西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论

Automatic Control Theory

工业自动化系

5 上节课要点复习

映射定理

✓ F(s)为单值有理复变函数，Cs为s平面上的封闭曲线，设P及Z分别表示F(s)在Cs内的极点数和零点数。当s沿顺时针方向通过Cs运动一周时，s点映射到F平面上的轨迹C_F顺时针方向包围原点的次数为N=Z-P，若N为负，则表示C_F逆时针方向

奈氏判据

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

$$\Rightarrow F(s)=1+G(s)H(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)+K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

*F(s)*的零点＝闭环特征方程的根或闭环极点

*F(s)*的极点＝系统的开环极点

若Z= *F(s)*的右零点数(闭环系统的右极点数)

P= *F(s)*的右极点数(开环系统的右极点数)

如果闭环系统稳定，则Z=0，N= -P，即闭环系统稳定的条件是：C_F逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

奈氏判据

$C_{GH}: G(j\omega)H(j\omega)$

*F*平面的原点=*Nquist*平面的(-1, *j*0)点。

$C_F: F(j\omega)=1+G(j\omega)H(j\omega)$

因此*闭环系统稳定的条件*可重新描述为

当s顺时针方向通过奈氏轨迹时，*G* (*jω*)*H*(*jω*)轨迹逆时针方向包围(-1, *j*0)点的次数等于系统的开环右极点数。（*Z*=0，*N*= -*P*）

闭合曲线包围特征点圈数（次数）N的计算

设N为闭合曲线穿越 (-1, *j*0)点左侧负实轴的次数，N_+表示闭合曲线从下向上穿越的次数和，N_-表示闭合曲线从上向下穿越的次数和，则：

$$N = N_+ - N_-$$

修改后的奈氏轨迹

$G(s)H(s)$轨迹由开环极坐标图和辅助圆构成。

- 对开环传递函数$G(s)H(s)$的N型系统($N\geq1$)奈氏稳定判据可叙述为：

✓ 如果$G(s)H(s)$在右半s平面上有P个极点，则闭环系统稳定的充要条件为，s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹逆时针方向包围(-1, j0)点P次。

✓ 对于N型最小相位系统，闭环系统稳定的充要条件为，当s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹不包围(-1, j0)点。

开环极坐标图与开环对数坐标图的对应关系：

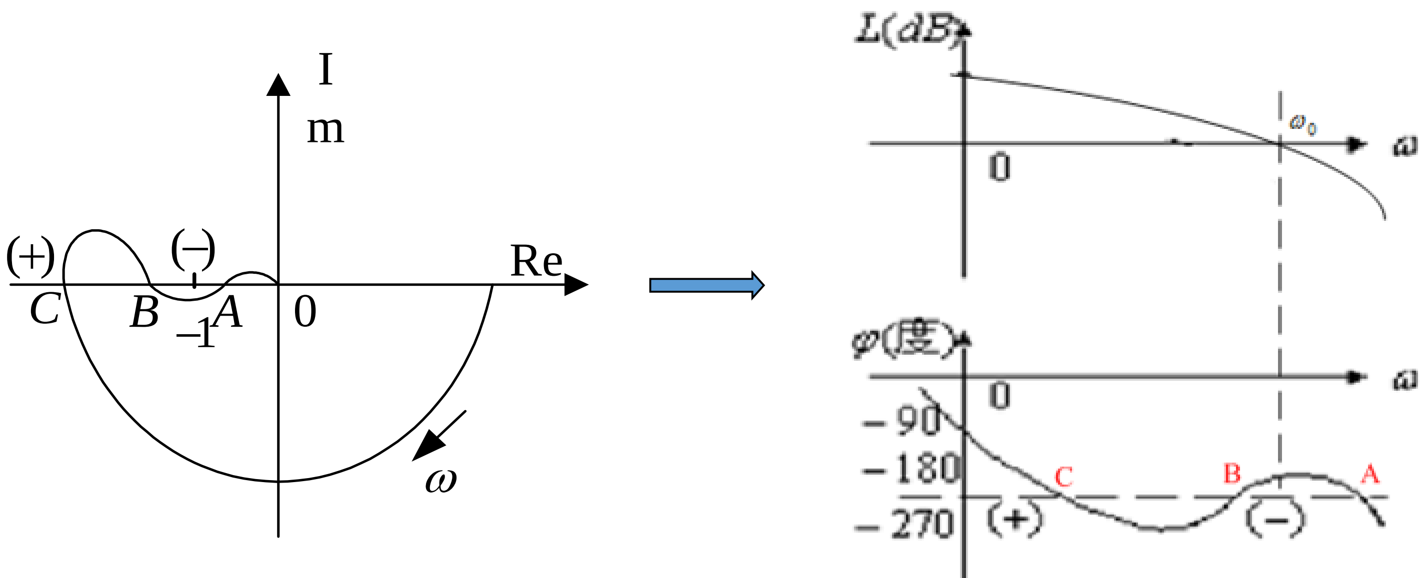
A=1的单位圆 → L = 0 dB的水平线

负实轴（ϕ = -180°的直线） → Φ = -180°的水平线

使$L(\omega)$=0时的频率称增益交界频率或开环截止频率、剪切频率，通常以ω_0表示。

开环极坐标图与开环对数坐标图的对应关系：

极坐标图（奈氏图）每穿越(-1, j0)点左侧负实轴一次，必在开环对数幅频特性$L(\omega)$>0的条件下，相频特性穿越 -180°线一次。正穿越对应于$\phi(\omega)$曲线自上而下穿越 -180°线，负穿越对应于$\phi(\omega)$曲线自下而上穿越 -180°线。



奈氏判据中自下而上穿越---正穿越---对数判据中自上而下穿越
奈氏判据中自上而下穿越---负穿越---对数判据中自下而上穿越

对数判据具体内容:

设ω_0为系统的增益交界频率（开环截止频率或剪切频率），N_+、N_-分别为正、负穿越次数，P 为系统开环右极点数，则闭环系统稳定的充要条件为:

在开环对数坐标图上，在$\omega<\omega_0$的频段内，相频特性穿越-180°线的次数为 。

$$N_+ - N_- = -\frac{P}{2}$$

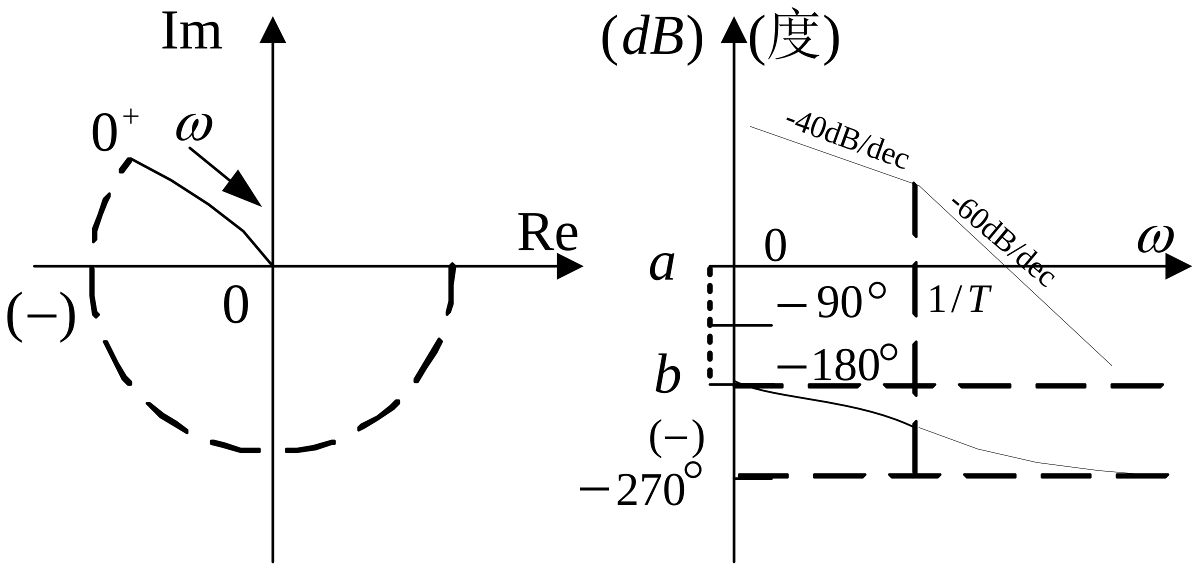
跟奈氏判据相比，为何变P/2?

5.5 对数判据

例5.8: 开环传递函数$G(s)H(s)=\dfrac{K_0}{s^2(Ts+1)}$，$T>0$ 判断闭环系统的稳定性。

解： 根据对数判据，**P=0**，闭环稳定应该满足 $N_+ - N_- = 0$，相应奈氏图如左下图，开环对数坐标图如右下图。

由于在ω=0→0$^+$时，在*GH*平面上*G*(s)*H*(s)的轨迹为辅助圆，从原点到辅助圆上点的向量，幅值*A*(ω)=∞，相角由0°～-180°，对应开环对数坐标图上的虚线*ab*（由于当ω=0时在对数坐标图上无法表示，所以用虚线标出。）



不论K_0为何值，开环对数频率特性图上的穿越次数不变，系统总是不稳定，即该系统为结构不稳定系统。

由图可知，闭环稳定则满足 $N_+ - N_- = 1-0=1$，故闭环系统不稳定。

稳定裕量

- $G(j\omega)H(j\omega)$轨迹通过特征点（-1,j0）时，最小相位系统处于临界稳定状态，此时阶跃响应呈等幅振荡。
- 在$G(j\omega)H(j\omega)$轨迹不包围特征点的最小相位系统中（稳定系统），曲线愈靠近特征点，阶跃响应振荡性愈强，所以可以用$G(j\omega)H(j\omega)$轨迹靠近特征点的程度来表示系统相对稳定程度——稳定裕量。
- 通常该靠近程度以相位裕量（Phase Margin，简称PM）和幅值裕量（增益裕量、Gain Margin，简称GM）来度量。

