西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

上节课要点复习

□基本概念

状态、状态变量、状态方程、动态方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}\right\}$$

□动态方程与传递函数的关系

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

□线性定常系统动态方程的建立(建模)

根据系统物理机理建立动态方程(机理法)

状态变量的选取（尽量选取独立储能元件输出的物理量）

动态方程的构成(型式：状态方程+输出方程)

状态变量选取的不唯一性（但传递函数矩阵是唯一的，不变）。

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

- 直接根据系统的机理建立相应的微分方程或差分方程(机理法)，即选择有关的物理量作为状态变量，从而导出动态方程。(状态变量的选取、动态方程的构成)
- 由已知的系统数学模型如微分方程或传递函数，经过一定的转化从而得到其动态方程。

对同一系统，状态变量的选择不具有唯一性，动态方程也不唯一。

1) 根据系统物理模型建立动态方程
2) 由高阶微分方程建立动态方程
3) 由系统传递函数建立动态方程

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程不含输入量的导数项

单入单出线性定常连续系统的高阶微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u$$

状态变量的选取：

$$x_1=y,\quad x_2=\dot{y},\ x_3=\ddot{y},\quad \cdots,\quad x_{n\text{-}1}=y^{(n-2)},\quad x_n=y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

动态方程的构成(型式)：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程不含输入量的导数项

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\\ -a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ b_0\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad \cdots\quad 0]$$

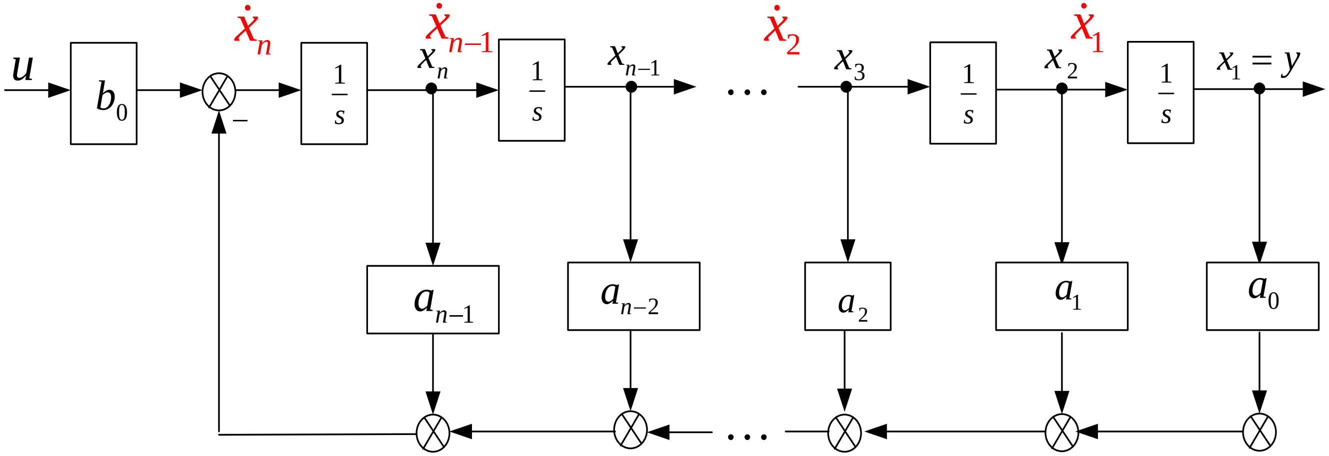
8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程不含输入量的导数项

系统的状态结构图 ⟺ 系统的动态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u \\ y = x_1 \end{cases}$$

每个积分器输出都是对应的状态变量，状态方程由各积分器输入-输出关系确定，输出方程在输出端获得。



8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程含输入量的导数项

该高阶微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

状态变量的选取：一般输入导数项的阶次小于或等于系统的阶次n，为了避免在状态方程中出现输入导数项，可按如下规则选择一组状态变量。

$$\begin{cases} x_1=y-h_0u \\ x_i=\dot{x}_{i-1}-h_{i-1}u \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots n)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=y-h_0u \\ x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{y}-h_0\dot{u}-h_1u \\ x_3=\dot{x}_2-h_2u=\ddot{y}-h_0\ddot{u}-h_1\dot{u}-h_2u \\ \quad\vdots \\ x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u=y^{(n-1)}-h_0u^{(n-1)}-h_1u^{(n-2)}-\cdots-h_{n-1}u \end{cases}$$

h_i是待定常数

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程含输入量的导数项

该高阶微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

输出方程：

$$\begin{cases} x_1=y-h_0u \\ x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{y}-h_0\dot{u}-h_1u \\ x_3=\dot{x}_2-h_2u=\ddot{y}-h_0\ddot{u}-h_1\dot{u}-h_2u \\ \quad\vdots \\ x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u=y^{(n-1)}-h_0u^{(n-1)}-h_1u^{(n-2)}-\cdots-h_{n-1}u \end{cases} \longrightarrow \quad y=x_1+h_0u$$

