西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

自 动 控 制 理 论
Automatic Control Theory

工业自动化系

上节课要点复习

□ 线性定常离散系统稳定的充要条件

系统闭环脉冲传递函数的全部极点均分布在平面上以原点为圆心的单位圆内，或者系统所有特征根的模均小于1。

□ 通过线性变换： $z=\dfrac{w+1}{w-1}$

将以z为变量的特征多项式

$\rightarrow$以w为变量的特征多项式

z为变量的特征根是否都位于z平面的单位圆内

$\rightarrow$ 以w为变量的特征根是否都位于w左半平面

应用劳斯判据即可判断系统稳定性。

对于简单定常数二阶系统，也可简单求根判断稳定性。

上节课要点复习

线性离散系统的稳态误差

单位反馈离散系统稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t)=A\cdot 1(t)$	速度误差 $r(t)=A\cdot t$	加速度误差 $r(t)=\frac{At^2}{2}$
0型	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
Ⅰ型	0	$\frac{AT}{K_v}$	∞
Ⅱ型	0	0	$\frac{AT^2}{K_a}$

$$\lim_{z\to1}G(z)=\lim_{z\to1}\frac{K}{(z-1)^{\gamma}}\cdots$$

$$K_p=\lim_{z\to1}G(z)$$

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)$$

$$K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2G(z)$$

与连续系统相比较，离散系统的速度、加速度稳态误差不仅与K_v、K_a有关，而且与采样周期T有关。

上节课要点复习

闭环极点与动态响应的关系

- 当闭环实极点位于z平面的左半单位圆内时，输出衰减脉冲交替变号，故动态过程质量很差。
- 当闭环复极点位于z平面的左半单位圆内时，输出是衰减的高频脉冲，故系统的动态过程性能欠佳。
- 因此，在设计离散系统时，应把闭环极点安置在Z平面的右半单位圆内，且尽量靠近原点。

- 零点的影响较难定性分析。

线性系统的状态空间分析与设计 08

- □ 线性系统的状态空间描述(建模)
- □ 状态空间模型下的系统状态和输出响应的求解
- □ 系统能控性和能观性的定义和判别方法
- □ 状态反馈和状态观测器的综合设计方法

自动控制系统分类：按输入输出量的数目

- 单输入单输出（SISO: Single Input Single Output）控制系统：以传递函数为基础，经典控制理论；
- 多输入多输出（MIMO: Multiple Input Multiple Output）控制系统：以状态空间为基础，现代控制理论。

经典控制理论

- 数学基础：拉氏变换和z变换
- 数学模型：连续系统的微分方程、传递函数和离散系统的差分方程及脉冲传递函数。
- 分析和校正方法：时域法、根轨迹法和频域法。
- 主要分析内容：系统的稳定性、稳态性能和动态性能

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

- 经典控制理论对于SISO线性定常系统的分析和校正都是有效的，但只能揭示输入-输出之间的外部特性，对于系统内部结构特性难以分析，难以有效处理MIMO系统。

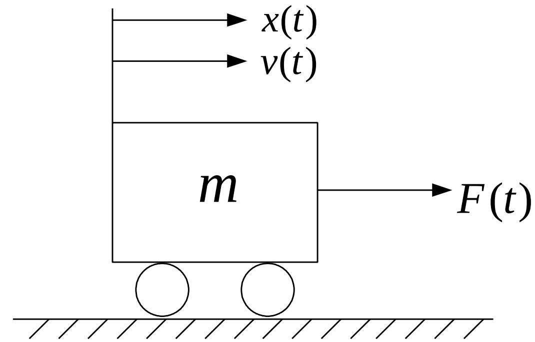
- 状态空间描述是现代控制理论的基础，它不仅可以描述系统的输入输出关系，而且可以描述系统的内部特性；
- 特别适合于多输入多输出MIMO系统，也适应于时变系统、非线性系统和随机控制系统；
- 状态空间描述是对系统的一种完全描述。