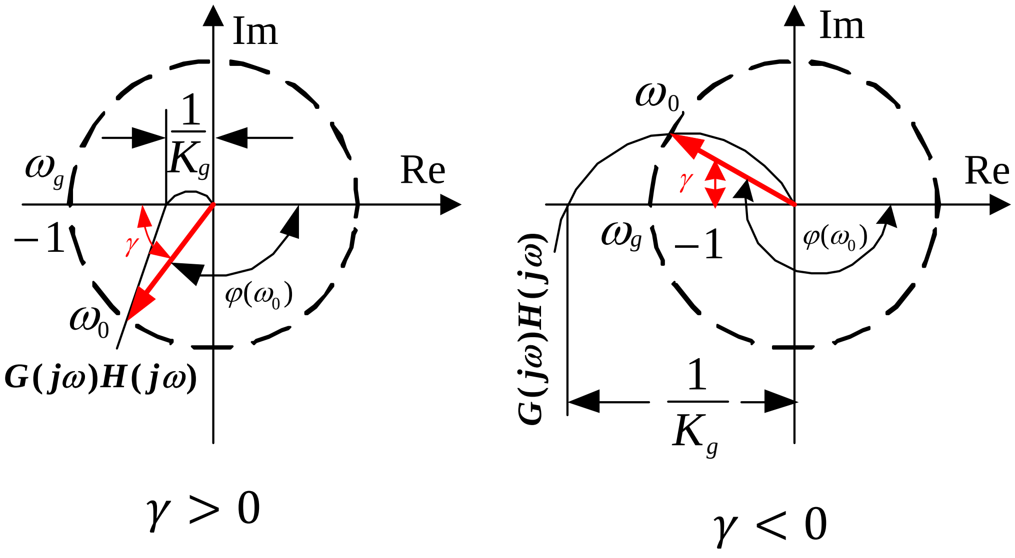
相位（相角）裕量

在增益交界频率ω_0上，使系统达到临界稳定状态所需附加的相位迟后量，叫相位裕量，以γ表示。

在开环极坐标图上，从原点到$G(j\omega)H(j\omega)$曲线与单位圆交点作一直线，从负实轴到该直线所转过的角度即为相位裕量γ，逆时针方向转为正，反之为负，即

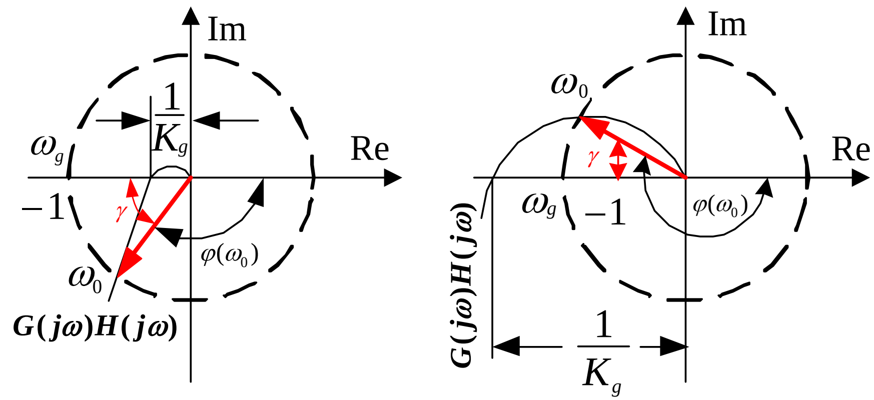
$$\varphi(\omega_0)-\gamma=-180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma=180^\circ+\phi(\omega_0)$$



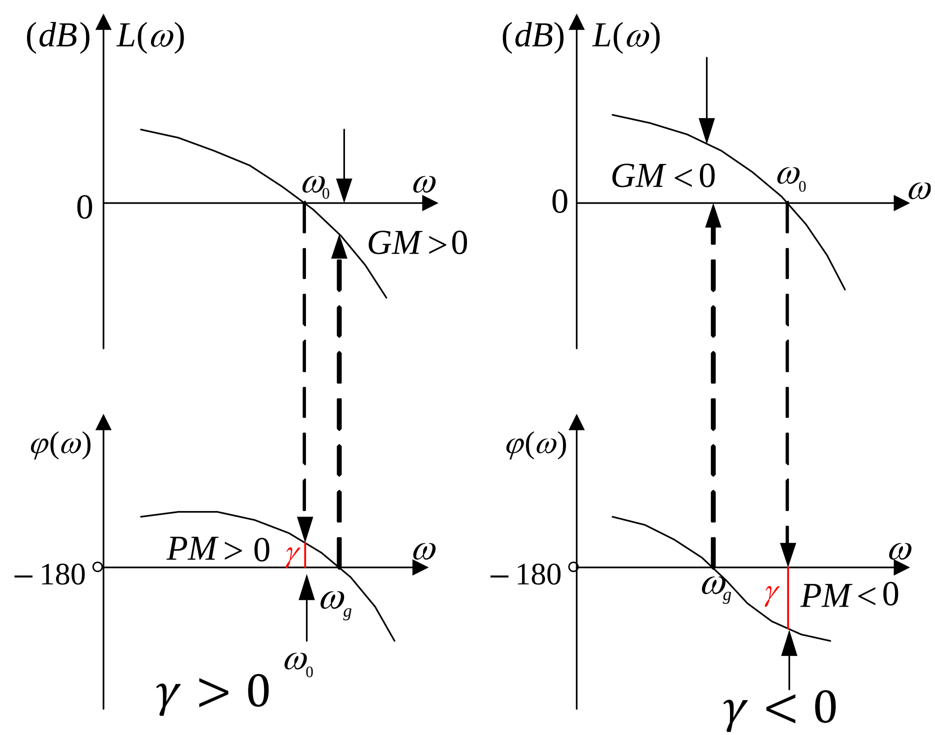
5.5 对数判据

相位裕量

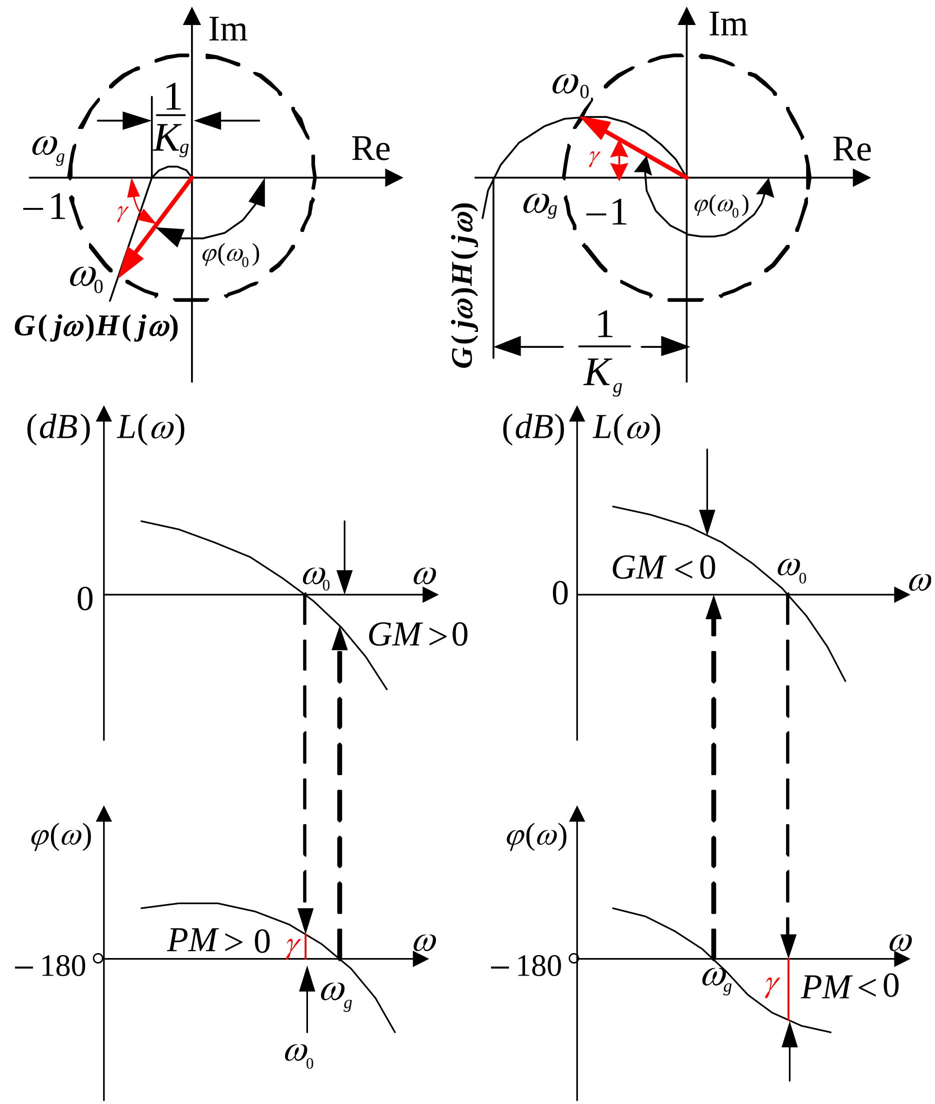


在对数坐标图上，γ 为在 $\omega=\omega_0$时$\phi(\omega)$曲线与-180°线之距离。

γ 在-180°线以上时 γ 为正，γ 在-180°线以下时 γ 为负。



增益裕量



在$\phi(\omega_g)$= -180°的频率上（ω_g *称为相位穿越频率*），使$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$=1所应增大的增益倍数，即 $K_g \cdot |G(j\omega)H(j\omega)|=1$，式中$K_g$为增益裕量，得：

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$$

一般增益裕量用分贝数表示：

$$K_g = -20\lg|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \quad (dB)$$

当K_g>1时，上式中增益裕量为正；当K_g<1时，增益裕量为负。

增益裕量

- 对于最小相位系统，若其相角随着ω增大而单调减小时，增益裕量和相位裕量均为正的系统，是稳定的，反之是不稳定的（对数判据即可得到该结论）。
- 仅用单一的相位裕量或增益裕量，往往不足以说明奈奎斯特曲线$G(j\omega)H(j\omega)$与特征点（-1，j0）的靠近程度，也即不足以说明系统相对稳定程度；所以一般应同时求出相位裕量和增益裕量。

例5.9： 已知单位反馈系统，（前向通道传函如右，）设K=4和10时，试确定系统的稳定裕量。

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)^3}$$

解：系统开环频率特性

$$G(j\omega)=\frac{K[(1-3\omega^2)-j\omega(3-\omega^2)]}{(1+\omega^2)^3}=\frac{K}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\angle-3arctg\omega$$

当$\phi(\omega_g)$= -180° 时，求相应的增益裕量，即：

$$\phi\left(\omega_g\right)=-3\arctan\omega_g=-180^\circ \quad 或 \quad j\frac{\omega_g\left(3-\omega_g{}^2\right)}{\left(1+\omega_g{}^2\right)^3}=0$$

