CHAPTER 7

假設檢定

1. 爲確定大台北地區的水源是否合乎飲用標準，環保署派員檢查了 10 處集水區的水質。依據法令規定每單位體積的水含某種特定的生菌平均數須低於 198 單位，否則便不合飲用標準。今從大台北 10 處集水區所測得的該種生菌平均數爲 190 單位，標準差爲 13.16 單位，試用 t 檢定分析，依以上所測得的結果是否可以證明大台北地區的水源合乎飲用標準？（顯著水準 $\alpha = 0.05$ ）

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，因爲樣本數只有 10 個爲小樣本且母體標準差未知，故使用 t 檢定。另因本題爲單尾檢定，故棄卻域爲 $C = \{T < -t_{0.05}(9)\}$ $= \{T < -1.833\}$ 。

解 (1) $H_0 : \mu \geq 198$ ， $H_1 : \mu < 198$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

(3)棄卻域 $C = \{T < -t_{0.05}(9)\} = \{T < -1.833\}$ 。

(4)檢定統計量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{190 - 198}{\dfrac{13.16}{\sqrt{10}}} = -1.922$ ，

因為 $T \in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

2. 假設某一產品的規格服從常態分配，根據以往的數據顯示，該產品的平均重量爲 420 公克，標準差爲 12 公克。今在生產線上抽出 100 件來檢查，並從樣本中發現該批產品的平均數爲 423 公克。試問在顯著水準 0.05 下，我們是否可以認定該產品的規格已經改變？

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，因爲母體的標準差已知，不論樣本數的大小爲何，皆應使用 Z 檢定。另因本題爲雙尾檢定問題，故棄卻域爲 $C = \{|Z| > z_{0.025}\}$ $= \{|Z| > 1.96\}$ 。

解 (1) $H_0 : \mu = 420$ ， $H_1 : \mu \neq 420$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

(3)棄卻域 $C = \{|Z| > z_{0.025}\} = \{|Z| > 1.96\}$ 。

(4)檢定統計量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{423 - 420}{\dfrac{12}{\sqrt{100}}} = 2.5$ ，

因為 $Z \in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

3. 已知某高中去年高一學生的英文測驗平均成績爲 70 分。該校隨機從今年高一學生中抽出 36 位來做英文測驗，得到平均成績爲 68.5 分，變異數爲 36 分。試問在 3%的顯著水準下，是否可以認定今年高一學生的英文程度不如去年？

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，雖然母體標準差未知，但樣本數超過 30 個，根據大樣本理論，應使用 Z 檢定。因本題爲單尾檢定問題，故棄卻域爲 $C =$ $\{Z < -z_{0.03}\} = \{Z < -1.88\}$ 。

解 (1) $H_0: \mu \ge 70$ ， $H_1: \mu < 70$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.03$ 。

(3)棄卻域 $C = \{Z < -z_{0.03}\} = \{Z < -1.88\}$ 。

(4)檢定統計量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{68.5 - 70}{\dfrac{6}{\sqrt{36}}} = -1.5$ ，

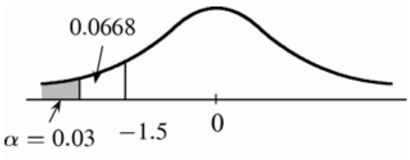
因為 $Z \notin C$ ，所以我們接受 H_0 。

4. 承第 3 題，請求出該檢定之 p-值，並以 p-值驗證你的結論。

提示 p-值的算法爲 $P(Z < -1.5)$，其中 –1.5 爲檢定統計量經抽樣計算後的估計值，再將上式查機率表求解，若 p-值小於顯著水準 0.03，則棄卻虛無假設。

解 p-值 $= P(Z < -1.5)$

$= 0.0668 > 0.03$



所以我們接受 H_0 。

5. 農委會抽驗某有機蔬菜生產區中的 5 樣有機蔬菜，檢驗出平均農藥殘留爲 1.52 單位，標準差爲 0.019 單位。根據規定有機蔬菜中平均農藥殘留量不得高於 1.5 單位，假設該區有機蔬菜的農藥殘留量服從常態分配，試問在 5%的顯著水準下，此有機蔬菜生產區所生產的有機蔬菜是否合格？

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，因爲樣本數只有 5 個爲小樣本且母體標準差未知，故使用 t 檢定。另因本題爲單尾檢定，故棄卻域爲 $C = \{T > t_{0.025}(4)\}$ $= \{T > 2.132\}$ 。

解 (1) $H_0: \mu \le 1.5$ ， $H_1: \mu > 1.5$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

(3)棄卻域 $C = \{T > t_{0.05}(4)\} = \{T > 2.132\}$ 。

(4)檢定統計量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1.52 - 1.5}{\dfrac{0.019}{\sqrt{5}}} = 2.354$ ，

因為 $T \in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

6. 從某母體中抽樣得到樣本數據： $\bar{x} = 4.65$ ， $s = 1.26$ ，對以下每一小題檢定母體平均數是否爲 4.3？

(1)樣本數 $n = 40$ ，顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

(2)樣本數 $n = 80$ ，顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，因爲樣本數爲大樣本，應使用 Z 檢定。

