西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

3 上节课要点复习

□ 线性系统稳定的充分必要条件

特征方程式的所有根均为负实根或实部为负的复根，即特征方程式的根均位于复平面（s平面）的左半平面。

□ 劳斯(Routh)稳定判据

- ✓ 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）。
- ✓ 控制系统稳定的充分必要条件是：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正的特征根的个数（不稳定极点个数）。
- ✓ 应用劳斯稳定判据时的两种特例：①第一列出现零元素，但该零元素所在行的其他元素不为零；②全行元素为零。

3 3.6 线性系统的稳态误差计算

- 稳态误差是衡量控制系统控制精度的指标。控制系统的输出应尽量准确地跟随参考输入的变化。
- 稳态误差不仅与系统的结构有关，而且与输入信号有关。此外，系统中有些元件的非线性特性（如死区、饱和），以及摩擦、数字控制系统中的量化效应也是产生稳态误差的原因。

稳 → 准

3.6 线性系统的稳态误差计算

- 当稳态误差足够小，可以忽略不计时，就可认为系统稳态误差为零，该系统称为无差系统；而稳态误差不为零的系统则称为有差系统。

  给定值稳态误差（由给定输入引起的稳态误差）

  扰动值稳态误差（由扰动输入引起的稳态误差）

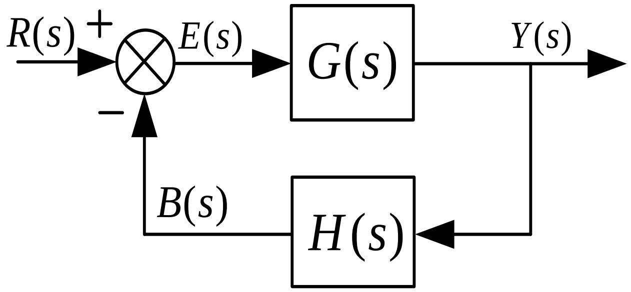
- 这里强调的是，讨论稳态误差的前提是系统必须稳定。因为一个不稳定的系统不存在稳态，只有当系统稳定时，分析系统的稳态误差和其它性能指标才有意义。

3.6 线性系统的稳态误差计算

误差定义

系统的误差(Error)通常有两种定义方法：按输入端定义和按输出端定义。

系统框图：



（1）按输入端定义的误差

系统参考输入与主反馈信号之差，即作用误差或偏差。

$$E(s)=R(s)-B(s) \qquad e(t)=r(t)-b(t)$$

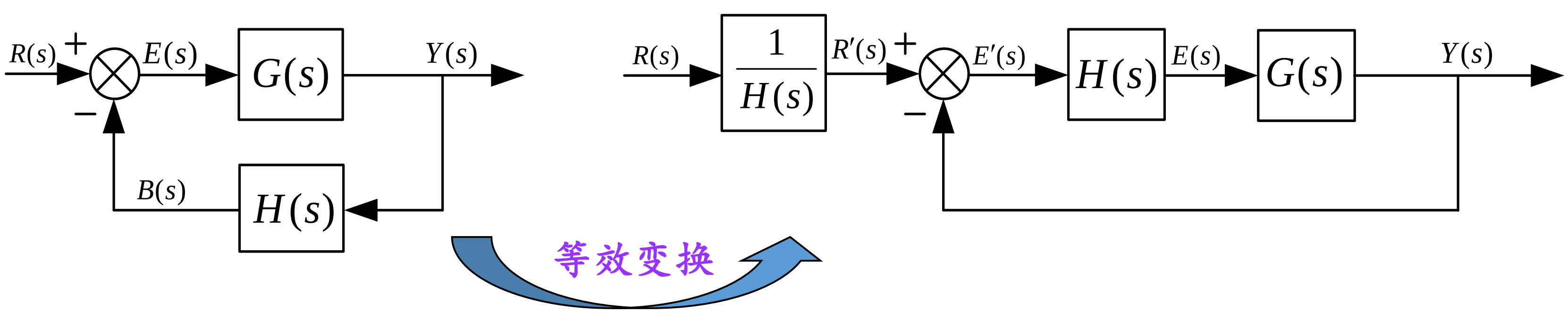
3.6 线性系统的稳态误差计算

误差定义

系统的误差(Error)通常有两种定义方法：按输入端定义和按输出端定义。

（2）按输出端定义的误差

系统期望输出与实际输出之差，即输出误差。



$$E'(s)=R'(s)-Y(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-Y(s)$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

误差定义

- 输入端定义的作用误差通常可测量，实际系统也最常用，但其误差理论含义不够清晰。
- 输出端定义的误差比较接近误差的理论，但**真值不可测，无实际意义！**
- 两种误差之间存在如下关系：

$$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)=H(s)\left[\frac{R(s)}{H(s)}-Y(s)\right]=H(s)E'(s)$$

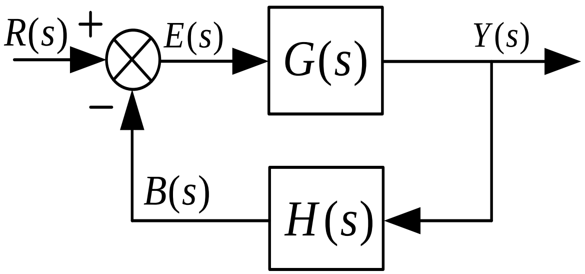
注：以后讨论的误差都是指输入端定义的作用误差。

当系统暂态过程结束，系统进入稳态（Steady State）后的误差就是稳态误差e_{ss}，即

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[r(t)-b(t)]=\lim_{s\to0}s[R(s)-B(s)]$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

参考输入作用下的稳态误差与系统类型(型数)



$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)Y(s)$$
$$=R(s)-H(s)G(s)E(s)$$
$$\Rightarrow E(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

利用拉氏变换的终值定理，系统对参考输入作用下的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

系统开环传递函数一般形式为：$G(s)H(s)=\dfrac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$

★ *K*为开环增益，γ 是开环传函中积分环节的个数

★ *若开环传递函数为零极点形式，则K为开环根轨迹增益*

当 *s*→0时，有：

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

系统可按γ的大小分类型：γ=0　0型系统

γ=1　I型系统

γ=2　II型系统

稳态误差系数及稳态误差计算

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$$

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

1. 位置误差系数K_p

单位阶跃输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s}$ ，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+\underline{\lim_{s\to 0}G(s)H(s)}}$$

位置误差系数为：$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)H(s)$

稳态误差为：

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	$K_p=K$	$e_{ss}=1/(1+K)$
I型系统	$K_p=\infty$	$e_{ss}=0$
II型系统	$K_p=\infty$	$e_{ss}=0$

稳态误差系数及稳态误差计算

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$$

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

2. 速度误差系数K_v

单位速度（斜坡）输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s^2}$，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^2}}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)}$$

速度误差系数为：$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)$

稳态误差为：$e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	$K_v=0$	$e_{ss}=\infty$
I型系统	$K_v=K$	$e_{ss}=1/K$
II型系统	$K_v=\infty$	$e_{ss}=0$

稳态误差系数及稳态误差计算

$$G(s)H(s)=\frac{K(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(T_ms+1)}{s^{\gamma}(T_{\gamma+1}s+1)(T_{\gamma+2}s+1)\cdots(T_{n-\gamma}s+1)}$$

