
teaching
leadership
plan
business
motivation
65 %
20 %
15 %
research
teamwork

CHAPTER 6

估　計

1. 請利用 t 分配、χ^2 分配與 F 分配表，回答下列各小題：

(1) $t_{0.025}(10)=?$

(2) $t_{0.95}(8)=?$

(3) $\chi^2_{0.05}(12)=?$

(4) $\chi^2_{\alpha}(15)=7.26$，求 $\alpha=?$

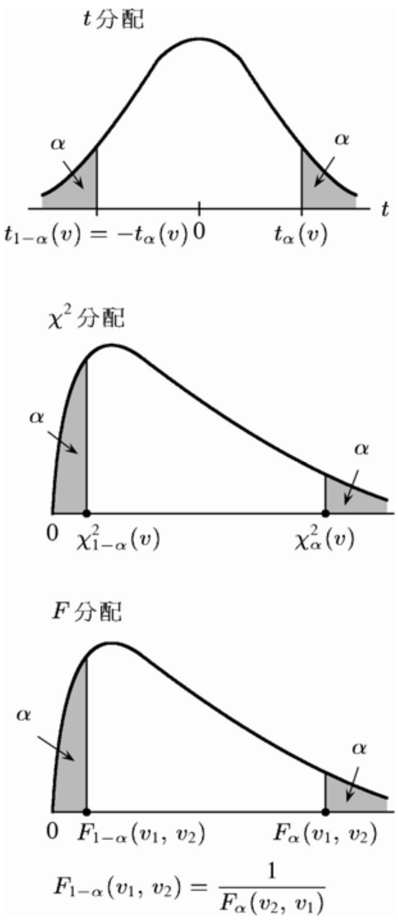
(5) $\chi^2_{0.95}(10)=?$

(6) $F_{0.05}(5,\ 8)=?$

(7) $F_{0.95}(6,\ 7)=?$

(8) $F_{\alpha}(6,\ 6)=4.28$，求 $\alpha=?$

提示



解 (1) $t_{0.025}(10)=2.228$。

(2) $t_{0.95}(8)=-t_{0.05}(8)=-1.86$。

(3) $\chi^2_{0.05}(12)=21.03$。

(4) $\chi^2_{0.05}=7.26$，經查 χ^2 表在自由度 $v=15$ 的橫列上找到 7.26 值，續之往上對應其 α 值，則得到 $\alpha=0.95$。

(5) $\chi^2_{0.95}(10)=3.94$。

(6) $F_{0.05}(5,\ 8)=3.69$。

(7) $F_{0.95}(6,\ 7)=\dfrac{1}{F_{0.05}(7,\ 6)}=\dfrac{1}{4.21}=0.238$ 。

(8) $F_{\alpha}(6,\ 6)=4.28$，經查 F 表 $v_1=6$、$v_2=6$ 兩自由度對應值是 4.28 時，其求 $\alpha=0.05$ 。

2. 請依下列各小題條件回答，估計母體平均數時，樣本數應取多少？

(1)母體標準差 $\sigma=3$ ，而 95%的誤差界限爲 0.5。

(2)母體標準差 $\sigma=0.2$ ，而 90%的誤差界限爲 0.03。

(3)母體標準差 $\sigma=0.05$ ，而 98%的誤差界限爲 0.02。

提示 誤差界限 $e=z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，樣本數 $n=\left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2$ 。

解 (1) $\sigma=3$ ，$1-\alpha=0.95$ ，$\alpha=0.05$ ，$\dfrac{\alpha}{2}=0.025$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ ，$e=0.05$ ，

$$\therefore n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{1.96\times 3}{0.05}\right)^2=138.3\doteqdot 139$$ ，

取 $n=139$ 。

(2) $\sigma=0.2$ ，$1-\alpha=0.90$ ，$\alpha=0.10$ ，$\dfrac{\alpha}{2}=0.05$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$ ，$e=0.03$ ，

$$\therefore n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{1.645\times 0.2}{0.03}\right)^2=120.27\doteqdot 121$$ ，

取 $n=121$ 。

(3) $\sigma=0.05$ ，$1-\alpha=0.99$ ，$\alpha=0.02$ ，$\dfrac{\alpha}{2}=0.01$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.01}=2.327$ ，$e=0.02$ ，

$$\therefore n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2=\left(\frac{2.327\times 0.05}{0.02}\right)^2=33.8\doteqdot 34$$ ，

取 $n=34$ 。

3. 自常態母體抽出樣本數爲 10 之隨機樣本，其值爲 2.8, 4.2, 22.9, 16.7, 13.2, 14.5, 16.8, 17.3, 12.6, 15.3。令信賴係數爲 0.98，試求母體平均數 μ 的信賴區間。

提示 (1)母體是常態分配，母體標準差 σ 未知，$n=10$ 爲小樣本，因此 $\overline{X}$ 會服從 t 分配。

(2) μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 爲 $\overline{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 。

(3)信賴係數 $=1-\alpha$ 。

解 依題意，$n=10$，計算出 $\bar{x}=13.63$，$s=6.05$，$n-1=9$，$1-\alpha=0.98$，$\frac{\alpha}{2}=0.01$，

$t_{0.01}(9)=2.821$，

$\therefore \mu$ 之 98%信賴區間為

$$\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=13.63\pm t_{0.01}(9)\frac{6.05}{\sqrt{10}}$$
$$=13.63\pm 2.821\times 1.91$$
$$=13.63\pm 5.39$$

