第2章　连续时间系统的时域分析

信号用单值数学函数表示，对实际信号，其数学函数表示可能极其复杂。其实，一个信号一般也可以用某种特殊形式信号的线性组合表示，正弦信号、复指数信号、阶跃信号和冲激信号均可用来表示其他信号，把它们统称为基本信号。对 LTI 系统，若用基本信号表示系统的输入，利用 LTI 系统的线性和时不变性，系统的响应就可以借助系统对基本信号的响应求解。本章重点介绍连续时间系统的卷积法分析，该方法的本质是用冲激信号表示任一输入，系统的响应用系统对冲激信号的响应（冲激响应）求解。由于冲激信号的组合能够表示任一信号，LTI 系统的冲激响应就能够反映系统的性质，因此，LTI 系统除了用微分方程描述外，也可以用冲激响应描述。

2.1　基本信号

在信号分析中，复杂确定信号常用某种信号的组合表示，这些可用来表示相当广泛的一类信号的函数称为基本信号。常用的基本信号有：正弦信号、复指数信号、阶跃信号和冲激信号。正弦信号和复指数信号的导数均为连续函数，称为普通信号，而阶跃信号和冲激信号本身非连续，它们不存在连续函数范畴的导数概念，故把它们称为奇异信号。

正弦信号

正弦信号定义为

$$x(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\theta) \tag{2-1}$$

正弦信号的波形如图 2-1所示。A 称为振幅，θ 称为初相，ω 称为振荡角频率，单位 rad/s，ω 反映了相位 $(\omega t+\theta)$ 对时间 t 的变化率，即

$$\omega=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t+\theta)$$

正弦信号总是周期的，周期 $T=2\pi/\omega$。式(2-1)中 A、θ、a、b 间的关系为

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\,,\qquad \theta=\arctan(\frac{-b}{a})$$

$$a=A\cos\theta\,,\qquad b=-A\sin\theta$$

正弦信号的时间移位、导数仍为同频率的正弦信号，同频率的正弦信号相加也为

正弦信号。

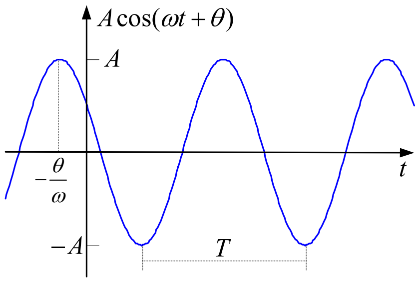


图2-1 正弦信号

复指数信号

实际信号均为实信号，而数学函数表示的信号也可以为复信号，复信号的运算有时比较方便。用 j 表示复数的虚单位，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，根据欧拉公式：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$$

用$-\theta$置换上式中的θ，可得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}=\cos\theta-\mathrm{j}\sin\theta$$

从以上两式得

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}] \tag{2-2}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta})=\mathrm{Im}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}] \tag{2-3}$$

其中 $\mathrm{Re}[\cdot]$ 表示取实部，$\mathrm{Im}[\cdot]$ 表示取虚部。利用式(2-2)所示关系，式(2-1)所示的正弦信号就可以表示为

$$A\cos(\omega t+\theta)=\mathrm{Re}[A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}]=\mathrm{Re}[A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{2-4}$$

其中c为复常数，$c=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$。可见：$c$的模$|c|$为正弦信号的振幅$A$，$c$的辐角为正弦信号的初相$\theta$。

虚指数信号定义为

$$x(t)=c\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{2-5}$$

其中c为复常数。虚指数信号的实部或虚部均为正弦信号，振幅为恒定值，故也称其为等振幅复指数信号，简称复指数信号。

一般形式的复指数信号定义为

$$x(t)=c\mathrm{e}^{st}=c\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=c\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{2-6}$$

其中s为复数，$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，称为复频率。尽管在实际中不能像测量时间变量那样测量复频率变量，但它在线性系统分析中是一个极其有用的概念。由式(2-6)，s的虚部ω决定了信号的振荡速率，实部σ决定了信号振幅的变化，$\sigma<0$时振幅$\mathrm{e}^{\sigma t}$随时间推移减

小，$\sigma>0$ 时振幅 $\mathrm{e}^{\sigma t}$ 随时间推移增大，$\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)$ 的波形如图 2-2所示。

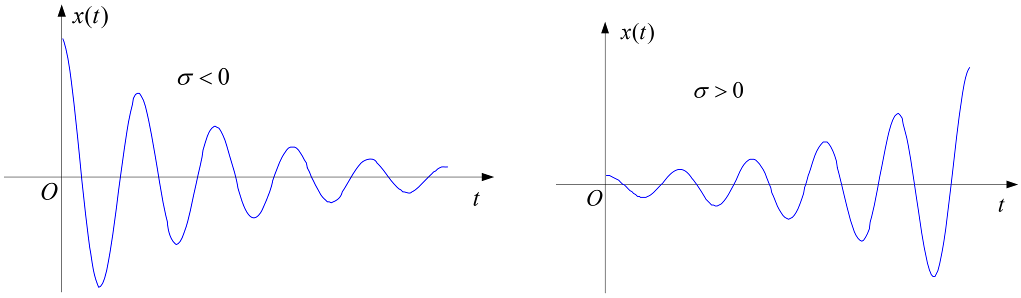


图2-2　$x(t)=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t)$ 的波形

复指数信号 e^{st} 在 σ 、ω 取不同值时可以表示多种类型的信号：

（1）实指数信号 $\mathrm{e}^{\sigma t}=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}0)t}$；

（2）虚指数信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\mathrm{e}^{(0+\mathrm{j}\omega)t}$；

（3）正弦信号 $\cos(\omega t+\theta)=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}]=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$；

（4）恒定信号 $1=\mathrm{e}^{0\cdot t}$

复指数信号 $c\mathrm{e}^{st}$ 是连续时间信号与系统分析中最为重要的信号之一。

阶跃信号

实际连续时间信号的变化总是连续的，不能在某一时刻突变。尽管如此，当信号从一个值变化到另一个值所需要的时间非常短暂时，为了简化问题的分析，可近似抽象成信号值在瞬间发生了变化。为了能够表示这种理想化的信号，信号理论中定义了（单位）阶跃信号。

阶跃信号用 $\varepsilon(t)$ 表示[①]，定义为

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases} \tag{2-7}$$

信号 $\varepsilon(t)$ 在 $t=0_-$ 时刻的值 $\varepsilon(0_-)=0$，在 $t=0_+$ 时刻的值 $\varepsilon(0_+)=1$，在 $t=0$ 处的值无定义。$\varepsilon(t)$ 的波形如图 2-3所示。

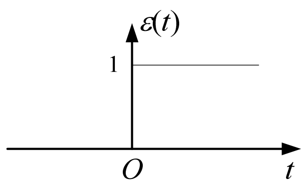


图2-3　阶跃信号

电路中，电源的突然接入可使用阶跃信号表示。例如，图 2-4（a）所示电路中，设方框内电路中的电压电流在 $t<0$ 时为零，开关在 $t=0$ 时闭合，由于电压 $u(t)$ 在 $t<0$

① 英美教材中常用 $u(t)$ 表示，也称为Heaviside函数。

时为零，在$t>0$时为直流电源电压U_S，故

$$u(t)=U_S\varepsilon(t)$$

于是，直流电压源和开关组成的部分就可以用电压为$U_S\varepsilon(t)$的电压源表示，如图 2-4（b）所示。

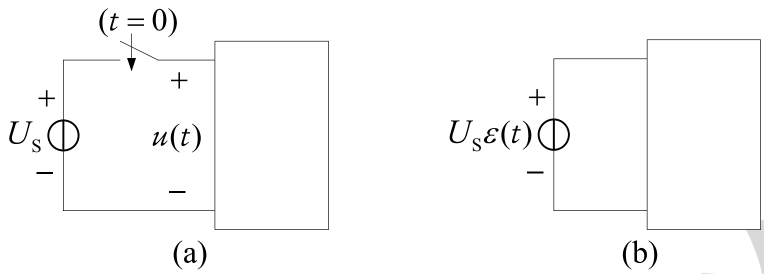


图2-4　阶跃电压

延迟t_0时间的阶跃信号$\varepsilon(t-t_0)$为

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$

如图 2-5所示。

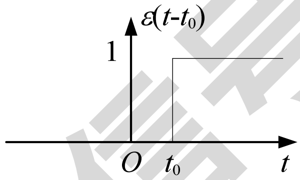


图2-5　延迟t_0时间的阶跃信号

若把两个起始点分别为t_1、t_2的阶跃函数相减，设

$$p(t)=\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2),\qquad t_1<t_2$$

由阶跃函数的定义得

$$p(t)=\begin{cases}0-0=0, & t<t_1\\ 1-0=1, & t\in(t_1,t_2)\\ 1-1=0, & t>t_2\end{cases}$$

于是

$$p(t)=\begin{cases}1, & t\in(t_1,t_2)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$p(t)$为矩形脉冲，如图 2-6所示。

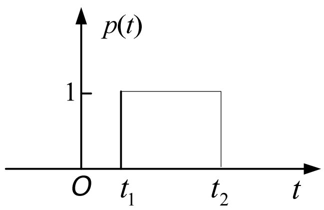


图2-6　矩形脉冲

任一有界函数$x(t)$若与$\varepsilon(t)$相乘，由$\varepsilon(t)$定义可得

$$x(t)\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t), & t>0\end{cases}$$

可见，$x(t)\varepsilon(t)$ 截取了 $t>0$ 部分的 $x(t)$，如图 2-7所示。

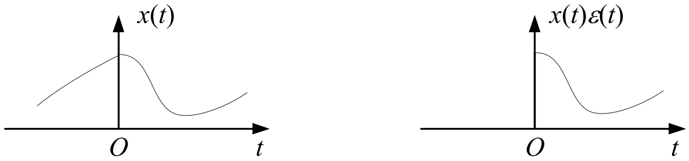


图2-7　函数 $t>0$ 部分的截取

给函数 $x(t)$ 乘以矩形脉冲 $p(t)$ 则可截取出脉冲范围内的 $p(t)$，如图 2-8 所示。

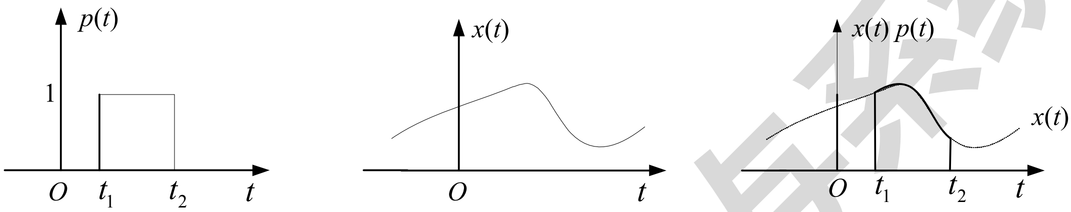


图2-8　信号的截取

利用阶跃函数还可以把分段光滑函数用一个表达式表示。设

$$x(t)=\begin{cases}x_1(t), & t<0\\ x_2(t), & 0<t<t_1\\ x_3(t), & t_1<t\end{cases}$$