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

3. 加速度误差系数K_a

单位加速度输入作用下，$R(s)=\frac{1}{s^3}$，系统的稳态误差为：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{1}{s^3}}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}\underline{s^2G(s)H(s)}}$$

加速度误差系数为：$K_a=\lim\limits_{s\to 0}s^2G(s)H(s)$

稳态误差为：$e_{ss}=\frac{1}{K_a}$

$$\lim_{s\to 0}G(s)H(s)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\gamma}}$$

不同类型系统对应结果

0型系统	K_a=0	$e_{ss}=\infty$
I型系统	K_a=0	$e_{ss}=\infty$
II型系统	$K_a=K$	$e_{ss}=1/K$

3.6 线性系统的稳态误差计算

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

开环传递函数中积分环节个数γ，即系统型数，决定了系统在阶跃、速度及加速度信号输入时系统是否存在稳态误差。因此 γ又称为无差度，它反映了系统对参考输入信号的跟踪能力。

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
Ⅱ型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

折衷！

减小和消除给定输入信号作用引起的稳态误差的有效方法有：提高系统的开环放大倍数和提高系统的类型数，但这两种方法都会影响甚至破坏系统的稳定性，因而将受到应用的限制。

稳态误差系数及稳态误差计算

稳态误差系数：消除误差的能力（三种典型信号输入到三类系统）

例： 对线性定常系统：

设输入信号为三种信号的组合：$r(t)=\left(\alpha+\beta t+\frac{\gamma}{2}t^2\right)1(t)$

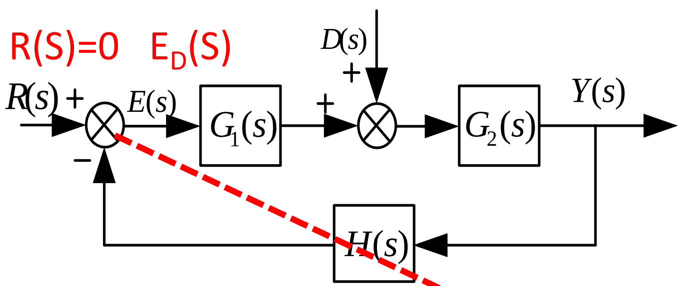
$$e_{ss}=\frac{\alpha}{1+K_p}+\frac{\beta}{K_v}+\frac{\gamma}{K_a}=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{1+K_p}+\infty+\infty=\infty & 0\text{型系统}\\ 0+\dfrac{\beta}{K_v}+\infty=\infty & \text{I型系统}\\ 0+0+\dfrac{\gamma}{K_a}=\dfrac{\gamma}{K_a} & \text{II型系统}\end{cases}$$

可见 II 型系统对任意非周期输入信号的跟踪性能最好。

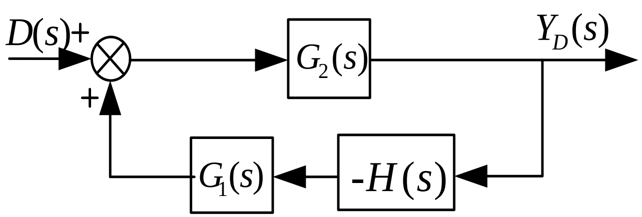
3.6 线性系统的稳态误差计算

扰动作用下的稳态误差

控制系统除受到参考输入作用外，还会受到来自系统内部和外部各种扰动影响,会引起系统的稳态误差。这种误差称为**扰动误差**，它的大小反应了系统抗扰动能力的强弱。



计算扰动D(s)引起的误差，令R(s)=0，则系统结构变为：



D(s)引起的输出为：

$$Y_D(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

$$E_D(s) = R(s) - Y_D(s)H(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

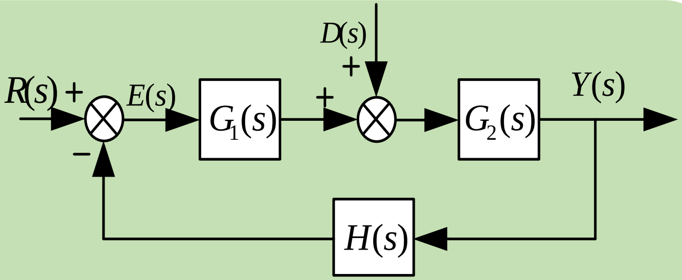
$$e_{ssd} = \lim_{s\to 0} sE_D(s) = -\lim_{s\to 0}\frac{sG_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

例3.6： 求系统在参考输入和扰动输入作用下的稳态误差

$$G_1(s)=\frac{100}{s+1}\qquad G_2(s)=\frac{1}{s}\qquad H(s)=1$$

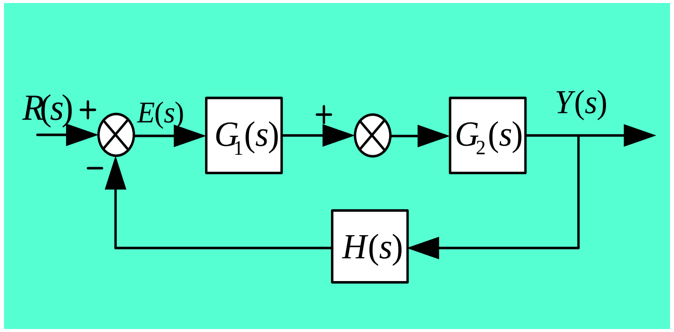
$$r(t)=5t\cdot 1(t)\qquad d(t)=3\cdot 1(t)$$



解：

$$e_{ssr}\big|_{d(t)=0}$$

$$E_R(s)=\frac{R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}sE_R(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{5}{s^2}}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{5}{\lim\limits_{s\to 0}sG_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{5}{K_v}$$

直接用速度误差系数求解：

量纲（每秒）

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG_1(s)G_2(s)H(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{100}{s(s+1)}=100\ s^{-1}$$

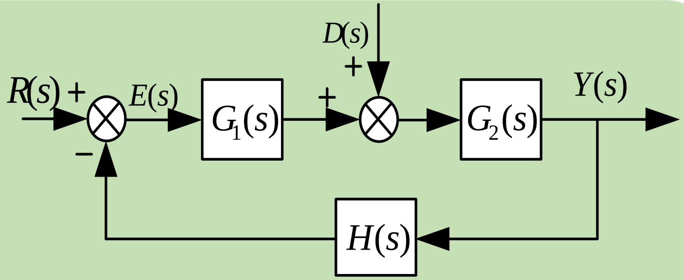
$$e_{ssr}=\frac{5}{K_v}=0.05$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

例3.6： 求系统在参考输入和扰动输入作用下的稳态误差

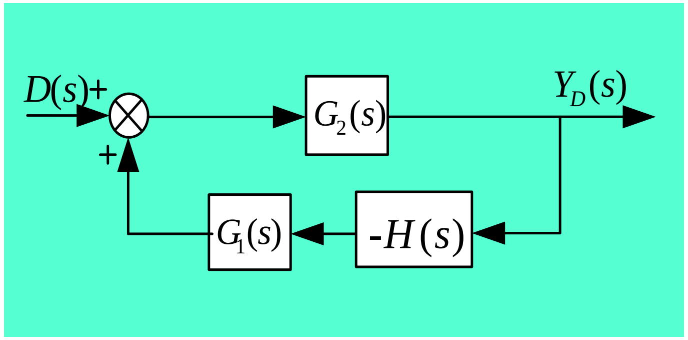
$$G_1(s)=\frac{100}{s+1}\qquad G_2(s)=\frac{1}{s}\qquad H(s)=1$$

$$r(t)=5t\cdot 1(t)\qquad d(t)=3\cdot 1(t)$$



$$e_{ssd}\big|_{r(t)=0}$$

$$E_D(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$



$$e_{ssd}=\lim_{s\to 0}\frac{-sG_2(s)H(s)D(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{-s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{3}{s}}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{-3}{\lim\limits_{s\to 0}sG_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{-3}{K_v}=-0.03$$

