Unit 12 假設檢定

Case Problem: Ethical Behavior of Business Students at Bayview University

During the global recession of 2008 and 2009, there were many accusations of unethical behavior by Wall Street executives, financial managers, and other corporate officers. At that time, an article appeared that suggested that part of the reason for such unethical business behavior may stem from the fact that cheating has become more prevalent among business students (Chronicle of Higher Education, February 10, 2009). The article reported that 56% of business students admitted to cheating at some time during their academic career as compared to 47% of nonbusiness students.

Cheating has been a concern of the dean of the College of Business at Bayview University for several years. Some faculty members in the college believe that cheating is more widespread at Bayview than at other universities, while other faculty members think that cheating is not a major problem in the college. To resolve some of these issues, the dean commissioned a study to assess the current ethical behavior of business students at Bayview. As part of this study, an anonymous exit survey was administered to a sample of 90 business students from this year's graduating class. Responses to the following questions were used to obtain data regarding three types of cheating.

- During your time at Bayview, did you ever present work copied off the Internet as your own? Yes ___ **No ___**
- During your time at Bayview, did you ever copy answers off another student's exam? Yes ___ **No ___**
- During your time at Bayview, did you ever collaborate with other students on pro jects that were supposed to be completed individually? Yes ___ **No ___**

Any student who answered Yes to one or more of these questions was considered to have been involved in some type of cheating. A portion of the data collected follows. The complete data set is in the file named Bayview.

Student	Copied from Internet	Copied on Exam	Collaborated on Individual Project	Gender
1	No	No	No	Female
2	No	No	No	Male
3	Yes	No	Yes	Male
4	Yes	Yes	No	Male
5	No	No	Yes	Male
6	Yes	No	No	Female
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
88	No	No	No	Male
89	No	Yes	Yes	Male
90	No	No	No	Female

Managerial Report

Prepare a report for the dean of the college that summarizes your assessment of the nature of cheating by business students at Bayview University. Be sure to include the following items in your report.

1. Use descriptive statistics to summarize the data and comment on your findings.
2. Develop 95% confidence intervals for the proportion of all students, the proportion of male students, and the proportion of female students who were involved in some type of cheating.
3. Conduct a hypothesis test to determine if the proportion of business students at Bay view University who were involved in some type of cheating is less than that of business students at other institutions as reported by the Chronicle of Higher Education.
4. Conduct a hypothesis test to determine if the proportion of business students at Bay view University who were involved in some form of cheating is less than that of nonbusiness students at other institutions as reported by the Chronicle of Higher Education.

5. What advice would you give to the dean based upon your analysis of the data?

個案問題:灣景大學商管學生的道德行為

2008年至2009年間的全球衰退中，有許多關於華爾街的主管、財務經理及其他公司主管的不道德指控。當時有些文章指出，此種不道德行為的部分原理可能源自商學院學生的作弊行為變得更普遍(Chronicle of Higher Education, Feb10,2009)。文章指出，56%的商學院學生承認在學校生活中作弊，比例高過非商學院的學生47%。

若干年來，灣景大學商學院院長一直在關注學生作弊行為。某些商學院同仁相信灣景大學的作弊行為比其他大學更普遍，但其他同仁則不認為作弊是主要問題。為了解決這些議題，院長主導一項研究以了解目前灣景大學商學院學生的道德行為。研究的一部分是匿名的出口調查，對象是畢業班的90名學生。學生被要求回答下列問題以取得三類作弊行為的相關資料。

- 在灣景就讀期間，是否將抄襲自網際網路的資料當作自己的作品？ 是________ 否________
- 在灣景就讀期間，是否在考試時抄襲其他同學的答案？ 是________ 否________
- 在灣景就讀期間，是否與其他同學合作已完成應該自己獨立完成的作業？ 是________ 否________

回答一個(含)或以上的『是』的同學即被認為涉及某種形式的作弊行為。

部分資料如下，完整資料請參考名為Bayview的檔案。

管理報告

為灣景大學商學院院長準備報告，報告中應彙整你對灣景大學商學院學生作弊性質的評估。請確認報告包含下列項目。

1. 利用敘述統計量彙整這份資料。
2. 求算男學生與女學生涉嫌某種形式的作弊行為比例為95%信賴區間估計值。
3. 進行假設檢定，以判定灣景大學商學院學生作弊比例是否小於Chronicle of Higher Education所報導的商學院學生作弊比例。

4. 進行假設檢定，以判定灣景大學商學院學生作弊比率是否小於 Chronicle of Higher Education所報導的非商學院學生作弊比例。
5. 根據你對資料分析，你會給商學院院長什麼建議？