利用阶跃函数的截取性质，$x(t)$ 还可以表示为

$$\begin{aligned}x(t)&=x_1(t)\left[1-\varepsilon(t)\right]+x_2(t)\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_1)\right]+x_3(t)\varepsilon(t-t_1)\\&=x_1(t)+\left[x_2(t)-x_1(t)\right]\varepsilon(t)+\left[x_3(t)-x_2(t)\right]\varepsilon(t-t_1)\end{aligned}$$

例2-1　设 $x(t)$ 在 $t=0$ 处有界，试证明

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=[\int_{0}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau]\varepsilon(t)$$

证明：令

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$$

当 $t<0$ 时，$x(t)\varepsilon(t)=0$，故

$$y(t)=0\qquad(t<0)$$

当 $t>0$ 时，上式积分为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{0_-}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0_-}^{0_+}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{0_+}^{t}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式第 1 项积分为零；第 2 项积分中，由于 $x(t)\varepsilon(t)$ 在 $t\in(0_-,0_+)$ 内有界，而积分区间无限窄，故第 2 项积分也为零；第 3 项积分中由于 $\varepsilon(\tau)$ 总为 1，故

$$y(t)=\int_{0_+}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (t>0)$$

由上，适合于整个时间轴的 $y(t)$ 为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=[\int_{0}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau]\varepsilon(t)$$

若令上式中 $x(t)=1$，上式为单位阶跃函数的积分，则

$$\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=t\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t>0\end{cases} \tag{2-8}$$

$t\varepsilon(t)$ 称为（单位）斜变信号，如图 2-9所示。式(2-8)的逆关系为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[t\varepsilon(t)\right]=\varepsilon(t)$$

即斜变信号的导数为阶跃信号。

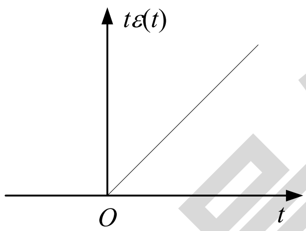


图2-9　单位斜变函数

冲激信号

实际中会遇到持续期很短但幅值却相当大的信号，例如，当两个刚体发生碰撞时，每一刚体所受到的力就具有这种特征。这类信号由于持续期非常短暂，持续时间和信号幅值的精确描述一般并不重要，这类信号对系统的作用效果与信号的冲量（幅值与持续时间的乘积）有关。冲激信号就是用来描述可产生冲量的这类信号，它是信号与系统理论中最为重要的信号之一。

冲激信号可用图 2-10所示的窄脉冲近似，设脉冲宽度为 τ 、幅度为 $1/\tau$，不论 τ 为何值，脉冲所构成的面积总为 1，即使在脉冲宽度 $\tau\to 0$ 时。图 2-10所示窄脉冲在 $\tau\to 0$ 时就为（单位）冲激信号，用符号 $\delta(t)$ 表示，它为 $t=0$ 处无限窄又无限高、但它与时间轴构成的面积（即信号在整个时间轴上的积分）总为 1。从普通函数的角度考虑，冲激信号 $\delta(t)$ 在 $t\in(0_-,0_+)$ 内值非有限，否则，它的积分一定为零。冲激信号是一个理想化的信号，在实际中并不存在。尽管如此，它在工程中却是很有用的，这好比 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 在自然界是一个不存在的数字一样，但电气工程中使用j却相当广泛。

冲激信号 $\delta(t)$ 也称为单位信号、狄拉克(Dirac)信号，具有如下特征：

$$\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1 \\ \lim\limits_{t\to 0}\delta(t)=\infty\end{cases} \tag{2-9}$$

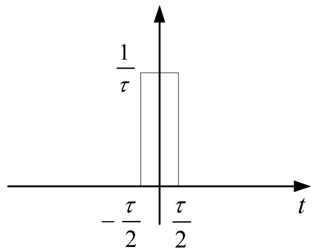


图2-10　面积为 1 的窄脉冲

若给 $\delta(t)$ 乘以常数 k， $k\cdot\delta(t)$ 给出的冲激信号在无穷区间的积分（信号“波形”的面积）就等于 k，常称该系数为冲激信号的“强度”。冲激信号的图像用箭头表示，其强度标注在箭头旁边，如图 2-11所示。其中，$\delta(t-t_0)$ 为冲激出现在 t_0 时刻的冲激信号。

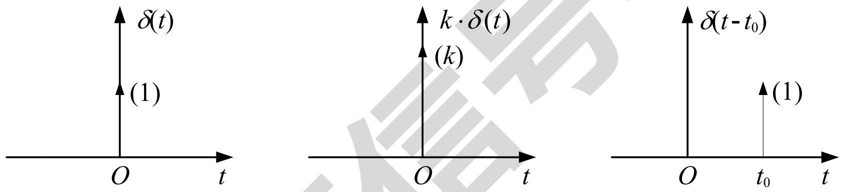


图2-11　冲激信号

除矩形脉冲外，其他一些脉冲，例如图 2-12所示的三角脉冲，只要在脉冲宽度趋近于零时能够满足式(2-9)，它就为冲激信号。

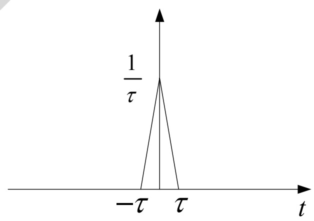


图2-12　三角脉冲

由式(2-9)，冲激信号 $\delta(t)$ 的积分

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

可见，积分结果为阶跃信号，即

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t) \tag{2-10}$$

由微积分知识，上式的逆关系应该为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-11}$$

即阶跃信号的导数为冲激信号。然而，按严格的普通函数的微积分知识，$\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处不存在导数。如果令 $\varepsilon_{\tau}(t)$ 为图 2-13所示的函数，$\varepsilon(t)$ 可看作是 $\varepsilon_{\tau}(t)$ 在 $\tau\to 0$ 时的极限。对 $\varepsilon_{\tau}(t)$ 求导，$\mathrm{d}\varepsilon_{\tau}(t)/\mathrm{d}t$ 的波形如图 2-10所示。当 $\tau\to 0$ 时，$\mathrm{d}\varepsilon_{\tau}(t)/\mathrm{d}t$ 为冲激函数 $\delta(t)$。

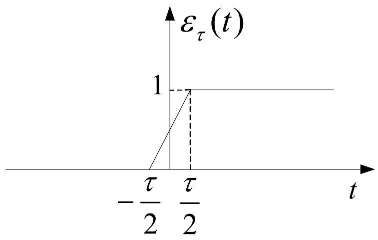


图2-13　$\varepsilon_{\tau}(t)$ 的波形

设 $x(t)$ 在 $t=0$ 处连续，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t = x(0) \tag{2-12}$$

证明：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0_-} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t + \int_{0_-}^{0_+} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t + \int_{0_+}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{0_-}^{0_+} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} x(0)\delta(t)\mathrm{d}t \\ &= x(0)\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = x(0)\end{aligned}$$

若 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续，同理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0) \tag{2-13}$$

式(2-13)表明，$\delta(t)$ 具有抽取信号 $x(t)$ 值的作用，故称为 $\delta(t)$ 的抽样性质。式(2-12)或式(2-13)实际上为 $\delta(t)$ 信号的广义函数定义，与普通函数的定义方式不同，它不是按函数的“值”定义，而是按函数所起的“作用”定义。式(2-12)所给定义可表述为：对任一连续函数 $x(t)$，若它与某个函数的乘积在整个时间轴上的积分等于 $x(0)$，则该函数就为冲激强度等于 1 的冲激函数。

由式(2-13)可得

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{2-14}$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \tag{2-15}$$

式(2-15)表明：当信号 $x(t)$ 为连续函数时，给它乘以 t_0 时刻的单位冲激信号 $\delta(t-t_0)$，其结果是 t_0 时刻的冲激，冲激强度为 $x(t)$ 在 t_0 时刻的值。

例2-2　化简下列各式：（1）$t\delta(t-2)$；（2）$t\delta(t)$；（3）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\right]$。

解：（1）据式(2-15)有

$$t\delta(t-2)=2\delta(t-2)$$

（2）由于 $t\delta(t)=0\cdot\delta(t)$，它在 $t=0$ 处“似乎”为不定值。对任一连续函数 $x(t)$，由于 $\underline{x(t)}\cdot\underline{t\delta(t)}=\underline{tx(t)}\cdot\underline{\delta(t)}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underline{x(t)}\cdot\underline{t\delta(t)}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{tx(t)}\cdot\underline{\delta(t)}\mathrm{d}t$$

根据式(2-12)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underline{tx(t)}\cdot\underline{\delta(t)}\mathrm{d}t=tx(t)\big|_{t=0}=0$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot\underline{t\delta(t)}\mathrm{d}t=0$$

又

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot 0\mathrm{d}t=0$$

由于 $x(t)$ 的任意性，从以上两式得

$$t\delta(t)=0$$

（3）$\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 可看成 e^{-2t} 与 $\varepsilon(t)$ 相乘，采用分部求导的方法，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\right]=-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)$$

由于 $\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)=\mathrm{e}^{-2\times 0}\delta(t)=\delta(t)$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\right]=-2\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

例2-3　求图 2-14所示信号 $x(t)$ 的一阶导数 $x'(t)$。

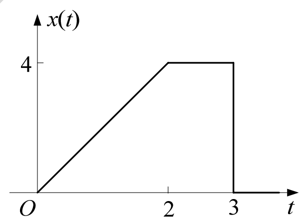


图2-14　例 2-3

解：　$x(t)$ 可表示为

$$x(t)=\begin{cases}2t, & 0<t<2\\ 4, & 2<t<3\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}x(t)&=2t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]+4\left[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-3)\right]\\&=2t\varepsilon(t)+(4-2t)\varepsilon(t-2)-4\varepsilon(t-3)\end{aligned}$$

对上式求导，得

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= 2\varepsilon(t)+2t\delta(t)-2\varepsilon(t-2)+(4-2t)\delta(t-2)-4\delta(t-3) \\
&= 2\varepsilon(t)-2\varepsilon(t-2)-4\delta(t-3)
\end{aligned}
$$

$x'(t)$ 的波形如图 2-15所示。其实，可采用对 $x(t)$ 逐段求导的方法求出 $x'(t)$。在 $0<t<2$ 范围内，$x(t)$ 为斜线，其斜率 $x'(t)=2$；在 $2<t<3$ 范围内，$x(t)$ 为恒定值，故 $x'(t)=0$；在 $t=3$ 处，$x(t)$ 不连续，从 4 跃变为 0，其跃变量为 -4，故在 $t=3$ 处 $x'(t)=-4\delta(t-3)$。

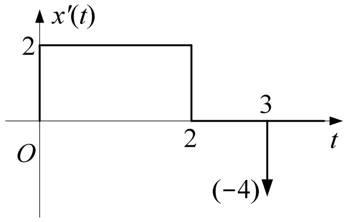
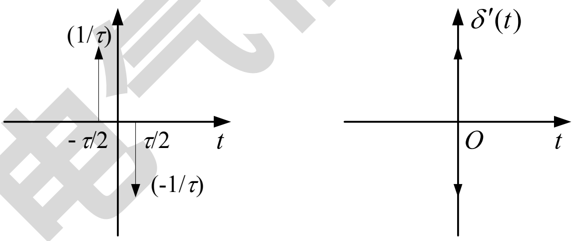