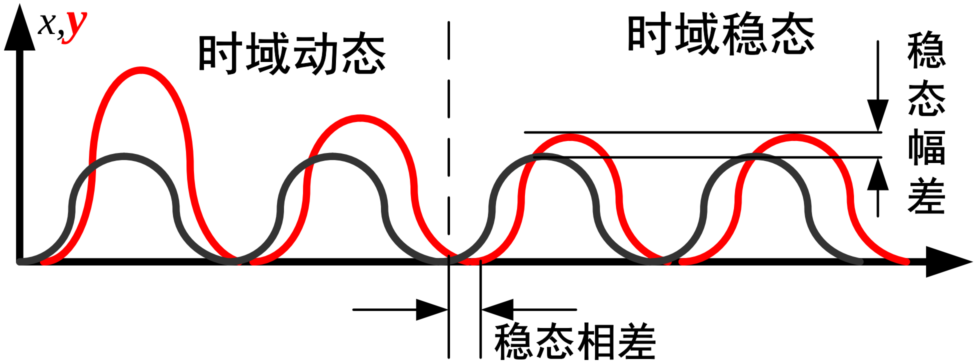
$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssd}=0.02$$

系统存在干扰时的稳态误差

3.6 线性系统的稳态误差计算

应用误差系数结论：

- 误差系数的量纲：K_p(无)，$K_v(s^{-1})$，$K_a(s^{-2})$（速度、加速度的/s, /s^2）。
- 只能有限地用于一些非周期及其叠加信号作用下的稳态误差，不适用于正弦输入信号（系统一定是有差的，如下图）。



$$e_{ss} \propto \frac{1}{1+K_p}，\ K_p\uparrow，\ e_{ss}\downarrow$$

$$e_{ss} \propto \frac{1}{K_v}，\ K_v\uparrow，\ e_{ss}\downarrow$$

$$e_{ss} \propto \frac{1}{K_a}，\ K_a\uparrow，\ e_{ss}\downarrow$$

稳态误差降低是好事，但系统稳定性变差，这就是“改善稳定性矛盾”。

减小或消除稳态误差的方法

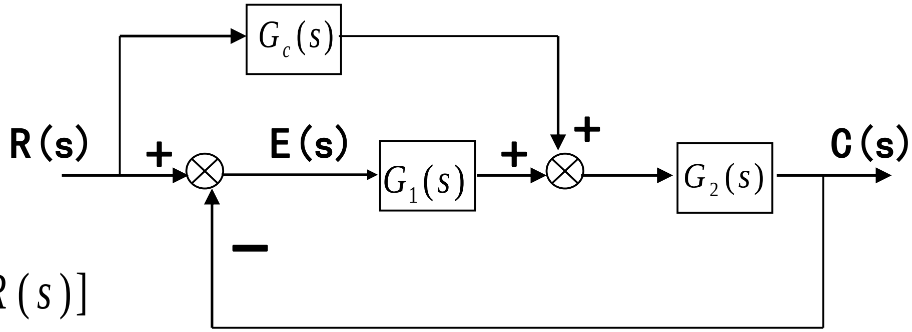
前面分析表明，为了减小系统的稳态误差，可以增加开环传递函数中的串联积分环节的数目(提高型数)或提高系统的开环放大系数。

但是，串联的积分环节一般不宜超过2，而开环放大系数也不能任意增大，否则系统将可能不稳定，为了进一步减小系统稳态误差，可以采用加前馈控制的复合控制方法，即从给定输入或扰动输入处引出一个前馈控制量，加到系统中去，通过适当选择补偿装置和作用点，就可以达到减小或消除稳态误差的目的。

减小或消除稳态误差的方法

在图示系统中，为了消除由**r(t)**引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从给定输入处引出前馈量经补偿装置$G_c(s)$对系统进行开环控制。

此时系统误差信号的拉氏变换式为：



按给定输入补偿的复合控制

$$E(s)=R(s)-G_2(s)[G_1(s)E(s)+G_c(s)R(s)]$$

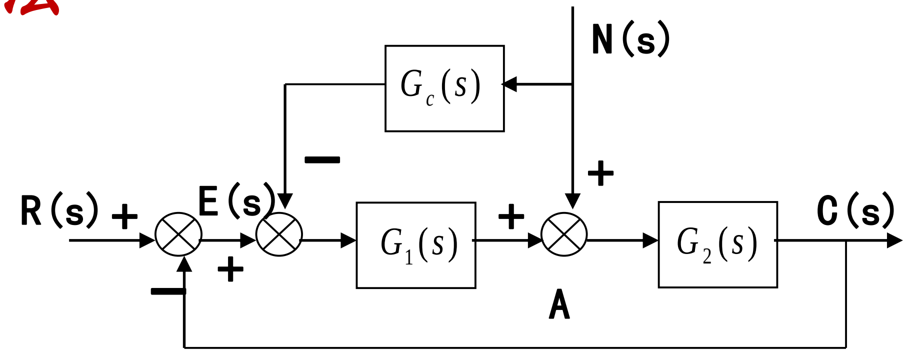
整理得：

$$E(s)=\frac{[1-G_2(s)G_c(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot R(s)$$

如果选择补偿装置的传递函数为 $G_c(s)=\dfrac{1}{G_2(s)}$ 则系统的给定稳态误差为零(分子项变为0）。

减小或消除稳态误差的方法

在图示系统中，为消除由$n(t)$引起的稳态误差，可在原反馈控制的基础上，从扰动输入引出前馈量经补偿装置$G_c(s)$加到系统中。



按扰动输入补偿的复合控制

设$r(t)=0$，则系统的输出$C(s)$就是系统的误差信号，系统输出的拉氏变换式为：

$$C(s) = G_2(s)[N(s) - G_1(s)G_c(s)N(s) - G_1(s)C(s)]$$

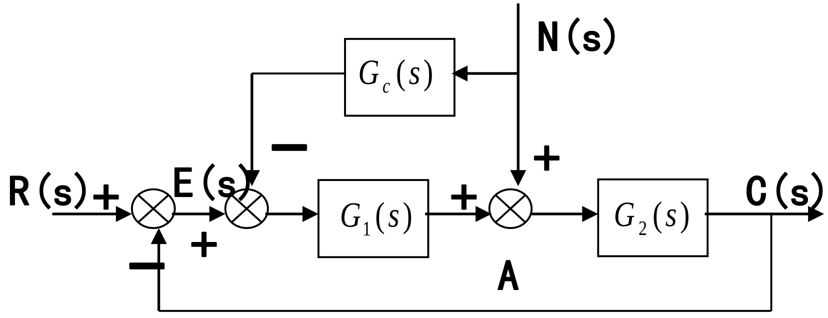
整理得：

$$C(s) = \frac{G_2(s)[1 - G_1(s)G_c(s)]}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

