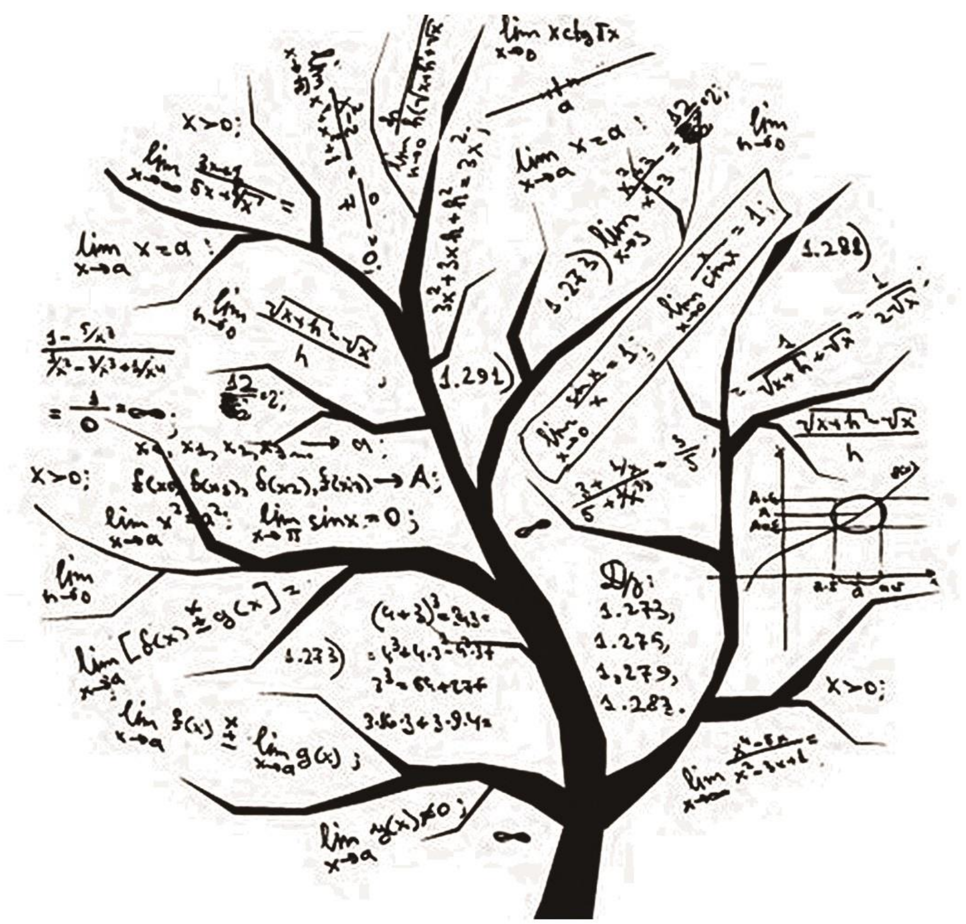
线性代数与解析几何

课后题解析

意见征集稿



编者：学辅志愿者

仲英书院朋辈辅导

《线性代数与解析几何》课后题解析（意见征集稿）

编辑：电气 613 孙静，自动化 51 杜铭

编写（按章节顺序排名）：自动化 51 杜铭，化生 61 李佳宝，钱学森 62 杨登天，化生 61 郑宇鹏，数试 62 刘美奇，自动化 64 刘伟，能动 c61 孟令军，钱学森 61 王昀

审校：自动化 52 范略，钱学森 62 杨登天，电气 613 佟建铭，化生 61 郑宇鹏，信息 63 欧凉昊，自动化 64 李明哲，钱学森 64 孙雨涵，钱学森 63 戚伟建，力学 61 蔡毅仁，能动 B62 周晨阳，数试 62 刘美奇

封面制作：医电 51 李雅敏

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者对本资料做出的贡献，使本资料的编写工作能按时完成。由于编者们的能力与精力限制，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第 3 周开始，每晚 19:30-21:30，学辅志愿者在东 21 舍 109 学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑，欢迎同学们前来。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。15 级学粉群：479502044。16 级学粉群：528364663。17 级学粉群：656224943。以及微信公众号:chungying-xuefu。除此之外，还有学辅举办的论坛，香蕉船：https://forum.cystudy.org，用于同学们学习交流。

期中考试与期末考试前，我们会发放考前小助手并举办考前讲座。学辅还有转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英学业辅导中心
2017 年 9 月 10 日

学辅公众号：chungying-xuefu

学粉群 3.0：656224943

“学业巴士车”值班表

	单周				双周			
周一	**罗以淇**	**李明哲**	**张嘉兴**		**袁靖松**	**戚伟健**	**蔡毅仁**	**李佳宝**
	高数	高数	C++		Java	高数	高数	有机化学
	线代	大物	C 语言		离散数学	线代	线代	工图
	工图	C语言	Python			大物		无机与分析化学
	大计基		程序设计			英语		生物学基础
						C++		
	杨大凯、李明哲				**樊昕怡、蔡毅仁**			
周二	**欧凉昊**	**魏佳利**	**张冬瑶**		**王宏**	**张钧翔**	**林鹤翔**	
	线代	高数	高数		高数	高数	高数	
	大物	线代	线代		线代	大物	大物	
	大化	大物	大物		C++		电磁学	
	大计基						力学	
	洪靖怡				**张钧翔**			
周三	**佟建铭**	**朱家航**	**郑宇鹏**		**杨登天**	**薛众鑫**	**康皓哲**	
	大物	高数	线代		高数	高数	大化	
	工图	大物	大物		线代	大物	无机与分析化学	
	Fortran	线代	无机与分析化学		大物	线代		
		C语言	生物学基础					
	张旭超				**胡馨钰、康皓哲**			
周四	**兰广宸**	**宇文子炎**	**杨德宇**		**赵国梁**	**李玮琪**	**朱可**	
	高数	高数	高数		高数	大物	高数	
	线代	线代	大物		大物	线代	工图	
	大物	力学			线代	大化	线代	
	工图	电磁学			C语言		C语言	
	C++						大物	
	李凯、宇文子炎				**刘辉**			
周五	**刘美奇**	**申沅均**	**黄兴伟**	**何洪宇**	**孙静**	**王昀**	**刘伟**	
	数论	高数	大物	高数	高数	线代	高数	
	大物	大物	大计基	大物	大计基	大物	线代	
		线代		C++		C++	大物	
		工图						
	赵诗迪				**孙静 、周慧琳**			
周六	**刘菲**	**郑纯然**	**丛立章**		**赖嘉琪**	**叶芊昊**	**孙雨涵**	
	高数	大物	高数		高数	线代	大物	
	线代	线代	线代		线代	大物	线代	
		C语言	工图		工图		工图	
	翟子墨、 刘菲				**叶芊昊**			
周日	**孟令军**	**雷雨**	**周晨阳**		**李雨桉**	**浦子健**	**李国凯**	
	高数	高数	高数		线代	高数	高数	
	线代	线代	工图		大物	线代	线代	
	大物	大物				大物	C++	
	无机分析化学	离散数学				C语言		
	耿娜娜				**李雨桉**			

从第三周开始，每晚 7:30-9:30（含周末，不含法定节假日），在东 21 舍 109 学辅办公室，有志愿者值班为学弟学妹们面对面答疑，值班表见上图，欢迎同学们前来。

目录

第一章 行列式

第一节 行列式的定义与性质

(A)

1. $x_1=-2$，$x_2=6$

解析： $D=\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=-1$，$D_1=\begin{vmatrix}6&2\\8&3\end{vmatrix}=2$，$D_2=\begin{vmatrix}3&6\\5&8\end{vmatrix}=-6$，$x_1=\frac{D_1}{D}=-2$，$x_2=\frac{D_2}{D}=6$。

2. 不会

解析： (i,j)元素的代数余子式不包括第i行与第j列的元素。

3. $M_{34}=104$，$A_{34}=-104$

解析： $M_{34}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\3&5&-8\\1&2&10\end{vmatrix}=104$，$A_{34}=M_{34}\cdot(-1)^{3+4}=-104$。

4.

解析： D_1与D_2仅第四行元素不同，故D_1与D_2第四行元素的代数余子式相同。将D_2按第四行展开，得 $D_2=(-1)\cdot(-1)^{4+1}\cdot M_{41}+(1)\cdot(-1)^{4+2}\cdot M_{42}+(-1)\cdot(-1)^{4+3}\cdot M_{43}+(1)\cdot(-1)^{4+4}\cdot M_{44}=M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$，$M$是$D_2$的代数余子式，也是$D_1$的代数余子式。

5. (1) -100 (2) $4abcdef$

解析： 第一问按行列式定义直接展开计算即可。第二问各行分别提出公因子a,d,f，各列分别提出公因子b,c,e，再按定义展开计算。

6. (1) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$ (2) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$

解析： 第一问，按最后一行展开，只有一个元素$\mathrm{a_{nn}}=n$非零，故$D=n\cdot(-1)^{n+n}\cdot\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&\cdots&0&0\end{vmatrix}$。反复按第一行展开，得$D=n\cdot\prod_{k=1}^{n-1}k\cdot(-1)^{n-k+1}=n!\,(-1)^{\sum_{k=1}^{n-1}n-k+1}=n!\,(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}=n!\,(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$。

第二问，按第一列展开，$D=x\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}x&y&\cdots&0&0\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&y\\0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}+y\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix}y&0&\cdots&0&0\\x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&y&0\\0&0&\cdots&x&y\end{vmatrix}=x^n+y^n\cdot(-1)^{n+1}$。

(B)

1.

解析：设所得行列式为D_1，则D_1的元素为$a_{ij}\cdot b^{i-j}$。各行提出b^i，各列提出b^{-j}，得$D_1=D\cdot\prod_{i=1}^{n}b^i\cdot\prod_{j=1}^{n}b^{-j}=D$。

2.

解析：完全展开即可。

第二节 行列式的计算

(A)

1. (1) $-2(x^3+y^3)$ (2) $1-x^2-y^2-z^2$ (3) b^2c^2 (4) 160 (5) 40 (6) $4x^3$

解析：

第一问，将第 2,3 行加到第 1 行，得原行列式$D=\begin{vmatrix}x & y & x+y\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+2y & 2x+2y & 2x+2y\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y & x+y & x\\ x+y & x & y\end{vmatrix}$。再令第 2 行减去$y$倍第 1 行，第 3 行减去$x+y$倍第 1 行，得$D=2(x+y)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x & x-y\\ 0 & -y & -x\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}x & x-y\\ -y & -x\end{vmatrix}=-2(x^3+y^3)$。

第二问，第 1 列减去x倍第 2 列，y倍第 3 列，z倍第 4 列，得$D=\begin{vmatrix}1-x^2-y^2-z^2 & x & y & z\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1-\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2-\mathrm{z}^2$。

第三问，对于除对角线元素均相同的行列式常用加边法求解，$D=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & a\\ 0 & a+b & a & a & a\\ 0 & a & a-b & a & a\\ 0 & a & a & a+c & a\\ 0 & a & a & a & a-c\end{vmatrix}$，然后每一行减去第 1 行，得$D=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & a\\ -1 & b & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -b & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & c & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & -c\end{vmatrix}$。若$b=0$或$c=0$，易证$D=0$。否则，第 1 列加上$\frac{1}{b}$倍第 2 列，$-\frac{1}{b}$倍第 3 列，$\frac{1}{c}$倍第 4 列，$-\frac{1}{c}$倍第 5 列，得$D=\begin{vmatrix}1 & a & a & a & a\\ 0 & b & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c\end{vmatrix}=b^2c^2$。

第四问，第 2,3,4 行加到第 1 行，$D=\begin{vmatrix}10 & 10 & 10 & 10\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=$
$10\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & -2 & -1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -3 & -2 & -1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 4 & -4\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix}=160$。

第五问，$D=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\end{vmatrix}=$ $-5\begin{vmatrix}-24&18&-19\\2&-1&1\\16&-10&11\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&-1&1\\-12&18&-19\\8&-10&11\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&6&-7\\0&-2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}6&-7\\-2&3\end{vmatrix}=40$。

第六问，各行减去x倍第 1 行，得$D=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&-x&0&0&0\\1&0&-x&0&0\\1&0&0&-x&0\\1&0&0&0&-x\end{vmatrix}$。若$x=0$，显然$D=0$。

若$x\neq0$，则$D=\begin{vmatrix}\frac{4}{x}&1&1&1&1\\0&-x&0&0&0\\0&0&-x&0&0\\0&0&0&-x&0\\0&0&0&0&-x\end{vmatrix}=4x^3$，代入$x=0$亦符合，故$D=4x^3$。

2.

解析： 第一问，按列拆分，得 $D=\begin{vmatrix}a_1&a_1x+b_1&c_1\\a_2&a_2x+b_2&c_2\\a_3&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1x&a_1x+b_1&c_1\\b_2x&a_2x+b_2&c_2\\b_3x&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}b_1&a_1x+b_1&c_1\\b_2&a_2x+b_2&c_2\\b_3&a_3x+b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}b_1&a_1x&c_1\\b_2&a_2x&c_2\\b_3&a_3x&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}-$ $x^2\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=(1-x^2)\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$。

第二问，令$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&x\\a^2&b^2&c^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&x^3\end{vmatrix}$，按第 4 列展开，将得到一个$x$的多项式，二次项$x$^2的系数的相反数即题目要求的$D$。该行列式为范德蒙行列式，按公式展开得$D_1=(x-a)(x-b)(x-c)(c-a)(c-b)(b-a)=(c-a)(c-b)(b-a)[x^3+(-a-b-c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc]$，二次项系数为$(c-a)(c-b)(b-a)(-a-b-c)$，故$D=(c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c)$。

第三问，$D=\begin{vmatrix}a^2&a^2+2a+1&a^2+4a+4&a^2+6a+9\\b^2&b^2+2b+1&b^2+4b+4&b^2+6b+9\\c^2&c^2+2c+1&c^2+4c+4&c^2+6c+9\\d^2&d^2+2d+1&d^2+4d+4&d^2+6d+9\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2a+3&2a+5\\b^2&2b+1&2b+3&2b+5\\c^2&2c+1&2c+3&2c+5\\d^2&2d+1&2d+3&2d+5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2&2\\b^2&2b+1&2&2\\c^2&2c+1&2&2\\d^2&2d+1&2&2\end{vmatrix}=0$。

3. (1) -20 (2) -2 (3) $abd(c-b)(d-b)(d-c)(c^2-a^2)$

解析： 第一问，$D=\begin{vmatrix}1&-2\\3&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\7&8\end{vmatrix}=10\cdot(-2)=-20$。

第二问，$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\2&2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\5&6\end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2$。

第三问，$D=-\begin{vmatrix}a&a&a&0&0\\b&d&c&0&0\\b^2&d^2&c^2&0&0\\0&0&0&bc&ab\\0&0&0&da&cd\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a&a&a\\b&d&c\\b^2&d^2&c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}bc&ab\\da&cd\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}\cdot$ $(bd)\cdot\begin{vmatrix}c&a\\a&c\end{vmatrix}=abd(d-b)(d-c)(c-b)(c^2-a^2)$。

4. (1) $(-1)^{n-1}(n-1)$ (2) $b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^n a_i)$ (3) $(-2)(n-2)!$ (4) $\prod_{i=1}^n a_i\,(1+\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})$

解析： 第一问，将每一行加到第 1 行，$D=\begin{vmatrix}n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=$ $(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(n-1)\cdot(-1)^{n-1}$。

第二问，可用加边法。若 $b=0$，显然 $D=0$。若 $b\neq 0$，则 $D=$ $\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\0&a_1+b&a_2&a_3&\cdots&a_n\\0&a_1&a_2+b&a_3&\cdots&a_n\\0&a_1&a_2&a_3+b&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\-1&b&0&0&\cdots&0\\-1&0&b&0&\cdots&0\\-1&0&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&0&\cdots&b\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}1+\frac{1}{b}\sum_{k=1}^n a_k&a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\0&b&0&0&\cdots&0\\0&0&b&0&\cdots&0\\0&0&0&b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&b\end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{k=1}^n a_k)$。

第三问，每行减去 2 倍的第 1 行，得 $D=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\0&-2&-2&\cdots&-2\\0&-2&-1&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&-2&-2&\cdots&n-4\end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix}-2&-2&\cdots&-2\\-2&-1&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-2&-2&\cdots&n-4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\-2&-1&\cdots&-2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-2&-2&\cdots&n-4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$。

第四问，加边法，过程同第二问，$D=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1+a_1&1&\cdots&1\\0&1&1+a_2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&1&\cdots&1+a_n\end{vmatrix}=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{k=1}^{n}a_k$$

5. $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

解析：按第一列展开，$D_5=(1-a)D_4+\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=(1-a)D_4+aD_3$。

$D_1=1-a$，$D_2=\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}=a^2-a+1$，递推得$D_5=(1-a)D_4+aD_3=(1-a)[(1-a)D_3+aD_2]+aD_3=(1-a+a^2)D_3+(1-a)aD_2=(1-a+a^2)[(1-a)D_2+aD_1]+(1-a)aD_2=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$。

6. $\prod_{k=1}^{n}k!$

解析：设将行列式翻转需要交换行或列m次。将行列式上下翻转再左右翻转，相当于交换行列$2m$次，$(-1)^{2m}=1$，故原行列式等于$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}i=\prod_{k=1}^{n}k!$。

7.

解析：第一问，按第一行展开，所得余子式再按最后一行展开，得$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}$，递推得$D_{2n}=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$。

第二问，最后一行展开，$D_n=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}\cdots+(-1)^{2n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+x^n$。

第三问，第一列展开，$D_n=(a+b)D_{n-1}-\begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$，$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$，$D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})$。$D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+b^2+ab$，$D_1=a+b$，$D_n-aD_{n-1}=b^{n-2}(D_2-aD_1)=b^n$，$D_n-bD_{n-1}=a^{n-2}(D_2-bD_1)=a^n$，解得$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$。

第四问，数学归纳法。$D_1=\cos\alpha$，$D_2=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos 2\alpha$，成立。

若$k=1,2,3\cdots n$，该式均成立，则当$k=n+1$时，最后一行展开，$D_{n+1}=2\cos\alpha\, D_n-$

$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos\alpha\, D_n - D_{n-1} = 2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos(n-1)\alpha =$
$2\cos\alpha\cos n\alpha - \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha = \cos(n+1)\alpha$。证毕。

(B)

1.

解析：反复将第$m+1$列与前一列交换，当其交换到第一列时，交换次数为m。同理第$m+2$列以此法交换到第 2 列时交换次数也为m。对后n列均做此操作，交换次数为mn，变为块对角行列式，再利用块对角行列式的计算方法即可证明。

2. (1) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ (2) $\lambda^{n-1}(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2)$

解析：第一问，除第 1 行外，每一行减去前一行，得$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$，

除最后一列外每列加上最后一列，得 $D_n = \begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$
$-(-2)^{n-2}(n-1) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$。

第二问，加边法。

$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda - a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & -a_2a_1 & \lambda - a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda - a_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$。若$\lambda = 0$，$D_n = 0$。否则$D_n = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - \sum_{i=1}^{n} a_i^2)$。

第三节 Cramer 法则

(A)

1. (1) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$ (2) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$

解析：第一问，$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60$，$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180$，$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} =$

60，$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}=60$，$x_1=\frac{D_1}{D}=3$，$x_2=\frac{D_2}{D}=1$，$x_3=\frac{D_3}{D}=1$。

第二问，$D=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)$，$D_1=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=D$，$D_2=\begin{vmatrix}1&1&a_1^2&a_1^3\\1&1&a_2^2&a_2^3\\1&1&a_3^2&a_3^3\\1&1&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=0$，$D_3=\begin{vmatrix}1&a_1&1&a_1^3\\1&a_2&1&a_2^3\\1&a_3&1&a_3^3\\1&a_4&1&a_4^3\end{vmatrix}=0$，$D_4=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&1\\1&a_2&a_2^2&1\\1&a_3&a_3^2&1\\1&a_4&a_4^2&1\end{vmatrix}=0$。$x_1=\frac{D_1}{D}=1$，$x_2=x_3=x_4=0$。

2. $\lambda=1$

解析：齐次方程存在非零解，故$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2=0$，$\lambda=1$。

3. 若由n个方程，n 个未知量组成的线性方程组无解或解不唯一，则方程组的系数行列式等于 0。

4.

解析：。$\begin{vmatrix}x&y&1\\x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1-x&y_1-y\\x_2-x_1&y_2-y_1\end{vmatrix}=0$，即$(x_1-x)(y_2-y_1)=(y_1-y)(x_2-x_1)$，即直线的两点式。

5. $f(x)=7-5x^2+2x^3$

解析：待定系数法。设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，则

$$\begin{cases}-a+b-c+d=0\\a+b+c+d=4\\8a+4b+2c+d=3\\27a+9b+3c+d=16\end{cases}$$

解得$a=2,b=-5,c=0,d=7$。

(B)

1.

解析：反证法。假设该方程存在四个不同的根x_1,x_2,x_3,x_4，则

$$\begin{cases}a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3=0\\a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3=0\\a_0+a_1x_3+a_2x_3^2+a_3x_3^3=0\\a_0+a_1x_4+a_2x_4^2+a_3x_4^3=0\end{cases}$$

以a_3,a_2,a_1,a_0为未知数，解四元一次方程。系数行列式$D=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{vmatrix}=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\neq 0$，仅零解，$a_3=a_2=a_1=a_0=0$，与$a_3\neq 0$矛盾。所以原方程不存在四个不同的根。

第一章习题

1. (1) 140 (2) 48 (3) 1, 2, 3 (4) $\frac{a}{b}$ (5) $\lambda\neq 1$且$\mu\neq 0$

解析：第一问，分块对角行列式$D=\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 4\end{vmatrix}=140$。

第二问，除第一行外每行减去第一行，$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\-2 & 2 & 0 & 0\\-2 & 0 & 2 & 0\\-2 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$，然后除第一列外每列加到第一列，$D=\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=48$。

第三问，第三行减第二行，得$D=\begin{vmatrix}x+1 & -4 & 2\\3 & x-4 & 0\\0 & 3-x & x-3\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}x+1 & -4 & 2\\3 & x-4 & 0\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}x+1 & -2 & 0\\3 & x-4 & 0\\0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}x+1 & -2\\3 & x-4\end{vmatrix}=(x-3)(x^2-3x+2)=(x-3)(x-2)(x-1)$，根为1,2,3。

第四问，第一列元素的代数余子式之和，即将第一列元素全部换成 1 之后行列式的值。将除第一列外得每一列加到第一列，则第一列全为b，提出b可知将第一列换成 1 之后行列式的值为$\frac{a}{b}$。

第五问，只有零解即系数行列式不等于 0。$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1 & \mu & 1\\1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\1-\lambda & \mu-1 & 0\\1-\lambda & 2\mu-1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & \mu-1\\1-\lambda & 2\mu-1\end{vmatrix}=-(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & \mu-1\\1 & 2\mu-1\end{vmatrix}=-\mu(\lambda-1)\neq 0$，$\mu\neq 0$，$\lambda\neq 1$。

2. (1) D (2) A (3) B

解析：第一问，系数行列式为 0，则齐次方程组有非零解，非齐次方程组解必不唯一。

第二问，将D的第 3 行元素换成 1, 2, 3, 4 即为结果，此时第 3 行与第 1 行相同，行列式等于 0。

第三问，$f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\2x-2 & 1 & 0 & -1\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2 & 1 & 0 & -1\\x & 0 & 0 & 0\\3x-3 & 1 & x-2 & -2\\4x & -3 & x-7 & -3\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\1 & x-2 & -2\\-3 & x-7 & -3\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & x-2 & -1\\0 & x-7 & -6\end{vmatrix}=-x\begin{vmatrix}x-2 & -1\\x-7 & -6\end{vmatrix}=5x(x-1)$，有 2 个根。

3. -105

解析：将原行列式第 3 列替换为 1,-2,5,0 即为结果。$\begin{vmatrix}1 & 8 & 1 & 8\\ 3 & 5 & -2 & 2\\ 5 & 4 & 5 & 5\\ 5 & 6 & 0 & 4\end{vmatrix}$=-105。

4. (1)-18 (2)-142 (3)$1+x^2+y^2+z^2$ (4)$6a^5$

解析：前两问常规方法即可。

第三问。原式除对角线外，各行列均有公因子，常用加边法，$D=\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 0 & x^2+1 & xy & xz\\ 0 & xy & y^2+1 & yz\\ 0 & xz & yz & z^2+1\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ -x & 1 & 0 & 0\\ -y & 0 & 1 & 0\\ -z & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x^2+y^2+z^2 & x & y & z\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+x^2+y^2+z^2$。

第四问，第一行展开，$D_5=2aD_4-\begin{vmatrix}a^2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2a & 1 & 0\\ 0 & a^2 & 2a & 1\\ 0 & 0 & a^2 & 2a\end{vmatrix}=2aD_4-a^2D_3=2a[2aD_3-a^2D_2]-a^2D_3=3a^2D_3-2a^3D_2=3a^2[2aD_2-a^2D_1]-2a^3D_2=4a^3D_2-3a^4D_1$，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，$D_1=2a$，解得$D_5=6a^5$。

5. $x_1=\frac{1}{2},x_2=x_3=x_4=0$

解析：克莱姆法则，常规做法即可。

第二章 矩阵

第一节 矩阵及其运算

(A)

1. $\begin{bmatrix}22 & 19 & 13\\-26 & 7 & 11\\28 & 5 & -11\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}8 & -8 & 10\\7 & 3 & 1\\5 & 3 & -3\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法、矩阵转置定义，直接计算即可。

注：$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}8 & 7 & 5\\-8 & 3 & 3\\10 & 1 & -3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\ =\begin{bmatrix}8 & -8 & 10\\7 & 3 & 1\\5 & 3 & -3\end{bmatrix}$。

2. (1)14 (2) $\begin{bmatrix}-2 & 4\\-1 & 2\\-3 & 6\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}22 & 15\\22 & 2\end{bmatrix}$ (4) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$

解析：本题考查矩阵乘法定义，直接计算即可。

第一问，原式$=1+4+9=14$

第二问，原式$=\begin{bmatrix}-1\times 2 & 2\times 2\\-1\times 1 & 2\times 1\\-1\times 3 & 2\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\-1 & 2\\-3 & 6\end{bmatrix}$

第三问，原式$=\begin{bmatrix}1+4-3+20 & 3+8+4\\-1-2+25 & -3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 15\\22 & 2\end{bmatrix}$

第四问，按照矩阵乘法定义计算即可，原式可化为

$$\begin{aligned}&[a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\quad a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\quad a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+x_2(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)\\&+x_3(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\\&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3\end{aligned}$$

3. $\begin{bmatrix}2 & 1\\-10 & 3\\-7 & 9\end{bmatrix}$

解析：本题考查线性变换与矩阵。

令$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 0\\4 & 0 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\4 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}$，代入得$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 0\\4 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\4 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}2 & 1\\-10 & 3\\-7 & 9\end{bmatrix}\boldsymbol{Z}$，故所求$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$到$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$的线性变换矩阵为$\begin{bmatrix}2 & 1\\-10 & 3\\-7 & 9\end{bmatrix}$

4. (1)不等于 (2)不等于 (3)不等于

解析：本题考查矩阵乘法定义，需要注意矩阵乘法不存在交换律。

第一问，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}4 & 6\\3 & 4\end{bmatrix}$，故不相等

第二问，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{bmatrix}13 & 21\\21 & 34\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}7 & 10\\15 & 22\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}10 & 18\\21 & 37\end{bmatrix}$，故不相等

第三问，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\3&3\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}9&11\\15&18\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}6&8\\15&21\end{bmatrix}$，故不相等

5. (1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ (2)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ (3)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ (4)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法定义与应用，注意矩阵乘法与代数乘法的异同，经常用到的反例有$\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0&0\\0&b\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0&0\\c&0\end{bmatrix}$代入验证即可。

6. (1)$\boldsymbol{AD}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\cdots&\lambda_ja_{1j}&\cdots&\lambda_na_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1a_{n1}&\cdots&\lambda_ja_{nj}&\cdots&\lambda_na_{nn}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{DA}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11}&\cdots&\lambda_1a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda_ia_{i1}&\cdots&\lambda_ia_{in}\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda_na_{n1}&\cdots&\lambda_na_{nn}\end{bmatrix}$

(2)$\boldsymbol{A}\varepsilon_j=[a_{1j}\quad a_{2j}\quad\cdots\quad a_{nj}]^T$，$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}=[a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{in}]$，$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}\varepsilon_j=a_{ij}$

解析：本题考查矩阵乘法定义与应用，本题结论可直接在后面章节中使用。

第一问，根据矩阵乘法定义计算$\boldsymbol{AD}$、$\boldsymbol{DA}$，规律是$\boldsymbol{AD}$的第j列等于用λ_j乘$\boldsymbol{A}$的第j列所得列向量，$\boldsymbol{DA}$的第i行等于用λ_i乘$\boldsymbol{A}$的第i行所得行向量

第二问，根据矩阵乘法定义计算$\boldsymbol{A}\varepsilon_j$、$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}$、$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}\varepsilon_j$，规律是$\boldsymbol{A}\varepsilon_j$为$\boldsymbol{A}$的第$j$列，$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{A}$的第$i$行，$\varepsilon_i^T\boldsymbol{A}\varepsilon_j$为$a_{ij}$

7.

解析：本题考查矩阵乘法定义，用数学归纳法证明。

第一问，当$n=1$时，命题成立

假设$n=k$时，$\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}cosk\theta&-sink\theta\\sink\theta&cosk\theta\end{bmatrix}$成立，当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}cosk\theta&-sink\theta\\sink\theta&cosk\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos\theta&-sin\theta\\sin\theta&cos\theta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}cos\theta cosk\theta-sin\theta sink\theta&-sin\theta cosk\theta-cos\theta sink\theta\\cos\theta sink\theta+sin\theta cosk\theta&-sin\theta sink\theta+cos\theta cosk\theta\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}cos(k+1)\theta&-sin(k+1)\theta\\sin(k+1)\theta&cos(k+1)\theta\end{bmatrix}$，即$n=k+1$时也成立，故原命题成立

第二问，$n=1$当时，命题成立

假设$n=k$时，$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1&k&\frac{1}{2}k(k-1)\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}$成立，当$n=k+1$时，

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k&\frac{1}{2}k(k-1)\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}1&k+1&\frac{1}{2}k(k-1)+k\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k+1&\frac{1}{2}k(k+1)\\0&1&k+1\\0&0&1\end{bmatrix}$，即$n=k+1$时也成立，故原命题成立

第二问也可拆解矩阵直接证明，令$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{I}+n\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}n(n-1)\boldsymbol{B}^2+\cdots+\boldsymbol{B}^n$，而$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}(n=3,4,5,\cdots)$，代入得$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1&n&\frac{1}{2}n(n-1)\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}$，证毕

8. $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2&0&1&1\\1&1&1&1\\0&2&2&0\\2&0&1&1\end{bmatrix}$，其$(i,j)$元素表示从$P_i$出发经过 1 次中转到达$P_j$的航班总数

解析：根据矩阵乘法定义计算$\boldsymbol{A}^2$，由$\boldsymbol{A}$的具体意义可知$\boldsymbol{A}^2$的(i,j)元素表示从P_i出发经过 1 次中转到达P_j的航班总数。

9.