则：

$$\omega_g=\sqrt{3}$$

当K=4时：

$$\left|G\left(j\omega_g\right)\right|=0.5 \quad\Rightarrow\quad K_g=\frac{1}{\left|G\left(j\omega_g\right)\right|}=2$$

5.5 对数判据

例5.9：

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)^3} \qquad G(j\omega)=\frac{K}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\angle -3\arctan\omega =\frac{K[(1-3\omega^2)-j\omega(3-\omega^2)]}{(1+\omega^2)^3}$$

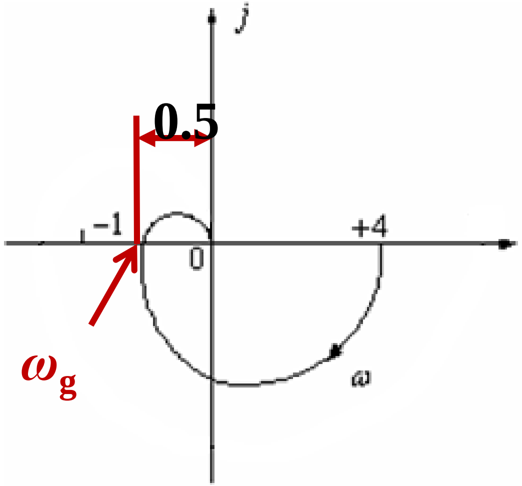
当K=4时，求开环截止频率ω_0：

$$|G(j\omega_0)|=\left|\frac{K}{\left(1+\omega_0{}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{K=4}=1 \quad\Rightarrow\quad \omega_0=\sqrt{16^{\frac{1}{3}}-1}=1.233$$

则：

$$\phi(\omega_0)=-3\arctan\omega_0=-152.9^\circ$$

$$\Rightarrow\quad \gamma=180^\circ+\phi(\omega_0)=27.1^\circ$$



所以当K=4时，$K_g>1$且$\gamma>0$，则闭环系统稳定。

绘制K=4时奈氏曲线，根据奈氏判据可知系统闭环稳定。

5.5 对数判据

例5.9：

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)^3}\qquad G(j\omega)=\frac{K}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\angle-3\arctan\omega=\frac{K[(1-3\omega^2)-j\omega(3-\omega^2)]}{(1+\omega^2)^3}$$

当K=10时，ω_g不变，即 $\omega_g=\sqrt{3}$ **则：** $\left|G\left(j\omega_g\right)\right|=1.25\Rightarrow K_g=\dfrac{1}{\left|G\left(j\omega_g\right)\right|}=0.8$

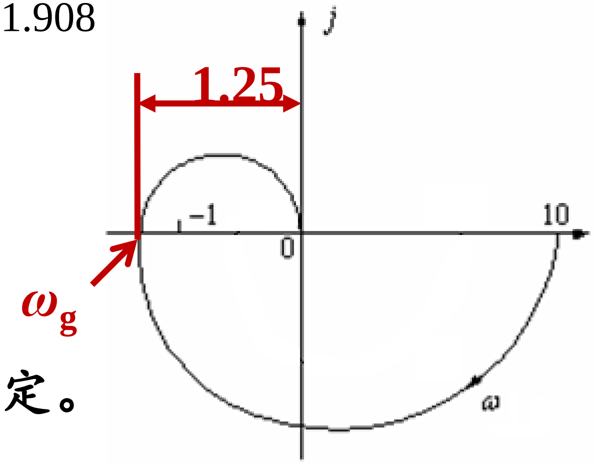
当K=10时，求开环截止频率ω_0：

$$\left|G\left(j\omega_0\right)\right|=\left|\frac{K}{\left(1+\omega_0^{\;2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{K=10}=1\quad\Rightarrow\quad\omega_0=\sqrt{100^{\frac{1}{3}}-1}=1.908$$

则：

$$\phi\left(\omega_0\right)=-3\arctan\omega_0=-187.0^\circ$$

$$\Rightarrow\quad\gamma=180^\circ+\phi\left(\omega_0\right)=-7.0^\circ$$



所以当K=10时，$K_g<1$且$\gamma<0$，则闭环系统不稳定。

绘制K=10时奈氏曲线，根据奈氏判据可知系统闭环不稳定。

5.5 对数判据

例5.9：

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)^3} \qquad G(j\omega)=\frac{K}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}\angle -3\arctan\omega =\frac{K[(1-3\omega^2)-j\omega(3-\omega^2)]}{(1+\omega^2)^3}$$

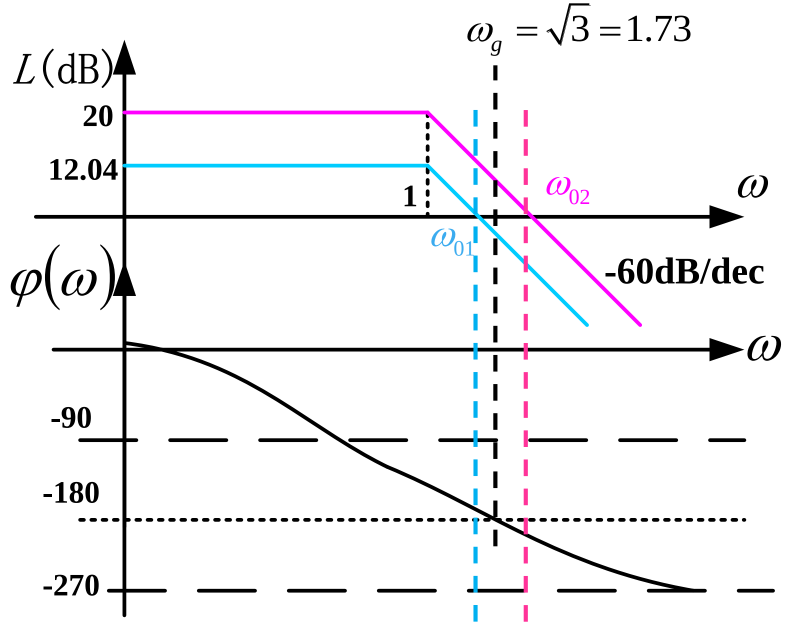
补充： 绘系统Bode图求解。

当K=4时：

$$\frac{12.04}{\lg 1-\lg\omega_{01}}=-60 \Rightarrow \omega_{01}=1.59$$

在ω<ω_{01}的频段内，相频特性穿越−180°线的次数为0，系统稳定

$$N_+-N_-=0-0=-\frac{P}{2} \quad (P=0)$$



当K=10时：

$$\frac{20}{\lg 1-\lg\omega_{02}}=-60 \Rightarrow \omega_{02}=2.15$$

在ω<ω_{02}的频段内，相频特性穿越−180°线的次数为 $N_+-N_-=1-0\neq-\frac{P}{2} \quad (P=0)$

所以系统不稳定

5.5 对数判据

从上例总结说明：利用稳定裕量判定系统稳定性

- 根据奈氏图计算为精确计算，但计算较复杂；根据Bode图计算虽然为近似计算，但计算简便。尽管误差很大，但一般不影响稳定性判断。

- 稳定裕量仅适用于最小相位系统。

从对数频率特性分析系统的稳态性能

稳态误差系数K_p、K_v、K_a，描述了系统对减少误差的能力，而且系统的型数（开环传函中积分环节的个数）越大，系统的稳态精度越高。

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
Ⅱ型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

从对数频率特性分析系统的稳态性能

N型系统的开环频率特性为：

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K_0\prod_{j=1}^{m}(1+j\omega T_j)}{S^N\prod_{i=1}^{n-N}(1+j\omega T_i)}\qquad n>m$$

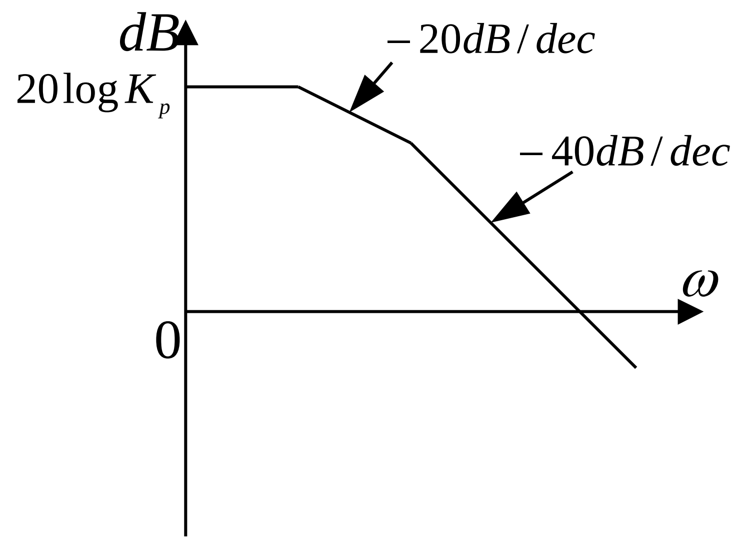
开环对数幅频特性低频段的斜率与系统型号N有关，低频渐近线的位置与误差系数的大小有关，也就是说，K_p、K_v、K_a，主要由低频特性决定，即由 $20\lg\frac{K_0}{s^N}$ 决定。因此，控制系统对给定输入信号是否引起稳态误差以及误差的大小都可通过分析开环对数幅频特性低频段的特性来确定。

从对数频率特性分析系统的稳态性能

1) 0型系统

0型系统对数幅频特性如图所示，在低频段有：

$$\lim_{\omega\to 0} G(j\omega)H(j\omega)=K_p$$



0型系统对数幅频特性在低频段是一条水平线，高度为：

$$20\lg K_0 = 20\lg K_p$$

当系统开环对数幅频特性低频段是水平线时（为0型系统），系统是静态有差系统，跟随阶跃输入信号时有稳态误差，误差大小与开环对数幅频特性低频段高度有关（$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$）。