---

1. 何謂假設檢定

- 假設，是一種未經驗證的猜想，對於事物可能結果的猜測，這種猜測還無法確定是否正確。
- 檢定，是驗證假設是否正確的程序。

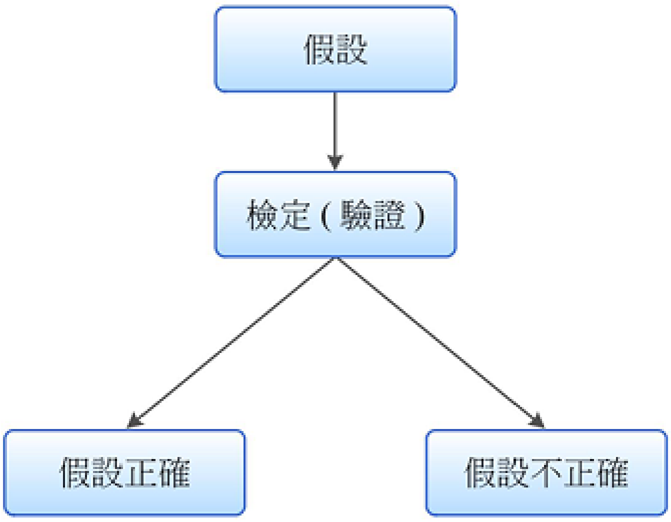


圖 9.1　假設檢定的概念

假設檢定 (hypothesis testing)，是指先對母體未知的參數給予一個假設，同時確定假設的反面；於母體進行隨機抽樣取得樣本，然後利用樣本統計量的抽樣分配，拿樣本資料進行檢定，驗證此一假設「是否正確」之過程，以決定是否接受該假設的統計方法。

在假設檢定的程序中，必須建立假設、再進行檢定。

- 假設有兩種形式
    - **虛無假設(null hypothesis)**，以符號H0表示，為決策者懷疑或希望否定的假設。
    - **對立假設(alternative hypothesis)**，以符號H1表示，為其虛無假設的反面，亦即被認為是對的假設。

    - 虛無假設與對立假設是成對出現的。
        - 兩種假設為互斥的參數集合。
        - 需要充分證據證明其成立的命題，盡可能地放在H1。
- 假設檢定的基本精神
    - 除非具有足夠的證據可以否定H0，否則我們只好接受H0
    - 接受H0並不代表H0一定為真，僅表示我們沒有充分的證據可以證實H0為偽。

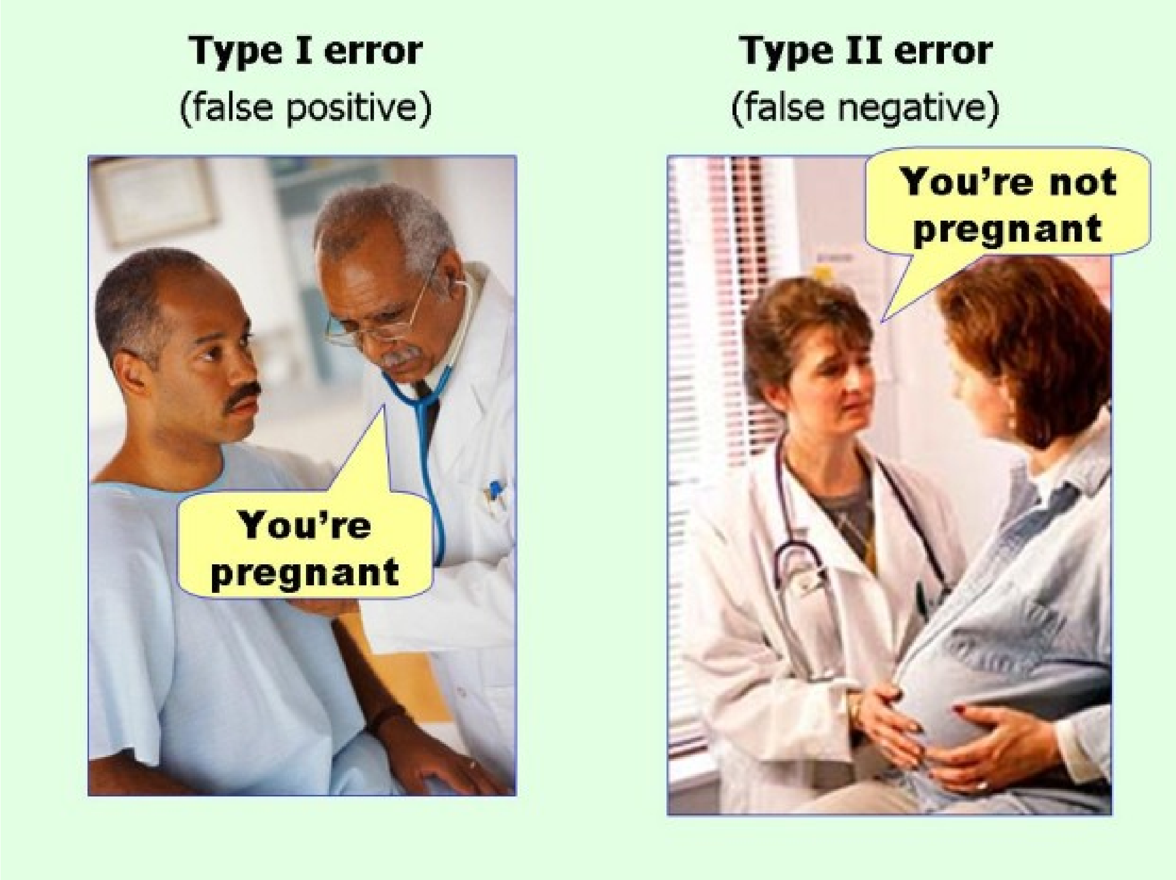
單尾與雙尾檢定

假設檢定的種類共分成三種，一般分為單尾檢定（左尾、右尾）及雙尾檢定。等號必須出現在虛無假設。

	H_0	H_1
單尾檢定 右尾	$H_0 : \theta \leq \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
單尾檢定 左尾	$H_0 : \theta \geq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$
雙尾檢定	$H_0 : \theta = \theta_0$	$H_1 : \theta \neq \theta_0$