3.6 线性系统的稳态误差计算

减小或消除稳态误差的方法

$$E_N(s)=R(s)-C(s)=-\frac{G_2(s)[1-G_1(s)G_c(s)]}{1+G_1(s)G_2(s)}\cdot N(s)$$



按扰动输入补偿的复合控制

如果选择补偿装置的传递函数为

$$G_C(s)=\frac{1}{G_1(s)}$$

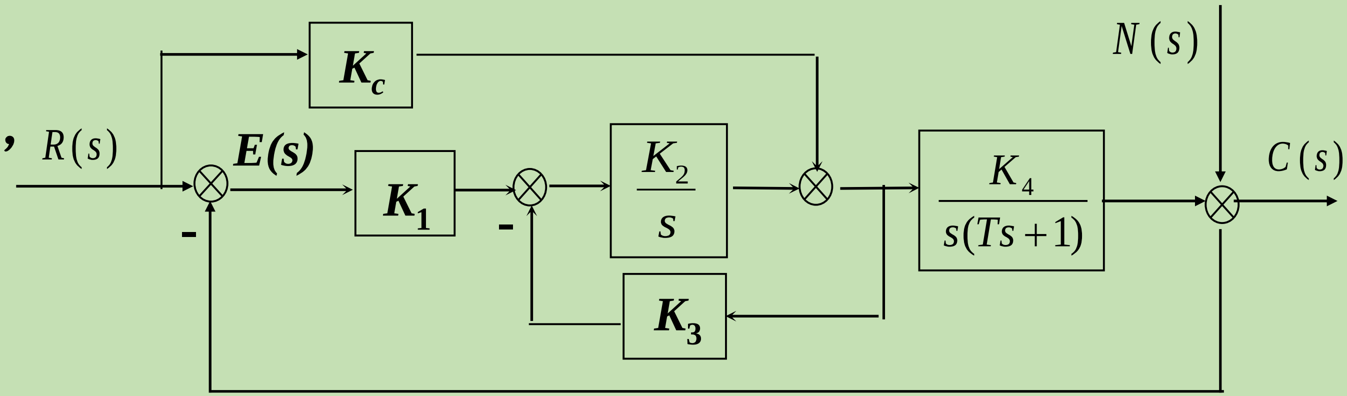
则系统扰动引入的稳态误差为零。

从结构上看，当满足 $G_C(s)=\dfrac{1}{G_1(s)}$ 时，扰动信号经两条通道到达A点，两个分支信号正好大小相等，符号相反，因而实现对扰动的全补偿。

前馈控制加入前后，系统的特征方程保持不变，因此，系统的稳定性不会发生变化。

3.6 线性系统的稳态误差计算

例： 不考虑扰动N(s)作用，选择合适的K值，使系统在输入r(t)=t作用下稳态误差=0：



解：

闭环传递函数：

$$\varPhi(s)=\frac{K_1K_2K_4+K_cK_4s}{s^2(Ts+1)+K_2K_3s(Ts+1)+K_1K_2K_4}$$

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1K_2K_4}{s^2(Ts+1)}+\dfrac{K_cK_4}{s(Ts+1)}}{1+\dfrac{K_2K_3}{s}+\dfrac{K_1K_2K_4}{s^2(Ts+1)}}$$

等效单位反馈系统的开环传递函数：

参考图2.17 & 图2.24：前馈环节比较点前移

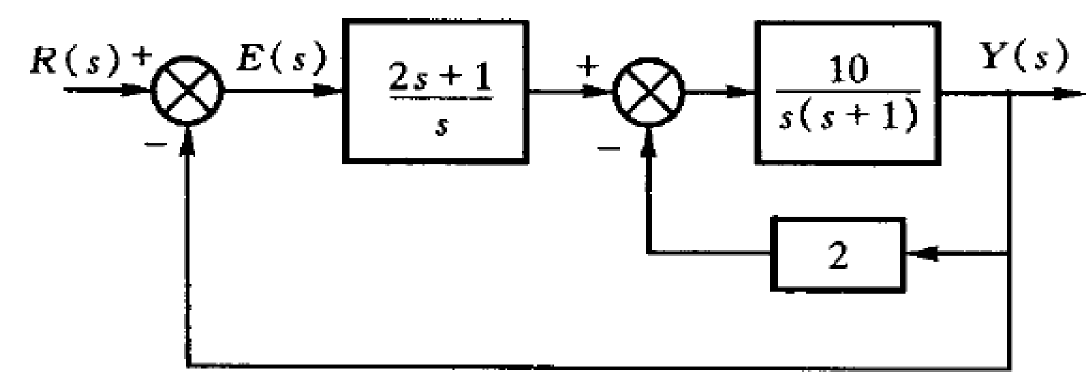
$$G(s)=\frac{\varPhi(s)}{1-\varPhi(s)}=\frac{K_1K_2K_4+K_cK_4s}{s^2(Ts+1+K_2K_3T)+(K_2K_3-K_cK_4)s}$$

要使系统在 r(t)=t作用下稳态误差为0，系统应为II型系统。

$$K_2K_3-K_cK_4=0,\quad K_c=\frac{K_2K_3}{K_4}$$

3 习题3.19

求右图所示系统局部反馈加入前后系统的位置误差系数Kp, 速度误差系数Kv，加速度误差系数Ka



解：（1）局部反馈加入前，系统开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{10(2s+1)}{s^2(s+1)}$$

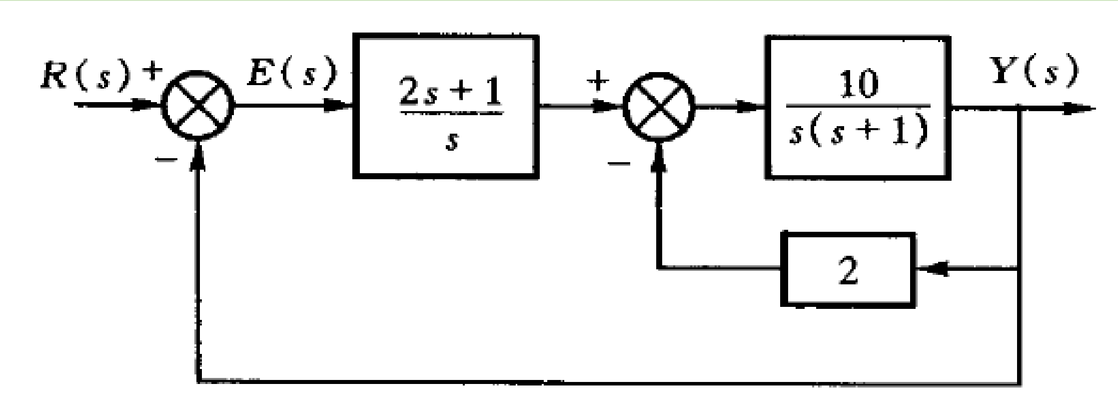
为II型系统

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I 型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II 型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

$$k_p=\infty$$
$$K_v=\infty$$
$$K_a=10$$

习题3.19

求右图所示系统局部反馈加入前后系统的位置误差系数Kp，速度误差系数Kv，加速度误差系数Ka



解：（1）局部反馈加入后，系统开环传递函数为

$$G_0'(s) = \frac{10(2s+1)}{s[s\,(s+1)+20]} = \frac{10(2s+1)}{20s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

