2.4 逻辑函数及其表示方法

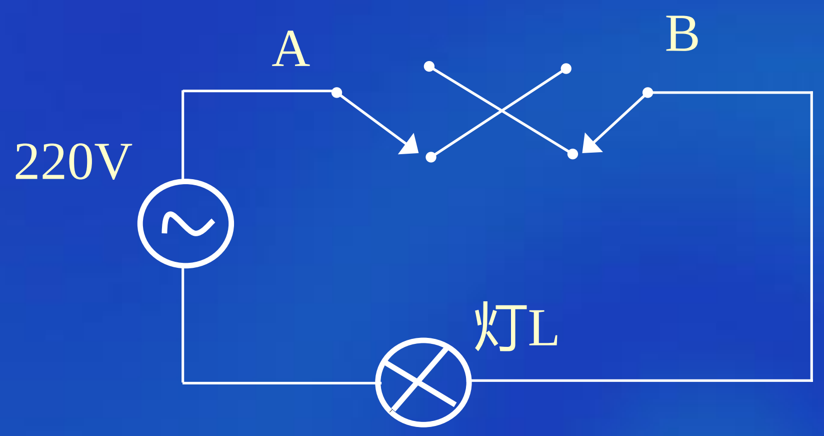
逻辑函数的定义:

当输入逻辑变量A、B、C...取值确定后，输出逻辑变量L的取值随之而定，把输入和输出逻辑变量间的这种对应关系称为逻辑函数(Logic Function)，并写作：

$$L = F(A, B, C...)$$

逻辑函数的表示方法

在二层楼房装了楼梯灯，在一楼和二楼各装了一个开关A和B。图为用单刀双掷开关构成的控制电路。



- A=1、B=1：开关扳到向上的位置
- A=0、B=0：开关扳到向下的位置
- L=1：灯亮
- L=0：灯灭

将A、B的状态和L的状态表达为逻辑函数

$$L=F(A,B)$$

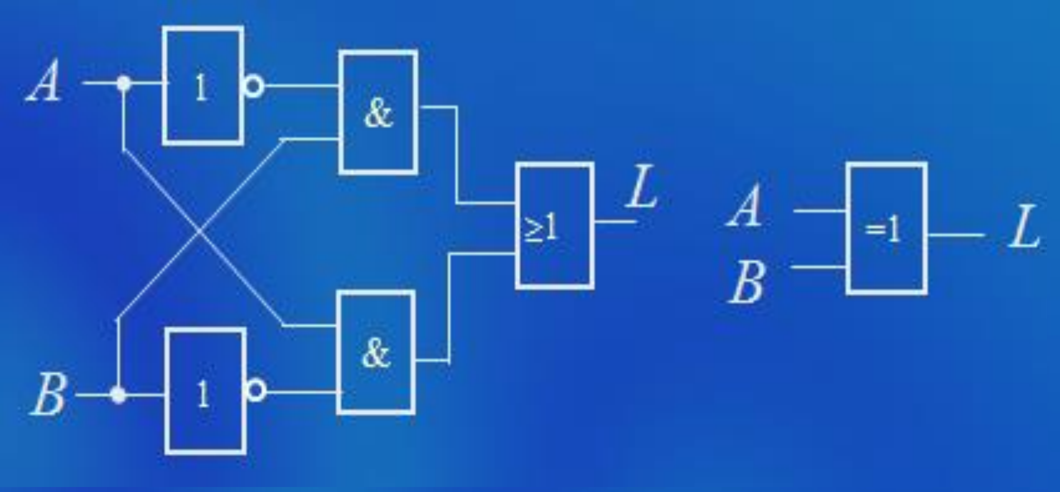
2. 函数关系式

$$L = F(A,B) = A\overline{B} + \overline{A}B = A \oplus B$$

1. 逻辑真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3. 逻辑图



4. 硬件描述语言

逻辑函数还可以用硬件描述语言来表示。自学Verilog（第六章），实验和实际设计中常用。

注意： 硬件描述语言中预定义的一些逻辑门的关键字，在后续教材和实验中经常用到。AND（与）、OR（或）、NOT（非）、NAND（与非）、NOR（或非）、XOR（Exclusive-OR, 异或）、XNOR (Exclusive-NOR, 同或)。

5. 卡诺图

卡诺图是逻辑函数的一种图形表示方式。

逻辑函数的最小项和式

1. 最小项的定义、编号和性质

(1) 定义 设有n个逻辑变量，它们组成的与项中，每个变量或以原变量或以反变量形式出现且仅出现一次，此与项称之为n个变量的最小项。

一个变量A有2 (2^1)个最小项： A, $\overline{A}$。

二个变量A、B有4(2^2)个最小项： $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, AB

三变量A、B、C有8(2^3)个：

(2^3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}BC$, $A\overline{B}\,\overline{C}$, $A\overline{B}C$, $AB\overline{C}$, ABC。

n个变量应有2^n个最小项。

(2) 编号：　　通常用m_i表示。

下标i的确定：

将最小项中原变量表示为1，反变量表示为0，当变量顺序确定后，用1和0按变量顺序排列形成一个二进制数，此二进制数对应的十进制数即为该最小项的下标i。

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　　000　　m_0

三变量的最小项及其编号

最小项	使最小项为1的变量取值 A	B	C	对应的十进制数	最小项编号
$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	0	0	0	0	m_0
$\bar{A}\bar{B}C$	0	0	1	1	m_1
$\bar{A}B\bar{C}$	0	1	0	2	m_2
$\bar{A}BC$	0	1	1	3	m_3
$A\bar{B}\bar{C}$	1	0	0	4	m_4
$A\bar{B}C$	1	0	1	5	m_5
$AB\bar{C}$	1	1	0	6	m_6
ABC	1	1	1	7	m_7