从对数频率特性分析系统的稳态性能

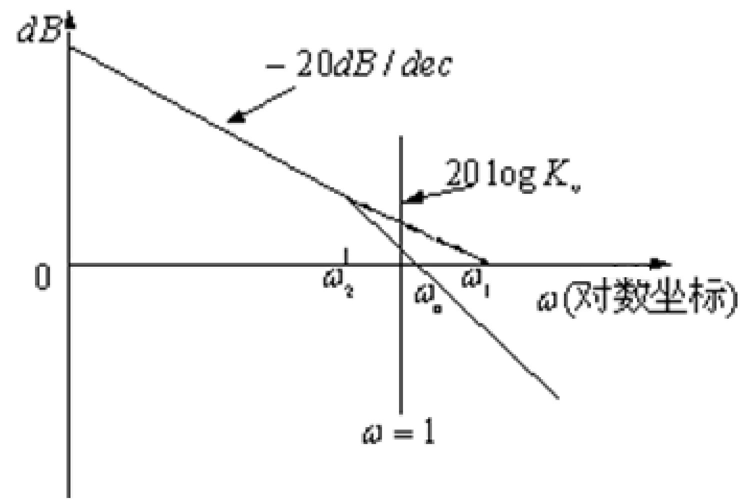
1) I型系统

在$\omega \ll \omega_2$ (转角频率)时，有： $G(j\omega)=\dfrac{K_0}{j\omega}$

低频渐近线为：$L(\omega)=20\lg K_0-20\lg\omega$ 对于I型系统：$K_v=K_0$。

当$\omega=1$时，$L(\omega)=20\lg K_v$； 当$L(\omega)=0$时，$\omega=K_v$ (图中ω_1)

- □ I型系统开环对数幅频特性起始阶段的斜率是 -20 dB/dec；
- □ 当$\omega=1$时，低频渐近线的高度是$20\lg K_v$；
- □ 低频渐近线与0 dB水平线的交点频率$\omega_1=K_v$。



从对数频率特性分析系统的稳态性能

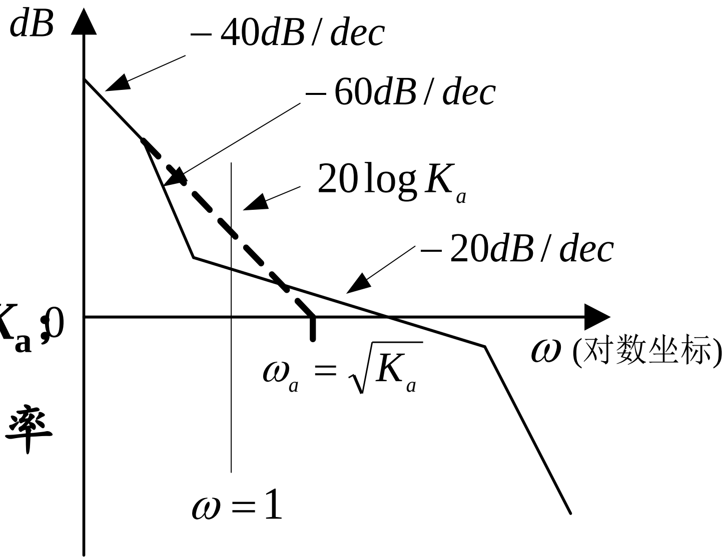
3) II型系统

在$\omega<<\omega_1$ (转角频率)时，有： $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K_a}{(j\omega)^2}$ II型系统：$K_a=K_0$。

所以：低频渐近线为：$L(\omega)=20\lg K_a-40\lg\omega$

当$\omega=1$时，$L(\omega)=20\lg K_a$；

当$L(\omega)=0$时，$\omega_a=\sqrt{K_a}$



- II型系统低频的斜率是 -40 dB/dec；
- 当$\omega=1$时，低频渐近线的值是$20\lg K_a$；
- 低频渐近线与0 dB水平线的交点频率ω_a等于$\sqrt{K_a}$ 。

5.6 用频率法分析系统品质

例： 最小相位系统Bode图渐近线如图所示，求其开环传递函数并分析稳态误差

解：包括的环节有： $\frac{1}{s}$ $\quad \frac{1}{\frac{s}{0.002}+1}$ $\quad \frac{s}{0.02}+1$ $\quad \frac{1}{\frac{s}{0.2}+1}$

所以，开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K\left(\frac{s}{0.02}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.002}+1\right)\left(\frac{s}{0.2}+1\right)}$$

*K*待定

当ω=0.002时，其幅值近似可等于

$$20\lg\frac{K*1}{0.002*1*1}=20lg\frac{K}{0.002},$$

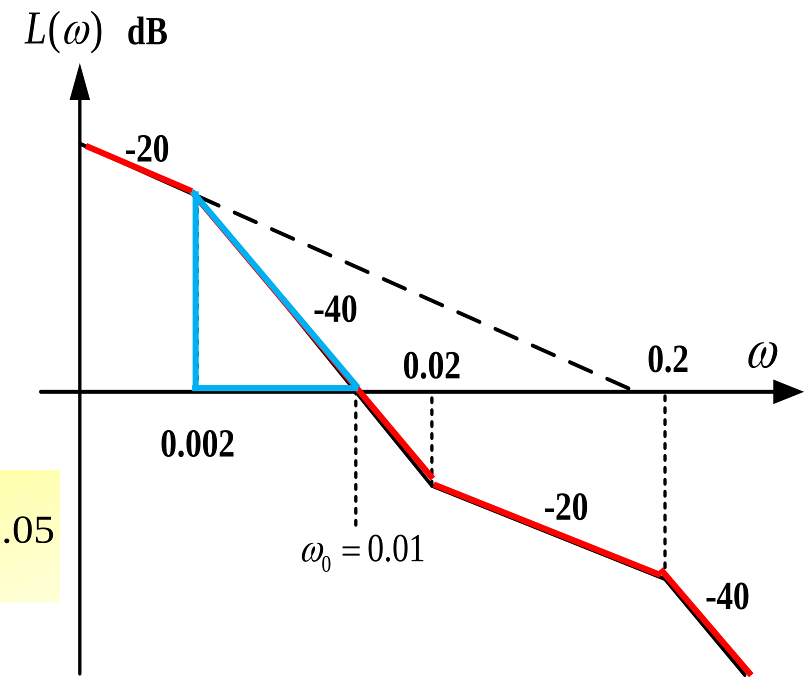
根据三角形的关系，得：

$$\frac{20\lg\frac{K}{0.002}}{\lg 0.002-\lg\omega_0}=-40$$

$$\Rightarrow 20\lg\frac{K}{0.002}=-40\lg\frac{0.002}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow 20\lg\frac{K}{0.002}=20\lg\left(\frac{\omega_0}{0.002}\right)^2$$

$$\Rightarrow K=\frac{\omega_0^2}{0.002}\bigg|_{\omega_0=0.01}=0.05$$

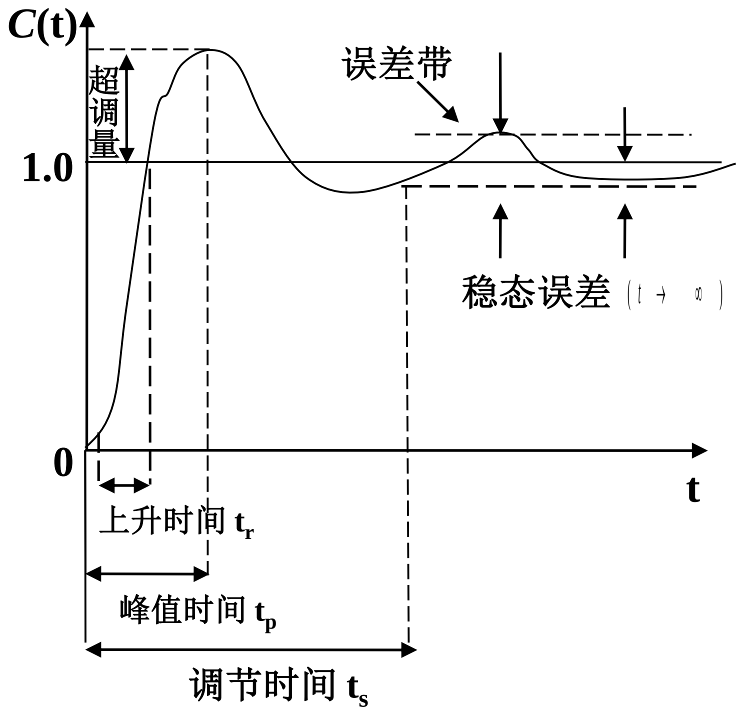


则I型系统，$K_p=\infty$，$K_v=K=0.05$，$K_a=0$；$e_{ss}=0$，$1/K_v=20$，∞

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系

- 在频域中对系统进行分析时，除了稳定性分析外，还要对系统的动态性能进行分析。
- 频域性能指标有：幅值穿越频率ω_0，相位穿越频率ω_g， 相位裕量γ，增益裕量 K_g，谐振频率ω_r，谐振峰值M_r，系统带宽和带宽频率(ω_c/ω_b)等。



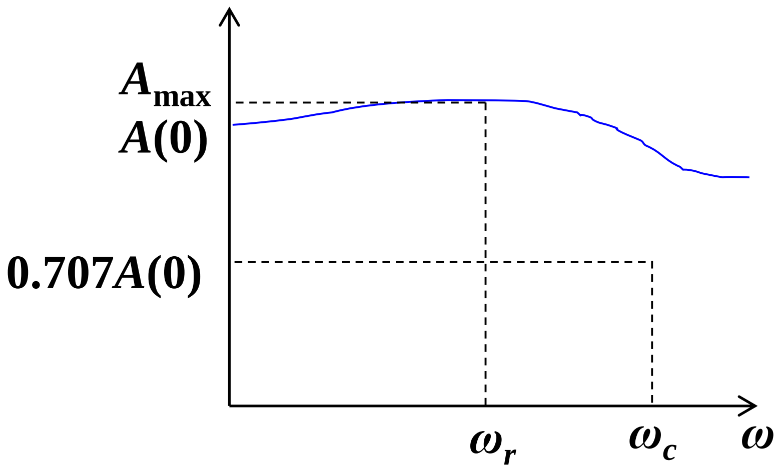
5 5.6 用频率法分析系统品质

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系

$$G_0(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \Rightarrow G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- **闭环频率性能指标：**
  - 零频值$A(0)$和A_{max}
  - 谐振频率ω_r和谐振峰值M_r
  - 带宽频率ω_c，$L(\omega_c)$ = -3dB



非对数坐标图

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系

谐振峰值和系统超调量的关系

对于二阶系统：

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (\zeta \le \frac{1}{\sqrt{2}}) \qquad \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{M_r^2}}}{2}} (M_r \ge 1)$$

超调量：

$$\sigma_p = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad \Rightarrow \sigma_p = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}} \times 100\%$$

则M_r在1.2~1.5时，σ_p=20%~30%，系统将获得满意的过渡过程。

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系

谐振频率及系统带宽与时域指标的关系

谐振频率： $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad (0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}})$

峰值时间： $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\quad \Rightarrow \omega_r t_p = \pi\sqrt{\dfrac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}}$