SISO系统	MIMO系统
输入-输出模型	状态空间模型（输入-状态-输出）

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

基本概念

小车行走系统，与地面的摩擦力为0。



根据牛顿第二定律，得：

$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m}F(t)\ \Rightarrow v(t)=v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=v(t)\ \Rightarrow x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}v(t)dt=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}[v_0(t)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau]dt$$

$$=x(t_0)+(t-t_0)v(t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}[\int_{t_0}^{t}F(\tau)d\tau]d(t)$$

$x(t_0)$和$v(t_0)$表征系统在t_0时刻的状态，所以称之为初始状态变量。对于$t>t_0$的任意时刻，小车的状态是由其状态变量$x(t)$和$v(t)$确定的。如果已知外力$F(t)$和$x(t_0)$以及$v(t_0)$，则可计算出任意$t>t_0$的时刻系统未来状态$x(t)$和$v(t)$。下面介绍线性系统状态空间描述常用的概念。

基本概念

□ 状态

系统在时间域中的行为或运动状况的信息集合称为状态(State)。这个时间域包括系统的过去、现在和将来。状态是表征系统全部行为的一组相互独立的变量集合。

□ 状态变量

完全确定系统状态的一组数目最小的变量称为状态变量(State Variable)，状态变量常用$x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)$符号表示。

□ 状态向量

把状态表示成以各状态变量为分量组成的向量时，称为状态向量(State Vector)，n维状态向量表示为：$x(t)=[x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)]^T$。

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

基本概念

□ 状态空间

以n个状态变量$x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)$为坐标轴所组成的$n$维空间(State Space)称为状态空间，随着时间t的推移，$x(t)$将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨迹。

□ 状态方程

描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶向量微分方程或差分方程称为系统的状态方程。 $\dot{x}(t) = f\left[x(t),u(t),t\right]$

□ 输出方程

描述系统输出变量与状态变量和输入变量之间函数关系的代数方程称为输出方程。 $y(t) = g[x(t),u(t),t]$

基本概念

□ 动态方程

状态方程与输出方程的组合称为动态方程，又称为状态空间表达式，动态方程的一般形式为（连续系统）：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t),u(t),\mathrm{t}]\\ y(t) &= g[x(t),u(t),\mathrm{t}]\end{aligned}\right\}$$

或离散形式

$$\left.\begin{aligned}x(t_{k+1}) &= f[x(t_k),u(t_k),\mathrm{t}_k]\\ y(t_k) &= g[x(t_k),u(t_k),t_k]\end{aligned}\right\}$$

基本概念

□ 动态方程

线性连续系统动态方程的一般形式为:

n个状态x: $n\times 1$

p个输入u: $p\times 1$

q个输出y: $q\times 1$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+B(t)u(t)\\ y(t)&=C(t)x(t)+D(t)u(t)\end{aligned}\right\}$$

系统矩阵A: $n\times n$

输入矩阵B: $n\times p$

输出矩阵C: $q\times n$

前馈矩阵D: $q\times p$

线性定常系统A、B、C、D中的元素全部都是常数，即:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}\right\}$$

连续形式

$$\left.\begin{aligned}x(k+1)&=Gx(k)+Hu(k)\\ y(k)&=Cx(k)+Du(k)\end{aligned}\right\}$$