(3) 最小项的性质

a. 在输入变量的任何取值下，有且只有一个最小项的值为1;

即对于输入变量的各种逻辑取值，最小项的值为1的几率最小，最小项由此得名。

3 变量最小项真值表

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

b. 任何两个不同最小项之积恒为0，即

$$m_i \cdot m_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

c. 对于变量的任何一组取值，全体最小项之和为1，即

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

d. 具有逻辑相邻的两个最小项之和可以合并成一项，并消去一个因子。

逻辑相邻性是指两个最小项除一个因子互为非外，其余因子相同。

例如，两个最小项 $\bar{A}BC$ 和ABC是逻辑相邻项。

这两个最小项之和可以合并，并消去一个因子。

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

e. n个变量有2^n项最小项， 且对于每一最小项，有n个最小项与之相邻。

例如　三个变量的最小项 ABC 有3个相邻最小项

$$\overline{A}BC \qquad A\overline{B}C \qquad AB\overline{C}$$

2. 逻辑函数的最小项之和形式

(1) 定义

在一个与或表达式中，如果所有与项均为最小项， 则称这种表达式为最小项之和形式，或称为标准与或式、标准积之和式。

例如 一个三变量的最小项之和形式

$$F(A,B,C)=A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

最小项之和形式是逻辑函数的一种标准形式，而且任何一个逻辑函数都只有唯一的最小项表达式。

(2) 最小项表达式的简写式

$$F(A,B,C)=A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

$$=m_5+m_4+m_6$$

$$=\sum m(4,5,6)$$

(3) 由一般式获得最小项标准式

代数法　　采用添项法，即反复应用公式$X=X(Y+\overline{Y})$代入缺少某变量(Y)的与项中，即可形成最小项之和形式。

[例1] 试将逻辑函数 $L=A\overline{B}+B\overline{C}$ 化为最小项表达式。

[解]

$$
\begin{aligned}
L &= A\overline{B}+B\overline{C} \\
&= A\overline{B}(C+\overline{C})+B\overline{C}(A+\overline{A}) \\
&= A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C} \\
&= m_2+m_4+m_5+m_6 \\
&= \sum m(2,4,5,6)
\end{aligned}
$$

逻辑函数的卡诺图

将n变量逻辑函数的全部最小项各用一个小方格表示，并使任何在**逻辑上相邻**的最小项在**几何位置**上也相邻，得到的这种方格图就叫n变量的卡诺图。

$A \backslash B$	0	1
0	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$	AB

(a) 二变量卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

(b) 三变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

(c) 四变量卡诺图

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8	m_{24}	m_{28}	m_{20}	m_{16}
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9	m_{25}	m_{29}	m_{21}	m_{17}
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}	m_{27}	m_{31}	m_{23}	m_{19}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}	m_{26}	m_{30}	m_{22}	m_{18}

p

(d) 五变量卡诺图

卡诺图特点:

$AB\backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

a. 图中小方格数为2^n，其中n为变量数。

b. 两侧标注了变量取值，它们的数值大小就是相应方格所表示的最小项的编号。

c.变量取值顺序按格雷码排列，使具有逻辑相邻性的最小项，在几何位置上也相邻。

(1) 几何(位置)相邻

a. 小方格相连(有公共边)则相邻。

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

m_0与m_1、m_4相邻。

m_5与m_1、m_4、m_7、m_{13}相邻。

b. 对折重合的小方格相邻。

m_0与m_2重合

m_0与m_8重合

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

对称轴

对称轴

c. 循环相邻

m_0、m_1、m_3、m_2；　m_0、m_1、m_5、m_4；

m_0、m_2、m_{10}、m_8；

m_0、m_4、m_{12}、m_8、m_{10}、m_{14}、m_6、m_2等都为循环相邻的最小项。

可见，处于卡诺图上下及左右两端、四个顶角的最小项也都具有相邻性。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

