

成本最小化（代入求解法）

$$\begin{cases} \text{Min}_{a,b} & c = P_a a + P_b b \\ \text{s.t.} & f(a, b) = q \end{cases}$$

从  $f(a, b) = q$  可以看出，给定  $q$ ， $b$  是  $a$  的隐函数（ $\frac{\partial f}{\partial b} > 0$ ），记为  $h(a)$ ，则成本最小化问题等价于

$$\text{Min}_a c = P_a a + P_b h(a)$$

根据隐函数定理： $\frac{db}{da} = -\frac{f_a}{f_b}$ 。

证明如下：

对约束条件两边求微分得： $f_a da + f_b db = dq$ 。

固定  $q$ ，则  $dq = 0$ ，则有  $\frac{db}{da} = -\frac{f_a}{f_b}$ 。

根据一阶条件：

$$\frac{dc}{da} = P_a - P_b \frac{f_a}{f_b} = 0 \quad (\text{极值问题的必要条件})$$

即  $\frac{P_a}{P_b} = \frac{f_a}{f_b} = \frac{MP_a}{MP_b}$ ，得到生产成本笔记第（4）式。