离散形式

基本概念

动态方程

其中

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix}$$

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

基本概念

输入 —— 状态 —— 输出

状态方程　　输出方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

动态方程

状态空间表达式

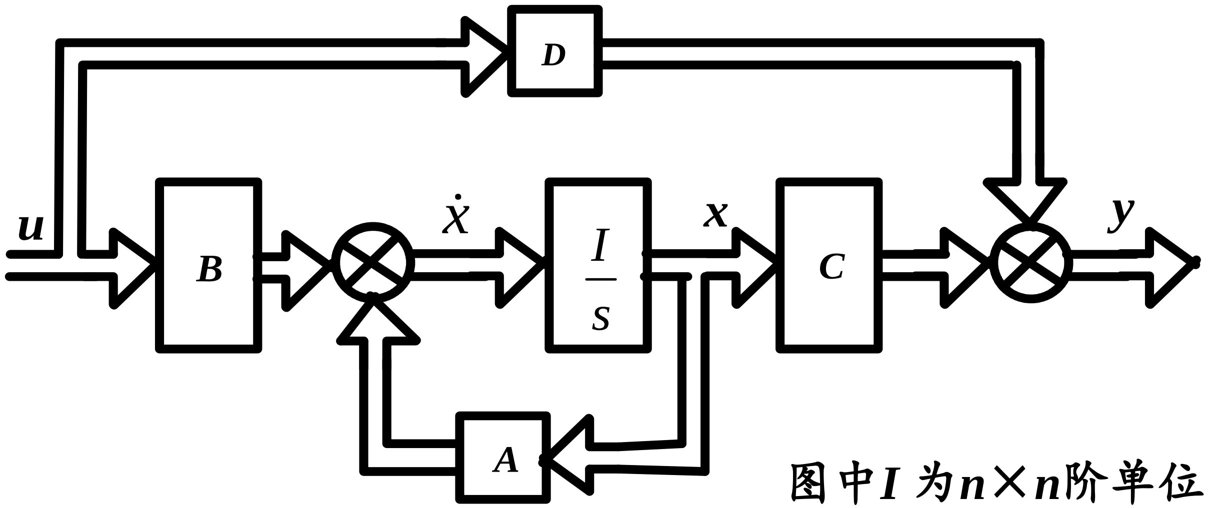
8.1线性系统的状态空间描述(建模)

基本概念

□ 线性系统的结构图

线性定常连续时间系统的结构图：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}\right\}$$



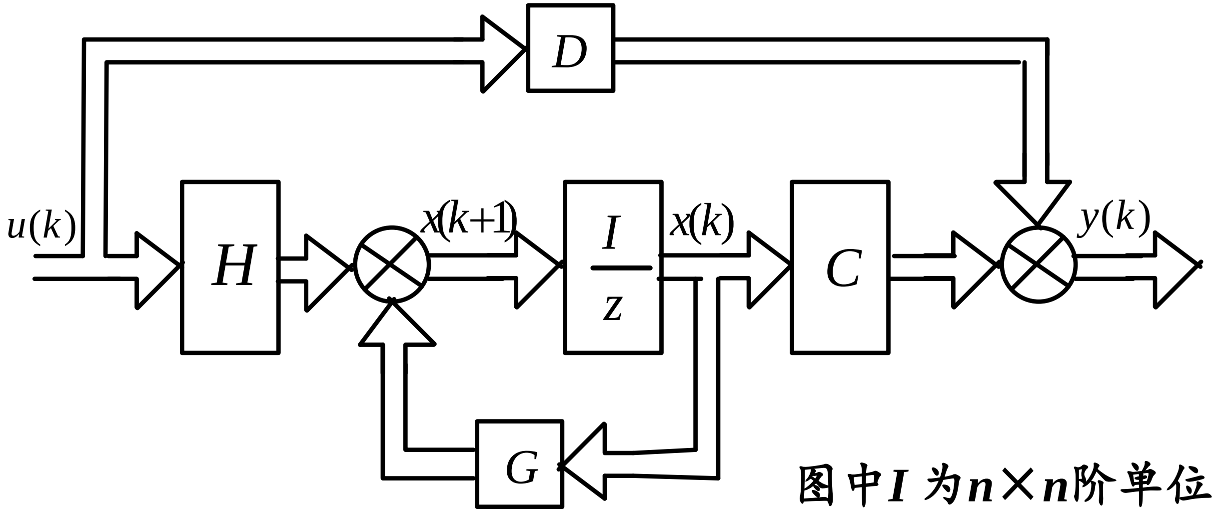
图中I 为$n\times n$阶单位矩阵

基本概念

线性系统的结构图

线性定常离散时间系统的结构图：

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k)+Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{aligned}\right\}$$