解析：本题考查对称矩阵、反对称矩阵定义及矩阵转置运算规律。证明思路是对于任意方阵$\boldsymbol{P}$，验证$\boldsymbol{P}^T$与$\boldsymbol{P}$的关系，若$\boldsymbol{P}^T=\boldsymbol{P}$则$\boldsymbol{P}$为对称矩阵，若$\boldsymbol{P}^T=-\boldsymbol{P}$则$\boldsymbol{P}$为反对称矩阵。

第一问，$\boldsymbol{A}$为对称矩阵$\Rightarrow \boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^T)^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$为对称矩阵，证毕

第二问，$\boldsymbol{A}$为对称矩阵、$\boldsymbol{B}$为反对称矩阵$\Rightarrow\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^T=-\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{AB}$为反对称矩阵$\Leftrightarrow -\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{BA}\quad\Leftrightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

第三问，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶对称矩阵$\Rightarrow\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$

所以，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是对称矩阵，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$是对称矩阵，$(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T=k\boldsymbol{A}$是对称矩阵。同理，当$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶反对称矩阵时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$k\boldsymbol{A}$是反对称矩阵

第四问，取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&a\\b&0\end{bmatrix}$，仅当$a=b$时$\boldsymbol{AB}$为对称矩阵

10. (1) $\boldsymbol{O}$ (2)$3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$

解析：本题考查方阵幂运算与矩阵乘法运算律，注意第二问用矩阵乘法结合律简化运算。

第一问，$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}(n>2)$$

第二问，$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$，将$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$代入，根据定义写出表达式，再用结合律

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta})^n=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\cdots\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^T(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T)^{n-1}\boldsymbol{\beta}=3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$$

$$=3^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$$

11.

解析：本题考查矩阵乘法定义及单位矩阵运算规律，$\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{I}^n=\boldsymbol{I}$，将已知代入计算即证。

$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\right]^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{IB}+\boldsymbol{BI}+\boldsymbol{I}^2=2(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}=2\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{I}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{I}$，证毕。

12.

解析：本题考查矩阵加法、矩阵乘法运算律以及迹的定义。

问题一，根据定义$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^n a_{ii}$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^n b_{ii}$

$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^n(a_{ii}+b_{ii})=\sum_{i=1}^n a_{ii}+\sum_{i=1}^n b_{ii}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，证毕

问题二，$\boldsymbol{AB}$的(i,i)元素为$\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$，$\boldsymbol{BA}$的$(i,i)$元素为$\sum_{l=1}^n b_{il}a_{li}$，

由定义$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{ki}$，

而$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})=\sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^n b_{il}a_{li}=\sum_{l=1}^n\sum_{i=1}^n a_{li}b_{il}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$，证毕

问题三，$\boldsymbol{AA}^T$的(i,i)元素为$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{i3}^2=\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$，

由定义$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}^T)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}^2$，证毕

(B)

1.

解析：本题考查上三角矩阵定义，数学语言描述为当元素行标大于列标时该元素等于 0。

设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同阶上三角矩阵，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，当$i>j$时，$a_{ij}=0$，$b_{ij}=0$，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot b_{kj}+\sum_{k=i}^n a_{ik}\cdot 0=0$$

2.

解析：本题考查矩阵乘法与矩阵转置定义，充分性考虑$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{O}$主对角线元素。

必要性，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{O}$

充分性，$\boldsymbol{AA}^T$的(i,i)元素为$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{i3}^2=\sum_{j=1}^m a_{ij}^2$，根据习题 2.1(A)12 题结论(3)，有

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}^T)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}^2$$

$$\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{O}\Rightarrow\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}^T)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}^2=0\Rightarrow a_{ij}=0(i=1,2,\cdots n,j=1,2,\cdots,m)\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

第二节 逆矩阵

(A)

1.

解析：本题考查方阵可逆充要条件，由定理 2.2.2 直接计算即证。

因为$\det(\boldsymbol{A})=ad-bc\neq 0$故$\boldsymbol{A}$可逆，求各元素的代数余子式$A_{11}=d$，$A_{12}=-c$，$A_{21}=-b$，$A_{22}=a$，进而$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$，证毕。

2.

解析：本题考查方阵可逆充要条件，由定理 2.2.2 直接计算即证。

$\boldsymbol{D}$可逆$\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{D})=d_1d_2\cdots d_n\neq 0\Leftrightarrow \boldsymbol{D}$的主对角元素$d_1,d_2,\cdots,d_n$均不为零，计算$\boldsymbol{D}^*=\begin{bmatrix} d_2d_3\cdots d_n & & & \\ & d_1d_3\cdots d_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_1d_2\cdots d_{n-1} \end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{D}^{-1}=\frac{1}{\det(D)}\boldsymbol{D}^*=\frac{1}{d_1d_2\cdots d_n}\begin{bmatrix} d_2d_3\cdots d_n & & & \\ & d_1d_3\cdots d_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_1d_2\cdots d_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & \\ & d_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^{-1} \end{bmatrix}=\operatorname{diag}\left(d_1^{-1},d_2^{-1},\cdots,d_n^{-1}\right)$，证毕。

3. (1)可逆，$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2)可逆，$\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

解析：本题考查方阵可逆充要条件的运用，根据定理 2.2.2 计算即可。

第一问，记$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A})=-2\neq 0$故$\boldsymbol{A}$可逆，而$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

第二问，记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{B})=cos^2\theta+sin^2\theta=1\neq 0$故$\boldsymbol{B}$可逆，而$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$

4. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$，$-\frac{1}{5}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。根据矩阵乘法将原式分解为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$的形式，则由推论 2.2.2 得$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$可逆且互为逆矩阵。

因为$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$，故有$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{I}$，即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\left(\frac{1}{-2}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{I}$，故由推论 2.2.2 得$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$可逆且$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$

因为$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})+5\boldsymbol{I}$，故有$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})=-5\boldsymbol{I}$，即$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})\left[\frac{1}{-5}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$，故由推论 2.2.2 得$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$可逆且$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}=-\frac{1}{5}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})$

5.

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。根据推论 2.2.2 证明$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}$即可。

因为$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{O}=\boldsymbol{I}$，所以根据推论 2.2.2，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$可逆且$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{m-1}$

6.

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。根据推论 2.2.2 证明$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{I}$，将等式左边展开并代入$\boldsymbol{A}^2=n\boldsymbol{A}$即证。

因为 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n&n&\cdots&n\\n&n&\cdots&n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n\end{bmatrix}=n\boldsymbol{A}$，故 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{I}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}+\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}-\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}+\frac{n}{n-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，所以根据推论 2.2.2，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{n-1}\boldsymbol{A}$

7. $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix}1&2&0\\4&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵转置运算律、逆矩阵基本性质及逆矩阵计算。根据逆矩阵的基本性质可将等式化为$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T$，计算对角矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$时可直接使用习题 2.2 第二题结论简化运算。

由题设得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T\left[\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^T\boldsymbol{C}^T+I\right]-\left[(\boldsymbol{C}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\right]^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^T\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\right)^T\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T$，

因为$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}(1,2,3)$，$\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\4&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

8.

解析：本题考查伴随矩阵定义及重要结论，注意分类讨论与反证法的运用。

由$\det(\boldsymbol{A})=0$知存在$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$和$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$两种情况，

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$时，由定义 2.2.2 有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}\Rightarrow\det(\boldsymbol{A}^*)=0$

$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$时，由定理 2.2.1 有$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，若$\det(\boldsymbol{A}^*)\neq0$，则$\boldsymbol{A}^*$可逆，左乘$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$得$\boldsymbol{O}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，与$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$矛盾，故$\det(\boldsymbol{A}^*)=0$

综上，$\det(\boldsymbol{A}^*)=0$得证

9.

解析：本题考查伴随矩阵定义。

由定义 2.2.1 知，$k\boldsymbol{A}$的每个元素的代数余子式等于$\boldsymbol{A}$对应元素代数余子式的k^{n-1}倍，所以

$$(k\boldsymbol{A})^*=\begin{bmatrix}k^{n-1}A_{11}&k^{n-1}A_{21}&\cdots&k^{n-1}A_{n1}\\k^{n-1}A_{12}&k^{n-1}A_{22}&\cdots&k^{n-1}A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k^{n-1}A_{1n}&k^{n-1}A_{2n}&\cdots&k^{n-1}A_{nn}\end{bmatrix}=k^{n-1}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$$

10. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。将原式左乘$\boldsymbol{A}$并化简得$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\left[\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$，由推论 2.2.2 知$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$可逆，由第一问易得$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}+8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}$，从而计算矩阵$\boldsymbol{A}$

第一问，$2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$两边左乘$\boldsymbol{A}$得$2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}$，从而$\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，因为$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{AB}-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})-8\boldsymbol{I}$，即$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\left[\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}$，故由推论 2.2.2 知$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$可逆且$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})$

第二问，由已知$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，进而$\det(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})=-16\neq0$，故$\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I}$可逆且$(B-4I)^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}4&-4&0\\2&6&0\\0&0&8\end{bmatrix}$，对$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})$两边同取逆，得$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\left[\frac{1}{8}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})\right]^{-1}=8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}$，

所以$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{I}+8(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&-4&0\\2&6&0\\0&0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

11.

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。根据推论 2.2.2 证明$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$即可，注意灵活运用$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，第二问先证明$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$，再由逆矩阵唯一性得证

第一问，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$可逆$\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}$，
$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\right)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\right)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\right]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$，由推论 2.2.2 知$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$可逆且$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$

第二问，$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I}\right)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\right)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\right]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，由推论 2.2.2 知$\left(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$，由逆矩阵的唯一性得$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$

12. (1)$\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$ (2)$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\frac{3}{4}\boldsymbol{A}$

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论，直接计算即可。

第一问，$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{I}$，即$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{I}$，由推论 2.2.2 得$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$

第二问，$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\xRightarrow{\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{I}}4\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\xRightarrow{\text{移项整理}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}\xRightarrow{\text{两端左乘}\boldsymbol{A}^{-1}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}-\frac{3}{4}\boldsymbol{A}$

13. $\det\left(-2\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}\right)=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{3}$

解析：本题考查伴随矩阵推论和逆矩阵基本性质，根据推论 2.2.1 和逆矩阵基本性质 5 直接运算即可。

$$\det\left(-2\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det(-2\boldsymbol{A}^{*})\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)=(-2)^{n}\det(\boldsymbol{A}^{*})\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)$$
$$=(-2)^{n}[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}\frac{1}{\det(\boldsymbol{B})}=(-2)^{n}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{3}$$

14.

解析：本题考查逆矩阵定义，可以采用数学归纳法或者直接证明，注意矩阵乘法结合律的运用。

第一问，下面用数学归纳法证明，$n=1$时，等式成立，假设$n=k-1$时，$\boldsymbol{A}^{k-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{k-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k-1}\end{bmatrix}$成立，则$n=k$时，$\boldsymbol{A}^{k}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{k-1} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{k} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k}\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{A}^{k}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{k} & 0\\ 0 & \lambda_2^{k}\end{bmatrix}$，所以 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m=\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i=\sum_{i=1}^{m}a_i\begin{bmatrix}\lambda_1^{i} & 0\\ 0 & \lambda_2^{i}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}a_i\lambda_1^{i} & 0\\ 0 & a_i\lambda_2^{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_1^{i} & 0\\ 0 & \sum_{i=1}^{m}a_i\lambda_2^{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0\\ 0 & f(\lambda_2)\end{bmatrix}$

第二问，

$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{PBP}^{-1}\cdots\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PB}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{BP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^k\boldsymbol{P}^{-1}$，所以$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i=\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{PB}^i\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\boldsymbol{B}^i\right)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^{-1}$

15. $t=-3$

解析：本题考查方阵行列式运算律与方阵可逆充要条件，先由$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$得$\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A})=0$，用反证法证明$\det(\boldsymbol{A})=0$，进而求解$t$。

$$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\det(\boldsymbol{BA})=0\Rightarrow\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A})=0$$

若$\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，则$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$两端右乘$\boldsymbol{A}^{-1}$得$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{BAA}^{-1}=\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$矛盾，故$\det(\boldsymbol{A})=0$，所以$0=\det(\boldsymbol{A})=t+18+8+6t+3-8=7t+21$，解$7t+21=0$得$t=-3$

16.

解析：本题考查矩阵乘法运算律和方阵可逆充要条件的灵活运用，注意$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$为常数。

第一问，设非零列向量$\boldsymbol{\alpha}=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n]^T$，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$的主对角线元素$a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2$不全为0，故$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\neq\boldsymbol{O}$，所以$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\Leftrightarrow I-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^T+\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\Leftrightarrow-\boldsymbol{\alpha\alpha}^T+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{O}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}-1)\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\boldsymbol{O}$。因为$\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，所以$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$至少有一个元素非零，故$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$

第二问，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1\Rightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$两端左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，由于$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，故$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$与$\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\neq\boldsymbol{O}$矛盾，故$\boldsymbol{A}$不可逆

(B)

1.

解析：本题考查方阵可逆充要条件的推论。根据推论 2.2.2 证明$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\left(\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\right)=\boldsymbol{I}$即可，注意$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$为常数

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T)\left(\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}\right)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\left(1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$故由推论 2.2.2 得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T$可逆且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha\beta}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}}$

2.

解析：本题考查方阵可逆充要条件、伴随矩阵重要结论及推论的运用，直接证明即可，注意$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$两种求解方法的区别。

方法一：$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\left[\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}\right]=\boldsymbol{I}\xRightarrow{\text{推论 2.2.2}}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^*)^*=\det(\boldsymbol{A}^*)(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-2}\boldsymbol{A}$$

方法二：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^*)^*=\det(\boldsymbol{A}^*)(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}\left[\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{-1}=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-2}\boldsymbol{A}$$

3. $\det(\boldsymbol{A})=1$

解析：本题考查方阵可逆的充要条件，注意$\det(\boldsymbol{A})>0$和题设等价于$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$。

第一问，$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^4 a_{4j}A_{4j}=\sum_{j=1}^4 a_{4j}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+1>0$，由题设得$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$，两端同取行列式$\det(\boldsymbol{A}^T)=\det(\boldsymbol{A}^*)$，所以$\det(\boldsymbol{A})=[\det(\boldsymbol{A})]^3$，解得$\det(\boldsymbol{A})=1$

第二问，$\det(\boldsymbol{A})=1\neq0$，故$\boldsymbol{A}$可逆，所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$

第三节 分块矩阵及其运算

(A)

1. $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}5&19&0&0&0\\1&1&0&0&0\\3&3&4&-1&0\\6&9&14&7&6\\5&4&8&2&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&5\end{bmatrix}$

解析：根据分块矩阵运算规律直接计算即可。

令$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}$，得$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，令$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&-1&-1\end{bmatrix}$，得$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}B_1&\boldsymbol{O}\\B_2&B_3\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{B}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&19\\1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\6&9\\5&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&3&2\\3&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\14&7&6\\8&2&4\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}5&19&0&0&0\\1&1&0&0&0\\3&3&4&-1&0\\6&9&14&7&6\\5&4&8&2&4\end{bmatrix}$。令$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_2=$

$\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$，得$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}_2^{-1}\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{C}_1^{-1}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}_2^{-1}=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&-2&5\end{bmatrix}$

2.

解析：根据分块矩阵运算规律及矩阵可逆充要条件的推论，证明$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$即可。

$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_{m+n}$，根据推论 2.2.2 知$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$可逆且$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

3.

解析：利用本节给出的计算公式及方法即可。

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{B}_n\end{bmatrix}$，

则$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}_1)\ \det(\boldsymbol{A}_2)\cdots\det(\boldsymbol{A}_n)=\prod_{i=1}^{n}\det(\boldsymbol{A}_i)$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^k&&&\\&\boldsymbol{A}_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_n^k\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&&&\\&\boldsymbol{A}_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_n^{-1}\end{bmatrix}$

(B)

解析：根据分块矩阵运算规律，利用本节给出的计算公式及方法即可。注意第三问中利用$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$同阶，故$\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$的活用，以及题设所给的$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$。

第一问，由 1.2.6 式，设$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{D}_1)=\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

由 1.2.2 式，设$\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{D}_2)=\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$

第二问，$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$

第三问，上式两端同取行列式$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)$，

所以$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)$，

因为$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\right)=\det(\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{I})=1$，$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$，

所　以　$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)=\det(A)\det\left(D-CA^{-1}B\right)=\det\left(AD-ACA^{-1}B\right)=\det\left(AD-CAA^{-1}B\right)=\det(AD-CB)$

第四节 初等变换与初等矩阵

(A)

1.

解析：本题考查定理 2.4.1 的运用，注意对初等变换矩阵乘法表示的理解以及初等变换中 $P_1^{-1}=P_1$的运用。

右乘可逆矩阵表示初等列变换关系，右乘P_1表示交换矩阵的第一列与第四列，右P_2乘表示交换矩阵的第二列与第三列，所以$A\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_4}AP_1\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}AP_1P_2=B$，$A\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}AP_2\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_4}AP_2P_1=B$，故$B=AP_1P_2$，$B=AP_2P_1$，等式两端同取逆得$B^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}$，$B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}$，又因为$P_1^{-1}=P_1$，$P_2^{-1}=P_2$，故$B^{-1}=P_2P_1A^{-1}$，$B^{-1}=P_1P_2A^{-1}$，即$B^{-1}=P_1P_2A^{-1}=P_2P_1A^{-1}$

2. (1)$\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

解析：用初等变换法求矩阵的逆矩阵即可。

第一问，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

第二问，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -15 & 4 & 20 & -12 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 22 & -5 & -30 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 17 & -5 & -20 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 17 & -5 & -20 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix},$$

所以$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}$

3. (2)$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

解析：第一问根据推论 2.2.2 证明即可，第二问先用初等变换法求$\boldsymbol{A}$，再代入第一问即可。

第一问，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\left[\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}\right]=\boldsymbol{I}\ \Rightarrow(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}$

第二问，$\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}=\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2$，下面用初等变换法求$\boldsymbol{A}$

$\left[\boldsymbol{A}^{-1}\middle|\boldsymbol{I}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\right]$，所以$\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，故$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ $\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

4. $x_1=7$，$x_2=-9$，$x_3=4$

解析：用逆矩阵法求方程组的解即可。

令$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&7&11\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$，则原方程可改写为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}]=$ $\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&2&1&0\\3&7&11&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-2&-5&-2\\0&1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-\frac{5}{2}&-1\\0&0&-\frac{1}{2}&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-11\\0&1&0&-9\\0&0&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&7\\0&1&0&-9\\0&0&1&4\end{bmatrix}=$ $\left[\boldsymbol{I}\middle|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right]$，所以$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7\\-9\\4\end{bmatrix}$，即$x_1=7$，$x_2=-9$，$x_3=4$

5. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}$

解析：本题考查初等变换方法求逆矩阵及逆矩阵性质。第一问可以通过伴随矩阵或初等变换方法求$\boldsymbol{P}^{-1}$从而求得$\boldsymbol{A}$，也可以将原等式转置后构造矩阵方程直接求解，第二问直接利用逆矩阵性质及矩阵乘法结合律即可求解。

第一问，方法一，由已知得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，利用伴随矩阵或初等变换方法可求$\boldsymbol{P}^{-1}$，从而利用矩阵乘法计算$\boldsymbol{A}$。计算$\boldsymbol{PB}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\2&0&-1\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{P})=-1$，$\boldsymbol{P}^*=$

$\begin{bmatrix}-1&0&0\\-2&1&0\\4&-1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$

方法二，构造矩阵方程后用初等变换方法求解。$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}\xRightarrow{\text{两端同取转置}}(\boldsymbol{AP})^T=(\boldsymbol{PB})^T\Rightarrow\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{PB})^T$，下面用初等变换方法求矩阵方程的解$\boldsymbol{A}^T$，

$[\boldsymbol{P}^T|(\boldsymbol{PB})^T]=\begin{bmatrix}1&2&2&1&2&2\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&1&2&4\\0&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&6\\0&-1&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&6\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}|(\boldsymbol{P}^T)^{-1}(\boldsymbol{PB})^T\right]$，所以$\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{P}^T)^{-1}(\boldsymbol{PB})^T=\begin{bmatrix}1&2&6\\0&0&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$

第二问，$\boldsymbol{B}^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}1^5&0&0\\0&0&0\\0&0&(-1)^5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{PBP}^{-1}\cdots\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PB}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{B}\cdots\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{BP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{A}$

6. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}24&13\\-34&-18\end{bmatrix}$

解析：本题考查逆矩阵的计算，可用初等变换法或伴随矩阵法求解逆矩阵，也可求解矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{CB}^{-1}$。由于方阵为二阶方阵，采用伴随矩阵求解较为简单。

令$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-2&4\\3&-1\end{bmatrix}$得$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，故$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$，$\det(\boldsymbol{A})=4-3=1$，$\det(\boldsymbol{B})=9-10=-1$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}-3&-2\\-5&-3\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{B})}\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&4\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&13\\-34&-18\end{bmatrix}$

7. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-2&3&0\\3&4&-3\\0&-3&4\end{bmatrix}$

解析：本题由已知可得$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}$，通过初等变换法求$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}$即可求解。

$\boldsymbol{BA}=3\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}$，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}$，

$[\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&1&2&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix}1&1&0&0&2&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&0&-1&1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}\right]$，

所以$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$，

故$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&4&1\\1&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&0\\3&4&-3\\0&-3&4\end{bmatrix}$

8. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法和逆矩阵性质的灵活运用。注意$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=27+1-6+3=25\neq 0$，故$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})$可逆。

由已知 $\boldsymbol{AB}+4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

9. $\boldsymbol{B}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法和逆矩阵性质的灵活运用。注意$\boldsymbol{AA}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$的灵活使用，在求逆矩阵时可用伴随矩阵法或初等变换法。

由已知 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})]^{-1}=[\boldsymbol{AA}^*-2\boldsymbol{A}]^{-1}=[\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}]^{-1}$，由于$\det(\boldsymbol{A})=1+1-1+1+1+1=4$，所以$\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，

故$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，下面用伴随矩阵法求$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$，

令$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，则$\det(\boldsymbol{C})=1-1+1+1+1+1=4$，$\boldsymbol{C}^*=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$，所以$\boldsymbol{C}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{C})}\boldsymbol{C}^*=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

10. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法和逆矩阵性质的灵活运用。可将原矩阵方程整理为$\boldsymbol{X}=\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^2$，通过初等变换法或伴随矩阵法求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$即可，也可将原矩阵方程整理为$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}$，先计算$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$再通过初等变换法或伴随矩阵法求$[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}$。

方法一，由已知 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^2$，

由已知得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$，

$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]$，

所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,

故$\boldsymbol{X}=\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^2=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

方法二，由已知$\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{AX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{BX}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})]^{-1}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}$,

由已知得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}$,

$[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&-2&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&2\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&5\\0&1&0&0&1&2\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}\right]$，所以$[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$,

故$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2]^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

11. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法和逆矩阵性质的灵活运用。由原矩阵方程可得$\boldsymbol{A}^T=(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}$，用初等变换法求解逆矩阵即可，注意逆矩阵基本性质中$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$的灵活运用。

$\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{C}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{A}^T=\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}=\left[\boldsymbol{C}\left(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\right]^{-1}=(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}$,

由已知$2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}$,

$[2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&0&1&0&0&-4\\0&1&2&0&0&1&0&-3\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&2&0&0&1&0&-3&-4\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]$,

故$(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

所以$\boldsymbol{A}^T=(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$

12. (1)$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ (2)$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$

解析：本题考查初等变换的应用，直接求解即可。注意初等变换的矩阵乘法表示。

第一问，

由已知$\begin{bmatrix}2&1&1\\6&4&5\\4&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\4&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}$

由附注可得$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，

第二问，由于矩阵形式简单故采用伴随矩阵法计算逆矩阵，得$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$，

则$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$，

而$\boldsymbol{LU}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\6&4&5\\4&1&3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$成立

第三问，由附注得$\boldsymbol{Ly}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$，用前代法解得$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}4\\-7\\-9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4\\-7\\-9\end{bmatrix}$，用回代法解得$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4\\-1\\-3\end{bmatrix}$

(B)

解析：本题考查矩阵乘法和伴随矩阵、逆矩阵性质的灵活运用。由原矩阵方程可解得$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，再用初等变换法求$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$即可，注意求解矩阵方程中灵活使用$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\det(\boldsymbol{A}^*)=[\det(\boldsymbol{A})]^{n-1}$等性质。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{B}&=3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=3\left[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\right]^{-1}\\&=3\left(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=3\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}\end{aligned}$$

由于$\det(\boldsymbol{A}^*)=[\det(\boldsymbol{A})]^{4-1}=[\det(\boldsymbol{A})]^3=8$，所以$\det(\boldsymbol{A})=2$，故$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*$，

所以$\boldsymbol{B}=3\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=3\left(\boldsymbol{I}-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，

$[2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\-1&0&1&0&0&0&1&0\\0&3&0&-6&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&-6&0&-3&0&1\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}\right]$，所以 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{B}=$
$6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$

第五节 矩阵的秩

(A)

1. (1) $r=4$ (2) $r=3$ (3) $k=1$时，$r=1$；$k=-2$时，$r=2$；$k\neq1$且$k\neq-2$时，$r=3$ (4) $a+b=0$时，$r=1$；$a+b\neq0$时，$r=2$

解析：本题考查矩阵秩的求法。根据求矩阵秩的一般方法，将矩阵通过初等行变换为阶梯形，则阶梯形矩阵中非零行个数即为所求矩阵的秩。

第一问，

$\begin{bmatrix}0&1&1&-1&2\\0&2&-2&-2&0\\0&-1&-1&1&1\\1&1&0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&1&-1&2\\0&2&-2&-2&0\\0&-1&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&1&-1&2\\0&0&-4&0&-4\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1&-1\\0&1&1&-1&2\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，

由于非零行个数为 4，故矩阵的秩为 4

第二问，

$\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&-2&0\\3&0&6&-1&1\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&0&0&-4&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&3&0&0&1\\0&0&0&-4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&4&0\\0&0&0&-4&0\end{bmatrix}\to$
$\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\\0&3&0&-4&1\\0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，由于非零行个数为 3，故矩阵的秩为 3

第三问，

$\begin{bmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2k-2&3k-3\\0&2k-2&3-3k^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&3(1-k)(1+k)\end{bmatrix}$，下面分类讨论，

$k=1$时，原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，非零行行数为 1，矩阵的秩为 1

$k\neq1$即$k-1\neq0$时，原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2&3\\0&2&-3(1+k)\end{bmatrix}$，若$k=-2$即$1+k=-1$则原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1&-2&-6\\0&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}$，此时非零行行数为 2，矩阵的秩为 2，若$k\neq-2$即$1+k\neq-1$则原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1&-2&3k\\0&2&3\\0&2&-3(1+k)\end{bmatrix}$，此时非零行行数为 3，矩阵的秩为 3

所以，$k=1$时，$r=1$；$k=-2$时，$r=2$；$k\neq1$且$k\neq-2$时，$r=3$。

第四问，

$\begin{bmatrix}1&0&-1\\a&0&b\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\a&0&b\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-ar_1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&a+b\\0&0&0\end{bmatrix}$，下面分类讨论

$a+b=0$时，原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，非零行行数为 1，矩阵的秩为 1

$a+b\neq 0$时，原矩阵可化为$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & a+b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，非零行行数为 2，矩阵的秩为 2

所以，$a+b=0$时，$r=1$；$a+b\neq 0$时，$r=2$。

2. $x=2$

解析：本题考查矩阵秩的定义。由定义 2.5.2 的结论二知，若矩阵A的秩为r，则A的$r+1$阶子式全为 0，所以本题根据 3 阶子式为 0 求解x。

由矩阵秩的定义得$r(A)=2\Rightarrow A$ 的 3 阶子式全为 $0\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -x & 6\end{vmatrix}=0$，

所以$0=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -x & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -x-2 & 4\end{vmatrix}=8-2(x+2)=4-2x$，故$x=2$

3.

解析：本题考查矩阵秩的定义及行列式运算。由$r(\boldsymbol{A}^*)=1$可证$r(\boldsymbol{A})=2$，$\det(\boldsymbol{A})=0$，从而解得a、b关系，本题采用反证法证明$r(\boldsymbol{A})=2$，直接证法参考习题 4.4(B)5 的证明方法。

$r(\boldsymbol{A}^*)=1\Rightarrow \boldsymbol{A}^*$的元素不全为 0（若$\boldsymbol{A}^*$的元素全为 0，则$r(\boldsymbol{A}^*)=0$）$\Rightarrow \boldsymbol{A}^*$的元素是$\boldsymbol{A}$的代数余子式$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$的 2 阶子式不全为 0$\Rightarrow r(\boldsymbol{A})\geq 2\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=2$或$r(\boldsymbol{A})=3$

若$r(\boldsymbol{A})=3$，则$\boldsymbol{A}$满秩，即$\boldsymbol{A}$可逆$\det(\boldsymbol{A})\neq 0$，故$\det(\boldsymbol{A}^*)=[\det(\boldsymbol{A})]^2\neq 0$，所以$\boldsymbol{A}^*$可逆即$r(\boldsymbol{A}^*)=3$与$r(\boldsymbol{A}^*)=1$矛盾，故$r(\boldsymbol{A})=2$，

所以$\boldsymbol{A}$的 3 阶子式全为 0，即$\det(\boldsymbol{A})=0$，$0=\begin{vmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+2b & b & b\\ a+2b & a & b\\ a+2b & b & a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & b & b\\ 1 & a & b\\ 1 & b & a\end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix}1 & b & b\\ 0 & a-b & 0\\ 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2\Rightarrow a=b$或$a+2b=0$

若$a=b$，则$\boldsymbol{A}$可化为$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$(a=b\neq 0$ 时$)$，此时$r(\boldsymbol{A})=1$与$r(\boldsymbol{A})=2$矛盾，故$a\neq b$

若$a+2b=0$，则$\boldsymbol{A}$可化为$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$(ab\neq 0$ 时$)$，此时$r(\boldsymbol{A})=2$符合题意，

所以，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$时，必有$a\neq b$且$a+2b=0$

4. (1) $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -18 & -16\\ 0 & 1 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 18 & 16\\ 0 & 1 & -7 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (3) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}$，其中$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ -2 & -5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{I}_r\quad \boldsymbol{O}]\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -18 & -16\\ 0 & 1 & 7 & 8\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵满秩分解及初等变换的矩阵乘法表示。根据习题 2.4(A)12 附注可得初等变换矩阵，初等变换矩阵乘积即为可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，同理可得可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，根据例 2.5.3 可将矩阵$\boldsymbol{A}$满秩分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}$形式，计算$\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}$即可。

第一问，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&7&8\\1&3&3&8\\-2&-5&1&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\-2&-5&1&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\0&1&7&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&3&8\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

对应初等矩阵为$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

所以$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\1&0&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

第二问，

$$\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

对应初等矩阵为$\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-7&-8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}1&0&18&16\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

所以$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-7&-8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&18&16\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&18&16\\0&1&-7&-8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

第三问，由例 2.5.3 知$\boldsymbol{A}$可满秩分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{GH}$，下面求$\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}$，用伴随矩阵法求$\boldsymbol{P}^{-1}$

$$\det(\boldsymbol{P})=-\begin{vmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1,\ \boldsymbol{P}^*=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&-3&0\\2&5&-1\end{bmatrix},$$

所以$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{P})}\boldsymbol{P}^*=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&3&0\\-2&-5&1\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$\boldsymbol{Q}^{-1}$

$$[\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&0&18&16&1&0&0&0\\0&1&-7&-8&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&18&0&1&0&0&-16\\0&1&-7&0&0&1&0&8\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to$$

$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&-18&-16\\0&1&0&0&0&1&7&8\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|\boldsymbol{Q}^{-1}\right]$，所以$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

故$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&3&0\\-2&-5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\\-2&-5\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{I}_r\quad\boldsymbol{O}]\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-18&-16\\0&1&7&8\end{bmatrix}$$

5.