调节时间： $t_s = \dfrac{1}{\zeta\omega_n}\ln\dfrac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$ $\quad \Rightarrow \omega_r t_s = \dfrac{1}{\zeta}\sqrt{1-2\zeta^2}\ln\dfrac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$

对于给定的阻尼比，二阶系统的谐振频率ω_r和t_p、t_s成反比。

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系

二阶系统带宽频率可由下式求出：

$$\left|\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}\right|_{\omega=\omega_c}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c=\omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$$

$$\Rightarrow \omega_c t_p=\pi\sqrt{\frac{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}{1-\zeta^2}} \qquad \omega_c t_s=\frac{1}{\zeta}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}\ln\frac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

同样，对于给定的阻尼比，二阶系统的带宽频率ω_c和t_p、t_s成反比。一般来说，频带宽的系统有利于提高响应速度，但同时又容易引入高频噪声，应均衡考虑。

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

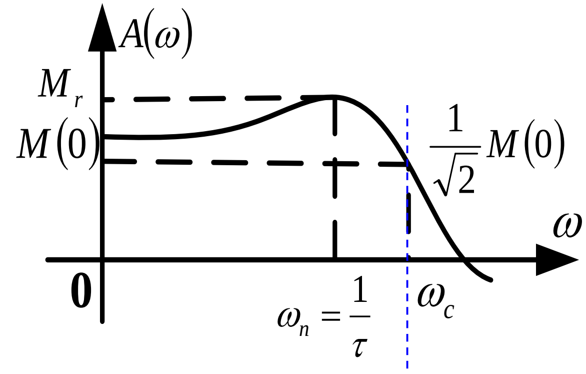
（1）闭环频域指标与时域指标的关系

闭环频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2-\omega^2)+j2\zeta\omega_n\omega}$$

更正P.184

$$|G(j\omega)|=M(\omega)=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}$$



令 $M(\omega_c)=0.707$ $\qquad \frac{\omega_c}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$ $\qquad (0\le\zeta\le0.707)$

由此可确定动态性能指标。带宽：$0\le\omega\le\omega_c$

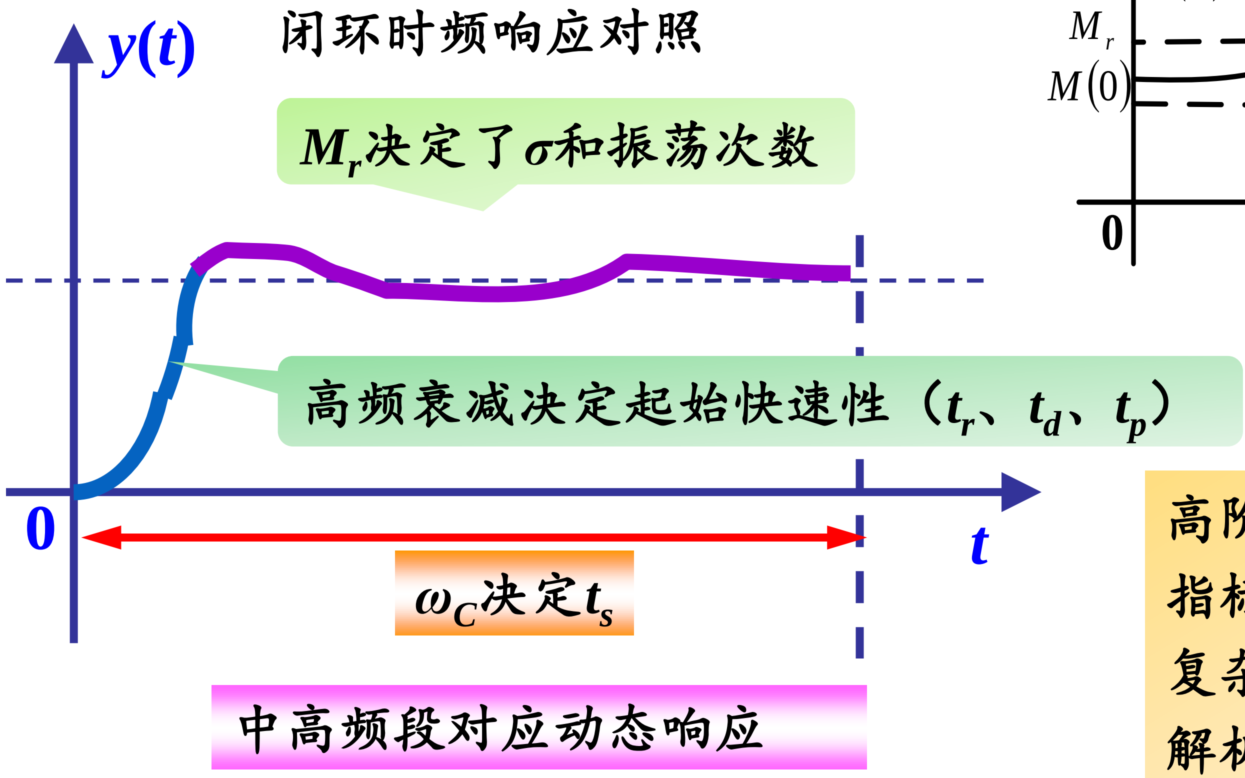
ζ一定，$t_s=\frac{3\sim4}{\zeta\omega_n}$与$\omega_c$成反比