从几何位置上可把卡诺图看成管环形封闭图形。

(2) 逻辑相邻

两最小项中除一个变量互为非外，其余相同。

逻辑函数的卡诺图表示的基本方法：

(1) 先把逻辑函数化成最小项之和的形式。

(2) 根据逻辑函数所包含的变量数画出相应的卡诺图。

(3) 将函数式中所包含的各最小项，在图中相应的小方格中填入1，其余小方格中填入0。

这样所得的方格图即为逻辑函数的卡诺图表示。

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数 $L=\sum m(0,3,4,6)$。

[解] (1) 画出三变量的卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

(2) 在卡诺图中将m_0、m_3、m_4、m_6处填1，其余填0(或不填)。

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数

$$L=\sum m^4(0,1,2,5,7,8,10,11,13,15)$$

[解] (1) 画出四变量的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	1	1

(2) 在卡诺图中将m_0、m_1、m_2、m_5、m_7、m_8、m_{10}、m_{11}、m_{13}、m_{15}处填1，其余填0)。

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数

[解1] (1) 先把逻辑函数一般式化成最小项之和的形式

$$L=\bar{A}\,\bar{B}C+(A+\bar{A})BC+AB\bar{C}$$

$$=\bar{A}\,\bar{B}C+ABC+\bar{A}BC+AB\bar{C}$$

$$=\sum m(1,3,6,7)$$

(2) 画出三变量的卡诺图，并将L表示在卡诺图中

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

[解2] 逻辑函数一般式直接填入卡诺图法

对于函数

$$L = \overline{A}\,\overline{B}C + BC + AB\overline{C}$$

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	
1			1	1

$\overline{A}\,\overline{B}C$：在$A$=0,$B$=0,$C$=1对应的方格, 即在$m_1$对应位置填1。

$AB\overline{C}$：在A=1,B=1,C=0对应的方格, 即在m_6对应位置填1。

BC: 在B=1, C=1对应的方格(不管A取值)，即在m_3、m_7在对应位置填1。

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数：

$$L=\overline{C}\,\overline{D}+AB+\overline{A}C\overline{D}+ABD+AC$$

[解]　直接填入

$\overline{C}\,\overline{D}$：　在$C$=0, D=0所对应的方格中填1；

AB：　在A=1, B=1所对应的方格中填1；

$\overline{A}C\overline{D}$：在$A$=0, C=1,D=0对应方格中填1；

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1	1	1	1
10	1		1	1

ABD：　在A=1, B=1,D=1所对应的方格中填1；

AC：　在A=1, C=1所对应的方格中填1；

[练习] 试用卡诺图表示逻辑函数：

$$L = \overline{A}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}C + BD$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1	1	1	1
11		1	1	1
10				

结论：几何相邻性与逻辑相邻性的**一致**是卡诺图的一个很重要的特点。这就使得有可能从几何位置上直观找到逻辑相邻的最小项。对逻辑函数进行化简。

逻辑函数各种表示方法之间的转换

1. 由真值表求出函数式和逻辑图

这三种取值的任何一种都使

Y=1，而：

- A=0, B=1, C=1 <=> $A'BC$ =1
- A=1, B=0, C=1 <=> $AB'C$ =1
- A=1, B=1, C=0 <=> ABC' =1

所以 $Y = A'BC + AB'C + ABC'$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(1) 由真值表求出函数式