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程含输入量的导数项

余下的方程可以得到状态方程的前(n-1)个：

$$
\begin{cases}
y = x_1 + h_0 u \\
\dot{x}_1 = x_2 + h_1 u \\
\dot{x}_2 = x_3 + h_2 u \\
\quad \vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n + h_{n-1} u
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x_n &= \dot{x}_{n-1} - h_{n-1}u = y^{(n-1)} - h_0 u^{(n-1)} - h_1 u^{(n-2)} - \cdots - h_{n-1}u \\
\Rightarrow \dot{x}_n &= y^{(n)} - h_0 u^{(n)} - h_1 u^{(n-1)} - \cdots - h_{n-1}\dot{u} \\
&= (-a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_1\dot{y} - a_0 y + b_n u^{(n)} + \cdots + b_0 u) \\
&\quad - h_0 u^{(n)} - h_1 u^{(n-1)} - \cdots - h_{n-1}\dot{u}
\end{aligned}
$$

将上式中的 $y^{n-1},\ldots,\dot{y},y$ 均以x_i及u的各阶导数表示

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_n &= -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-1}x_n + (b_n - h_0)u^{(n)} + (b_{n-1} - h_1 - a_{n-1}h_0)u^{(n-1)} \\
&+ \cdots + (b_1 - h_{n-1} - a_{n-1}h_{n-2} - \cdots - a_1 h_0)\dot{u} + (b_0 - a_{n-1}h_{n-1} \\
&- \cdots - a_1 h_1 - a_0 h_0)u
\end{aligned}
$$

令上式u的各阶导数的系数为零，可确定各h值：

$$
\begin{cases}
h_0 = b_n \\
h_1 = b_{n-1} - a_{n-1}h_0 \\
\quad \vdots \\
h_{n-1} = b_1 - a_{n-1}h_{n-2} - \cdots - a_1 h_0 \\
h_n = b_0 - a_{n-1}h_{n-1} - \cdots - a_1 h_1 - a_0 h_0
\end{cases}
$$

故第n个状态方程为：

$$
\dot{x}_n = -a_0 x_1 - \cdots - a_{n-1}x_n + h_n u
$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

2) 由高阶微分方程建立动态方程---微分方程含输入量的导数项

系统的动态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad d = [h_0]$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

例8.6 已知系统的微分方程，求系统 $\dddot{y}+2\ddot{y}+3\dot{y}+5y=0.5\ddot{u}+\dot{u}+1.5u$ 的动态方程。

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]\quad d=[h_0]$$

$$\begin{cases}h_0=b_3\\h_1=b_2-a_2h_0\\h_2=b_1-a_2h_1-a_1h_0\\h_3=b_0-a_2h_2-a_1h_1-a_0h_0\end{cases}$$

系统的动态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

3) 由系统传递函数建立动态方程

高阶微分方程一般形式： $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$

对应的传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

应用综合除法，有：

$$G(s)=b_n+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}=b_n+\frac{N(s)}{D(s)}$$

其中：b_n是联系输入、输出的前馈系数，当$G(s)$的分母阶数大于分子阶数时，b_n=0。

$\frac{N(s)}{D(s)}$ 是严格有理真分式，其分子各次项的系数为：

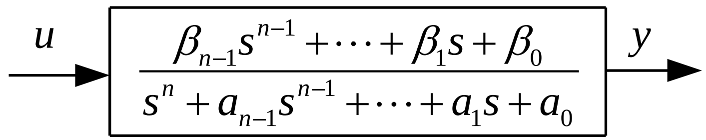
$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=b_0-a_0b_n\\\beta_1&=b_1-a_1b_n\\&\vdots\\\beta_{n-1}&=b_{n-1}-a_{n-1}b_n\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

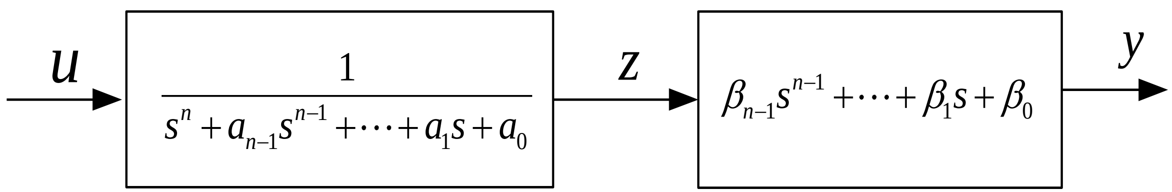
3) 由系统传递函数建立动态方程

■ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解



取中间变量z将其串联分解为两部分。



$$z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{z}+a_0 z=u \qquad y=\beta_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+\beta_1\dot{z}+\beta_0 z$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$z^{(n)}+a_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{z}+a_0 z=u$$

$$y=\beta_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+\beta_1\dot{z}+\beta_0 z$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

