习题 2.14 解

(f)

$P_{11}=ah;\quad P_{12}=aei;\quad P_{13}=aegj;\quad P_{14}=bdh;\quad P_{15}=bdei;\quad P_{16}=bdegj;$

$P_{17}=bi;\quad P_{18}=bgj;\quad P_{19}=cfdh;\quad P_{110}=cfdei;\quad P_{111}=cfi;\quad P_{112}=cj$

$P_{21}=h;\quad P_{22}=ei;\quad P_{23}=egj$

$P_{31}=fdh;\quad P_{32}=fdei;\quad P_{33}=fi;\quad P_{34}=j$

($P_{35}=fdegj$?? ×每个节点只允许经过一次)

$\sum L_1 = fdeg+fg;$

$\Delta = 1-\sum L_1 = 1-fdeg-fg$

$\Delta_{11}=1-fg;\quad \Delta_{12}=1;\quad \Delta_{13}=1;\quad \Delta_{14}=1;\quad \Delta_{15}=1;\quad \Delta_{16}=1;$

$\Delta_{17}=1;\quad \Delta_{18}=1;\quad \Delta_{19}=1;\quad \Delta_{110}=1;\quad \Delta_{111}=1;\quad \Delta_{112}=1;$

$\Delta_{21}=1-fg;\quad \Delta_{22}=1;\quad \Delta_{23}=1$

$\Delta_{31}=1;\quad \Delta_{32}=1;\quad \Delta_{33}=1;\quad \Delta_{34}=1$

$$Y=\frac{R_1\sum_{k=1}^{11}P_{1k}\Delta_{1k}+R_2\sum_{k=1}^{3}P_{2k}\Delta_{2k}+R_3\sum_{k=1}^{4}P_{3k}\Delta_{3k}}{\Delta}$$

习题 3.11 解

系统的闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{\dfrac{k}{s(s+2)(s-1)}}{1+\dfrac{k}{s(s+2)(s-1)}(s+\lambda)}=\frac{k}{s(s+2)(s-1)+k(s+\lambda)}=\frac{k}{s^3+s^2+(k-2)s+k\lambda}$$

故系统特征方程为$s^3+s^2+(k-2)s+k\lambda=0$

要使系统稳定，首先必须满足:

$k-2>0$， $k\lambda>0$

劳斯表如下：

s^3	1	k-2	0
s^2	1	$k\lambda$	
s^1	-[$k\lambda$-(k-2)]=k-2-$k\lambda$		
s^0	$k\lambda$		

要令系统稳定，则有：

k-2>0 (1) → k>2

$k\lambda$>0 (2) → $k\neq0$，$\lambda\neq0$，且 k 和 λ 同号

所以：λ>0

-[$k\lambda$ -(k-2)]>0   (3)   → $k > \dfrac{2}{1-\lambda}$

考虑到 k>2，即 $0 < 1-\lambda < 1 \;\Rightarrow\; -1 < -\lambda < 0 \;\Rightarrow\; 0 < \lambda < 1$

由此可知 k, λ 需满足的关系为：$k > \dfrac{2}{1-\lambda} \qquad 0 < \lambda < 1$

习题 3.20 解

(1) $K_P = \lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{25}{s(s+5)} = \infty$

$K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{25}{s(s+5)} = 5$

$K_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s) = \lim\limits_{s\to 0} s^2\dfrac{25}{s(s+5)} = 0$

(2)

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{3}{K_v} + \frac{1}{K_a} = 0 + \frac{3}{5} + \infty = \infty$$

习题 4.15 解

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}(K_h s + 1)$$

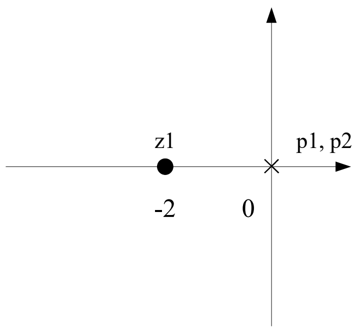
特证方程为：$s^2 + KK_h s + K = 0$

代入 $s = -1 \pm \sqrt{3}j$，可以解出：$\begin{cases} K = 4 \\ K_h = 0.5 \end{cases}$ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

