# 西安交通大学考试题　答案（2019.1.11）

课　　程 复变函数与积分变换（A）

一. 填空（每小题 3 分，共 18 分）1. $e^{in\theta}$；2. $|w|=\dfrac{1}{2}$;3. $-\pi$；4. $3^{\sqrt{5}}e^{i\sqrt{5}(2k+1)\pi}$，（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）；5. 0 ; 6.-cos1.

二. 单项选择（每小题 3 分，共 18 分） B、C、C、A、D、D

三. (12).因 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+3,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x,\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，所以 $v$ 可微，且满足拉普拉斯方程，故 $v$ 是调和函数，则可作为解析函数的虚部；(4 分)

利用偏积分、折线积分、凑全微分或不定积分法得 $u=-3xy^2+x^3+C$ (8 分)

$f(z)=z^2+3iz+C, f(i)=0\Rightarrow C=4$ (10 分)　$f(z)=z^2+3iz+4$ (12分)

四. (12 分) $f(z)=\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{1}{z-1}$ 有两个奇点 $z_1=1,z_2=-3$ (3 分)

(1) $|z|<1: f(z)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$　　(6 分)

(2) $1<|z|<3: f(z)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}z^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$　　(9 分)

(3) $3<|z|<+\infty: f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$　　(12 分)

五. (10 分)

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{(x^2+\alpha^2)^2}dx(2分)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{i\beta x}}{(x^2+\alpha^2)^2}dx\right](4分)$$

$$=\mathrm{Im}\{\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[\mathrm{R}(z)],\alpha\mathrm{i}\}(6分)=\mathrm{Im}\left\{\lim_{z\to\alpha i}\left[\frac{ze^{i\beta z}}{(z+\alpha i)^2}\right]'\right\}(8分)=\frac{\pi\beta}{4\alpha}e^{-\alpha\beta}(10分)$$

六. (8 分)　f(z)在扩充复平面上有 5 个有限孤立奇点和 1 个无穷远孤立奇点，

$$\oint_C\frac{z^{10}}{(z^4+2)^2(z-2)^3}dz=-2\pi iRes[f(z),\infty](4分)=2\pi iRes\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right](6分)=2\pi i\ (8分)$$

七、(8 分) $L\left[\dfrac{1-\cos t}{t}\right]=\int_s^{\infty}L[1-\cos t]ds$　　(3 分)

$$=\int_s^{\infty}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]ds=\ln\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\Bigg|_s^{\infty}=-\ln\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}=F(s)$$ （6 分）

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt=F(1)=\ln\sqrt{2}$$ （8 分）

八．1. $t^m * t^n = L^{-1}\left(\frac{m!}{s^{m+1}}\frac{n!}{s^{n+1}}\right)$（4分）$=L^{-1}\left(\frac{m!n!}{s^{m+n+1+1}}\right)$（6分）$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$（8分）

还可以用卷积定义,定义写对，给 4 分

2.设 $Y(s)$ 表示 $y(t)$ 的拉氏像函数。则

$$(s^2-1)Y(s)=\frac{4}{s^2+1}-s-2$$ （4 分）

于是得 $$Y(s)=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$ （6 分）

从而 $y(t)=L^{-1}[\mathrm{y(s)}]=-2\sin(t)-cht$ （8 分）