{M(1)}{D(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k z}{z-p_k}$$

② 负实轴上的闭环单极点

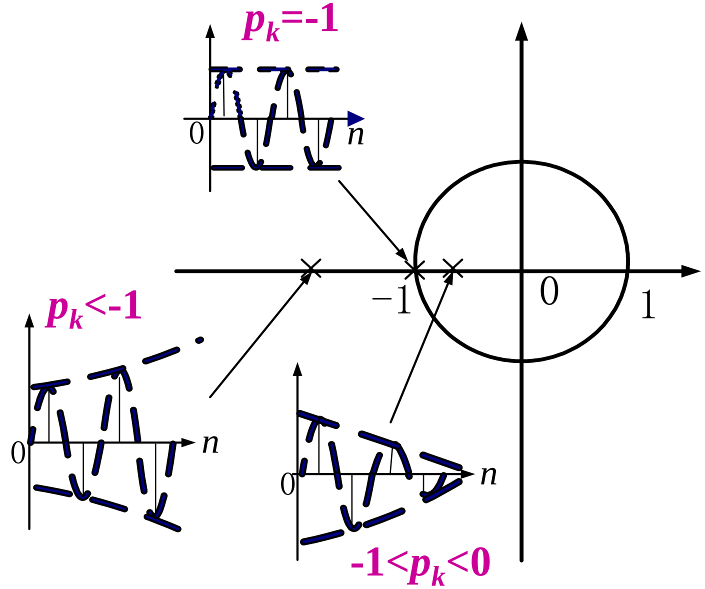
瞬态分量为：

$$y_k(nT)=c_k p_k^n=c_k e^{anT}\qquad k=1,2,3,\cdots,n$$

$$a=\frac{1}{T}\ln p_k$$

p_k为负实数，则n为奇数时，p_k^n为负，则n为偶数时，p_k^n为正，因此动态响应$y_k(nT)$是交替变号的双向脉冲序列

- 若$p_k<-1$，闭环单极点位于单位圆外的负实轴上，$y_k(nT)$为交替变号的发散脉冲序列；
- 若$p_k=-1$，闭环单极点位于左半z平面单位圆周上，$y_k(nT)$为交替变号的等幅脉冲序列；
- 若$-1<p_k<0$，闭环单极点位于单位圆内的负实轴上，$y_k(nT)$为交替变号的衰减的脉冲序列，且p_k越接近原点，$y_k(nT)$衰减的越快。



闭环极点与动态响应的关系

$$Y(z)=\frac{M(1)}{D(1)}\frac{z}{z-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k z}{z-p_k}$$

③ z平面上的共轭复数极点

$p_k=|p_k|e^{j\theta_k}$ $\quad \bar{p}_k=|p_k|e^{-j\theta_k}$ $\quad$ **θ_k为相角**

瞬态分量为：

$$y^*_{k,\bar{k}}(t)=Z^{-1}\left[\frac{c_k z}{z-p_k}+\frac{\bar{c}_k z}{z-\bar{p}_k}\right]\Rightarrow y^*_{k,\bar{k}}(t)=c_k p_k^n+\bar{c}_k\bar{p}_k^n$$

闭环脉冲传递函数的分子多项式与分母多项式的系数均为实数，故 c_k 和 $\bar{c}_k$ 也是一定是共轭复数，则令 $c_k=|c_k|e^{j\phi_k}$， $\bar{c}_k=|c_k|e^{-j\phi_k}$

再令： $\bar{a}_k=\frac{1}{T}\ln(|p_k|e^{-j\theta_k})=\frac{1}{T}\ln(|p_k|)-j\frac{\theta_k}{T}=a-j\omega$ **其中：** $a=\frac{1}{T}\ln|p_k|$， $\omega=\frac{\theta_k}{T}$

则： $y^*_{k,\bar{k}}(t)=c_k p_k^n+\bar{c}_k\bar{p}_k^n=c_k e^{a_k nT}+\bar{c}_k e^{\bar{a}_k nT}$

$$=|c_k|e^{j\phi_k}e^{(a+j\omega)nT}+|c_k|e^{-j\phi_k}e^{(a-j\omega)nT}=2|c_k|e^{anT}\cos(n\omega T+\phi_k)$$