状态变量： $x_1=z,\quad x_2=\dot{z},\quad \cdots,\quad x_n=z^{(n-1)}$

状态方程：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n=-a_0 z_1-a_1\dot{z}-\cdots-a_{n-1}z^{(n-1)}+u=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+u\end{cases}$$

输出方程： $y=\beta_0x_1+\beta_1x_2+\cdots+\beta_{n-1}x_n$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

3) 由系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解　　向量-矩阵形式为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\quad c_c=[\beta_o\quad \beta_1\quad \cdots\quad \beta_{n-1}]$$

其中，A_c和b_c具有以上形式时，A_c称为友矩阵，相应的状态方程称为能控标准型。

当 $G(s)=b_n+\frac{N(s)}{D(s)}$ 时，A_c、b_c和c_c均不变，$y=c_c x+b_n u$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

若取 $A_o=A_c^T$，$c_o=b_c^T$，$b_o=c_c^T$，则构造出新的状态方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_o x+b_0 u\\ y&=c_o x\end{aligned}\right\}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_o=\begin{bmatrix}\beta_o\\\beta_1\\\vdots\\\beta_{n-1}\end{bmatrix}\quad c_o=[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]$$

注意A_o和c_o的形式特征，相应的状态方程称为能观标准型。

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

3) 由系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

能控标准型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

$A_c=A_o^T \quad b_c=c_o^T \quad c_c=b_o^T$

对偶关系

能观标准型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_o x+b_0 u\\ y&=c_o x\end{aligned}\right\}$$

能控标准型与能观标准型是同一传递函数的不同实现。

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

当只含单实极点时，动态方程除可化为能控标准型或能观测标准型以外，还可化为对角型动态方程（A矩阵是一个对角阵）。设D(s)可分解为：

$$D(s)=(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)$$

而 $c_i=\lim\limits_{s\to\lambda_i}\left[\frac{N(s)}{D(s)}(s-\lambda_i)\right]$ 为 $\frac{N(s)}{D(s)}$在极点λ_i处的留数，则有：

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

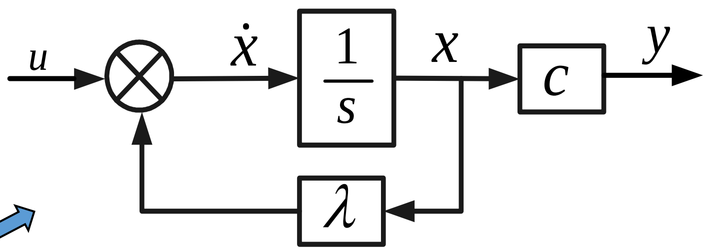
② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

方式一：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{s-\lambda}=\frac{c}{s-\lambda}\frac{X(s)}{X(s)}\qquad\Rightarrow\frac{y}{u}=\frac{cx}{\dot{x}-\lambda x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=\dot{x}-\lambda x\\ y=cx\end{cases}$$



$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=\lambda x+u\\ y=cx\end{cases}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)\,,\qquad i=1,2,\cdots,n$

则：$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i X_i(s)$

展开得：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+u\\ \dot{x}_2=\lambda_2 x_2+u\\ \vdots\\ \dot{x}_n=\lambda_n x_n+u\\ y=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\end{cases}$$

反变换结果：

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=\lambda_i x_i(t)+u(t)\\ y(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t)\end{cases}$$

线性定常系统动态方程的建立(建模)

3) 系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

向量-矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

□ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

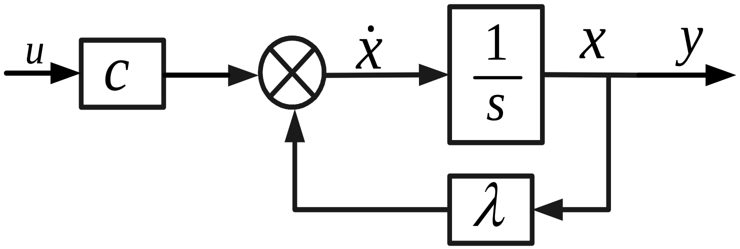
$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