即 $(8.24,\ 19.02)$。

4. 根據下列各小題條件，試求母體比例 p 之 $100(1-\alpha)$%信賴區間。

(1) $n=1,200$，$\hat{p}=0.33$，$1-\alpha=0.98$。

(2) $n=820$，$X=650$，$1-\alpha=0.95$。

提示 (1)母體比例 p 之 $100(1-\alpha)$%信賴區間爲 $\hat{p}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$。

(2) $\hat{p}=\frac{X}{n}$。

解 (1) $1-\alpha=0.98$，$\frac{\alpha}{2}=0.01$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.01}=2.327$，

$\therefore p$ 之 98%信賴區間為

$$\hat{p}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.33\pm 2.327\times\sqrt{\frac{0.33\times 0.67}{1,200}}$$
$$=0.33\pm 0.03$$

即 $(0.30,\ 0.36)$。

(2) $n=820$，$X=650$，$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{650}{820}=0.79$，$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，

$\therefore p$ 之 95%信賴區間為

$$\hat{p}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.79\pm 1.96\times\sqrt{\frac{0.79\times 0.21}{820}}$$
$$=0.79\pm 1.96\times 0.014$$
$$=0.79\pm 0.03$$

即 $(0.76,\ 0.82)$。

5. 今隨機檢測 64 包袋裝奶粉，其平均重量爲 4.5 磅，標準差是 1.61 磅，請估計袋裝奶粉真實平均重量之 90%誤差界限及 90%信賴區間。

提示 $n=64$ 爲大樣本，母體分配未知，因此依據中央極限定理知，$\overline{X}$ 會服從 $N\left(\mu,\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$，所以：

(1) μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

(2) μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，σ 未知，故由 s 估計之。

解 $n=64$ ，$\overline{x}=4.5$ ，$s=1.61$，$1-\alpha=0.90$ ，$\dfrac{\alpha}{2}=0.05$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$ ，

μ 之 90%誤差界限為

$$
\begin{aligned}
z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}&=z_{0.05}\times\frac{1.61}{\sqrt{64}}\\
&=1.645\times 0.20\\
&=0.33
\end{aligned}
$$

μ 之 90%信賴區間為

$$
\begin{aligned}
\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}&=4.5\pm z_{0.05}\frac{1.64}{\sqrt{64}}\\
&=4.5\pm 0.20
\end{aligned}
$$

即 $(4.3,\ 4.7)$ 。

6. 隨機抽出 120 個省電燈泡，其平均壽命是 1,250 小時，標準差 140 小時，試從抽出之樣本推估所有省電燈泡平均壽命之 95%信賴區間。

提示 $n=120$ 爲大樣本，母體分配未知，依據中央極限定理得知，$\overline{X}$ 服從常態分配，因此 μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。但因 σ 未知，故由 s 估計之。

解 $n=120$ ，$\overline{x}=1{,}250$ ，$s=140$ ，$1-\alpha=0.95$ ，$\dfrac{\alpha}{2}=0.025$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ ，

μ 之 95%信賴區間為

$$
\begin{aligned}
\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}&=1{,}250\pm z_{0.025}\frac{140}{\sqrt{120}}\\
&=1{,}250\pm 25.05
\end{aligned}
$$

即 $(1{,}224.95,\ 1{,}275.05)$ 。

7. 某校生輔組老師欲研究學生在課餘時間兼差工作之比例，今隨機抽取 80 位學生，其中 45 位有兼差，試求：

(1)該校學生兼差比例之點估計值。

(2)該校學生兼差比例之 95%信賴係數的誤差界限。

(3)該校學生兼差比例之 90%信賴區間。

提示 p 爲該校學生兼差比例：

(1) p 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 。

(2) p 之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 。

解 (1)估計 p 之點估計為 $\hat{p} = \dfrac{45}{80} = 0.56$ 。

(2) p 之 95%誤差界限為

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = z_{0.025}\sqrt{\frac{0.56\times 0.44}{80}}$$

$$= 1.96\times 0.06$$

$$= 0.12$$

(3) p 之 90%信賴區間為

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.56 \pm z_{0.05}\sqrt{\frac{0.56\times 0.44}{80}}$$

$$= 0.56 \pm 1.645\times 0.06$$

$$= 0.56 \pm 0.10$$

即 $(0.46,\ 0.66)$ 。

8. 欲了解一般民眾搭乘捷運的比例，隨機訪問了 100 位男士和 100 位女士，其中發現男士中有 55 位會搭乘捷運，而女士有 60 位會搭乘捷運，試求男士與女士會搭乘捷運比例差之 95%信賴區間。

提示 p_1 爲男士會搭乘捷運比例，p_2 爲女士會搭乘捷運比例，$p_1 - p_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ 。

解 $\hat{p}_1 = \dfrac{55}{100} = 0.55$ ，$\hat{p}_2 = \dfrac{60}{100} = 0.60$ ，

$\therefore p_1 - p_2$ 之 95%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}=(0.55-0.60)\pm z_{0.025}\sqrt{\frac{0.55\times0.45}{100}+\frac{0.60\times0.40}{100}}$$

$$=(-0.05)\pm1.96\times0.07$$

$$=(-0.05)\pm0.14$$

即$(-0.19,\ 0.09)$。

9. 從常態母體中，抽出樣本數爲 6 之隨機樣本，其資料如下：

15 18 9 13 17 14

(1)根據上述資料，求母體標準差σ之點估計值。

(2)試求母體標準差σ之 90%信賴區間。

提示 (1)母體是常態分配，母體標準差σ之點估計值爲

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2-n\overline{x}^2}{n-1}}$$

(2)母體標準差σ之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

解 (1) $s=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2-n\overline{x}^2}{n-1}}$

$$=\sqrt{\frac{1{,}284-6\times14.33^2}{5}}$$

$$=\sqrt{10.38}=3.22$$

$\therefore\sigma$ 之點估計為 3.22。

(2) $1-\alpha=0.90$，$\frac{\alpha}{2}=0.05$，$n-1=5$，

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(5)=11.07$，

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(5)=1.15$，

$\therefore\sigma$ 之 90%信賴區間為

$$\left(\sqrt{\frac{5\times10.38}{\chi^2_{0.05}(5)}},\sqrt{\frac{5\times10.38}{\chi^2_{0.95}(5)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{51.9}{11.07}},\sqrt{\frac{51.9}{1.15}}\right)=(2.17,6.72)$$