a. 把真值表中每一组使函数值为1的输入变量取值都对应一个与项。

b. 在这些与项中，若对应的变量取值为1， 则写成原变量；若对应的变量取值为0，则写成反变量。

c. 将这些与项或起来，就得到了逻辑函数式。

[例] 试求真值表所示逻辑函数的表达式。

A B C	L
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

[解] 先找出使函数*L*取值为1的变量组合，分别为 001、010、100、110、111。

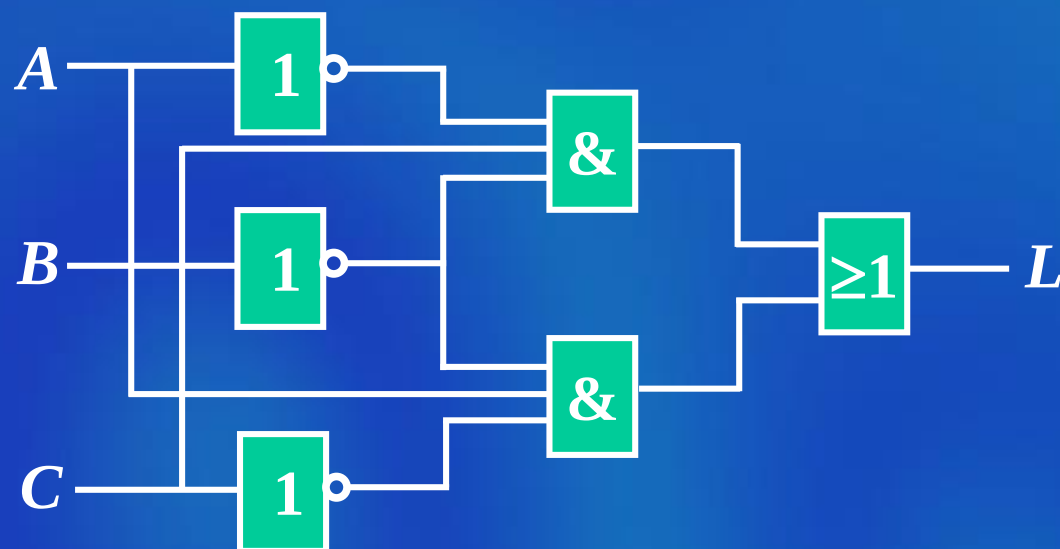
由此可得*L*的逻辑函数式：

$$L = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

(2) 由函数式画出逻辑图

函数式 $L = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$

逻辑图



2. 由逻辑函数式求真值表

把输入变量取值的所有可能组合分别代入逻辑函数式中进行计算，求出相应的函数值，然后把输入变量取值与函数值按对应关系列成表，这就是所求的真值表。

[例7] 求逻辑函数式$L=(A\oplus B)C+AB$对应的真值表。

逻辑函数式的真值表

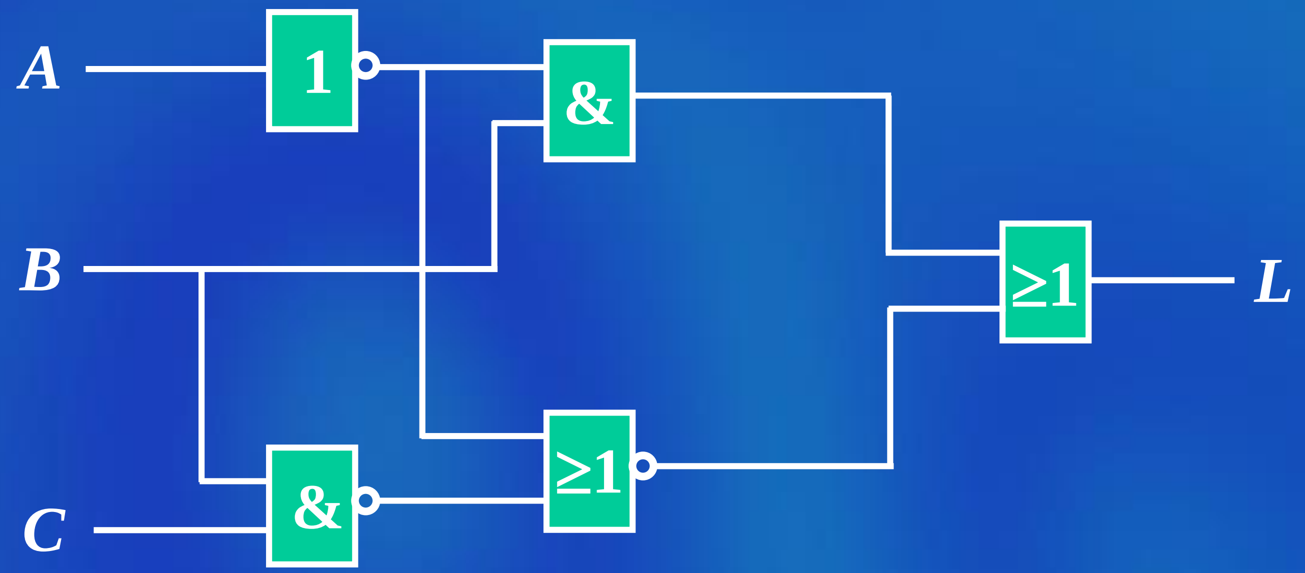
$$L = (A \oplus B)C + AB$$

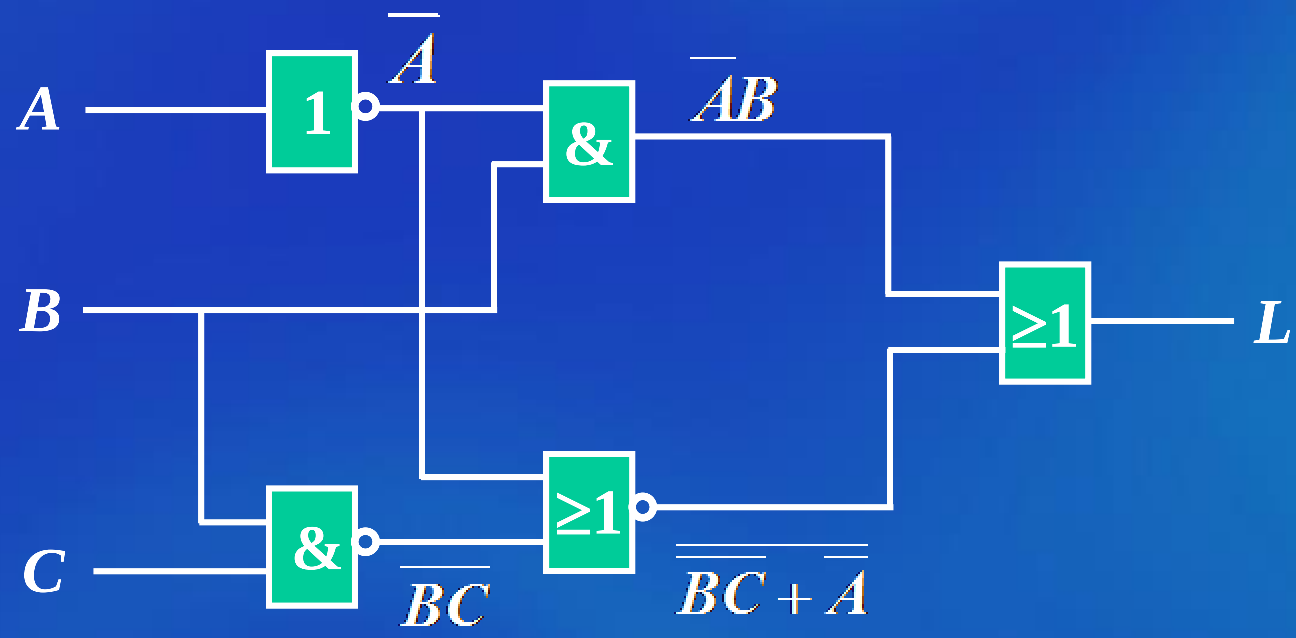
输 入	输出
$A\ B\ C$	L
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

3. 由逻辑图求逻辑函数式和真值表

从输入到输出（或输出到输入）依次把逻辑图中的每个逻辑符号用相应的运算符号代替，即可求得逻辑函数式。

[例9] 试写出图示逻辑电路的逻辑函数式。





逻辑函数式

$$L=\overline{A}B+\overline{\overline{BC}+\overline{A}}$$

思考＋注意

- 从真值表写出的逻辑函数是最小项之和式？
- 对逻辑函数最小项和式填入卡诺图时，注意逻辑变量的次序与最小项序号对应！对于题目中没有给出次序，自己心中要有数，一般应按*ABCD*次序填写，对卡诺图上变量也要养成按*ABCD*次序排列的习惯。
- 写逻辑函数式时，也一般按照*ABCD…*次序书写其与项，读和看起来也比较顺。

作业

自练题：

2.9 （a）

2.10 (a)