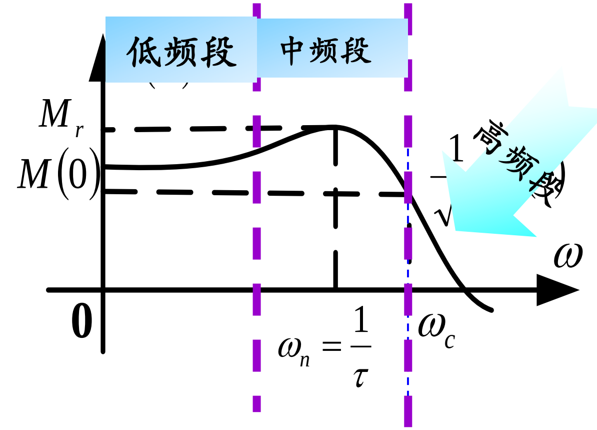
带宽愈大，响应愈快。

5.6 用频率法分析系统品质

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（1）闭环频域指标与时域指标的关系





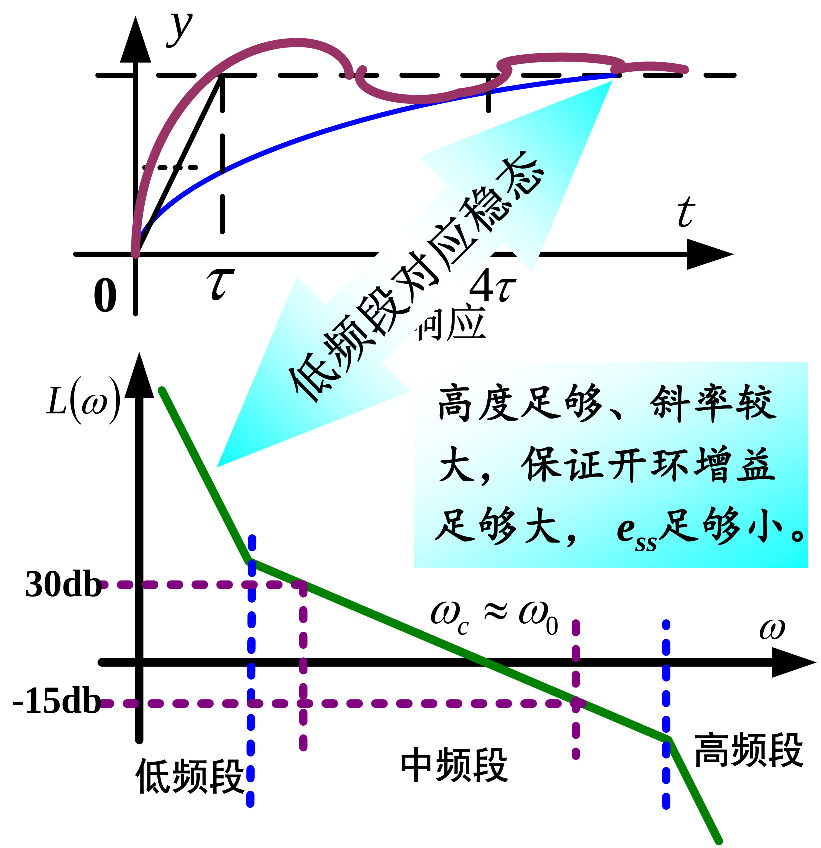
高阶系统频域和时域指标的对应关系比较复杂，很难用严格的解析式来表达。

5.6 用频率法分析系统品质

从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

（2） 开环频率特性与时域响应的关系

求开环频率特性比求闭环频率特性方便，且最小相位系统的幅、相频率特性有确定的对应关系，工程上常用开环对数频率特性来分析和设计系统。

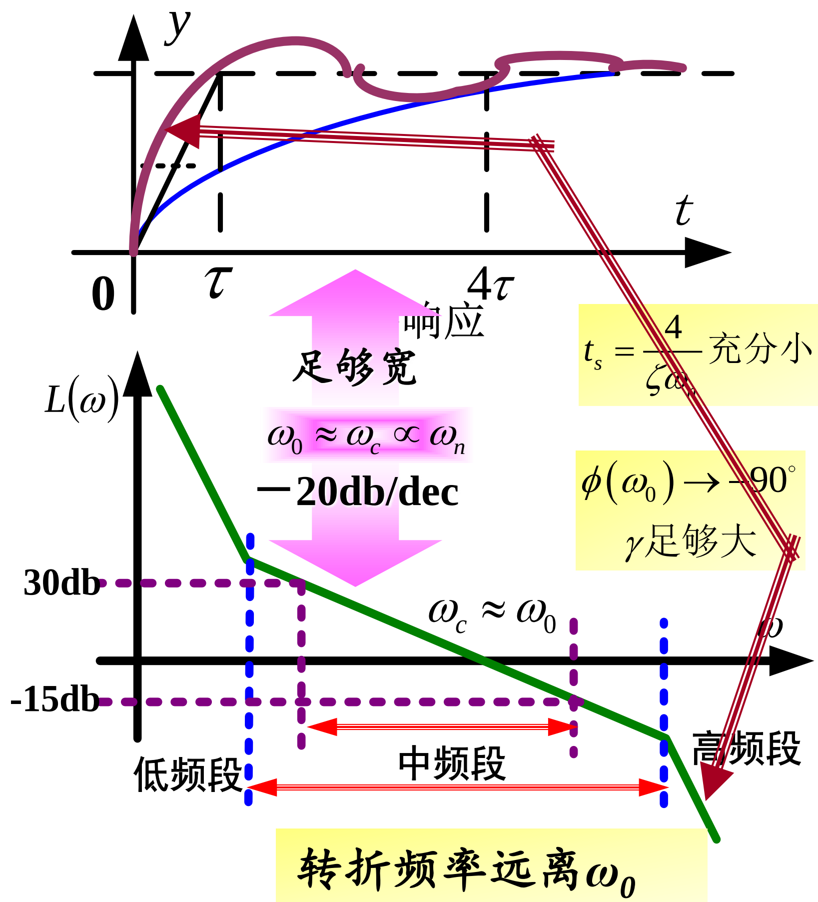


从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

(2) 开环频率特性与时域响应的关系

中频段决定了动态响应的快速性和系统的稳定裕量。

高频段快速衰减(斜率-40dB/dec)以上，有效滤除高频噪声；转折频率远离ω_0，保证足够带宽且t_r、t_d、t_p等尽量小。以上满足可对高频段近似处理。

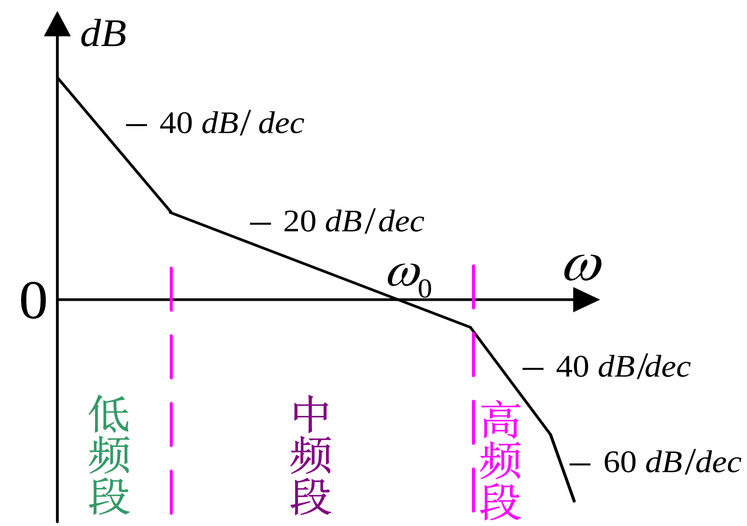


从频域响应和时域响应的对应关系分析系统的动态性能

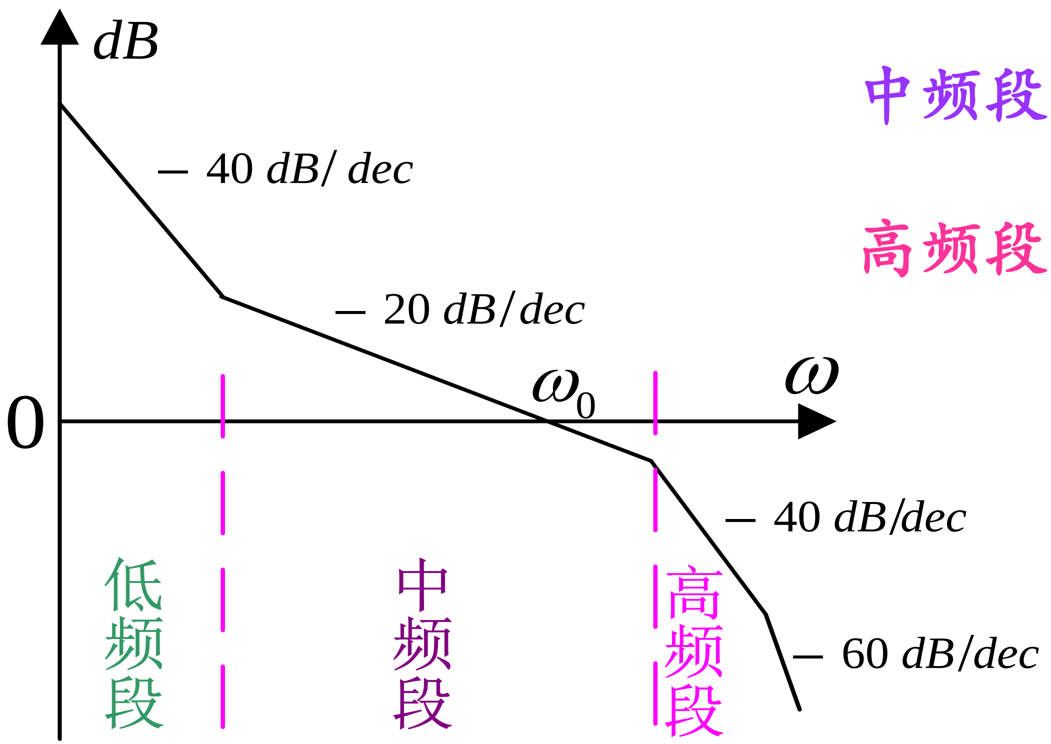
（2） 开环频率特性与时域响应的关系

开环频率特性与时域响应的关系通常分为三个频段来分析：

- 低频段(第一个转折频率以前的频段)的频率特性形状主要影响系统瞬态响应的结尾段，影响系统的稳态指标；
- 中频段(开环截止频率附近的频段)主要影响瞬态响应的中间段，时域响应的动态指标主要是由中频段的形状所决定的(时域响应的快速性、振荡性)。
- 高频段(中频段以后的频段)主要影响瞬态响应的起始段；



典型系统的开环频率特性



低频段：一定的高度和斜率

中频段：足够的宽高度

高频段：迅速衰减

任务： 通过在电机—负载模型中引入弹性簧片的弹性项，研究磁盘驱动读取系统的频率响应特性。

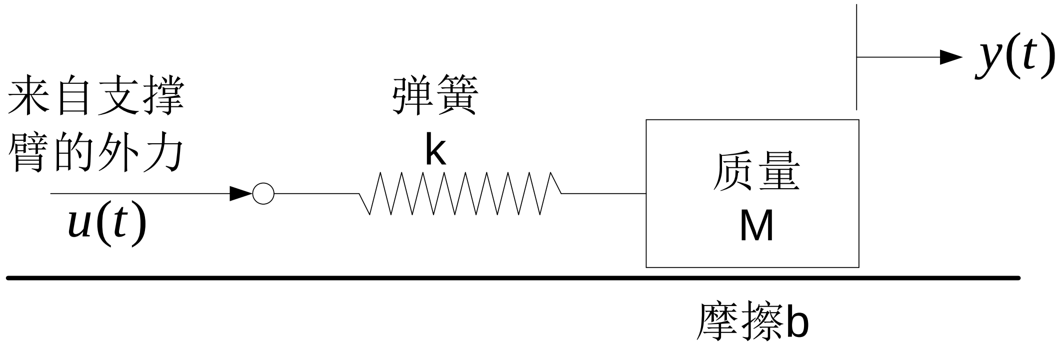


图5.46 描述磁头与簧片的弹簧—质量—阻尼系统模型

弹簧—质量—阻尼系统的传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + (2\zeta s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2}$$

5.8连续设计示例：硬盘读写系统的频率法分析

包括簧片弹性影响的磁头位置控制系统模型。

其中磁头与簧片的典型参数值：

$$\zeta = 0.3$$

$$\omega_n = 18.85\times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$f_n = 3000 \text{ Hz}$$