10. 假設從母體中隨機抽出二組獨立樣本，其資料如下：

樣本一	樣本二
$n_1 = 50$	$n_2 = 40$
$\overline{x} = 85$	$\overline{y} = 78$
$s_1^2 = 50$	$s_2^2 = 146$

試求：(1) $\mu_1 - \mu_2$ 之點估計值。

(2) $\mu_1 - \mu_2$ 之 90%信賴區間。

提示 兩組樣本間是獨立：

(1) $\mu_1 - \mu_2$ 之點估計值爲 $\overline{x} - \overline{y}$ 。

(2)兩組樣本數皆爲大樣本，依據中央極限定理得知，$\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)$ 近似常態分配，而 $\mu_1 - \mu_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $(\overline{x} - \overline{y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ；由於 σ_1^2 與 σ_2^2 未知，故由 s_1^2 與 s_2^2 估計之。

解 (1) $\mu_1 - \mu_2$ 之點估計值為 $\overline{x} - \overline{y} = 85 - 78 = 7$ 。

(2) $1 - \alpha = 0.90$ ，$\dfrac{\alpha}{2} = 0.05$ ，$z_{0.05} = 1.645$ ，

$\therefore \mu_1 - \mu_2$ 之 90%信賴區間為

$$
\begin{aligned}
(\overline{x} - \overline{y}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} &= (85 - 78) \pm 1.645 \sqrt{\frac{154}{50} + \frac{146}{40}} \\
&= 7 \pm 1.645 \times 2.59 \\
&= 7 \pm 4.26
\end{aligned}
$$

即 $(2.74,\ 11.26)$ 。

11. 某人研究多媒體教學是否有提高學生學習成效，今隨機抽出 7 位學生進行有使用多媒體和無使用多媒體情況下，其測驗成績如下：

學生 / 多媒體教學	1	2	3	4	5	6	7
無使用	75	72	80	64	80	76	79
有使用	82	78	76	68	83	81	75

假設學生成績是服從常態分配，試求無使用多媒體與有使用多媒體之成績平均數差的 90%信賴區間。

提示 μ_1表示無使用多媒體成績之平均數，μ_2表示有使用多媒體成績之平均數。兩組教學方法應用於相同一組 7 位學生上，故前後兩組樣本資料是不獨立，即爲相依樣本。母體是常態分配，而且爲小樣本，因此$\overline{D}$服從t分配。

$\therefore \mu_1-\mu_2$之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{d}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_d}{\sqrt{n}}$ 。

解

多媒體教學 \ 學生	1	2	3	4	5	6	7
無使用 x_i	75	72	80	64	80	76	79
有使用 y_i	82	78	76	68	83	81	75
$d_i=x_i-y_i$	–7	–6	4	–4	–3	–5	4

$n=7$，$\overline{d}=-2.43$，

$$s_d=\sqrt{\frac{\sum\left(d_i-\overline{d}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-n\overline{d}^2}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{167-7\times(-2.43)^2}{6}}=4.58$$

$1-\alpha=0.90$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(6)=1.943$，

$\therefore \mu_1-\mu_2$之 90%信賴區間為

$$\overline{d}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_d}{\sqrt{n}}=(-2.43)\pm1.943\times\frac{4.58}{\sqrt{7}}$$

$$=(-2.43)\pm3.36$$

即$(-5.79,\ 0.93)$。

12. 估計母體平均數μ之 95%誤差界限爲 2.5，此時所取的樣本數是 108 個，請問若估計母體平均數μ之 90%誤差界限爲 3 時，則樣本數應取多少？

提示 μ之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限 $e=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，樣本數 $n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2$ 。

解 依題意，$2.5=z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{108}}=1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{108}}$，所以$\sigma=13.26$。

當$e=3$，$1-\alpha=0.90$，樣本數 $n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e}\right)^2$，

$$\therefore n=\left(\frac{z_{0.05}\times13.26}{3}\right)^2=\left(\frac{1.645\times13.26}{3}\right)^2=52.87\doteqdot53$$，

即取$n=53$。

13. 估計母體平均數μ之 90%誤差界限爲母體標準差之 0.1 倍，請問此時樣本數應取多少？

提示 μ之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $e = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，其樣本數 $n = \left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{e} \right)^2$ 。

解 依題意，$1-\alpha = 0.90$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$ ，$e = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，

即 $0.1\sigma = z_{0.05} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，

$\therefore n = \left(\dfrac{1.645}{0.1} \right)^2 = 270.6 \doteqdot 271$ ，

即取 $n = 271$ 。

14. 某人研究公寓住戶每戶平均人數，今隨機抽出 15 戶，其每戶人數如下：

1 2 3 2 1 3 3 2 2 1 1 1 2 1 1

假設公寓住戶每戶人數服從常態分配，試求公寓住戶平均人數之 95%及 80%信賴區間。

提示 母體是常態分配，$n = 15$ 小樣本，母體σ未知，所以$\overline{X}$服從t分配，μ之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 。