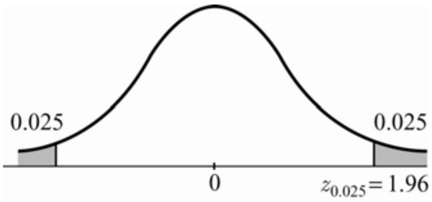
解 (1) a. $H_0: \mu = 4.3$，$H_1: \mu \neq 4.3$。

b.顯著水準 $\alpha = 0.05$。

c.棄卻域 $C = \{|Z| > z_{0.025}\} = \{|Z| > 1.96\}$。

d.檢定統計量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{4.65 - 4.3}{\frac{1.26}{\sqrt{40}}} = 1.757$，

根據樣本資料檢定的結果，我們不棄卻虛無假設。



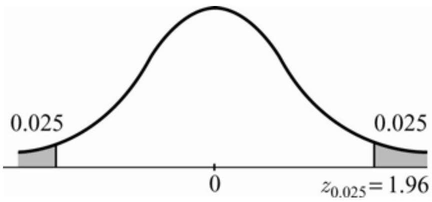
(2) a. $H_0: \mu = 4.3$，$H_1: \mu \neq 4.3$。

b.顯著水準 $\alpha = 0.05$。

c.棄卻域 $C = \{|Z| > z_{0.025}\} = \{|Z| > 1.96\}$。

d.檢定統計量 $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{4.65 - 4.3}{\frac{1.26}{\sqrt{80}}} = 2.485$，

根據樣本資料檢定的結果，我們棄卻虛無假設。



7. 已知第一個母體及第二個母體之母體變異數分別爲 40 及 30。現在分別從這兩個母體中抽出 100 個及 80 個樣本觀測值，並得到兩組樣本的樣本平均數分別爲 38.3 及 40.1。試檢驗兩個母體之母體平均數是否相等？（顯著水準 $\alpha = 0.05$）

提示 本題爲兩個母體平均數差的檢定問題，且兩個母體所抽出的樣本數皆超過 30 個，根據大樣本理論，應使用 Z 檢定。因本題爲雙尾檢定問題，故棄卻域爲 $C = \{|Z| > z_{0.025}\} = \{|Z| > 1.96\}$。

解 (1) $H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.05$。

(3)棄卻域 $C = \{|Z| > z_{0.025}\} = \{|Z| > 1.96\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\dfrac{3.83-40.1}{\sqrt{\dfrac{40}{100}+\dfrac{30}{80}}}=-2.045$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

8. 甲、乙兩校分別派出 64 及 81 個人來參加某一艱深的數學測試，在測試後我們統計兩校的成績如下：

甲：平均數=32 分，標準差=3.2 分

乙：平均數=34 分，標準差=3.6 分

假設以往兩校的學生數學成績離散程度相當，試問在顯著水準 $\alpha=0.05$ 下，這兩校現階段的學生數學平均程度是否相等？

提示 本題爲兩個母體平均數差的檢定問題，且兩個母體所抽出的樣本數皆超過 30 個，根據大樣本理論，應使用 Z 檢定。但應注意的是，本題特別強調兩校學生數學成績離散程度相當，因此應該使用 S_p 來估計共同的母體標準差。另因本題爲雙尾檢定問題，故棄卻域爲 $C=\left\{|Z|>z_{0.025}\right\}=\left\{|Z|>1.96\right\}$。

解 (1) $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\left\{|Z|>z_{0.025}\right\}=\left\{|Z|>1.96\right\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{32-34}{3.430\sqrt{\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{81}}}=-3.486$，

其中 $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\dfrac{63(3.2)^2+80(3.6)^2}{143}}=3.430$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

9. 某公司將台北及高雄業務部門的員工各選出 10 人，來接受一個爲期一週的訓練課程以提高員工的業務績效。在課程結束後，以一模擬測驗來測試員工的課程吸收程度，結果台北地區的員工平均測驗成績爲 82.6 分，標準差爲 4.5265 分；高雄地區的員工平均測驗成績爲 84.9 分，標準差爲 6.6575 分。假設根據以往的經驗，兩地區員工業務績效之標準差相當，在顯著水準 0.05 下，檢驗兩個地區受訓的平均接受程度是否相同？

提示 本題爲兩個母體平均數差的檢定問題，且兩個母體所抽出的樣本數皆小於 30 個，應使用 t 檢定。但應注意的是，本題也特別強調兩地區員工業務績效之標準差相當，因此應該使用 S_p 來估計共同的母體標準差。另因本題爲雙尾檢定問題，故棄卻域爲 $C=\left\{|T|>t_{0.025}(18)\right\}=\left\{|T|>2.101\right\}$。

解 (1) $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{|T|>t_{0.025}(18)\}=\{|T|>2.101\}$。

(4)檢定統計量 $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{82.6-84.9}{5.693\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}}=-0.903$，

其中 $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\dfrac{9(4.5265)^2+9(6.6575)^2}{18}}=5.693$，

因為 $T\notin C$，所以我們接受 H_0。

10. 某系投票表決是否要以學會費用補助幹部的出差費及誤餐費，各班代表共 100 人參與投票，其中有 45 人贊成。試問在顯著水準 0.05 下，該系學生贊成的比例是否超過四成？