型I與型II誤差

- **第一型誤差(type I error)**：當虛無假設為真，但檢定的結果為棄卻虛無假設。
- **第二型誤差(type II error)**：當對立假設為真，但檢定的結果為接受虛無假設。



		母體的情形（未明的真實狀況）	
		H_0 真	H_0 偽
檢定的結論	接受 H_0	正確決策	錯誤決策（型 II 誤差）
	拒絕 H_0	錯誤決策（型 I 誤差）	正確決策

- **顯著水準(significance level)**：犯第一型誤差最大的機率值。

在一假設檢定中，發生型 I 誤差之最大機率稱為顯著水準(significant level)，記作 α。α 可利用數學式子表示如下：

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{Max } P\text{（型 I 誤差）} \\ &= \text{Max } P\text{（拒絕 } H_0 \mid H_0 \text{ 為真）}\end{aligned} \tag{9-1}$$

在既定的拒絕域下，發生型 II 誤差之機率記作 β，亦即：

$$\begin{aligned}\beta &= P\text{（型 II 誤差）} \\ &= P\text{（接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 為偽）}\end{aligned} \tag{9-2}$$

在實際的應用上，決策者比較重視第一型誤差，希望第一型誤差不要太嚴重，因此，我們是先控制α值在可以容忍的範圍內，再讓β值愈小愈好。

- **檢定統計量 (test statistic)**：為一統計量，我們利用它來決定是否棄卻虛無假設。
- **棄却域(rejection region)**：為一個集合(或區域)，當檢定統計量的觀測值落入此區域時，我們會棄却虛無假設。

檢定步驟

- 步驟1：設定虛無假設及對立假設。
    - 平均數、比例、變異數
    - 雙尾與單尾(左尾、右尾)
- 步驟2：確定抽樣分配。
    - 標準常態分配、t分配、卡方分配、F分配
    - $\frac{\alpha}{2}$ 與α
- 步驟3：利用統計方法進行檢定，以圖形畫出顯著水準，並找出合適的檢定統計量、計算對應的棄卻域。
- 步驟4：依樣本觀測結果，由決策法則判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

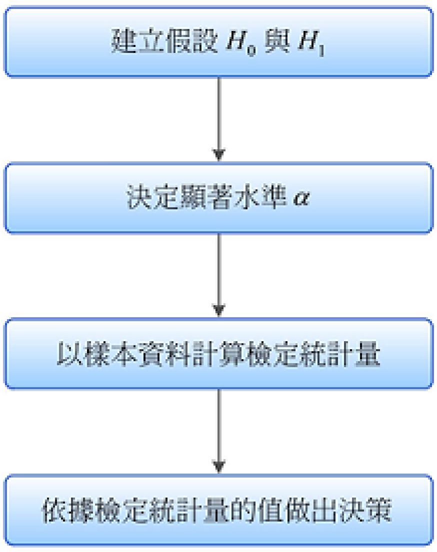


圖 9.3 假設檢定問題的基本流程

---

2. 母體平均數的檢定

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

$$單尾檢定\begin{cases}右尾檢定 & H_0：\mu \le \mu_0，H_1：\mu > \mu_0 \\ 左尾檢定 & H_0：\mu \ge \mu_0，H_1：\mu < \mu_0\end{cases}$$ 註 1

$$雙尾檢定 \quad H_0：\mu = \mu_0，H_1：\mu \ne \mu_0$$

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

- 抽樣分配是常態分配或t分配

母體分配	母體標準差 σ	樣本大小	檢定統計量	抽樣分配
常　態	已　知	大	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Z
常　態	已　知	小	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Z
常　態	未　知	大	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_{n-1} （可用 Z 近似）
常　態	未　知	小	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_{n-1}
未　知	已　知	大	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	Z
未　知	已　知	小	無	無
未　知	未　知	大	$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$	t_{n-1} （可用 Z 近似）
未　知	未　知	小	無	無

- 顯著水準為多少

請依照單雙尾檢定畫圖說明

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。

(1)方法一：臨界值法

臨界值檢定

計算臨界值，求出接受域（或拒絕域），若檢定統計量的觀察值落於接受域，則接受 H_0；反之，則拒絕 H_0。

- 判斷抽樣分配是屬於常態或t分配
- 根據顯著水準α決定臨界值（拒絕域、接受域）
- 將樣本平均數與臨界值（拒絕域、接受域）比較，即可作出檢定的結論。

常態分配

$\overline{X}$ 的抽樣分配為常態

(1) 左尾檢定：$H_0 : \mu \geq \mu_0$，$H_1 : \mu < \mu_0$

臨界值：$c = \mu_0 - z_\alpha \cdot \sigma_{\overline{X}}$ (9-5)

決策法則：若 $\overline{X} \leq c$，則拒絕 H_0；

若 $\overline{X} > c$，則接受 H_0。

(2) 右尾檢定：$H_0 : \mu \leq \mu_0$，$H_1 : \mu > \mu_0$

臨界值：$c = \mu_0 + z_\alpha \cdot \sigma_{\overline{X}}$ (9-6)