解 $n = 15$ ，$\overline{x} = 1.73$ ，$s = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = 0.80$ ，$1-\alpha = 0.95$ ，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.145$ ，

$1-\alpha = 0.80$ ，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.10}(14) = 1.345$ ，

μ之 95%信賴區間為

$$\begin{aligned} \overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} &= 1.73 \pm t_{0.025}(14)\frac{0.8}{\sqrt{15}} \\ &= 1.73 \pm 2.145\frac{0.8}{\sqrt{15}} \\ &= 1.73 \pm 0.44 \end{aligned}$$

即 $(1.29,\ 2.17)$ 。

μ之 80%信賴區間為

$$\begin{aligned} \overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} &= 1.73 \pm t_{0.10}(14)\frac{0.8}{\sqrt{15}} \\ &= 1.73 \pm 1.345\frac{0.8}{\sqrt{15}} \\ &= 1.73 \pm 0.28 \end{aligned}$$

即 $(1.45,\ 2.01)$ 。

15. 欲推估某新型閃光燈在使用時間內光度能達到要求標準比例，今隨機取出 120 個閃光燈做檢驗，其中有 102 個是符合說明書中的功用，試求：

(1)閃光燈光度能達到要求標準比例之 95%信賴區間。

(2)95%誤差界限。

提示 樣本比例 $\hat{p}$ 近似常態分配，所以 p 之 $100(1-\alpha)\%$ 近似信賴區間為

$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ，其誤差界限為 $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 。

解 $\hat{p}=\frac{102}{120}=0.85$ ，$1-\alpha=0.95$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ 。

(1) p 之 95%信賴區間為

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.85\pm z_{0.025}\sqrt{\frac{0.85\times 0.15}{120}}$$

$$=0.85\pm 1.96\times 0.03$$

$$=0.85\pm 0.06$$

即 $(0.79,\ 0.91)$ 。

(2) p 之 95%誤差界限為

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=z_{0.025}\sqrt{\frac{0.85\times 0.15}{120}}$$

$$=1.96\times 0.03$$

$$=0.06$$

16. 某一百貨公司隨機抽出 60 位顧客，平均在該公司購買消費金額為 2,300 元，標準差為 300 元，試求所有顧客在該百貨公司平均購買消費金額之 95%信賴區間及誤差界限。

提示 母體分配未知，$n=60$ 為大樣本，依據中央極限定理，$\overline{X}$ 是服從常態分配，μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為 $\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，而誤差界限為 $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。$\sigma$ 未知，則由 s 估計之。

解 $n=60$ ，$\overline{x}=2,300$ ，$s=300$ ，$1-\alpha=0.95$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ ，

$\therefore \mu$ 之 95%信賴區間為

$$\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}=2,300\pm z_{0.025}\frac{300}{\sqrt{60}}$$

$$=2,300\pm 1.96\times 38.73$$

$$=2,300\pm 75.91$$

即 $(2,224.09,\ 2,375.91)$ 。

μ 之 95%誤差界限為

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}=z_{0.025}\frac{300}{\sqrt{60}}$$

$$=1.96\times 38.73$$

$$=75.91$$

17. 某人研究台北市與高雄市吃素人口比例，今隨機從台北市抽出 200 人，其中有 62 人吃素；高雄市抽出 180 人，其中 54 人吃素；試推估台北市與高雄市吃素人口比例差之 90%信賴區間。

提示 p_1 爲台北市吃素人口比例， p_2 爲高雄市吃素人口比例， p_1-p_2 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$ 。

解 $\hat{p}_1=\frac{61}{200}=0.31$ ， $\hat{p}_2=\frac{54}{180}=0.30$ ， $1-\alpha=0.90$ ， $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$ ，

$\therefore p_1-p_2$ 之 90%信賴區間為

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}=(0.31-0.30)\pm 1.645\sqrt{\frac{0.31\times 0.69}{200}+\frac{0.3\times 0.7}{180}}$$

$$=0.01\pm 0.08$$

即 $(-0.07,\ 0.09)$ 。

18. 某銀行自動提款機之提款操作時間服從常態分配，今從自動提款機隨機抽出 10 筆操作（單位：分鐘），其記錄如下：

3.5　2.4　3.2　2.5　4.8　5.5　3.4　4.5　4.3　5.8

(1)試求平均提款操作時間 μ 的點估計值。

(2)試求 μ 之 95%信賴區間。

(3)試求提款操作時間之變異數與標準差的 95%信賴區間。

提示 母體是常態分配， σ 未知， $n=10$ 爲小樣本，所以 $\overline{X}$ 服從 t 分配。

(1) μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\overline{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

(2) σ^2 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

(3) σ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

解 $n=10$，$\overline{x}=3.99$，

$$s^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\overline{x}^2}{n-1}$$

$$=\frac{171.73-10\times3.99^2}{9}=1.39$$

$s=1.18$

(1) μ 之點估計值為 $\overline{x}=3.99$。

(2) $1-\alpha=0.95$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.262$，

$\therefore \mu$ 之 95%信賴區間為

$$\overline{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=3.99\pm t_{0.025}(9)\frac{1.18}{\sqrt{10}}$$

$$=3.99\pm0.84$$

即 $(3.15,\ 4.83)$。

(3) $1-\alpha=0.95$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=19.02$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=2.70$，