作业题：

2.11

2.5 逻辑函数的化简

化简的意义及原则

(1) 逻辑电路所用的门最少；
(2) 各个门的输入端要少；

} 降低成本

(3) 逻辑电路所用的级数要少；
(4) 逻辑电路能可靠地工作。

} 提高电路的工作速度和可靠性

代数化简法

1. 并项法　　利用公式　$AB + A\overline{B} = A$

[例]　化简逻辑函数 $L = AB + CD + A\overline{B} + \overline{C}D$

[解]　$L=(AB+A\overline{B})+(CD+\overline{C}D)$

$=A+D$

[例] 化简逻辑函数　$L = A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$

[解]　$L = A\overline{B}(C + \overline{C})$

$= A\overline{B}$

2. **吸收法** 利用公式 $A+AB=A$ ， $A+\bar{A}B=A+B$

[例] 化简逻辑函数 $L=\bar{B}+AB+A\bar{B}CD$

$$\text{原式}=\bar{B}+A\bar{B}CD+AB \quad =\bar{B}+AB \quad =\bar{B}+A$$

[例] 化简逻辑函数

$$L=A\bar{B}+\bar{A}B+ABCD+\bar{A}\bar{B}CD$$

$$\text{原式}=A\bar{B}+\bar{A}B+(AB+\bar{A}\bar{B})CD$$

$$=A\bar{B}+\bar{A}B+\overline{A\bar{B}+\bar{A}B}CD$$

$$=A\bar{B}+\bar{A}B+CD$$

3. 配项法

利用 $A+\overline{A}=1$，将某个与项乘以 $(A+\overline{A})$，将其拆成两项，以便与其它项配合化简。

[例] 化简逻辑函数 $Y = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$

$$
\begin{aligned}
Y &= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B \\
&= A\overline{B} + B\overline{C} + (A+\overline{A})\overline{B}C + \overline{A}B(C+\overline{C}) \\
&= A\overline{B} + B\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} \\
&= A\overline{B}(1+C) + B\overline{C}(1+\overline{A}) + \overline{A}C(\overline{B}+B) \\
&= A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}C
\end{aligned}
$$

4. 添项法

在函数中加入零项因子 $x \cdot \bar{x}$ 或 $x \cdot \bar{x}\, f(AB\cdots)$ ，或利用 $A + A = A$ 加进的新项，进一步化简函数。

[例] 化简逻辑函数 $F = AB\overline{C} + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$

$$原式 = AB\,\overline{AB} + AB\,\overline{C} + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$$

$$= AB(\overline{AB} + \overline{C}) + \overline{ABC} \cdot \overline{AB}$$

$$= AB\,\overline{ABC} + \overline{ABC}\;\overline{AB}$$

$$= \overline{ABC}(AB + \overline{AB})$$

$$= \overline{ABC}$$

灵活运用化简方法，才能将逻辑函数化为最简。

得到的表达式无法保证是最简表达式，需要一定经验。

卡诺图化简法

卡诺图化简逻辑函数，是1952年由维奇(W.Veitch)首先提出来的， 1953年由美国工程师(Karnaugh)进行了更系统、更全面的阐述，故称为卡诺图。

1. 基本原理

$$AB + A\overline{B} = A$$

即凡两逻辑相邻的最小项，可以合并一项，保留相同的变量，消去互异的变量。

2. 化简规则

(1) Any 2 (2^1) adjacent cells with 1 filled can be combined and eliminate a contradictory variable (appearing in uncomplemented and complemented form) .

C \ AB	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

$$\cancel{\bar{A}}\bar{B}\bar{C} + \cancel{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$= (\bar{A} + A)\bar{B}\bar{C}$$

$$= \bar{B}\bar{C}$$

$$\cancel{\bar{A}}BC + \cancel{A}BC = BC$$

(2) Any 4 (2^2) adjacent cells having 1 value can be merged and eliminate 2 variables. (任何4个值为1的相邻最小项，可以合并为1项，并消去2个变量。)

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	1	0

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$
$$= (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB + A\bar{B})\bar{C}$$
$$= [\bar{A}(\bar{B} + B) + A(B + \bar{B})]\bar{C}$$
$$= (\bar{A} + A)\bar{C}$$
$$= \bar{C}$$

$$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC = (\bar{A}\bar{C} + \bar{A}C + A\bar{C} + AC)B = B$$

上页 下页 返回

结论：几何相邻的2^i（i = 1、2、3…n）个小格可合并在一起构成一个“卡诺圈”，消去i个变量。

取同去异原则直接写出合并的结果。

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

$\overline{C}D$

$\overline{A}B$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

$\overline{B}D$

$B\overline{D}$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

$\overline{B}\,\overline{D}$

BD

(3) Any 8 (2^3) adjacent cells that have 1s can be merged and eliminate 3 variables. (任何8个标1的相邻最小项，可以合并为1项，并消去3个变量。)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

D

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$\overline{B}$

3. 化简原则

(1) 包围圈所含小方格数为2^i个；

(2) 包围圈尽可能大 （消掉的变量数越多），个数尽量少（化简结果中的与项最少）；

(3) 允许重复圈，但每个包围圈内至少有一个“1”未被别的圈圈过；

(4) 孤立(无相邻项)的最小项单独包围。

按取同去异原则，每个圈写出一个乘积项。

最后将全部乘积项求和，即得最简与或表达式。

[例] 求$F=\sum m^4(1, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 14)$的最简与或式。