決策法則：若 $\overline{X} \geq c$，則拒絕 H_0；

若 $\overline{X} < c$，則接受 H_0。

母體平均數 μ 的雙尾檢定

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

決策法則（$\overline{X}$ 的抽樣分配為常態分配）：

若 $\overline{X} \geq c_1$ 或 $\overline{X} \leq c_2$，則拒絕 H_0；

若 $c_2 < \overline{X} < c_1$，則接受 H_0。

其中，$c_1 = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}$ (9-3)

且，$c_2 = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}$

（α 表示顯著水準）

t分配（母體為常態分配但變異數未知、小樣本）

常態母體，小樣本，母體標準差σ未知，則母體平均數μ之雙尾檢定的臨界值c_1與c_2為：

$$c_1 = \mu_0 + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}} \tag{9-4}$$

$$c_2 = \mu_0 - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{X}}$$

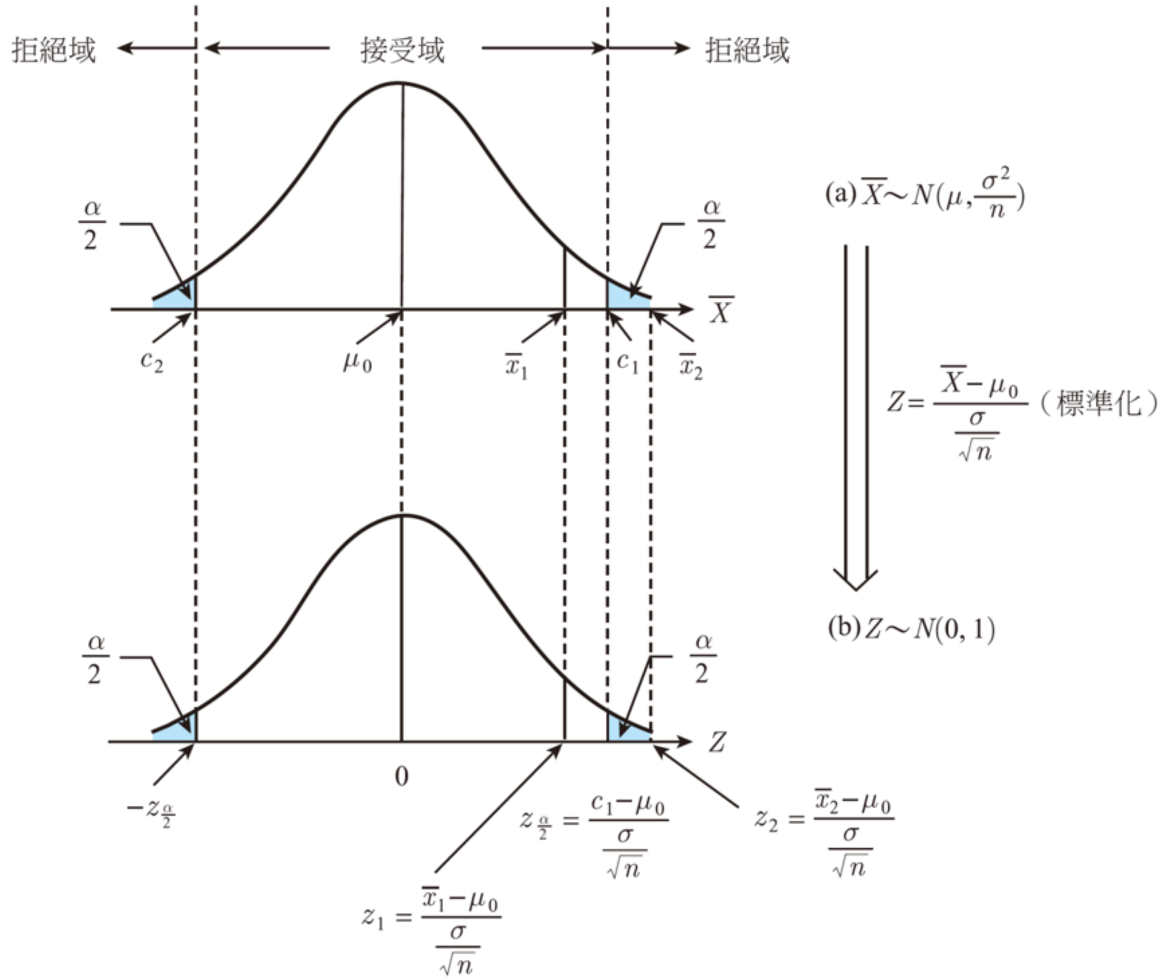
其中$\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$，代表$\overline{X}$的標準誤。

同理可推，單尾檢定。

(2) 方法二：統計量法 - Z檢定或t檢定

- 判斷抽樣分配是屬於常態或t分配
- 根據顯著水準α計算統計量z值或t值
- 將z值或t值與臨界值或拒絕域比較，即可作出檢定的結論。

Z檢定



臨界值檢定：

拒絕域： $R : \overline{X} \geq c_1$ 或 $\overline{X} \leq c_2$

其中 $c_1 = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$c_2 = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