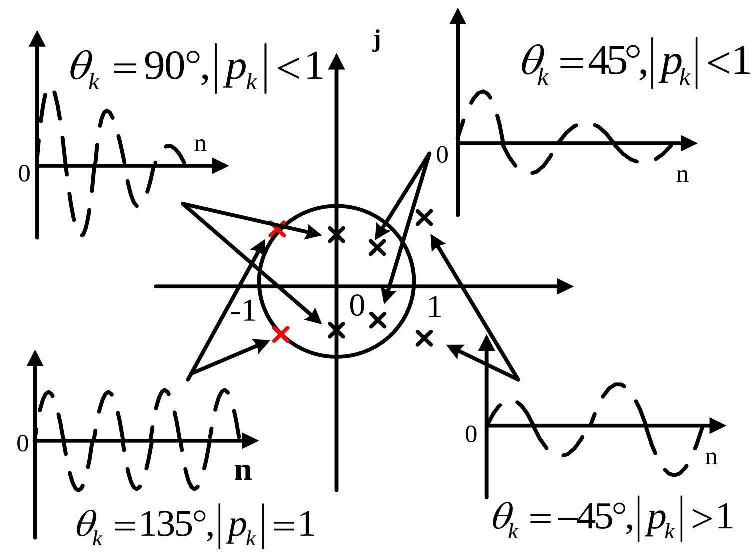
闭环极点与动态响应的关系

$$y^*_{k,\bar{k}}(t)=2|c_k|e^{anT}\cos(n\omega T+\phi_k)$$

③ z平面上的共轭复数极点

$p_k=|p_k|e^{j\theta_k}$　　$\bar{p}_k=|p_k|e^{-j\theta_k}$　　θ_k为相角

- 一对共轭复极点对应的瞬态分量 $y^*_{k,\bar{k}}(nT)$ 按振荡规律变化，振荡频率为ω，在z平面上，共轭复极点相角θ_k越大，ω越高；
- 若$|p_k|>1$，闭环复极点位于单位圆外，有$a>0$，动态响应是振荡发散脉冲序列；
- 若$|p_k|=1$，闭环复极点位于单位圆周上，有$a=0$，故动态响应为等幅振荡脉冲序列；
- 若$0<|p_k|<1$，闭环复极点位于单位圆内，有$a<0$，故动态响应是振荡衰减的脉冲序列，且p_k越小，复极点越接近原点，振荡衰减越快。



应把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内的正实轴上，且尽量靠近原点。零点的影响较难定性分析。

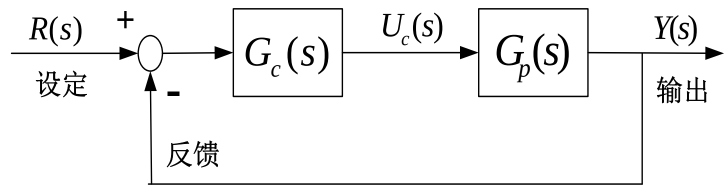
闭环极点与动态响应的关系（结论）

- 当闭环实极点位于z平面的左半单位圆内时，输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差。
- 当闭环复极点位于z平面的左半单位圆内时，输出是衰减的高频脉冲，故系统的动态过程性能欠佳。
- 因此，在设计离散系统时，应把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

- 零点的影响较难定性分析。

7.7 数字PID校正

模拟（连续）PID算式为：



$$u(t)=K_p\left(e(t)+\frac{1}{T_i}\int e(t)dt+T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

$$G_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=K_p\left[1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right]$$

离散后的数字PID算式为：

“求和”代替“积分”（按照梯形积分方式计算结果，通常采用矩形方式积分）

“差分”代替“微分”

$$u(k)=K_p\left\{e(k)+\frac{T}{T_i}\frac{1}{2}\left[\sum_{j=0}^{k}e(j)+\sum_{j=0}^{k-1}e(j)\right]+\frac{T_d}{T}[e(k)-e(k-1)]\right\}$$

位置式PID控制算法

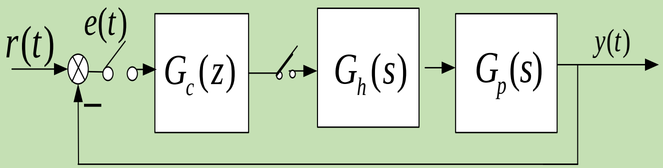
z变换后，数字PID的脉冲传递函数为：

$$G_c(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=K_p\left\{1+\frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\right\}=K_p+K_i\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+K_d\frac{1}{T}(1-z^{-1})$$