[解]　① 画出F的K(卡诺)图。

② 画卡诺圈。

根据化简原则，应选择最少的K圈和尽可能大的K圈覆盖所有的1格。

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	
11	1			1
10				1

$\overline{A}D$

$AC\overline{D}$

$B\overline{C}\,\overline{D}$

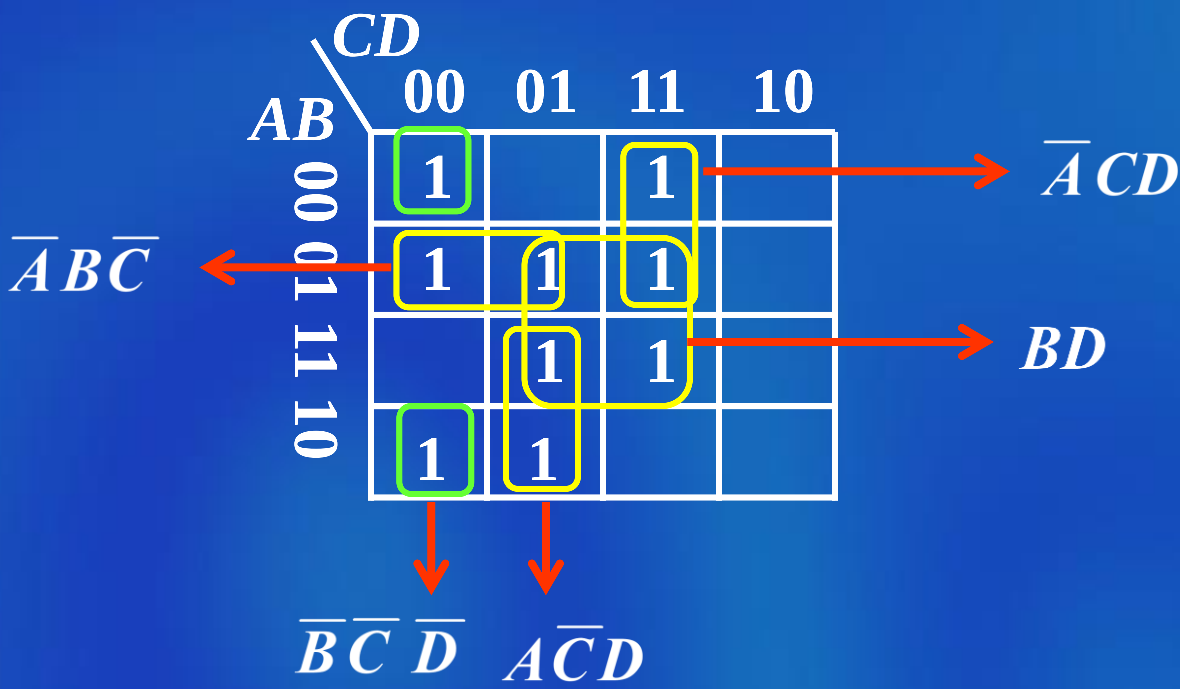
③ 写出最简式。

$$F = \overline{A}D + B\overline{C}\,\overline{D} + AC\overline{D}$$

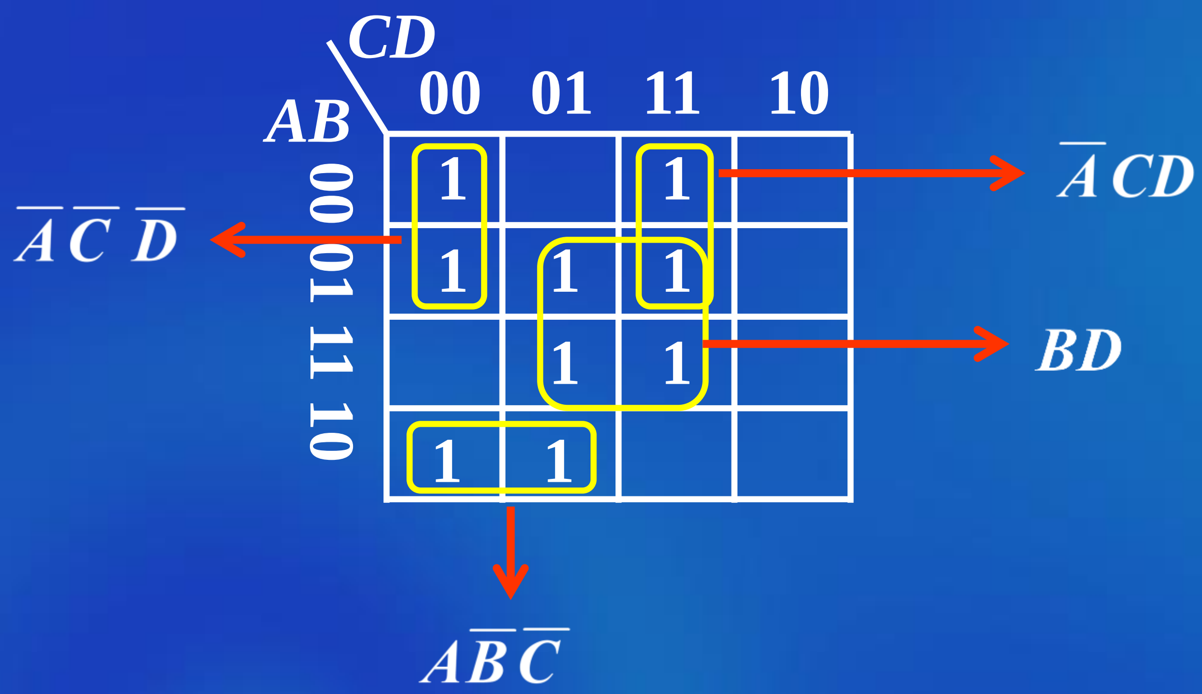
[例] 化简 $F=\sum(0,3,4,5,7,8,9,13,15)$

[解] (1) 用卡诺图表示该逻辑函数。

(2) 画卡诺圈圈住全部“1”方格。



卡诺圈的另一种画法。



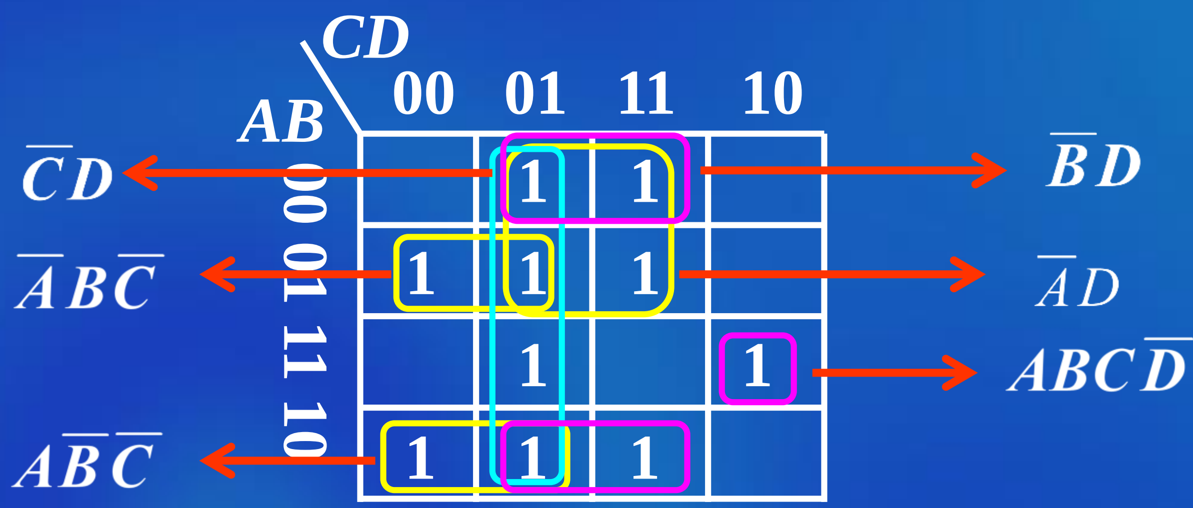
这种圈法少一个卡诺圈。

$$F = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C} + BD + \overline{A}C\overline{D}$$

[例] 化简 $F=\sum(1,3,4,5,7,8,9,11,13,14)$

[解] (1) **用卡诺图表示该逻辑函数。**

(2) **画卡诺圈圈住全部“1”方格。**

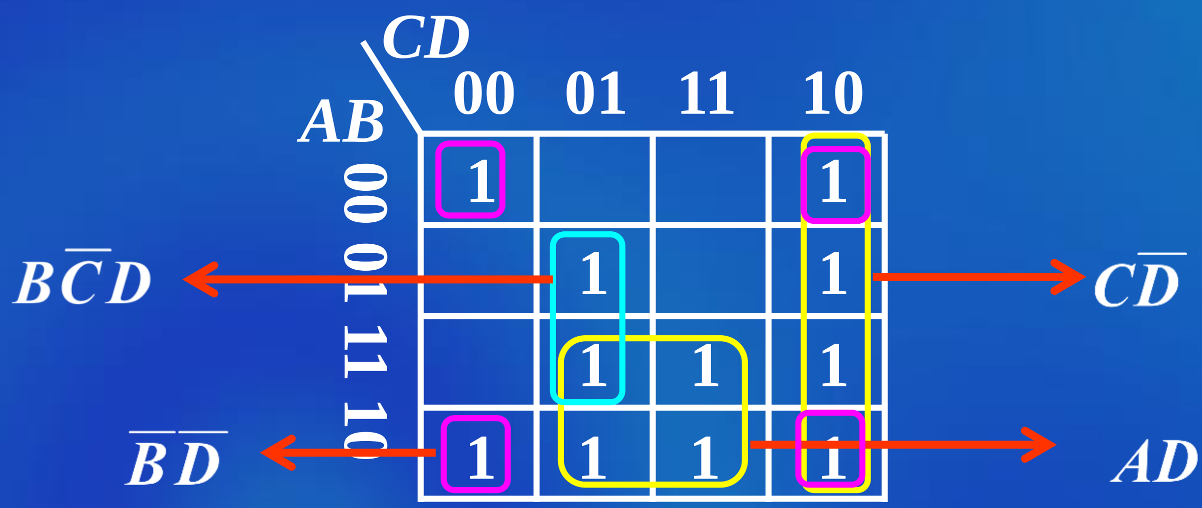


$$F=\overline{A}D+\overline{C}D+\overline{B}D+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+ABC\overline{D}$$

[练习] 化简 $F=\sum(0,2,5,6,8,9,10,11,13,14,15)$