方式二:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{s-\lambda}=\frac{c}{s-\lambda}\frac{X(s)}{X(s)}\quad\Rightarrow\frac{y}{u}=\frac{cx}{\dot{x}-\lambda x}=\frac{x}{\frac{1}{c}(\dot{x}-\lambda x)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{c}(\dot{x}-\lambda x)\\ y=x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=\lambda x+cu\\ y=x\end{cases}$$



3) 由系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

则： $Y(s)=\sum_{i=1}^{n}X_i(s)$

拉氏反变换并展开：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+c_1 u\\ \dot{x}_2=\lambda_2 x_2+c_2 u\\ \vdots\\ \dot{x}_n=\lambda_n x_n+c_n u\\ y=x_1+x_2+\cdots+x_n\end{cases}$$

向量-矩阵形式为：

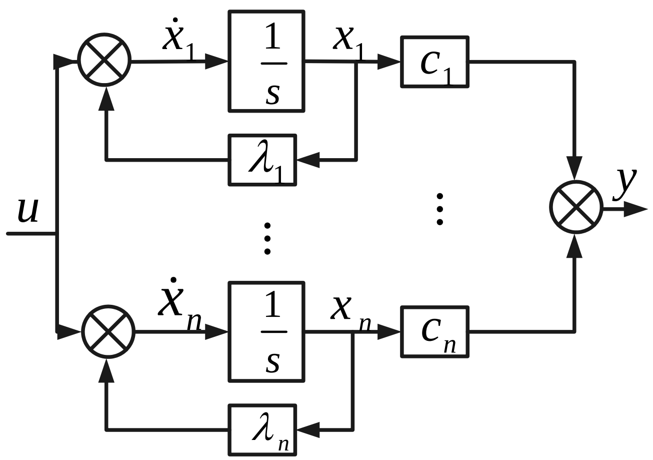
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

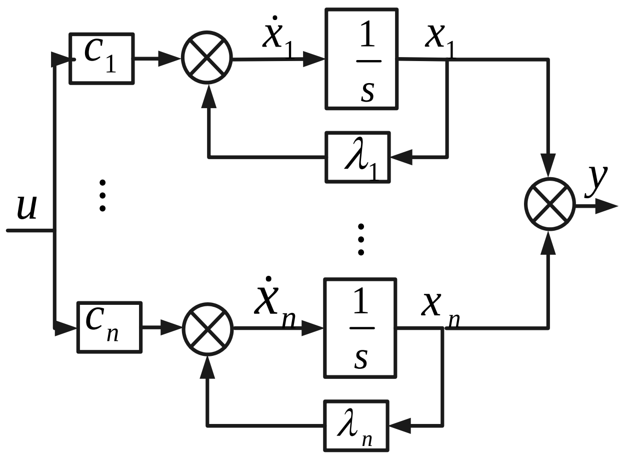
8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \end{cases}$$

对偶关系

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + c_1 u \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + c_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + c_n u \\ y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{cases}$$





$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

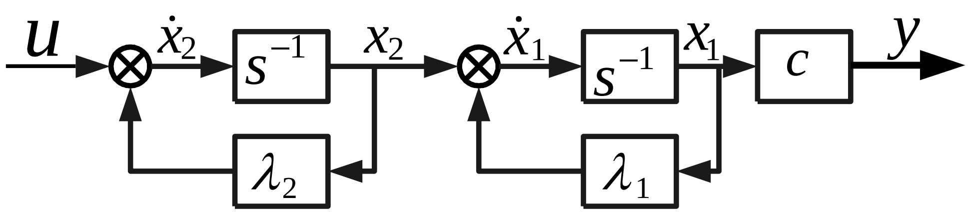
3) 由系统传递函数建立动态方程

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（分子为常数）（环节串联）

例：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}=\frac{1}{s-\lambda_1}\frac{1}{s-\lambda_2}c$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+x_2\\ \dot{x}_2=\lambda_2 x_2+u\\ y=cx_1\end{cases}$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

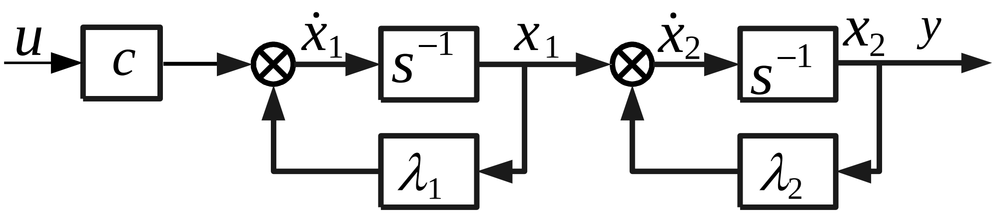
3) 由系统传递函数建立动态方程

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（分子为常数）（环节串联）

例：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}=\frac{1}{s-\lambda_1}\frac{1}{s-\lambda_2}c=c\frac{1}{s-\lambda_1}\frac{1}{s-\lambda_2}$$