解析：本题考查矩阵的秩标准形。由于矩阵$\boldsymbol{A}$与它的秩标准形是等价的，通过$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的秩标准形即可证明$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$同秩或$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价。

$\boldsymbol{A}$等价于$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r(\boldsymbol{A})}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$等价于$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r(\boldsymbol{B})}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价$\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r(\boldsymbol{A})}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{r(\boldsymbol{B})}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$等价$\Leftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(B)

1.

解析：利用满秩矩阵直接证明即可，注意行满秩矩阵与列满秩矩阵的形式。

由题知$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$分别为列满秩矩阵和行满秩矩阵，由定理 2.5.2 知存在可逆阵$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$使$\boldsymbol{PG}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{QH}=[\boldsymbol{I}_r \quad \boldsymbol{O}]$，

所以$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{PGHQ}=(\boldsymbol{PG})(\boldsymbol{HQ})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}[\boldsymbol{I}_r \quad \boldsymbol{O}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r$

2. $r(\boldsymbol{A})=n-1$

解析：根据矩阵秩的定义通过求解矩阵的k阶子式求$n\boldsymbol{A}$的秩，由于$\boldsymbol{A}$与$n\boldsymbol{A}$有相同的秩标准形，故$\boldsymbol{A}$与$n\boldsymbol{A}$同秩。

$\boldsymbol{A}$与$n\boldsymbol{A}$有相同的秩标准形$\Rightarrow \quad r(\boldsymbol{A})=r(n\boldsymbol{A})$

$n\boldsymbol{A}=n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{bmatrix}$，而$n\boldsymbol{A}$的$n$阶子式$\begin{vmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}n-n & -1 & \cdots & -1\\ n-n & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-n & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=0$

$n\boldsymbol{A}$的$n-1$阶子式

$\begin{vmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-(n-1) & -1 & \cdots & -1\\ n-(n-1) & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n-(n-1) & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & n-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=n^{n-2}\neq 0$，所以$r(n\boldsymbol{A})=n-1$，故$r(\boldsymbol{A})=r(n\boldsymbol{A})=n-1$

第二章习题

1. (1)14 (2)-1 (3)$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (4) $\operatorname{diag}(2,-4,2)$ (5)$\frac{1}{9}$ (6) $\operatorname{diag}(8,8,-6)$ (7)$-2(a+b)$ (8)3

解析：本题考查矩阵乘法、逆矩阵性质、伴随矩阵性质、对角矩阵等的灵活运用。第一问设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$后直接求解即可；第二问根据$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right)=I$求解；第三问是求解逆矩阵常见的“配方法”；第四问直接求解，注意对角矩阵的逆矩阵求法，即$\boldsymbol{D}^{-1}=\operatorname{diag}\left(d_1^{-1},d_2^{-1},\cdots,d_n^{-1}\right)$；第五问运用行列式的乘法公式，即$\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}^*)=\det(\boldsymbol{I})$；第六问运用对角矩阵的幂运算规律直接求解，即$\boldsymbol{D}^k=\operatorname{diag}\left(d_1^k,d_2^k,\cdots,d_n^k\right)$；第七问运用行列式性质 1.1.2 和性质 1.1.5 计算；第八问运用行列式的乘法公式和逆矩阵性质，即$\det\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)$和$\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\frac{1}{\det(\boldsymbol{B})}$。

第一问，设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3\\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2\end{bmatrix}$，所以$x_1^2=1,x_2^2=4,x_3^2=9$，故$\alpha^T\alpha=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1+4+9=14$

第二问，$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=[a\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad a][a\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad a]^T=2a^2$，

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的逆矩阵为$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\quad\Rightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}\Rightarrow \boldsymbol{I}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right)=\boldsymbol{I}+\left(\frac{1}{a}-1\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{I}+\left(\frac{1}{a}-1\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^T=\boldsymbol{I}+\left(\frac{1}{a}-1\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T-\frac{1}{a}\cdot 2a^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=I+\left(\frac{1}{a}-1-2a\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\Rightarrow\frac{1}{a}-1-2a=0\Rightarrow\quad a=\frac{1}{2}$或$a=-1$，由于$a<0$，故$a=-1$

第三问，$\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I})=2\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I})\right]=\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I})$，

因为$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}$，所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

第四问，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}=2\boldsymbol{BA}-8\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}=-8\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{B}=-8(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=-8[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{I})]^{-1}=-8(\boldsymbol{AA}^*-2\boldsymbol{A})^{-1}=-8(\boldsymbol{AA}^*-2\boldsymbol{A})^{-1}=-8(\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A})^{-1}$

由题知 $\det(\boldsymbol{A})=-2\Rightarrow\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(-4,2,-4)\Rightarrow(\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\operatorname{diag}\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\quad\Rightarrow\boldsymbol{B}=-8(\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\operatorname{diag}(2,-4,2)$

第五问，$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{I}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{I}\xRightarrow{\text{两端同取行列式}}\det[(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{BA}^*]=1\Rightarrow\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}^*)=1$

因为$\det(\boldsymbol{A})=4-1=3$，$\det(\boldsymbol{A}^*)=\det(\boldsymbol{A})^2=9$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=1$，

所以$9\det(\boldsymbol{B})=1$，故$\det(\boldsymbol{B})=\frac{1}{9}$

第六问，$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\operatorname{diag}(-1,-1,1)$

$\boldsymbol{B}^{2020}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{AP}\cdots\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{PP}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{PP}^{-1}\right)\boldsymbol{A}\cdots\left(\boldsymbol{PP}^{-1}\right)\boldsymbol{AP}=$

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2020}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}(-1)^{2020}&&\\&(-1)^{2020}&\\&&1^{2020}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，所以

$\boldsymbol{B}^{2020}-7\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}-7\boldsymbol{A}^2=\operatorname{diag}(8,8,-6)$

第七问，

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]&=\det[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]+\det[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\\&=-\det[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1]-\det[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_1]\ \Rightarrow\det[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1]\\&=-2(a+b)\end{aligned}$$

第八问，$\det\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det\left[(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}^{-1}\right]=\det(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{I})\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det\left[\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\right]\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\det\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)=\det(\boldsymbol{A})\det\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\det(\boldsymbol{B})}=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$

2. (1)A (2)B (3)C (4)B (5)A

解析：本题考查初等变换的矩阵乘法表示、分块矩阵、伴随矩阵性质。第一问，用$\boldsymbol{P}$表示$\boldsymbol{Q}$后直接代入求解即可；第二问，根据初等变换的矩阵乘法表示验证选项即可；第三问，用初等变换的矩阵乘法表示后证明，注意$\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$，也可用特例验证的方法如令$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为2 阶可逆矩阵代入验证选项；第四问，运用伴随矩阵性质$\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$以及分块矩阵逆矩阵求法即可；第五问，注意$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T\Leftrightarrow a_{ij}=A_{ij}$，求得$\det(\boldsymbol{A})=1$后直接求解即可。

第一问，令$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{PB}$，所以$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=(\boldsymbol{PB})^T\boldsymbol{APB}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{APB}=\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP})\boldsymbol{B}=$

$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，故选 A

第二问，用伴随矩阵法或初等变换法计算$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，由初等变换的矩阵乘法表示可知$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$，故选 B

第三问，不妨设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为 3 阶可逆矩阵，用初等变换的矩阵乘法表示$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{P}^*=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{P}$，所以$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}\xrightarrow{\text{两端同取伴随矩阵}}\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{PA})^*=\det(\boldsymbol{PA})(\boldsymbol{PA})^{-1}=\det(\boldsymbol{P})\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\left[\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right]\left[\det(\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1}\right]=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}^*\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{B}^*$，右乘$\boldsymbol{P}$表示交换矩阵$\boldsymbol{A}^*$的第 1 列与第 2 列得到$-\boldsymbol{B}^*$，当$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵时同样成立，故选 C

第四问，$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\det(-\boldsymbol{AB})=(-1)^2\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$，

所以$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^*=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}\\\det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^*\\\det(\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，故选 B

第五问，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T\Leftrightarrow a_{ij}=A_{ij}$，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^T$两端同取行列式得$\det(\boldsymbol{A}^*)=\det(\boldsymbol{A}^T)$，所以$[\det(\boldsymbol{A})]^2=\det(\boldsymbol{A})$，解得$\det(\boldsymbol{A})=1$或$\det(\boldsymbol{A})=0$(舍)，$\det(\boldsymbol{A})$按第 1 列展开得$1=\det(\boldsymbol{A})=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2$，所以$a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A

3. $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}66&62\\-44&-41\\-23&-22\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵方程的解法。将已知等式化为$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$后，用初等变换法求$\boldsymbol{X}$即可。

$\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}\ \Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，由题知$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&7&-5\\5&10&-6\end{bmatrix}$，下面用初等变换法求$\boldsymbol{X}$，

$[\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1&2&-1&1&2\\3&7&-5&5&9\\5&10&-6&28&32\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&1&2\\0&1&-2&2&3\\0&0&-1&23&22\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-22&-20\\0&1&0&-44&-41\\0&0&-1&23&22\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&66&62\\0&1&0&-44&-41\\0&0&-1&23&22\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&66&62\\0&1&0&-44&-41\\0&0&1&-23&-22\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}\right]$，所以$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}66&62\\-44&-41\\-23&-22\end{bmatrix}$

4. $\varphi(\boldsymbol{A})=4\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

解析：本题考查矩阵乘法、对角矩阵性质的应用。注意$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$，代入直接化简即可。

$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PD}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}$，所以$\boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{PDP}^{-1}\cdots\boldsymbol{PDP}^{-1}=\boldsymbol{PD}^8\boldsymbol{P}^{-1}$，

$5\boldsymbol{I}-6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}(5\boldsymbol{I}-6\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}^2)\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(12,0,0)\boldsymbol{P}^{-1}=12\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,0,0)\boldsymbol{P}^{-1}$，

故$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{PD}^8\boldsymbol{P}^{-1}\cdot12\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,0,0)\boldsymbol{P}^{-1}=12\boldsymbol{PD}^8\mathrm{diag}(1,0,0)\boldsymbol{P}^{-1}=$

$12\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5^8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=12\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，下面用初等变换法求$\boldsymbol{P}^{-1}$

$[\boldsymbol{P}|\boldsymbol{I}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&-1&-3&-1&1&0\\0&-2&0&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&-1&-3&-1&1&0\\0&0&6&1&-2&1\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}6&6&0&5&2&-1\\0&-2&0&-1&0&1\\0&0&6&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}6&0&0&2&2&2\\0&-2&0&-1&0&1\\0&0&6&1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{I}\middle|\boldsymbol{P}^{-1}\right]$，所以

$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，故 $\varphi(\boldsymbol{A})=12\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}12&0&0\\12&0&0\\12&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4&4\\4&4&4\\4&4&4\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

5. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$

解析：本题考查伴随矩阵、逆矩阵性质和分块矩阵行列式、逆矩阵的应用。由已知可得$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，直接求解即可，注意本题用分块矩阵计算$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$较为简便。

令$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}_1)\det(\boldsymbol{A}_2)=1\cdot 2=2$

$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}=\left(\frac{1}{8}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\left[\frac{1}{8}\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right]^{-1}=\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1}=4\boldsymbol{A}$,

$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+12\boldsymbol{I}\Rightarrow 4\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+12\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{A}^{-1}\left(2\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}\right)^{-1}=$

$6\left[\left(2\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{A}\right]^{-1}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$,

$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&1&2\end{bmatrix}$，令 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}2&-2\\1&2\end{bmatrix}$，因为 $\boldsymbol{B}_1^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2\\-1&2\end{bmatrix}$,

所以$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=6\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4&0&0\\-2&-2&0&0\\0&0&2&2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&4\\2&2&1\end{bmatrix}$

解析：本题考查伴随矩阵的性质。由$\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$直接计算即可，可用伴随矩阵法求$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$。

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，因为$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-7+$

$10-4=-1$，$\det(\boldsymbol{A}^*)=[\det(\boldsymbol{A})]^2=1$，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{A}^*)}(\boldsymbol{A}^*)^*=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & -4\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$，

所以$\boldsymbol{A}=\det(\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=-\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & -4\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

7. -16

解析：本题考查伴随矩阵、逆矩阵的性质，结合行列式性质直接计算即可。

$$\det\left((2\boldsymbol{A})^{-1}-5\boldsymbol{A}^*\right)=\det\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-5\det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\det\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{5}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\det\left(-2\boldsymbol{A}^{-1}\right)$$
$$=(-2)^3\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)=(-2)^3\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}=-16$$

8. $\lambda=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$；$\lambda=4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$；$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

解析：本题考查矩阵秩的求法。用初等变换将矩阵化成阶梯形，则非零行个数为所求矩阵的秩，注意对λ所占行的讨论。

$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ -1 & \lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & -1 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2\end{bmatrix}$

当$\begin{vmatrix}1+\lambda & 1+\lambda\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$时，$\lambda=-1$或$\lambda=4$

$\lambda=-1$时，$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 3 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

$\lambda=4$时，$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & -2 & -2 & -8\\ 0 & 5 & 5 & 20\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$

$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq4$时，$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 4\\ 0 & -2 & 2-\lambda & -8\\ 0 & 1+\lambda & 1+\lambda & 4+\lambda^2\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$

综上，$\lambda=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$；$\lambda=4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$；$\lambda\neq-1$且$\lambda\neq4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$。

第三章 几何向量及其应用

第一节 向量及其线性运算

(A)

1. $\vec{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),\vec{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

解析：不妨取平行四边形中心为点$O,\vec{AO}=\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{AC}=\frac{1}{2}\vec{a},\vec{BO}=\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{BD}=\frac{1}{2}\vec{b}$，而

$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{AO}-\vec{BO}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，同理，$\vec{BC}=\vec{BO}+\vec{OC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$。

2.**解析：**证明的思路是将三个向量首尾相接，利用中线的条件，可以给出如下的式子：

$\vec{AD}+\vec{BE}+\vec{CF}=(\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC})+(\vec{BC}+\frac{1}{2}\vec{CA})+(\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{AB})=\frac{3}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{0}$，从而可以发现三个向量可以构成三角形。

3.**解析：**证明向量共线可以从一向量可以由另一向量表示入手，或者也可以通过叉乘的方式求解。此题证明三点共线，可以找出两个向量，即$\vec{AB}$和$\vec{BD}$，其中$\vec{AB}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2$，$\vec{BD}=\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{a}_1-2\vec{a}_2$，所以有$\vec{AB}=\vec{BD}$，所以三点共线。

4.**解析：**P 点在第Ⅱ卦限，N 点在第Ⅷ卦限，P 点关于 xoy 平面对称点是（-1，2，-3），关于 xoz 平面对称点是（-1，-2，3），关于 yoz 平面对称点是（1，2，3），关于 x 轴对称点是（-1，-2，-3），关于 y 轴对称点是（1，2，-3），关于 z 轴对称点是（1，-2，3），关于原点对称点是（1，-2，-3）。

5.**解析：**坐标轴上的点以 x 轴上的点为例，该点在 y 坐标和 z 坐标都是 0，坐标面上的点以 xoy 平面上的点为例，该点 z 坐标是 0。

6.解析：$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$不是单位向量，因为$\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3\neq 1$，设与$\vec{a}$同方向的单位向量为$\vec{e}$，则$\vec{e}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}$。

7.不存在

解析：考虑方向余弦公式$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，将方向角带入可以证明不存在这样的向量。

8.解析：三个方向角相等且均为锐角，则$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$，方向余弦如下，$a^0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，根据条件$\left\|\vec{a}\right\|=2$，求出$\vec{a}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$。

9. 解析：$\vec{b}$ 与 z 轴正向的夹角为锐角，则 $\vec{b}$ 的 z 坐标为正，又因为 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 平行，设正数 k，那么有 $\vec{b}=k(-1,-1,1)$，方向余弦 $b^0=(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$。

10. 解析：$\vec{a}=(-2,3,x)$ 与 $\vec{b}=(y,-6,2)$ 共线，所以存在 k 使得 $k(-2,3,x)=(y,-6,2)$，解得 $k=-2,x=-1,y=4$。

11. 解析：$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(1,2,3)+(-2,3,-4)+(3,-4,-1)=(2,1,-2)$

$\left\|\vec{F}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$，方向余弦 $F^0=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$。

12. 解析：已知 $P=(1,2,3)$ 和 $Q=(2,3,4)$，那么 $\overrightarrow{PQ}=(2,3,4)-(1,2,3)=(1,1,1,)$，

$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，方向余弦 $PQ^0=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$。

13. 解析：已知 $a\vec{i}+3\vec{j}+(b+2)\vec{k}=2\vec{i}+(c+1)\vec{j}+\vec{k}$，待定系数解出 $a=2,b=-1,c=2$，该向量 $\vec{u}=(2,3,1)$，$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$，方向余弦 $u^0=(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}})$。

14. **解析**：由于方向角相等，那么令 $P=k(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，带入平面方程 $4x-7y+5z-20=0$，解出 $k=10\sqrt{3}$，所以 $P=(10,10,10)$。

15. **解析**：判断三个向量是否共面利用三阶行列式是否等于 0

（1）$\begin{vmatrix}4&6&6\\0&-9&-3\\2&8&3\end{vmatrix}=60\neq 0$，不共面；

（2）$\begin{vmatrix}1&3&1\\-2&3&7\\3&1&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&9&9\\3&-8&-8\end{vmatrix}=0$，共面。

16. **解析**：$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$，也可以表示成 $\begin{bmatrix}3&7&-2\\2&5&3\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\4\\7\end{bmatrix}$，利用 Cramer 法则求出 $x=-1,y=0,z=2$，所以 $\vec{a}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_3$。

17. **解析**：根据四点的坐标容易得出球心坐标 $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$，半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

18. **解析：**点 P 把线段 AB 分成 2:1 的两段，可以根据 AB 之间的距离按照比例划分找出 P 点，$\vec{AP}=\frac{2}{3}\vec{AB}=\frac{2}{3}(0,1,-1)=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$，又因为 $\vec{AP}=(x,y,z)-(1,1,1)$，所以 $P=(1,\frac{5}{3},\frac{1}{3})$。

第二节 数量积 向量积 混合积

(A)

1.**解析：**利用定义容易计算

(1) $3\vec{a}\times 4\vec{b}=12\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}=12(7\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k})=(84,-48,36)$

(2) $\begin{bmatrix}5\vec{a} & -\vec{b} & \vec{c}\end{bmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=105$

2.**解析：**利用向量共线和两向量的数量积可以计算

令 $\vec{b}=p\vec{a}=2p\vec{i}-p\vec{j}+2p\vec{k}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\cdot(2p\vec{i}-p\vec{j}+2p\vec{k})=9p=-18$，$p=-2$，所以 $\vec{b}=-4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$。

3.**解析**：利用模和向量之间的关系计算

$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\left\|\vec{a}\right\|^2-2\left\|\vec{a}\right\|\times\left\|\vec{b}\right\|\times\cos(\vec{a},\vec{b})+\left\|\vec{b}\right\|^2=16-16\cos<\vec{a},\vec{b}>+4=28$ 从而得到两个向量之间的角度是 $(\vec{a},\vec{b})=120°$。

4.**解析**：利用模和向量之间的关系计算

$\left\|2\vec{a}-3\vec{b}\right\|=\sqrt{\left\|2\vec{a}-3\vec{b}\right\|^2}=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4+36-12}=2\sqrt{7}$，

$S=\vec{a}\times\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\times\left\|\vec{b}\right\|\times\sin(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{3}$

5.**解析：**利用 Cramer 法则求解方程组

$\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ -11\\ 20\end{bmatrix}$，从而 $\vec{d}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\end{bmatrix}$

6. **解析：**

$\begin{cases} \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\left\|\vec{a}\right\| \times \left\|\vec{b}\right\| \times \cos(\vec{a},\vec{b}) \\ \left(\left\|\vec{a}\right\| - \left\|\vec{b}\right\|\right)^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\left\|\vec{a}\right\| \times \left\|\vec{b}\right\| \\ \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| - \left\|\vec{b}\right\| \end{cases}$，得到$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ$，所以$\vec{a}\parallel\vec{b}$并且两向量同向。

7.**解析：**利用向量垂直的表达式

$\begin{cases} (\vec{a}+3\vec{b})(7\vec{a}-5\vec{b}) = 7\left\|\vec{a}\right\|^2 - 15\left\|\vec{b}\right\|^2 + 16\left\|\vec{a}\right\| \times \left\|\vec{b}\right\| \times \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a}-4\vec{b})(7\vec{a}-2\vec{b}) = 7\left\|\vec{a}\right\|^2 + 8\left\|\vec{b}\right\|^2 - 30\left\|\vec{a}\right\| \times \left\|\vec{b}\right\| \times \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \end{cases}$，得到$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$。

8.**解析**：注意射影和射影向量之间的区别

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的射影：$\left(\vec{a}\right)_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|} = \dfrac{-9}{3} = -3$

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的射影向量：$\mathrm{Pr}oj_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|} b^0 = -3\times\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

9.**解析：**利用射影向量的概念

$\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}$表示$\vec{a}$在 x 轴的投影向量，同理另外两个表达式分别表示在 y 轴和 z 轴的投影向量，得证。（另外也可以通过$\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} = \vec{i}\left\|\vec{a}\right\|\cos\alpha$方向余弦的表达式来证明）

10.解析：利用垂直的向量表达式

$\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\right]\cdot\vec{c} = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) = 0$，得证。

11.解析：利用三个向量都是单位向量的条件

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{2}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 - \left(\vec{a}\right)^2 - \left(\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{c}\right)^2\right] = -\dfrac{3}{2}$

12.解析：利用叉乘求出平行四边形面积，再返求高

$\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3} = \left\|\vec{AB}\right\|\times h = \sqrt{6}h$，所以 AB 边上的高是$h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,三

角形面积为平行四边形一半即$\frac{\sqrt{3}}{2}$。

13.解析：利用叉乘的结合律

$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{c}-\vec{b})\times\vec{d}$，进一步化简$(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0}$，所以$\vec{a}-\vec{d}$与$\vec{b}-\vec{c}$共线。

14.解析：利用自叉乘为 0 的知识点

$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{a}=(\vec{a}-\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})==\vec{0}$，得知$\vec{a}-\vec{b}$和$\vec{a}-\vec{c}$共线，如果$\vec{a}-\vec{c}$不是零向量，那么存在 k 使得$\vec{a}-\vec{b}=k\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$，进一步化简成$\vec{b}=(1-k)\vec{a}+k\vec{c}$，右边的系数之和是 1，所以三个向量共面，如果$\vec{a}-\vec{c}$是零向量，假定$\vec{a}-\vec{b}$非零向量，那么同上证明，如果两个都是零向量，那么显然三个向量相等，得证。

15.解析：利用垂直和平行的向量表达式（考察垂直建议用数量积，平行用向量积）

（1） $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})=\left[\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{a}\right]=\left[\vec{a}\quad\vec{a}\quad\vec{b}\right]=(\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=0$，成立；

（2） $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$未必是零向量，当且仅当$\vec{b}$和$\vec{a}$共线成立；

（3） $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\left[\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\vec{b}\right]=\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\left(\vec{b}\right)^2=-\left(\vec{b}\right)^2$未必是零向量，当且仅当$\vec{b}$是零向量成立；

（4） $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\left[\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\vec{b}\right]=\vec{b}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$未必是零向量，当且仅当$\vec{b}$和$\vec{a}$共线成立；

16.解析：利用数量积和向量积的结合律

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}\Rightarrow\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$，当且仅当$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$和$\vec{b}$垂直成立，未必有$\vec{a}=\vec{b}$；

（2） $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{b}\Rightarrow\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\times\vec{b}=0$，当且仅当$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)$和$\vec{b}$共线成立；

17.解析：利用叉乘和点乘的分配律和结合律

$$\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right]\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{a}\right)=\left[\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\quad\vec{c}\quad\vec{a}\right]=2\left[\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}\right]=4$$

18.解析：利用混合积的几何意义

$$V_{四面体}=\frac{1}{6}V_{平行六面体}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AB}\quad\overrightarrow{AC}\quad\overrightarrow{AD}\right]\right\|=15$$

19.解析：利用混合积的定义、定理 3.2.1（两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$垂直$\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$）和定理 3.2.2（两向量$\vec{a}$和$\vec{b}$共线$\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$）来证明定理 3.2.3（3 个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面$\Leftrightarrow\left[\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}\right]=0$）

证明：必要性：$\begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0$，从而 $\vec{a}\times\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 垂直，另一方面，$\vec{a}\times\vec{b}$ 和 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直，三向量垂直于同一向量，则三向量共面（具体知识可以参考高中立体几何知识）

充分性：将必要性证明步骤反过来即可得证。

（B）

1.解析：利用向量叉乘的性质

$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{0}\Rightarrow\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$，同理可以证明其它两对式子，从而得证。

几何解释：三个向量围成三角形，任意两个向量的叉乘的几何意义是以这两个向量所在边为平行四边形的边的面积乘以一个与该三角形垂直的单位法向量。

2.解析：利用加边的方法证明，下面的 abs（）是取绝对值的意思。

$$S=\frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\|=\frac{1}{2}abs(\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix})=\frac{1}{2}abs(\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 1\end{vmatrix})=\frac{1}{2}abs(\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix})$$

3.解析：利用坐标系证明（1）

（1）假设 $\vec{a}=(a\quad b\quad c),\vec{b}=(d\quad e\quad f),\vec{c}=(g\quad h\quad i)$

$$左边=\vec{a}\times\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=\vec{a}\times(ei-fh\quad fg-di\quad dh-eg)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ ei-fh & fg-di & dh-eg\end{vmatrix}$$

$$=(bdh+cdi-beg-cfg\quad aeg+cei-adh-cfh\quad afg+bfh-adi-bei)$$

$$右边=(ag+bh+ci)(d\quad e\quad f)-(ad+be+cf)(g\quad h\quad i)$$

$$=(bdh+cdi-beg-cfg\quad aeg+cei-adh-cfh\quad afg+bfh-adi-bei)$$

所以成立。

（注：没有好思路，如果读者有好思路，拨冗提供，谢谢）

（2）利用（1）证明，由（1）可知 $\vec{a}\times\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\vec{c}$，两边点乘 $\vec{b}$，得到

$\left[\vec{a}\times\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)\right]\cdot\vec{b}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{d}\cdot\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)$，左边的式子可以利用混合积变换，

$\left[\vec{a}\times\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)\right]\cdot\vec{b}=\left[\vec{a}\quad\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)\quad\vec{b}\right]=\left[\vec{b}\quad\vec{a}\quad\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)\right]=\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\left(\vec{d}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$，得证。

（3）将（1）中变量轮换得到的三个等式相加即可证明。

第三节 平面和空间直线

（A）

1.解析：求解平面方程一般利用与直线和平面之间的垂直和平行关系，切入点是求出法向量。

（1）与两条直线平行，两条直线的方向向量分别是 $(0\quad 1\quad 1)$ 和 $(1\quad 2\quad 1)$，平面的法线向量和

方向向量均垂直，可以计算平面法线向量$\eta=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，经过零点，从而平面方程$x-y+z=0$。

（2）两条直线方向向量分别是$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，且经过点$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，可以计算平面法向量$\eta=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\end{pmatrix}$，从而平面方程$x-3y+z+2=0$。

（3）平行于原平面，可知平面法向量$\eta=\begin{pmatrix}5 & -14 & 2\end{pmatrix}$，令平面方程$5x-14y+2z+k=0$，根据平面之间的距离，可以$\dfrac{|k-36|}{\sqrt{5^2+(-14)^2+2^2}}=3$，所以$k=-9或81$，从而平面方程$5x-14y+2z+81=0或者5x-14y+2z-9=0$。

（4）经过两点并且和另一平面垂直，那么该平面法向量和另一平面法向量和两点方向向量垂直。两点方向向量为$\lambda=\begin{pmatrix}9 & -2 & 13\end{pmatrix}$，另一平面法向量$\eta=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\end{pmatrix}$，所以平面法向量$\eta'=\lambda\times\eta=5\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\end{pmatrix}$，从而平面方程$x-2y-z+2=0$。

（5）经过定点$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$，经过 x 轴，可以知道该平面法向量与$\eta_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$和$\eta_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$垂直，所以平面法向量$\eta'=\eta_1\times\eta_2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\end{pmatrix}$，从而平面方程$3y+2z=0$。

（6）先求解直线的方向向量$\lambda=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\end{pmatrix}$，另一平面法向量是$\eta=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$，从而该平面法向量$\eta'=\lambda\times\eta=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\end{pmatrix}$，从而平面方程$x-2+7(y+1)+5(z-5)=0$。

（7）经过直线和一个点，那么可以在直线上取点求出一方向向量，不妨取定点$\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$，求得直线方向向量$\lambda_1=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\end{pmatrix}$，已知直线方向向量$\lambda_2=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\end{pmatrix}$，所以平面法向量$\eta=\lambda_1\times\lambda_2=2\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，从而平面方程$2(x-2)-2(y-1)+z-3=0$。

（8）截距相等意味着法向量$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，从而平面方程$x+y+z-5=0$。

（9）与两平面垂直，求得法向量 $\eta=\eta_1\times\eta_2=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，从而平面方程$x-1-(y-2)-(z+1)=0$。

2.解析：

（1）直线方程：$\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_2}$。

（2）先求出直线方向向量$\lambda=\eta_1\times\eta_2=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 8\end{pmatrix}$，从而直线方程：$\dfrac{x-2}{-7}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{8}$。