如不考虑微分校正，即T_d=0，则数字PI控制器的脉冲传递函数为：

$$G_c(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=K_p+K_i\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

例7.20： 试设计数字PID控制器$G_c(z)$，使系统阶跃响应达到稳态无差，并具有较快的上升速度和较小的超调量，其中保持器是零阶保持器。



$$G_p(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

解： 若采样周期T=0.1 sec.，未校正系统的开环脉冲传递函数为：

$$G_p(z)=Z[G_h(s)G_p(s)]=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{10}{(s+1)(s+2)}\right]=\frac{0.0453(z+0.904)}{(z-0.905)(z-0.819)}$$

则未校正系统的闭环脉冲传递函数为：

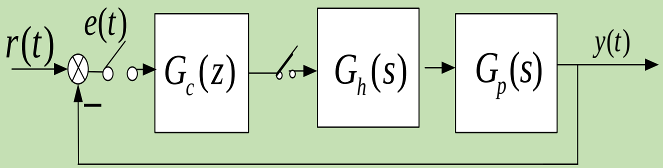
$$G(z)=\frac{G_p(z)}{1+G_p(z)}=\frac{0.0453(z+0.904)}{z^2-1.679z+0.782}$$

单位阶跃输入时系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})E(z)]=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})\frac{1}{1+G_p(z)}\mathrm{R}(z)]=\lim_{z\to1}[1-G(z)]=1-0.837=0.163$$

采用PI控制可提高系统的型号，从而使系统达到稳态无差。

例7.20： 试设计数字PID控制器$G_c(z)$，使系统阶跃响应达到稳态无差，并具有较快的上升速度和较小的超调量，其中保持器是零阶保持器。



$$G_p(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

PI控制器的脉冲传递函数为：

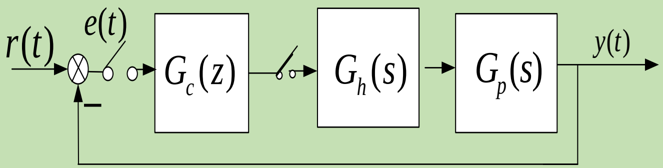
$$G_c(z)=K_p\left[1+\frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\right]$$

$$\Rightarrow G_c(z)\big|_{T_d=0}=K_p\left[1+\frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right]\Bigg|_{K_i=\frac{K_p}{T_i}}=K_p+\frac{TK_i}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\Bigg|_{T=0.1}$$

$$=\frac{2K_p(z-1)+0.1K_i(z+1)}{2(z-1)}=\frac{(0.1K_i+2K_p)z+(0.1K_i-2K_p)}{2(z-1)}$$

$$=\frac{(0.1K_i+2K_p)\left[z+\frac{(0.1K_i-2K_p)}{(0.1K_i+2K_p)}\right]}{2(z-1)}$$

例7.20：试设计数字PID控制器$G_c(z)$，使系统阶跃响应达到稳态无差，并具有较快的上升速度和较小的超调量，其中保持器是零阶保持器。



$$G_p(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

校正后系统的开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=G_c(z)G_p(z)$$

$$=\frac{(2K_p+0.1K_i)\left(z+\boxed{\dfrac{0.1K_i-2K_p}{0.1K_i+2K_p}}\right)}{2(z-1)}\frac{0.0453(z+0.904)}{\boxed{(z-0.905)}(z-0.819)}$$

用零、极点相消法，使：

$$\frac{0.1K_i-2K_p}{0.1K_i+2K_p}=-0.905 \Rightarrow \frac{K_p}{K_i}=1.003$$

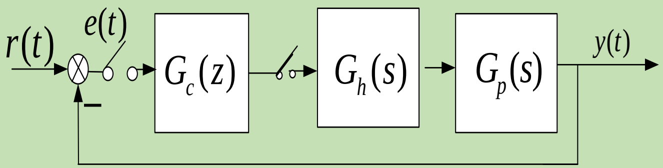
取K_p=1，则K_i=0.997，于是PI控制器的脉冲传递函数为：$G_c(z)=\dfrac{1.05(z-0.905)}{z-1}$

开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{0.0476(z+0.904)}{(z-1)(z-0.819)}$$