图2-15　$x'(t)$ 的波形

若用图 2-10所示的矩形脉冲近似冲激信号，对矩形脉冲求导，其导数如图 2-16（a）所示，它由两个冲激构成。当 $\tau\to 0$ 时，这两个冲激在时间上无限靠近，且强度趋于无限大，称它为（单位）冲激偶信号，用 $\delta'(t)$ 表示，即

$$
\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-16}
$$

冲激偶信号的图像表示如图 2-16-b所示。



(a)　　(b)

图2-16　冲激偶信号

类似地，还可定义 $\delta(t)$ 的高阶导数。由 $\delta(t)$ 的导数、积分所派生的信号统称为奇异信号，$\delta(t)$ 的各阶导数统称为高阶冲激。特别指出：冲激、高阶冲激的乘积，如 $\delta^2(t)$，$\delta(t)\delta'(t)$ 等没有意义。

2.2 系统的方程描述

输入输出微分方程

设系统的输入和输出分别为 $x(t)$ 和 $y(t)$。对 LTI 系统，$y(t)$ 与 $x(t)$ 间的关系一般可表示成

$$\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 y(t)=b_M\frac{\mathrm{d}^M x(t)}{\mathrm{d}t^M}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+b_0 x(t) \tag{2-17}$$

系数 $a_n(n=0,1,\cdots,N)$、$b_m(m=0,1,\cdots,M)$ 均为实常数，不失一般性，式(2-17)中把 $y(t)$ 最高阶导数项的系数 a_N 取为 1。一般来说，阶次 M 不大于阶次 N。当 $M>N$ 时，输出 $y(t)$ 具有对输入 $x(t)$ 求 $(M-N)$ 阶导数的作用，由于导数运算对快速变化的噪声有放大作用，这在实际系统中通常是不期望的。式(2-17)描述的系统称为 N 阶系统。

如无特殊说明，本书假定用微分方程描述的系统均是因果的。

设输入 $x(t)$ 起始于 $t=0$，由微分方程知识，求解 $t>0$ 时的响应 $y(t)$ 还需要已知 $y(t)$、$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$、$\cdots$、$\mathrm{d}^{N-1}y(t)/\mathrm{d}t^{N-1}$ 在 $t=0_+$ 时刻的值（初始值）。然而，初始值并不是已知的，该时刻输入已经发生作用。一般来说，系统的已知量是系统内部一组变量在输入 $x(t)$ 作用前瞬间 $t=0_-$ 时刻的值，或 $y(t)$、$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$、$\cdots$、$\mathrm{d}^{N-1}y(t)/\mathrm{d}t^{N-1}$ 在 $t=0_-$ 时刻的值，它们可称为系统的初始状态，当它们全为零时，称系统是零状态的。

在 $t>0$ 时，若微分方程右端为常数、指数、正弦等的一些初等函数时，由微分方程的经典解法（见高等数学教材），响应 $y(t)$ 可按齐次解加上特解的方法求解。齐次解是令微分方程右端等于零时的通解，特解是满足式(2-17)的一个特殊的解，与微分方程右端函数（或输入函数）有关。特解与齐次解相加构成 $y(t)$ 的通解。

为了克服按齐次解与特解对响应分解所存在的某些局限性，有必要按引起响应的因素对全响应分解。对式(2-17)所示的 N 阶系统，系统的响应 $y(t)$ 与输入 $x(t)$ 和系统的初始状态两种因素有关。如果把输入视为零，仅由系统的初始状态引起的响应称为零输入响应，如果把初始状态视为零，仅由系统的输入引起的响应称为零状态响应。零输入响应是系统内部初始储能所产生的响应，零状态响应是系统外部输入所产生的响应。设用 $y_0(t)$、$y_x(t)$ 分别表示零输入响应和零状态响应，以二阶系统为例，则 $y_0(t)$、$y_x(t)$ 分别满足如下形式的微分方程

$$\begin{cases} y_0''(t)+a_1 y_0'(t)+a_0 y_0(t)=0 \\ y_0(0_-)=y(0_-),\ y_0'(0_-)=y'(0_-) \end{cases} \tag{2-18}$$

$$\begin{cases} y_x''(t)+a_1y_x'(t)+a_0y_x(t)=b_2x''(t)+b_1x'(t)+b_0x(t) \\ y_x(0_-)=0,\ \ y_x'(0_-)=0 \end{cases} \tag{2-19}$$

其中 $y'(t)$、$y''(t)$ 分别表示 $y(t)$ 的一阶、二阶导数。如果把式(2-18)和式(2-19)相加，则 $y_0(t)+y_x(t)$ 满足式(2-17)所示微分方程，故有

$$y(t)=y_0(t)+y_x(t)$$

即系统的响应 $y(t)$ 等于零输入响应 $y_0(t)$ 与零状态响应 $y_x(t)$ 的和。

由于齐次方程的通解形式只取决于系统本身，与输入无关，故把齐次解也称为固有响应（或自由响应），而把非齐次方程的特解也称为强制响应（或强迫响应）。按这种界定，零输入响应就不同于固有响应，零状态响应也不同于强制响应。但也有一些教材中把零输入响应称为固有响应，把零状态响应称为强制响应，这是因为零输入响应仅取决于系统本身，零状态响应是由输入引起的，希读者在阅读参考书时注意有关教材中对有关术语含义的界定。

1. 零输入响应

由于指数函数 e^{pt} 的 n 阶导数 $\mathrm{d}^n\mathrm{e}^{pt}/\mathrm{d}t^n$ 为相同幂的指数函数 $p^n\mathrm{e}^{pt}$，故指数函数可以满足齐次微分方程，暂且令

$$y_0(t)=\mathrm{e}^{pt}$$

其中 p 为待定量。把 $y_0(t)$ 代入式(2-17)的齐次微分方程中，有

$$\left(p^N+\cdots+a_1p+a_0\right)\mathrm{e}^{pt}=0$$

即

$$p^N+\cdots+a_1p+a_0=0 \tag{2-20}$$

式(2-20)称为系统的特征方程，它的 N 个根 $p_n(n=1,2,\cdots,N)$ 称为特征根，当它们互不相等时，每一指数函数 e^{p_nt} 都满足齐次微分方程，故 $y_0(t)$ 应该表示为

$$y_0(t)=c_1\mathrm{e}^{p_1t}+c_2\mathrm{e}^{p_2t}+\cdots+c_N\mathrm{e}^{p_Nt}$$

其中 $c_n(n=1,2,\cdots,N)$ 为待定系数。当特征根为复数时，由于微分方程中均为实系数，复数特征根一定以共轭形式成对出现。

当特征根出现重根时，互不相等根的数目就少于 N 个，$c_n\mathrm{e}^{p_nt}$ 的组合还不能完全表示系统的零输入响应，这是因为 N 阶系统已知的初始状态有 N 个值，待确定的常数 c_n 也必须有 N 个。设 p_1 为 3 重根，$p_1=p_2=p_3$，其余为单根，读者可以自行检验，$c_2t\mathrm{e}^{p_1t}$ 和 $c_3t^2\mathrm{e}^{p_1t}$ 也满足微分方程，故 $y_0(t)$ 的表达式应该为

$$y_0(t)=(c_1+c_2t+c_3t^2)\mathrm{e}^{p_1t}+c_4\mathrm{e}^{p_4t}+\cdots+c_N\mathrm{e}^{p_Nt}$$

由于零输入响应 $y_0(t)$ 与输入无关，它在 $t=0$ 处的值连续，$y_0(t)$ 中的 N 个系数 c_n 用 $y(t)$、$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$、$\cdots$、$\mathrm{d}^{N-1}y(t)/\mathrm{d}t^{N-1}$ 在 $t=0_-$ 时刻的值确定。

例2-4　已知系统的微分方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=12x(t)$$

设系统的输入 $x(t)=\varepsilon(t)$，初始状态 $y(0\_)=1$， $y'(0\_)=0$，求 $y(t)$ 的零输入响应。

解：特征方程

$$p^2+5p+6=0$$

对其进行因式分解，有

$$(p+2)(p+3)=0$$

故两个特征根 $p_1=-2$， $p_2=-3$， 于是零输入响应

$$y_0(t)=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

用给定的初始状态确定 c_1 和 c_2。 $y_0'(t)$ 为

$$y_0'(t)=-2c_1\mathrm{e}^{-2t}-3c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

令 $y_0(t)$、 $y_0'(t)$ 表达式中 $t=0$，根据已知， $y_0(0)=1$， $y_0'(0)=0$，有

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -2c_1-3c_2=0 \end{cases}$$

解出 $c_1=3$， $c_2=-2$，故零输入响应

$$y_0(t)=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}$$

2. 零状态响应和全响应

设系统的输入起始于 $t=0$，则满足微分方程的特解只对 $t>0$ 有效，故需要根据 $y(t)$、$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$、$\cdots$、$\mathrm{d}^{N-1}y(t)/\mathrm{d}t^{N-1}$ 在 $t=0\_$ 时刻的已知初始状态求出它们在 $t=0_+$ 时刻的值（初始值），一般来说，初始值的求解过程较为复杂。初始值等于初始状态的充分必要条件是：微分方程(2-17)的右端 $\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t)$ 不含有冲激函数及其各阶导数。若微分方程右端只有 $x(t)$ 项且 $x(t)$ 不含冲激，则初始值等于初始状态，此处主要考虑这种情况。

例2-5　已知系统的微分方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=12x(t)$$

设系统的输入 $x(t)=\varepsilon(t)$，初始状态 $y(0\_)=1$， $y'(0\_)=0$，求 $y(t)$ 的零状态响应和全响应。

解：设 $y(t)$ 的零状态响应为 $y_x(t)$，则

$$y_x''(t)+5y_x'(t)+6y_x(t)=12\varepsilon(t)$$

$$y_x(0\_)=0,\quad y_x'(0\_)=0$$

由于微分方程右端为阶跃函数， $y_x(t)$ 和 $y_x'(t)$ 在 $t=0$ 处一定连续。于是

$$y_x(0_+)=y_x(0\_)=0$$

$$y_x'(0_+)=y_x'(0\_)=0$$

当$t>0$时，$y_x(t)$满足的微分方程为

$$y_x''(t)+5y_x'(t)+6y_x(t)=12$$

设$y_x(t)$的齐次解和特解分别为$y_{x1}(t)$和$y_{x2}(t)$。由例 2-4已知，特征根$p_1=-2$，$p_2=-3$，故齐次解$y_{x1}(t)$为

$$y_{x1}(t)=c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

由于微分方程右端为常数时的特解$y_{x2}(t)$也为常数，它等于方程右端常数与方程左端$y_x(t)$项系数之比，即

$$y_{x2}(t)=\frac{12}{6}=2$$

故$y_x(t)$的通解为

$$y_x(t)=y_{x2}(t)+y_{x1}(t)=2+c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

用$y_x(0_+)=0$和$y_x'(0_+)=0$确定上式中系数c_1和c_2，有

$$\begin{cases}2+c_1+c_2=0\\-2c_1-3c_2=0\end{cases}$$

得$c_1=-6$，$c_2=4$，则零状态响应$y_x(t)$为

$$y_x(t)=2-6\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-3t}$$

把零输入响应$y_0(t)$（见例 2-4）和零状态响应$y_x(t)$相加，得全响应

$$\begin{aligned}y(t)&=y_0(t)+y_x(t)\\&=3\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-3t}+2-6\mathrm{e}^{-2t}+4\mathrm{e}^{-3t}\\&=2-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t},\qquad t>0\end{aligned}$$