（3）利用两直线垂直相交，满足共面条件和垂直条件，借助另一直线方向向量$\lambda_1=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & -9\end{pmatrix}$，令所求直线方向向量$\lambda=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$列出方程组$\begin{cases}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \begin{pmatrix}7 & 0 & 2\end{pmatrix} & \lambda\end{bmatrix}=0\\ \begin{pmatrix}7 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\lambda=0\end{cases}$，求得$\lambda=\begin{pmatrix}2 & 1 & -7\end{pmatrix}$，从而直线方程：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{-7}$。

（4）所求直线的方向向量和直线方向向量与平面法向量垂直，所以可以求得所求直线方向向量$\lambda=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\end{pmatrix}$，从而直线方程：$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$。

（5）记直线$x=y=z$的方向向量$\lambda_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，记方向向量$\lambda_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，记 y 轴方向向量$\lambda_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，所求直线方向向量$\lambda=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$，列出方程组$\begin{cases}\lambda\times\lambda_1=0\\ \begin{bmatrix}\lambda & \lambda_3 & \lambda_2\end{bmatrix}=0\end{cases}$，求得

$\lambda=(1\quad -4\quad 3)$，从而直线方程：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{3}$。

（6）记直线L_1和点P_0构成的平面为w_1，直线L_2和点P_0构成的平面为w_2，则所求直线方程即为两平面交线（这么说有前提，因为题目给出的两条直线恰好异面，如果两直线共面相交，容易通过交点和点P_0计算直线方程，如果两直线平行，题目所求毫无意义）。任取L_1上的点P_1，求出直线过P_0和P_1的方向向量，和L_1方向向量叉乘得到w_1的法向量。同理可以得到w_2的法向量。两法向量叉乘即得所求直线方向向量，结合过点P_0可以求出直线方程。

3.解析：求某点关于某平面的对称点，可以设另一点坐标，依靠两个条件：第一，中点在平面上；第二，过两点的直线方程垂直于平面。

设对称点坐标是$P(x,y,z)$，中点坐标是$Q(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})$，可以列出方程组：

$$\begin{cases}3x+y-\dfrac{9}{2}z+121=0\\ \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-9}\end{cases}$$，解得$P(-12,-4,18)$。

4.解析：要找平面上一点使得到其他三个平面外的点距离相等，列出距离方程即可。

假设该点坐标为$P(x,y,z)$，那么可以列出距离方程，如下：

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=(x-4)^2+(y+3)^2++(z-1)^2=(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2$再结合一个平面方程$x-y-2z=0$，即可利用克拉姆法则解出方程组。

最后得到$P(\frac{7}{5},1,\frac{1}{5})$。

5.（1）解析：先解出直线方程的方向向量，如果方向向量和法向量相同，则垂直；如果方向向量和法向量垂直并且直线上随便取一个点都在平面上，那么直线在平面内；如果方向向量和法向量垂直并且直线上随便取已给单不在平面上，那么直线与平面平行。易得此处直线和平面垂直，答案应选 C；

（2）解析：可以先判断是否共面，依据三维行列式（详见课本 P111）是否等于 0，易得该题的三维行列式等于 0，从而两直线共面。如果重合或者平行，均不满秩。答案应选 A。

6.解析：求直线和平面的交点，可以利用平面的对称式方程引入参数分别表示 x,y,z，然后解出参数，从而解出交点。

可以得到交点坐标$P(2,3,1)$，假设L的方向向量为(x,y,z)，那么可以列出方程组：

$$\begin{cases}(x,y,z)(5,1,4)=0\\(x,y,z)(3,-1,2)=0\end{cases}$$，所以$(x,y,z)=(3,1,-4)$，从而得到$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$。

7.解析：两平面之间的夹角限于$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$。

两平面的法向量分别是$\vec{\lambda}_1=(2,1,2)$和$\vec{\lambda}_2=(1,1,0)$，所以有$\cos\theta=\left|\frac{\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2}{\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\times\left\|\vec{\lambda}_2\right\|}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以夹角$\theta=\frac{\pi}{4}$。

8.解析：两直线之间的夹角限于$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。

两直线的方向向量分别是$\vec{\lambda}_1=(1,-2,1)$和$\vec{\lambda}_2=(-1,-1,2)$，所以有$\cos\theta=\left|\frac{\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2}{\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\times\left\|\vec{\lambda}_2\right\|}\right|=\frac{1}{2}$，所以夹角$\theta=\frac{\pi}{3}$。

9.解析：直线和平面之间的夹角限于$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。

直线的方向向量和平面法向量分别是$\vec{\lambda}_1=(2,3,6)$和$\vec{\lambda}_2=(1,1,1)$，所以有$\cos\theta=\left|\frac{\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2}{\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\times\left\|\vec{\lambda}_2\right\|}\right|=\frac{11}{7\sqrt{3}}$，所以夹角$\theta=\arccos\frac{11}{7\sqrt{3}}$。交点为$\left(\frac{9}{11},\frac{8}{11},\frac{-17}{11}\right)$。

10.解析：设所求平面法向量为$\vec{\lambda}_1=(x,y,0)$，已知平面法向量为$\vec{\lambda}_2=(2,1,-\sqrt{5})$，根据角度$\cos\theta=\left|\frac{\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2}{\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\times\left\|\vec{\lambda}_2\right\|}\right|=\frac{|2x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{2}$，得 y=3x 或 x+3y=0，即平面方程。

11.解析：平面 S 的法向量$\vec{\lambda}_1=(-1,1,0)\times(-1,0,1)=(1,1,1)$，假设所求直线方向向量为$\vec{\lambda}_2=(1,1,z)$，列出方程：

$\left|\frac{\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2}{\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\times\left\|\vec{\lambda}_2\right\|}\right|=\cos\frac{\pi}{4}$，从而解得$z=4\pm3\sqrt{2}$，所以直线方程为$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{4\pm3\sqrt{2}}$。

12.解析：由平面平行可以设所求平面方程为$6x+3y+2z+a=0$，根据该平面和原点之间的距

为 1。所以有 $r=\left|\frac{a}{\sqrt{36+9+4}}\right|=1$，得到 $a=\pm7$，平面方程为 $6x+3y+2z\pm7=0$。

13.解析：可以借助向量来说明问题，两平行平面的法向量相同，与另一平面的法向量叉乘得到的新向量相同，也就是交线的方向向量，而且分别在两个平面内，所以交线平行。

14.解析：直接求出交点坐标 $(2,1,0)$，由两直线的方向向量叉乘即可得到平面法向量，所以最后 $7x-5y-11z-9=0$。

15.解析：直接放点到平面的距离公式。

$r=\left|\frac{1-2\times2+1+1}{\sqrt{1+4+1}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}$。

16.解析：平面之间的距离转化成点到平面的距离。

取 $x+y-z+1=0$ 上一点 $(-1,0,0)$，所以 $r=\left|\frac{-2-3}{\sqrt{4+4+4}}\right|=\frac{5}{2\sqrt{3}}$。

17.解析：

（1）对称式方程：$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{-2}$；

（2）点 M 到 L_1 的距离：借助公式，此处取直线上点为 $(0,-3,-2)$，距离为

$r=\frac{\|(1,1,-2)\times(1,3,1)\|}{\|(1,1,-2)\|}=\frac{\sqrt{93}}{3}$；

（3）两直线之间的距离，经过计算三维行列式可以知道两直线是异面直线，借助课本上 P115 上的异面直线公式可以得到 $r=\frac{20}{\sqrt{29}}$。

(B)

1.解析：先利用 π_1 和 π_2 两个平面计算直线方向向量。

$\vec{\lambda}_1=(3,2,4)$，$\vec{\lambda}_2=(1,-8,-2)$，$\vec{\lambda}_3=(k,-3,1)$，得到直线方向向量 $\vec{\eta}=\vec{\lambda}_1\times\vec{\lambda}_2=(28,10,-26)$，又因为 $\vec{\lambda}_3$ 与 $\vec{\eta}$ 垂直，解得 $k=2$。根据前面两个平面可以找出直线上一点 $\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以直线方程 $\frac{x}{14}=\frac{y+\frac{1}{2}}{5}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-13}$。

第三章习题

1.解析：（1）原式=$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=4$；

（2）利用向量叉乘的几何意义，可以计算得到 $S=12\sqrt{2}$；

（3）利用原点和另一点之间的方向向量与平面法向量叉乘即可得到所求平面的法向量，再根据过原点的信息可以解出该平面方程为 $2x+2y-3z=0$；

（4）两直线相交，利用共面的三维行列式可以求解该问题，得到 $\lambda=\dfrac{5}{4}$；

（5）点到平面的距离利用距离公式可以得到 $r=\sqrt{2}$。

2.解析：（1）答案应选 B

（A）不确定；

（B）可以确定的是三个向量是基向量，空间任意向量均可被表示；

（C）也有可能是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}-\vec{c}$ 垂直；

（D）也有可能是 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}-\vec{c}$ 平行。

（2）答案应选 A

（3）答案应选 D（判断直线方向向量和平面法向量之间的关系）

（4）答案应选 C（首先可以通过直线方向向量排除平行和垂直，接下来只需依赖三维行列式判断是否共面）

（5）答案应选 C（四点共面转化为三直线共面，利用共面直线方向向量之间叉乘为 0 的依据）

3.解析：设该平面的法向量 $\vec{\lambda}_1=(x,y,z)$，已知平面的法向量 $\vec{\lambda}_2=(7,-1,4)$，直线的方向向量 $\vec{\eta}=(1,1,2)$，其中 $\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\lambda}_2=0$，$\vec{\lambda}_1\cdot\vec{\eta}=0$，所以 $\vec{\lambda}_1=(3,5,-4)$，取直线上的一点即可解出平面方程 $3x+5y-4z+25=0$。

4.解析：设该直线的方程为 $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z+2}{c}$，与平面平行，所以有 $3a-b+2c=0$；与直线相交，所以有 $\begin{vmatrix}0&3&2\\a&b&c\\4&-2&1\end{vmatrix}=0$，所以可以取 $\begin{pmatrix}a&b&c\end{pmatrix}=(4,-50,-31)$，所以直线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-50}=\dfrac{z+2}{-31}$。

5.解析：点到直线的距离可以利用课本上的公式。

直线 L 的方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$，记 $\vec{\lambda}=(1,-3,-2)$，$P_0=(0,4,3)$，$P_1=(1,2,3)$，所以距离 $r=\dfrac{\left\|\vec{\lambda}\times\overrightarrow{P_0P_1}\right\|}{\left\|\vec{\lambda}\right\|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

6.解析：设P_0关于直线的对称点为$P_1(x,y,z)$，所以中点$P_2\left(\frac{x+2}{2},\frac{y-3}{2},\frac{z+1}{2}\right)$，所以有$\frac{\frac{x+2}{2}-1}{-2}=\frac{\frac{y-3}{2}+1}{-1}=\frac{z+1}{2}$，且有$(x-2,y+3,z-1)\cdot(-2,-1,2)=0$，所以最终得到直线方程$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{13}=\frac{z+1}{5}$，$P_2\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\mathrm{P}_1(\frac{4}{3},-\frac{5}{6},-\frac{1}{6})$。

7.解析：(1) $\vec{MP_1}=\left(\left\|\vec{MP}\right\|\tan\theta\cdot\vec{e}+\vec{MP}\right)\cdot\frac{\left\|\vec{MP}\right\|}{\frac{\left\|\vec{MP}\right\|}{\cos\vartheta}}=\vec{MP}\cdot\cos\theta+\left\|\vec{MP}\right\|\sin\theta\cdot\vec{e}$；

(2) 记$\vec{OP}$与$\vec{OA}$之间的夹角为$\alpha=\arccos\left(\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OA}}{\left\|\vec{OP}\right\|\times\left\|\vec{OA}\right\|}\right)$（锐角和钝角的情况分别表示，此处考虑锐角的情况），与$\vec{OA}$垂直的向量$\vec{OD}=\left\|\vec{OP}\right\|\cos\alpha\cdot\vec{e}-\vec{OP}$，而$\vec{OD}$与$\vec{OP_1}$之间的夹角为$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta$，所以得到如下式子：

$\vec{OP_1}=\left(\left\|\vec{OD}\right\|\tan\beta\cdot\vec{e}+\vec{OD}\right)\cdot\frac{\left\|\vec{OP}\right\|}{\frac{\left\|\vec{OP}\right\|}{\cos\beta}}=\vec{OD}\cdot\cos\beta+\left\|\vec{OD}\right\|\sin\beta\cdot\vec{e}$，其中的$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta$，

$\vec{OD}=\left\|\vec{OP}\right\|\cos\alpha\cdot\vec{e}-\vec{OP}$，$\alpha=\arccos\left(\frac{\vec{OP}\cdot\vec{OA}}{\left\|\vec{OP}\right\|\times\left\|\vec{OA}\right\|}\right)$。

第四章 n 维向量和线性方程组

第一节 消元法

（A）

1.（1）$x_1 = 11, x_2 = -5, x_3 = 0, x_4 = 3$

（2）$x_1 = 3 - x_3$，$x_2 = 2x_3 - 8$，$x_4 = 6$

（3）只有零解

（4）$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, x_5 = 0$

解析：用 *Cramer* 法则消元，进而求解方程组

（1）**解**：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 21 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以方程的解为：

$$x_1 = 11, x_2 = -5, x_3 = 0, x_4 = 3;$$

(2)**解**：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以方程组的解为：

$$x_1 = 3 - x_3, \qquad x_2 = 2x_3 - 8, \qquad x_4 = 6$$

（3）**解**：

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则该方程组只有零解

（4）**解**：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则方程的解为：

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, x_5 = 0$$

2. **考点**：消元法求解方程组的解，并将其推广到解决直线相交的问题。用方程组有解表示，直线有交点，用方程组无解表示直线没有交点，用方程组有唯一解表示三条直线相交于一点。

解：

三条直线交于一点表示方程组联立只有唯一的解。

证明：必要性：

由题目易得：$r(\boldsymbol{A}) = 2$　　有 $det(A) = 0$ 得到 $\mathrm{a} + b + c = 0$

充分性：

由题目易得：当：$a + b + c = 0$ 时

用消元法消去第三个方程，保留方程组的系数行列式不为 0，故有唯一解

第二节 向量组的线性相关性

（A）

1. **证明：**

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]=\begin{pmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{pmatrix}$$

由$|\boldsymbol{A}|=(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_3-a_2)\neq 0$ 得：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$

又：$\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}\vdots\boldsymbol{\beta}]$则 $3\geq r(\overline{\boldsymbol{A}})\geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$

$$\therefore r(\bar{A})=3$$

$\boldsymbol{\beta}$可以用$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示

2. **解：**

设：$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_3}+x_4\boldsymbol{\alpha_4}$

即：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+x_2-x_3-x_4=2\\x_1-x_2+x_3-x_4=1\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$

则$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&-2&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&2&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&-4&1\end{pmatrix}\quad\therefore\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

3. **解：**

$$\text{设：}\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_3}$$

$$\text{即：}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=-1\\x_1+x_2+x_3=0\\x_2+x_3=1\\-x_2+(a-3)x_3=b\end{cases}\text{则：}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3&2&1&-1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&-1&(\mathrm{a}-3)&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&(\mathrm{a}-1)&b+1\end{pmatrix}$$

1）当$\mathrm{a}\neq 1$ 时$\boldsymbol{\beta}$可以由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$唯一线性表示，$\boldsymbol{\beta}=\frac{b-a+2}{a-1}\boldsymbol{\alpha_1}+\frac{a-2b-3}{a-1}\boldsymbol{\alpha_2}+\frac{b+1}{a-1}\boldsymbol{\alpha_3}$

2）当$\mathrm{a}=1$ 且 $\mathrm{b}\neq -1$ 时$\boldsymbol{\beta}$不可以由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}$唯一线性表示

3）当$\mathrm{a}=1$ 且 $\mathrm{b}=-1$ 时$\boldsymbol{\beta}=(-1+\mathrm{c})\boldsymbol{\alpha_1}+(1-2\mathrm{c})\boldsymbol{\alpha_2}+\mathrm{c}\boldsymbol{\alpha_3}$其中 c 为任意常数

4. （1）不正确，

若$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_3}\ldots\ldots\boldsymbol{\alpha_n}$线性相关,则存在一组不全为 0 的系数$k_1,k_2,\ldots\ldots k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha_n}=0$$

∴设$\boldsymbol{\alpha_j}$为其中任意一个向量，则

$$k_j\boldsymbol{\alpha_j}=-(k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_{j+1}\boldsymbol{\alpha_{j+1}}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha_n})$$

$\therefore$若$k_j \neq 0$，$\boldsymbol{\alpha_j}$可以有其余向量表示

若$k_j = 0$，$\boldsymbol{\alpha_j}$不可以有其余向量表示

（2）不正确，解析同上。

（3）正确

由$\boldsymbol{Ax} = 0$仅有零解

得:零向量可由 A 的列向量唯一线性表示$0 = 0\boldsymbol{a_1} + 0\boldsymbol{a_2} + \cdots + 0\boldsymbol{a_n}$

故 A 的列向量线性无关

（4）正确

$$\boldsymbol{XX^T} = \sum_{i}^{n} a_i^2 \geq 0 \qquad \text{当}\boldsymbol{XX^T} = 0\text{ 时：}a_i = 0,\text{即}\boldsymbol{X} = 0$$

5. **解：**

取$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}]$则由$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_1}$线性相关得$|\boldsymbol{A}| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \therefore \lambda = 1\text{ 或者}\frac{1}{2}$$

6. **证明：**充分性

设$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots \boldsymbol{\alpha_n}]$: 由$\boldsymbol{D} \neq 0$ 得 $det(\boldsymbol{A^T A}) = [det(\boldsymbol{A})]^2 \neq 0 \quad \therefore \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 得：$r(\boldsymbol{A}) = n\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots \boldsymbol{\alpha_n}$线性无关

必要性：

由 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots \boldsymbol{\alpha_n}$线性无关得 $\mathrm{r}(A) = n, det(A) \neq 0$ 即 $\mathrm{D} = [det(A)]^2 \neq 0$

7. **考点：**相关性的判断：

解：

（1）$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}] = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore r(\boldsymbol{A}) = 3$各列向量线性无关

（2）$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore r(A) = 3 < 2$ 各列向量线性相关

(3) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1-a & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a-1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 当$a \neq -1$ 时：$r(\boldsymbol{A}) = 3$ 各列向量线性无关

当$a = -1$ 时：$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1 < 3$ 各列向量线性相关

8. 逆否命题：向量组线性无关的充分必要的条件是该向量组中的每个向量都不能由该组中的其余向量线性表示。

9. 证明：
由$\boldsymbol{\alpha_{1}}, \boldsymbol{\alpha_{2}}, \dots \boldsymbol{\alpha_{s}}$线性无关$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_{1}}, \boldsymbol{\alpha_{2}}, \dots \boldsymbol{\alpha_{s}}]$得$r(A)=s$, 延长分量, $\boldsymbol{A}$ 的秩不变。
则对于：$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta_{1}}, \boldsymbol{\beta_{2}}, \dots \boldsymbol{\beta_{s}}]r(\boldsymbol{B})=s$ 故$\boldsymbol{\beta_{1}}, \boldsymbol{\beta_{2}}, \dots \boldsymbol{\beta_{s}}$线性无关
逆否命题：
若 r 维的向量组，$\boldsymbol{\alpha_{j}}=\left(\alpha_{1j}\alpha_{2j}\dots\alpha_{rj}\right)^{T}, j=1,2,\dots,s$线性相关，则在截短后任然成立

10. **考点：**线性相关的概念和判断方法
解：由题可知：$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha_n}$且$k_n\neq 0$
则：$\boldsymbol{\alpha_n}=\dfrac{(k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha_{n-1}}+\boldsymbol{\beta})}{k_n}$
$\therefore$ $\boldsymbol{\alpha_n}$能够被 $\boldsymbol{\alpha_{1}}, \boldsymbol{\alpha_{2}}, \dots \boldsymbol{\alpha_{n-1}}, \boldsymbol{\beta}$ 线性表示

11. **解**:
(1) 能;
由: $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性相关，得到 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$中至少可以有一个可以用其他的两个线性表示
由: $\boldsymbol{\alpha_4}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性无关，得到 $\boldsymbol{\alpha_4}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$中任何一个均不能够由其他的两个线性表示
故$\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$，是线性无关的。故$\boldsymbol{\alpha_1}$可以由$\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性表示
（2）不能;
由：$\boldsymbol{\alpha_1}$可以由$\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性表示， $\boldsymbol{\alpha_4}$**和**$\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线无关，得：$\boldsymbol{\alpha_1}$和$\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性无关, 所以, $\boldsymbol{\alpha_4}$不能由$\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$线性表示

12. 解：
设：$x_1\boldsymbol{\beta_1}+x_2\boldsymbol{\beta_2}+\cdots+x_m\boldsymbol{\beta_m}=0$
则：$\begin{cases} x_2+x_3+\cdots+x_m=0 \\ x_1+x_3+\cdots+x_m=0 \\ \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}=0 \end{cases}$ 又$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(\mathrm{m}-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$
$=(m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{m-1}(m-1)\neq 0$ 故：$\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \dots, \boldsymbol{\beta_m}$线性无关

13. 证明：
由题得：
$\begin{cases} \boldsymbol{A\alpha_i}=0 \\ \boldsymbol{A\beta}=b \end{cases}(i=1,2\cdots t)$则：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha_i}+\boldsymbol{\beta})=\mathrm{b}$
$\therefore$ $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta}, \dots, \boldsymbol{\alpha_t}+\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{Ax}=b$的$t+1$ 个解
又：$k_1(\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta})+\cdots+k_t(\boldsymbol{\alpha_t}+\boldsymbol{\beta})+k_{t+1}\boldsymbol{\beta}$
$=(k_1+k_2+\cdots+k_{t+1})\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha_t}=\boldsymbol{0}$
则：$\boldsymbol{A}(k_1+k_2+\cdots+k_{t+1})\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha_t})=0$
又：$\boldsymbol{A\alpha_i}=0\boldsymbol{A\beta}\neq 0$ 则：$k_1+k_2+\cdots+k_{t+1}=0$
又 $k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha_t}=0$ $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}\dots\boldsymbol{\alpha_t}$线性无关
故：$k_1=k_2=\cdots=k_t=0$ $k_{t+1}=0$ $\therefore$ $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_t}$线性无关。
又：$\mathrm{r}([\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_t}])=\mathrm{r}([\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta}, \dots, \boldsymbol{\alpha_t}+\boldsymbol{\beta}])=t+1$

$\therefore \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\beta},\dots,\boldsymbol{\alpha_t}+\boldsymbol{\beta}$线性无关

14. 解：利用定义和反证法
 证明：必要性：定理
充分性：假设表示唯一时，线性相关，则存在$\boldsymbol{\alpha_k}=k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha_n}$，
那么$\boldsymbol{\beta}$可以用$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_{k-1}},\boldsymbol{\alpha_{k+1}},\boldsymbol{\alpha_n}$线性表示,这和表示方式唯一矛盾，故表示方式唯一时，向量组线性无关。

15. 解：
由于 向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_m}$线性无关
所以$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}=0$ 只有在$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才能成立，因为$\boldsymbol{\beta}$
不可以由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_m}$线性表示，则$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha_m}+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ 时$k_0=0$，故$k_1=k_2=\cdots=k_m=k_0=0$ 所以向量组$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_m},\boldsymbol{\beta}$线性无关

16. 解：设：$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_s}]\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_s}]$，由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}$又$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{CBX}=0$ 和$\boldsymbol{CX}=0$只有零解，得$\boldsymbol{BX}=0$和$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 同解，即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}$，则：$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_s}$线性无关$\Leftrightarrow\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{s}$ ，且当$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{s}$ 时$\boldsymbol{B}$为方阵，则$\boldsymbol{B}$为满秩$\Leftrightarrow det(\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{0}$

17. 解:
(1) $[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{2}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{4}\end{bmatrix}det(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{2}\neq0$ 故:$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$线性无关
（2）$[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{2}&\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{-3}&\boldsymbol{5}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{22}&\boldsymbol{-5}\end{bmatrix}det(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$线性相关

(B)

1. 证明：由题意得：
$a_1\boldsymbol{\alpha}+a_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+a_k\boldsymbol{A^{k-1}\alpha}=0$
两边同时乘以$\boldsymbol{A^{k-1}}$得到$a_1\boldsymbol{A^{k-1}\alpha}+a_2\boldsymbol{A^k\alpha}+\cdots+a_k\boldsymbol{A^{2k-2}\alpha}=0$
又$\boldsymbol{A^m\alpha}=0$ $(m=k,k+1\dots)$则$a_1=0$ 同理$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$
所以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\dots\boldsymbol{\alpha A^{k-1}}$线性无关
2. 解：由题意得：
由$\boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组的解得：$\boldsymbol{\beta^T\alpha_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i=0$
又$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha_r}+k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$
$k_1\boldsymbol{\beta^T\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\beta^T\alpha_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta^T\alpha_r}+k_0\boldsymbol{\beta^T\beta}=\boldsymbol{0}$
故$k_0\boldsymbol{\beta^T\beta}=\boldsymbol{0}$ 又$\boldsymbol{\beta^T\beta}=\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b_i^2}\neq\boldsymbol{0}$ $\therefore k_0=\boldsymbol{0}$
又$k_1\boldsymbol{\alpha_1}+k_2\boldsymbol{\alpha_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha_r}=\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_r}$线性无关
$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ $\therefore k_1=k_2=\cdots=k_r=k_0=0$
 $\therefore\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_r}$和$\boldsymbol{\beta}$线性无关

第三节 向量组的秩

（A）

1. **考点**：求解向量组的秩：

解：$A=\begin{bmatrix}a&2&1&2\\3&b&2&3\\1&3&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{化为最简形}}\begin{bmatrix}a-2&0&1&0\\0&b-5&1&-1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\quad\therefore a=2\ \ b=5$

2. **解**：考点：极大无关组的和求向量组的秩；

(1) $A=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_5}]=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&3&0&-2\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad\therefore$ 一个极大无关组为：$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_4}$秩为 3

且$\boldsymbol{\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2}$

(2) $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\alpha_5}]=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&2&4&3&2\\1&3&9&7&5\\1&4&16&13&10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&2&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$ 一个极大无关组为：$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$,秩为 3

且: $\boldsymbol{\alpha_4=\alpha_1+\alpha_3-\alpha_2}\quad\boldsymbol{\alpha_5=\alpha_3+2\alpha_1-2\alpha_2}$

3. **考点**：线性相关和线性无关的判断

解：(1) $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\vdots\alpha]=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&\vdots&4\\1&-3&2&-6&\vdots&1\\1&5&-1&10&\vdots&6\\3&1&p+2&p&\vdots&10\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\vdots&2\\0&1&0&0&\vdots&\dfrac{3p-4}{p-2}\\0&0&1&0&\vdots&1\\0&0&0&p-2&\vdots&\dfrac{1-p}{p-2}\end{pmatrix}$

$\therefore p\neq2$ 时向量组线性无关$\boldsymbol{\alpha=2\alpha_1}+\dfrac{3p-4}{p-2}\boldsymbol{\alpha_2+\alpha_3}+\dfrac{1-p}{p-2}\boldsymbol{\alpha_4}$

(2) $p=2$ 时, 向量组线性相关$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}]=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&4&2\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$为一个极大无关组, 秩为 3.