決策法則：

若 $\overline{X} \geq c_1$ 或 $\overline{X} \leq c_2$，則拒絕 H_0

若 $c_2 < \overline{X} < c_1$，則接受 H_0

Z 檢定：

拒絕域： $R : z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$

其中 $z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

決策法則：

若 $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$，則拒絕 H_0

若 $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$，則接受 H_0

(a) Z 檢定的情況

	臨界值檢定 檢定統計量：$\overline{X}$	Z 檢定 檢定統計量：$z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ （大樣本下，σ 若未知，可以 s 取代）
(1) 雙尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\geq c_1$ 或 $\overline{X}\leq c_2$ c_1, c_2 參見 (9-3) 式	拒絕域：$z\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z\leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$
(2) 左尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu\geq\mu_0 \\ H_1: \mu<\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\leq c$ $c=\mu_0-z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	拒絕域：$z\leq -z_\alpha$
(3) 右尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu\leq\mu_0 \\ H_1: \mu>\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\geq c$ $c=\mu_0+z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	拒絕域：$z\geq z_\alpha$

t檢定

(b) t 檢定的情況

	臨界值檢定 檢定統計量：$\overline{X}$	t 檢定 檢定統計量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$
(4) 雙尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu=\mu_0 \\ H_1: \mu\neq\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\geq c_1$ 或 $\overline{X}\leq c_2$ c_1, c_2 參見 (9-4) 式	拒絕域：$t\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $t\leq -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
(5) 左尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu\geq\mu_0 \\ H_1: \mu<\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\leq c$ $c=\mu_0-t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	拒絕域：$t\leq -t_\alpha(n-1)$
(6) 右尾檢定：$\begin{cases} H_0: \mu\leq\mu_0 \\ H_1: \mu>\mu_0 \end{cases}$	拒絕域：$\overline{X}\geq c$ $c=\mu_0+t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	拒絕域：$t\geq t_\alpha(n-1)$

(3)方法三：信賴區間

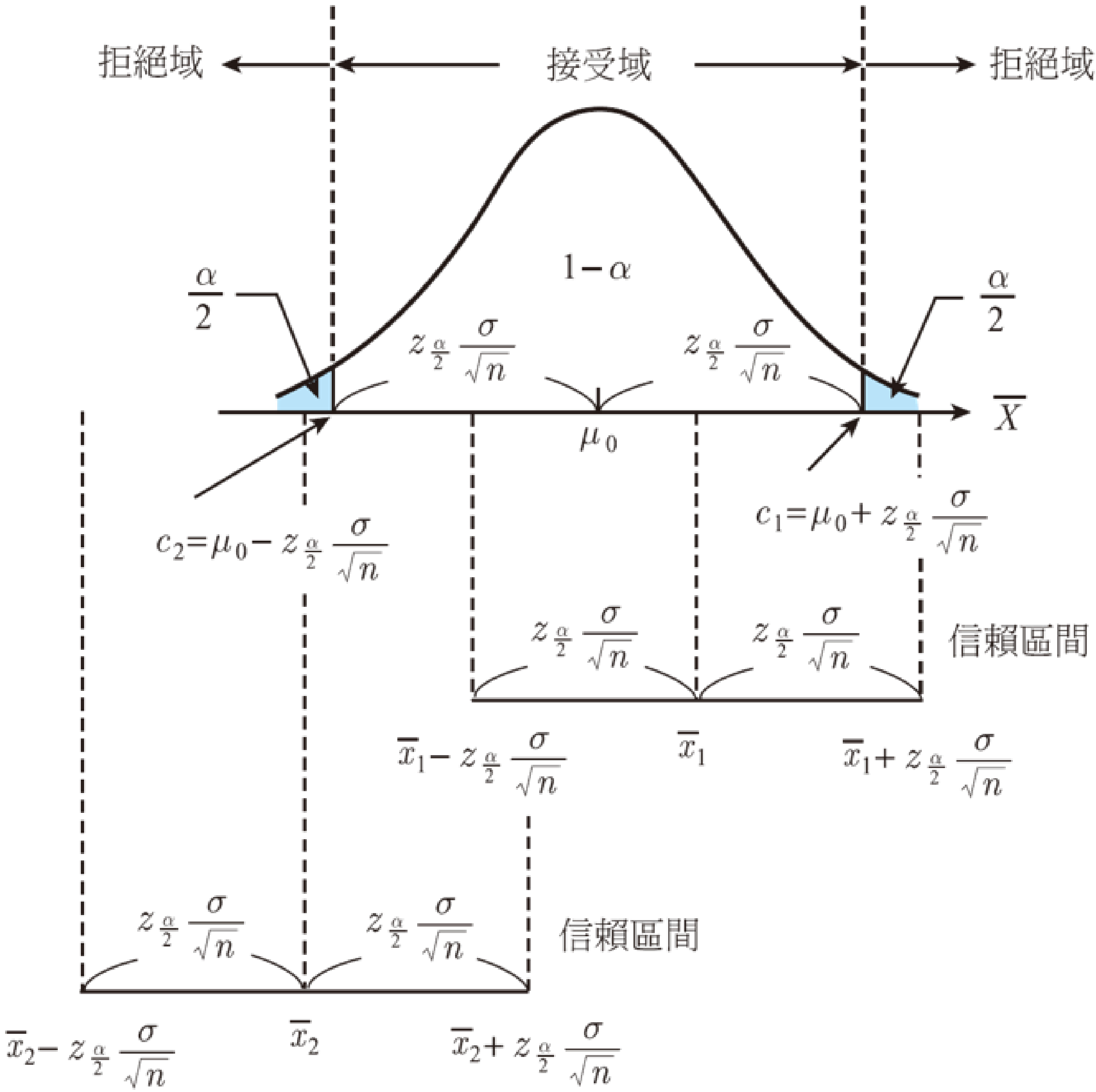
$$(c_2, c_1)=\text{（虛無假設中假想的參數值）}\pm (z_{\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } t_{\frac{\alpha}{2}})\cdot\text{（參數之估計量的標準誤）} \tag{9-12}$$