提示 本題爲母體比例的單尾檢定問題，在大樣本下應使用 Z 檢定，故棄卻域爲 $C=\{Z>z_{0.05}\}=\{Z>1.645\}$。

解 (1) $H_0: p\le 0.4$，$H_1: p>0.4$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{Z>z_{0.05}\}=\{Z>1.645\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}=\dfrac{0.45-0.4}{\sqrt{\dfrac{0.4(0.6)}{100}}}=1.021$，

因為 $Z\notin C$，所以我們接受 H_0。

11. 爲檢驗一個硬幣是否公正，將此硬幣重複投擲 1,000 次，其中正面出現 480 次。在顯著水準 0.01 下，我們是否可以說該硬幣是公正的？

提示 本題爲母體比例的雙尾檢定問題，在大樣本下應使用 Z 檢定，故棄卻域爲 $C=\{|Z|>z_{0.005}\}=\{|Z|>2.58\}$。

解 (1) $H_0: p=\dfrac{1}{2}$，$H_1: p\ne\dfrac{1}{2}$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.01$。

(3)棄卻域 $C=\{|Z|>z_{0.005}\}=\{|Z|>2.58\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}=\dfrac{0.48-0.50}{\sqrt{\dfrac{0.5(0.5)}{1,000}}}=-1.266$，

因為 $Z\notin C$，所以我們接受 H_0。

12. 假設高雄市去年每一家庭每週平均花在水果的消費爲新台幣 350 元，爲比較今年高雄市每一家庭每週平均的水果消費金額是否改變，從高雄市隨機抽出 250 個家庭訪問。從訪問的資料中得知，此 250 個家庭花在水果每週的平均消費爲 360 元，標準差爲 20 元，試問在顯著水準 0.05 下，是否可以證明高雄市居民每週在水果的消費上沒有改變？

提示 本題爲母體平均數的檢定問題，雖然母體的標準差未知，但在大樣本的情況下，應使用 Z 檢定。另因本題爲雙尾檢定問題，故棄卻域爲 $C=\{|Z|>z_{0.025}\}=\{|Z|>1.96\}$。

解 (1) $H_0: \mu=350$，$H_1: \mu\neq 350$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{|Z|>z_{0.025}\}=\{|Z|>1.96\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{360-350}{\dfrac{20}{\sqrt{250}}}=7.906$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

13. 爲比較 A、B 兩種不同的輪胎在抓地力上的表現，分別將 A 輪胎 68 個及 B 輪胎 72 個裝在相同的車型上做煞車滑行距離測試，得到以下數據：

A：平均滑行距離=110 公分，標準差=121 公分

B：平均滑行距離=115 公分，標準差=81 公分

根據以上資料，在顯著水準 0.01 下，A 品牌的輪胎是否明顯優於 B 品牌的輪胎？

提示 本題爲兩個母體平均數差的檢定問題，但兩個母體所抽出的樣本數皆超過 30 個，根據大樣本理論，應使用 Z 檢定。另因本題爲單尾檢定問題，故棄卻域爲 $C=\{Z<-z_{0.01}\}=\{Z<-2.33\}$。

解 (1) $H_0: \mu_1\geq\mu_2$，$H_1: \mu_1<\mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.01$。

(3)棄卻域 $C=\{Z<-z_{0.01}\}=\{Z<-2.33\}$。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}=\dfrac{110-115}{\sqrt{\dfrac{121^2}{68}+\dfrac{81^2}{72}}}=-0.286$，

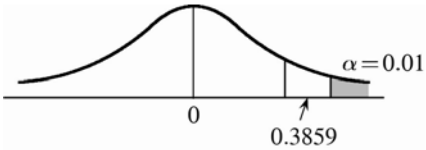
因為 $Z\notin C$，所以我們接受 H_0。

14. 承第 13 題，請求出該檢定之 p-值，並以 p-值驗證你的結論。

提示 同第 4 題，p-值的算法爲 $P(Z<-0.286)\cong P(Z<-0.29)$，其中 -0.286 爲檢定統計量經抽樣計算後的估計值，再將上式查機率表求解。若 p-值小於顯著水準 0.01，則棄卻虛無假設。

解 p-值 $=P(Z<-0.286)$

$=P(Z<-0.29)=0.3859>0.01$



所以我們接受 H_0 。

15. 承第 13 題，如果我們假設兩種輪胎煞車距離的標準差相同，試問檢定結果是否一致？

提示 此題同第 13 題，但特別強調兩種輪胎煞車距離的標準差相同，因此在檢定統計量的計算上應使用 S_p 來估計共同的母體標準差。

解 (1) $H_0: \mu_1 \geq \mu_2$ ， $H_1: \mu_1 < \mu_2$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.01$ 。

(3)棄卻域 $C = \{Z < -z_{0.01}\} = \{Z < -2.33\}$ 。

(4)檢定統計量 $Z = \dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - 0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \dfrac{110 - 115}{102.39\sqrt{\dfrac{1}{68} + \dfrac{1}{72}}} = -0.289$ ，

其中 $S_p = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\dfrac{67(121)^2 + 71(81)^2}{138}} = 102.391$ ，

因為 $Z \notin C$ ，所以我們接受 H_0 。

16. 已知某生產線上瓶裝沙拉油的容量呈常態分配，當容量之變異數超過 1.3 公升時，表示製程呈現不穩定。今從某超市中隨機抽出 10 桶做檢驗，得到樣本標準差為 1.8 公升。試問在顯著水準 0.01 下，是否表示沙拉油的製程已經不穩定了？