4. **考点**：同秩的证明

证明：$[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots\boldsymbol{\beta_m}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_m}]\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&\vdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&1&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$

其中：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&\vdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&1&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$ m为奇数时：$|\boldsymbol{A}|=2$ ，$\boldsymbol{A}$为满秩阵

故：$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots\boldsymbol{\beta_m}$和$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots\boldsymbol{\alpha_m}$有相同的秩。

5. **考点**：区分秩相同和等价的区别。两个向量组等价一定能够相互表示，秩一定相同。然而秩相同却不一定等价。需要 $r(A)=r(A,B)=r(B)$,A 和 B 才等价。

解：反例$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,但是$A$和$B$不等价

6. **考点**：向量组等价和向量组秩相同的关系

证明：由题可得：

(Ⅰ)和(Ⅱ)有相同的秩，均为 3, 且(Ⅰ)线性无关

又 4 个 3 维向量一定线性相关，故$\boldsymbol{\beta_j}$可以用$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示

同理可知，$\boldsymbol{\alpha_i}$可以用$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$线性表示

则(Ⅰ)和(Ⅱ)可以相互表示，(Ⅰ)和(Ⅱ)等价

7. **考点**：线性无关的证明方法。向量组满秩和线性无关等价。

解：证明：由题意得：

(Ⅱ)可以由(Ⅰ)线性表示

$n=r(\epsilon_1,\epsilon_2,\dots,\epsilon_n)\le r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\le n$

∴ $r(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$向量组(Ⅰ)是满秩阵，(Ⅰ)线性无关

8. **考点**：等价和秩的关系（注意, 此题的结论需要牢记，在考试中可以直接应用）

解：证明：

(1) 设Ⅰ中的一个最大线性无关组 C, 可知$r(\text{Ⅰ})=r(C)$, 且能由Ⅰ线性表示的向量必能由C线性表示, 反之亦然

充分性：由 C的定义可知Ⅰ可以由 C 线性表示, 由题目可知Ⅱ亦可由 C 线性表示（此处证明略）, 故(Ⅰ, Ⅱ)可由 C 线性表示, 即 r(Ⅰ, Ⅱ)=r(C)=r(Ⅰ)

必要性：r(Ⅰ)=r(Ⅰ, Ⅱ)=r(C)即(Ⅰ, Ⅱ)可由 C线性表示, 即(Ⅰ, Ⅱ)可由 B线性表示。

(2) 必要性：向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价，也就是说(Ⅰ)和(Ⅱ)可以相互表示，

由(1)得，r(Ⅰ) = r(Ⅰ, Ⅱ) = r(Ⅱ)

充分性：由(1)得，若 r(Ⅰ) = r(Ⅰ, Ⅱ) = r(Ⅱ)则Ⅰ和Ⅱ可以相互线性表示。即Ⅰ和Ⅱ等价

(3) 必要性：

若方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$ 有解，则 B 的各个列向量均可以由 A 的列向量线性表示

于是$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$的所有列向量均可以 A 的列向量线性表示，得出 r($[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$)≤r($\boldsymbol{A}$)，

又 r($\boldsymbol{A}$) ≤r($[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$)，故 r($\boldsymbol{A}$)=r($[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$)

充分性：
若 r($\boldsymbol{A}$)=r([$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$])，对于 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量 b
由 r($\boldsymbol{A}$) ≤r([$\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}$]) ≤r([$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$])=r($\boldsymbol{A}$)，则有 $\boldsymbol{Ax}=b$ 有解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$ 有解。

9. **考点**：8 题结论的应用
解：证明：由题意可得:
Ⅰ和Ⅱ有相同的秩，且Ⅰ可以由Ⅱ线性表示，则 r(Ⅰ)=r(Ⅰ, Ⅱ)=r(Ⅱ);
由第 8 题的第一问的结论得到，Ⅰ和Ⅱ等价

（B）

1. **考点**：秩的不等式
解：证明：

因为$r(\boldsymbol{AB}) \le r(\boldsymbol{A})$，$r(\boldsymbol{AB}) \le r(\boldsymbol{B})$所以$r(\boldsymbol{AB}) \le n < m$ 所以，$det(\boldsymbol{AB}) = 0$

2. **考点**：线性无关的充要条件的证明。
证明： 充分性：
任取n维向量x，将其加入向量组，任何 n+1 个 n 维向量一定线性相关，所以存在一组不全为 0 的系数使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + kx = 0$。若$\mathrm{k} = 0$，则与线性无关矛盾，故$k \ne 0$，故x可由该向量组线性表示。
必要性：
由于 n 维的自然基底$[\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \dots, \boldsymbol{\epsilon_n}]$也可以由$[\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}]$线性表示，
则 $\mathrm{n} \ge \mathrm{r}([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}]) \ge \mathrm{r}([\boldsymbol{\epsilon_1}, \boldsymbol{\epsilon_2}, \dots, \boldsymbol{\epsilon_n}]) = \mathrm{n}$ ， 故 $\mathrm{r}([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}]) = n$ 向量组$[\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}]$线性无关

3. 考点：8 题结论的应用
证明
(1)必要性：
因为$r(\boldsymbol{AP}) = r(\boldsymbol{I}) = m \le r(\boldsymbol{A}) \le m$所以$r(\boldsymbol{A}) = m$
充分性：
因为：$r(\boldsymbol{A}) = m$ 则$r\left(\boldsymbol{A}，\boldsymbol{I}\right) = r(\boldsymbol{A}) = m$
则$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}$ 有解，即存在$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{I}$
(2) 必要性：

因为$r(\boldsymbol{QA}) = r(\boldsymbol{I}) = n \le r(\boldsymbol{A}) \le n$所以$r(\boldsymbol{A}) = n$

充分性：
因为：$r(\boldsymbol{A}) = n$则$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix} = r(\boldsymbol{A}) = n$则，$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$ 有解
即存在$\boldsymbol{Q}$ 使得$\boldsymbol{QA} = \boldsymbol{I}$

第四节 线性方程组的解的结构

(A)

1. **考点**:基础解系的理解
基础解系的定义：一组线性无关的解,用它们可以线性表示方程组所有的解.
设$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_t}]$为基础解系,$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \dots, \boldsymbol{\beta_t}]$为 A 的等价组，而且 B组线性无关.
因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价, 所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以互相线性表示。$\boldsymbol{A}$ 是基础解系, 可以线性表示方程组所有的解. B

可以线性表示 A, 从而可以线性表示方程组所有的解.（表示具传递性）。又 B 线性无关. 所以, 组 B 也是基础解系

2. 考点：基础解系和解的结构

解：(1)

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}\\0&0&-1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以基础解系为：$\boldsymbol{\xi_1}=(-2,3,0,0,0)^T\boldsymbol{\xi_2}=(-4,0,3,3,0)^T\boldsymbol{\xi_3}=(-8,0,9,0,3)^T$

$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi_1}+c_2\boldsymbol{\xi_2}+c_3\boldsymbol{\xi_3}$

(2) $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&a&7\\1&-1&-6&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&2&2\\0&0&a+8&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore a=-8$ 时，$\boldsymbol{\xi_1}=(4,-2,1,0)^T\boldsymbol{\xi_2}=(-1,-2,0,1)^T\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi_1}+c_2\boldsymbol{\xi_2}$

$a\neq-8$ 时，$\boldsymbol{\xi}=(-1,-2,0,1)^T$ $\quad\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\xi}$

(3) $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 基础解系为：$\boldsymbol{\xi}=(\frac{4}{3},-3,\frac{4}{3},1)^T$ $\ \boldsymbol{x}=c\boldsymbol{\xi}$

(4) $$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\\7&14&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 基础解系为：$\boldsymbol{\xi_1}=(-2,1,0,0)^T\boldsymbol{\xi_2}=(1,0,0,1)^T\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi_1}+c_2\boldsymbol{\xi_2}$

3. 考点：基础解系和秩的关系

解：

由题意得：

$4-r(A)=2\quad$ 故 $\mathrm{r}(A)=2$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a-2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&a^2-2a+1&a^2-2a+1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当且仅当 $a=1$ 时，方程组的基础解系有两个向量。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 故结构解为：$\boldsymbol{x}=c_1(1,-1,1,0)^T+c_2(0,-1,0,1)^T$

4. 思路：先通过转置，转化成求解方程组的问题

由：$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\xi_1}\boldsymbol{\xi_2}]=0$ 转置后得到 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi_1^T}\\\boldsymbol{\xi_2^T}\end{bmatrix}\boldsymbol{A^T}=0$

故$\boldsymbol{A}^T$的列向量为线性方程$\begin{bmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=0$ 的解向量

则$\boldsymbol{A}$可以取为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5. **考点**：基础解系等价的证明

解：由题意得：

$\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}=0$ ，$\boldsymbol{\beta}_1$ ，$\boldsymbol{\beta}_2$和$\boldsymbol{\beta}_3$为方程的解

$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore 3\geq r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\geq r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$

$\therefore r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$ $\therefore$ $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是基础解系

6. **考点**：线性方程组解的性质

证明：$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & t-6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\therefore$ $t\neq 6$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{Q})=2<3$

又 $\mathrm{r}(P)+\mathrm{r}(\boldsymbol{Q})\leq 3$ 且p 不是零阶矩阵 $\therefore r(\boldsymbol{P})=1$

7. **考点**：线性方程组解的性质

证明：

由两个方程组同解得： $n-r(A)=n-r(B)$ 故 $r(A)=r(B)$

8. **考点**：线性方程组解的性质的应用；

证明：由题意得：

$\boldsymbol{Bx}=0$ 的解都是$\boldsymbol{ABx}=0$ 的解

另外：若$\boldsymbol{x}$为$\boldsymbol{ABx}=0$ 的解，则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})=0$

而$\boldsymbol{A}$的列向量线性无关，则方**程**$\boldsymbol{Ay}=0$ 只有 0 解

故$\boldsymbol{Bx}=0$ ；即$\boldsymbol{ABx}=0$ 的解也是$\boldsymbol{Bx}=0$ 的解；

因此，$\boldsymbol{ABx}=0$ 和$\boldsymbol{Bx}=0$ 同**解，进而** $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$

9. **考点**：齐次线性方程组的解的性质；

解：证明：基础解系中解的向量的个数为：n-r(A)=1

由$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ $\therefore \boldsymbol{\varepsilon}=(1,1,1\dots 1)^T$为一个基础解系

$\therefore$ 通解为$\boldsymbol{x}=k(1,1,1\dots 1)^T$;

10. **考点**：求解线性方程组的结构解

解：

（1） $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4\\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1.5 & 0.75 & 1.25\\ 0 & 1 & -1.5 & -1.75 & -0.25\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{x}=(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},0,0)^T+c_1(3,2,2,0)^T+c_2(-3,7,0,4)^T$

（2） $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&4&5&2&3&1\\3&2&4&1&2&3\\3&2&-2&4&0&-7\\9&6&1&3&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{19}{6}\\0&0&1&0&0&13\\0&0&0&0&1&-34\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{x}=(0,0,13,9,-34)^T+c_1(1,0,0,-3,0)^T+c_2(0,1,0,-2,0)^T$

（3） $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{x}=(\frac{1}{2},0,0,0)^T+c_1(-\frac{1}{2},1,0,0)^T+c_2(\frac{1}{2},0,1,0)^T$

（4） $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-4&3&-4&-11&28\\1&-2&1&2&-5&13\\0&0&-3&1&6&-10\\3&-6&10&-8&-28&61\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&-2&0&0&2&3\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&3&-4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \boldsymbol{x}=(3,0,2,-4,0)^T+c_1(2,1,0,0,0)^T+c_2(-2,0,1,-3,1)^T$

11. **考点**：线性方程组解的判定

证明：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 方程组有解即：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$

$\therefore$ 此时的增广矩阵为：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&-1&a_2+a_3+a_4\\0&0&1&0&-1&a_3+a_4\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{bmatrix}$$

故方程组的通解为：

$x_1=x_5+\sum_{i=1}^{4}a_i$， $x_2=x_5+\sum_{i=2}^{4}a_i$

$x_3=x_5+a_3+a_4$ ， $x_4=x_5+a_4$，x_5为自由变量

12. **考点**：方程组解的判定

解：（1）

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{bmatrix}$$

$\therefore b\neq -2$ 时方程组无解

$b=-2$ 且$a\neq-8$ 时通解为：$x_1=-1-x_4$，$x_2=1-2x_4$，$x_3=0$
$b=-2$，$a=-8$ 时通解为:
$x_1=-1-4x_3-x_4, x_2=1-2x_3-2x_4, x_3$和$x_4$为自由变量

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}a-1&1-2b&0&0\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore b\neq0$ 且$a\neq1$ 时方程组有唯一解: $x_1=\dfrac{1-2b}{b(1-a)}x_2=\dfrac{1}{b}x_3=\dfrac{4b-2a-1}{b(1-a)}$

$b\neq\dfrac{1}{2}$且$a=1$ 或者 b $=0$ 时方程组无解

$b=\dfrac{1}{2}$且$a=1$ 时: $x_1=2-x_3x_2=2x_3$为自由变量

13. **考点**：线性方程组的解的判定和结构
解：

$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}a&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}a+4&0&0&-3b\\2&1&0&-1-4b\\0&0&-1&-1-5b\end{bmatrix}$

$\therefore$ (1)$a=-4$ 且 b $\neq0$ 时,线性方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$不能由Ⅰ线性表示
(2)$a\neq-4$ 时,$\boldsymbol{\beta}$能由Ⅰ线性表示,$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$唯一表示
(3)$\boldsymbol{a}=-4$ 且$b=0$ 时,β能由Ⅰ线性表示,$\boldsymbol{\beta}=c\boldsymbol{\alpha_1}+(-1-2c)\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3}$

14. **考点**：线性方程组同解的转化
解：由Ⅰ和Ⅱ同解得到:r(Ⅰ)= r(Ⅱ)<3

$$\therefore\ \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0\ \therefore a=2$$

则 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^{\boldsymbol{T}}$为方程组的一组解代入Ⅱ中有：

$\begin{cases}-1-b+c=0\\-2-b^2+c+1=0\end{cases}$ 解得：$b=0\ \ c=1$ 或者$b=1\ \ c=2$

又 b=0 c=1 时两个方程组不同解；则 a=2， b=1， c=2

15. **考点**：两个方程组有公共解的转化
由Ⅰ和Ⅱ有公共解可以得到：
(Ⅲ)的解为Ⅰ和Ⅱ的公共解

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_1=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(Ⅲ)}$$

又 $\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&4&a^2&0\\1&2&a&0\\1&2&1&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 当$a=1$ 或者 2 时方程组有公共解

当$a=1$ 时公共解为: $k(1,0,-1)^T$
当$a=2$ 时公共解为: $(0,1\ ,-1)^T$

16. 考点：线性方程组解的性质

解：由题意得：

$\boldsymbol{Ax}$=0 的基础解系含有 4-r($\boldsymbol{A}$)=1 个解向量；

又 $2\boldsymbol{\alpha_1}-(\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{\alpha_3})=(0,1,2,3)^T$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解；

所求的通解为: $\boldsymbol{x}=(1,2,3,4)^T+c(0,1,2,3)^T$

17. 考点:线性方程组解的性质

证明：将$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解改写为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta_0}+\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}\boldsymbol{\xi_i}=\boldsymbol{\eta_0}+\sum_{i=1}^{t}[\boldsymbol{\lambda_i}(\boldsymbol{\eta_0}+\boldsymbol{\xi_i})-\boldsymbol{\lambda_i}\boldsymbol{\eta_0}]=$$

$$\boldsymbol{\eta_0}+\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}\boldsymbol{\eta_i}-\left(\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}\right)\boldsymbol{\eta_0}=\left(1-\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}\right)\boldsymbol{\eta_0}+\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}\boldsymbol{\eta_i}$$

又令$1-\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}=\boldsymbol{\lambda_0}$故$\sum_{i=0}^{t}\boldsymbol{\lambda_i}=\boldsymbol{0}$

18. 证明：

设$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}]$要使$\boldsymbol{AB}=0$ 则设：$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}$是$\boldsymbol{Ax}=0$ 的解；

当 $r=n$ 时，A 为列满秩，B=0；

当 $r<n$ 时，A 为列降秩，则取$\boldsymbol{\alpha_{r+1}}=\boldsymbol{\alpha_{r+2}}=\cdots=\boldsymbol{\alpha_n}=0$ 则$\boldsymbol{AB}=0$ 也成立

综上所述，一定存在一个秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵使得 AB=0

(B)

1 考点：线性方程组解的判定

解：$det(A)=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i)$

$\therefore$ 当$b\neq 0$ 且$b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时方程组只有零解

当$b=0$ 时不防设$a_1\neq 0$ 则通解为：

$$\boldsymbol{x}=c_1\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\dots,0\right)^T+c_2\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,0,\dots,0\right)^T+\cdots+c_{n-1}\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\dots,0,1\right)^T$$

$b+\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ 时通解为$\boldsymbol{x}=\mathrm{c}(1,1,\dots,1,1)^T$

2. $[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\dots,\boldsymbol{\alpha_n}]\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & t_1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{bmatrix}$当$\boldsymbol{B}$为行满秩时，$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\dots,\boldsymbol{\beta_n}$可以作为基础解系

即：$det(B)=t_1^m+\ (-1)^{m+1}t_2^{m+1}\neq 0$

3. 证明：

（1）$\boldsymbol{Ax}=0$ 的解为$\boldsymbol{A^TAx}=0$ 的解
在$\boldsymbol{A^TAx}=0$ 左乘$\boldsymbol{x^T}$得到$(\boldsymbol{Ax})^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 即$(\boldsymbol{Ax})^{\boldsymbol{2}}=0$ 故$\boldsymbol{Ax}=0$
综上所述：$\boldsymbol{Ax}=0$ 和$\boldsymbol{A^TAx}=0$ 同解；
（2）由（1）得$\boldsymbol{A^TAx}=0$ 和$\boldsymbol{Ax}=0$ 同解
则：$r(\boldsymbol{A^T})=r(\boldsymbol{A^TA})$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A^TA})$故$r(\boldsymbol{A^T})=r(\boldsymbol{A})$则$r(\boldsymbol{A^TA})=r(\boldsymbol{AA^T})$
综上所述：$r(\boldsymbol{A^T})=r(\boldsymbol{A^TA})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{AA^T})$

4. 证明：
$r(\boldsymbol{A})=n-1$ 则 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系中只含有一个解向量
又$\boldsymbol{A}k(\boldsymbol{A_{21}},\boldsymbol{A_{22}},\dots,\boldsymbol{A_{2n}})^{\boldsymbol{T}}=0$ 则$\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{A_{21}},\boldsymbol{A_{22}},\dots,\boldsymbol{A_{2n}})^{\boldsymbol{T}}$为线性方程组的通解

5. 证明：
当$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=n$ 时：$det(\boldsymbol{A})\neq 0$ $det(\boldsymbol{A}^*)\neq 0$ $\therefore r(\boldsymbol{A}^*)=n$
当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时：$\boldsymbol{AA}^*=0$ 即$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{Ax}=0$ 的解，
又基础解系中的向量的个数为$n-r(\boldsymbol{A})=1$ $r(\boldsymbol{A}^*)=1$
当$r(\mathbf{A})\leq n-2$ 时$\boldsymbol{A}^*=0$ $r(\boldsymbol{A}^*)=0$

6. 考点：线性相关和线性无关的判断
证明：由题意得：
$x_i^Tx_j=0$ $(i=1,2\dots,r;j=r+1,r+2,\dots,n)$
$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r+\cdots+k_nx_n=0$
用$(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r)^T$左乘两端得到
$(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r)^T(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r)=0$
即$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r=0$
而$x_1,x_2,\dots,x_r$线性无关,则$\mathrm{k_1}=\mathrm{k_2}=\cdots=\mathrm{k_r}=0$
而$\mathrm{k}_{r+1}x_{r+1}+\cdots+\mathrm{k}_nx_n=0$ 中$x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$线性无关
则$k_{r+1}=k_{r+2}=\cdots=k_n=0$
综上所述：$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 故$x_1,x_2,\dots\dots,x_r\dots x_n$线性无关

7（1）证明：
$[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I_r} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I_{n-r}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{I_n}=\boldsymbol{P^{-1}}$
故$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$可逆，$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$的列向量线性无关
其中$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{P}^{-1}$的$n-1$ 个列向量
（2）证明：
取$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\dots,\boldsymbol{x_r}]=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I_r}\\ \boldsymbol{0_{(n-r)r}}\end{bmatrix}\mathbf{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0_{r(n-r)}}\\ \boldsymbol{I_{n-r}}\end{bmatrix}$
则$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{P^{-1}}$为可逆阵，$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$中的$n$个向量线性无关；
则一定可以从$\boldsymbol{F^n}$找到$n-r$个向量，组成$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\dots,\boldsymbol{x_n}$线性无关

第四章习题

1. 填空题
（1）解析:根据题目可得:$A\alpha=\lambda\alpha$ 即：$(a,2a+3,3a+4)^T=\lambda(a,1,1)^T$故$a=-1$
(2)解析:由题目中的 $\boldsymbol{A}$ 行等价于 B,得到$\boldsymbol{\alpha_3}=\boldsymbol{2\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2}$，$\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{3\alpha_2}$。

（3）$[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}]=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&3&6\\0&4&7\end{bmatrix}$因为$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&5\\-1&3&6\\0&4&7\end{bmatrix}$为满秩阵，

则$[\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}]$和$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}]$的秩相同，均为 2

(4)向量$(1,\lambda,\lambda^2)$可以由向量组不唯一线性表示即方程组有不唯一的解：

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1+x_2+x_3=1\\x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^2\end{cases}\quad A=\begin{bmatrix}\lambda+1&1&1\\1&\lambda+1&1\\1&1&\lambda+1\end{bmatrix}$$

$det(A)=\lambda^2(\lambda+3)=0$ 故$\lambda=0$或者-3

而$\lambda=-3$时，$r([\boldsymbol{A},b])\neq r(\mathrm{A})$方程组无解，故$\lambda=0$

(5)解析：$\boldsymbol{A}$为 n 阶矩阵，有三个不同的解，则 $\boldsymbol{A}$ 为列降秩，再加上$\boldsymbol{A}^*\neq 0$ 则$r(A)=n-1$;

故$Ax=0$ 的基础解系所含的向量的个数为 1

(6)解析：$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&2-a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&5-a\end{bmatrix}$

$r(\boldsymbol{B})=1$ 则$a=5$

(7)解析：$r(\boldsymbol{A})$=3 $\boldsymbol{Ax}$=0 只有一个非零解为$\boldsymbol{2\alpha_2+\alpha_3-3\alpha_1}=3(1,1,1,1)^T$

故，$\boldsymbol{Ax}=b$的通解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha_1}+k(\boldsymbol{1,1,1,1})^{\boldsymbol{T}}$

(8)解析：$r(\mathbf{A})$=3, $\boldsymbol{Ax}$=0 只有一个非零解

由$\boldsymbol{\alpha_4}=-\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{2\alpha_1}$得：$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}](-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}=0$

即: $\boldsymbol{Ax}=0$ 的解为：$(-1,2,0,1)^T$

$\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}][1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$得$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的一个特解为$[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$

故通解为：$\boldsymbol{x}=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}+k(-1,2,0,1)^T$

2. 单项选择题

（1）选 A， $r(\mathrm{II})\leq r(\mathrm{I})\leq s$ 那么若 I 线性相关，II 一定线性相关。

（2）选 B，$r(\boldsymbol{A})$=$r(\boldsymbol{B})$=m;

解析：$m=r(\boldsymbol{AB})\leq r(\boldsymbol{A})\leq m$故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$

同理$m=r(\mathbf{AB})\leq r(\mathbf{B})\leq m$ $r(\mathbf{B})=m$

(3)选 A

由$\boldsymbol{A_{m\times n}B_{n\times p}}$=0 得 $r(\boldsymbol{A})$+r($\boldsymbol{B}$) $\leq n$ 且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵，则 $r(\boldsymbol{A})\geq1$，$r(\boldsymbol{B})\geq1$

则有 $r(\boldsymbol{A})$ $\leq$n-1 A 的列向量线性相关

$r(\boldsymbol{B})$ $\leq n$-1 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关

(4)选 D

$\boldsymbol{Ax}$=0 有非零解，表示 $r(\boldsymbol{A})$<n , $\boldsymbol{Ax}$=b 有无穷多解或者是无解

$\boldsymbol{Ax}$=0 仅有零解，表示 $r(\boldsymbol{A})$=n,$\boldsymbol{Ax}$=b 可能有唯一解或者是无解。

$\boldsymbol{Ax}$=b 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}$ =b 仅有零解

(5)选 D

$\boldsymbol{AB}$为$m\times m$阶矩阵，$r(AB)\leq r(A)\leq n$，若$m>n$，则AB必不满秩。

(6)选 C

A,B,D 中的三个向量线性相关，不能作为基础解系；选择 C

(7)选 B

对于 1，$\boldsymbol{Ax}$=0 的解均为 $\boldsymbol{Bx}$=0 的解, 表示 $\boldsymbol{Ax}$=0 的解空间包含于 $\boldsymbol{Bx}$=0 的解空间中 n-$r(\mathbf{A})$ $\leq n$-$r(\boldsymbol{B})$, 故 $r(\boldsymbol{B})$ $\leq r(\boldsymbol{A})$

对于 3，同解可以推导出秩相同的证明见第 163 页第 7 题；

(8)选 D

三条直线交于一点，表示方程组有唯一的解

$\boldsymbol{\alpha_1}$和$\boldsymbol{\alpha_2}$线性无关，三个方程组有两个变量，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$一定线性相关

3. 解析：向量组等价就是可以相互表示

解：（1）

$$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3} \vdots \boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{bmatrix}$$

$a\neq-1$ 时$|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}|=a+1\neq0$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})=3$ ，

线性方程组$x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_3}=\boldsymbol{\beta_i}$

均有唯一解，所以$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$**可**以由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示

同理$|\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}|=6\neq0$ $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$可以由$\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}$线性表示

a=-1 时，$r(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3})\neq r(\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},\boldsymbol{\beta_3}),x_1\boldsymbol{\alpha_1}+x_2\boldsymbol{\alpha_2}+x_3\boldsymbol{\alpha_3}=\boldsymbol{\beta_i}$无解，

向量$\boldsymbol{\beta_i}$不能由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$线性表示。

综上所述：a=−1 时 两个向量组不等价，a≠-1 时，两个向量组等价

4. 考点：线性相关的转化

解：$|\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}|=\begin{vmatrix}a+1&2&3&4\\1&a+2&3&4\\1&2&a+3&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+10&2&3&4\\a+10&a+2&3&4\\a+10&2&a+3&4\\a+10&2&3&4+a\end{vmatrix}=$

$\begin{vmatrix}a+10&2&3&4\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^3(a+10)=0$ 故 $\mathrm{a}=0$ 或者 -10 时向量组线性相关

a=0 时 $[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}]=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\\1&2&3&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$\boldsymbol{\alpha_1}$是一个极大无关组。$\boldsymbol{\alpha_2}=$

$\boldsymbol{2\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_3}=\boldsymbol{3\alpha_1}$，$\boldsymbol{\alpha_4}=\boldsymbol{4\alpha_1}$

a=−10 时$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}]=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$是一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha_4}=-\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3}-\boldsymbol{\alpha_1}$

5. 解：

$$[\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4},\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\3&-1&-a&15&3\\1&-5&-10&12&b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-4&-a-6&6&0\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&2-a&2&4\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ (1)$a\neq 2$ 时，可以线性表示，且表示式唯一

(2)$a=2$ 且$b\neq 1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$表示

（3）$a=2$ $b=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3},\boldsymbol{\alpha_4}$表示，表示不唯一；

$$\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&0&2-a&2&4\\0&-6&-12&9&b-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&2&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{\beta}=-8\boldsymbol{\alpha_1}+(3-2c)\boldsymbol{\alpha_2}+c\boldsymbol{\alpha_3}+2\boldsymbol{\alpha_4}$

6. 解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&1&-1\\-3&-8&a-1&1\\3&7&4&b-1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\0&1&-5&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+1\end{bmatrix}$

$a\neq 2$ 且$b\neq -1$ 时方程只有零解；

$a=2$ 且$b\neq -1$ 时方程通解为：$\boldsymbol{x}=\mathrm{c}(-13,5,1,0)^{\mathrm{T}}$

$a\neq 2$ 且$b=-1$ 时方程通解为：$\boldsymbol{x}=\mathrm{c}(3,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

$a=2$ 且$b=-1$ 时方程通解为：$\boldsymbol{x}=\mathrm{c}_1(-13,5,1,0)^{\mathrm{T}}+\mathrm{c}_2(3,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

7. 解：

（1）证明：设$\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_3}$为方程$\boldsymbol{Ax}=b$的三个解

则$\boldsymbol{\alpha_1}-\boldsymbol{\alpha_2},\boldsymbol{\alpha_2}-\boldsymbol{\alpha_3}$为$\boldsymbol{Ax}=0$ 的两个解

$4-r(\boldsymbol{A})\geq 2$ $\therefore r(\boldsymbol{A})\leq 2$; 又$\boldsymbol{A}$的前两行线性无关，则$r(\boldsymbol{A})\geq 2$,

故$r(\boldsymbol{A})=2$, 该方程组的秩为 2

（2）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\a-2&0&0&b+3&0\end{bmatrix}$

$\therefore a=2$ $b=-3$ $\boldsymbol{x}=c_1(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}+c_2(-2,1,1,0)^{T}+c_3(4,-5,0,1)^{T}$

8. 证明：

（1）由 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩则 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩相同，

即：$r(\boldsymbol{A})=n$，$r(\boldsymbol{B})=p$；$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{B})=p$；

则 $\boldsymbol{C}$ 为列满秩，$\boldsymbol{C}$ 的列向量线性无关；

同理，当 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩时，$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的秩相同，

$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{A})=m$；$\boldsymbol{C}$ 为行满秩，$\boldsymbol{C}$ 的行向量线性无关

（2）由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关得到：$r(\boldsymbol{B})<p$

则 $r(\boldsymbol{AB})\leq r(\boldsymbol{B})<p$ 故 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量线性相关

第五章 线性空间与欧式空间

第一节 线性空间的基本概念

(A)

1. (1) 否；(2) 否；(3) 是；(4) 是.

解析：(1) 因为对加法不封闭；(2) 否，因为其数乘运算不满足运算规律 7°；(3) 零元素为$(0,0)^T$, $(a,b)^T$的负元素为$(-a,a^2-b)^T$，满足 8 条运算规律；(4) 零元素为 1, a的负元素是a^{-1}，满足 8 条运算规律.

2. (1) 设 $k_1\sin x+k_2\cos x+k_3\ \ x\sin x=0$，可知仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时，$k_1\sin x+k_2\cos x+k_3\ \ x\sin x=0$才恒成立，故函数组$\sin x,\cos x,x\sin x$在区间$(-\infty,\infty)$上线性无关。(2) 设$k_1+k_2\mathrm{x}+k_3e^x=0$, 可知仅当$k_1=k_2=k_3=0$时，$k_1+k_2\mathrm{x}+k_3e^x=0$才恒成立，故函数组$1,\mathrm{x},e^x$在区间$(-\infty,\infty)$上线性无关。

解析：(1) $\mathrm{x}=\mathrm{n}\pi$时，$\sin x=0,\cos x\neq 0$,得出$k_2=0$，所以$k_1=k_3x$，$k_1=k_3=0$. (2) $\mathrm{x}\to\infty$时，$e^x\gg x\gg 1$, 此时只能$k_1=k_2=k_3=0$.

3. (1) 是，$(1,2,3,\dots,n)^T$ 是基，$\dim(\mathrm{W})=1$; (2) 是，$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$是基，$\dim(\mathrm{W})=3$; (3) 均是，$\{E_{ij}\big|1\le i\le j\le n\}$是的基, $\dim(W_1)=\frac{1}{2}n(n+1)$; $\{E_{ii}|i=1,2,3,\dots,n\}$是$W_2$的基, $\dim(W_2)=\mathrm{n}$; $\{E_{ii}\,\big|\,i=1,2,3,\dots,n\}\cup\{E_{ij}+E_{ji}\,\big|\,1\le i<j\le n\}$是$W_3$的基，$\dim(W_3)=\frac{1}{2}n(n+1)$; $\{E_{ij}+E_{ji}\,\big|\,1\le i<j\le n\}$是$W_4$的基, $\dim(W_4\ \ )=\frac{1}{2}n(n-1)$; (4) W_1不是，W_2是，$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$是$W_2$的基；(5) 是。

解析：(1) W 中的元素加法和数乘封闭, $(a,2a,3a,\dots,na)^T=a(1,2,3,\dots,n)^T$; (2) W 中的元素加法和数乘封闭, $\mathrm{W}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}\right\}$, 则其的一组基是$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$. (3) W 中的元素加法和数乘封闭；(4) W_1中的元素加法不封闭，W_2中的元素加法和数乘封闭；(5) W 中的元素加法和数乘封闭，但是是无限维的。

4.

解析：设$k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$,由x^2可得$k_1+k_2=0$，则还剩下x项，故$k_3\neq 0$，则留有常数项（不为0），所以f_1,f_2,f_3线性无关，且任一元素都可以由其线性表出，可以做一组基。由分析可得, $k_3=a_0,k_1+k_2=a_2,k_1-k_2+a_0=a_1$。$k_1=\frac{1}{2}(a_1+a_2-a_0)$，$k_2=\frac{1}{2}(a_0+a_2-a_1)$, $k_3=a_0$. 则可以求出其坐标。

5.

解析：$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=0$. 则$k_4=k_3=0$. $k_1+k_2=0,k_1-k_2=0$，$k_1=k_2=0$.则线性无关，且任一元素都可以由其线性表出，故是一个基。$k_4=3,k_3=-1$. $k_1+k_2=0,k_2-k_1=2$. $k_1=-1$，$k_2=1$.则可以求出其坐标.

6.

解析：显然$\mathrm{W}\subseteq F^m$, 故只需证明W中的元素加法和数乘封闭。由于W是由A的列向量组生成的F^m的子空间，故W的基与维数分别是A的列向量组的极大无关组与秩。对于题中给定的$\mathrm{A}=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\quad\alpha_4]$，$|A|=0$,令$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$这三个列向量的前三个数字组成新的行列式B，$|B|\neq 0$。故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故W的基是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，维数是3.

7. (1)$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\4&4&4\end{bmatrix}$, (2)$y=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

解析：(1)即是$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$, $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$即可计算出答案。(2)$y=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]^{-1}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=A^{-1}x$.