由于K_p和K_i偏大，所以阶跃响应超调量也较大。为了减小超调量，使K_p=0.25、K_i=0.249，则上升时间将延长，响应速度将变慢。

例7.20： 试设计数字PID控制器$G_c(z)$，使系统阶跃响应达到稳态无差，并具有较快的上升速度和较小的超调量，其中保持器是零阶保持器。



$$G_p(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

若使用PID控制器，则脉冲传递函数为：

$$G_c(z)=K_p+\frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{T_d}{T}(1-z^{-1})=K_p+\frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{T_d\left(1-z^{-1}\right)}{T}$$

校正后系统的脉冲传递函数为：

$$G(z)=G_c(z)G_p(z)$$
$$=\frac{\boxed{(0.2K_p+0.01K_i+2T_d)z^2+(-0.2K_p+0.01K_i-4T_d)z+2T_d}}{0.2z(z-1)}\times\frac{0.0453(z+0.904)}{\boxed{(z-0.905)(z-0.819)}}$$

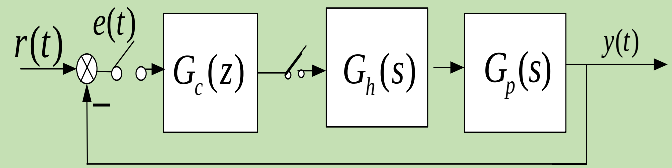
更正教材

假设速度误差系数K_v=5，则：$K_v=\frac{1}{T}\lim\limits_{z\to1}(z-1)G_0(z)=5\Rightarrow 5K_i=5\Rightarrow K_i=1$

使控制器的两个零点与对象的两个极点相消，则：

$$z^2+\frac{0.01K_i-0.2K_p-4T_d}{0.01K_i+0.2K_p+2T_d}z+\frac{2T_d}{0.01K_i+0.2K_p+2T_d}=(z-0.905)(z-0.819)$$

例7.20： 试设计数字PID控制器$G_c(z)$，使系统阶跃响应达到稳态无差，并具有较快的上升速度和较小的超调量，其中保持器是零阶保持器。



$$G_p(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

解得：$K_p=1.45$，$T_d=0.43$，$K_i=1$。

控制器的脉冲传递函数为：$G_c(z)=\dfrac{5.8(z-0.905)(z-0.819)}{z(z-1)}$

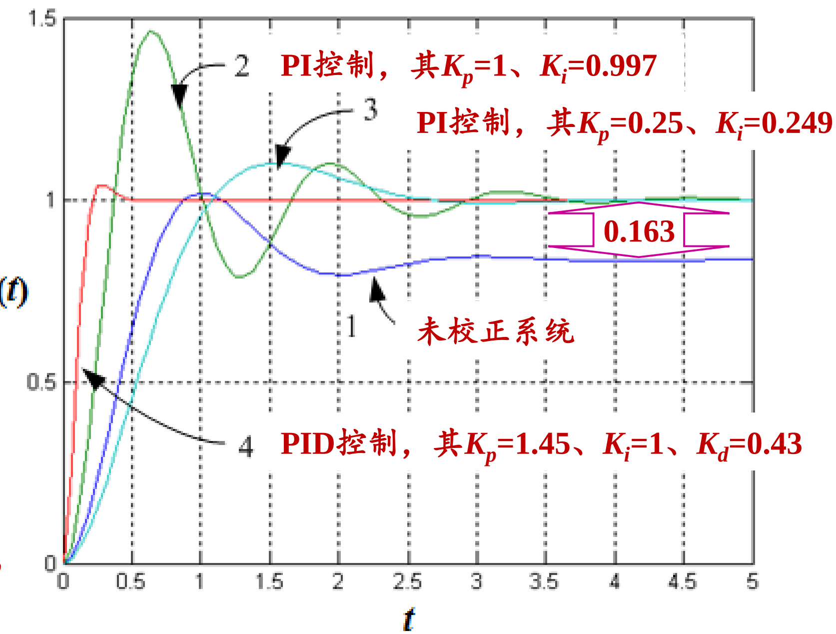
系统的开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=\frac{0.263(z+0.904)}{z(z-1)}$$