全响应$y(t)$也可直接求解。通解为

$$y(t)=2+d_1\mathrm{e}^{-2t}+d_2\mathrm{e}^{-3t}$$

由$y(0_+)=1$和$y'(0_+)=0$可定出$d_1=-3$，$d_2=2$，故有

$$y(t)=2-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t},\qquad t>0$$

本例中，当t充分大时，$y(t)$的固有分量$(-3\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-3t})$趋于零，这时，$y(t)$只剩稳态分量，为 2。

例2-6　已知系统的微分方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=12x(t)$$

在下列两种因果指数信号输入下，求$y(t)$的零状态响应。

（1）$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$；　（2）$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$。

解：

（1）$x(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，当$t>0$时，微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=12\mathrm{e}^{-t}$$

设 $y(t)$ 的特解为 $K\mathrm{e}^{-t}$，将其代入微分方程，有

$$[(-1)^2+5(-1)+6]K\mathrm{e}^{-t}=12\mathrm{e}^{-t}$$

得

$$K=6$$

由上例已知特征根 $p_1=-2$，$p_2=-3$，故 $y(t)$ 的通解为

$$y(t)=6\mathrm{e}^{-t}+c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

由 $y(0_+)=0$ 和 $y'(0_+)=0$ 可定出 $c_1=-18$，$c_2=12$，故

$$y(t)=6\mathrm{e}^{-t}-18\mathrm{e}^{-2t}+12\mathrm{e}^{-3t},\qquad t>0$$

（2）$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，当 $t>0$ 时，微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=12\mathrm{e}^{-2t}$$

由于右端指数函数 e^{-2t} 中的 (-2) 等于系统的一个特征根，这时，$y(t)$ 的特解 $y_2(t)$ 不能设为 $K\mathrm{e}^{-2t}$，而应该设为 $y_2(t)=Kt\mathrm{e}^{-2t}$，则

$$y_2'(t)=K[\mathrm{e}^{-2t}-2t\mathrm{e}^{-2t}]$$

$$y_2''(t)=K[-4\mathrm{e}^{-2t}+4t\mathrm{e}^{-2t}]$$

把它们代入微分方程，有

$$[-4+5+0]K\mathrm{e}^{-2t}=12\mathrm{e}^{-2t}$$

得

$$K=12$$

故 $y(t)$ 的通解为

$$y(t)=12t\mathrm{e}^{-2t}+c_1\mathrm{e}^{-2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$$

由 $y(0_+)=0$ 和 $y'(0_+)=0$ 可定出 $c_1=-12$，$c_2=12$，故

$$y(t)=12(t-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t}),\qquad t>0$$

微分算子

函数求导也可以用微分算子 D 表示[①]，记

$$Dy(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t),\qquad D^n y(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t) \tag{2-21}$$

注意，D 表示对紧跟其后的变量求导，它不是代数量，$Dy(t)$ 不表示 D 与 $y(t)$ 相乘，可视为 $D[y(t)]$。用微分算子表示式(2-17)，有

$$D^N y(t)+\cdots+a_1Dy(t)+a_0y(t)=b_MD^Mx(t)+\cdots+b_1Dx(t)+b_0x(t)$$

或简写成

[①] 微分算子也常用 p 表示，$p=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 。

$$\left(D^N+\cdots+a_1D+a_0\right)y(t)=\left(b_MD^M+\cdots+b_1D+b_0\right)x(t) \tag{2-22}$$

由微分算子 D 构成的多项式也可以进行因式分解。例如：

$$\begin{aligned}(D+2)(D+3)y&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+3y\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+3y\right)+2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+3y\right)\\&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y+6y\\&=(D^2+5D+6)y\end{aligned}$$

即 $D^2+5D+6=(D+2)(D+3)$，这时，算子 D 类似于代数量。

函数的积分可用算子 $\frac{1}{D}$（或 D^{-1}）表示

$$\frac{1}{D}x(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 $x(t)$ 为右边信号。在此限制下，有

$$x(t)=D\cdot\frac{1}{D}x(t)=\frac{1}{D}\cdot Dx(t) \tag{2-23}$$

需要注意：当 $x(t)$ 不为右边信号时，上式不成立。

对一些初等函数表示的输入，微分方程的经典解法较为快捷，但这种方法也有不足之处：（1）当输入信号的形式比较复杂时，微分方程的特解不易找到。（2）当微分方程右端含有 $x(t)$ 的导数项时，一般来说，$y(t)$ 及其导数在 $t=0$ 处的值不连续，初始值的求解较为烦琐。（3）当求解同一个系统在不同输入信号作用下的响应时，对每一种输入都要重新求解方程，增加了不必要的计算量。（4）信号处理系统主要关注系统对输入信号是如何运算的，经典法没有给出输出与输入之间的显式表达式。

2.3 系统的冲激响应描述

系统的方程描述既能用于线性系统也能用于非线性系统，是系统最基本最常用的描述方法。LTI 系统也可用一些特定输入信号作用下的响应描述：

阶跃响应：LTI 系统在阶跃信号 $\varepsilon(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 作用下所产生的响应。

冲激响应（或单位响应）：LTI 系统在冲激信号 $\delta(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ 作用下所产生的响应。

复指数响应：用符号 s 表示复频率，LTI 系统在复指数信号 e^{st} $(-\infty<t<\infty)$ 作用下所产生的响应。

本节介绍系统的冲激响应，用 $h(t)$ 表示

$$h(t) = \mathcal{R}\left[\delta(t)\right]$$

冲激响应的定义如图 2-17所示。注意：$h(t)$ 只考虑外部输入信号 $\delta(t)$ 的作用，而不考虑系统内部初始储能的作用。

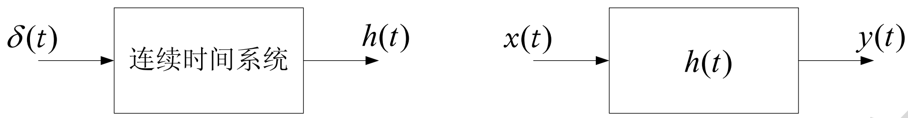


图2-17　冲激响应

系统的冲激响应描述在系统分析中占有极其重要的地位。一方面是因为借助 $h(t)$ 可以求解系统在任一输入 $x(t)$ 作用下的响应（见本章卷积内容），另一方面是因为系统的许多性质可以方便地用其冲激响应做出判断。理论上，LTI 系统总可以用冲激响应描述，却不一定能用微分方程描述。

对因果系统，在 $\delta(t)$ 作用下，由于 $\delta(t)$ 在 $t<0$ 时一直为零，且响应 $h(t)$ 不能先于输入 $\delta(t)$ 出现，故冲激响应

$$h(t) = 0, \qquad t<0 \tag{2-24}$$

即因果系统的 $h(t)$ 一定为因果信号。

对无记忆系统，由于输出与输入成比例关系，故冲激响应也为 $t=0$ 处的冲激，只是冲激的强度不同。

因果动态系统在冲激信号 $\delta(t)$ 作用下，系统内的一些储能元件在 $t=0$ 处瞬间获取能量，当 $t>0$ 时，尽管输入 $\delta(t)=0$，但系统内储能元件已存储的能量不会在瞬间释放完毕，故而系统有响应 $h(t)$。

例2-7　求下列各方程所描述系统的冲激响应 $h(t)$。

（1）$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$

（2）$y(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$

（3）$y(t) = x(t-t_0)$

解：令 $x(t)=\delta(t)$，可求得系统的冲激响应。

（1）$h(t) = \mathcal{R}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)$

即积分器的冲激响应 $h(t)$ 等于 $\varepsilon(t)$。

（2）$h(t) = \mathcal{R}\{\delta(t)\} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) = \delta'(t)$

即微分器的冲激响应 $h(t)$ 等于单位冲激偶。

（3） $h(t)=\mathcal{R}\{\delta(t)\}=\delta(t-t_0)$

延迟运算的输出是输入的延迟，当输入为 $\delta(t)$ 时，对其延迟 t_0，则输出为 $\delta(t-t_0)$。

例2-8　已知某系统的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t)=\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t) \tag{2-25}$$

试求该系统的输入输出微分方程。

解：根据冲激响应的定义，输入为 $\delta(t)$，输出为 $h(t)$，故只要得到 $h(t)$ 与 $\delta(t)$ 间的关系，就可得到系统的输入输出微分方程。

对 $h(t)$ 求导，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)]\\&=-a\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-at}\delta(t)\\&=-ah(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)+ah(t)=\delta(t)$$

读者可以把式(2-25)代入上式中自行检验其正确性。用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别置换上式中的输入 $\delta(t)$ 和输出 $h(t)$，得系统的输入输出微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+ay(t)=x(t) \tag{2-26}$$

可见，用式(2-26)所示一阶微分方程描述的因果系统，其冲激响应描述为式(2-25)所示的单边指数信号。

冲激函数与阶跃函数的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon(t),\qquad \varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

根据 LTI 系统的微积分性质，冲激响应 $h(t)$ 与阶跃响应 $y_\varepsilon(t)$ 间

根据式(2-57)，系统在输入 $\varepsilon(t)$ 作用下的响应 $y_\varepsilon(t)$（称为阶跃响应）为

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}y_\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-27}$$

$$y_\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-28}$$

即系统的冲激响应等于阶跃响应的导数，阶跃响应等于冲激响应的积分。

对简单电路，阶跃响应 $y_\varepsilon(t)$ 很容易根据电路图求出，对它再求导就可得到电路的冲激响应 $h(t)$。

对用微分方程描述的系统，当方程右端只有 $x(t)$ 项时，由于在阶跃响应作用下系统的状态在 $t=0$ 处连续，故先求出阶跃响应，而后用它再求出冲激响应。

系统在冲激信号作用下，系统状态在$t=0$处瞬间发生变化，由于$t>0$时系统的输入为零，故系统冲激响应在$t>0$时的函数式与系统零输入响应的函数式相同。根据这一特点，也可由微分方程先行写出冲激响应的表达式，再将其代入微分方程确定有关系数。设系统的微分方程为（取$M=N$）

$$(D^N+\cdots+a_1D+a_0)y(t)=(b_ND^N+\cdots+b_1D+b_0)x(t) \tag{2-29}$$

则

$$(D^N+\cdots+a_1D+a_0)h(t)=(b_ND^N+\cdots+b_1D+b_0)\delta(t) \tag{2-30}$$

可看出，$h(t)$包含的冲激分量为$b_N\delta(t)$（若$b_N=0$，则$h(t)$不含冲激）。

当$t>0$时，式(2-30)右端为零，$h(t)$的表达式为齐次微分方程的解。当N个特征根$p_n(n=1,2,\cdots,N)$互不相等时，$h(t)$为

$$h(t)=c_1\mathrm{e}^{p_1t}+c_2\mathrm{e}^{p_2t}+\cdots+c_N\mathrm{e}^{p_Nt} \qquad (t>0)$$

则$h(t)$的表达式为

$$h(t)=b_N\delta(t)+(c_1\mathrm{e}^{p_1t}+c_2\mathrm{e}^{p_2t}+\cdots+c_N\mathrm{e}^{p_Nt})\varepsilon(t) \tag{2-31}$$