8. V_1+V_2的基是$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$，维数是3. $V_1\cap V_2$的基是$(5,-2,-3,-4)^T$, 维数是 1.

解析：$W=V_1+V_2=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2|=0$，令$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$这三个列向量的前三个数字组成新的行列式B，$|B|\neq 0$。故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故W的基是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，维数是3. 由上可知，$\beta_2$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$线性表出，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\beta_1=\beta_2$, 即$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=x_3\beta_1+\beta_2$求出$x_1,x_2,x_3$的值。则$y=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$。（答案不唯一）。

9.

解析：由计算可得，$\beta_1=-\alpha_1+3\alpha_2,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2.\ \alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2),\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+3\beta_2)$.两者可以相互表出，故是同一子空间的两个基，并可看出$(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{2}(\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$，所以过渡矩阵为$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$。

(B)

1. I,A,A^2是一个基，维数为 3.

解析:$\omega^{3k}=1,\omega^{3k+1}=\omega,,\omega^{3k+2}=\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$. $A^{3k}=I,A^{3k+1}=A,,A^{3k+2}=A^2$, 其中$A^2=diag(1,\omega,\omega^2)$. 所以任一元素可以由$I,A,A^2$线性表示，且可验证它们线性无关。

2. (1)$(3,4,4)^T$(2)$y=\left(\frac{11}{2},-5,\frac{13}{2}\right)^T$ (3) $e_1=4\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3,e_2=\alpha_2,e_3=\alpha_3$

解析：(1)$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)(2,-1,3)^T$，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$，故$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A(2,-1,3)^T$，所以新坐标为$A(2,-1,3)^T$，计算即可。$\beta=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(2,-1,3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}(2,-1,3)$，所以新坐标为$A^{-1}(2,-1,3)^T$，计算即可。(3) 设过渡矩阵为B，由坐标变换公式可得其第一列为$(4,2,-3)^T$。因B可逆，故可取$B=\begin{bmatrix}4&0&0\\2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$，因此得出$e_1=4\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3,e_2=\alpha_2,e_3=\alpha_3$。

第二节 欧氏空间的基本概念

(A)

1.

解析：验证(5.2.5)式满足内积公理，即证明定义(5.2.1)中的条件(1) ~ (4).

2.

解析:对称性：$<x,y>=(Ax)^T(Ay)=[(Ay)^T(Ax)]^T=(Ay)^T(Ax)=<y,x>$加性：$<x+z,y>=[A(x+z)]^T(Ay)=(Ax+Az)^T(Ay)=[(Ax)^T+(Az)^T](Ay)=(Ax)^T(Ay)+$ $+(Az)^T(Ay)=<x,y>+<z,y>$齐性：$<kx,y>=(Akx)^T(Ay)=k(Ax)^T(Ay)=k<x,y>$ 非负性：$<x,x>=(Ax)^T(Ax)=\left|\vec{b}\right|^2$. 当且且当$\left|\vec{b}\right|=0$，即$x=0$时成立。综上所述，其满足

内积公理。

3.
解析：证明定义(5.2.1)中的条件$(1) \sim (4)$即可.

4. 不满足
解析：其中$< A,B >$不一定满足非负性。取$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，则$< A,A >= -2$，不满足非负性。

5.
解析：$< x,Ay >= x^T \cdot Ay$=$(A^T x)^T \cdot y =< A^T\mathrm{x},\mathrm{y} >$，即证明。

6. $\sqrt{(a_1+b_1)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2} \le \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2} + \sqrt{{b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2}$

$\sqrt{\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}+\sqrt{\int_a^b \left(g(x)\right)^2 dx}$

7.
解析：$\|\quad\|$为正值，第一问证明的时候，将不等号两边的式子平方。四问证明的时候需要将$\|\quad\|^2$展开，其中$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\ \beta\|^2 + 2\alpha \cdot \beta$利用$\alpha \cdot \beta \le \|\alpha \cdot \beta\| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$可以证明(1)，展开可以证明(2),(3). 证明第四问时，利用垂直可得两者内积为 0，从而得出要证的等式。

8.
解析：设$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 分别用$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$与其两端做内积，可得以D为系数行列式的齐次线性方程组，由方程组只有零解的充要条件可得到结论。

9.
解析：取$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$,，则等式整理后可得$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = 0$，故$\alpha_1 = \alpha_2$。

10. $(0,-2,1)^T$
解析：设坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$, 则$x_i = \alpha \cdot \alpha_i$，计算即可。

11. $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2,0)^T, \frac{1}{\sqrt{66}}(-1,5,-2,6)^T$
解析：通过初等行变化后求出解$\mathrm{x} = c_1(1,1,2,0)^T + c_2(0,1,0,1)^T$, 令$\alpha_1 = (1,1,2,0)^T$，$\alpha_2 = (0,1,0,1)^T$，$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{<\alpha_1，\alpha_2>}{\|\alpha_1\|^2}$，而后将$\alpha_1$，$\alpha_3$单位化即得答案。

12. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^T, x_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^T$
解析：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，$\alpha_1,\alpha_2$线性无关。由题意可得，解空间基的维数是 2，故将$\alpha_1,\alpha_2$正交化并单位化即可得到答案。

13. $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,0,-1,3)^T$
解析：直接设坐标为$(a,b,c,d)^T$,由于与三个向量正交，列出方程，求解后，将坐标单位化即得答案。

14. $\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}x,\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$.

解析：根据正交化方法的公式直接计算即可。重在其中的内积要按照题中所给的定义计算。

15.

解析：两边同乘α^2，又因$\alpha\cdot\cos\varphi_i=\alpha_i,\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_n$,将等式两侧平方，由于 α_i 彼此正交，即两两不同的内积为 0. 即可证明该式。

16.

解析：(1)$\det(A\cdot A^T)=det(A)det(A^T)=det(A)^2=det(I)=1$. (2)$A^T\cdot(A^T)^T=A^T\cdot A=I$. $A^{-1}\cdot(A^{-1})^T=A^{-1}\cdot(A^T)^{-1}=(A^T\cdot A)^{-1}=I$. $A^*\cdot(A^*)^T=[det(A)\quad A^{-1}]\cdot[det(A)(A^T)^{-1}]=det(A)^2\cdot(A^T\cdot A)^{-1}=I$. $(AB)(AB)^T=ABB^{-1}A=\mathrm{I}$. (3)$A^TA=I=\frac{A^*A}{det(A)},det(A)A^T=A^*,det(A)a_{ij}=A_{ij}$**即可证明。**

17.

解析： $A\cdot A^T=(I-2\alpha\alpha^T)(I-2\alpha\alpha^T)^T=(I-2\alpha\alpha^T)(I-2\alpha\alpha^T)=I-2\alpha\alpha^T-2\alpha\alpha^T+4\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=I-4\alpha\alpha^T+4\alpha\alpha^T=I.$

18. 是。

解析：由题意，$(x',y',z')^T=(x,y,z)^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^T=I$，故是正交变换。几何意义：坐标关于 z 轴对称。

19.

解析： $\mathrm{P}P^T=\begin{bmatrix}A&B\\0&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^T&0\\B^T&C^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^T+BB^T&BC^T\\CB^T&CC^T\end{bmatrix}=I$. 则 $CC^T=AA^T+BB^T=I,BC^T=0$, 故$BC^TC=B=0,CC^T=AA^T=I$.则要求即证。

20. $\mathrm{Q}=\begin{vmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{vmatrix},\mathrm{R}=\begin{vmatrix}1&1&4\\0&\sqrt{3}&2\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}$.

解析：仿照5.2.6节的步骤，即将列向量先正交化，再单位化，再用相应的向量代替原本的列向量，即可得出答案。

21. $W^{\perp}=span\{\beta_1',\beta_2'\},\beta_1'=(1,0,1,0)^T,\beta_2'=(-2,-2,0,1)^T$

解析：先验证$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，再验证$\alpha_1,\alpha_2$线性无关。任取两个与该向量线性无关的向量$\beta_1,\beta_2$。然后通过正交化得到$\alpha_1',\alpha_2',\beta_1',\beta_2'$。则得到答案。（答案不唯一）

22.

解析：先验证W中元素加法，数乘封闭。而后证明其为$<\alpha>^{\perp}$，则$\dim(W)=n-1$.

23.

解析：$\dim(W)=\dim(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})=\mathrm{n}-1, \dim(W^{\perp})=1.\ \beta_1,\beta_2$均属于$W^{\perp}$，故它们线性相关。

24.

解析：只需要证明零向量的表示方法唯一即可。设$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$, 其中$\alpha_i\in V_i$, 用$\alpha_i$与该式做内积，则可得$\alpha_i=0$，即证明为直和。

25.

解析：(1)容易验证$(V_1+V_2)^{\perp}\subseteq {V_1}^{\perp}\cap {V_2}^{\perp}$，${V_1}^{\perp}\cap {V_2}^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}$. (2)容易验证$(V_1\cap V_2)^{\perp}\subseteq {V_1}^{\perp}+{V_2}^{\perp}, {V_1}^{\perp}+{V_2}^{\perp}\subseteq(V_1\cap V_2)^{\perp}$

26.

解析：(1)容易验证A^TA是$\mathrm{n}\times\mathrm{n}$的方阵。由其秩为n，则其行列式不为零，从而其为可逆矩阵。(2)$P^2=A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T$=$A[(A^TA)^{-1}A^TA](A^TA)^{-1}A^T$
=$AI(A^TA)^{-1}A^T=\mathrm{P}$, $P^T=[A(A^TA)^{-1}A^T]^T=A(A^TA)^{-1}A^T=P$. (3)记$\mathrm{W}=\{Ax|x\in R^n\}$为A的列空间，则$\mathrm{Proj}_w\ \mathrm{x}=\mathrm{Ax}^*$等价于$(\mathrm{x}-\mathrm{Ax}^*)\perp W$等价于$A^T(\mathrm{x}-\mathrm{Ax}^*)=0$等价于$A^Tx=A^T\mathrm{Ax}^*$等价于$\mathrm{x}^*=(A^T\mathrm{A})^{-1}A^Tx$，故$\mathrm{Ax}^*=A(A^TA)^{-1}A^Tx=Px$.

27. $\boldsymbol{2\alpha_1+2\alpha_2}$

解析：射影=$(\mathrm{b}\cdot\boldsymbol{\alpha_1})\boldsymbol{\alpha_1}+(\mathrm{b}\cdot\boldsymbol{\alpha_2})\boldsymbol{\alpha_2}$

28. $(4,3,0)^T$, $\mathrm{diag}(1,1,0)$

解析：将A带入 26（3）中求得P（射影矩阵），求出Px.即为正交射影。

29. (1) $\left(-\frac{8}{7},\frac{4}{7},-\frac{16}{7}\right)$ (2) $\left(-\frac{8}{7},-\frac{5}{7},\frac{25}{7}\right)$

解析：(1)根据 26 题求出在直线方向上的正交射影，而后根据勾股定理算出距离。(2)找出平面的两个向量，根据 26 题求出在平面方向上的正交投影，而后根据勾股定理算出距离。

30. (1)$x_0=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)^T$, $\mathrm{p}=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)^T$.

解析：(1)分别利用最小二乘解$x_0=(A^TA)^{-1}A^Tb$,正交射影的公式来计算。(2),直接计算即可。

(B)

1.

解析：$\mathrm{r}(A)=n-1$,。故$\det(A)=0$, A 的伴随矩阵$\mathrm{A}^*\neq 0$，故A^*至少有一个列向量$\boldsymbol{b}$不为0. 由$A\mathrm{A}^*=\det(A)I=0$，故$\boldsymbol{\alpha_i}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 故向量$\boldsymbol{b}$满足要求。

2.

解析：由题意，$(I+A)^T=I-A$, 且$(I+A)(I-A)=(I-A)(I+A)$，故$(I+A)(I-A)^{-1}=(I-A)^{-1}(I+A)$ 故 $(I-A)(I+A)^{-1}[(I-A)(I+A)^{-1}]^T=(I-A)(I+A)^{-1}[(I+A)^{-1}]^T(I-A)^T=(I-A)(I+A)^{-1}[(I+A)^{-1}]^T(I+A)=(I-A)(I+A)^{-1}(I-A)^{-1}(I+A)=(I-A)(I+A)^{-1}(I+A)(I-A)^{-1}=(I-A)I(I-A)^{-1}=I$, 故已证明。

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_5), \frac{1}{\sqrt{10}}(e_1-2e_2+2e_4-e_5), \frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3-e_5)$.

解析：设$e_1=(1,0,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0,0)$, $\cdots e_5=(0,0,0,0,1)$, 而后将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的坐标表示

出来，然后通过正交化和单位化即得到标准正交基。

4.

解析：容易证明$\|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < \alpha, e_i >^2$。所以即可得到上述不等式。

5.

解析：利用定理 5.2.3 的（2）及定理 5.2.5.

第五章习题

1. (1) $(-1,0,0)^T$ (2) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1,0,0)^T, \frac{1}{\sqrt{15}}(2,-1,0,3,-1)^T$ (3) 8 (4) $(1,1,0,0)^T, (1,-1,1,0)^T$，$(0,2,0,1)^T$ (5) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 0\\0 & 3 & 3\end{vmatrix}$

解析：第一问，$A^T = A^*$, 故$a_{ij} = A_{ij}$, 故$|A| \geq 0, A^TA = A^*A = |A|A^{-1}A = diag\{|A|, |A|, |A|\}$。故$|A^TA| = |A|^3 = |A^*A| = |A|$，故$|A| = 0$或$1$，又因$a_{11} = -1$，故$|A| \geq 1, |A| = 1, a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$。故$A = \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & a_{22} & a_{23}\\0 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$，且$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0$，又因$\mathrm{b} = (1,0,0)$, 故$x_1 = -1, x_2 = x_3 = 0$.

第二问，$\mathrm{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$，$Ax = 0$, 则解出$x_1 = -x_3 - 2x_5, x_2 = -2x_3 + x_5, x_4 = -3x_5$,则解空间的一组基为$(1,2,-1,0,0)^T$，$(2,-1,0,3,1)^T$, 将其正交化后单位化即可得到答案。

第三问，$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\-2 & 1 & 8\\3 & a & 7\end{vmatrix} = 0$, 算出 a 的值即可。

第四问，分别提出 a, b, c 前面的系数，则得到三个向量，则为基。

第五问，$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 0\\0 & 3 & 3\end{vmatrix}$.

2. (1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, dim(W) = 3$ (2) $(3,1,0)^T, (7,3,0)^T$

解析：第一问，$\mathrm{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$，$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = 0, \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\-1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} \neq 0$, 故基是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, dim(W) = 3$

第二问，显然通过计算可以求出相应的坐标，其中求出的坐标不唯一。

3. (2) 否

解析：第一问，由行等价可得 A 和 B 的秩相等，从而可推出W_1和W_2的维数相等。

第二问，反例，如$\mathrm{A} = \begin{bmatrix}3 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$两者行等价，但是$W_1 \neq W_2$.

4.

解析：$\mathrm{m} = \mathrm{r}(I_m) = r(AB) \leq r(A), r(A) \leq m$, 故$r(A) = m$，所以 A 的列向量组生成$F^m$.

5. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4 & -10 & -3\\4 & 7 & 3\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}, (8,-5,3)^T$

解析：常规做法即可, 类似题目见5.1(A)第 7 题的（1），（2）.

6.

解析：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$为过渡矩阵，且为正交矩阵，由5.2(B)第 5 题, 可得题中结论。

7. (2) $\left(-\frac{2}{5},0,1\right)^T$

解析：第一问，设$\mathrm{Q}=(\alpha_1,,,\alpha_n)$由标准正交向量组，$\alpha_i\alpha_j=0$, $\alpha_i\alpha_i=1$, 可证明题中等式。

第二问，$\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$,则$\mathrm{QRx}=\mathrm{b}$，则$\mathrm{Rx}=Q^{-1}b$。由第一问，则$Q^{-1}=Q^T$, 故$\mathrm{Rx}=Q^Tb$，求解时用常规的行列式方法即可。

第六章 特征值与特征向量

第一节矩阵的特征值与特征向量

(A)

1. **解：**$A^{-1}x=\lambda x$，两边左乘 A 得$AA^{-1}x=\lambda Ax$，即$x=\lambda Ax$，所以$\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$,得$\lambda=\frac{1}{4}k=1$或$\lambda=1\quad k=-2.$

2. **解：**$\begin{bmatrix}1&-2&3\\-2&-1&4\\2&2&6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-5&10\\0&6&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&-2\\0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$，所以$\xi=-x_1-2x_2$, $\mathrm{A}\ \xi=-\mathrm{A}x_1-2Ax_2=-\lambda_1x_1-2\lambda_2x_2=\begin{bmatrix}-6\\2\\0\end{bmatrix}$

3. **证：**（1）因为$\mathrm{Ax}=\lambda x$, 所以$\mathrm{AAx}=\lambda Ax=\lambda\lambda x$, 以此类推。
（2）因为$A^mx=\lambda^mx$, 所以$A^{m-1}x=\lambda^{m-1}x$，以此类推，最终得 f(A)x=f(λ)x，所以 f(λ)是 f(A)的一个特征值。
（3）因为$A^mx=\lambda^mx$，m=-1 时，$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$，所以$\frac{1}{\lambda}$为$A^{-1}$的一个特征值，且$A^\star=|A|A^{-1}$,且$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$，所以$|A|A^{-1}x=|A|\frac{1}{\lambda}x$，所以$|A|\frac{1}{\lambda}$为$A^\star$的一个特征值。

4. **证：**因为$|\lambda I-A|=0$，所以$|\lambda I-A|=|(\lambda I-A)^T|=|\lambda I-A^T|=0$, 所以$\lambda$为$A^T$的特征值，特征向量不一定相同，因为$\lambda I-A$与$\lambda I-A^T$是不相同的。

5. **解：**存在向量x，使得$Ax=\lambda x$，则 $A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x$，$\frac{1}{3}A^2x=\frac{1}{3}\lambda^2x$，$\left(\frac{1}{3}\mathrm{A}^2\right)^{-1}x=\frac{3}{\lambda^2}x=\frac{3}{4}x$。故$\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有特征值$\frac{3}{4}$。

6. **解：**因为$|3I+A|=0$，且为四阶矩阵，所以$|-3I-A|=0$，所以 A 的一个特征值为-3，且$\mathrm{A}A^T=2I$, 所以$A^{-1}=\frac{A^T}{2}$, 所以$A^\star=|A|A^{-1}=\frac{|A|}{2}A^T$, 所以$|A^\star|=\left|\frac{|A|}{2}A^T\right|$, 且$|A^\star|=|A|^{n-1}$, 其中 n=4, 所以$|A|^3=(\frac{|A|}{2})^4|A|$, 且$|A|<0$, 所以$|A|=-4$，所以$A^\star$的特征值$\lambda_1=\frac{|A|}{\lambda}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$.

7. **证：**（1）$\mathrm{A}\xi=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}\\a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}\\a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}\\a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=a\xi$, 所以 a 为 A 的一个特征值，$\xi$为对应的一个特征向量。
（3）若 a=0, 则 Ax=ax=0, 左乘A^{-1}得 x=**0**，这与 x=$\xi=(1,1,\dots,1)^T$矛盾，所以 a≠0, 设A^{-1}的特征值为λ，则$A^{-1}x=\lambda x$, 两端左乘 A 得$x=\lambda Ax$, 即$\frac{1}{\lambda}x=Ax$，而 Ax=ax，所以$\lambda=\frac{1}{a}$.

8. **解：**B=A$A^\star$=$|A|I$, 所以$\mathrm{Bx}=|A|x$, 所以$|A|$为 B 的特征值，对任意 n 维非零特征向量都成立。

9. **解**：因为 I-A, I+A, 3I+A 都不可逆，所以$|\mathrm{I}-\mathrm{A}|$，$|\mathrm{I}+\mathrm{A}|$，$|3\mathrm{I}+\mathrm{A}|$均为 0，且 A 为 3 维矩阵，所以特征值为 1，-1, 3，所以$|A|$=-3.

10. **解**：(A-3I)x=ux(x 不为零)得 Ax=(u+3)x 得$\lambda=u+3$为 A 的特征值，得$u=\lambda-3$为 A-3I 的特征值，所以λ_i-3为 A-3I 的特征值, i=1, 2, …

11. **解**：已知$\mathrm{B}=A^2-2A+3I$，且三阶矩阵 A 的特征值为$a_1=1, a_2=-1, a_3=0$, 设 B 对应的特征值为λ_i, 有$\mathrm{Bx}=\lambda\mathrm{x}=(A^2-2A+3I)x={a_i}^2x_i-2a_ix_i+3x_i$，所以 B 的特征值为 2, 6, 3，对应的特征向量为$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$，$\boldsymbol{x_3}$，所以B^{-1}特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3}$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{k_1x_1}$，$\boldsymbol{k_2x_2}$，$\boldsymbol{k_3x_3}$$(\boldsymbol{k_1},\boldsymbol{k_2},\boldsymbol{k_3}\neq 0)$

12. **解**：（1）由$|\lambda I-A|=0$得$(\lambda-7)(\lambda+2)=0$, 所以λ=7 或-2，当λ=7 时，得到的基础解系为$(1,1)^T$，当λ=-2 时，得到的基础解系为$(4,-5)^T$.

（2）由$|\lambda I-A|=0$得$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix}$, 得$(\lambda-a-1)(\lambda-a-1)(\lambda+2-a)=0$, 所以$\lambda$=a+1 或 a-2，当$\lambda$=a+1 时，得到的基础解系为$(1,1,0)^T,(1,0,1)^T$，当$\lambda$=a-2 时，得到的基础解系为$(-1,1,1)^T$

（3）$\lambda=1$时，基础解系为$(1，1，1)^T$，$\lambda=2$时，基础解系为$(2,3,3)^T$，$\lambda=3$时，基础解系为$(1，3，4)^T$；

（4）$\lambda=0$时，基础解系为$(1，1，1)^T$，$\lambda=1$时，基础解系为$(3，2，1)^T$，$\lambda=2$时，基础解系为$(7，3，1)^T$；

13. **解**：（1）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，所以$\beta=2x_1-2x_2+x_3$.

（2）$A^n\beta=A^n(2x_1-2x_2+x_3)=2*1^nx_1-2*2^nx_2+3^nx_3=2x_1-2^{n+1}x_2+3^nx_3$

14. **解**：由$|A-\lambda I|=0$得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，因为有三个线性无关的特征向量，所以当$\lambda_1=\lambda_2=1$有两个特征向量，$\lambda_3=-1$有一个特征向量。当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$|A-\lambda I|=$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 因为 n-r=2, r=1, 所以-x-y=0, 即 x+y=0. 当$\lambda_3=-1$时 r=2, $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 无论 x, y 为何值，均满足条件。综上，x 与 y 满足的关系式为 x+y=0.

15. **解**：（1）因为$\alpha^T\beta=0$，所以$(\alpha^T\beta)^T=\beta^T\alpha=0, A^2=\alpha^T\beta\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=\mathbf{0}.$

（2）设$\mathrm{Ax}=\lambda\mathrm{x}$, 由$A^mx=\lambda^mx$得$A^2x=\lambda^2x$，且$A^2=\mathbf{0}$，所以$\lambda^2x=\mathbf{0}$，又$x\neq 0$，所以 A 只有唯一的特征值 0，由-Ax=0 得特征向量为$c_1(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\ldots,0)^T+c_2(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\ldots,0)^T+\cdots+c_{n-1}(-\frac{b_{n-1}}{b_1},0,0,\ldots,1)^T$

16. **解：** $|A|$=1*-1*2=-2, Bx=A^2x-A^*x+3x, 所以特征值为$\lambda_i{}^2$-$\frac{|A|}{\lambda_i}$+3, 所以特征值为 6，2，8，所以 det(B)=96

17. **解：** 设$\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}$, 则$A^2x = \lambda^2 x$，又$A^2 = \mathrm{A}$，所以$\lambda\mathrm{x} = \lambda^2 x$，且$x \neq 0$，所以$\lambda^2 - \lambda = 0$，所以$\lambda = 0$或 1，所以 A 的特征值必为 0 或 1.

18. **解：** 设 A 为 n 阶方阵，当 n<k 时，$A^k x = \lambda^k x = \mathbf{0}$, 所以$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, 当 n$\geq$ k时，有$A^n = A^{n-k}A^k = \mathbf{0}$, 且有$A^n x = \lambda^n x$, 所以$\lambda^n x$=0，且$x \neq \mathbf{0}$, 所以$\lambda^n$=0，所以$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$，综上，A 的特征值都为 0.

19. 证：（1）因为λ是 AB 的一个非 0 特征值，所以 ABx=λx, 所以 BABx=λBx, 即 BA(Bx)=$\lambda(Bx)$ $\neq \mathbf{0}$，又$\lambda \neq 0$，所以Bx $\neq \mathbf{0}$，所以λ是 BA 的一个特征值。

（2）因为 0 为 AB 的一个特征值，所以$|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA| = 0$，所以 BA 的特征值中必有一个特征值为 0.

（B）

1. 证: 设特征值为λ，则有$\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}$，$(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\mathrm{x} = 0$的解有所有 n 维非 0 向量，所以有 n 个线性无关的特征向量，所以$\mathrm{n} - \mathrm{r}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = n$，所以$\mathrm{r}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}) = 0$，即$\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I} = \mathbf{0}$，所以 A=$\lambda$I，故存在 k 使 A=$kI$.

2. **证：** 因为$\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}$，所以$\overline{\mathrm{Ax}} = \overline{\lambda\mathrm{x}}$，所以$\overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{x}} = \bar{\lambda}\overline{\mathrm{x}}$，所以$\overline{\mathrm{x}}^T\overline{\mathrm{A}}^T = \bar{\lambda}^T\overline{\mathrm{x}}^T$, 两端右乘 Ax 得$\overline{\mathrm{x}}^T\overline{\mathrm{A}}^T\mathrm{Ax} = \bar{\lambda}^T\overline{\mathrm{x}}^T\mathrm{Ax}$，因为 A 为正交矩阵，$\overline{\mathrm{A}}^T = A^T$且$A^T A = I$，所以$\overline{\mathrm{x}}^T\mathrm{x} = \bar{\lambda}^T\lambda\overline{\mathrm{x}}^T\mathrm{x}$，所以$\left(\bar{\lambda}^T\lambda - 1\right)\overline{\mathrm{x}}^T\mathrm{x} = 0$，且$\overline{\mathrm{x}}^T\mathrm{x} \neq \mathbf{0}$, 所以$\bar{\lambda}^T\lambda - 1$=0，所以$\bar{\lambda}^T\lambda = |\lambda|^2 = 1$，所以特征值的模为 1.

3. **证：** 设λ为 A 的特征值，因为 A 为正交矩阵，所以$A^T = A^{-1}$，且$\frac{1}{\lambda}$为A^{-1}的特征值，所以$\frac{1}{\lambda}$为A^T的特征值，又A^T与 A 有相同特征值，所以$\frac{1}{\lambda}$也是 A 的特征值。

4. 证： 因为是正交矩阵，所以$\mathrm{A}A^T = I$, $|A - I| = |A - \mathrm{A}A^T| = |A||I - A^T| = |I - A^T| = |(I - A^T)^T| = |I - \mathrm{A}| = (-1)^n|A - I|$, 因为 n 为奇数，所以$2|A - I|$=0，所以$|A - I|$=0，所以 A 有特征值 1.

第二节 相似矩阵与矩阵的相似对角化

（A）

1. **证：**（1）因为 A 与 B 相似，有$P^{-1}AP = B$，所以$B^m = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = P^{-1}A^m P$, 所以相似。

（2）因为$B^m = P^{-1}A^m P$，所以有$a_m B^m = P^{-1}a_m A^m P \dots a_1 B = P^{-1}AP, a_0 = P^{-1}P$, 所以$f(B) = P^{-1}f(A)P$.

（3）因为 A 与对角矩阵相似，所以 A 有 n 个线性无关的特征向量，又$f(A)$与 A 的特征向量关系为$x_{f(A)} = cx_A(c \neq 0)$, 所以$f(A)$有 n 个线性无关的特征向量，所以$f(A)$与对角矩阵相似。

2. **证：**（1）因为$P^{-1}AP = D$，两端去逆矩阵得$P^{-1}A^{-1}P = D^{-1}$，且D^{-1}仍为对角矩阵，所以A^{-1}与对角矩阵相似。

（3）因为$P^{-1}A^{-1}P=D^{-1}$，所以$|A|P^{-1}A^{-1}P=|A|D^{-1}$，即$P^{-1}|A|A^{-1}P=|A|D^{-1}$，即$P^{-1}A^{\star}P=|A|D^{-1}$，且$|A|D^{-1}$也为对角矩阵，所以$A^{\star}$与对角矩阵相似。

3. **解**：因为$P^{-1}AP=B$，所以$A=PBP^{-1}$, 由$\mathrm{Ax}=\lambda_0 x$得$PBP^{-1}\mathrm{x}=\lambda_0 x$，所以$BP^{-1}\mathrm{x}=\lambda_0 P^{-1}x$，所以 B 的特征值$\lambda_0$对应的特征向量为$P^{-1}x$。

4. **解**：因为 A 为 3 阶矩阵且 A 的特征值由 3 个，所以 A 有 3 个特征向量，所以$P^{-1}AP=B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$，所以$|B^{-1}-I|=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}=6$。

还可使用特殊值法，即令$A=diag(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$。

5. 解：以（2）（3）为例其余类似做即可。

（2）$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\lambda-7&12&-6\\-10&\lambda+19&-10\\-12&24&\lambda-13\end{vmatrix}$，解得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-6&12&-6\\-10&20&-10\\-12&24&-12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&-2&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}$，所以基础解系为$(2,1,0)^T,(-1,0,1)^T.$，当$\lambda_3=-1$时，$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-8&12&-6\\-10&18&-10\\-12&24&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-6&3\\5&-9&5\\6&-12&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&\frac{-1}{2}\\0&1&\frac{-5}{6}\\0&0&0\end{vmatrix}$，所以基础解系为$(3,5,6)^T$，因为有三个特征值以及三个特征向量，所以该矩阵可对角化，所以$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&5\\0&1&0\end{bmatrix}$

（3）$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&1\\12&\lambda&-5\\-4&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$, 所以$\lambda$=2 或-1 或 1，当$\lambda$=2 时对应特征向量为$(3,1,2)^T$，当$\lambda$=-1 时对应特征向量为$(1,2,2)^T$，当$\lambda$=1 时对应特征向量为$(3,-1,7)^T$，所以$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}3&1&3\\1&2&-1\\2&2&7\end{bmatrix}$

6. 解：（1）由$\mathrm{A}\xi=\lambda\xi$得$\lambda=-1,a=-3,b=0.$

（2）$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&2\end{bmatrix}$，由$|A-\lambda I|=0$得$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，而-I-A 的秩为 2，有一个基础解系，所以 A 不相似于对角矩阵。

7. 解：因为$\lambda=2$是 A 的 2 重特征值，所以 3-r(2I-A)=2, r(2I-A)=1, 而 A-2I=$\begin{bmatrix}-1&-1&1\\x&2&y\\-3&-3&3\end{bmatrix}$,
所以$x=2,y=-2,\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$, 由$|A-\lambda I|=0$得$\lambda=2$或$\lambda=6$，$\lambda=2$时基础解系

为$(1,-1,0)^T$，$(1,0,1)^T$，当$\lambda=6$时，基础解系为$(1,-2,3)^T$，所以可逆矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$.