[解]　(1) 用卡诺图表示该逻辑函数。

(2) 画卡诺圈圈住全部“1”方格。



$$F=\overline{C}D+AD+B\overline{C}D+\overline{B}\,\overline{D}$$

[练习] 试用卡诺图法化简逻辑函数

$$L = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + B\overline{C}D + BC + C\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

[解] 画卡诺圈圈住全部“1”方格。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

$$L = \overline{B}\,\overline{D} + BD + BC$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

$$L = \overline{B}\,\overline{D} + BD + C\overline{D}$$

可见，有的逻辑函数最简表达式不是唯一的

具有无关项的逻辑函数的化简

无关项（don’t care）：约束项和任意项。

约束项：对1个实际的应用，真值表内自变量取值的某些组合不允许出现，这些组合对应的最小项即为约束项。

例如：一个逻辑电路的输入为8421-BCD码，显然信息中有六个变量组合（1010～1111）是不使用的，这些变量取值所对应的项即为约束项。

如果电路正常工作，这些项决不会出现，那么与之所对应的电路的输出是什么，也就无所谓了，可以假定为1，也可以假定为0。

任意项：在某些变量取值下，函数值是1还是0均对电路的逻辑功能无影响，这些取值对应的最小项则为任意项。

* 岳超，刘潇，逻辑函数中约束项、任意项和无关项的探讨，电子技术，2018，25-27，10.3969/j.issn.1000-0755.2018.02.007
景亚霓，浅谈逻辑函数中的任意项、约束项和无关项，教育教学论坛，2014，37：93-94