注意：$b_N\neq 0$时，响应中还存在冲激分量。

例2-9　RC串联电路如图 2-18所示，求$u_C(t)$和$i(t)$的冲激响应。

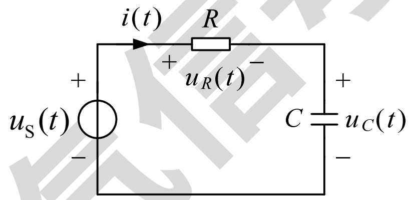


图2-18　RC串联电路

解：先求出$u_C(t)$的阶跃响应。令$u_S(t)=\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$，则

$$u_C(0_+)=0$$

$$u_C(\infty)=1\,\mathrm{V}$$

于是，$t>0$时的$u_C(t)$为

$$u_C(t)=u_C(\infty)+\left[u_C(0_+)-u_C(\infty)\right]\mathrm{e}^{-t/\tau}=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \mathrm{V},\quad t>0$$

故$u_C(t)$的阶跃响应为

$$u_C(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

对上式求导，得$u_C(t)$的冲激响应为

$$u_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \tag{2-32}$$

上式表明：当$u_S(t)=\delta(t)\,\mathrm{V}$时，$u_C(t)$在$t=0_+$时刻的值为$u_C(0_+)$为

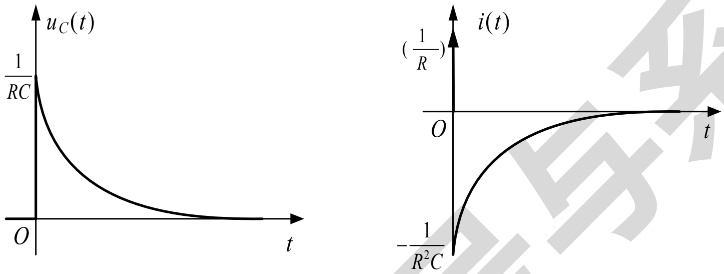
$$u_C(0_+)=\frac{1}{RC}$$

电容电压在瞬间发生跃变，从$u_C(0_-)=0$跃变为$u_C(0_+)=1/(RC)$，电容元件瞬间获得了能量。

根据电容元件的 VCR，可得电流$i(t)$为

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \tag{2-33}$$

可见，电流$i(t)$在$t=0$处含有冲激，正是由于该冲激的存在，电容电压才存在跃变。其实，由电路图可看出，在$t=0$的瞬间，电源的冲激电压$\delta(t)$全部施加在电阻上，由电阻元件的VCR，电流$i(t)$在该瞬间就为$\delta(t)/R$，与式(2-33)中给出的一致。电容电压$u_C(t)$和电流$i(t)$的波形如图 2-19所示。



（a）电容电压　　（b）电流

图2-19　*RC* 串联电路的冲激响应

RL 串联电路（图 2-20）的冲激响应可按类似的方法分析。电流$i(t)$的阶跃响应为

$$i(t)=\frac{1}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)\quad \mathrm{A}$$

对其求导，得$i(t)$的冲激响应为

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)]=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t) \tag{2-34}$$

可见，$i(t)$的初始值$i(0_+)=1/L$ 。利用电感元件的 VCR，还可得电感上电压$u_L(t)$的冲激响应为

$$\begin{aligned}u_L(t)&=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)]\\&=\delta(t)-\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\varepsilon(t)\end{aligned}$$

本例说明：电感电流也会发生突变，此时电感上的电压必然含有冲激。

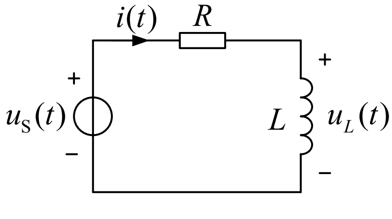


图2-20　*RL* 串联电路

例2-10 已知微分方程

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$$

求该系统的冲激响应$h(t)$。

解：该系统的阶跃响应$y_{\varepsilon}(t)$为（过程略）

$$y_{\varepsilon}(t)=(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

则冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{\varepsilon}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)]$$
$$=(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

例2-11 已知微分方程

$$y''(t)+2y'(t)+50y(t)=x(t)$$

求该系统的冲激响应$h(t)$。

解：阶跃响应$y_{\varepsilon}(t)$在$t>0$时满足的微分方程为

$$y_{\varepsilon}''(t)+2y_{\varepsilon}'(t)+50y_{\varepsilon}(t)=1$$

则特征方程为

$$p^2+2p+50=0 \quad 或 \quad (p+1)^2+49=0$$

得$p_1=-1+\mathrm{j}7$，$p_2=-1-\mathrm{j}7$。$y_{\varepsilon}(t)$的特解为$1/50$，于是

$$y_{\varepsilon}(t)=\frac{1}{50}+c_1\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}7)t}+c_2\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}7)t}$$

用$y_{\varepsilon}(0_+)=0$和$y_{\varepsilon}'(0_+)=0$确定c_1和c_2，有

$$\begin{cases} c_1+c_2=-\dfrac{1}{50} \\ (1+\mathrm{j}7)c_1+(1-\mathrm{j}7)c_2=0 \end{cases}$$

求得$c_1=\frac{1}{100}(-1-\mathrm{j}\frac{1}{7})$，$c_2=\frac{1}{100}(-1+\mathrm{j}\frac{1}{7})$，则

$$y_{\varepsilon}(t)=[\frac{1}{50}+\frac{1}{100}(-1-\mathrm{j}\frac{1}{7})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}7)t}+\frac{1}{100}(-1+\mathrm{j}\frac{1}{7})\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}7)t}]\varepsilon(t)$$

上式也可表示为

$$y_{\varepsilon}(t)=\left\{\frac{1}{50}+2\,\mathrm{Re}[\frac{1}{100}(-1-\frac{1}{\mathrm{j}7})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}7)t}]\right\}\varepsilon(t)$$

对上式求导，得系统的冲激响应$h(t)$为

$$h(t)=\mathrm{Re}[-\frac{1}{7}\mathrm{j}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}7)t}]\varepsilon(t)=\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-t}\sin(7t)\varepsilon(t)$$

例2-12 已知描述某系统的微分方程为

$$y'(t)+ay(t)=x'(t) \tag{2-35}$$

其中 a 为常数。求该系统的冲激响应 $h(t)$。

解：由于方程右端的阶次等于左端的阶次，则 $h(t)$ 含有冲激 $\delta(t)$，$h(t)$ 的表达式为

$$h(t)=\delta(t)+c\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t) \tag{2-36}$$

上式第二项为 $h(t)$ 在 $t>0$ 时的解（齐次微分方程的通解）。对上式求导，有

$$h'(t)=\delta'(t)+c\delta(t)-ac\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t) \tag{2-37}$$

把式(2-36)和式(2-37)代入 $h(t)$ 满足的微分方程：

$$h'(t)+ah(t)=\delta'(t) \tag{2-38}$$

有（只需要考虑各冲激项）

$$\delta'(t)+[c+a]\delta(t)=\delta'(t)$$

求得 $c=-a$，则式(2-36)为。

$$h(t)=\delta(t)-a\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$$

2.4 卷积

一旦给定了系统的冲激响应，借助称之为卷积的计算公式就可以计算出系统对任一输入信号的响应。当要分析一个系统对多种输入信号的响应时，使用卷积法计算系统的响应要比微分方程法高效，这是因为卷积法有效地利用了系统冲激响应求解其他信号输入下的响应，是一种间接求解方法，而微分方程法对每一输入都要重新求解一次方程，没有充分利用各响应之间所存在的内在关系。更为重要的是，当输入难以用数学函数表示，而用图像或数据给出时，使用卷积法能够很容易得到系统响应的图像。

卷积公式

参看图 2-21，$x(t)$ 可用脉冲 $\phi(t)$ 表示，为

$$x(t)=\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left(kT\right)\phi\left(t-kT\right)T \tag{2-39}$$

从图 2-21（b）可见，在 $T\to 0$ 时，脉冲 $\phi(t)$ 为冲激函数 $\delta(t)$，即

$$\delta(t)=\lim_{T\to 0}\phi(t)$$

若令 $\tau=kT$，则在 $T\to 0$ 时式(2-39)中的求和就变为对 τ 的积分，于是

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-40}$$

该式表明：任何 $x(t)$ 都可以用以 $\delta(t)$ 为基底的加权“和”表示（注：积分在本质上是求和运算）。

式(2-40)所示关系也可以由单位冲激函数的筛选性质得到。由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0) \tag{2-41}$$

用 τ 置换 t，用 t 置换 t_0，式(2-41)就成为式(2-40)所示形式。

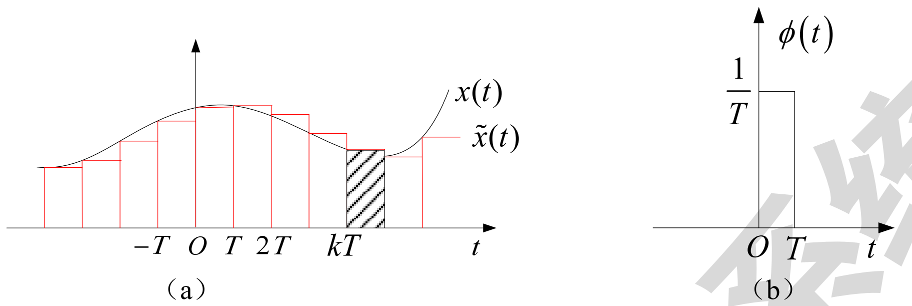


图2-21　信号的脉冲表示

用式(2-39)表示输入信号 $x(t)$，设LTI系统在脉冲 $\phi(t)$ 作用下的零状态响应为 $y_\phi(t)=\mathcal{R}\left[\phi(t)\right]$，由系统时不变性，有

$$\mathcal{R}\left[\phi(t-kT)\right]=y_\phi(t-kT)$$

由系统的齐次性和可加性，有

$$\mathcal{R}\left[x(kT)\phi(t-kT)T\right]=x(kT)y_\phi(t-kT)T$$

$$\mathcal{R}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\phi(t-kT)T\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)y_\phi(t-kT)T$$

当 $T\to 0$ 时，上式为

$$\mathcal{R}\left[\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\phi(t-kT)T\right]=\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)y_\phi(t-kT)T$$

由式(2-39)，上式表示系统对 $x(t)$ 的响应，即

$$y(t)=\mathcal{R}\left[x(t)\right]=\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)y_\phi(t-kT)T \tag{2-42}$$

在 $T\to 0$ 时，矩形脉冲 $\phi(t)$ 趋近于冲激函数 $\delta(t)$，于是

$$\lim_{T\to 0} y_\phi(t)=\lim_{T\to 0}\mathcal{R}\left[\phi(t)\right]=\mathcal{R}\left[\delta(t)\right]$$

$\mathcal{R}\left[\delta(t)\right]$ 是系统在冲激信号 $\delta(t)$ 作用下所产生的响应，为冲激响应 $h(t)$，即

$$h(t)=\mathcal{R}\left[\delta(t)\right]$$

式(2-42)可表示为

$$y(t)=\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(t-kT)T \tag{2-43}$$

令 $\tau = kT$ ，在 $T \to 0$ 时上式中的求和就演变为积分

$$\lim_{T\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\cdot]T = \int_{-\infty}^{\infty}[\cdot]\mathrm{d}\tau$$