图中I为$n\times n$阶单位矩阵

基本概念

- 由于状态变量的选取不是唯一的，因此状态方程、输出方程也都不是唯一的。但是，用独立变量所描述系统的维数应该是唯一的，与状态变量的选取方法无关。
- 动态方程对于系统的描述是充分的和完整的，即系统中的任何一个变量均可用状态方程和输出方程来描述。
- 状态方程着眼于系统动态演变过程的描述，反映状态变量间的微积分约束；而输出方程则反映系统中变量之间的静态关系，着眼于建立系统中输出变量与状态变量间的代数约束，这也是非独立变量不能作为状态变量的原因之一。

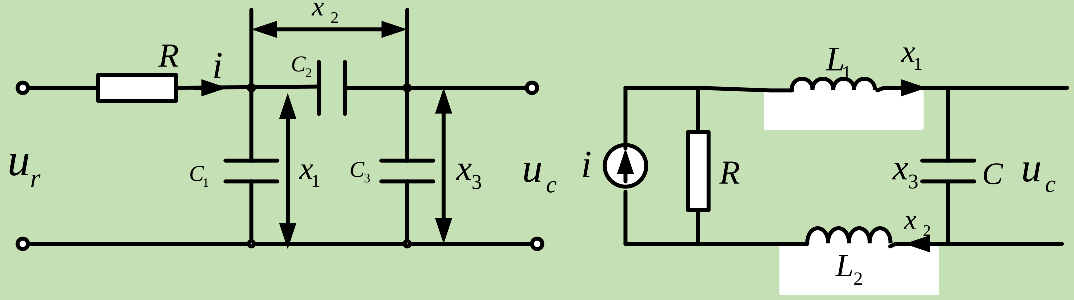
8.1线性系统的状态空间描述(建模)

基本概念

动态方程描述的优点：

- 便于采用向量、矩阵记号简化数学描述；
- 便于在计算机上求解；
- 便于考虑初始条件；
- 便于了解系统内部状态的变化特征；
- 适用于时变、非线性、连续、离散、随机、多变量等各类控制系统。（输入—状态—输出）

例8.1： 试确定电路的独立状态变量，u_r和i分别是输入电压和输入电流，u_c是输出电压，x_i, i=1, 2, 3为电容电压或电感电流。



解：

假定电容初始电压均为零，则：

$$x_2 = \frac{C_3}{C_2 + C_3} x_1, \quad x_3 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} x_1$$

$$x_1 = x_2$$

只有一个变量是独立的，状态变量只能选其中之一，即用任意一个变量做状态变量就可以确定该电路的状态。

只有两个变量是独立的，即x_1和x_3或x_2和x_3，可以用任意一组作为状态变量。

动态方程与传递函数的关系

系统动态方程（初始条件为0）：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{拉氏变换}} \begin{aligned}X(s)&=(sI-A)^{-1}BU(s)\\ Y(s)&=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)=G(s)U(s)\end{aligned}$$

系统的传递函数矩阵（简称传递矩阵）：

$$\boxed{G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D}$$

$$G(s)=\begin{bmatrix}G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1p}(s)\\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2p}(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qp}(s)\end{bmatrix}_{q\times p}$$

$G_{ij}(s)\ \ (i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$

表示第 i 个输出量与第 j 个输入量之间的传递函数。

例8.2： 试求系统的传递函数。

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad D=0$$

解：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{[sI-A]^*}{|sI-A|}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

线性定常系统动态方程的建立(建模)

主要有两种方法：

- 直接根据系统的机理建立相应的微分方程或差分方程(机理法)，即选择有关的物理量作为状态变量，从而导出动态方程。(状态变量的选取)
- 由已知的系统数学模型如微分方程或传递函数，经过一定的转化从而得到其动态方程。

对同一系统，状态变量的选择不具有唯一性，动态方程也不唯一。

线性定常系统动态方程的建立(建模)

1) 根据系统物理机理建立动态方程(机理法)

状态变量的选取：

状态变量的选取并不唯一，但应尽量选取系统中独立储能元件（如电容、电感、弹簧、质量、转动惯量）输出的物理量作为状态变量比较方便。

电感→电流i；　电容→电压u;