提示 本題為母體變異數的檢定問題，應該使用卡方分配做檢定。另因本題為單尾檢定問題，故棄卻域為 $C = \left\{\chi^2 > \chi^2_{0.01}(9)\right\} = \left\{\chi^2 > 21.67\right\}$ 。

解 (1) $H_0: \sigma^2 \leq 1.3$ ， $H_1: \sigma^2 > 1.3$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.01$ 。

(3)棄卻域 $C = \left\{\chi^2 > \chi^2_{0.01}(9)\right\} = \left\{\chi^2 > 21.67\right\}$ 。

(4)檢定統計量 $\chi^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9(1.8)^2}{1.3} = 22.431$ ，

因為 $\chi^2 \notin C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

17. 行政院主計處欲了解在經濟不景氣時，市場上的失業率是否明顯的攀升至 4%以上，因此隨機訪問 1,068 名有工作能力的居民，其中有 55 人失業，1,013 人有正常的工作。試問在顯著水準 0.1 下，該項調查結果是否明顯支持失業率已攀升至 4%以上？

提示 本題為母體比例的單尾檢定問題，在大樣本下應使用 Z 檢定，故棄卻域為 $C = \{Z > z_{0.1}\} = \{Z > 1.28\}$ 。

解 (1) $H_0: p \le 0.04$ ， $H_1: p > 0.04$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.01$ 。

(3)棄卻域 $C = \{Z > z_{0.1}\} = \{Z > 1.28\}$ 。

(4)檢定統計量 $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0.05 - 0.04}{\sqrt{\dfrac{0.04(0.96)}{1{,}068}}} = 1.667$ ，

因為 $Z \in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

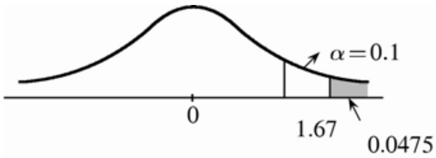
18.承第 17 題，請求出該檢定之 p-值，並以 p-值驗證你的結論。

提示 同第 4 題，p-值的算法為 $P(Z > 1.667) \cong P(Z > 1.67)$，其中 1.667 為檢定統計量經抽樣計算後的估計值，再將上式查機率表求解。若 p-值小於顯著水準 0.1，則棄卻虛無假設。

解 p-值 $= P(Z > 1.667)$

$= P(Z > 1.67)$

$= 0.0475 < 0.1$



所以我們棄卻 H_0 。

19. 某一零件工廠生產某一種精密的螺絲釘及螺絲帽，要求螺絲釘的平均半徑為 1 公分，但標準差不能超過 0.05 公分，否則將會造成不良品數過多而導致退貨。今品管人員從成品中隨機取出 100 個螺絲釘來檢驗，發現螺絲釘之標準差為 0.07 公分，試問在顯著水準 0.01 下，該批成品的製程是否已經呈不穩定的狀態了？

提示 本題為母體變異數的檢定問題，應使用卡方分配做檢定。另因本題為單尾檢定問題，故棄卻域為 $C = \{\chi^2 > \chi^2_{0.01}(99)\} = \{\chi^2 > 134.65\}$ ，其中的查表值可利用內插法求得。

解 (1) $H_0: \sigma^2 \le (0.05)^2$ ， $H_1: \sigma^2 > (0.05)^2$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.01$ 。

(3)棄卻域 $C = \{\chi^2 > \chi^2_{0.01}(99)\} = \{\chi^2 > 134.65\}$ 。

(4)檢定統計量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{99(0.07)^2}{0.05^2} = 194.04$ ，

因為 $\chi^2 \in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

20. 假設我們想要了解某一從美國進口的洋芋片（A牌），是否較從日本進口的洋芋片（B牌）來得便宜。分別從 8 個不同地區的大型超市抽驗價格，每個超市皆一次取出這兩種品牌來做檢驗，抽得的數據如下：（單位：10 元）

A牌	10	8	7	9	11	10	9	8
B牌	11	11	10	12	11	13	12	10

試問在顯著水準 0.05 下，是否可以支持美國進口的洋芋片（A牌）之價格較從日本進口的洋芋片（B牌）來得便宜。

提示 此題爲成對樣本的母題平均數差的單尾檢定，爲小樣本且母題標準差未知的檢定問題，故使用 t 檢定。另因本題爲單尾檢定，故棄卻域爲 $C=\{T<-t_{0.05}(7)\}$ $=\{T<-1.895\}$。

解 (1) $H_0:\mu_1\geq\mu_2$，$H_1:\mu_1<\mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{T<-t_{0.05}(7)\}=\{T<-1.895\}$。

(4)檢定統計量 $T=\dfrac{\bar{d}-0}{\dfrac{S_d}{\sqrt{n}}}=\dfrac{-2.25}{\dfrac{1.165}{\sqrt{8}}}=-5.463$，

因為 $T\in C$，所以我們棄卻 H_0。

21. 爲了解某一課程是否可以增進打字小姐的打字正確率，分別選取 7 位打字小姐，並記錄每一位小姐上課前後在一篇相似的文章中打字的錯誤字數如下：

上課前	8	4	10	9	8	7	12
上課後	6	3	7	8	5	8	9

試問在顯著水準 0.01 下，是否可以驗證該課程的確可以減低打字小姐之平均錯誤次數？

提示 和第 20 題一樣，此題爲成對樣本的母題平均數差的單尾檢定，爲小樣本且母題標準差未知的檢定問題，故使用 t 檢定。另因本題爲單尾檢定，故棄卻域爲 $C=\{T>t_{0.01}(6)\}=\{T>3.143\}$。