式(2-43)为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-44}$$

在以上公式推导中，各符号的意义如图 2-22所示。

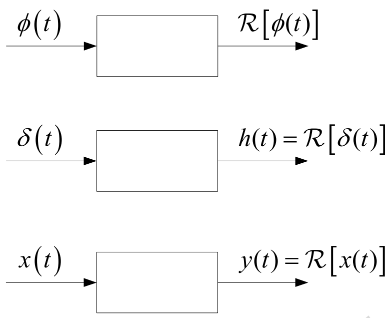


图2-22　有关符号的说明

在系统冲激响应 $h(t)$ 已知情况下，式(2-44)给出了系统在输入 $x(t)$ 作用下响应的求解公式，该积分称为 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，简称为卷积，通常记作

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-45}$$

注意，符号“*”不表示相乘，只是卷积积分式的一种记号表示。在一些英文书籍中，$x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积也记作 $(x*h)(t)$ 。

式(2-45)的积分变量为 τ ，而时间 t 是作为一个参数出现在积分中，积分后的表达式是 t 的函数。

式(2-45)所示运算也可作为任两个信号卷积的一种定义。

卷积计算

式(2-45)重写如下

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-46}$$

该卷积积分的计算步骤如下：

（1）变量代换：将函数 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的自变量 t 置换为 τ ，分别为 $x(\tau)$ 和 $h(\tau)$ 。

（2）时间翻转：翻转 $h(\tau)$ 得 $h(-\tau)$ 。

（3）时间移位：对某一给定时刻 t ，将 $h(-\tau)$ 沿 τ 轴移位 t ，得 $h(t-\tau)$ 。$t>0$ 时将 $h(-\tau)$ 向右移 t 时刻；$t<0$ 时将 $h(-\tau)$ 向左移 $|t|$ 时刻。

（4）相乘并积分：函数 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘，二者波形不重叠部分的乘积为零。$x(\tau)h(t-\tau)$ 曲线下的面积即为 t 时刻的卷积值。在求积分时，积分的上下限不仅依赖

于信号本身，还依赖于卷积过程中 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 波形的相对位置。

（5）对其他 t 重复步骤 3 和 4。

卷积计算的关键是正确确定积分的上下限，一种较为简单的方法是借助 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的图像确定，下面举例说明。

例2-13　已知 $h(t)=\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$， $x(t)=\mathrm{e}^{-bt}\varepsilon(t)$， $b\neq a$， 求 $y(t)=x(t)*h(t)$。

解： $x(\tau)$、$h(\tau)$、$h(-\tau)$ 的图像如图 2-23所示。

当 $t<0$ 时， $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的乘积为零，故 $y(t)=0$。

当 $t>0$ 时， $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的乘积只有在 $\tau\in(0,t)$ 内不为零，故

$$y(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-b\tau}\cdot\mathrm{e}^{-a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{(a-b)\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{-at}\frac{\mathrm{e}^{(a-b)t}-1}{a-b}=\frac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at})$$

则

$$\mathrm{e}^{-bt}\varepsilon(t)*\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)=\frac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{-bt}-\mathrm{e}^{-at})\varepsilon(t) \tag{2-47}$$

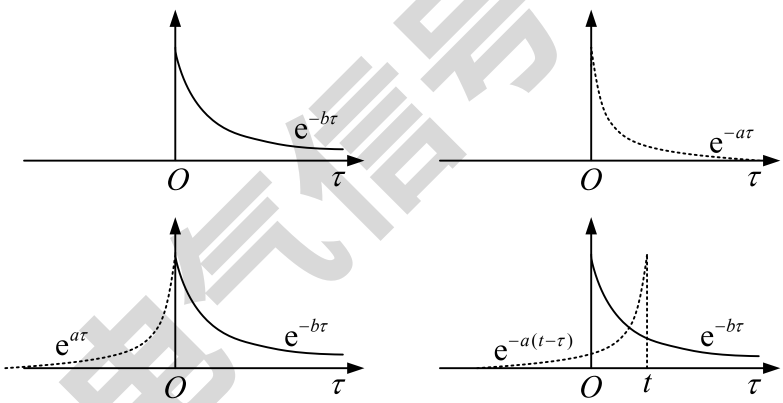


图2-23　卷积图解

若 $x(t)$ 和 $h(t)$ 均是因果的，利用卷积图解方法可得

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{2-48}$$

其中 $x(t)$ 和 $h(t)$ 均为 $t>0$ 时的函数。

例2-14　若系统为一积分器（见图 2-24），输入输出方程为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

试用卷积方法求 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时的响应。

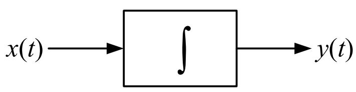


图2-24　积分器

解：令 $x(t)=\delta(t)$，系统的冲激响应

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t)$$

当系统输入为阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 时，由卷积公式

$$y(t)=x(t)*h(t)=\varepsilon(t)*\varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$ 为因果信号，当 $t>0$ 时，有

$$y(t)=\int_{0}^{t}1\times 1\mathrm{d}\tau=t,\qquad t>0$$

则 $y(t)$ 为

$$y(t)=t\varepsilon(t)$$

从系统的积分关系也可看出，输入 $x(t)=\varepsilon(t)$ 时，输出 $y(t)$ 也应该为上式给出的斜变函数，与用卷积方法计算出的结果一致。

例2-15　已知 $x(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$，$h(t)=2\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]$，求 $y(t)=x(t)*h(t)$。

解：　$x(\tau)$、$h(\tau)$、$h(-\tau)$ 的波形如图 2-25所示。

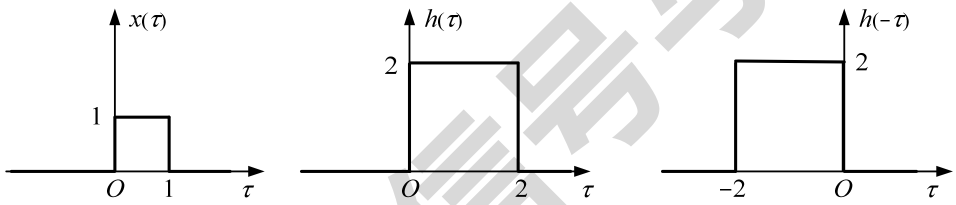


图2-25　$x(\tau)$、$h(\tau)$、$h(-\tau)$ 的波形

当 $t<0$ 时（图 2-26-a），$x(\tau)h(t-\tau)=0$，则

$$y(t)=0$$

当 $t\in(0,1)$ 时（图 2-26-b），$x(\tau)h(t-\tau)$ 在 $\tau\in(0,t)$ 内为 2，则

$$y(t)=\int_{0}^{t}2\mathrm{d}\tau=2t$$

当 $t\in(1,2)$ 时（图 2-26 -c），$x(\tau)h(t-\tau)$ 在 $\tau\in(0,1)$ 内为 2，则

$$y(t)=\int_{0}^{1}2\mathrm{d}\tau=2$$

当 $t\in(2,3)$ 时（图 2-26-d），$x(\tau)h(t-\tau)$ 在 $\tau\in(t-2,1)$ 内为 2，则

$$y(t)=\int_{t-2}^{1}2\mathrm{d}\tau=-2t+6$$

当 $t>3$ 时，$x(\tau)h(t-\tau)=0$，则 $y(t)=0$。于是

$$y(t)=\begin{cases}2t, & 0<t<1\\ 2, & 1<t<2\\ -2t+6, & 2<t<3\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$y(t)$ 的波形如图 2-27所示。

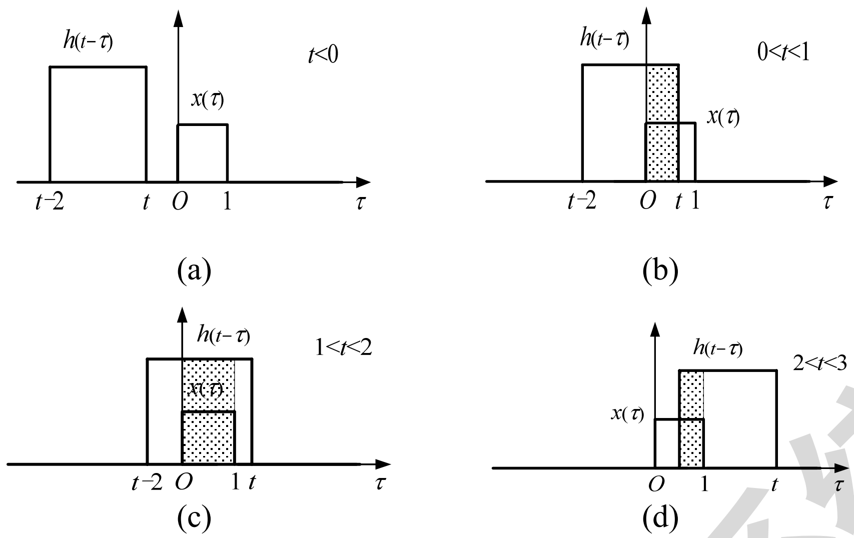


图2-26　卷积图解

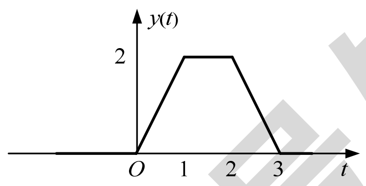


图2-27　$y(t)$ 波形

例2-16　已知系统的冲激响应

$$h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

输入信号如图 2-28所示，求零状态响应 $y(t)$ 。

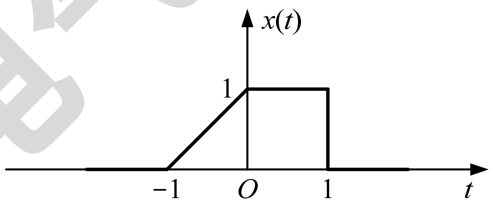


图2-28　例 2-16的输入信号

解：　输入信号为

$$x(t)=\begin{cases} t+1, & -1<t<0 \\ 1, & 0<t<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

参看图 2-29所示各波形。在 $t\in(-1,0)$ 区间

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1}^{t}(\tau+1)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t}\int_{-1}^{t}(\tau+1)\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[(\tau+1)\mathrm{e}^{\tau}\Big|_{-1}^{t} - \int_{-1}^{t}\mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \mathrm{e}^{-t}\left[(t+1)\mathrm{e}^{t}-(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-1})\right] \\ &= t+\mathrm{e}^{-(t+1)} \end{aligned}$$

在 $t\in(0,1)$ 区间

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-1}^{0}(\tau+1)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{-t}\left[\mathrm{e}^{-1}+(\mathrm{e}^{t}-1)\right]\\&=1+(\mathrm{e}^{-1}-1)\mathrm{e}^{-t}\end{aligned}$$

在 $t>1$ 区间

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-1}^{0}(\tau+1)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{-t}\left[\mathrm{e}^{-1}+(\mathrm{e}^{1}-1)\right]\\&=(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-1)\mathrm{e}^{-t}\end{aligned}$$

故响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=\begin{cases}0, & t<-1\\ t+\mathrm{e}^{-(t+1)}, & -1<t<0\\ 1+(\mathrm{e}^{-1}-1)\mathrm{e}^{-t}, & 0<t<1\\ (\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-1)\mathrm{e}^{-t}, & t>1\end{cases}$$