为I型系统，K=0.5

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I 型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II 型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

$$k_p = \infty$$
$$K_v = 0.5$$
$$K_a = 0$$

习题3.21

典型二阶系统，当输入单位阶跃信号时，$\sigma\%$=16%，t_s=2s（△=0. 05），试求系统在单位速度信号输入时的稳态误差。

解：典型二阶系统 $$W(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\sigma=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% \qquad t_s\approx\frac{3}{\zeta\omega_n} \quad \Delta=0.05$$

利用以上公式计算可得 $\zeta=0.5$，$\omega_n=3$

系统开环传递函数为 $$G(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{9}{s(s+3)}=\frac{3}{s(\frac{1}{3}s+1)}$$

为I型系统 $$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)=3$$

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}=1/3$$

线性系统的稳态误差计算

误差定义：输入端（作用误差）、输出端

系统类型(型数)：开环传函中积分环节个数（0型，I型，II型）

稳态误差系数及稳态误差计算

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I 型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
II 型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

扰动作用下的稳态误差（令R(s）=0）

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的时域分析

任务：

- 讨论磁盘驱动器对于干扰和参数变化的响应特性；
- 讨论调整放大器增益K_a时，系统对阶跃指令动态响应和稳态误差；
- 如何优化和折衷选取放大器增益K_a。

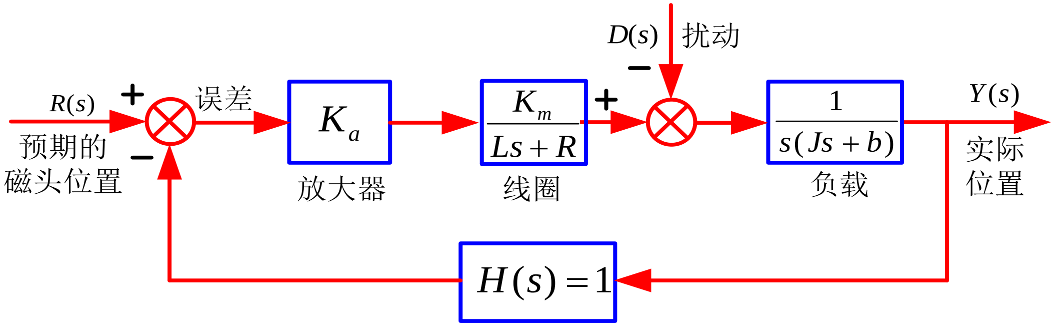


图3.18　磁盘驱动器磁头控制系统

根据2.10给定的参数

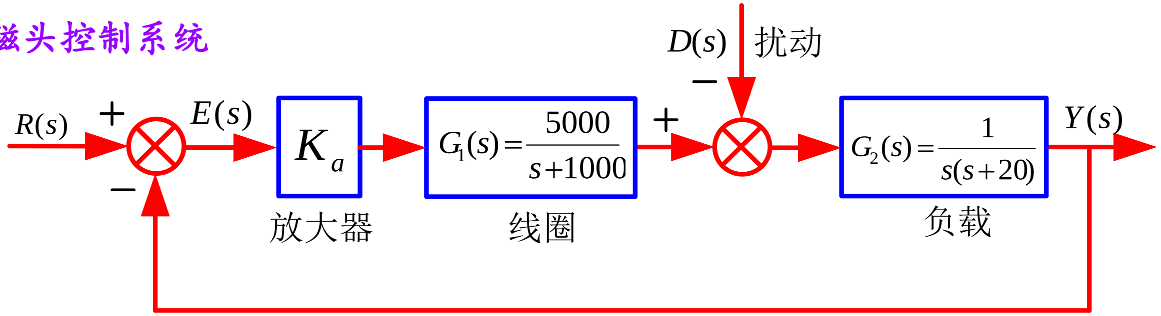


图3.19 具有典型参数的磁盘驱动器磁头控制系统

扰动$D(s)=0$，输入为单位阶跃信号$R(s)=1/s$时，系统的稳态误差。

系统开环传递函数：

$$G(s)H(s)=K_aG_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{5000K_a}{s(s+20)(s+1000)}$$

为Ⅰ型系统，对单位阶跃输入信号的稳态跟踪误差为零。

系统闭环传递函数：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)H(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)H(s)}=\frac{5000K_a}{s^3+1020s^2+20000s+5000K_a}$$

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的时域分析

MATLAB程序：

```
Ka=10 或 80
num=5000*Ka;
den=[1 1020 20000 num];
step(num,den,2)
grid on
```

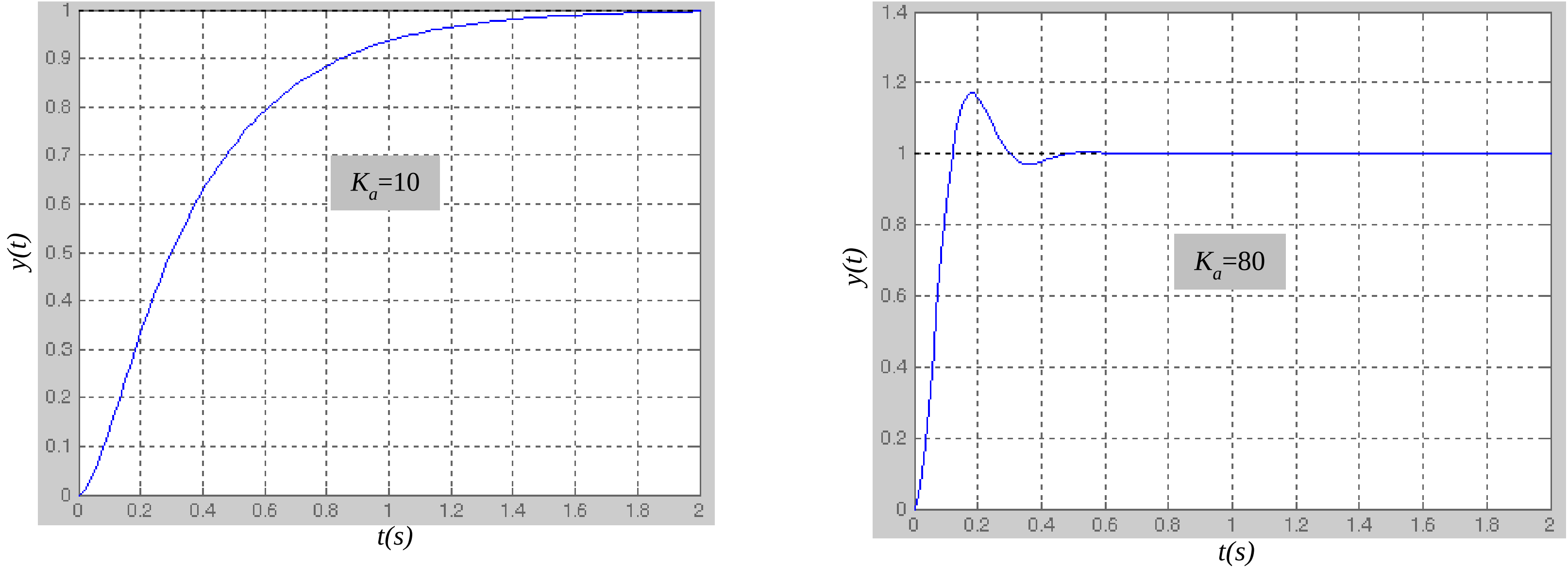
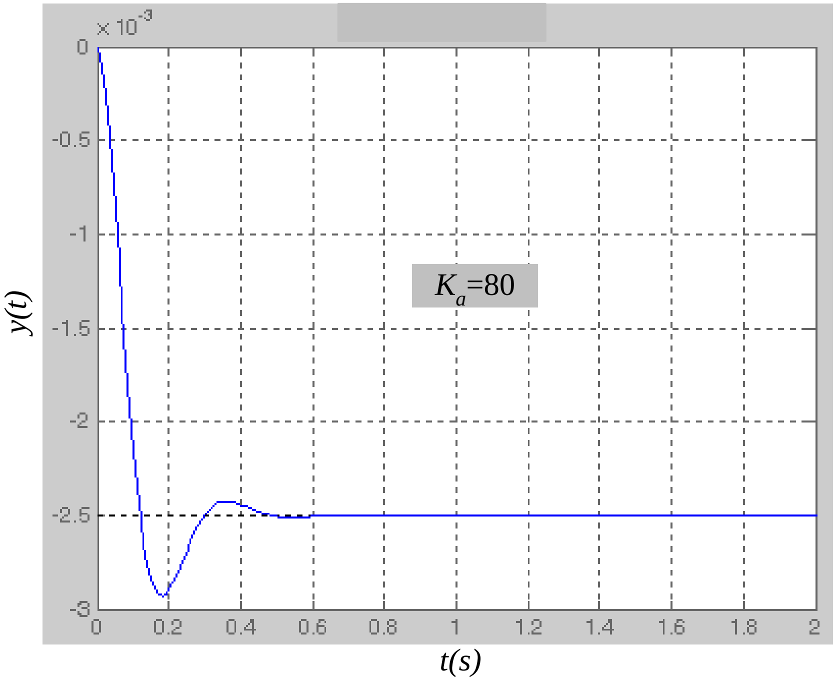