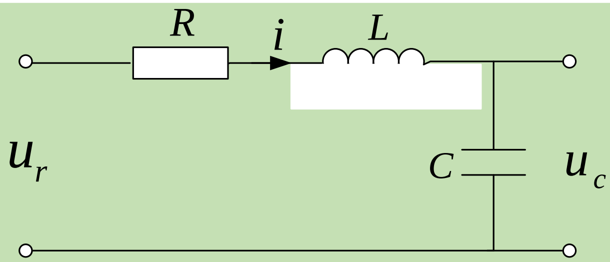
质量→速度v；　弹簧→位移x;

动态方程的构成(型式)：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\right\}$$

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

例8.3： 对右图所示RLC电路，选择几组状态变量建立相应的动态方程。



解： $Ri+L\dfrac{di}{dt}+u_c=u_r \qquad y=u_c=\dfrac{1}{C}\int idt$

方法1： 状态变量为电感电流和电容电压，即 $x_1=i, \quad x_2=u_c$

状态方程为：

$$\dot{x}_1=-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{L}x_2+\frac{1}{L}u_r$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{C}x_1$$

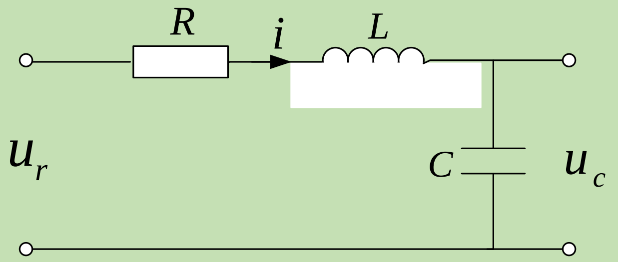
输出方程为： $y=x_2$

向量-矩阵形式为：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_r\\ y=[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=Ax+bu_r\\ y=cx\end{cases}$$

例8.3：

$$Ri+L\frac{di}{dt}+u_c=u_r \qquad y=u_c=\frac{1}{C}\int idt$$



□ **方法2：** 状态变量为电容电流和电荷，即 $x_1=i,\quad x_2=\int idt$

则：

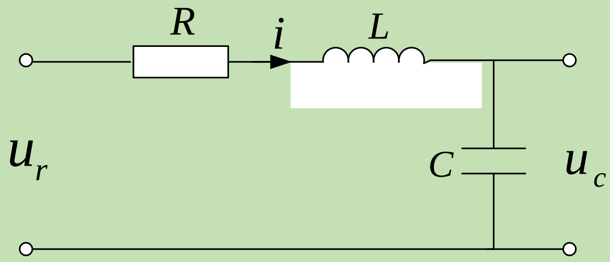
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_r \qquad y=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{1}{L}u_c+\frac{1}{L}u_r=-\frac{R}{L}i-\frac{1}{L}\frac{1}{C}\int idt+\frac{1}{L}u_r$$

例8.3：

$$Ri+L\frac{di}{dt}+u_c=u_r$$

$$y=u_c=\frac{1}{C}\int idt$$



- 方法3：状态变量为 $x_1=\frac{1}{C}\int idt+Ri,\quad x_2=\frac{1}{C}\int idt$

其中，x_1无明确的物理意义

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{L}(u_r-u_c-Ri)$$

$$R\frac{di}{dt}=\frac{R}{L}(u_r-u_c-Ri)=\frac{R}{L}(u_r-\frac{1}{C}\int idt-Ri)$$

状态方程为：

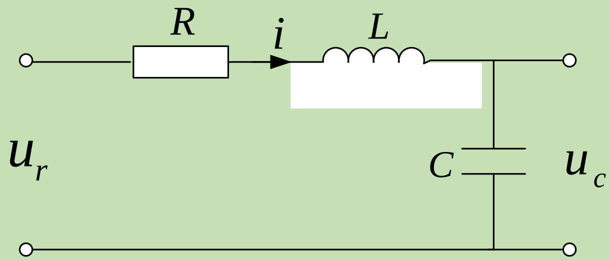
$$\dot{x}_1=\dot{x}_2+R\frac{di}{dt}=\frac{1}{RC}(x_1-x_2)+\frac{R}{L}(-x_1+u_r)=(\frac{1}{RC}-\frac{R}{L})x_1-\frac{1}{RC}x_2+\frac{R}{L}u_r$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{C}i=\frac{1}{RC}(x_1-x_2)=\frac{1}{RC}x_1-\frac{1}{RC}x_2$$

