西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：复变函数与积分变换(A)　考试时间 2018 年 1月6 日

一．填空题（20 分，每空 4 分）

1. $\frac{\ln 2}{2}+i\pi(\frac{1}{4}+2k)$； 2. $2\pi(-6+13i)$； 3. $|w-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ ；4. $\frac{1}{2}$；5. $\frac{1}{3}h(3t)$

二．单项选择题（20 分，每小题 4 分）

1．D; 2. C； 3. C； 4.C; 5. B

三．(10 分)解: 1.计算

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

…4 分

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3}=-\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

所以为调和

$$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-i(x-iy)^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{i}{z^2}.$$ …6分

$$f(z)=\frac{i}{z}+a+bi,\text{从而}f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}-2+i\frac{x}{x^2+y^2}$$ … 8分

2. $\oint_C \frac{z^2+(\bar{z})^3}{z}dz=\oint_C \frac{(\bar{z})^3}{z}dz$ …….4 分

$=729\oint_C \frac{1}{z^4}dz$ =0……8 分

$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{3}{z^2+3}$……….(2分)

3. (1) $=-\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ …..(4分)

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{z^2+3}=\dfrac{1}{z(1-\dfrac{1}{z})}+\dfrac{1}{\dfrac{z^2}{3}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}z^{2n}$ …8 分

4.z=0 是二级极点………(4)

$$I=\oint_C\frac{z}{\sin^3 z}dz=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{z}{(\sin z)^3},0]=2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{z}{(\sin z)^3}\right)\text{.......6(分)}=0\text{(8分)}$$

5.
$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(2x)}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2xi}}{x^2+9}dx\text{....(2分)}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(2\pi i\,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{ze^{2iz}}{z^2+9},3i\right])\text{....(6分)}=\frac{\pi}{2e^6}\text{..(8分)}$$

6. 记 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$，对方程两边取拉氏变换得 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$ (4 分)

取拉氏逆变换得 $f(t)=te^{-t}$ (4 分)

7. 记 $f(t)=\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)=\dfrac{1}{2s}-\dfrac{s}{2(s^2+4)}$， $\mathrm{Re}(s)>0$ (4 分)

$$F_1(s)=L\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)=\frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)ds=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s},\quad \mathrm{Re}(s)>0\quad\text{(6 分)}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}dt=F_1(1)=\frac{1}{4}\ln 5\quad\text{(8 分)}$$

四. (4) 证明：因为在 D 并上原点的一个领域内函数 $\dfrac{1}{1+z^2}$ 解析，所以，$\dfrac{1}{1+z^2}$ 沿 C 的积分与路径无关。我们可以选择特殊的路径 $C=C_1+C_2$，其中 C_1 为0到1的线段，C_2 为1到 z_0 的单位圆上弧线 (1 分)。在 C_2 上，我们设 $z=e^{i\theta}(0\le\theta\le\alpha)$,其中 $z_0=e^{i\alpha}$ (2 分)，我们有

$$\mathrm{Re}\int_C\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^{\alpha}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{1+e^{2i\theta}}\quad\text{(2 分)}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^{\alpha}\frac{id\theta}{e^{-i\theta}+e^{i\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\mathrm{Re}\int_0^{\alpha}\frac{2id\theta}{\cos\theta}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{x=0}^{1}=\frac{\pi}{4}\quad\text{(4 分)}$$