图3.20 不同K_a下的系统响应

输入$R(s)=0$，扰动$D(s)=1/s$时对系统的影响。

当$K_a=80$时，系统对$D(s)$的闭环传递函数为：

$$W_d(s)=\frac{Y(s)}{D(s)}=-\frac{G_2(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)}=-\frac{s+1000}{s^3+1020s^2+20000s+5000K_a}$$



3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的时域分析

- **任务：** 讨论放大器增益K_a的优化设计，以使系统响应满足既快速又不振荡的要求。
- **目标：** 使系统对阶跃输入$r(t)$有最快响应，同时
  (1) 限制超调量和响应的固有振荡；
  (2) 减小干扰对磁头输入位置的影响。

表3.2 动态响应的性能要求

性能指标	预期值
超调量	小于5%
调节时间	小于250ms
对单位阶跃干扰的最大响应值	小于5×10^{-3}

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

考虑电机和机械臂的二阶模型，忽略线圈感应的影响，可得：

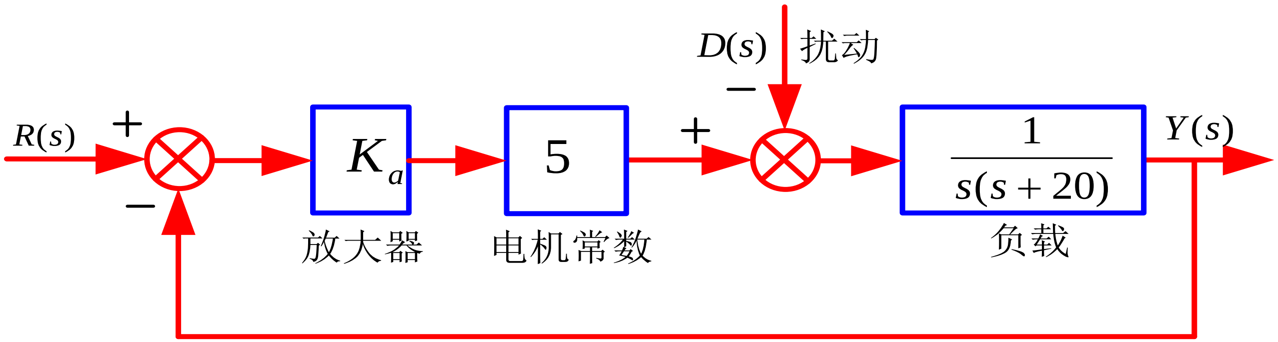


图3-22　具有电机和负载的二阶模型控制系统

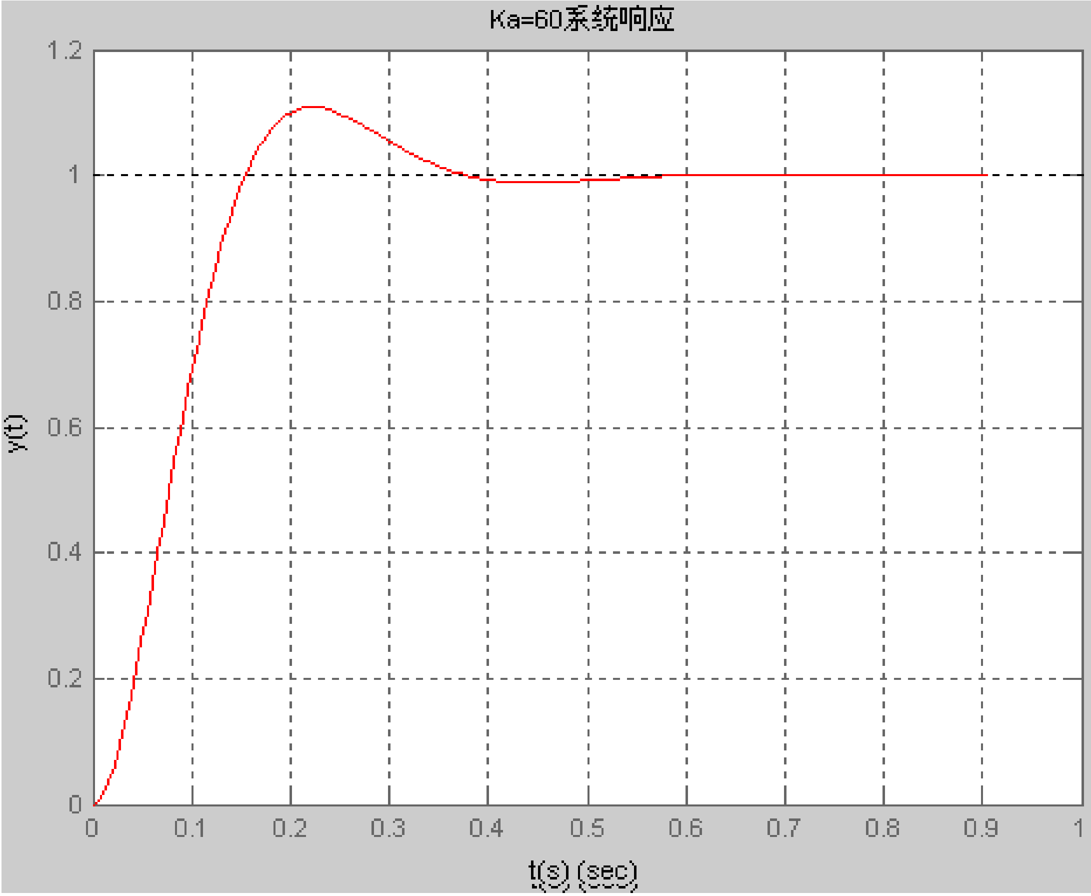
当D(s)=0时，系统的闭环传递函数为：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{5K_a}{s^2+20s+5K_a}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