$\therefore \sigma^2$ 之 95%信賴區間為

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{9\times1.39}{\chi^2_{0.025}(9)},\ \frac{9\times1.39}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)=\left(\frac{12.51}{19.02},\ \frac{12.51}{2.70}\right)$$

$$=(0.66,\ 4.63)$$

σ 之 95%信賴區間為

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{12.51}{19.02}},\ \sqrt{\frac{12.51}{2.70}}\right)$$

$$=(0.81,\ 2.15)$$

19. 某教育學者研究大專男生和女生體育成績之差異，隨機抽出男生 10 位，其平均成績爲 82.5 分，標準差爲 7.5；女生 15 位，其平均成績爲 79.4 分，標準差爲 6.9 分。假設大專學生體育成績服從常態分配，試求男生和女生之平均成績差的 95%信賴區間。（分別以母體變異數相等與不相等情況探討之）

提示 μ_1 爲男生平均成績，μ_2 爲女生平均成績，母體爲常態分配，小樣本且獨立，所以 $\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)$ 會服從 t 分配。

(1)假設 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，則 $s_p^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$，$\mu_1-\mu_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}\text{。}$$

(2)假設 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，則自由度 $v=\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{n_2-1}}$，$\mu_1-\mu_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(v)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

解 $n_1=10$，$\overline{x}=82.5$，$s_1=7.5$，$n_2=15$，$\overline{y}=79.4$，$s_2=6.9$。

(1)假設 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，則

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$=\frac{9\times7.5^2+14\times6.9^2}{10+15-2}$$

$$=\frac{1{,}172.79}{23}=50.99$$

$1-\alpha=0.95$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(23)=2.069$，

$\therefore\mu_1-\mu_2$ 之 95%信賴區間為

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}=(82.5-79.4)\pm t_{0.025}(23)\sqrt{50.99\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)}$$

$$=3.1\pm2.069\times2.92$$

$$=3.1\pm6.04$$

即 $(-2.94,\ 9.14)$。

(2)假設 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，則自由度 v 為

$$v=\frac{\left(\dfrac{7.5^2}{10}+\dfrac{6.9^2}{15}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{7.5^2}{10}\right)^2}{9}+\dfrac{\left(\dfrac{6.9^2}{15}\right)^2}{14}}=\frac{77.44}{4.24}=18.26\doteqdot18$$

$\therefore \mu_1-\mu_2$ 之 95%信賴區間為

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(v\right)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}=\left(82.5-79.4\right)\pm t_{0.025}\left(18\right)\sqrt{\frac{7.5^2}{10}+\frac{6.9^2}{15}}$$

$$=3.1\pm 2.101\times 2.97$$

$$=3.1\pm 6.24$$

即 $\left(-3.14,\ 9.34\right)$。

20. 某位投資者衡量兩組 100 萬元的投資組合之獲利率，隨機蒐集數月之獲利率資料如下：

投資組合一	13	5	24	–6	15	5	–4	9	8
投資組合二	19	1	–16	31	26	–20	32	–17	5

假設投資組合之獲利率服從常態分配，且變異數不相等，試求：

(1)投資組合一與投資組合二之平均獲利率差的 95%信賴區間。

(2)投資組合一獲利率標準差之 90%信賴區間。

(3)投資組合一與投資組合二之獲利率變異數比之 90%信賴區間。

提示 母體是常態分配，兩組樣本是獨立小樣本，所以$\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)$會服從 t 分配。

(1) $\because \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，則自由度 v 爲

$$v=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{n_2-1}}$$

$\therefore \mu_1-\mu_2$ 之 $100\left(1-\alpha\right)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\overline{x}-\overline{y}\right)\pm t_{\frac{\alpha}{2}}\left(v\right)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

(2) σ_1 之 $100\left(1-\alpha\right)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1\right)}},\ \sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1\right)}}\right)$$

(3) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 之 $100\left(1-\alpha\right)\%$ 信賴區間爲

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\times\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,\ n_2-1\right)},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}\times\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,\ n_2-1\right)}\right)$$

其中，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)=\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,\ n_1-1)}$ 。

解 μ_1為投資組合一獲利率之平均數，μ_2為投資組合二獲利率之平均數，$n_1=9$ ，$\bar{x}=7.67$ ，$s_1=9.27$ ，$n_2=9$ ，$\bar{y}=6.78$ ，$s_2=21.15$ 。

(1)因為$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

$$v=\frac{\left(\frac{9.27^2}{9}+\frac{21.15^2}{9}\right)^2}{\frac{\left(\frac{9.27^2}{9}\right)^2}{8}+\frac{\left(\frac{21.15^2}{9}\right)^2}{8}}=10.96\doteq 11$$

$\therefore \mu_1-\mu_2$之 95%信賴區間為

$$(\bar{x}-\bar{y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(v)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}=(7.67-6.78)\pm t_{0.025}(11)\sqrt{\frac{9.27^2}{9}+\frac{21.15^2}{9}}$$

$$=0.89\pm 2.201\times 7.70$$

$$=0.89\pm 16.95$$

即$(-16.06,\ 17.84)$ 。

(2)$1-\alpha=0.90$ ，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1)=\chi^2_{0.05}(8)=15.51$ ，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1)=\chi^2_{0.95}(8)=2.73$ 。