若樣本平均數 $\bar{X}$的觀察值落在信賴區間上下限的範圍內，則包含母體平均數，無法拒絕虛無假設。

	$\overline{X}$ 抽樣分配屬於常態（若 σ 未知，可以 s 取代）	$\overline{X}$ 抽樣分配屬於 t 分配
(1) 雙尾檢定 $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
(2) 左尾檢定 $H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$\left(-\infty, \overline{x} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(-\infty, \overline{x} + t_{\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
(3) 右尾檢定 $H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$\left(\overline{x} - z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$	$\left(\overline{x} - t_{\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$

以雙尾為例，信賴區間的圖形說明

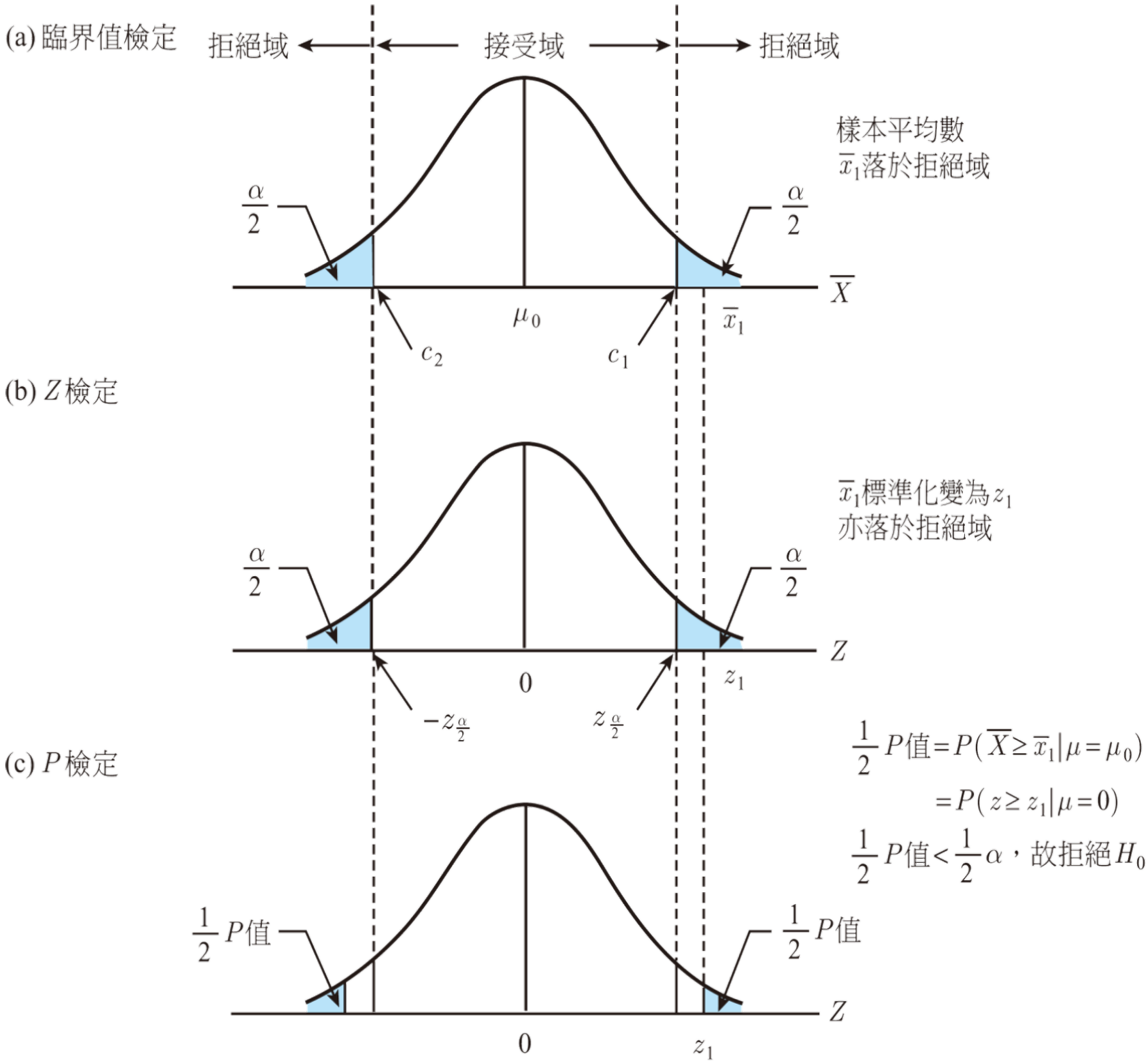
$$(c_2, c_1) = \left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \tag{9-9}$$



(4) 方法四：P值

P值係在既定的樣本結果下，將導致拒絕 H_0 之最小的 α 值。

- 判斷抽樣分配是屬於常態或t分配
- 直接計算P值
- 顯著水準α與P值比較
    - P值小於所設定的顯著水準時，拒絕H0；
    - P值大於或等於所設定的顯著水準時，不拒絕H0。