$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+cu\\ \dot{x}_2=x_1+\lambda_2 x_2\\ y=x_2\end{cases}$$

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

3) 由系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

➢ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

当传递函数除含单实极点外还含重实极点时，不仅可化为能控标准型或能观测标准型以外，还可化为约当标准型动态方程。***A***矩阵是一个含约当块的矩阵，设***D(s)***可分解为：

$$D(s)=(s-\lambda_1)^r(s-\lambda_{r+1})\cdots(s-\lambda_n)$$

传递函数可展成部分分式之和：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_i}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

- **由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法**

③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_i}\right]U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$

向量-矩阵形式为：

约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 1\\ \hline 1\\ \vdots\\ 1\end{array}\right]u \qquad y=\left[\begin{array}{c|c}\underline{c_{11}\ \cdots c_{1r}} & c_{r+1}\cdots\ c_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

3) 由系统传递函数建立动态方程

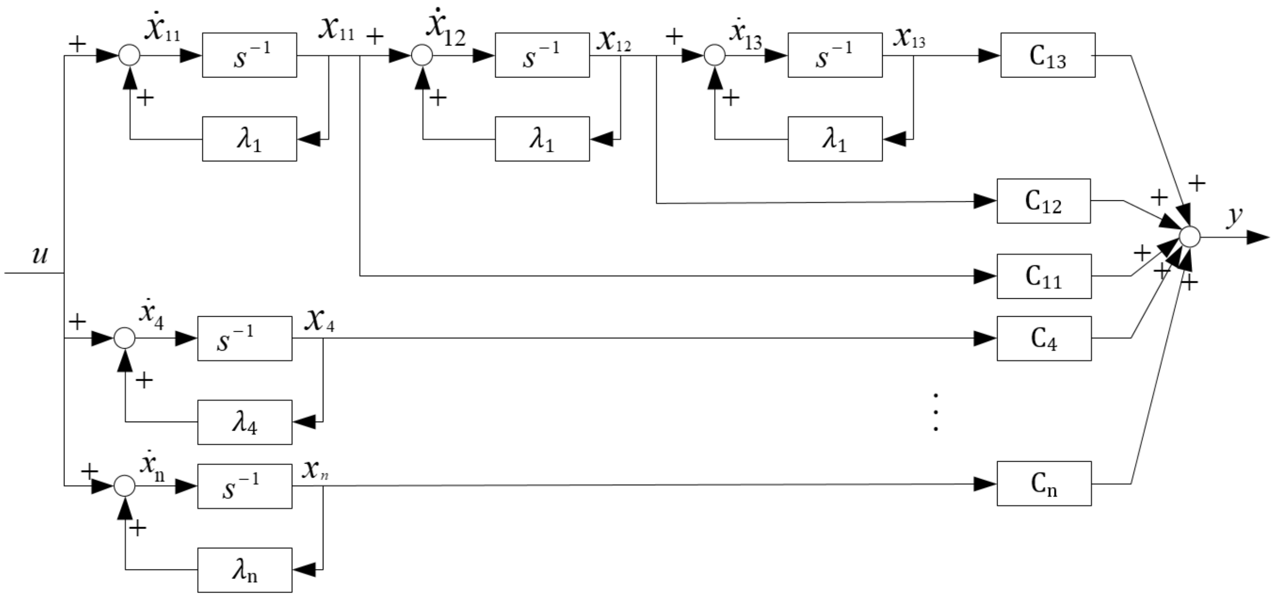
$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

➢ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_i}\right]U(s)$$

状态变量图(r=3)：



3) 由系统传递函数建立动态方程

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_i}\right]U(s)$$

状态变量： $X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

向量-矩阵形式为： 约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \ddots & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{11}\\ \vdots\\ c_{1r}\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=\left[\begin{array}{c|c}0\ \cdots 1 & 1\cdots\ 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