将 $k_h = 0.5$ 代入，有 $G(s)H(s) = \dfrac{K}{s^2}(0.5s+1)$

根据根轨迹的规则绘制其根轨迹：

1）起止点：z1=-2，p1=p2=0；n=2，m=1，n-m=1

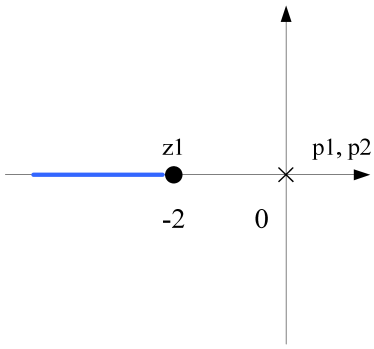


2）**分支数**：n=2　→　 有 2 条根轨迹分支为 2 条，一条趋于-2，一条趋于∞

3）**实轴上的根轨迹**：

"**规则 2：根轨迹在实轴上总是分布在两个相邻的开环实零、极点之间，且线段右边开环实零、极点的总数为奇数。**"也就是说，在实轴上任取一个试验点 s_t，若该点右方实轴上开环极点和零点数之和为奇数，则该点 s_t 是根轨迹上的一个点，该点所在的线段就是一条根轨迹。

所以实轴上的根轨迹在-2 点的左侧，如下图：



4）**渐近线**：

$$\theta_k = \frac{\pm(2k+1)\pi}{n-m} = \pm\pi$$

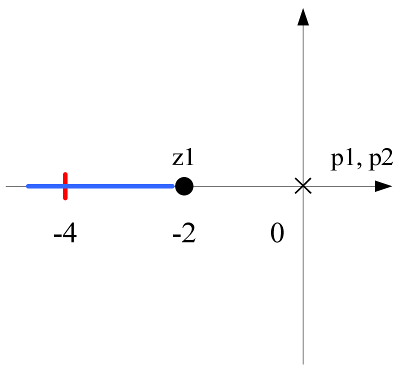
5）**会合点**：s=-4

$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)} \qquad G(s)H(s) = \frac{K}{s^2}(0.5s+1)$$

$$B(s) = (0.5s+1) \qquad A(s) = s^2$$

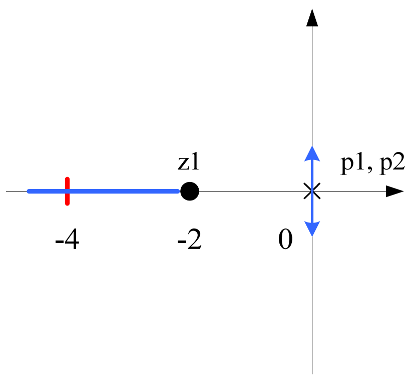
$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \cdot 0.5 - 2s\cdot(0.5s+1) = 0$$

$$\Rightarrow -0.5s^2 - 2s = 0 \quad \Rightarrow \quad s1 = 0 \quad s2 = -4$$



6）出射角：

上课过程中讲到的结论：不仅复数极点存在出入射角，实轴上的分离点、会合点也存在出入射角。且在分离点或会合点处根轨迹的出、入射角（切线）平分 **360** 度角。



7）根轨迹与虚轴的交点：

“用劳斯判据，求临界稳定的 K 值和根轨迹与虚轴的交点。”

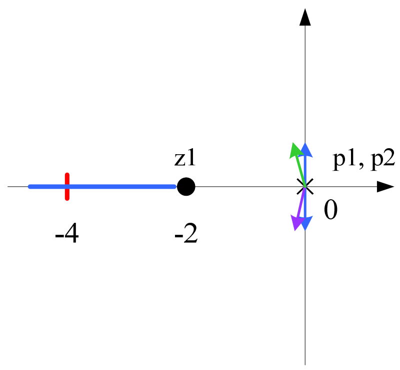
特证方程为：$s^2+0.5Ks+K=0$

劳斯表如下：

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1 & K \\ s^1 & 0.5K & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

所以临界稳定时，K=0，带回特征方程求得 s=0，就是坐标原点，也是开环极点

补充判断：根轨迹是当 K 由 0→∞变化，系统除了原点一直稳定，即没有右平面的根，说明根轨迹不会到右半平面去，所以和虚轴除了原点外不会有交点。



8）绘制根轨迹：

特证方程为：$s^2+0.5Ks+K=0$

$$s=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{K}{2}\pm\sqrt{\frac{K^2}{4}-4K}}{2}$$