步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

大樣本下平均數的檢定

例7.1

例7.2

例7.3

例7.4

小樣本下平均數的檢定

例7.5

2. 兩個母體平均數差的假設檢定

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

Z 檢定統計量

$$Z=\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

（若 σ_1, σ_2 未知，則以 s_1, s_2 取代）

(1) 雙尾檢定：$H_0: \mu_1-\mu_2=\mu_0$

$H_1: \mu_1-\mu_2\neq\mu_0$

決策法則：若 $z\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z\leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。

(2) 左尾檢定：$H_0: \mu_1-\mu_2\geq\mu_0$

$H_1: \mu_1-\mu_2<\mu_0$

決策法則：若 $z\leq -z_{\alpha}$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。

(3) 右尾檢定：$H_0: \mu_1-\mu_2\leq\mu_0$

$H_1: \mu_1-\mu_2>\mu_0$

決策法則：若 $z\geq z_{\alpha}$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

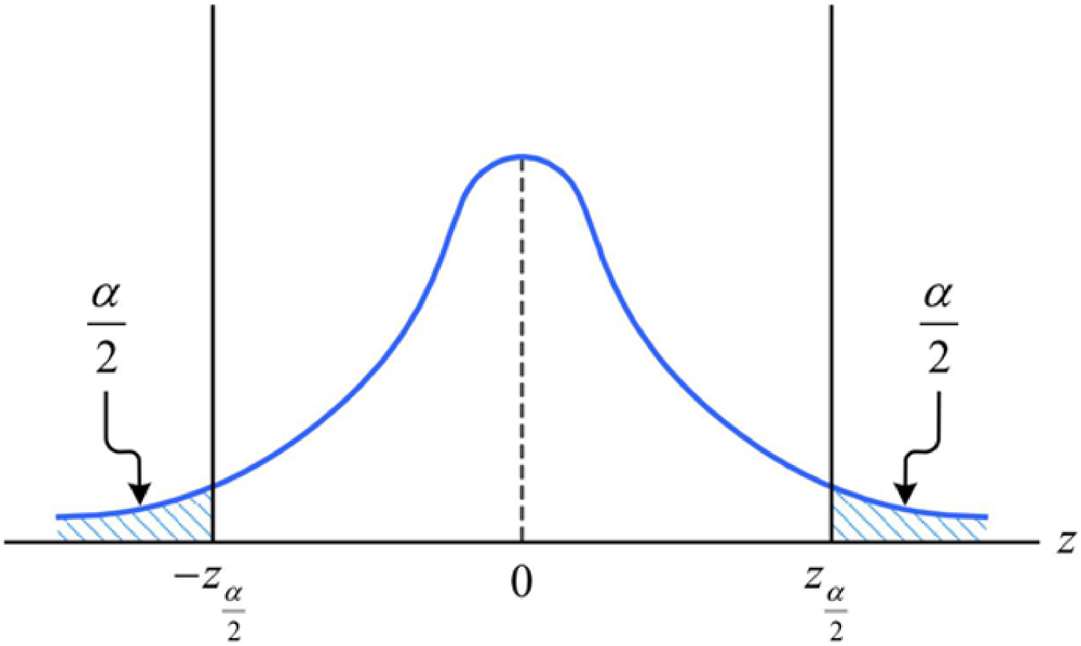
常態分配

t分配

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。

(1) 獨立樣本的母體平均數差的檢定

a. 常態分配:Z檢定



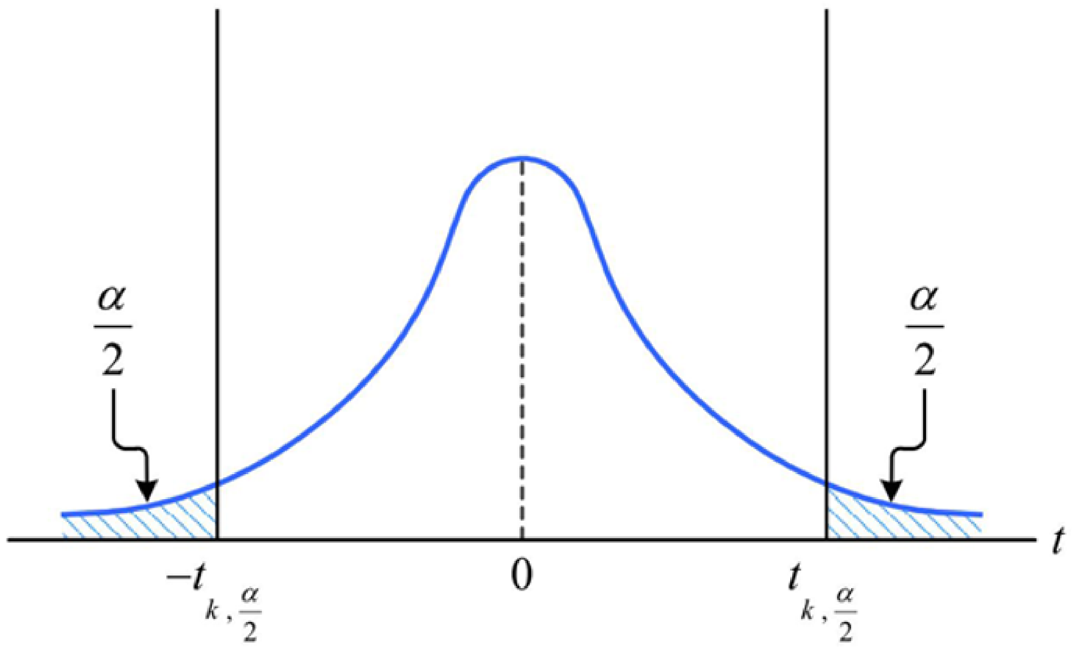
統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert Z \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z < -z_\alpha$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z > z_\alpha$

b. t分配：t檢定（一）小樣本、常態母體、σ1、σ2未知，但σ1=σ2

統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert T \rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$T < -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$T > t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