无关项的意义：它的值可以取0或取1，具体取什么值，可以根据使函数尽量得到简化而定。

真值表

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	×
1	0	0	1
1	0	1	×
1	1	0	×
1	1	1	×

在真值表或K图中填Φ或×，表示函数值为0或1均可。

逻辑函数可表示式

$$F=\sum m(1,4)+\sum d(3,5,6,7)$$

具有无关项的逻辑函数的化简

根据无关项的随意性（即它的值可以取0或取1，而并不影响函数原有的实际逻辑功能），若能合理地利用它们，一般能使化简结果更简单。

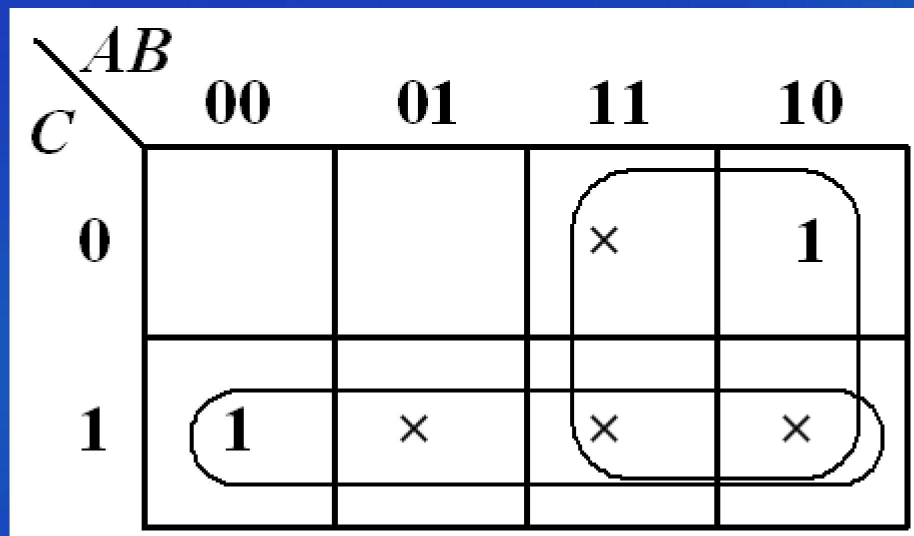
[例] 化简 $F=\sum m(1,4)+\sum d(3,5,6,7)$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	×	1
1	1	×	×	×

(2) 不考虑无关项的化简

$$F=\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}$$

(3) 考虑无关项的化简



$$F = A + C$$

[例] 某逻辑电路的输入信号 *ABCD* 是8421BCD码。当输入 *ABCD* 取值为0和偶数时，输出逻辑函数 $L=1$;否则 $L=0$。求逻辑函数式 L。

[解] (1) 由题意列真值表

A B C D	L	
0 0 0 0	1	
0 0 0 1	0	
0 0 1 0	1	
0 0 1 1	0	
0 1 0 0	1	
0 1 0 1	0	
0 1 1 0	1	
0 1 1 1	0	
1 0 0 0	1	
1 0 0 1	0	
1 0 1 0	x	
1 0 1 1	x	无
1 1 0 0	x	关
1 1 0 1	x	项
1 1 1 0	x	
1 1 1 1	x	

(2) 用卡诺图表示逻辑函数。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	x	x	x	x
10	1	0	x	x

(3) 画卡诺圈

$$L = \overline{D}$$

A B C D	*L*
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	1
0 0 1 1	0
0 1 0 0	1
0 1 0 1	0
0 1 1 0	1
0 1 1 1	0
1 0 0 0	1
1 0 0 1	0
1 0 1 0	x
1 0 1 1	x
1 1 0 0	x
1 1 0 1	x
1 1 1 0	x
1 1 1 1	x

无关项

[练习] 化简 $F = \sum m(1,5,8,12) + \sum d(3,7,10,11,14,15)$。

[解] (1) 画卡诺图

(2) 画卡诺圈

$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1		
11	×	×	×	×
10			×	×

$$F = A\overline{D} + \overline{A}D$$

逻辑函数的机器化简法

1. Q-M法

- $Y(A,B,C,D)=\sum m(0,3,4,5,6,7,8,10,11)$

合并前的最小项		第一次合并结果（含n－1个变量的乘积项）		第二次合并结果（含n－2个变量的乘积项）	
编号	A B C D	编号	A B C D	编号	A B C D
0	0 0 0 0 √	0, 4 0, 8	0 — 0 0 P_1 — 0 0 0 P_2		
4 8	0 1 0 0 √ 1 0 0 0 √	4, 5 4, 6 8, 10	0 1 0 — √ 0 1 — 0 √ 1 0 — 0 P_3	4, 5, 6, 7	0 1 — — P_7
3 5 6 10	0 0 1 1 √ 0 1 0 1 √ 0 1 1 0 √ 1 0 1 0 √	3, 7 3, 11 5, 7 6, 7 10, 11	0 — 1 1 P_4 — 0 1 1 P_5 0 1 — 1 √ 0 1 1 — √ 1 0 1 — P_6		去重
7 11	0 1 1 1 √ 1 0 1 1 √				

作 业

自练题：

2.15 （2）

作业题：

2.13 （7）

2.15 （6）

本章小结

主要介绍了数制、码制、逻辑运算、逻辑函数的表示法以及逻辑函数的化简等逻辑代数的基本知识。数制和码制对于以后学习数字计算机系统是非常重要和基础的内容。

逻辑代数是分析和设计逻辑电路的工具。一个逻辑问题可用逻辑函数来描述。逻辑函数可用真值表、逻辑表达式、卡诺图和逻辑图表达，这4种表达方式各具特点，可根据需要选用。

逻辑函数的化简方法有代数法和卡诺图法。