对偶关系

3) 由系统传递函数建立动态方程

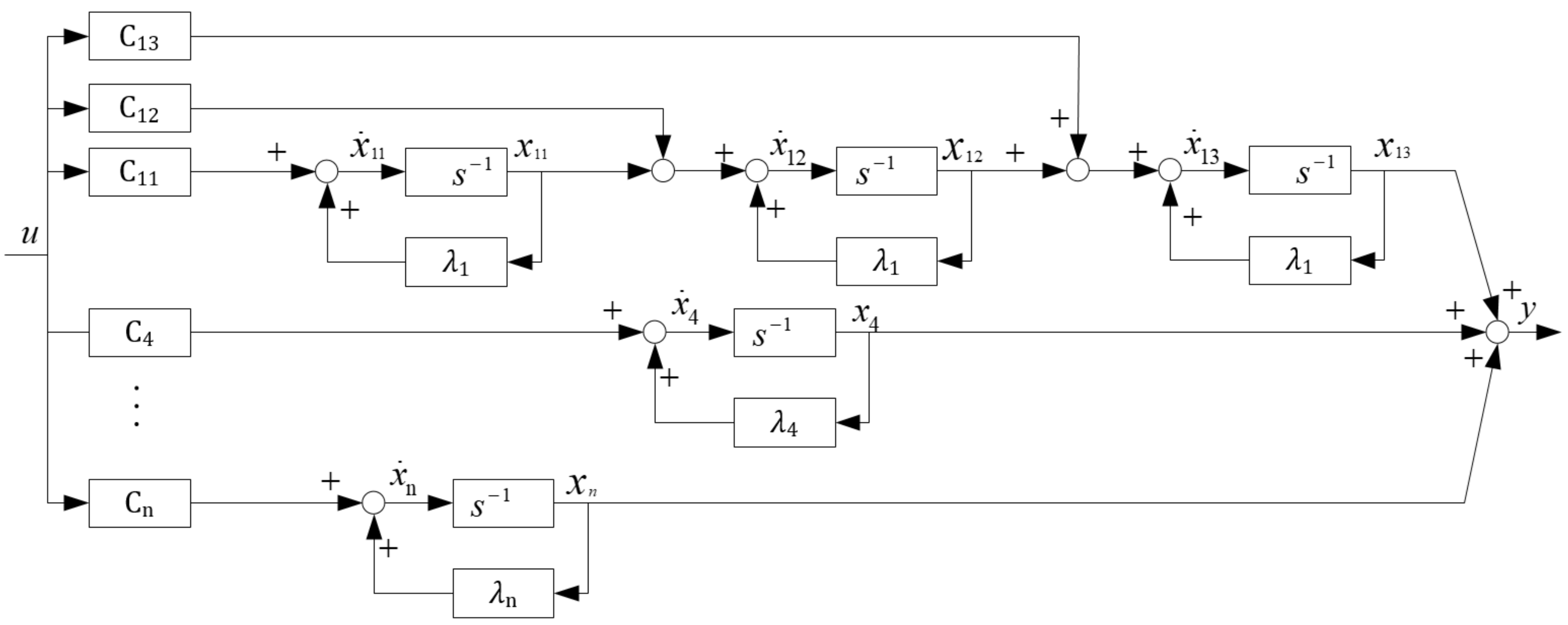
➢ 由 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 导出几种标准型动态方程的方法

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_i}\right]U(s)$$

状态变量图(r=3)：



8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

例8.8 已知系统的传递函数，求系统的动态方程，使系统矩阵为约当标准型。

$$G(s)=\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}$$

解：将系统传递函数展开成部分分式：

$$G(s)=\frac{4s^2+17s+16}{(s+2)^2(s+3)}=\frac{c_{11}}{s+2}+\frac{c_{12}}{(s+2)^2}+\frac{c_3}{s+3}$$

$$c_{12}=\lim_{s\to -2}(s+2)^2G(s)=-2$$

$$c_{11}=\lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}[(s+2)^2G(s)]=\lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}[\frac{4s^2+17s+16}{s+3}]=3$$

$$c_3=\lim_{s\to -3}(s+3)G(s)=1$$

相应的动态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

动态方程的非唯一性

- 对同一系统，状态变量的选择不具有唯一性，选取不同的状态变量便有不同形式的动态方程。
- 但对同一个系统来说，不论如何选择，状态变量的个数总是相同的，而且由于它们所描述的是同一个系统的运动行为，因此各组状态变量之间必然存在着某种联系。
- 若两组状态变量之间用一个非奇异矩阵联系着，则两组动态方程的矩阵与该非奇异矩阵之间存在着一定的关系。

8.1.3 线性定常系统动态方程的建立(建模)