$\therefore \sigma_1$之 90%信賴區間為

$$\left(\sqrt{\frac{8\times 9.27^2}{\chi^2_{0.05}(8)}},\ \sqrt{\frac{8\times 9.27^2}{\chi^2_{0.95}(8)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{687.46}{15.51}},\ \sqrt{\frac{687.46}{2.73}}\right)$$

$$=(6.66,\ 15.87)$$

(3)$1-\alpha=0.90$ ，$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.05}(8,\ 8)=3.44$ ，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.95}(8,\ 8)$

$$=\frac{1}{F_{0.05}(8,\ 8)}=0.29$$ 。

$\therefore \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$之 90%信賴區間為

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\times\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}\times\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)}\right)=\left(\frac{9.27^2}{21.15^2}\times\frac{1}{3.44},\ \frac{9.27^2}{21.15^2}\times\frac{1}{0.29}\right)$$

$$=(0.06,\ 0.66)$$

21. 某民意調查機構在選前做某甲候選人之支持率調查，今隨機調查 250 位選民中有 105 位是支持某甲候選人，試求：

(1)某甲候選人的支持率之 90%信賴區間。

(2)若我們希望估計母體比例在 95%信賴係數的誤差界限不大於 3%，請回答下面三種情況下，各應抽出多少做樣本數？

a.根據過去經驗，某甲候選人之支持率大約為 30%。

b.利用事先已做測試樣本 250 位選民中，有 105 位是支持某甲候選人。

c.完全不知道某甲候選人之支持率。

提示 (1)母體比例 p 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為 $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 。

(2)樣本數 $n=\left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{e}\right)^2 \times \hat{p}(1-\hat{p})$

a.可依據過去經驗 p 可能值。

b.利用測試樣本比例 $\hat{p}$ 代入。

c.利用成功率最大時，p 採 0.5 代入。

解 (1) $\hat{p}=\dfrac{105}{250}=0.42$ ，$1-\alpha=0.90$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$ 。

$\therefore p$ 之 90%信賴區間為

$$0.42 \pm z_{0.05}\sqrt{\frac{0.42\times 0.58}{250}}=0.42\pm 1.645\times 0.03$$

$$=0.42\pm 0.05$$

即取 $(0.37,\ 0.47)$ 。

(2) $e=0.03$ ，$1-\alpha=0.95$ ，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ 。

a. $p=0.3$

$$\therefore n=\left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2(0.3)(0.7)=896.37 \doteqdot 897$$

即取 $n=897$ 。

b. $\hat{p}=\dfrac{105}{250}=0.42$

$$\therefore n=\left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2(0.42)(0.58)=1{,}039.79 \doteqdot 1{,}040$$

即取 $n=1{,}040$ 。

c. $p=0.5$

$$\therefore n=\left(\frac{1.96}{0.03}\right)^2(0.5)(0.5)=1{,}067.11 \doteqdot 1{,}068$$

即取 $n=1{,}068$ 。

22. 某工程師欲比較兩部功能一樣，但不同的電腦處理速度，今隨機設計 9 組 SAS 程式做測試，其結果如下：（單位：分鐘）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
電腦一	25	54	110	14	70	52	60	28	56
電腦二	32	49	115	12	72	58	74	33	58

假設電腦處理時間服從常態分配，試求電腦一與電腦二處理之平均時間差的 95%信賴區間。

提示 兩組樣本資料間是非獨立，即表示相依樣本，母體是常態分配，在小樣本下，母體標準差未知，故$\mu_1-\mu_2$之$100(1-\alpha)\%$信賴區間為 $\bar{d}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_d}{\sqrt{n}}$。

解

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i：**電腦一**	25	54	110	14	70	52	60	28	56
y_i：**電腦二**	32	49	115	12	72	58	74	33	58
$d_i=x_i-y_i$	−7	5	−5	2	−2	−6	−14	−5	−2

$n=9$，$\bar{d}=\frac{\sum d_i}{n}=-3.78$，$s_d=5.47$，$1-\alpha=0.95$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$。

$\therefore \mu_1-\mu_2$之 95%信賴區間為

$$\bar{d}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s_d}{\sqrt{n}}=(-3.78)\pm 2.306\times\frac{5.47}{\sqrt{9}}=(-3.78)\pm 4.20$$

即$(-7.98,\ 0.42)$。

23. 假設從常態母體抽出一組隨機樣本，其樣本數為 13，且母體平均數μ之 95%信賴區間為$(8.70,\ 13.72)$，試求：

(1)樣本平均數與樣本標準差。

(2)母體平均數μ之 95%誤差界限。

(3)母體平均數μ之 90%信賴區間。

(4)母體標準差σ之 90%信賴區間。

提示 母體是常態分配，小樣本且σ未知，故$\overline{X}$會服從t分配。

(1)μ之$100(1-\alpha)\%$信賴區間為$\bar{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$。

(2)μ之$100(1-\alpha)\%$誤差界限為$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$。

(3)σ之$100(1-\alpha)\%$信賴區間為$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$。

解 (1)$8.70=\bar{x}-t_{0.025}(12)\frac{s}{\sqrt{13}}$ ………………… ①

$13.72=\bar{x}+t_{0.025}(12)\frac{s}{\sqrt{13}}$ ……………… ②

依①＋②式得：

$2\overline{x}=22.42 \quad \therefore \overline{x}=11.21$

將 $t_{0.025}(12)=2.179$ 代入②式得：

$$s=\frac{(13.72-11.21)\times\sqrt{13}}{2.179}=4.15$$

(2) μ 之 95%誤差界限為

$$t_{0.025}(12)\frac{4.15}{\sqrt{13}}=2.51$$

(3) μ 之 90%信賴區間為

$$\overline{x}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}=11.21\pm t_{0.05}(12)\frac{4.15}{\sqrt{13}}$$

$$=11.21\pm 1.782\times\frac{4.15}{\sqrt{13}}$$

$$=11.21\pm 2.05$$

即 $(9.16,\ 13.26)$。

(4) σ 之 90%信賴區間為

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)=\left(\sqrt{\frac{12\times 4.15^2}{21.03}},\ \sqrt{\frac{12\times 4.15^2}{5.23}}\right)$$

$$=(3.13,\ 6.29)$$

24. 假設隨機抽出兩組獨立樣本 $n_1=64$，$n_2=75$，其 $\mu_1-\mu_2$ 之 95%信賴區間爲 $(550,\ 1{,}120)$，試求：