因为会合点为-4 时，K=4，所以 k=0~4 时满足$\frac{K^2}{4}-4K<0$，则

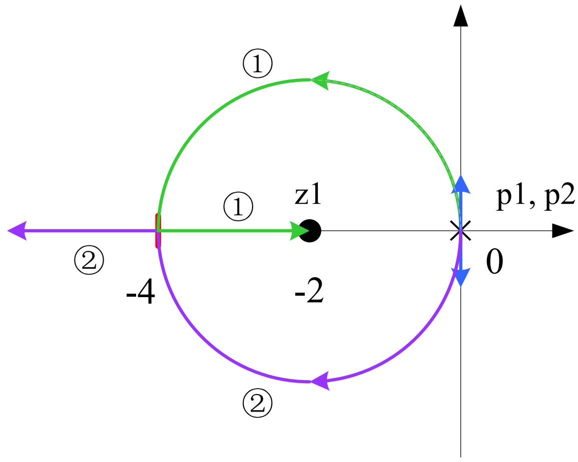
$$s=\frac{-\frac{K}{2}\pm j\sqrt{4K-\frac{K^2}{4}}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Re}=-\frac{K}{4}\\ \mathrm{Im}=\frac{1}{2}\sqrt{4K-\frac{K^2}{4}}\end{cases}$$

在 K=0~4 时，满足$(\mathrm{Re}+2)^2+\mathrm{Im}^2=4$，即圆心在（-2,0）半径为 2 的圆

证明： $(\mathrm{Re}+2)^2+\mathrm{Im}^2=(-\frac{K}{4}+2)^2+(\frac{1}{2}\sqrt{4K-\frac{K^2}{4}})^2=(\frac{K^2}{16}-K+4)+(K-\frac{K^2}{16})=4$。

此外，根据题目已知也可以知道$s=-1\pm\sqrt{3}j$是根轨迹上的点。

K>4 时，也就可以直接画出实轴上根轨迹的①②



根据规则 9 中“**如果一部分根轨迹分支随着 K 增大而向左移动，则另一部分根轨迹分支必将随着 K 增大而向右移动，以保持开环极点之和不变**”，可以进一步验证实轴上根轨迹的趋势

习题 5.11 解

由图看出：

- 当前 K=500 时，顺时针一圈，逆时针一圈，则 N=0，所以稳定；
- 如果(-1, j0)点进入右边的圆环(cd 之间)，顺时针两圈，则不稳定；
- 如果(-1, j0)点进入左边的圆环(ab 之间)，顺时针两圈，则不稳定；
- 如果(-1, j0)点进入最左边(a 点左侧)，不包围，则不稳定；

奈氏图根据 $G(j\omega)=A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ 所画，所以交点 a、b、c 和 K 成正比，也就是说：K 增大，图形整体左移，K 减小，图形整体右移；

所以，要稳定，(-1, j0)点必须在以下区域：

1）a 点左侧：则 K 减少（图形右移），要想落在 a 点左侧，则 K 必须小于使(-1, j0)点到 a=-50 点的临界值 Ka，所以将 K 减少 50 倍时，刚好到达临界，即 Ka=K/50=500/50=10，所以 K<10；

2）b、c 点之间：

则 K 减少（图形右移），要想落在 b 点右侧，则 K 必须大于使(-1, j0)点到 a=-20 点的临界值 Kb，刚好到达临界，即 Kb=K/20=500/20=25，所以 K>25；

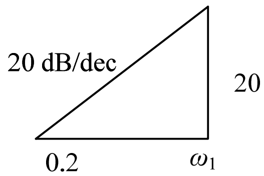
且则 K 增加（图形左移），要想落在 c 点左侧，则 K 必须小于使(-1, j0)点到 c=-0.5 点的临界值 Kc，所以将 K 增大 2 倍时，刚好到达临界，即 Kbc=K*2=500*2=1000，所以 K<1000；

综上所述：$K<10$　或　$25<K<1000$

习题 5.12 解

由图知，起始斜率为$20db/dec$,因此系统中应含有一个纯微分环节，
可判定ω_1,10, 30都为惯性环节的转折频率

$$G(s)=\frac{Ks}{(\frac{1}{\omega_1}s+1)(\frac{1}{10}s+1)(\frac{1}{30}s+1)}$$



计算第一个转角频率ω_1，根据三角关系

即 $\frac{20}{\lg\omega_1-\lg 0.2}=20 \Rightarrow 20=20\lg\frac{\omega_1}{0.2} \Rightarrow \omega_1=2$