系统的闭环脉冲传递函数为：

$$W(z)=\frac{0.263(z+0.904)}{z^2-0.737z+0.238}$$

更正教材



曲线2的PI控制实际类似纯积分控制，$e_{ss}=0$，虽然降低PI系数可抑制超调，但最好加入微分作用。

任务：

为硬盘读写系统设计一个合适的数字PID控制器。

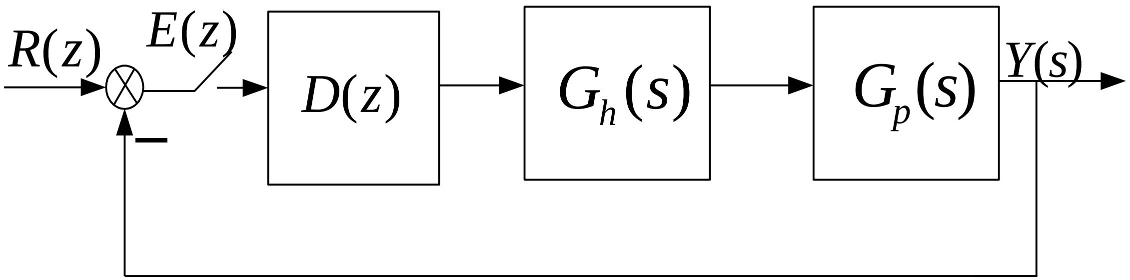


图7.37 带有数字控制器的反馈控制系统

其中：$G_p(s)$是硬盘系统的被控对象

$G_h(s)$是零阶保持器

采样周期选为T=1 ms

首先确定**G(z)**，有： $G(z)=Z[G_h(s)G_p(s)]$

由于 $G_p(s)=\dfrac{5}{s(s+20)}$ 故有：$G_h(s)G_p(s)=(\dfrac{1-e^{-sT}}{s})\dfrac{5}{s(s+20)}$

当*a*=20，*T*=1 ms时，e^{-aT}=0.98，且*s*=-20对响应影响不大。

则$\boldsymbol{G_p(s)}$可近似为：$G_p(s)\cong\dfrac{0.25}{s}$

系统的开环脉冲传递函数为：

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}(\frac{0.25}{s})\right]=(1-z^{-1})(0.25)Z\left[\frac{1}{s^2}\right]$$

$$=(1-z^{-1})(0.25)\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]=\frac{0.25T}{(z-1)}=\frac{0.25\times10^{-3}}{(z-1)}$$