输出方程为： $y=x_2$

例8.3：

$$Ri+L\frac{di}{dt}+u_c=u_r \qquad y=u_c=\frac{1}{C}\int idt$$



- **方法3：** 状态变量为量 $x_1=\frac{1}{C}\int idt+Ri,\quad x_2=\frac{1}{C}\int idt$

  其中，x_1无明确的物理意义

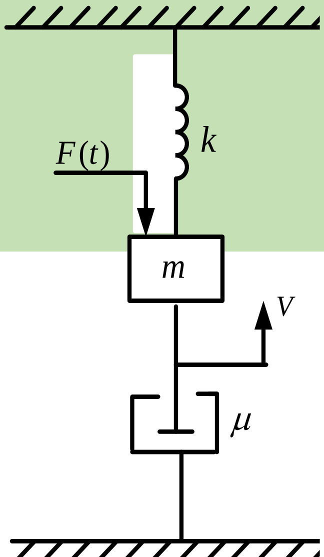
向量-矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{RC}\\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{R}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_r \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

结论： 对同一系统，状态变量选择不具有唯一性，动态方程也不唯一。**一般选择储能器件上的量做为状态变量。**

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

例8.4: 试列写图示双输入三输出系统的动态方程，其中：外力$F(t)$和阻尼器气缸速度V两种外作用，输出量为质量块的位移、速度和加速度，m、k、μ分别为质量、弹簧刚度、阻尼系数，x为质量块的位移。



解：

初速度≠0

$$m\ddot{x}+\mu(\dot{x}-V)+kx=F$$

若已知质量块的初始位移和初始速度，系统在输入作用下的解便可唯一确定，所以选择质量块的位移和速度作为状态变量：

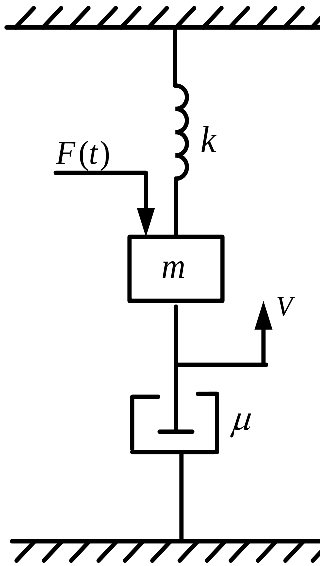
$$x_1=x\ ,\qquad x_2=\dot{x}_1$$

已知系统有三个输出，则：$y_1=x_1=x$，$y_2=x_2=\dot{x}$，$y_3=\ddot{x}$

例8.4：

$$m\ddot{x}+\mu(\dot{x}-V)+kx=F$$

$$y_1=x_1=x，\quad y_2=x_2=\dot{x}\;，\quad y_3=\ddot{x}$$



系统状态方程：

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=\ddot{x}=\frac{1}{m}[-\mu(x_2-V)-kx_1+F]$$

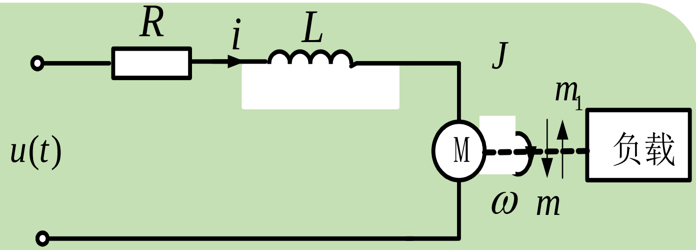
向量-矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{m} & \frac{\mu}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F\\ V\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \frac{1}{m} & \frac{\mu}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F\\ V\end{bmatrix}$$