8. 解：$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$, 若$\lambda=2$是二重根，则$\lambda=2$时$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$，得 a=-2, 从而解得特征值为 2, 2, 6，又 2I-A 的秩为 1，有 2 个基础解系，所以可相似对角化；若$\lambda=2$不是二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$是完全平方，解得$a=\frac{2}{3}$, 此时 A 的特征值为 2, 4, 4，由于 4I-A 的秩为 2，故不可相似对角化。

9. **解**：因为 A 有 3 个特征矩阵和 3 个特征向量，所以 A 相似于对角矩阵。所以$A=PDP^{-1}$，其中$P=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 所以$A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}$

10. **解**：因为 A 的特征值互不相同，所以 A 可对角化，由

$\begin{cases}P^{-1}BP=P^{-1}A^3P-7P^{-1}AP+3P^{-1}P\\ P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\end{cases}$ 得$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=-\mathrm{I}$, 所以$B=-PIP^{-1}=-I.$

11. 解：（1）由$\begin{cases}|A|=|B|\\2+0+x=2+y-1\end{cases}$得$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

（2）特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$, $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 当$\lambda_1=2$时，基础解系为$(1,0,0)^T$，$\lambda_2=1$时，基础解系为$(0,1,1)^T$，$\lambda_3=-1$时，基础解系为$(0,1,-1)^T$，所以$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

12. 解：由习题 6.1 的 18 题可知，A 的特征值全为 0，所以 det(A)=0, 所以 n-r(A)≤n-1, 且 r(A)=r(-A)，所以 n-r(0I-A)$=\mathrm{n}-\mathrm{r}(-\mathrm{A})$ ≤n-1, 所以 A 不相似于对角矩阵。

13. 解：因为 A 与对角矩阵 B 相似，所以有$A=PBP^{-1}$，且$I=PP^{-1}$, 所以有$C=P(B-\lambda_1 I)P^{-1}P(B-\lambda_2 I)P^{-1}P(B-\lambda_3 I)P^{-1}=P(B-\lambda_1 I)(B-\lambda_2 I)(B-\lambda_3 I)P^{-1}=$

$P\begin{pmatrix}0&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&0&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&0\end{pmatrix}P=\mathbf{0}$

14. 解：以（2）为例其余类似做即可。

（2）$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，$|A-\lambda I|=0$解得$\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=2$

$\lambda=1$时基础解系为$(-1,1,-1)^T$，$\lambda=2$时基础解系为$(1,0,-1)^T$，$\lambda=1$时基础解系为$(1,2,1)^T$，根据相应公式正交化再单位化得标准正交化的特征向量为

$(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T,(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T,(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T$, 所以$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，对角矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$.

15. 解：因为 A 的秩为 2，所以$|0I-A|=0$，所以 A 的另一个特征值为 0，其余步骤请参考线性代数辅导书第 68 页例 6.3.

16. 解：易知，$(\lambda_1 I-A)x=0$的一个基础解系为$(1,2,1)^T$，由$(\lambda_1 I-A)\alpha_1=0$得 a=-1, $\lambda_1=2$, 所以$A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix}$，由$|A-\lambda I|=0$得$\lambda_1=2,\lambda_2=5,\lambda_3=-4$，相对应的特征向量为$(1,2,1)^T$，$(1,-1,1)^T$，$(1,0,-1)^T$，单位化得到的特征向量为

$(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6})^T,(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T,(\frac{1}{\sqrt2},0,\frac{1}{\sqrt2})^T$, 所以$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$

17. 解：易知 B 的特征值为 1，1，-2，且 B 与 A 的特征向量关系为$x_B=c_1x_A(c_1\neq0)$，所以 B 也为实对称矩阵，利用类似 6.2.6 的方法得 B 的属于 1 的特征向量为$c_2(1,1,0)^T+c_3(-1,0,1)^T$($c_2,c_3$不全为 0)，B=$\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

18. 解：因为 A, B 均为实对称矩阵，且具有相同的特征值，则必存在正交矩阵 P, Q 使$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, 所以$A=PQ^{-1}BQP^{-1}=(Q^{-1}P)BQP^{-1}$, 所以 A 与 B 相似。

19. 解：因为实对称矩阵与对角矩阵相似，设对角对角矩阵为 P=diag($\lambda_1,\dots\lambda_n$), 则 r(A)=r(P). 所以非 0 特征值=r(P)=r(A)。例如$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，秩为 1，非零特征值个数为 0.

注：此处n重特征值视为n个特征值

20. 解：（1）思路：设$\alpha=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\dots\\\lambda_n\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{bmatrix}$, 将$A=\alpha\beta^T$展开成一个 n*n 矩阵，A 中的第 i（i=1, 2, ⋯, n）行乘以α中第 i 行以外的数，最后得到 A 中所有的行都相同，所以 r(A)=1.

（2）因为$\beta^T\alpha$是一个数，设其为 k，$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=kA$, 所以 A 的特征值为 0，k. 当$\lambda=0$时由$(\lambda I-A)x=0$, 得 Ax=0，又 r(A)=1，所以 Ax=0 有 n-1 个基础解系。

（3）由（2）可知，k=$\beta^T\alpha$时 A 的一个特征值，且$A\alpha=\alpha\beta^T\alpha=\alpha(\beta^T\alpha)=k\alpha$. 所以α为 k 对应的特征向量。

（4）当$\beta^T\alpha\neq0$时，0 为 n-1 重特征值，且对应有 n-1 个基础解系，特征值$\beta^T\alpha$对应的基础解系为α，所以几何重数等于代数重数，A 可相似对角化。

（B）

1. 证：若 A 可逆，则 A=I 相似于对角矩阵。若 r(A)=r<n, 设 A 按列分块为 A=[$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$], 则由 AA=A 得$A\alpha_j=\alpha_j(j=1,2,\dots,n)$, 故 A 的列向量中的 r 个线性无关向量是 A 对应于特征值 1 的线性无关向量，而齐次线性方程组 Ax=0 的基础解系中 n-r 个向量是 A 的对应于特征值 0 的线性无关特征向量，于是 A 有 n 个线性无关特征向量。

2. 证： $A\alpha_i=\lambda_0\alpha_i$，$i\le k$。$AP=A[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\alpha_k\ \ \alpha_{k+1}\cdots\alpha_n]=$
$[\lambda_0\alpha_1\ \ \lambda_0\alpha_2\cdots\lambda_0\alpha_k\ \ A\alpha_{k+1}\cdots A\alpha_n]$。$P^{-1}AP=$
$[\lambda_0P^{-1}\alpha_1\ \ \lambda_0P^{-1}\alpha_2\cdots\lambda_0P^{-1}\alpha_k\ \ P^{-1}A\alpha_{k+1}\cdots P^{-1}A\alpha_n]$。$i\le k$，设$P^{-1}\alpha_i=b_i$，$\alpha_i=Pb_i=\sum_{j=0}^{n}b_{ij}\alpha_j$，故$b_i=\varepsilon_i$，即单位矩阵的第$i$列。故$B=P^{-1}AP$的前$k$列为$\lambda_0\mathrm{I}$与零矩阵的拼接。

$B-\lambda_0I$的前k列全为 0，故λ_0至少是B的k重特征值。相似矩阵有相同的特征值与重数。

第六章章末习题

1.（1）8（2）1（3）2（4）5（5）2，-1（6）1（7）4（8）2

解析：（1）由$|A-\lambda I|=0$得
$\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & 2 & 2\\ 2 & 2-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2-\lambda\end{bmatrix}$=$(8-\lambda)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}$=$-\lambda^3(8-\lambda)=0$解得$\lambda=0$或$\lambda=8$，所以$\lambda=8$（矩阵应该为行列式）

（2）$A\alpha_2+2A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2$，所以$A(\alpha_2+2\alpha_1)=2\alpha_1+\alpha_2$, 所以特征值为 1，特征向量为$2\alpha_1+\alpha_2$

（3）$\alpha\beta^T=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & k\\ 1 & 0 & k\\ 1 & 0 & k\end{bmatrix}$, 且有特征值 3，所以由$|A-\lambda I|$得
$\begin{bmatrix}-2 & 0 & k\\ 1 & -3 & k\\ 1 & 0 & k-3\end{bmatrix}$=0（该处矩阵应该为行列式）, 得 k=2

（4）$|A|$=-16，而$\frac{|A|}{\lambda}$为$A^{\star}$的一个特征值，所以$A^{\star}$的特征值为−8，−8，−8，8，所以$\frac{1}{4}A^{\star}+3I$的特征值为 1, 1, 1, 5，所以$\det\left(\frac{1}{4}A^{\star}+3I\right)=5$

（5）因为相似矩阵有相同的特征值，所以对角线之和相同且行列式相同，所以 5+b-1=3, b=-1; 2a-3+2a=-5b, a=2.

（6）$\begin{vmatrix}4-\lambda & 6 & -2\\ -1 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{vmatrix}=0$解得$\lambda_1=a,\lambda_2=1,\lambda_3=2,$
当 a=1 时，r=2,　　n-r=1, 几何重数小于代数重数，所以成立
a=2 或 a 不等于 1 和 2 时，几何重数等于于代数重数，不成立，所以 a=1

（7）因为相似，所以有相同的特征值，由$|A-\lambda I|=0$得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，所以 r(A-I)=1, r(A-2I)=3, 所以 r(A-I)+r(A-2I)=4.

（8）因为为相似矩阵，所以对角线之和相同，且$\beta^T\alpha$为$\alpha\beta^T$的对角线之和，所以$\beta^T\alpha=2$.

2.（1）B（2）B（3）D（4）D（5）C

解析：（1）设$(P^{-1}AP)^Tx=\lambda x$, 则$P^TA(P^T)^{-1}x=\lambda x$, 所以$A(P^{-1})x^T=\lambda(P^T)^{-1}x$, 且$\alpha$是 A 的属于特征值$\lambda$的特征向量，所以$(P^T)^{-1}x=\alpha$, 所以$x=P^T\alpha$，故为 B

（2）$k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)$=0, 即$k_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$, 即$(k_1+k_2\lambda_1)\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$，因为$\alpha_1$，$\alpha_2$线性无关，所以$k_1$+$k_2\lambda_1=0$，$k_2\lambda_2=0$仅有 0 解，所以$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}\neq 0$，所以$\lambda_2\neq 0$。故为 B

（3）A 的特征值为-1，0. $\lambda=0$时几何重数为 1，$\lambda=-1$时几何重数为 3，所以$\lambda=-1$为 3 重根，故为 D

（4）因为特征值互不相同，且 det(A)=0, 所以有且仅有一个特征值为 0，所以 r(A)=3.

（5）设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$①，两边左乘 A 得$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$，即$(k_2+k_3)\alpha_2-k_1\alpha_1+k_3\alpha_3=0$②，②-①得$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$k_1=k_3=0$，带入①得$k_2=0$，所以 P 可逆，设 AP=Px，而 AP=$[A\alpha_1 A\alpha_2 A\alpha_3]$=$[-\alpha_1\alpha_2\alpha_2+\alpha_3]$=$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，故 x=$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，故选 C。

3. 解：$A^\star=|A|A^{-1}$，且$A^\star\alpha=\lambda\alpha$，所以$|A|\alpha=\lambda A\alpha$，所以$\frac{|A|}{\lambda}\alpha=A\alpha$，求得 a=2, b=1，$\lambda=1$或 a=2, b=-2，$\lambda=4$.

4. 解：（1）$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&4-\lambda&2\\0&2&4-\lambda\end{vmatrix}=0$得$(2-\lambda)[(4-\lambda)^2-4]=0$得$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$。当$\lambda$=2 时$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以基础解系为$(1,0,0)^T,(0,-1,1)^T$，当$\lambda$=6 时，$\begin{bmatrix}-4&1&1\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以基础解系为$(\frac{1}{2},1,1)^T$，所以$P=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

（2）与（1）类似，求得$\lambda_1=\lambda_2=2$，基础解系为$(0,3,1)^T$，$\lambda_3=-2$，基础解系为$(0,-1,1)^T$，因为几何重数小于代数重数，所以不可对角化。

5. 解：因为 A 可逆，$B=P^{-1}A^*P$，与A^*相似，所以 B 的特征值与A^*的特征值相同，且A^*特征值为$\frac{|A|}{\lambda}$，对 A，有$\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1-\lambda&0\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$=$(7-\lambda)(1-\lambda)^2$，所以$\lambda_1=\lambda_2=1$或$\lambda_3=7$，所以$|A|=7$，所以$A^*$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=7$，$\lambda_3=1$，所以 B+2I 的特征值为 9, 9, 3。

6. 解：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\8&2-\lambda&a\\0&0&6-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)[(2-\lambda)^2-16]$，解得$\lambda_1=6$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=6$. 由于 A 相似于对角阵，每个特征值的几何重数等于代数重数，当$\lambda_3=6$时由$\begin{bmatrix}-4&2&0\\8&-4&a\\0&0&0\end{bmatrix}$秩为 0 得 a=0。所以$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

7. 解：（1）因为各行元素和为 3，所以有$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以 3 为特征值，$(1,1,1)^T$为特征向量，又因为 Ax=0 有两个解且不成比例，所以 0 为 A 的二重特征值，单位化后$\xi=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})^T$，将$\alpha_1$，$\alpha_2$标准正交化后得$\beta_1=(0,-1,1)^T$，$\beta_2=(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$，单位化后$\beta_2=(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$，$\beta_1=(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$，所以$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

（2）$A=QDQ^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，$Q^T(A-\frac{3}{2}I)Q=\frac{3}{2}\mathrm{diag}(1,-1,-1)$，求两端的六次幂得$Q^T(A-\frac{3}{2}I)^6Q=(\frac{3}{2})^6I$，解得$(A-\frac{3}{2}I)^6=(\frac{3}{2})^6I$

8. 解：（1）$AQ=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_2+3\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$，所以$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$.

（2）由$|B-\lambda I|=0$得$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，当$\lambda=1$时，基础解系为$(-1,1,0)^T$，$(-2,0,1)^T$当$\lambda=4$时基础解系为$(0,1,1)^T$，所以$M=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

（3）可知，$M^{-1}Q^{-1}AQM$为对角矩阵，所以$P=QM=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=[\alpha_2-\alpha_1,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3]$.

第七章 二次曲面与二次型

第一节 曲面与空间曲线

(A)

1.（1）双曲柱面（2）椭圆柱面（3）抛物柱面（4）椭圆锥面（5）椭球面（6）旋转椭球面，由曲线$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2=1$,z=0 绕 x 轴旋转而形成；（7）双叶双曲面；（8）双曲抛物面（9）旋转单叶双曲面，由曲线$x^2-\frac{1}{4}y^2=1, z=0$绕 y 轴旋转而形成。(10)旋转双叶双曲面，由曲线$x^2-4y^2=1, z=0$绕 x 轴旋转而形成。

2.（1）圆$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-3=0\\ x-2y-2=0\end{cases}$（2）椭球面$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}+\frac{z^2}{75}=1$;(3)两相交平面 $3x^2-y^2=0$.

解析：（1）两个球面的交线$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9\\ (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=4\end{cases}$

化简得$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-3=0\\ x-2y-2=0\end{cases}$

（2）$\sqrt{(x-5)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x+5)^2+y^2+z^2}=20$

化简得$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}+\frac{z^2}{75}=1$

（3）$\sqrt{x^2+y^2}=2|x|$

化简得 $3x^2-y^2=0$

3.(1)椭球面：$\frac{(x-1)^2}{4}+(y+1)^2+\frac{z^2}{4}=1$（2）圆锥面$x^2+y^2=4z^2$

4.(1)螺旋线$\begin{cases}x=3cos2t\\ y=3sin2t\\ z=2\pi t\end{cases}$（2）平面 x=1 上的圆$\begin{cases}y^2+z^2=1\\ x=1\end{cases}$(3)过点（1，0，-1）且平行于 y 轴的直线

5. $3y^2-z^2=16$

解析：任取柱面上一点 P(x,y,z),设母线 AP 与给定曲线交于点 Q（X,Y,Z），$\frac{x-X}{1}=\frac{y-Y}{0}=\frac{z-Z}{0}\rightarrow$ $\begin{cases}X=x-t\\ Y=y\\ Z=z\end{cases}$ 带入给定曲线方程消去 t 得 $3y^2-z^2=16$

6.$[c(x-a)+az]^2+c^2y^2=b^2z^2$

解析:任取锥面上一点 P(x,y,z),设母线 AP 与准线交于点 Q(x_1,y_1,c),则母线方程为$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{c}\Longrightarrow x_1=\frac{1}{z}c(x-a)+a, y_1=\frac{1}{z}cy$,代入准线方程得锥面方程

$$[c(x-a)+az]^2+c^2y^2=b^2z^2$$

7．l_0:$\begin{cases}x=2y\\ z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$旋转面：$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

解析：投影柱面的母线的方向向量（1，-1，2），求得投影柱面的方程再与平面π联立得投影

直线的方程$\begin{cases} x = 2y \\ z = -\frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$旋转面方程为

$$x^2 + z^2 = (2y)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (y-1)^2$$

化简得$4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$

8.（1）$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1; (2) y = x^2 + z^2 (3) -\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

解析：(1）用$y^2 + z^2$代替第一个式子中的y^2(2)用$\sqrt{x^2+z^2}$代替代替第一个式子中的 z(3)用$y^2 + x^2$代替第一个式子中的y^2

9.$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$

解析：设椭球面方程为$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{c} = 1$代入点 M 求得 c=36,所以椭球面方程为$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$

10.$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{12} = x$

解析：因为椭圆抛物面的顶点为原点，对称于 Oxy 面和 Oxz 面，所以可设椭圆抛物面的方程为$\mathrm{x} = ay^2 + bz^2$,代入（1，2，0）和（$\frac{1}{3}$，-1，1）两点得方程$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{12} = x$

11. 证明：交线$\begin{cases} 2x + 12y - z + 16 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12y - z + 16 = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 2(2x + 12y + 16) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 12y - z + 16 = 0 \\ (x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 0 \end{cases}$为直线

12.（1）$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} z = 2y (0 \le y \le 2) \\ x = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} 8x^2 + (z-2)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

(2)$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2), \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = a - \frac{R^2}{2a}\left(|x| \le \frac{R}{2a}\sqrt{4a^2 - R^2}\right), \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} z = a - \frac{R^2}{2a}(|y| \le \frac{R}{2a}\sqrt{4a^2 - R^2}) \\ x = 0 \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = ay \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{h^4}z^4} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{h\sqrt{y}}{\sqrt{a}} (0 \le y \le a) \\ x = 0 \end{cases}$

解析：在 xoy 面上投影，把 z 消掉，与 z=0 联立得投影曲线方程，同理可求在 yoz 和 xoz 面上的投影曲线

(B)

1.$\mathrm{y} - 2\mathrm{z} = (x - z)^2$

解析：设 P（x,y,z）为柱面上任一点，过点 P 以$\vec{a} = (1,2,1)^T$为方向向量作柱面的母线，设母线交准线于$(x_1, y_1, 0)$,则母线的方程为$\frac{x - x_1}{1} = \frac{y - y_1}{2} = \frac{z}{1} \Longrightarrow x_1 = x - \mathrm{z}, y_1 = y - 2z$代入$y_1 = x_1^2$,得所求柱面的方程：$\mathrm{y} - 2\mathrm{z} = (x - z)^2$

2.$2x^2+2y^2-4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1;\frac{2}{3}\pi$

解析:直线 AB：1-x=y=z

所以绕 z 轴旋转面方程：$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$

化简得$2x^2+2y^2-4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1$

$$\mathrm{V}=\int_0^1\pi\frac{1+4(z-\frac{1}{2})^2}{2}dz=\frac{2}{3}\pi$$

第二节 实二次型

(A)

1.$\mathrm{f}=x^TA\mathrm{x}=[x_1\cdots x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$，所以二次型的矩阵为 A=$\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

2. $\mathrm{f}=x^TA\mathrm{x}=[x_1\cdots x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$。

f=$x^TA\mathrm{x}$是关于$x_1\cdots x_n$的二次型，但$x^TA\mathrm{x}$不是 f 的矩阵表示，因为 A 不一定为实对称矩阵,1/2 $(A+A^T)$是 f 的矩阵

3.若存在正交矩阵 P 使 AP=PB

4.相似且合同

解析：A 的特征值为 3，0，0，特征值与 D 相同，所以相似，正惯性指数都为 1，合同

5.$\alpha=\beta=0$

解析：二次型的矩阵为$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&\alpha&1\\ \alpha&1&\beta\\ 1&\beta&1\end{bmatrix}$，有标准型可知特征值为 1，2，所以$|A-I|=0;|A-2I|=0$解得$\alpha=\beta=0$

6.(1)$3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2,\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&2\\ 2&2&-1\\ -1&2&2\end{bmatrix}$

(2)$4y_1^2-y_2^2+y_3^2,\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

(3)$9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2,\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3}&0&-\frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

(4)$9y_3^2,\begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(5)$5y_1^2-5y_2^2+3y_3^2-3y_4^2,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(6)$9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2,\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

7.正交变换化成的标准形：$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$;配方法化成的标准形：$f=2z_1^2+3z_2^2+\frac{5}{3}z_3^2$.正、负惯性指数分别为 3，0.

8.a=3,b=1.P=$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

9.c=3,f=$4{y_2}^2$+$9{y_3}^2$

10.(1)$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2,x=Cy,C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(2)$y_1^2-y_2^2-4y_3^2x=Cy,$C$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11.由已知，存在可逆矩阵 C，使$B=C^TAC$.若 A 正定，则存在可逆矩阵 M，使得 A=M^TM,故$B=C^TM^TMC=(MC)^T(MC)$是正定的。同理可证当 B 正定时，A 正定。

12.二次型$x^T(\lambda A+\mu B)x$正定

13.因$A^2=AA=A^TA$(A 可逆)，故A^2是正定的；因 A=M^TM（M 可逆），故$A^{-1}=M^{-1}M$是正定的；因 det(A)>0,故$A^*=\det(A)A^{-1}$是正定的。

14.当 A 正定时，有$\varepsilon_i^TA\varepsilon_i=a_{ii}>0(i=1,\cdots,n)$,其中$\varepsilon_i$为$I_n$的第 i 个列向量

15.（1）否（2）正定（3）正定（4）正定

解析：(1)$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$，所以不正定

（2）（3）（4）的前 n 阶主子式均大于零

16（1）$\lambda > 2$; (2)$|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$

17.k 阶顺序主子式$\Delta_k = (\mathrm{k}+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k > 0(k = 1 \cdots n)$

18.若 A 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$,则 A+tI 的特征值为$\lambda_1 + \mathrm{t}, \lambda_2 + t, \cdots, \lambda_n + t$

19.$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}c_1c_1 & \cdots & a_{1n}c_1c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}c_nc_1 & \cdots & a_{nn}c_nc_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix}$
$= C^TAC$　且 C 可逆
所以 A 与 B 合同，而合同矩阵具有相同的正定性，所以 B 正定。

20.　　　$\forall \mathrm{x} \in R^n, x \neq 0, x^TBx = x^T(\lambda I + A^TA)x = \lambda x^Tx + x^TA^TAx = \lambda x^Tx + (Ax)^T(Ax) = \lambda\|x\|^2 + \|Ax\|^2$
当$\lambda > 0$时，$x^TBx > 0$,B 对应的二次型是正定二次型，所以 B 是正定矩阵。

21.$1 + a_1a_2a_3 \neq 0$
解析：令$\begin{cases} y_1 = x_1 + a_1x_2 \\ y_2 = x_2 + a_2x_3 \\ y_3 = x_3 + a_3x_1 \end{cases}$　则$\mathrm{f} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$此二次型是正定二次型。要使得原来的 f 是正定二次型，只需所用的变换是可逆变换
而$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,所以$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a_1a_2a_3 \neq 0$

22.(1)设$\mathrm{x} = \mathrm{e}_1 = (1,0,\cdots,0)^T, x^TAx = (1,\cdots,0) \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{11} = 0$
令$\mathrm{x} = e_i$则$a_{ii} = 0(i = 2, \cdots, n)$. 令 $\mathrm{x} = e_1 + e_2$, 则$a_{12} = 0$
令$\mathrm{x} = e_i + e_j(i \neq j)$,则$a_{ij} = 0$
(2)对$\forall \mathrm{x} \in R^n, x^T(A - B)x = 0$,则 A-B=0 所以 A=B

23.A 的所有特征值都小于零；x^TAx的负惯性指数为 n；A 的奇数阶顺序主子式都小于零，且偶数阶顺序主子式都大于零；存在可逆矩阵 M,使得 A=$-M^TM$

24.（1）$x'^2 + 2y'^2 + 4z'^2 = 1(2)y'^2 + 3z'^2 = x'^2(3)6y'^2 - 2z'^2 = 1(4)x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1$

25．$\frac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}$
解析：用正交变换将其化为标准型再利用公式

26.$\frac{4\pi}{3\sqrt{\det(A)}}$. (*A为f的矩阵*)
解析：用正交变换将其化为标准型再利用公式。

(B)

1.(1)f 的矩阵为$\frac{1}{\det(A)}A^* = A^{-1}$

(2)因为$(A^{-1})^T A A^{-1} = (A^T)^{-1} = A^{-1}$,所以 A 与$A^{-1}$合同，于是 g(x)与 f(x)有着相同的规范形

2.证明 :必要性 :设B^TAB正定, 则$\forall x \in R^n, x \neq 0, x^TB^TABx > 0$, 即$(Bx)^TA(Bx) > 0$. 由于$A$正定, 所以 $Bx \neq 0$.故 r(B)=n

充分性 $(B^TAB)^T = B^TAB$, 所以 B^TAB 是实对称矩阵。设 r(B)=n, 则$\forall x \in R^n, x \neq 0, Bx \neq 0, x^TB^TABx = (Bx)^TA(Bx) > 0$, B^TAB对应的是正定二次型，所以B^TAB正定。

3.设 A 正定，则存在正交矩阵 Q，使得$Q^TAQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$,且$\lambda_1$，$\cdots \lambda_n$都大于零。

A=Q $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} Q^T = Q \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^T$，其中 S 与 $\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$合同，所以也是正定矩阵

4.（1）设 f(x)=x^TAx的秩为 r，则 f 可经可逆线性变换 x=Cy 化成标准形$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots d_ry_r^2 (d_i \neq 0, i = 1, \cdots, r)$.当 f 的正惯性指数与秩相等时，显然有 f(x)=f(Cy)≥0;当 f 是半正定时，若正惯性指数小于 r,则存在某个$d_i < 0$, 令$y = \varepsilon_i$,则 f($C\varepsilon_i$)=d_i<0,与 f(x)≥ 0矛盾

（2）利用（1）。若特征值为非负，命题二次型是半正定与命题正惯性指数等于秩等价。

注：ε_i为单位矩阵第 i 列。

5. 各阶顺序主子式非负。f 不是半正定的，因为 f(0,1,0)=-1<0

6.该二次型对应的矩阵 A 为$nI - ones(n,n)$，ones（n,n）为 n 行 n 列全为 1 的矩阵，即$A = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$。特征式为$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} n-1-\lambda & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1-\lambda & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n-1-\lambda & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & n-1-\lambda & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & n-1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & n-\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-\lambda \end{vmatrix}$。若$\lambda = n$，则 $r(A - \lambda I) = 1$，n 为 A 特征值，重数至少为 n-1。若$\lambda = 0$，.$|A - \lambda I| = 0$，0 为 A 特征值。故 A 有 1 重特征值 0，n-1 重特征值 n，为半正定矩阵。

7.设x_r为任一 r 维非零向量（1≤ r ≤ n）,则 n 维向量 x=$(x_r^T, 0)^T \neq 0$,于是有二次型$x^TAx = x_r^TA_rx_r$正定，其中A_r卫 A 的左上角 r 阶主子矩阵，再利用推论 7.2.2

8（1）将 A 分块为 A=$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{bmatrix}$,给上式两端左乘$\begin{bmatrix} I_{n-1} & O \\ -\alpha^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}$,再取行列式

（2）利用（1）的结果

9.令 D=$\{x\in R^n|\|x\|=1\}$,则 D 为有界闭集, 且 f(x)在 D 上连续.$\forall x\in D$,由 (7.2.15) 式得$x^TAx\geq\lambda_1$, 设e_1为 A 的属于λ_1的单位特征向量, 则$e_1^TAe_1=\lambda_1e_1^Te_1=\lambda_1$,故$\lambda_1$为 f(x)在 D 上的最小值。同理知$\lambda_2$为 f(x)在 D 上的最大值。再利用有界闭集上连续函数的介值定理

第七章习题

1.填空题

（1）2

解析：二次型对应的实对称矩阵为：$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$；矩阵的秩即为二次型的秩，由于$\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\neq0$，由矩阵的秩的定义得，二次型的矩阵的秩为 2，所以二次型的秩为 2。

（2）0

解析：二次型对应的实对称矩阵为：$\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$;由于该 3 阶矩阵的秩为 2，所以$\begin{vmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2[(1-a)^2-(1+a)^2]=-8a=0,$ 所以 a=0, 回代得二次型矩阵$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，与其等价的阶梯型矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$；所以验证了 a=0 时二次型的秩为 2。

（3）双曲线

解析：曲线方程可看作二次型，其对应的二次型矩阵即为矩阵 A,由定理 7.2.1 可知，总存在正交变换可将该二次型化为标准型$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=1$,$\lambda_1,\lambda_2$为矩阵 A 的特征值, 又由于$\lambda_1\lambda_2<0$，所以该曲线为双曲线，正交变换为旋转变换，不改变曲线的形状和大小，所以原曲线也为双曲线。

（4）$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

解析：若 A 是正交矩阵，则 A 的特征值的模是 1；若 A 又是正定矩阵，则 A 是实对称矩阵，特征值都是 1。所以二次型x^TAx经正交变换 x=Py 化成的标准形为
y^Ty。

（5）（-2，1）

解析：f 对应的矩阵 A=$\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$.A 正定$\Leftrightarrow$A 的各阶顺序主子式都大于零。即$1>0,4-t^2>0,t^2+t-2<0$,所以-2<$t$<1.