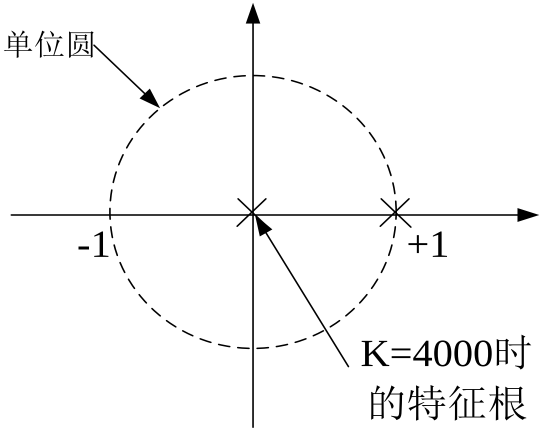
7.9连续设计示例：硬盘读写系统的离散控制系统设计

若取控制器为比例控制器**_D_(_z_)=_K_**，则有：

$$D(z)G(z)=\frac{K(0.25\times10^{-3})}{(z-1)}$$

根轨迹如图所示。当**_K_=4000**时，有：

$$D(z)G(z)=\frac{1}{z-1}$$



对应的闭环脉冲传递函数为：

$$W(z)=\frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}=\frac{1}{z}$$

这时系统阶跃响应超调量为0%，调节时间为2ms。阶跃响应曲线如下图。

7.9连续设计示例： 硬盘读写系统的离散控制系统设计

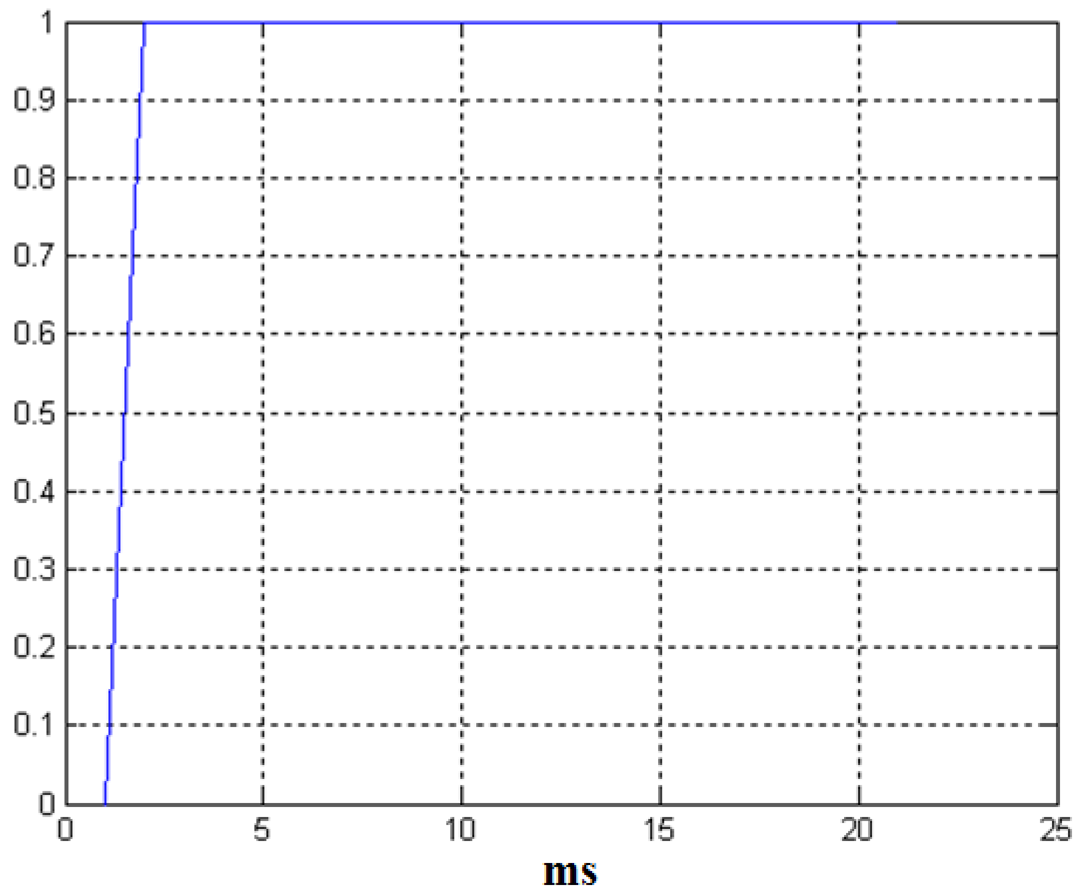


图7.39 硬盘读写系统的闭环阶跃响应

7 本节课小结

- 线性定常离散系统稳定的充要条件

系统闭环脉冲传递函数的全部极点均分布在平面上以原点为圆心的单位圆内，或者系统所有特征根的模均小于1。

- 通过线性变换：$z=\dfrac{w+1}{w-1}$

将以z为变量的特征多项式

$\rightarrow$以w为变量的特征多项式

z为变量的特征根是否都位于z平面的单位圆内

$\rightarrow$ 以w为变量的特征根是否都位于w左半平面

应用劳斯判据即可判断系统稳定性。

对于简单定常二阶系统，也可简单求根判断稳定性。

线性离散系统的稳态误差

单位反馈离散系统稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t)=A\cdot 1(t)$	速度误差 $r(t)=A\cdot t$	加速度误差 $r(t)=\dfrac{At^2}{2}$
0型	$\dfrac{A}{1+K_p}$	∞	∞
Ⅰ型	0	$\dfrac{AT}{K_v}$	∞
Ⅱ型	0	0	$\dfrac{AT^2}{K_a}$

$$\lim_{z\to 1} G(z)=\lim_{z\to 1}\frac{K}{(z-1)^{\gamma}}\cdots$$

$$K_p=\lim_{z\to 1} G(z)$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$$

$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2 G(z)$$

与连续系统相比较，离散系统的速度、加速度稳态误差不仅与K_v、K_a有关，而且与采样周期T有关。

闭环极点与动态响应的关系（结论）

- 当闭环实极点位于z平面的左半单位圆内时，输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差。
- 当闭环复极点位于z平面的左半单位圆内时，输出是衰减的高频脉冲，故系统的动态过程性能欠佳。
- 因此，在设计离散系统时，应把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

- 零点的影响较难定性分析。

作业

- 7.8
- 7.11
- 7.14

写清题号，不用抄题；