由以上例题可见，做出计算卷积的图像有助于正确确定积分的上下限。

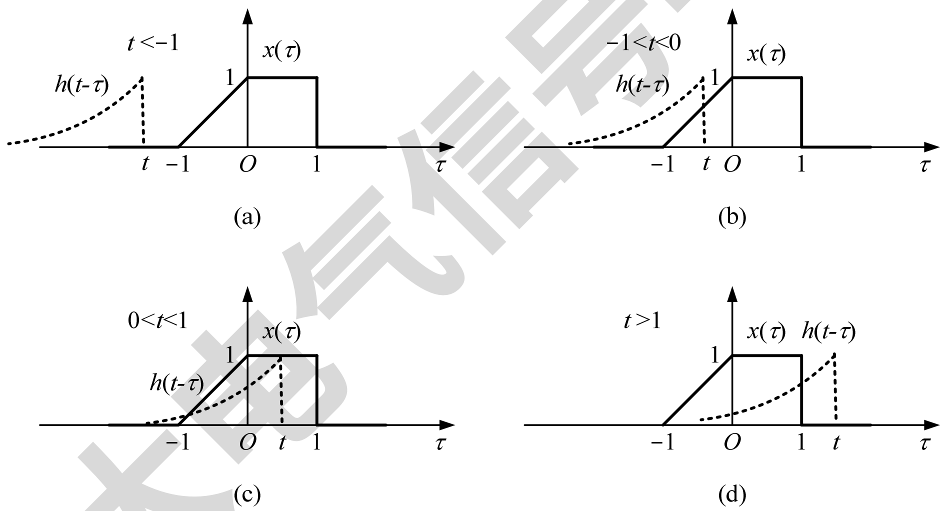


图2-29　卷积图解

2.5　卷积性质

掌握卷积运算的性质有助于简化卷积的计算过程。

与冲激函数的卷积

信号的冲激函数分解公式(2-40)

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

由卷积的定义，它也可表示为

$$x(t)=x(t)*\delta(t) \tag{2-49}$$

即任一信号 $x(t)$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 的卷积等于信号 $x(t)$。式(2-49)也可看作是冲激函数 $\delta(t)$ 的一种定义，由该定义可得到冲激函数的所有性质。当 $x(t)$ 分别为 $\delta(t)$ 和 $\delta(t-t_0)$ 时，有

$$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$$

$$\delta(t-t_0)*\delta(t)=\delta(t-t_0)$$

注意：两个 $\delta(t)$ 函数的卷积结果为 $\delta(t)$ 函数，但两个 $\delta(t)$ 函数的相乘却没有定义。

交换律、分配律、结合律

交换律：两个信号的卷积与其顺序无关，公式为

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t) \tag{2-50}$$

证明：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

令上式中 $\lambda=t-\tau$，则 $\tau=t-\lambda$，$\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\lambda$，于是

$$\begin{aligned}x(t)*h(t)&=-\int_{\infty}^{-\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=h(t)*x(t)\end{aligned}$$

分配律：

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t) \tag{2-51}$$

由此得出：若将两个冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的子系统并联（见图 2-30），则总系统的冲激响应为各子系统的相加。

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

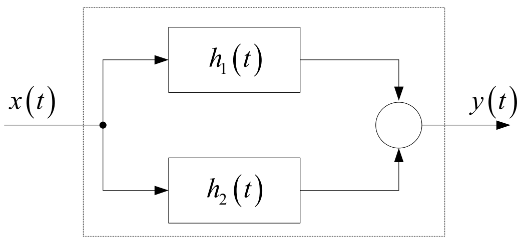


图2-30　系统的并联

结合律：

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)] \tag{2-52}$$

结合律的证明从略。

两个冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的系统级联时（见图 2-31），可得总系统的响应

为

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

由卷积的结合律和交换律性质，总系统的冲激响应

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t) \tag{2-53}$$

即两个系统级联时，总系统的冲激响应为子系统冲激响应的卷积，且与系统的级联顺序无关[1]。

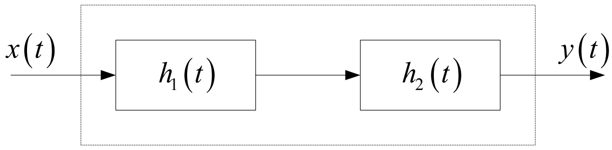


图2-31 系统的级联

时间移位

时间移位性质：若 $y(t) = x(t) * h(t)$，则有

$$x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0) = y(t-t_0) \tag{2-54}$$

或

$$x(t-t_0) * h(t-t_1) = x(t-t_1) * h(t-t_0) = y(t-t_0-t_1) \tag{2-55}$$

对一个冲激响应为 $h(t)$ 的系统，若对输入 $x(t)$ 的响应为 $y(t)$，根据系统的时不变性，则对输入 $x(t-t_0)$ 的响应就应该为

$$x(t-t_0) * h(t) = y(t-t_0)$$

由上式关系不难理解式(2-54)和式(2-55)。注意：$y(t-t_0) \neq x(t-t_0) * h(t-t_0)$。

卷积后信号的长度

若两个起始时刻分别为 a_1、a_2 的信号 $x_1(t)\varepsilon(t-a_1)$ 和 $x_2(t)\varepsilon(t-a_2)$ 做卷积运算，由卷积图解容易得出卷积后信号的起始时刻为 (a_1+a_2)。

若两个持续期分别为 (a_1,b_1)、(a_2,b_2) 的信号做卷积运算，可以求得卷积后信号的终止时刻一般为 (b_1+b_2)，故卷积后信号的长度

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2) = (b_1-a_1)+(b_2-a_2)$$

一般来说，两个信号卷积后的长度是每一信号长度的和，在特殊情况下，两个信号卷积后的长度也可能会小于该长度。

用该规则检验例 2-13结果，信号 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的长度分别为 1 和 2，卷积后信号 $y(t)$ 的长度为 3，满足上述规则。

[1] 实际系统级联时一般要考虑级联的顺序，以获得比较大的输入信号动态范围。

微积分性质

若 $y(t)=x(t)*h(t)$，则有

$$y'(t)=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t) \tag{2-56}$$

$$\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\mathrm{d}\tau=[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau] \tag{2-57}$$

设 $x(t)$ 和 $h(t)$ 均为右边信号，$y(t)$ 也可表示为

$$y(t)=x(t)*h(t)=x'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}\tau*h(t) \tag{2-58}$$

以上三式所示关系称为卷积的微积分性质。

式(2-56)的证明：

$$\begin{aligned}y'(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\frac{\mathrm{d}x(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\tau\\&=x'(t)*h(t)\end{aligned}$$

例2-17　求 $y(t)=\varepsilon(t-1)*\varepsilon(t-2)$　。

解：根据卷积移位性质和微积分性质，$y(t)$ 为

$$\begin{aligned}y(t)&=\varepsilon(t)*\varepsilon(t-2-1)\\&=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau-3)\mathrm{d}\tau\\&=(t-3)\varepsilon(t-3)\end{aligned}$$

由卷积的微积分性质也可得系统阶跃响应与冲激响应的关系：

$$y_{\varepsilon}(t)=\varepsilon(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-59}$$

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}y_{\varepsilon}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2-60}$$

例2-18　试用卷积性质重新计算例 2-16。

解：冲激响应和输入信号分别为

$$h(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

$$x(t)=\begin{cases}t+1, & -1<t<0\\1, & 0<t<1\\0, & \text{else}\end{cases}$$

$x(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned}x(t)&=(t+1)\left[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t)\right]+\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\right]\\&=(t+1)\varepsilon(t+1)-t\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\\&=\delta^{(-2)}(t+1)-\delta^{(-2)}(t)-\delta^{(-1)}(t-1)\end{aligned}$$

根据卷积微积分性质，系统响应 $y(t)$ 为

$$y(t)=h^{(-2)}(t+1)-h^{(-2)}(t)-h^{(-1)}(t-1)$$

对 $h(t)$ 求两次积分

$$h^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau=[\int_{0}^{t}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau]\varepsilon(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

$$h^{(-2)}(t)=\left[\int_{0}^{t}(1-\mathrm{e}^{-\tau})\mathrm{d}\tau\right]\varepsilon(t)=(t-1+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

于是，系统响应

$$\begin{aligned}y(t)&=h^{(-2)}(t+1)-h^{(-2)}(t)-h^{(-1)}(t-1)\\&=(t+\mathrm{e}^{-(t+1)})\varepsilon(t+1)-(t-1+\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)-(1-\mathrm{e}^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)\end{aligned}$$

如果把该式写成分段形式，其结果与例 2-16的相同。

与无始无终复指数信号的卷积

信号 $x(t)$ 与复变量为 s 的无始无终复指数函数 e^{st} 的卷积为

$$x(t)*\mathrm{e}^{st}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

因 e^{st} 与积分变量 τ 无关，它可提取在积分的外部，有

$$x(t)*\mathrm{e}^{st}=X(s)\mathrm{e}^{st} \tag{2-61}$$

其中

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{2-62}$$

式(2-62)为定积分，积分结果与积分变量无关，因此，积分后只是 s 的函数，故表示为 $X(s)$。式(2-62)积分收敛（存在）的所有 s 值的集合称为 $X(s)$ 的收敛域，在收敛域内，式(2-61)才成立。

对一给定的信号 $x(t)$，式(2-62)所示的运算将其变换为复频率 s 的函数 $X(s)$，$X(s)$ 连同其收敛域一起与 $x(t)$ 有着惟一对应关系（证明从略），故而在 s 域的 $X(s)$ 完全表征了时域信号 $x(t)$，$X(s)$ 称为 $x(t)$ 的拉普拉斯变换，第 3 章将对其详细介绍。

式(2-61)表明，$x(t)$ 与 e^{st} 的卷积为复指数函数 $X(s)\mathrm{e}^{st}$。

对任一 LTI 系统，系统在无始无终的复指数信号 $x(t)=\mathrm{e}^{st}$ 作用下，则有

$$y(t)=h(t)*\mathrm{e}^{st}=H(s)\mathrm{e}^{st} \tag{2-63}$$

其中

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{2-64}$$

可见，系统的输出 $y(t)$ 也为复指数信号。再次强调，式(2-63)是在无始无终输入 e^{st} 情况下给出的，而不是因果输入 $\mathrm{e}^{st}\varepsilon(t)$。

例2-19　已知系统的冲激响应

$$h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

求：（1）该系统在无始无终输入 $x(t)=\mathrm{e}^{t}$ 作用下的响应；

（2）该系统在因果信号输入 $x(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)$ 作用下的响应。

解：（1）由式(2-64)有

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(s+2)t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{s+2}\mathrm{e}^{-(s+2)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

上式中，当 $\mathrm{Re}(s+2)>0$，即 $\mathrm{Re}(s)>-2$ 时，有

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(s+2)t}=0$$

于是

$$H(s)=\frac{1}{s+2},\qquad \mathrm{Re}(s)>-2$$

信号 $x(t)=\mathrm{e}^{t}$ 的复频率 $s=1$，它位于收敛域 $\mathrm{Re}(s)>-2$ 内，故响应

$$y(t)=H(s)\big|_{s=1}\mathrm{e}^{t}=\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=1}\mathrm{e}^{t}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{t}$$

（2）系统在输入 $x(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)$ 作用下的响应用卷积公式求解，借助式(2-47)给出的结果，有

$$\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)*\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)=\frac{1}{1-(-2)}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$
$$=\frac{1}{3}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