解 (1) $H_0:\mu_1\leq\mu_2$，$H_1:\mu_1>\mu_2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.01$。

(3)棄卻域 $C=\{T>t_{0.01}(6)\}=\{T>3.143\}$。

(4)檢定統計量 $T=\dfrac{\bar{d}-0}{\dfrac{S_d}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1.714}{\dfrac{1.496}{\sqrt{7}}}=3.031$，

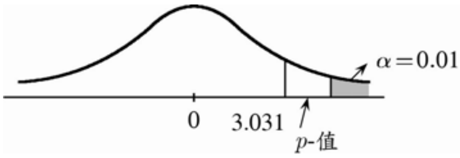
因為 $T\notin C$，所以我們接受 H_0。

22. 承第 21 題，請求出該檢定之 p-值，並以 p-值驗證你的結論。

提示 同第 4 題，但本題使用 t 檢定。p-值的算法爲 $P(T>3.031)$，其中 3.031 爲檢定統計量經抽樣計算後的估計值，再將上式查自由度爲 6 的 t 機率表求解。若 p-值小於顯著水準 0.01，則棄卻虛無假設。

解 $p\text{-值}=P(T>3.031)$

$\Rightarrow 0.01<p\text{-值}<0.025$



所以我們接受 H_0。

23. 假定我們從平均數爲 6、標準差爲 0.8 的常態母體，抽出 50 個樣本觀測值。試問在顯著水準 0.05 下，這 50 個樣本觀測值的平均數應介於多少之間？

提示 樣本數 50 超過 30 個爲大樣本，因此在大樣本理論下可使用常態分配求解，計算式爲 $P\left(|Z|>z_{0.025}\right)=0.05$，其中 $z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$。

解 $P\left(|Z|>1.96\right)=0.05$

$\Rightarrow P\left(|Z|\le 1.96\right)=0.95$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\le 1.96\right)=0.95$$

$$\Rightarrow P\left(\mu-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\overline{X}\le\mu+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

$\Rightarrow P\left(5.778<\overline{X}<6.222\right)=0.95$

所以 $(5.778,\ 6.222)$ 為所求。

24. 某一服務業主管宣稱女性在工作表現成績的標準差比男性小。隨機觀察 12 位女性，得表現的平均成績爲 72.15 分，標準差爲 4.13 分；另隨機觀察 13 位男性，得表現的平均成績爲 74.31 分，標準差爲 6.25 分。在顯著水準 0.1 下，是否支持此主管的說法？

提示 本題爲兩個母體變異數比的檢定，應使用 F 檢定。

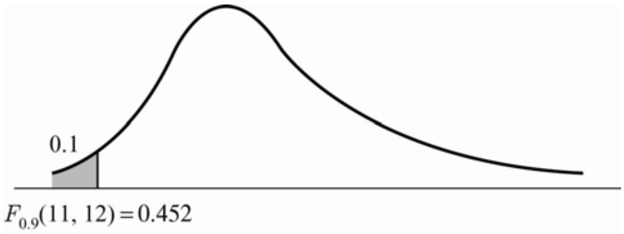
解 設女性工作表現成績的標準差為 σ_1，男性工作表現成績的標準差為 σ_2。

(1) $H_0:\sigma_1^2\ge\sigma_2^2$， $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.1$。

(3)棄卻域 $C=\left\{F<F_{0.9}(11,\ 12)\right\}=\left\{F<0.452\right\}$。

(4)檢定統計量 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{4.13^2}{6.25^2}=0.437$，



根據樣本資料檢定的結果，我們棄卻虛無假設，即此主管的宣稱為正確的。

25. 承第 24 題，此主管亦宣稱女性在工作表現的平均成績比男性差。在顯著水準 0.1 下，是否支持此主管的說法？

提示 本題爲兩個母體平均數差的檢定問題，樣本數爲小樣本，兩個母體的變異數 α_1^2 、α_2^2 爲未知且不相等。

解 設女性工作表現成績的平均數為 μ_1，男性工作表現成績的平均數為 μ_2 。

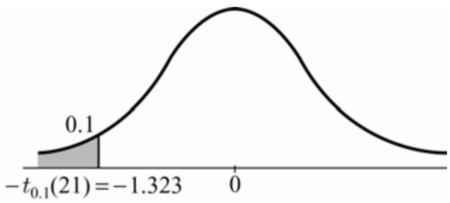
(1) $H_0: \mu_1 \ge \mu_2$ ， $H_1: \mu_1 < \mu_2$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.1$ 。

(3) $v=\frac{\left(\frac{4.13^2}{12}+\frac{6.25^2}{13}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4.13^2}{12}\right)^2}{11}+\frac{\left(\frac{6.25^2}{13}\right)^2}{12}}=20.9 \doteqdot 21$，

棄卻域 $C=\{T<-t_{0.1}(21)\}=\{T<-1.323\}$ 。

(4)檢定統計量 $T=\frac{72.15-74.31}{\sqrt{\frac{4.13^2}{12}+\frac{6.25^2}{13}}}=-1.03$ ，