在低频段有：$\left|G(j\omega)\right|=K\omega$，且当$\omega=0.2$时有：$\left|G(j\omega)\right|=1 \Rightarrow K=5$

所以：$G(s)=\frac{5s}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{10}s+1)(\frac{1}{30}s+1)}$

习题 5.13

设系统的前向通道传递函数为$G(s)=\frac{10}{s(s-1)}$，反馈环节传递函数为$H(s)=1+K_h s$，试用奈氏判据求出使系统稳定的 K_h 值范围。

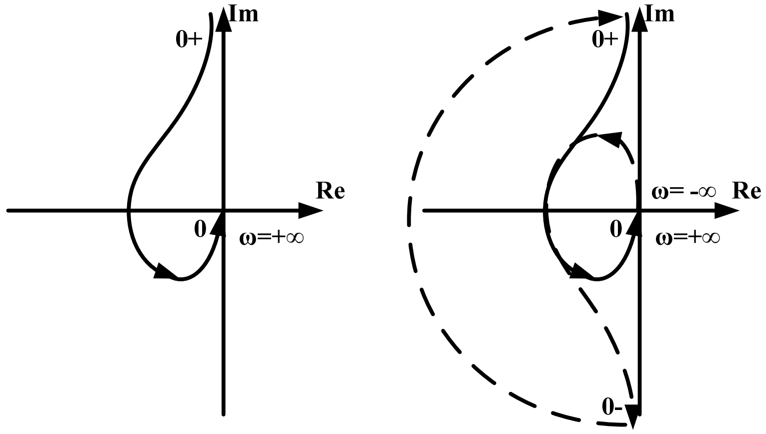
解:

开环传函：$G_0(s)=G(s)H(s)=\frac{10(1+K_n s)}{s(s-1)} \Rightarrow G_0(j\omega)=\frac{10(1+K_n j\omega)}{j\omega(j\omega-1)}$

$$\begin{cases} A(\omega)=|G_0(j\omega)|=\dfrac{10\sqrt{1+(K_n\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} \\ \varphi(\omega)=-90°+\arctan K_n\omega-(180°-\arctan\omega)=-270°+\arctan K_n\omega+\arctan\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(0^+)=\infty \\ \varphi(0^+)=-270° \end{cases} \qquad \begin{cases} A(+\infty)=0 \\ \varphi(+\infty)=-90° \end{cases}$$

奈氏曲线如下图，因为 I 型系统，从 0-到 0+顺时针补半圆



因为系统在右平面有一个开环极点 s=1（P=1），所以(-1, j)点必在图中小圈内，即逆时针包围一圈，下面求小圈与实轴的交点。

令：$\varphi(\omega)=-180° \Rightarrow \arctan K_n\omega+\arctan\omega=90°$

根据：

arctan A + arctan B= arctan[(A+B)/(1-AB)]，以及 arctan x + arctan (1/x) =π/2

则：$K_n\omega=\dfrac{1}{\omega}\Rightarrow K_n\omega^2=1\Rightarrow \omega=\sqrt{\dfrac{1}{K_n}}$

代入 $A(\omega)$，得：$A(\sqrt{\dfrac{1}{K_n}})=10K_n$，则交点为 $-10K_n$

要使(-1, j)点必在图中小圈内，则满足 $-10K_n<-1\Rightarrow K_n>0.1$

补充：用劳斯判据也可佐证结果

特征方程：$s^2-s+10+10K_ns=0\Rightarrow s^2+(10K_n-1)s+10=0$

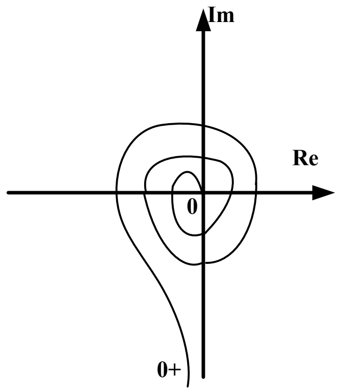
则 $10K_n-1>0\Rightarrow K_n>0.1$

习题 5.14 解

开环传函：$G_0(s)=\dfrac{Ke^{-2s}}{s}\Rightarrow G_0(j\omega)=\dfrac{Ke^{-j2\omega}}{j\omega}$