于是有：

$$\omega_n^2=5K_a \qquad 2\zeta\omega_n=20$$

当K_a取不同值时系统响应（K_a=30、40和60）



3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

表3-3 不同取值时系统性能指标的计算结果

K_a	20	30	40	50	60
超调量	0	1.2%	4.3%	10.8%	16.3%
调节时间	0.55	0.40	0.40	0.40	0.40
阻尼比	1	0.82	0.707	0.58	0.50
单位干扰的最大响应值	-10×10^{-3}	-6.6×10^{-3}	-5.2×10^{-3}	-3.7×10^{-3}	-2.9×10^{-3}

从表中可以看出当K_a=60时，干扰作用的影响已减少了一半。

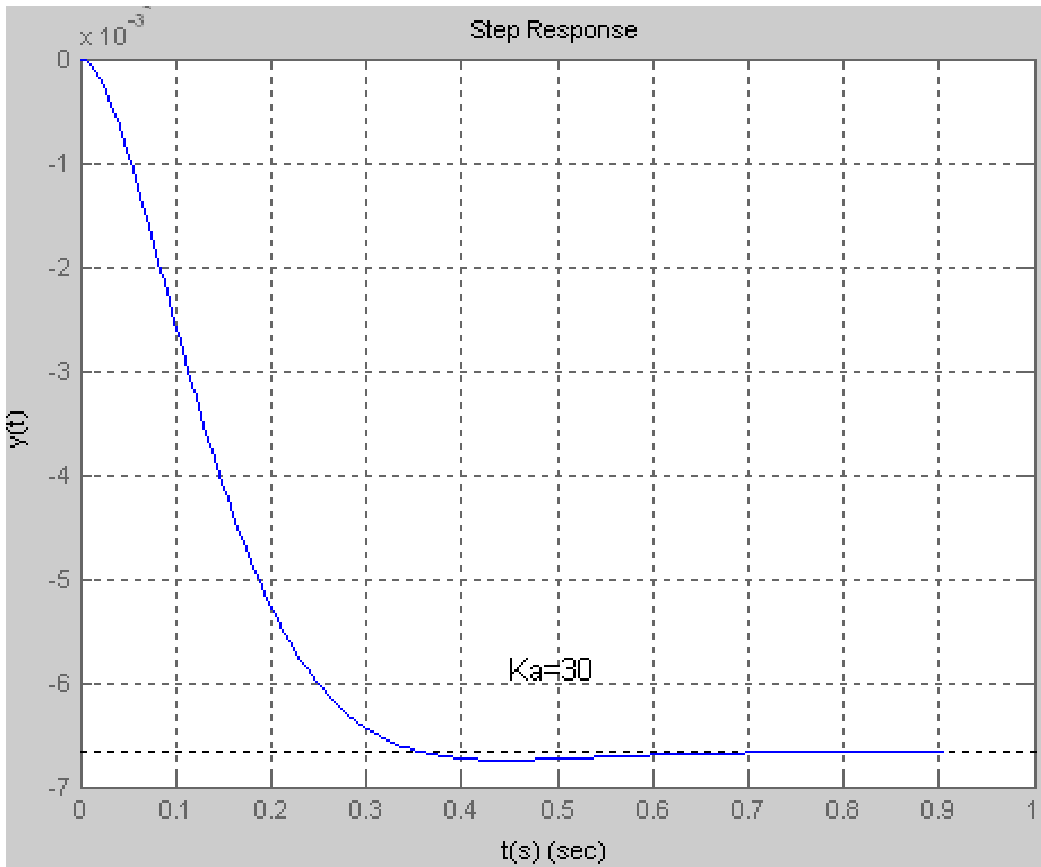
当$R(s)$=0时，系统对$D(s)$的闭环传递函数为：

$$W_d(s)=\frac{Y(s)}{D(s)}=\frac{1}{s^2+20s+5K_a}$$

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

当K_a取不同值时系统响应（K_a=30、40和60）

K_a=60



折中选择：K_a=40

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

考虑图3.25所示系统。除增加一个速度传感器反馈外，与图3.18所讨论的是同一系统。

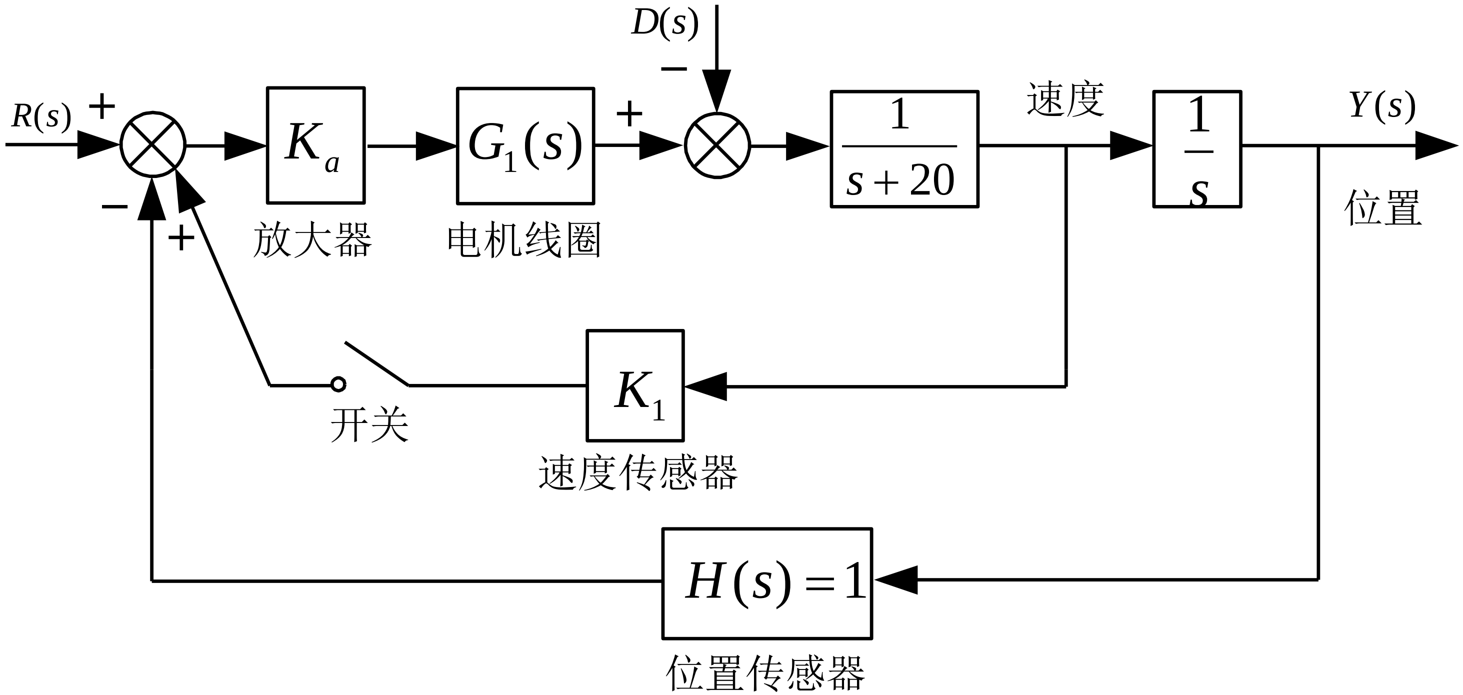


图3.25　带速度反馈的磁盘读写系统

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

1） 开关打开、$D(s)=0$时情况。

闭环传递函数：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)}$$

其中：

$$G_1(s)=\frac{5000}{s+1000} \qquad G_2(s)=\frac{1}{s(s+20)}$$

特征方程为：

$$s(s+20)(s+1000)+5000K_a=0$$

$$\Rightarrow s^3+1020s^2+20000s+5000K_a=0$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 20000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array}$$