根據樣本資料檢定的結果，我們不棄卻虛無假設，即此主管的宣稱有誤。

26. 分別從兩常態母體一和母體二各抽出 5 個和 4 個觀測值，得 1.43, 1.58, 1.24, 1.26, 1.31, 1.35, 1.22, 1.41, 1.29 單位。在顯著水準 0.1 下，試檢定母體一的標準差是否等於母體二？

提示 本題爲兩個母體變異數比的檢定，應使用 F 檢定。

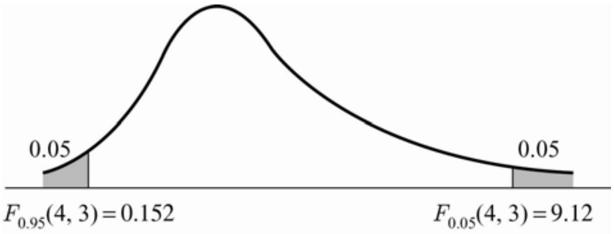
解 設母體一的標準差為 σ_1 ，母體二的標準差為 σ_2 。

(1) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ ， $H_1: \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$ 。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.1$。

(3)棄卻域 $C = \left\{F < F_{0.95}(4,\ 3)\ \text{或}\ F > F_{0.05}(4,\ 3)\right\} = \left\{F < 0.152\ \text{或}\ F > 9.12\right\}$。

(4)檢定統計量 $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} = \dfrac{0.020}{0.007} = 2.857$，



根據樣本資料檢定的結果，我們不棄卻虛無假設，即兩母體的標準是相等的。

27. 某公司在南北兩地各設有一個產品最後的組裝及測試部門，為了解此產品從組裝到測試完成所需要的時間，從南區部門隨機抽取 12 名員工，經測驗得所需時間的平均數為 20.67 分，標準差為 3.84 分；從北區部門隨機抽取 10 名員工，經測驗得所需時間的平均數為 18.20 分，標準差為 2.12 分。假設兩地區員工從組裝至測試完成所需時間的標準差不同，在顯著水準 0.1 下，檢驗兩地區員工所需平均時間是否會不同？

提示 本題為兩個母體平均數差的檢定問題，樣本數為小樣本，兩個母體的變異數 σ_1^2、σ_2^2 為未知且不相等。

解 設南區部門員工所需平均時間為 μ_1，北區部門員工所需平均時間為 μ_2。

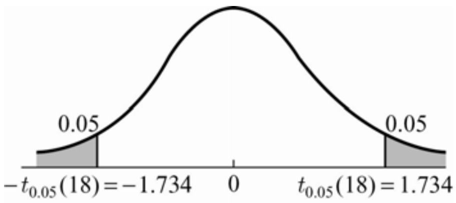
(1) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$，$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

(2)顯著水準 $\alpha = 0.1$。

(3) $v = \dfrac{\left(\dfrac{3.84^2}{12} + \dfrac{2.12^2}{10}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{3.84^2}{12}\right)^2}{11} + \dfrac{\left(\dfrac{2.12^2}{10}\right)^2}{9}} = 17.6 \doteqdot 18$，

棄卻域 $C = \left\{T < -t_{0.05}(18)\ \text{或}\ T > t_{0.05}(18)\right\} = \left\{T < -1.734\ \text{或}\ T > 1.734\right\}$。

(4)檢定統計量 $T = \dfrac{20.67 - 18.20}{\sqrt{\dfrac{3.84^2}{12} + \dfrac{2.12^2}{10}}} = 1.907$，



根據樣本資料檢定的結果，我們棄卻虛無假設，即南北兩區部門員工在裝測上所花費平均時間是有差異的。

28. 假設某一產品的規格服從常態分配，根據以往的數據顯示，該產品的平均重量爲 420 公克，標準差爲 12 公克。今在生產線抽出 100 件來檢查，並從樣本中發現該批產品的平均數爲 423 公克，假定顯著水準爲 0.01，我們是否可以認定該產品的規格已經改變。又當產品的平均重量爲 422 公克時，其檢定力爲何？

提示 檢定力的計算爲$1-\beta = P$（棄卻虛無假設$|\mu=422$ ）$=P\left(|Z|>2.58|\mu=422\right)$，將上式重新計算並查機率表求解。

解 (1) $H_0:\mu=420$ ， $H_1:\mu\neq 420$ 。

(2)顯著水準 $\alpha=0.01$ 。

(3)棄卻域 $C=\{|Z|>2.58\}$ 。

(4)檢定統計量 $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{423-420}{\frac{12}{\sqrt{100}}}=2.5$ ，