$\begin{cases}A(\omega)=\dfrac{K}{\omega}\\ \varphi(\omega)=-90°-2\omega\end{cases}$　　$\begin{cases}A(0^+)=\infty\\ \varphi(0^+)=-90°\end{cases}$　　$\begin{cases}A(+\infty)=0\\ \varphi(+\infty)=-\infty\end{cases}$

奈氏曲线如下图



因为没有右平面开环极点，所以奈氏曲线位于(-1, j0)点右侧（临界稳定，则G(jω)H(jω)最外圈穿越(-1, j0)点），求最外圈的交点，即$\varphi(\omega)=-180°$时第一次穿越，则$\varphi(\omega_c)=-90°-2\omega_c=-180° \Rightarrow \omega_c=45°=0.785$

代入$A(\omega)$，得：$A(\omega_c)=\dfrac{K}{\omega_c}=\dfrac{K}{0.785}$，则交点为$-\dfrac{K}{0.785}$

要使(-1, j)点必在奈氏图左侧，则满足$-\dfrac{K}{0.785}>-1 \Rightarrow K<0.785$

习题 6.3 解

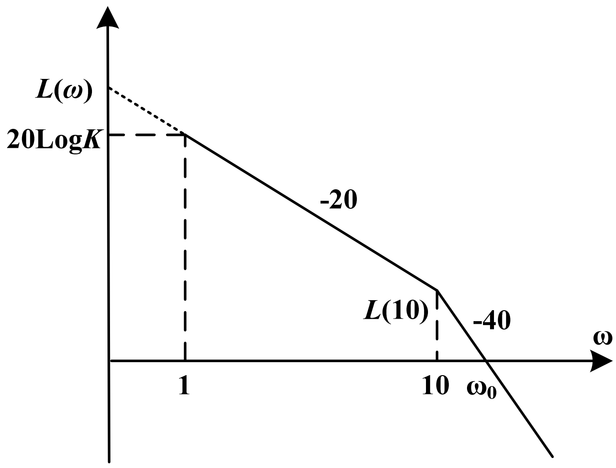
(1) 确定开环放大倍数

由稳态误差系数K_v知：

$$K_V=\lim_{s\to 0} sG_g(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(1+s/10)}=100 \quad \Rightarrow \quad K=100$$

即未校正系统的开环传递函数是：$G_g(s)=\dfrac{100}{s(1+s/10)}$

(2) 画出未校正的系统 Bode 示意图。此时



求截止频 ω_0，先计算 $L(10)$： $\dfrac{20logK - L(10)}{log10 - \log 1} = 20 \Rightarrow L(10) = 20$

$$\frac{20-0}{\log\omega_0 - \log 10} = 40 \Rightarrow \quad \omega_0 = 10^{3/2} = 31.62$$

$$\varphi(\omega_0) = -90^\circ - \arctan(\frac{1}{10}\omega_0) = -162.45^\circ \quad \Rightarrow \gamma_g = 180^\circ + \varphi(\omega_0) = 17.55^\circ$$

(3) 稳定裕量不够，说明动态性能不好，需要超前校正，取 ε=5°，则超前相角为：

$$\phi_J = \gamma - \gamma_g + \varepsilon = 50^\circ - 17.55^\circ + 5^\circ = 37.45^\circ$$

一般 $\phi_m = \phi_J$，这里取 $\phi_m = 40°$，则 $\alpha = \dfrac{1-\sin\phi_m}{1+\sin\phi_m} = \dfrac{1-\sin 40^\circ}{1+\sin 40^\circ} = 0.217$，

则：$10\log(\dfrac{1}{\alpha}) = 6.6dB$

(4) 当固有幅频特性等于－6.6dB 时的频率 $\omega_0^{'}$，则：

$$\frac{20-(-6.6)}{\log\omega_0^{'} - \log 10} = 40 \Rightarrow \omega_0^{'} = 41.1 = \omega_m$$

(5) 校正网络的转折频率为：

$$G_J(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = \omega_m \cdot \sqrt{\alpha} = 19.1 \qquad \omega_2 = \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = 88$$

$$G_J(s) = \frac{\dfrac{s}{19.1}+1}{\dfrac{s}{88}+1} = \frac{0.052s+1}{0.011s+1}$$