其中：

$$b_1=\frac{20000\times1020-5000K_a}{1020}$$

当K_a=4080时， b_1=0，临界稳定。

由辅助方程：

$$1020s^2+5000\times4080=0$$

得：

$$s=\pm j141.4$$

系统稳定条件：

K_a< 4080

2）开关合上，加入速度反馈，*D*(s)=0时情况。

闭环传递函数：

$$W(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_aG_1(s)G_2(s)}{1+K_aG_1(s)G_2(s)(K_1s+1)}$$

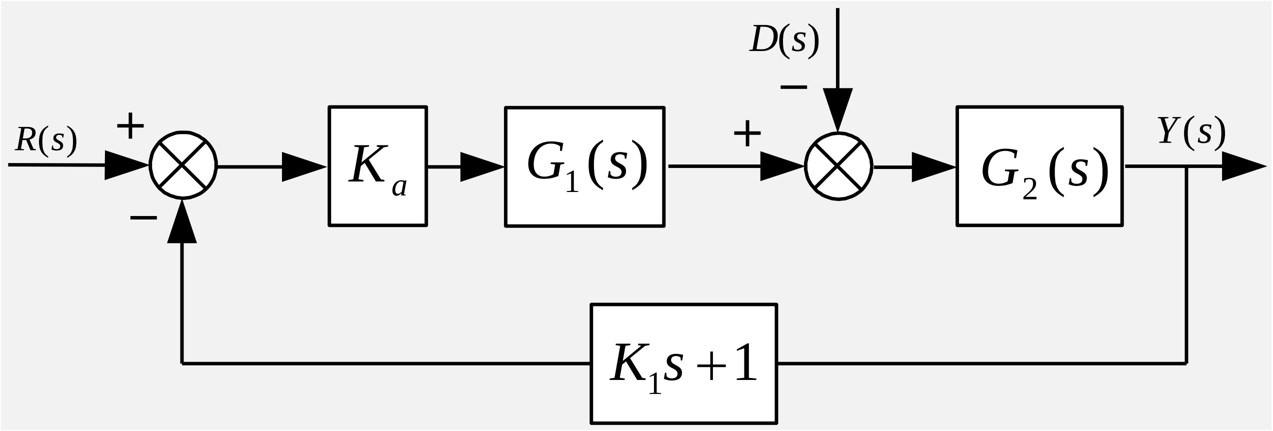


图3.26　当速度反馈加入后的等价系统

3.8 连续设计示例：硬盘读写系统的数学模型建立

特征方程为：

$$s(s+20)(s+1000)+5000K_a(K_1 s+1)=0$$

$$\Rightarrow s^3+1020s^2+(20000+5000K_aK_1)s+5000K_a=0$$

$$\begin{cases} K_a>0 \\ b_1>0 \Rightarrow K_1>1-\dfrac{4}{K_a} \end{cases}$$

建立劳斯表

$$\begin{array}{llll} s^3 & 1 & 20000+5000K_aK_1 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \\ s^1 & b_1 & \\ s^0 & 5000K_a & \end{array}$$

其中：

$$b_1=\frac{(20000+5000K_aK_1)-5000K_a}{1020}$$

取K_1=0.05、K_a=100，系统性能指标如：

表3.3 磁盘驱动器系统性能

性能指标	预期值	实际值
超调量	小于5%	0%
调节时间	小于250ms	260ms
单位阶跃干扰的最大响应值	小于 5×10^{-3}	2×10^{-3}

从表中可以看出，以上设计近似满足性能指标要求。

第3章 线性系统的时域分析—总结

典型试验信号

阶跃信号、斜坡信号、等加速度信号

脉冲信号、正弦信号

时域响应的构成

暂态分量（自由分量）+稳态分量（强迫分量）

系统性能指标

峰值时间、超调量、延迟时间、上升时间、调节时间

一阶系统的时域分析

单位阶跃响应、单位斜坡响应、单位脉冲响应

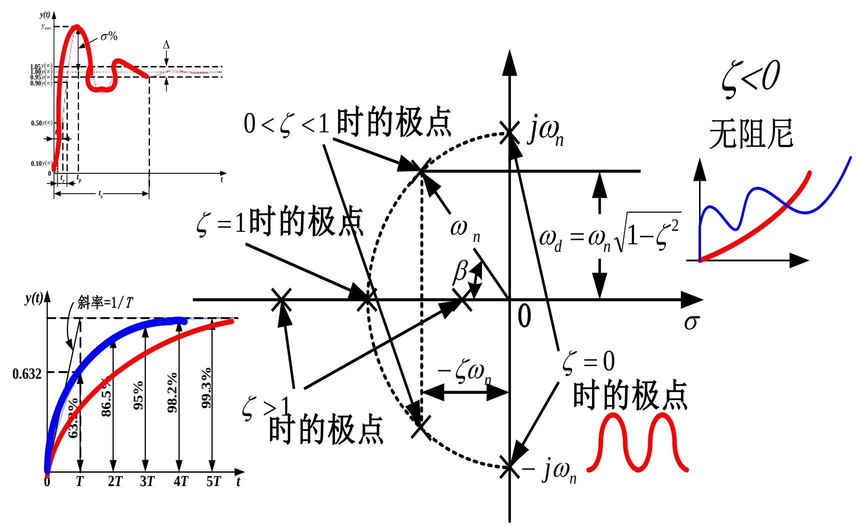
二阶系统的时域分析

单位阶跃响应与根位置的关系

性能指标计算

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

$$\sigma = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \qquad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



高阶系统的时域分析

传递函数的零极点形式

降阶处理方法

主导极点

第3章 线性系统的时域分析—总结

□ 线性系统稳定的充分必要条件

特征方程式的所有根均为负实根或实部为负的复根，即特征方程式的根均位于复平面（s平面）的左半平面。

□ 劳斯(Routh)稳定判据

- ✓ 控制系统稳定的必要条件是：控制系统特征方程式的所有系数符号相同且不为零（不缺项）。
- ✓ 控制系统稳定的充分必要条件是：劳斯表中第一列所有元素符号相同。第一列元素符号改变的次数等于实部为正的特征根的个数（不稳定极点个数）。
- ✓ 应用劳斯稳定判据时的两种特例：①第一列出现零元素，但该零元素所在行的其他元素不为零；②全行元素为零。

□ 线性系统的稳态误差计算

误差定义：输入端（作用误差）、输出端

系统类型(型数)：前向通道积分环节个数（0型，I型，II型）

稳态误差系数及稳态误差计算

系统类型	稳态误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=1(t)$	$r(t)=t$	$r(t)=t^2/2$
0型	K	0	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ型	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
Ⅱ型	∞	∞	K	0	0	$\frac{1}{K}$

扰动作用下的稳态误差（令R(s)=0）

- 3.20

写清题号，不用抄题；

下次课交作业