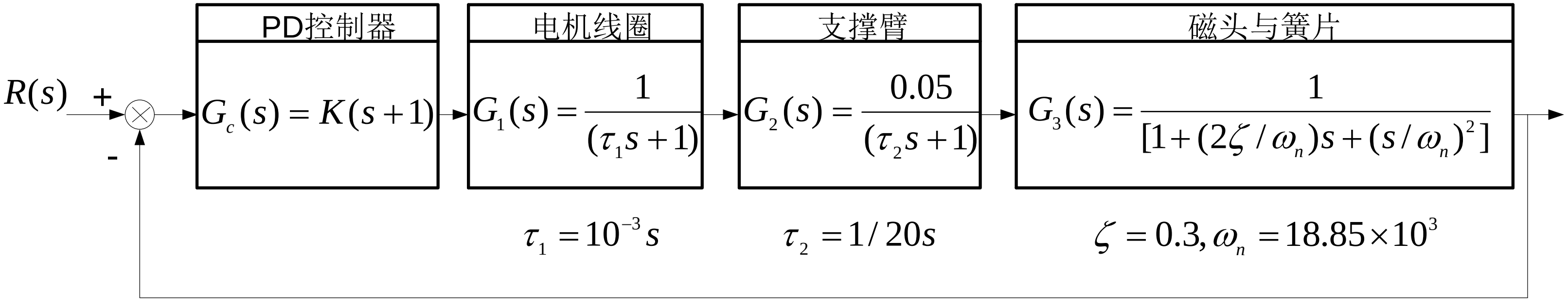


图5.47 磁头位置控制系统模型，其中包括了簧片的弹性影响

5.8连续设计示例：硬盘读写系统的频率法分析

取K=400，得磁盘驱动读写系统幅频特性草图。

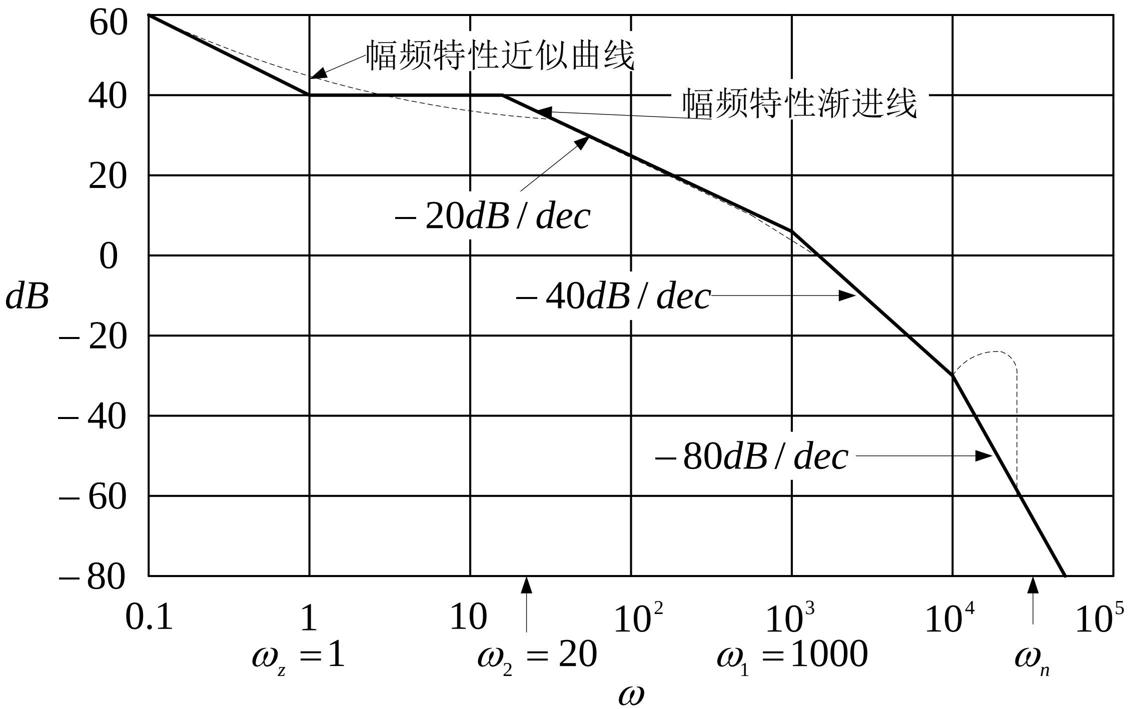


图5.48 图5.47所示系统的幅频特性草图

在谐振频率ω_n附近，近似曲线比渐近线高出约10dB，因此使用频率特性草图时要尽量避开谐振频率。

磁盘驱动读取系统的开环和闭环幅频特性曲线。

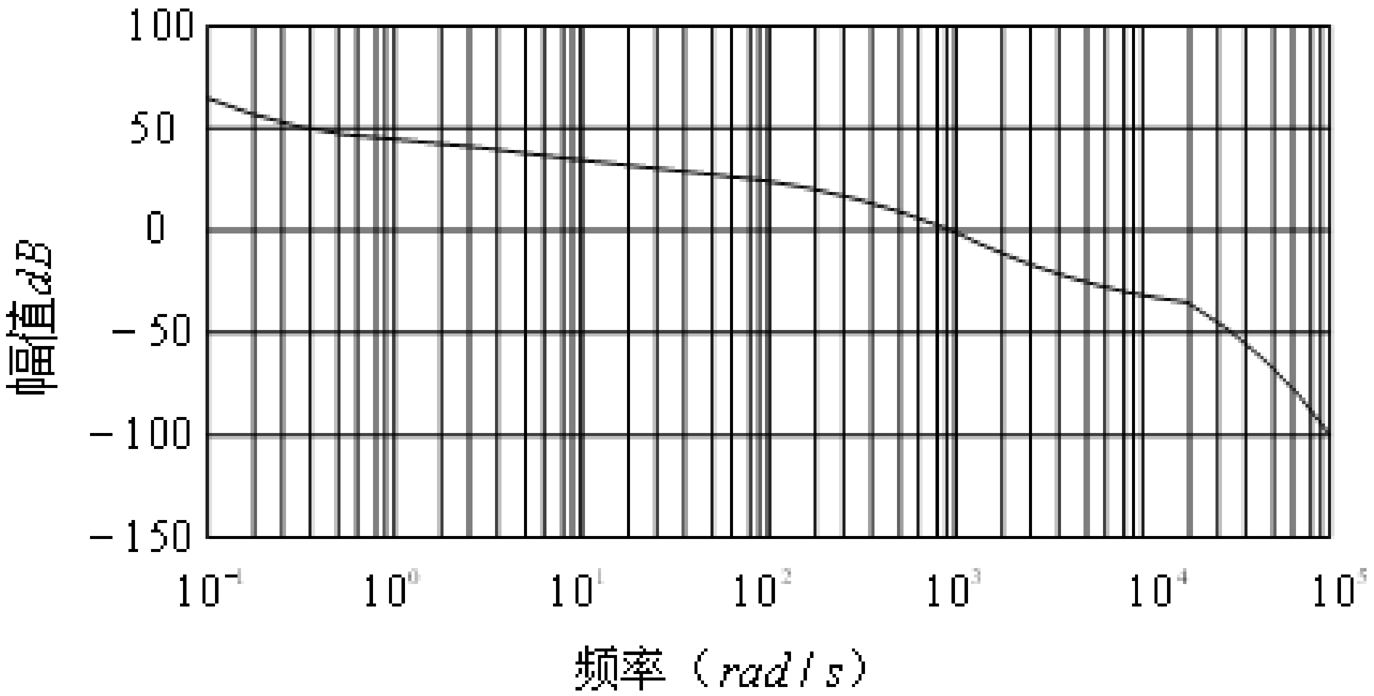


图5.49(a) 图5.47所示系统的开环幅频特性图

5.8连续设计示例：硬盘读写系统的频率法分析

闭环系统带宽ω_c=1600 rad/s，调节时间T_s=8.3 ms。

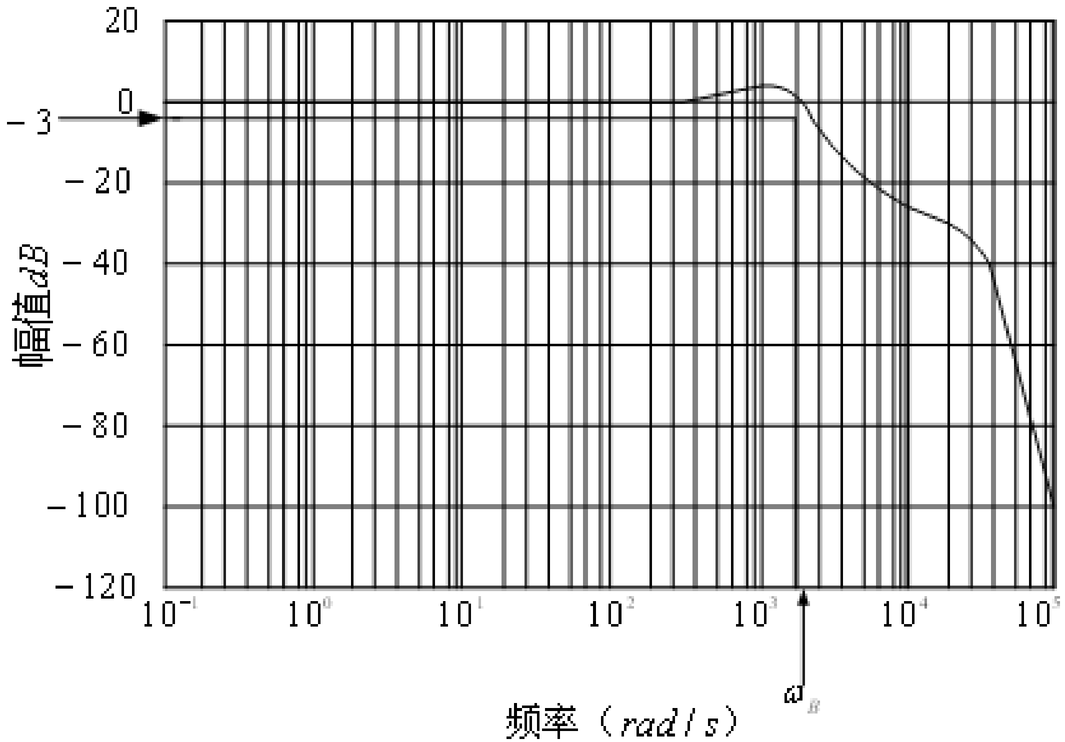


图5.49(b) 图5.47所示系统的闭环幅频特性图

当K=400，系统阶跃响应如图所示：

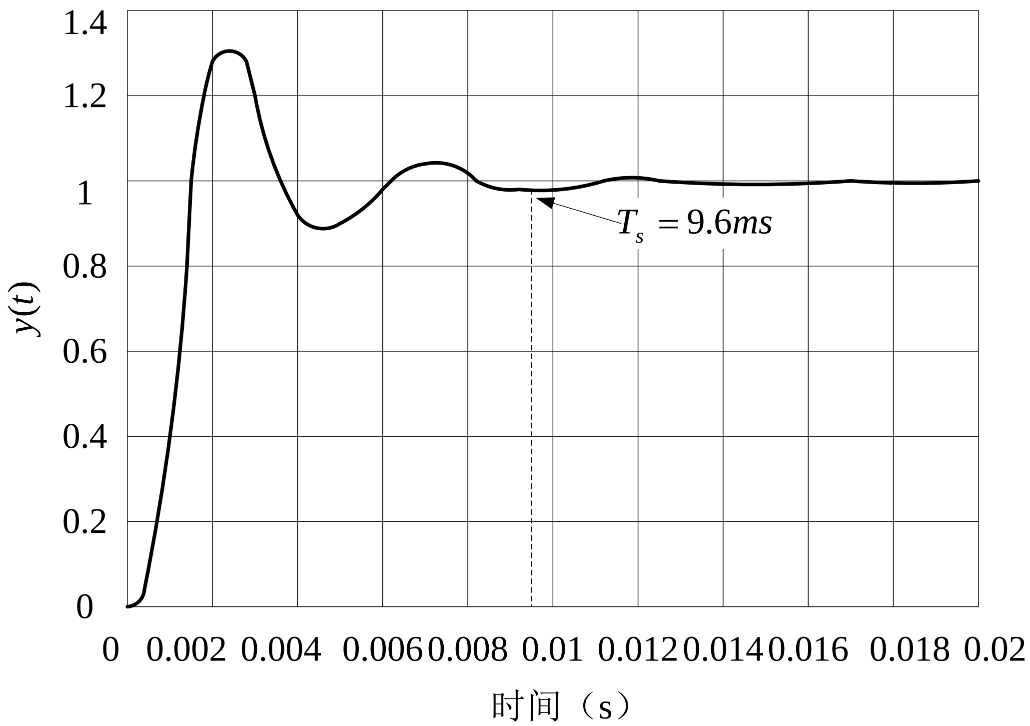


图5.50 系统的阶跃响应

PD控制器改善了动态性能。

对数判据

在开环对数坐标图上，在ω<ω_0的频段内，相频特性穿越−180°线的次数为 $N_+ - N_- = -\frac{P}{2}$

稳定裕量：相位裕量、增益裕量

相位裕量 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_0)$

增益裕量 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ \quad K_g = -20\log|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$