动态方程的非唯一性

系统的状态方程为： $\dot{x} = Ax + bu \qquad y = cx \qquad$ 令 $x = P\bar{x}$

其中P为$n \times n$非奇异线性变换矩阵，即满足$|P| \neq 0$（行列式不为0），说明状态变量 x和 $\bar{x}$ 之间用一个非奇异线性变换矩阵P联系着，也就是说可以通过P阵，将x变换为$\bar{x}$ ，变换后的动态方程为：

$$\dot{\bar{x}} = A_1\bar{x} + b_1u \qquad y = c_1\bar{x}$$

式中： $A_1 = P^{-1}AP \qquad B_1 = P^{-1}B \qquad C_1 = CP$

上述过程称为对系统进行***P*线性变换**。由于状态变量的选择不是唯一的，非奇异线性变换矩阵P也不是唯一的。

同一个系统可以用多个状态变量和多个动态方程来描述，也就是说动态方程是非唯一的。但是同一系统，不同状态变量之间存在上述的线性变换关系。

动态方程的非唯一性

- 尽管系统的动态方程是非唯一的，但对同一个系统，由不同的动态方程变换成的传递函数或传递函数矩阵却是相同的。
- 系统各个输入量和输出量之间对应的传递函数是不变的，这称为传递函数（矩阵）的不变性。

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$G_1(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1$$

$A_1=P^{-1}AP \qquad B_1=P^{-1}B$

$C_1=CP \qquad D_1=D$

$$\begin{aligned}G_1(s)&=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1=CP(sI-P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B+D\\&=CP[P(sI-P^{-1}AP)]^{-1}B+D=C[P(sI-P^{-1}AP)P^{-1}]^{-1}B+D\\&=C(sI-A)^{-1}B+D=G(s)\end{aligned}$$

由高阶微分方程建立动态方程-微分方程不含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_0u$$

$$x_1=y,\quad x_2=\dot{y},\quad \cdots,\quad x_n=y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=-a_0x_1-a_1x_2-\cdots-a_{n-1}x_n+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b_0\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]$$

8 本节课小结

□由高阶微分方程建立动态方程-微分方程含输入量的导数项

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$\begin{cases}x_1=y-h_0u\\ x_i=\dot{x}_{i-1}-h_{i-1}u\end{cases}$$

$$(i=1,2,\cdots n)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=y-h_0u\\ x_2=\dot{x}_1-h_1u=\dot{y}-h_0\dot{u}-h_1u\\ x_3=\dot{x}_2-h_2u=\ddot{y}-h_0\ddot{u}-h_1\dot{u}-h_2u\\ \quad\vdots\\ x_n=\dot{x}_{n-1}-h_{n-1}u=y^{(n-1)}-h_0u^{(n-1)}-h_1u^{(n-2)}-\cdots-h_{n-1}u\end{cases}$$

h_i是待定常数

$$\begin{cases}h_0=b_n\\ h_1=b_{n-1}-a_{n-1}h_0\\ \quad\vdots\\ h_{n-1}=b_1-a_{n-1}h_{n-2}-\cdots-+x_n+h_{n-1}u\\ h_n=b_0-a_{n-1}h_{n-1}-\cdots-a_1h_1-a_0h_0\end{cases}$$

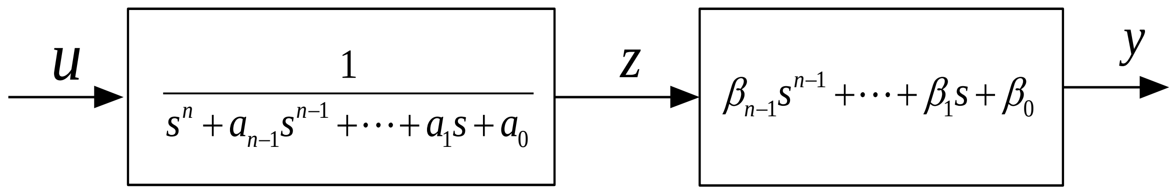
$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_{n-1}\\h_n\end{bmatrix}\quad c=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]\quad d=[h_0]$$

8 本节课小结

由系统传递函数建立动态方程 ① $\frac{N(s)}{D(s)}$ 串联分解

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$



$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_c x+b_c u\\ y&=c_c x\end{aligned}\right\}$$

$$A_c=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\quad c_c=[\beta_o\quad \beta_1\quad\cdots\quad\beta_{n-1}]$$

能控标准型

能观标准型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=A_o x+b_0 u\\ y&=c_o x\end{aligned}\right\}$$

$$A_o=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}\quad b_o=\begin{bmatrix}\beta_o\\\beta_1\\\vdots\\\beta_{n-1}\end{bmatrix}\quad c_o=[0\quad\cdots\quad 0\quad 1]$$

$$A_c=A_o^T\quad b_c=c_o^T\quad c_c=b_o^T$$

对偶关系

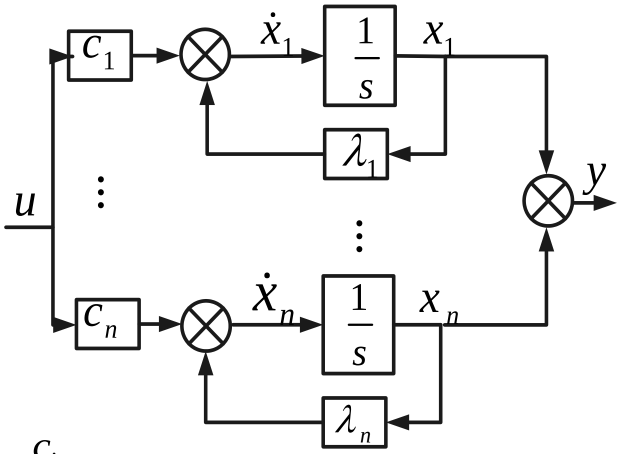
$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