2.选择题

（1）B

解析：$\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$,解得$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$. A 是实对称矩阵，所以这两个矩阵不相似，但是合同。

（2）A

解析：$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -3\\ 1 & 1-\lambda & -3\\ -3 & -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$，解得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=8$，$\lambda_3=0$.这两个矩阵相似且合同。

（3）D

解析：$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1-\lambda)=0$

解得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=3$。

只要看四个选项中哪个矩阵的特征值是一个正一个负。

（4）B

解析：f 对应 A=$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & a & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.标准形对应 D=$\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$,则 A 与 D 相似$\Rightarrow$

$\begin{cases}1+a+1=5+b-1\\ a+8+8-4a-4-4=-5b\end{cases}$

解得 a=1,b=-1 应选 B

3.(1)a,a-2,a+1(2)a=2

解析：(1)f 的矩阵 A=$\begin{bmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & -1\\ 1 & -1 & a-1\end{bmatrix}$.$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}a-\lambda & 0 & 1\\ 0 & a-\lambda & -1\\ 1 & -1 & a-1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(\mathrm{a}-\lambda)(a+1-\lambda)(a-2-\lambda)=0$

解得$\lambda_1=a-2$，$\lambda_2=a$，$\lambda_3=a+1$

(2)若 f 的标准形为$y_1^2+y_2^2$,则 A 有一个零特征值，其余特征值大于零，因此 a=2.

4.(1)a=1,b=-2;(2)x=Py,P=$\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

解析：(1) f 的矩阵 A=$\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}$,$a=1,-4\mathrm{a}-2b^2=-12,b=-2$

(2)A=$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix}$,解得$\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$.

对$\lambda_1=\lambda_2=2$，由$(\mathrm{A}-2\mathrm{I})\mathrm{x}=0$得$\xi_1=(0，1，0)^T$，

$\xi_2=$（2，0，-1）^{T}，

对$\lambda_3=-3$，由（A+3I）x=0 得$\xi_3=(1,0,2)^T$.

令 Q=($\xi_1,\frac{1}{\sqrt5}\xi_2,\frac{1}{\sqrt5}\xi_3$),则 x=Qy 为正交变换，f=$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

5.解：f 对应的矩阵 A 的特征值为 1，1，0，且 0 对应的特征向量为e_3.而 1 对应的特征向量与e_3正交。求解$e_3^Tx=0$得$\xi_1=(1，0，-1)^T$,$\xi_2=(0,1,0)^T$,单位化得$e_1=\frac{1}{\sqrt2}\xi_1,e_2=\xi_2$,令$\mathrm{Q}=(e_1,e_2,e_3)$,则 x=Qy 是正交变换。$Q^TAQ=D=diag(1,1,0)\Rightarrow A=QDQ^T=e_1{e_1}^T+e_2e_2^T=$
$\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$

$A+I=Q(D+I)Q^T$,即 A+I 与 D+I=diag(2,2,1)合同，所以 A+I 正定。

6.证明：必要性：设A^TA正定, A^TA的特征值全部大于 0, 所以 $\mathrm{r}(A^TA)=\mathrm{n},\mathrm{n}=\mathrm{r}(A^TA)\le r(A)\le n$,故$\mathrm{r(A)=n}$.

充分性：$(A^TA)^T=A^TA$,所以A^TA是实对称矩阵，设 r(A)=n,则$\forall x\in R^n, x\neq 0, Ax\neq 0, x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0, A^TA$对应的是正定二次型，所以$\mathrm{A^TA}$ 正定。

7.（x-z）(y+z)=4

解析：设柱面上任一点为（x,y,z）,通过该点的母线与准线的交点为（X，Y，Z)，由母线平行于向量（1，−1，1）^{T}可得

$\begin{cases}x=X+t\\y=Y-t\\z=Z+t\end{cases}$,整理得$\begin{cases}X=x-t\\Y=y+t\\Z=z-t\end{cases}$由于（X，Y，Z）满足$\begin{cases}xy=4\\z=0\end{cases}$,代入消掉 t 得柱面方程为（x-z）(y+z)=4

8.（1）$S_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1, S_2:(x-4)^2=4y^2+4z^2$

解析：(1) $S_1:\frac{x^2}{4}+\frac{1}{3}(y^2+z^2)=1$；切点为（1, $\pm\frac{3}{2}$)，切线$\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1,\Longrightarrow S_2:\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^2=\frac{1}{4}(y^2+z^2)$,即$(x-4)^2=4y^2+4z^2$

（2）所求体积 V 等于一个底圆半径为$\frac{3}{2}$，高为 3 的圆锥体积V_1(=$\frac{9}{4}\pi$)与部分椭球体积V_2之差，其中$V_2=\frac{3}{4}\pi\int_1^2(4-x^2)dx=\frac{5}{4}\pi$,故所求 V=π。

第八章 线性变换

第一节 线性变换及其运算

(A)

1.（1）（2）是，（3）（4）不是。
解析：（1）（2）根据线性映射的定义易得满足$\mathrm{T}(\alpha+\beta)=\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{T}(\beta)$及$\mathrm{T}(\mathrm{k}\alpha)=\mathrm{kT}(\alpha)$。（3）不满足$\mathrm{T}(0)=0$，（4）中$\mathrm{T}(\mathrm{kx})=k^{2n}T(x)$, 不满足$\mathrm{T}(\mathrm{k}\alpha)=\mathrm{kT}(\alpha)$。

2.
解析：若T是线性变换，则 T 满足$\mathrm{T}(\alpha+\beta)=\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{T}(\beta)$及$\mathrm{T}(\mathrm{k}\alpha)=\mathrm{kT}(\alpha)$。首先，可以设$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，$\beta=b_1e_1+b_2e_2+\cdots+b_ne_n$。根据正交向量基的性质有$<\alpha,\mathrm{e_i}>=<a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n,\mathrm{e_i}>=a_i$，同理有$<\beta,\mathrm{e_i}>=b_i$;，对于$\alpha+\beta$，有$<\alpha+\beta,\mathrm{e_i}>=a_i+b_i$，由此有$\mathrm{T}(\alpha+\beta)=\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{T}(\beta)$。
其次，$<k\alpha,\mathrm{e_i}>=<ka_1e_1+ka_2e_2+\cdots+ka_ne_n,\mathrm{e_i}>=ka_i$，因此有$\mathrm{T}(\mathrm{k}\alpha)=\mathrm{kT}(\alpha)$。综上，T满足线性映射定义，T是线性变换。

3.
解析：根据向量外积的性质，$\mathrm{T}(\alpha+\beta)=\alpha_0\times\alpha+\alpha_0\times\beta=\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{T}(\beta)$; $\mathrm{T}(\mathrm{k}\alpha)=\alpha_0\times(\mathrm{k}\alpha)=\mathrm{k}\alpha_0\times\alpha=\mathrm{kT}(\alpha)$。因此T是$\mathrm{R}^3$上的线性算子。

4.
解析：充分性：$\because \mathrm{T}(\alpha)$是零变换$\therefore \forall\ \alpha\in\mathrm{V}\quad \mathrm{T}(\alpha)=0\quad \therefore \mathrm{T}(\mathrm{e_i})=0$,。
必要性：$\because \mathrm{e_1e_2}\ldots e_n$为一组基向量，$\therefore\forall\ \alpha\in\mathrm{V}\quad \alpha=\mathrm{a_1}e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n\quad T(\alpha)=T(\mathrm{a_1}e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_nT(e_n)$。 又$\mathrm{T}(\mathrm{e_i})=0\ \therefore\mathrm{T}(\alpha)=0$。

5.
解析：充分性：$\because$对于T有$\mathrm{T}(\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots,\mathrm{x_n})^{\mathrm{T}}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$，$\therefore \mathrm{T}(\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots,\mathrm{x_n})^{\mathrm{T}}+T(y_1+y_2+\cdots+y_n)^T=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n=a_1(x_1+y_1)+a_2(x_2+y_2)+\cdots+a_n(x_n+y_n)=T((x_1,x_2,\cdots,x_n)^T+(y_1+y_2+\cdots+y_n)^T)$;
$\mathrm{kT}(\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots,\mathrm{x_n})^{\mathrm{T}}=ka_1x_1+ka_2x_2+\cdots+ka_nx_n=T(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)^T$。$\therefore \mathrm{T}\in\mathrm{L}(\mathrm{R^n},\mathrm{R})$。
必要性：设$\{\mathrm{e_1},\mathrm{e_2},\cdots,\mathrm{e_n}\}$是$\mathrm{R^n}$的基本单位向量组，且满足$\mathrm{T}(\mathrm{e_i})=\mathrm{a_i}$，则对于任意的$\alpha=(\mathrm{x_1},\mathrm{x_2},\cdots,\mathrm{x_n})^{\mathrm{T}}$, 有$\alpha=\mathrm{x_1}e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，根据线性变换的性质有$\mathrm{T}(\alpha)=\mathrm{x_1}T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$。

6. $(-10,-7,6)^{\mathrm{T}}$
解析：$\mathrm{T}(2\mathrm{e_1}-3\mathrm{e_2}+4\mathrm{e_3})^{\mathrm{T}}=2T(e_1)-3T(e_2)+4T(e_3)=2(1,-1,2)^T-3(0,3,2)^T+4(-3,1,2)^T=(-10,-7,6)^T$

7. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}y\\ \sqrt{3}+y\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$，$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}x-y\\ x-\sqrt{3}y\end{bmatrix}$
解析：将习题 1（2）中的公式代入计算即可。

8. (1) α_1,α_2　(2) ξ_1　(3) ker(T)的基为$(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$, R(T)的基为$(4,2,6)^{\mathrm{T}},(1,1,0)^T,(-3,-4,9)^T$。T的零度为 1，的秩为 3。
解析：(1) 即证明$\exists \mathrm{x_1},x_2,x_3,x_4\quad T(\mathrm{x_1},x_2,x_3,x_4)^T=\alpha$。则设辅助矩阵$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}4&1&-2&-3\\2&1&1&-4\\6&0&-9&9\end{bmatrix}$,

则有$\mathrm{Ax}=\alpha$, 计算其矩阵矩阵与增广矩阵的秩，有$\mathrm{r}(\alpha_1)=\mathrm{r}(\overline{\alpha_1})=3, \mathrm{r}(\alpha_2)=\mathrm{r}(\overline{\alpha_2})=3$, 因此$\alpha_1, \alpha_2 \epsilon R(T)$。

（2）将ξ_1, ξ_2直接带入线性变换公式中，发现$\mathrm{T}(\xi_1)=0, \mathrm{T}(\xi_2)\neq 0$，因此$\xi_1 \in \ker(T), \xi_2 \notin \ker(T)$。

（3）ker(T)的解为$\mathrm{Ax}=0$的基解，由此解该齐次线性方程组得其解为$(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$, ker(T)的基为$(3,-8,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{nullity(T)}=0$。

R(T)的基与 A 的列空间同构，由此做列变换得：

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -9 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 6 & 0 & -3 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

因此可得 R(T)的基为$(4,2,6)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^T, (-3,-4,9)^T$，$\mathrm{rank(T)}=3$。

9.（1）$2\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}=0$ （2）$\frac{x}{-14}=\frac{y}{19}=\frac{z}{11}$

解析：（1）设$\alpha=(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0, \mathrm{z}_0)^{\mathrm{T}}$，有$\mathrm{Ax}=\begin{bmatrix}x_0-y_0+3z_0\\ 5x_0+6y_0-4z_0\\ 7x_0+4y_0+2z_0\end{bmatrix}$，设$\alpha_1=(1,-1,3)^T, \alpha_2=(5,6,-4)^T, \alpha_3=(7,4,2)^T k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$, 解得$\mathrm{k}_1=2, k_2=1, k_3=-1$, 因此R(T)是过原点的平面$2\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}=0$。

（2）令$\mathrm{Ax}=0$，有$\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -4\\ 7 & 4 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 11 & -19\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 可得ker(T)是过原点的直线$\frac{x}{-14}=\frac{y}{19}=\frac{z}{11}$。

10.

解析：直接带入可得$\mathrm{T}_1 T_2(x,y)^T=(x,0)^T, T_2T_1(x,y)^T=(0,y)^T, \mathrm{T}_1T_2\neq T_2T_1$。

11.（1）否（2）是

解析：（1）令$\mathrm{x}_1=(0,0)^T, x_2=(2,-1)^T$, 有$\mathrm{Ax}_1=Ax_2=(0,0,0)^T$, 故T不为单射。

（2）令$\mathrm{Ax}=0$，易得解为零解（列向量线性无关），因此$\ker(\mathrm{T})=\{0\}$, 由定理 8.1.9 得T为单射。

12.

解析：线性变换的和：$(\mathrm{T}+\mathrm{S})(\alpha+\beta)=\mathrm{T}(\alpha+\beta)+\mathrm{S}(\alpha+\beta)=\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{T}(\beta)+\mathrm{S}(\alpha)+\mathrm{S}(\beta)=\big(\mathrm{T}(\alpha)+\mathrm{S}(\alpha)\big)+\big(\mathrm{T}(\beta)+\mathrm{S}(\beta)\big)=(\mathrm{T}+\mathrm{S})(\alpha)+(\mathrm{T}+\mathrm{S})(\beta)(T+S)(k\alpha)=T(k\alpha)+S(k\alpha)=kT(\alpha)+kS(\alpha)=k(T+S)(\alpha)$

线性变换的数量乘积：$(\mathrm{kA})(\alpha+\beta)=\mathrm{kA}(\alpha+\beta)=\mathrm{kA}(\alpha)+\mathrm{kA}(\beta)=(\mathrm{kA})(\alpha)+(\mathrm{kA})\beta$ $(\mathrm{kA})(\mathrm{m}\alpha)=\mathrm{kA}(\mathrm{m}\alpha)=\mathrm{kmA}(\alpha)=\mathrm{m}((\mathrm{kA})(\alpha))$

13.

解析：$(\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2)(\alpha+\beta)=\mathrm{T}_1(\alpha+\beta)-\mathrm{T}_2(\alpha+\beta)=T_1(\alpha)+T_1(\beta)-T_2(\alpha)-T_2(\beta)=\big(T_1(\alpha)-T_2(\alpha)\big)+\big(T_1(\beta)-T_2(\beta)\big)=(T_1-T_2)(\alpha)+(T_1-T_2)(\beta)$

$(\mathrm{T}_1-T_2)(k\alpha)=T_1(k\alpha)-T_2(k\alpha)=kT_1(\alpha)-kT_2(\alpha)=k((T_1-T_2)(\alpha)$

因此$\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2$为线性变换。

14.

解析：（1）设$\mathrm{T}_3(\alpha)=\beta$，则$(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)\mathrm{T}_3(\alpha)=(T_1+T_2)(\beta)=T_1(\beta)+T_2(\beta)=T_1\big(T_3(\alpha)\big)+T_2\big(T_3(\alpha)\big)=T_1T_3(\alpha)+T_2T_3(\alpha)$，故得证。

（2）$\because \mathrm{T}_1T_2=T_2T_1$且$\mathrm{T}_1$可逆，$\therefore \mathrm{T}_2=\mathrm{T}_1^{-1}T_1T_2=T_1^{-1}T_2T_1$ $\therefore T_2T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2T_1T_1^{-1}=T_1^{-1}T_2$，

故得证。

(B)

1.
解析：$\mathrm{rank}(T_1T_2)=\dim\{(T_1T_2(V_1))\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_1(V_2)\}=\mathrm{rank}(T_1)$，同理有：$\mathrm{rank}(T_1T_2)=\dim\{(T_1T_2(V_1))\}=\dim\{T_1(T_2(V_1))\}\le\dim\{T_2(V_1)\}=\mathrm{rank}(T_2)$，故得证。

2.
解析：$\forall\alpha\in V$，有$\alpha=[\alpha-T(\alpha)]+T(\alpha),\because T(\alpha-T(\alpha))=T(\alpha)-T^2(\alpha)=T(\alpha)-T(\alpha)=0,\therefore \alpha-T(\alpha)\in\ker(T)$，又$T(\alpha)\in R(T),\therefore V=\ker(T)+R(T)$，对于$\forall\beta\in R(T)$，有$\alpha\in V$，使得$T(\alpha)=\beta,\therefore T(\beta)=T^2(\alpha)=T(\alpha)=\beta$，由此有$\ker(T)\cap R(T)=\{0\}$

第二节 线性变换的矩阵表示

(A)

1. $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

解析：$f(x)=1\quad\therefore\quad T(f(x))=f(x+1)-f(x)=1-1=0$，对应列向量$(0,0,0,0)^T$

$f(x)=x\qquad\therefore T(f(x))=f(x+1)-f(x)=(x+1)-x=1$，对应列向量$(1,0,0,0)^T$

$f(x)=x^2\qquad\therefore T(f(x))=f(x+1)-f(x)=(x+1)^2-x^2=1+2x$，对应列向量$(1,2,0,0)^T$

$f(x)=x^3\qquad\therefore T(f(x))=f(x+1)-f(x)=(x+1)^3-x^3=1+3x+3x^2$，对应列向量$(1,3,3,0)^T$

2.
解析：设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是R^n的一组基本单位向量组，有$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$，并设$T(e_i)=(\alpha_{1i},\alpha_{2i},\cdots,\alpha_{mi})^T$，有$T(x)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_nT(e_n)=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=Ax$，故存在矩阵$A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{bmatrix}$满足要求。

3.（1）$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&-3\end{bmatrix}$　（2）见解析

解析：（1）$F[x]_2=1$时，有$T(1)=1$，对应列向量$(1,0)^T$。$F[x]_2=x$时，有$T(x)=1-2x$，对应列向量$(1,-2)^T$。$F[x]_2=x^2$时，有$T(x^2)=-3x$，对应列向量$(0,-3)^T$。

（2）$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$，故$f(x)$在基 B 下的坐标为$(a_0,a_1,a_2)^T$，$T(f(x))$在基 B 下的坐标为$(a_0+a_1,-2a_1-3a_2)$。故$Ax=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0+a_1\\-2a_1-3a_2\end{bmatrix}$，因此$y=Ax$

4. $(1,1,-1,0)^T(25,-50,-5)^T$

解析：设：$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，有$\begin{bmatrix}0&2&1&6\\1&1&4&9\\1&-1&-1&4\\1&-1&2&2\end{bmatrix}k=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\-2\end{bmatrix}$，解得$k_1=1\quad k_2=$

1　$k_3=-1$　$k_4=0$, 因此α的坐标为$(1,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$。又$A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\-10\end{bmatrix}$, $\therefore \mathrm{T}(\alpha)=2\beta_1+5\beta_2-10\beta_3=(25,-50,-5)^T$

5. 不是

解析：此时对于T对应的矩阵$A_{m\times n}$满足$m<n$，此时r(A)必小于n，则方程$Ax=0$必存在非零解，故T不是单射。

6.

解析：T可逆⇌ T对应的矩阵A为可逆矩阵⇌ A满秩⇌ A的列向量线性无关。又∵ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是线性空间V的基，故A的列向量线性无关⇌ $\mathrm{T}(\alpha_1),\cdots,\mathrm{T}(\alpha_n)$线性无关，得证。

7. 见解析

解析：T对应的矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，S对应的矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$。

故有TS对应矩阵为$AB=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\mathrm{TS}(x)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}x$。

ST对应矩阵为$BA=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\mathrm{ST}(x)=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}x$。

T^2对应矩阵为$\mathrm{T}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$，$\mathrm{T}^2(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}x$。

S + T对应矩阵为$A+B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$，$(S+T)(x)=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}x$。

2T对应矩阵为$2A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，$(2\mathrm{T})(x)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}x$。

T^{-1}对应矩阵为$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，$\mathrm{T}^{-1}(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}x$。

8. $\begin{bmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$

解析：有基$\{x^2,x,1\}$向基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$的过渡矩阵$C=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，故T在基$\{x^2,x^2+x,x^2+x+1\}$下的矩阵为$D=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}2&4&4\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{bmatrix}$。

9. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}$

解析：有过渡矩阵 $C=\begin{bmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-1&-3&3\\2&6&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$，故在$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$下的矩阵为：$D=$

$C^{-1}AC=.\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5&20&-20\\-4&-5&-2\\27&18&24\end{bmatrix}$。

10. $\begin{bmatrix}1&0&10\\0&2&-3\\0&0&3\end{bmatrix}$

解析：有过渡矩阵$C=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&4&1\\1&2&2\end{bmatrix}$，故在基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$下的矩阵为：$D=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1&0&10\\0&2&-3\\0&0&3\end{bmatrix}$。

注：本问此处书上印刷错误，答案对应的应为$\beta_2=3e_1+4e_2+2e_3$，请各位同学注意。

(B)

1.

解析：若A是T在某个基下的矩阵，则 a 对于任意可逆方阵D，有$D^{-1}AD$也是T在某个基下的矩阵。由题意有$D^{-1}AD=A$，$AD=DA$，特殊地，令$D=E_{ij}$(i 行 j 列元素为 1，其他元素为 0)，$AE_{ij}=E_{ij}A$，故A为数量矩阵，T为数乘变换。

2.

解析：设 $\alpha=[e_1\cdots e_n]x$，则 $T\alpha=\lambda_0\alpha\rightleftharpoons T[e_1\cdots e_n]x=\lambda_0[e_1\cdots e_n]x\rightleftharpoons[e_1\cdots e_n]Ax=[e_1\cdots e_n]\lambda_0x\rightleftharpoons Ax=\lambda x$，故得证。

3.

解析：由定理 8.2.5 可得若T在某个基下的矩阵为相似矩阵D，则A与D相似。又若A与D相似，设$D=C^{-1}AC$，由于C满秩，此时A中列向量经过变换后依然线性无关，则此时 D 也对应T在某个基下的矩阵，由此得证，且$[\beta_1\cdots\beta_n]=[\alpha_1\cdots\alpha_n]C$

4. （1）$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$； $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$； $\beta_3=\alpha_2+3\beta_3$；diag(1,2,2)

（2）不存在

解析：（1）计算$A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$的特征值有$\begin{vmatrix}\lambda+1&-3&1\\3&\lambda-5&1\\3&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\3&\lambda-5&1\\0&2-\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$，故特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，$\lambda=1$对应的特征向量为$(1,1,1)^T$，$\lambda=2$对应的特征向量为$(1,1,0)^T,(0,1,3)^T$，故$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$； $\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$； $\beta_3=\alpha_2+3\beta_3$，对角矩阵为diag(1,2,2)

（2）计算$B=\begin{bmatrix}6&-5&-3\\3&-2&-2\\2&-2&0\end{bmatrix}$的特征值有$\begin{vmatrix}\lambda-6&5&3\\-3&\lambda+2&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，但$\lambda=2$时对应的特征向量有且仅有$(2,1,1)^T$一个，因此B不与对角矩阵相似，故不存在。

5.

解析：(1) ⇒ (2)：若T是正交变换，有$<T(\alpha),T(\alpha)>=<\alpha,\alpha>$，两边开方即有$||T(\alpha)||=||\alpha||$。

(2) ⇒ (1)：若T是保长度的，则有$<T(\alpha),T(\alpha)>=<\alpha,\alpha>$，$<T(\beta),T(\beta)>=<\beta,\beta>$，$<T(\alpha+\beta),T(\alpha+\beta)>=<\alpha+\beta,\alpha+\beta>$。将最后一个等式展开有$<T(\alpha),T(\alpha)>+2<T(\alpha),T(\beta)>+<T(\beta),T(\beta)>=<\alpha,\alpha>+2<\alpha,\beta>+<\beta,\beta>$，得$<T(\alpha),T(\beta)>=<\alpha,\beta>$。

$(1)\Rightarrow(3)$：若$\mathrm{e}_1,\cdots,e_n$是一组标准正交基，则$<\mathrm{e_i},\mathrm{e_j}>=\begin{cases}1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$，若T是正交变换，则有$<\mathrm{T(e_i)},\mathrm{T(e_j)}>=\begin{cases}1 & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$，也就是说$\mathrm{T(e_1)},\cdots,T(e_n)$也是一组标准正交基。

$(3)\Rightarrow(1)$：若$\mathrm{T(e_1)},\cdots,T(e_n)$也是标准正交基。则根据$\alpha=\mathrm{x}_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n;\beta=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$ 与 $\mathrm{T}(\alpha)=\mathrm{x}_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\cdots+x_nT(e_n);T(\beta)=y_1T(e_1)+y_2T(e_2)+\cdots+y_nT(e_n)$可得$<\alpha,\beta>=\mathrm{x}_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=<T(\alpha),\mathrm{T}(\beta)>$，故T是正交变换。

$(3)\Leftrightarrow(4)$：设T在标准正交基下的矩阵为A，若$\mathrm{T(e_1)},\cdots,T(e_n)$也是标准正交基，那么A即可看做$\mathrm{e}_1,\cdots,e_n$到$\mathrm{T(e_1)},\cdots,T(e_n)$的过渡矩阵，因而是正交矩阵。反之亦然。

第八章习题

1.（1）值域是由$(1,2,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^T$组成的向量空间，$\mathrm{rank(T)}=2$，$\ker(\mathrm{T})=\{0\}$，$\mathrm{nullity(T)}=0$。（2）T是单射，不是满射。（3）$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

解析：（1）由已知得$\mathrm{T(x)}=\mathrm{x}_1(1,1,0)^T+x_2(1,0,1)^T+(x_1+x_2)(0,1,1)^T=x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，故值域是由$(1,2,1)^{\mathrm{T}},(1,1,2)^T$组成的向量空间，$\mathrm{rank(T)}=2$。令$\mathrm{T(x)}=0$可得$\mathrm{x}_1=0,x_2=0$，故$\ker(\mathrm{T})=\{0\}$，$\mathrm{nullity(T)}=0$。

（2）$\because\ker(\mathrm{T})=\{0\},\therefore$ T为单射。$\because\mathrm{rank(T)}=2<3,\therefore T$不为满射。

（3）$\mathrm{T}(\varepsilon_1)=(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\alpha_1+\alpha_3$，对应列向$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\mathrm{T}(\varepsilon_2)=(1,1,2)^{\mathrm{T}}=\alpha_2+\alpha_3$，对应列向$(0,1,1)^{\mathrm{T}}$。矩阵为$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

1.（1）$\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ （3）$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ （4）$\mathrm{a}_1x+2^na_2(1+x^2)$

解析：（1）$\mathrm{f(x)}=1$，$\mathrm{T}\big(\mathrm{f(x)}\big)=0$，对应列向量$(0,0,0)^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}$，$\mathrm{T}\big(\mathrm{f(x)}\big)=\mathrm{x}$，对应列向量$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^2,T\big(f(x)\big)=2x^2+2$，对应列向量$(2,0,2)^{\mathrm{T}}$，故矩阵为$\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$。

（2）$\mathrm{f(x)}=1$，$\mathrm{T}\big(\mathrm{f(x)}\big)=0$，对应列向量$(0,0,0)^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}$，$\mathrm{T}\big(\mathrm{f(x)}\big)=\mathrm{x}$，对应列向量$(0,1,0)^{\mathrm{T}}$；$\mathrm{f(x)}=\mathrm{x}^2+1,T\big(f(x)\big)=2x^2+2$，对应列向量$(0,0,2)^{\mathrm{T}}$，故矩阵为$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$。

（3）已知S为基$\{1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2\}$到基$\{1,\mathrm{x},\mathrm{x}^2+1\}$的过渡矩阵，可得$\mathrm{S}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

（4）有$\mathrm{T^n}\big(f(x)\big)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\a_1\\2^na_2\end{bmatrix}$，故$\mathrm{T^n}\big(f(x)\big)=a_1x+2^na_2(1+x^2)$

3.（1）$\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$ （2）$(11,6,-7)^{\mathrm{T}}$

解析：（1）由已知得基B到基B′的过渡矩阵为$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$，故对应的

矩阵为$D=C^{-1}AC=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}$。

（2）$T(1,2,-5)^T=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\6\\-7\end{bmatrix}$。

4.（1）可逆，$T^{-1}=[e_1\quad e_2\quad e_3]\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{bmatrix}$（2）$e_2+e_3,e_1-2e_2,e_1-2e_3$，矩阵为$diag(1,5,5)$

解析：（1）$\because \det(A)=25\neq 0$，故A可逆，T可逆，又$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{bmatrix}$，则$T^{-1}=[e_1\quad e_2\quad e_3]\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&0&0\\4&3&2\\4&2&3\end{bmatrix}$。

（2）计算A的特征值有$\begin{vmatrix}\lambda-5&0&0\\-4&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)^2$，当$\lambda=1$时对应的特征向量是$(0,1,1)^T$，当$\lambda=5$时对应的特征向量分别为$(1,-2,0)^T,(1,0,-2)^T$。则有基$e_2+e_3,e_1-2e_2,e_1-2e_3$，此时的矩阵为$diag(1,5,5)$

5. 见解析

解析：（1）有$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&2&2\end{bmatrix}=A$，故$T^2=T$。

（2）$\because$ R(T)与A的解空间同构，故将A分块为$[x_1x_2x_3]$，可知A的前两列为A的列空间的基，R(T)对应的基为e_1与$-e_2+2e_3$。令$Ax=0$，有解$(0,1,-1)^T$。故ker(T)的基为e_2-e_3。又$\det\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}\right)=-1\neq 0$，因此 他们合起来也能构成一个基。

（3）有过渡矩阵$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$，故在基B′下的矩阵为$D=C^{-1}AC=diag(1,1,0)$

（4）设$\varepsilon_1=e_1,\varepsilon_2=-e_2+2e_3,\varepsilon_3=e_2-e_3$；有$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2$，$T(\alpha)=k_1T(\varepsilon_1)+k_2T(\varepsilon_2)$，又$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,T(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$，$\therefore T(\alpha)=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2\in R(T)$。$\because \beta\in \ker(T),\therefore T(\beta)=0,T(\beta)\in\ker(T)$

6.

解析：易得$e_1,\cdots,e_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关，设$T(\alpha)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots a_rT(e_r)$，有$\alpha_0=\alpha-(a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_re_r)$，有$T(\alpha_0)=T(\alpha)-\left(a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+\cdots+a_rT(e_r)\right)=0$，故$\alpha_0\in\ker(T)$，$\therefore\alpha$可以被$e_1,\cdots,e_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示。故得证。

仲英学业辅导中心简介

西安交通大学仲英学业辅导中心，于2013 年6 月正式挂牌成立，是全校成立时间最早，规模最大，影响力最强，取得效果最显著的学风建设团队。

中心以大学生终身学习、自主学习能力，及快乐学习、以学习为事业的习惯的培养为使命。我们期望，在学业辅导中心，每一个同学都应当找到适合自己的位置，了解并发挥自己应有的作用。

自成立以来，学业辅导中心一直致力于为同学服务，开展了多项活动：学业辅导巴士车、考前小助手、考前讲座、线上答疑、专业交流会、转专业交流会、考研讲座等。

同时，我们的队伍也是一支团结和谐，向上向善的队伍，100% 的“学霸”比例在全校所有学生组织中绝无仅有，工作人员和志愿者中覆盖众多专业的国家奖学金获得者，以及书院几乎所有专业的国家励志奖学金、彭康奖学金获得者。

在这里相处相聚，是我们每个人展示自己，欣赏同侪的绝佳机会，是挖掘自身潜力，提高学业水平的更高平台！

我们每学年都会在大一新生和大二学生中选拔一批优秀的同学成为我们中的一员，具体情况请大家随时关注我们的微信平台与QQ群。（二维码见封底）。

学辅中心微信公众号

学粉群 3.0

仲英书院学业辅导中心出品