因為 $Z\notin C$ ，所以我們接受 H_0 。

又棄卻域 $C=\{|Z|>2.58\}$

$$=\left\{\left|\frac{\overline{X}-420}{\frac{12}{\sqrt{100}}}\right|>2.58\right\}$$

$$=\{\overline{X}>423.096 \text{ 或 } \overline{X}<416.904\}$$

所以檢定力 $=P\left(\overline{X}>423.096 \text{ 或 } \overline{X}<416.904|\mu=422\right)$

$$=P\left(\frac{\overline{X}-422}{\frac{12}{\sqrt{100}}}>\frac{423.096-422}{\frac{12}{\sqrt{100}}} \text{ 或 } \frac{\overline{X}-422}{\frac{12}{\sqrt{100}}}<\frac{416.904-422}{\frac{12}{\sqrt{100}}}\right)$$

$$=P(Z>0.91)+P(Z<-4.25)=0.1814$$

29. 某廠商宣稱該公司所生產的釣竿至少可以承受 15 公斤的拉力，但有 1.5 公斤的誤差。爲檢驗廠商所言是否屬實，隨機抽驗該廠商所製之同類型釣竿 10 支，並檢定它們的拉力，從檢測中發現平均拉力爲 13 公斤，根據以前的經驗得知釣竿的拉力服從標準差爲 1.8 常態分配，試求當釣竿的平均拉力為 14 公斤時，第二型誤差的機率爲何？（顯著水準 $\alpha=0.05$ ）

提示 使用P（第二型誤差）$=P$（接受$H_0|H_1$爲真）。

解 (1) $H_0:\mu\geq 15$ ， $H_1:\mu<15$ 。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$ 。

(3)棄卻域 $C=\{Z<-z_{0.05}\}$

$$=\{Z<-1.645\}$$

$$=\left\{\frac{\overline{X}-15}{\frac{18}{\sqrt{10}}}<-1.645\right\}$$

$$=\{\overline{X}<14.064\}$$

(4) P（第二型誤差）$=P\left(\overline{X}\geq 14.064 \middle| \mu=14\right)$

$$=P\left(\frac{\overline{X}-14}{\frac{1.8}{\sqrt{10}}}>\frac{14.064-14}{\frac{1.8}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$=P(Z>0.11)$$

$$=0.4562$$

30. 爲了要研究男性和女性每天睡眠時間的差異，各隨機抽訪 250 個人，並記錄他們一週的平均睡眠時間如下表：

性別	睡眠時間 ≤ 8	睡眠時間 >8	總數
男	173	77	250
女	120	130	250
總數	293	207	500

在顯著水準 0.05 下，根據以上資料，是否可以顯示男性每晚平均睡眠時間超過 8 小時的比例顯著低於女性？並計算此檢定的 p-值。

提示 本題爲兩個母體比例差的檢定問題，在大樣本下，我們可以使用 Z 檢定。另因本題爲左尾檢定，所以棄卻域 $C=\{Z<-z_{0.05}\}=\{Z<-1.645\}$。

解 (1) $H_0: p_1-p_2\geq 0$，$H_1: p_1-p_2<0$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{Z<-z_{0.05}\}=\{Z<-1.645\}$。

(4) $\overline{p}=\dfrac{X+Y}{n_1+n_2}=\dfrac{77+130}{250+250}=\dfrac{207}{500}=0.414$，

$\hat{p}_1=\dfrac{X}{n_1}=\dfrac{77}{250}=0.308$，

$\hat{p}_2=\dfrac{Y}{n_2}=\dfrac{130}{250}=0.520$，

檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{0.308-0.520}{\sqrt{0.414(0.586)}\sqrt{\dfrac{1}{250}+\dfrac{1}{250}}}=-4.810$，

p-值 $=P(Z<-4.81)\cong 0$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

31. 根據一則醫學研究報導，孕婦如果長期抽菸將導致胎兒出生後會有心血管方面的問題。現隨機觀察 150 個長期抽菸及 250 個不抽菸的孕婦，發現有 25 個長期抽菸的孕婦的新生兒和 20 個不抽菸的孕婦的新生兒有心血管方面的問題，在顯著水準 0.05 下，根據以上資料，是否可以顯示該醫學研究的報導正確？並計算此檢定的 p-值。

提示 本題爲兩個母體比例差的檢定問題，在大樣本下，我們可以使用 Z 檢定。另因本題爲右尾檢定，所以棄卻域 $C=\{Z>z_{0.05}\}=\{Z>1.645\}$。

解 (1) $H_0: p_1-p_2\le 0$，$H_1: p_1-p_2>0$。

(2)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(3)棄卻域 $C=\{Z>z_{0.05}\}=\{Z>1.645\}$。

(4) $\overline{p}=\dfrac{X+Y}{n_1+n_2}=\dfrac{25+20}{150+250}=\dfrac{45}{400}=0.113$，

$\hat{p}_1=\dfrac{X}{n_1}=\dfrac{25}{150}=0.167$，

$\hat{p}_2=\dfrac{Y}{n_2}=\dfrac{20}{250}=0.08$，

檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{0.167-0.08}{\sqrt{0.113(0.887)}\sqrt{\dfrac{1}{150}+\dfrac{1}{250}}}=2.66$，

p-值 $=P(Z>2.66)=0.0039$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

32. 考慮檢定兩個母體比例是否相等的問題，今分別自兩個母體中抽取兩組隨機樣本，樣本數分別爲 n_1 和 n_2。假設兩個母體的樣本比例分別爲 $\hat{p}_1=0.68$ 和 $\hat{p}_2=0.52$。對以下每一小題計算在顯著水準 α 下，$\hat{p}_1-\hat{p}_2$ 是否統計顯著？

(1) $n_1=40$，$n_2=50$，$\alpha=0.05$。

(2) $n_1=200$，$n_2=250$，$\alpha=0.05$。

(3) $n_1=200$，$n_2=250$，$\alpha=0.01$。

提示 本題爲兩個母體比例差的檢定問題，在大樣本下，我們可以使用 Z 檢定。另因本題爲雙尾檢定，所以棄卻域 $C=\left\{|Z|>z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$。