单输入单输出变为两输入三输出，即增加了对速度和加速度的测量点。

例8.5： 试写系统状态空间表达式，其中：R、L为电枢回路电阻和电感，J为机械旋转部分转动惯量，m_1为总负载转矩。



电枢反电势：e
反电势系数：C_e
电动机转矩系数：C_m

解： 电感L和转动惯量J是贮能元件，相应的物理量电流i及旋转速度ω可选择为状态变量，它们是相互独立的，所以状态变量为：$x_1 = i$，$x_2 = \omega$

电枢回路微分方程为：$L\dfrac{di}{dt} + Ri + e = u$

电磁感应公式为：

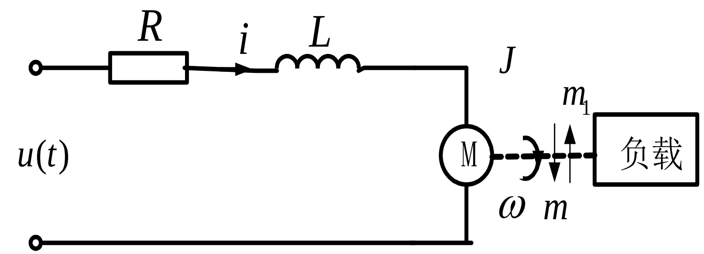
$$e = C_e\omega$$

机械旋转部分微分方程为：$J\dfrac{d\omega}{dt} = C_m i - m_1$

例8.5：

$$L\frac{di}{dt}+Ri+e=u$$
$$J\frac{d\omega}{dt}=C_m i-m_1$$
$$e=C_e\omega$$

$$x_1=i,\quad x_2=\omega$$



$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{C_e}{L}\omega+\frac{1}{L}u$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{C_m}{J}i-\frac{m_1}{J}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{C_e}{L}\\ \frac{C_m}{J} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ m_1\end{bmatrix}$$

$$y=x_2=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

角速度ω为输出

若指定电动机的转角θ为输出，则上述两个状态变量是不能对系统进行全面描述的，则必须增加一个状态变量 $x_3=\theta$ 。

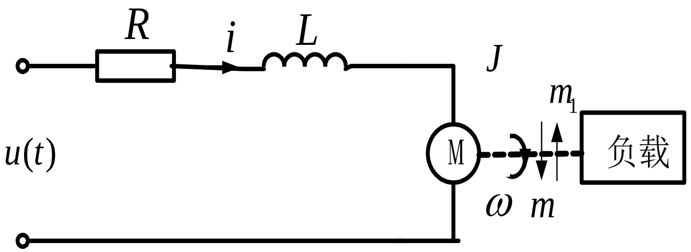
例8.5：

$$L\frac{di}{dt}+Ri+e=u$$
$$J\frac{d\omega}{dt}=C_m i-m_1$$
$$e=C_e\omega$$

$x_1=i$

$x_2=\omega$

$x_3=\theta$



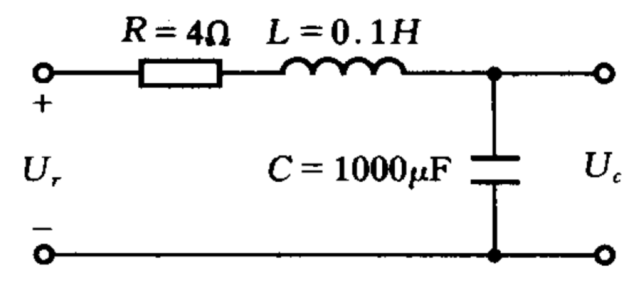
$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i-\frac{C_e}{L}\omega+\frac{1}{L}u$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{C_m}{J}i-\frac{m_1}{J}$$
$$\dot{x}_3=\dot{\theta}=x_2$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{C_e}{L} & 0\\ \frac{C_m}{J} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ m_1\end{bmatrix}$$

$$y=x_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

电动机的转角θ为输出

习题8.1： 已知RLC电路如图，(1)试写出以i_L和u_C为状态变量的状态方程；(2)已知$i_L(0)=0$，$u_C(0)=0$，求单位阶跃响应$u_C(t)$