校正后系统的开环传递函数为：

$$G_0(s)=G_J(s)G_g(s)=\frac{100(0.052s+1)}{s(\frac{1}{10}s+1)(0.011s+1)}$$

(6) 校验性能指标

$$\phi(\omega_m)=-90^\circ-\arctan(0.1\omega_m)-\arctan(0.011\omega_m)+\arctan(0.052\omega_m)=-125.7^\circ$$

$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_m)=54.3^\circ>50^\circ$ 满足给定条件。

习题 7.11 解

(1) $G_p(s)=\dfrac{K}{s(s+2)}$

$$G_o(z)=(1-z^{-1})Z(\frac{G_p(s)}{s})=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(s+2)}\right]$$

$$=(1-z^{-1})KZ\left[\frac{-0.25}{s}+\frac{0.5}{s^2}+\frac{0.25}{s+2}\right]$$

$$=(1-z^{-1})KZ\left[-\frac{K}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{K}{2}\frac{zT}{(z-1)^2}+\frac{K}{4}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$=(1-z^{-1})K\left[-\frac{1}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{zT}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$=(1-\frac{1}{z})K\left[-\frac{1}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{zT}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$=(\frac{z-1}{z})K\left[-\frac{1}{4}\frac{z}{z-1}+\frac{1}{2}\frac{zT}{(z-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$=K\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{T}{(z-1)}+\frac{1}{4}\frac{z-1}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$=\frac{K}{4}\frac{[2T-(1-e^{-2T})]z+(1-e^{-2T}-2Te^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$

$$\xrightarrow{T=1}=\frac{K}{4}\frac{[2-(1-e^{-2})]z+(1-e^{-2}-2e^{-2})}{(z-1)(z-e^{-2})}$$

$$\xrightarrow{T=1}=\frac{K}{4}\frac{(1+e^{-2})z+1-3e^{-2}}{(z-1)(z-e^{-2})}$$

(2) $G(z)=\dfrac{G_0(z)}{1+G_0(z)}=\dfrac{\dfrac{K}{4}\left[(1+e^{-2})z+1-3e^{-2}\right]}{(z-1)(z-e^{-2})+\dfrac{K}{4}\left[(1+e^{-2})z+1-3e^{-2}\right]}$

$$=\frac{0.28Kz+0.149K}{z^2+(0.28K-1.135)z+0.135+0.149K}$$

(3) 令 $z^2+(0.28K-1.135)z+0.135+0.149K=0$

将 $z=\dfrac{\omega+1}{\omega-1}$ 代入，得：

$$\left(\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)^2+(0.28K-1.135)\frac{\omega+1}{\omega-1}+0.135+0.149K=0$$

整理后有：$0.429K\omega^2+(1.73-0.298K)\omega+2.27-0.131K=0$

劳斯表如下：

ω^2	0.429K	2.27-0.131K
ω^1	1.73-0.298K	0
ω^0	2.27-0.131K	

则有：$\begin{cases}0.429K>0\\1.73-0.298K>0\\2.27-0.131K>0\end{cases}$

从而求出：$0<K<5.8$

习题 8.9 解

拉氏变换法求解

$$x(t)=\Phi(t)\cdot x(0)+\int_0^t\Phi(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau=\Phi(t)\cdot x(0)$$

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{|sI-A|}=\frac{1}{s^2-2s+3}\begin{bmatrix}s-2 & 1\\-3 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s-2}{(s-1)^2+2} & \dfrac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}\cdot(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}) & \dfrac{s}{(s-1)^2+2}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix} e^t\cos(\sqrt{2}t)-\frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) & \frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) & e^t\cos(\sqrt{2}t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

得：

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\Phi(t)\cdot x(0)=\begin{bmatrix} e^t\cos(\sqrt{2}t)-\frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) & \frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) & e^t\cos(\sqrt{2}t)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \\ -2\sqrt{2}e^t\sin(\sqrt{2}t)-e^t\cos(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

习题 8-17 解

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

状态反馈系统特征方程为

$$|\lambda I-(A-bK)|=(\lambda-2+k_1)(\lambda-1+2k_2)-(1+2k_1)(k_2-1)=\lambda^2+(k_1+2k_2-3)\lambda+k_1-5k_2+3$$

期望闭环极点对应的系统特征方程

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^2+3\lambda+2$$

$$k_1=4 \qquad k_2=1$$

$$K=\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$$

校正后的状态结构图