解 (1)(a) $H_0: p_1-p_2=0$，$H_1: p_1-p_2\neq 0$。

(b)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(c)棄卻域 $C=\{|Z|>z_{0.025}\}=\{|Z|>1.96\}$。

(d) $\bar{p}=\dfrac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}=\dfrac{40(0.68)+50(0.52)}{40+50}=0.59$，

檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{0.68-0.52}{\sqrt{0.59(0.41)}\sqrt{\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{50}}}=1.53$，

因為 $Z\notin C$，所以我們接受 H_0。

(2) (a) $H_0: p_1-p_2=0$，$H_1: p_1-p_2\neq 0$。

(b)顯著水準 $\alpha=0.05$。

(c)棄卻域 $C=\{|Z|>z_{0.025}\}=\{|Z|>1.96\}$。

(d) $\bar{p}=\dfrac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}=\dfrac{200(0.68)+250(0.52)}{200+250}=0.59$，

檢定統計量 $Z=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{0.68-0.52}{\sqrt{0.59(0.41)}\sqrt{\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{250}}}=3.43$，

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

(3) (a) $H_0: p_1-p_2=0$，$H_1: p_1-p_2\neq 0$。

(b)顯著水準 $\alpha=0.01$。

(c)棄卻域 $C=\{|Z|>z_{0.005}\}=\{|Z|>2.58\}$。

(d) $\bar{p}=0.59$，檢定統計量 $Z=3.43$（同(b)），

因為 $Z\in C$，所以我們棄卻 H_0。

33. 某教育學者想研究大專男、女學生在體育成績上的差異，隨機抽出 10 位男生，得其平均成績爲 82.5 分，標準差爲 7.5 分；隨機抽出 15 位女生，得其平均成績爲 79.4 分，標準差爲 6.9 分。假設大專男、女學生的體育成績服從常態分配，試問：（顯著水準 $\alpha=0.1$）

(1)男、女生體育成績的變異數是否相等？

(2)男生的平均體育成績是否高於女生？

提示 首先使用 F 檢定兩個母體的變異數是否相等，再利用母體的變異數相等與否，去決定兩個平均數差時的 t 檢定統計量。

解 (1) (a) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$。

(b)顯著水準 $\alpha=0.1$。

(c)棄卻域 $C=\{F>F_{0.05}(9,\ 14)$ 或 $F<F_{0.95}(9,\ 14)\}=\{F>2.65$ 或 $F<0.33\}$。

(d)檢定統計量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{7.5^2}{6.9^2}=1.181$，

因為 $F\notin C$ ，所以我們接受 H_0 。

(2) (a) $H_0: \mu_1 \le \mu_2$ ， $H_1: \mu_1 > \mu_2$ 。

(b)顯著水準 $\alpha=0.1$ 。

(c)棄卻域 $C=\{T>t_{0.1}(23)\}=\{T>1.319\}$ 。

(d) $S_p=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\dfrac{9\times7.5^2+14\times6.9^2}{10+15-2}}=7.141$ ，

檢定統計量 $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{82.5-79.4}{7.141\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}}}=1.063$ ，

因為 $T\notin C$ ，所以我們接受 H_0 。

34. 某投資者衡量兩組 100 萬元的投資組合之獲利率，隨機蒐集數月之獲利率資料如下：

投資組合一	13	5	24	–6	15	5	–4	9	8
投資組合二	19	1	–16	31	26	–20	32	–17	5

假設兩投資組合之獲利率服從常態分配，試問：(顯著水準 $\alpha=0.1$)

(1)兩投資組合之獲利率的變異數是否相等？

(2)兩投資組合之平均獲利率是否相等？

提示 首先使用 F 檢定兩個母體的變異數是否相等，再利用母體的變異數相等與否，去決定兩個母體平均數差時的 t 檢定統計量。

解 (1) (a) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ ， $H_1: \sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ 。

(b)顯著水準 $\alpha=0.1$ 。

(c)棄卻域 $C=\{F>F_{0.05}(8, 8)$ 或 $F<F_{0.95}(8, 8)\}=\{F>3.44$ 或 $F<0.29\}$ 。

(d)檢定統計量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}=\dfrac{9.27^2}{21.152^2}=0.192$ ，

因為 $F\in C$ ，所以我們棄卻 H_0 。

(2) (a) $H_0: \mu_1=\mu_2$ ， $H_1: \mu_1\ne\mu_2$ 。

(b)顯著水準 $\alpha=0.1$ 。

(c)因自由度 $v=\dfrac{\left(\dfrac{9.27^2}{9}+\dfrac{21.15^2}{9}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{9.27^2}{9}\right)^2}{8}+\dfrac{\left(\dfrac{21.15^2}{9}\right)^2}{8}}=10.96\doteqdot 11$ ，

棄卻域 $C=\{|T|>t_{0.05}(11)\}=\{|T|>1.796\}$ 。

(d)檢定統計量 $T=\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}=\dfrac{7.67-6.78}{\sqrt{\dfrac{9.27^2}{9}+\dfrac{21.15^2}{9}}}=0.116$，

因為 $T\notin C$，所以我們接受 H_0。