(1) $\mu_1-\mu_2$ 之點估計值。

(2) $\mu_1-\mu_2$ 之 95%誤差界限。

(3) $\mu_1-\mu_2$ 之 90%信賴區間。

提示 在兩組獨立大樣本下，依據中央極限定理可知，$(\overline{X}-\overline{Y})$ 近似從常態分配。

(1) $\mu_1-\mu_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $(\overline{x}-\overline{y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$，若 σ_1^2 與 σ_2^2 未知，則由 s_1^2 與 s_1^2 估計之。

(2) $\mu_1-\mu_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$。

解 (1) $550=(\overline{x}-\overline{y})-z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}$ …………………… ①

$1{,}120=(\overline{x}-\overline{y})+z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}$ ……………… ②

由①＋②式得：$2(\overline{x}-\overline{y})=1{,}670$，$(\overline{x}-\overline{y})=835$，$\mu_1-\mu_2$ 之點估計值為 $\overline{x}-\overline{y}=835$。

(2) $\mu_1-\mu_2$ 之 95%誤差界限為 $z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}$

由②－①式得：

$570=2\times z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}$

$\therefore z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}=285$

(3) $\because 285=z_{0.025}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}=1.96\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}$

$\therefore\sqrt{\dfrac{s_1^2}{64}+\dfrac{s_2^2}{75}}=145.41$

$\mu_1-\mu_2$ 之 90%信賴區間為

$$(\overline{x}-\overline{y})\pm z_{0.05}\sqrt{\frac{s_1^2}{64}+\frac{s_2^2}{75}}=835\pm1.645\times145.41$$

$$=835\pm239.20$$

即 $(595.80,\ 1{,}074.20)$。

25. 若一組隨機樣本的樣本數爲 225，而 $(\overline{x}-0.15s,\ \overline{x}+0.15s)$ 爲母體平均數 μ 之信賴區間，請問此信賴係數爲何？

提示 (1) $n=225$ 爲大樣本，依據中央極限定理得知，$\overline{X}$ 近似常態分配，而 μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。若 σ 未知，則由 s 估計之。

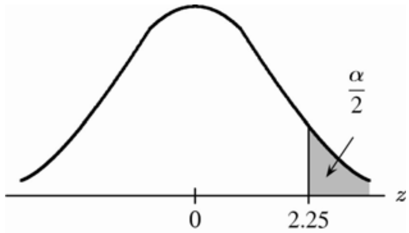
(2)信賴係數爲 $1-\alpha$。

解 $\overline{x}-0.15s=\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{225}}$ …………………… ①

$\overline{x}+0.15s=\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{225}}$ …………………… ②

由②－①式得：$z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{225}}=0.15s$

$\therefore z_{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{225}\times0.15=2.25$



由標準常態機率表可得知，$P(Z>2.25)=0.0122$，$\frac{\alpha}{2}=0.0122$，$\therefore \alpha=0.0244$，

此時，信賴係數$1-\alpha=1-0.0244=0.9756$。

26. 某社區民意調查結果顯示，250 位民眾中有 200 位滿意新政策的執行成效，根據此調查結果，試求：

(1)所有社區民眾對新政策的執行成效滿意比率之 95%信賴區間。

(2)所有社區民眾之滿意比率之近似誤差界限會在±0.06 之內的機率爲何？

提示 (1)母體比例 p 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$。

(2)$100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$。

解 (1) $\hat{p}=\frac{200}{250}=0.8$，$1-\alpha=0.95$，$\frac{\alpha}{2}=0.025$，$z_{0.025}=1.96$，

p 之 95%信賴區間為

$$\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.8 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{250}}=0.8 \pm 0.05$$

即$(0.75,\ 0.85)$。

(2) $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.06$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=0.06\sqrt{\frac{250}{0.8 \times 0.2}}=2.37$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.0089$$

$$\Rightarrow 1-\alpha=0.9822$$

27. 假設在大樣本下，某母體平均數之 90%信賴區間爲$(100,\ 140)$：

(1)試求母體平均數的估計值與 90%的誤差界限。

(2)解釋母體平均數是否會落在$(100,\ 140)$之間？樣本平均數是否會落在$(100,\ 140)$之間？

提示 在大樣本下，母體平均數之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。（若母體標準差未知，則用 s 代替之）

解 (1)母體平均數的估計值為 $\bar{x}=\dfrac{100+140}{2}=120$ ，其 90%誤差界限為 $z_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

$\because 140=\bar{x}+z_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，$\therefore z_{0.05}\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}=20$ 。

(2)我們有 90%的信心母體平均會落在$(100,\ 140)$之間，但不能確定母體平均數是否落入此區間內。至於樣本平均數為此區間之中心點，所以必定包含在此區間內。

28. 在大樣本下，試以區間長度比率來比較母體平均數之 95%信賴區間和其 90%信賴區間。

提示 在大樣本下，母體平均數之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。（若母體標準差 σ 未知，則用 s 代替之）