解： 电感L和电容C 是贮能元件，选择相应的物理量电流 i_L及电压u_C为状态变量，它们是相互独立的，所以状态变量为：

$$x_1 = i_L \quad , \qquad x_2 = u_C$$

根据基尔霍夫电压定律： $i_L R + L\dfrac{di_L}{dt} + u_c = u_r$ $\qquad \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R}{L}i_L - \dfrac{1}{L}u_c + \dfrac{u_r}{L}$

电容电压-电流： $u_c = \dfrac{1}{c}\int i_L dt \Rightarrow \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{i_L}{c}$

整理得：

$$\dot{x}_1 = \frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_c + \frac{u_r}{L} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_r$$

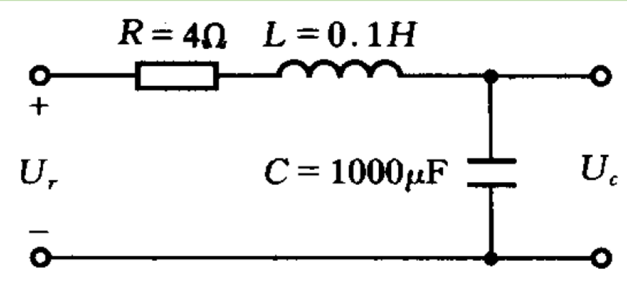
$$\dot{x}_2 = \frac{du_c}{dt} = \frac{i_L}{c} = \frac{1}{c}x_1$$

状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u_r$$

8.1线性系统的状态空间描述(建模)

习题8.1： 已知RLC电路如图，(1)试写出以i_L和u_C为状态变量的状态方程；(2)已知$i_L(0)=0$，$u_C(0)=0$，求单位阶跃响应$u_C(t)$



解：输出方程为 $y=U_c=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

动态方程为：$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu_r\\ y=Cx+Du_r\end{cases}$ $A=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ $D=0$

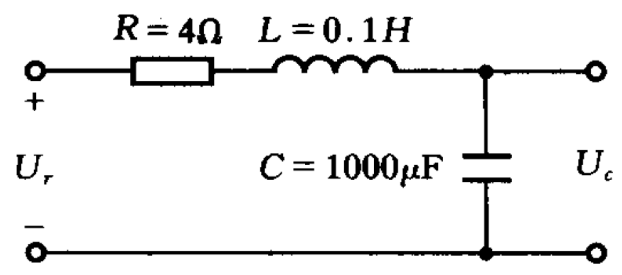
求传递函数矩阵：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+\dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{c} & s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+\frac{R}{L})*s-\frac{1}{L}*(-\frac{1}{c})}\begin{bmatrix}s & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & s+\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B+D=\frac{1}{(s+\frac{R}{L})*s-\frac{1}{L}*(-\frac{1}{c})}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{c} & s+\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

习题8.1： 已知RLC电路如图，(1)试写出以i_L和u_C为状态变量的状态方程；(2)已知$i_L(0)=0$，$u_C(0)=0$，求单位阶跃响应$u_C(t)$



解：输出为

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{1}{10^{-4}s^2+4\times10^{-3}s+1}\times\frac{1}{s}=\frac{10^4}{(s^2+40s+10^4)s}$$

$$y(t)=1-\frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)$$

$$=1-\frac{1}{0.98}e^{-20t}\sin(98t+26.1^{\circ})$$

8 本节课小结

□基本概念

状态、状态变量、状态方程、动态方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\right\}$$

□动态方程与传递函数的关系

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

□线性定常系统动态方程的建立(建模)

根据系统物理机理建立动态方程(机理法)

状态变量的选取（尽量选取独立储能元件输出的物理量）

动态方程的构成(型式：状态方程+输出方程)

状态变量选取的不唯一性（但传递函数矩阵是唯一的，不变）。