习 题

2-1 利用欧拉公式证明下列三角恒等式：

（1）$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

（2）$\cos x\cos y=[\cos(x-y)+\cos(x+y)]/2$

（3）$\cos^{2}x=(1+\cos 2x)/2$

（4）$\cos^{3}x=(3\cos x+\cos 3x)/4$

2-2 求对任何 t 使下列各式成立的 A 和 θ。

（1）$\cos(10t)+4\sqrt{2}\sin(10t+\pi/4)=A\cos(10t+\theta)$

（2）$\cos(10t+\pi/3)+\cos(10t+\theta)=A\cos(10t)$

2-3 把下列各式表示成实函数形式。

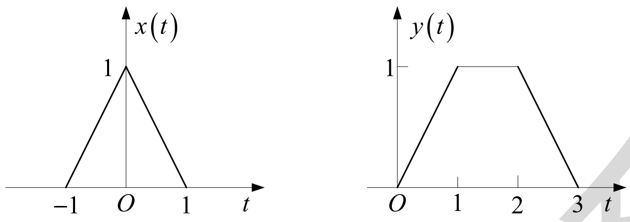
（1） $(3+\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{\mathrm{j}10t}+(3-\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10t}$

（2） $(3+\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}10)t}+(3-\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}10)t}$

（3） $\mathrm{Re}[(3+\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}10)t}]$

（4） $\mathrm{Im}[(3+\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j}10)t}]$

2-4 利用阶跃函数写出图示波形的表达式。



（a）　　(b)

图p2-4

2-5 画出下列信号的波形。

（1） $x(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$　　（2） $x(t)=\varepsilon(t+1)-2\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)$

（3） $x(t)=r(t+1)-r(t)+r(t-1)$　　（4） $x(t)=r(t+1)\cdot r(t-1)$

2-6 画出下列信号的波形。

（1） $x(t)=\dfrac{1}{2}(1+\cos t)[\varepsilon(t+\pi)-\varepsilon(t-\pi)]$　（2） $x(t)=\varepsilon(\sin(2\pi t))$

（3） $x(t)=\mathrm{e}^{\varepsilon(t)}$　　（4） $x(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(-t)+\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

2-7 求以下各积分。

（1） $\int_{-\infty}^{\infty} t\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\right]\mathrm{d}t$　　（2） $\int_{-\infty}^{\infty}(1-|t|)\left[\varepsilon(t+1)-\varepsilon(t-1)\right]\mathrm{d}t$

（3） $\int_{-\infty}^{t}\tau\varepsilon(\tau-1)\,\mathrm{d}\tau$　　（4） $\int_{-\infty}^{t}(\tau-1)\varepsilon(\tau-1)\,\mathrm{d}\tau$

（5） $\int_{-\infty}^{\infty}\tau\varepsilon(t-\tau-1)\,\mathrm{d}\tau$　　（6） $\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

2-8 求下列各极限。

（1） $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{2a}\mathrm{e}^{-|t|/a}$， $a>0$　　（2） $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\sin(at)}{t}$， $a>0$

（3） $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{(a^2+t^2)}$　　（4） $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$

2-9 冲激函数 $\delta(t)$ 的缩展性质和对称性质分别为

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)，\quad a\text{ 为实数}$$

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

试证明之。

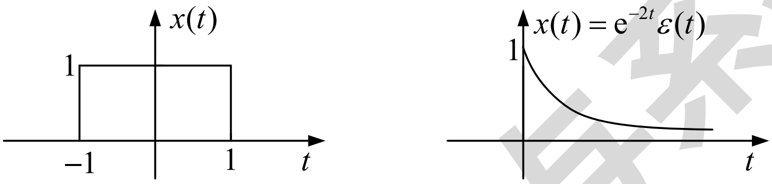
2-10化简下列各表达式。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t}\delta(t-3)\mathrm{d}t$　　　（2）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2t}{t}\delta(t)\mathrm{d}t$

（3）$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t+1)\delta(t-1)\mathrm{d}t$　　　（4）$\delta(2t)$

（5）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos(2t)\varepsilon(t)\right]$　　　（6）$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$

2-11画出图示信号导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$与积分$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$的波形。



（a）　　　　(b)

图p2-11

2-12求下列微分方程的齐次解。

（1）$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+x(t)$

（2）$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x'(t)+x(t)$

（3）$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=x'(t)+x(t)$

2-13求下列微分方程的齐次解。

（1）$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$，$y(0)=2,\quad y'(0)=2$

（2）$y'''(t)+3y''(t)+2y'(t)=0$，$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=1$

2-14已知微分方程

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+x(t)$$

求下列$x(t)$时微分方程的特解。

（1）$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}$　　　（2）$x(t)=\mathrm{e}^{-t}$　　　（3）$x(t)=t$

2-15已知微分方程

$$y''(t)+4y'(t)+5y(t)=x'(t)+x(t)$$

求下列$x(t)$时微分方程的特解。

（1）$x(t)=1$　　　（2）$x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}3t}$　　　（3）$x(t)=\cos(3t)$

2-16求下列微分方程的解。

（1）$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x(t)$，$x(t)=3\varepsilon(t)$，$y(0_-)=0,\quad y'(0_-)=3$

（2）$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x(t)$，$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$，$y(0_-)=0,\quad y'(0_-)=3$

（3） $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x(t)$， $x(t)=\cos(2t)\varepsilon(t)$， $y(0\_)=0,\quad y'(0\_)=0$

2-17 已知系统的微分方程为

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=2x'(t)+8x(t)$$

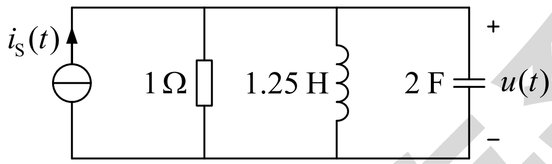
设输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，初始状态 $y(0\_)=3,\quad y'(0\_)=4$，求 $y(t)$ 的零输入响应、零状态响应和全响应。

2-18 由电压源 u_S、电阻 R、电感 L 组成的单回路电路，求电感上电压的单位冲激响应。

2-19 RLC 并联电路如图所示，设 $u(t)$ 为输出电压。

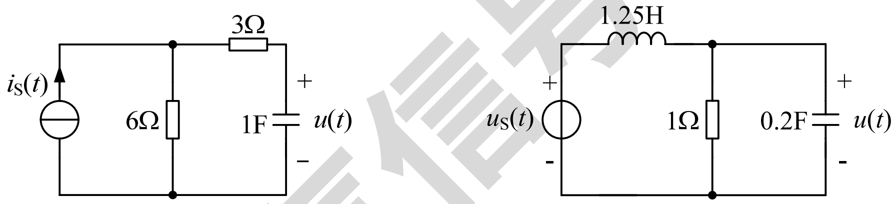
（1）写出电路的微分方程，求阶跃响应。

（2）用阶跃响应求冲激响应。



图p2-19

2-20 求图示电路中电压 $u(t)$ 的冲激响应。



(a)　　　　(b)

图p2-20

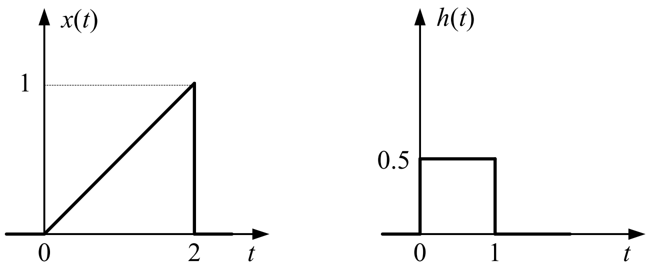
2-21 求下列各微分方程所描述系统的冲激响应。

（1） $y'(t)+2y(t)=3x(t)$

（2） $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x(t)$

（3） $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=x'(t)+2x(t)$

2-22 函数 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的波形如图所示，求 $y(t)=x(t)*h(t)$，并画出 $y(t)$ 的波形。



图p2-11

2-23 计算 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积。

（1） $x(t)=\varepsilon(t)$， $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$

（2） $x(t)=\mathrm{e}^{t}$， $h(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)$

（3） $x(t)=\mathrm{e}^{t}\varepsilon(t)$， $h(t)=(3\mathrm{e}^{-2t}-1)\varepsilon(t)$

（4） $x(t)=(1+t)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$， $h(t)=\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

2-24 已知某 LTI 系统的冲激响应为 $h(t)=\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$，求该系统对 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应。

2-25 已知一 LTI 系统对输入 $x(t)$ 的零状态响应 $y(t)$ 为

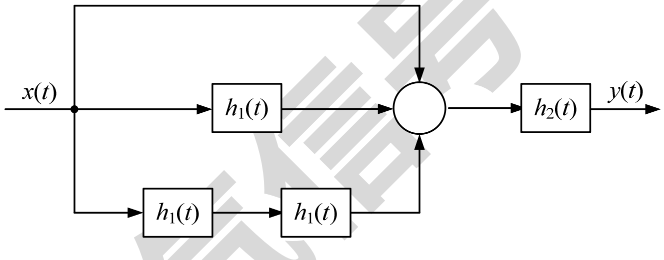
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}x(\tau-1)\mathrm{d}\tau$$

求该系统的冲激响应 $h(t)$，并说明该系统的因果性。

2-26 已知图中各子系统的冲激响应分别为

$$h_1(t)=\delta(t-1)$$
$$h_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-3)$$

求总系统的冲激响应 $h(t)$。



图p2-26

2-27 求下列冲激响应 $h(t)$ 所描述系统的输入输出微分方程。

（1） $h(t)=\varepsilon(t)$　　（2） $h(t)=\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$

（3） $h(t)=t\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$　　（4） $h(t)=\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$

（5） $h(t)=\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$　　（6） $h(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$

2-28 求上题各系统在无始无终复指数信号 $x(t)=\mathrm{e}^{st}$ 作用下的响应 $y(t)$。

2-29 两个实信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数定义为

$$r_{xy}(t)=x(t)*y(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

（1）证明 $r_{yx}(t)=r_{xy}(-t)$。

（2）证明自相关函数满足 $r_{xx}(t)=r_{xx}(-t)$。

2-30 两个波形相同但起始点不同的信号 $x(t)$ 和 $y(t)$， $y(t)=x(t-t_0)$，试给出 $x(t)*y(-t)$ 的计算公式，并确定该卷积出现最大值的时刻。

2-31 已知某二阶系统的冲激响应

$$h(t) = (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

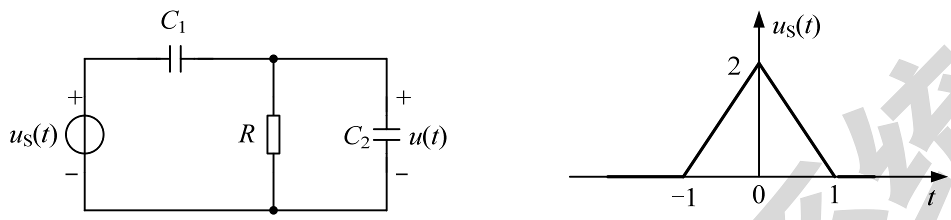
（1） 试确定系统的输入输出微分方程。

（2） 若已知初始条件 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=1$，试确定系统的零输入响应。

2-32 电路如图所示，已知 $R=1\,\Omega$，$C_1=C_2=1\,\mathrm{F}$，试求：

（1）电压 $u(t)$ 的冲激响应；

（2）利用卷积法求图示三角脉冲输入时电压 $u(t)$ 的零状态响应。



图p2-32