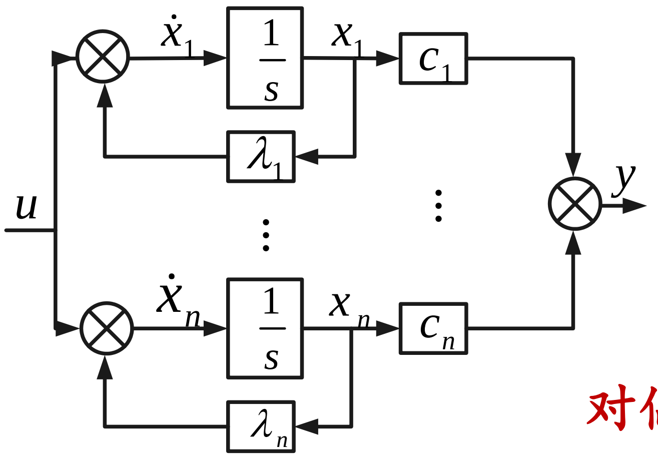
由系统传递函数建立动态方程 ② $\frac{N(s)}{D(s)}$ 只含单实极点时的情况（并联分解）

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$$

状态变量：$X_i(s)=\frac{1}{s-\lambda_i}U(s)$，$\quad i=1,2,\cdots,n$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=[c_1\quad c_2\quad\cdots\quad c_n]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$





状态变量：$X_i(s)=\frac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u \qquad y=[1\quad 1\quad\cdots\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

对偶关系

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

□由系统传递函数建立动态方程 ③ $\frac{N(s)}{D(s)}$ 含重实极点时的情况（并联分解）

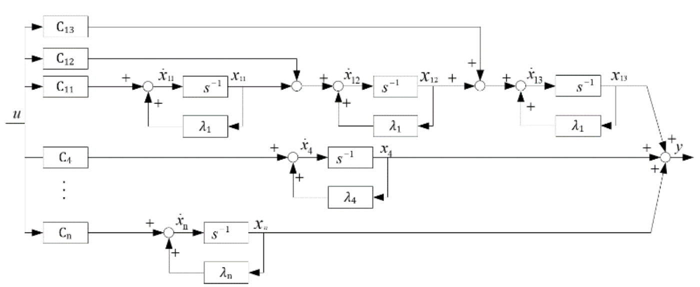
$$Y(s)=\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{c_{1i}}{(s-\lambda_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{n}\frac{c_j}{s-\lambda_j}\right]U(s)$$

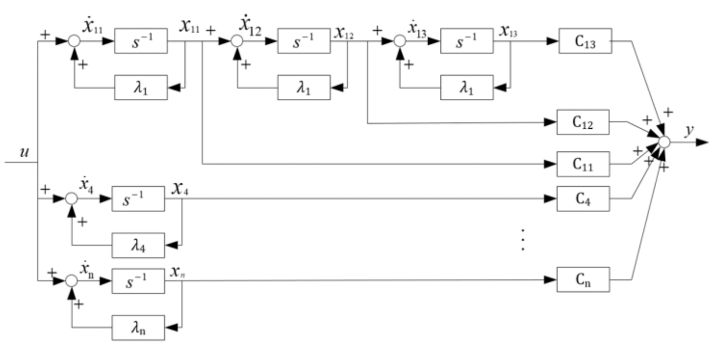
状态变量： $X_i(s)=\dfrac{1}{s-\lambda_i}U(s)$

约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\left[c_{11}\ \cdots c_{1r}\,|\,c_{r+1}\cdots\ c_n\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$





状态变量： $X_i(s)=\dfrac{c_i}{s-\lambda_i}U(s)$

约当块

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \vdots\\ \dot{x}_{1r}\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \ddots & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{r+1} & 0 & 0\\ & 0 & & 0 & \ddots & 0\\ & & & 0 & 0 & \lambda_n\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{11}\\ \vdots\\ c_{1r}\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\left[0\ \cdots 1\,|\,1\cdots\ 1\right]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{1r}\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

对偶关系

作业

8.3

8.6（1）

写清题号，不用抄题；