解 μ 之 95%信賴區間長度為 $2\times z_{0.025}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，而 μ 之 90%信賴區間長度為 $2\times z_{0.05}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，

$$\therefore \text{長度比率為 } \frac{2\times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\times 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1.19$$

（當 σ 未知時，以 s 代替之，$\dfrac{2\times 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}}{2\times 1.645\frac{s}{\sqrt{n}}}=1.19$ ）

因此母體平均數之 95%信賴區間長度為 90%信賴區間長度的 1.19 倍。

29. 若隨機抽出三組獨立樣本，並各別計算出母體平均數之 95%信賴區間，試求：

(1)此三個 95%信賴區間會同時包含母體平均數之機率。

(2)至少其中有二個區間會包含母體平均數之機率。

(3)至少有一個區間會包含母體平均數之機率。

提示 應用 95%信賴區間概念，區間會包含母體平均數之機率爲 0.95。

解 (1)若令 X 表示三個區間中，包含母體平均數之區間個數，則 X 服從二項分配 $B(3,\ 0.95)$ 。

$P(X=3)=(0.95)^3=0.8574$

(2) $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$$=\binom{3}{2}(0.95)^2(0.05)+\binom{3}{3}(0.95)^3(0.05)^0$$

$=0.9928$

(3) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)$

$$=1-\binom{3}{0}(0.95)^0(0.05)^3$$

$=0.9999$

30. 欲了解某地區男女生平均月薪收入之差異，隨機調查 75 位男性，得知平均月薪為 45,530 元，標準差為 760；70 名女性之平均月薪為 42,610 元，標準差為 710 元，試求男女生平均月薪差異之 90%信賴區間。

提示 在大樣本下，母體平均數差異之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為 $(\overline{x}-\overline{y})\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$（當 σ_1 與 σ_2 未知）。

解 男女生平均月薪差異之 90%信賴區間為

$$(45,530-42,610)\pm 1.645\times\sqrt{\frac{(760)^2}{75}+\frac{(710)^2}{70}}$$

$$=2,920\pm 200.82$$

即 $(2,719.18,\ 3,120.82)$。

31. 從常態母體隨機抽出一組隨機樣本，其樣本數為 9，且母體標準差之 90%信賴區間為 $(6.66,\ 15.87)$，試求：

(1)樣本標準差。

(2)母體變異數之 95%信賴區間。

提示 (1)母體標準差之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

(2)母體變異數之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間為

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

解 (1) $1-\alpha=0.9$ ， $\chi^2_{0.05}(8)=15.51$ ， $\chi^2_{0.95}(8)=2.73$ ，

$$\because\sqrt{\frac{(9-1)s^2}{15.51}}=6.66\left(\text{或}\sqrt{\frac{(9-1)s^2}{2.73}}=15.87\right)$$

$$\therefore s=9.27$$

(2)母體變異數之 95%信賴區間為

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(8)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(8)}\right)=\left(\frac{8\times 9.27^2}{17.53},\ \frac{8\times 9.27^2}{2.18}\right)$$

$$=(39.22,\ 315.35)$$

32. 若在大樣本下，母體比例差異 $p_1 - p_2$ 之 90%信賴區間爲 $(-0.07,\ 0.09)$，試求：

(1) $p_1 - p_2$ 之點估計值。

(2) $p_1 - p_2$ 之 95%信賴區間。

提示 (1) $p_1 - p_2$ 之點估計值爲 $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$。

(2) $p_1 - p_2$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$。

解 (1) $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \dfrac{0.09 + (-0.07)}{2} = 0.01$。

(2) $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + 1.645 \times \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = 0.09$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = 0.05$

$\therefore p_1 - p_2$ 之 95%信賴區間為

$0.01 \pm 1.96 \times 0.05$

即 $(-0.09,\ 0.11)$。

33. 欲研究學校鄰近地區學生套房出租價格行情，今調查 10 戶出租套房，得知平均月租金爲 3,200 元，標準差爲 480 元。假設房租價格服從常態分配，試求此地區學生套房平均月租金之 90%信賴區間。

提示 在小樣本下，μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\overline{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{s}{\sqrt{n}}$。

解 $1-\alpha = 0.9$，$t_{0.05}(9) = 1.833$，平均月租金之 90%信賴區間為

$\overline{x} \pm t_{0.05}(9)\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 3,200 \pm 1.833\dfrac{480}{\sqrt{10}}$

即 $(2,921.77,\ 3,478.23)$。

34. 從常態母體（σ 未知）取出一組隨機樣本，當樣本數爲 16 且標準差爲 2 時，母體平均數之誤差界限會在 ±0.8765 之內的機率爲何？

提示 在小樣本下，常態母體但 σ 未知時，μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 誤差界限爲 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}}$。

解 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{s}{\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(15)\dfrac{2}{\sqrt{16}} = 0.8765$

$\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(15) = 1.753$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.05$

$\Rightarrow 1-\alpha = 0.9$

35. 從常態母體（σ已知）取出一組隨機樣本，若其母體平均數之 95%信賴區間爲 $(4.22,\ 5.78)$，試求其母體平均數之 90%信賴區間。

提示 母體爲常態且σ已知時，母體平均數之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲 $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

解 $1-\alpha = 0.95$，$z_{0.025} = 1.96$，$\bar{x} = \dfrac{5.78+4.22}{2} = 5$ 且 $\bar{x} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.78$，

則 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{5.78-5}{1.96} = 0.4$。

μ 之 90%信賴區間為

$$\bar{x} \pm z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \pm 1.645 \times 0.4$$

即 $(4.34,\ 5.66)$。