对数频率特性分析系统的稳态性能

0型系统：低频段水平线，静态有差系统，阶跃输入时误差与低频段高度有关。$20\lg K_0 = 20\lg K_p$

I型系统：起始阶段斜率-20dB/dec，ω=1时低频渐近线高度20lgKv，低频渐近线与0 dB水平线的交点频率$\omega_1=K_v$

II型系统：低频斜率-40dB/dec，ω=1时，低频渐近线的值是20lgK_a，低频渐近线与0 dB水平线的交点频率ω_a等于$\sqrt{K_a}$ 。

闭环频域指标与时域指标的关系

谐振峰值与超调量

$$\Rightarrow \sigma_p = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}} \times 100\%$$

谐振频率与峰值时间、调节时间

$$\Rightarrow \omega_r t_p = \pi\sqrt{\frac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_r t_s = \frac{1}{\zeta}\sqrt{1-2\zeta^2}\ln\frac{\pi}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

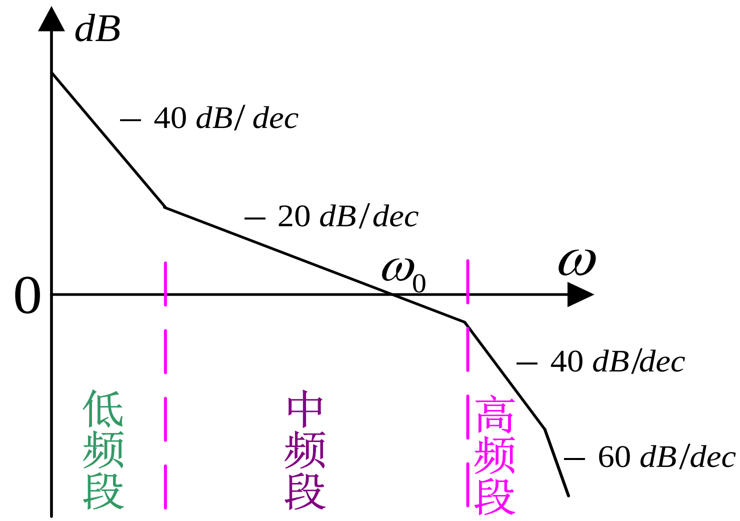
带宽频率与峰值时间、调节时间

$$\Rightarrow \omega_b t_p = \pi\sqrt{\frac{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_b t_s = \frac{1}{\zeta}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}\ln\frac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

开环频率特性与时域响应的对应关系

- 低频段(第一个转折频率以前的频段)的频率特性形状主要影响系统瞬态响应的结尾段，影响系统的稳态指标；
- 中频段(开环截止频率附近的频段)主要影响瞬态响应的中间段，时域响应的动态指标主要是由中频段的形状所决定的(时域响应的快速性、振荡性)。
- 高频段(中频段以后的频段)主要影响瞬态响应的起始段；



低频段:一定的高度和斜率

中频段:足够的宽高度

高频段:迅速衰减

典型系统的开环频率特性

频率特性的基本概念

- ✓ 幅频特性、相频特性
- ✓ 正弦输入信号，稳态输出幅值与输入信号幅值之比，输出信号与输入信号相位位移

三种频率特性图

- ✓ 对数坐标图（伯德图、bode图）
- ✓ 极坐标图（奈奎斯特图，Nyquist图）

典型环节的频率特性

- ✓ 比例、积分、惯性、振荡环节
- ✓ 微分（纯微分、比例微分、二阶微分），与积分、惯性、振荡倒数关系
- ✓ 延迟、不稳定环节

开环对数幅频特性渐近曲线的绘制方法

1. 传递函数的型式（时间常数型式）；
2. 算出各环节的转角频率及20log*K*的dB值，并将转角频率从低到高排列；（环节划分）
3. 过 ω=1，L=20log*K* 这一点，作斜率为 -20*N* dB/dec的直线（*N*为串联的积分环节数）；
4. 从低频段开始，每经过一个转角频率，按环节性质改变一次渐近线的斜率；
5. 若要画精确曲线，则在各转角频率附近利用误差曲线进行修正。

开环对数相频特性渐近曲线的绘制方法

各环节相频特性叠加，工程上往往用分析法计算各相频特性上几个点，然后连接成线。

系统开环极坐标图的绘制

概略（大致）开环幅相曲线（极坐标图）反映开环频率特性的三个重要因素：

1）开环幅相曲线的起点（$\omega=0_+$）和终点（$\omega=\infty$）。

2）开环幅相曲线与实轴的交点。

设$\omega=\omega_x$时，$G(j\omega_x)H(j\omega_x)$的虚部为：

$$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$$

或 $\varphi(\omega_x)=\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi$，$k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

3）开环幅相曲线的变化范围（象限、单调性）。

起点
终点
走向

映射定理

✓ F(s)为单值有理复变函数，Cs为s平面上的封闭曲线，设P及Z分别表示F(s)在Cs内的极点数和零点数。当s沿顺时针方向通过Cs运动一周时，s点映射到F平面上的轨迹C_F顺时针方向包围原点的次数为N=Z-P，若N为负，则表示C_F逆时针方向

奈氏判据

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

$$\Rightarrow F(s)=1+G(s)H(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)+K\prod_{j=1}^{m}(s+Z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+P_i)}$$

*F(s)*的零点＝闭环特征方程的根或闭环极点

*F(s)*的极点＝系统的开环极点

若Z= *F(s)*的右零点数(闭环系统的右极点数)

P= *F(s)*的右极点数(开环系统的右极点数)

如果闭环系统稳定，则Z=0，N= -P，即闭环系统稳定的条件是：C_F逆时针方向包围原点的次数等于系统的开环右极点数。

奈氏判据

$C_{GH}: G(j\omega)H(j\omega)$

*F*平面的原点=*Nquist*平面的(-1, *j*0)点。

$C_F: F(j\omega)=1+G(j\omega)H(j\omega)$

因此*闭环系统稳定的条件*可重新描述为

当s顺时针方向通过奈氏轨迹时，*G* (*j*ω)*H*(*j*ω)轨迹逆时针方向包围(-1, *j*0)点的次数等于系统的开环右极点数。（*Z*=0，*N*= -*P*）

闭合曲线包围特征点圈数（次数）N的计算

设N为闭合曲线穿越 (-1, *j*0)点左侧负实轴的次数，N_+表示闭合曲线从下向上穿越的次数和，N_-表示闭合曲线从上向下穿越的次数和，则：

$$N=N_+-N_-$$

□ 修改后的奈氏轨迹

$G(s)H(s)$轨迹由开环极坐标图和辅助圆构成。

□ 对开环传递函数$G(s)H(s)$的N型系统($N\geq 1$)奈氏稳定判据可叙述为：

✓ 如果$G(s)H(s)$在右半s平面上有P个极点，则闭环系统稳定的充要条件为，s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹逆时针方向包围(-1, j0)点P次。

✓ 对于N型最小相位系统，闭环系统稳定的充要条件为，当s顺时针方向通过修改后的奈氏轨迹时，$G(s)H(s)$轨迹不包围(-1, j0)点。

□ 对数判据

在开环对数坐标图上，在ω<ω_0的频段内，相频特性穿越−180°线的次数为 $N_+ - N_- = -\frac{P}{2}$

□ 稳定裕量：相位裕量、增益裕量

相位裕量 $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_0)$

增益裕量 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ $K_g = -20\log|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$

□ 对数频率特性分析系统的稳态性能

0型系统：低频段水平线，静态有差系统，阶跃输入时误差与低频段高度有关。$20\lg K_0 = 20\lg K_p$

I型系统：起始阶段斜率-20dB/dec，ω=1时低频渐近线高度20lgKv，低频渐近线与0 dB水平线的交点频率$\omega_1 = K_v$

II型系统：低频斜率-40dB/dec，ω=1时，低频渐近线的值是20lgK_a，低频渐近线与0 dB水平线的交点频率ω_a等于$\sqrt{K_a}$ 。

闭环频域指标与时域指标的关系

谐振峰值与超调量

$$\Rightarrow \sigma_p = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r-\sqrt{M_r^2-1}}{M_r+\sqrt{M_r^2-1}}}} \times 100\%$$

谐振频率与峰值时间、调节时间

$$\Rightarrow \omega_r t_p = \pi\sqrt{\frac{1-2\zeta^2}{1-\zeta^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_r t_s = \frac{1}{\zeta}\sqrt{1-2\zeta^2}\ln\frac{\pi}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

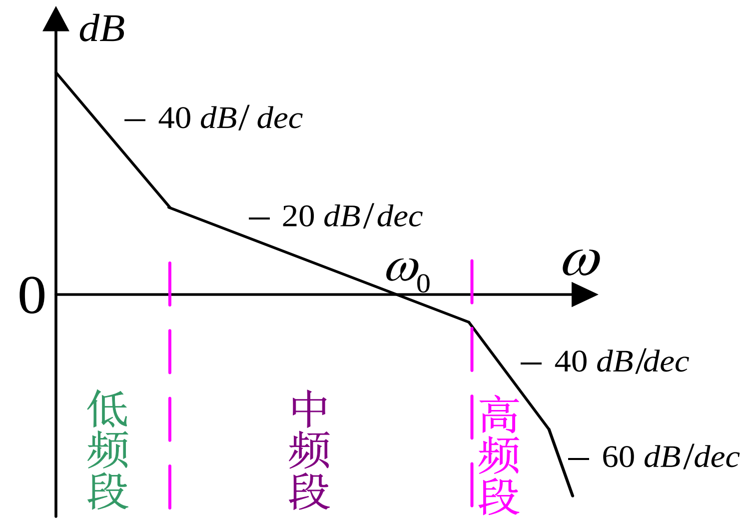
带宽频率与峰值时间、调节时间

$$\Rightarrow \omega_b t_p = \pi\sqrt{\frac{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_b t_s = \frac{1}{\zeta}\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}\ln\frac{1}{0.05\sqrt{1-\zeta^2}}$$

开环频率特性与时域响应的对应关系

- 低频段(第一个转折频率以前的频段)的频率特性形状主要影响系统瞬态响应的结尾段，影响系统的稳态指标；
- 中频段(开环截止频率附近的频段)主要影响瞬态响应的中间段，时域响应的动态指标主要是由中频段的形状所决定的(时域响应的快速性、振荡性)。
- 高频段(中频段以后的频段)主要影响瞬态响应的起始段；



低频段:一定的高度和斜率

中频段:足够的宽高度

高频段:迅速衰减

典型系统的开环频率特性

5 作业

- 5.12
- 5.13

写清题号，不用抄题；