其中，$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

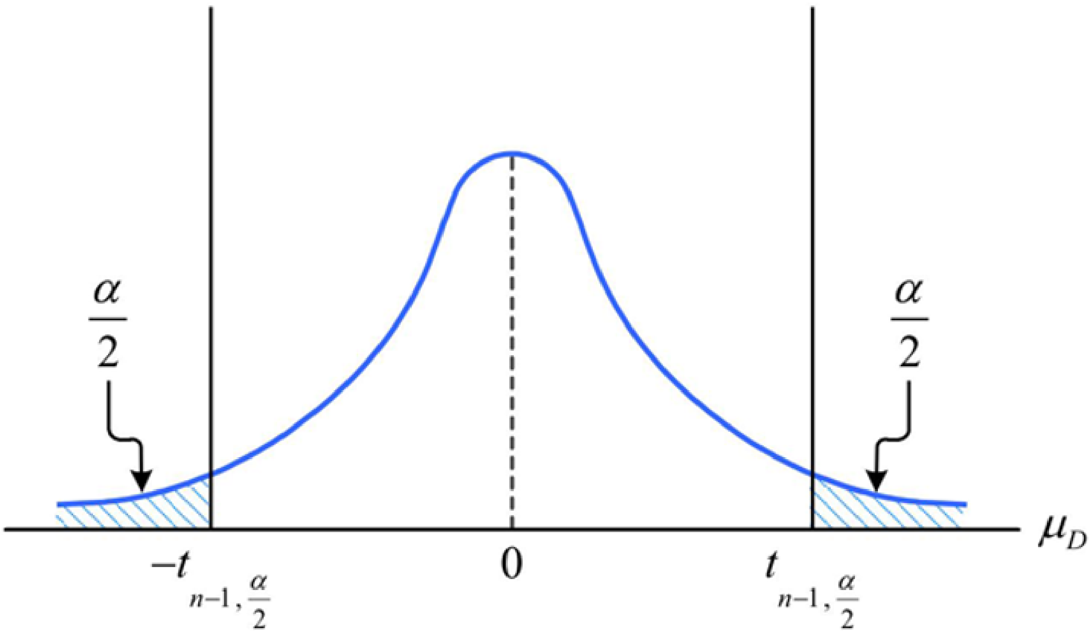
c. t分配：t檢定（二）小樣本、常態母體、σ1、σ2未知，但σ1≠σ2



統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	$\lvert T \rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(v)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	$T < -t_{\alpha}(v)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	$T > t_{\alpha}(v)$

其中，$v = \dfrac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_1 - 1} + \frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2 - 1}}$

(2) 成對樣本的母體平均數差的檢定



統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$\lvert T \rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0$	$T = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$T < -t_{\alpha}(n-1)$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0$	$T = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$	$T > t_{\alpha}(n-1)$

步驟**4**：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例7.6

例7.7

例7.8

例7.9

3. 單一母體之母體比例的檢定

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

	臨界值	決策法則
(1)雙尾檢定：$\begin{cases} H_0: P = P_0 \\ H_1: P \neq P_0 \end{cases}$	$c_1 = P_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{P}}$ $c_2 = P_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{P}}$	若 $\overline{P} \geq c_1$ 或 $\overline{P} \leq c_2$，則拒絕 H_0； 若 $c_2 < \overline{P} < c_2$，則接受 H_0。
(2)左尾檢定：$\begin{cases} H_0: P \geq P_0 \\ H_1: P < P_0 \end{cases}$	$c = P_0 - z_\alpha \cdot \sigma_{\overline{P}}$	若 $\overline{P} \leq c$，則拒絕 H_0； 若 $\overline{P} > c$，則接受 H_0。
(3)右尾檢定：$\begin{cases} H_0: P \leq P_0 \\ H_1: P > P_0 \end{cases}$	$c = P_0 + z_\alpha \cdot \sigma_{\overline{P}}$	若 $\overline{P} \geq c$，則拒絕 H_0； 若 $\overline{P} < c$，則接受 H_0。

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

- 抽樣分配是常態分配
- 顯著水準為多少

請依照單雙尾檢定畫圖說明

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。

(1)臨界值檢定（見上表）

在大樣本的情況下$(n\bar{p} \geq 5, n\bar{q} \geq 5)$，$\bar{P}$的抽樣分配為常態，且其平均數與標準誤分別為$\mu_{\bar{P}} = P$與$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

(2) Z檢定統計量

	檢定統計量	決策法則
(1) 雙尾檢定 $H_0: P = P_0$ $H_1: P \neq P_0$	$Z = \dfrac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}}$	若 $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或 $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$，則拒絕 H_0； 若 $-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$，則接受 H_0。
(2) 左尾檢定 $H_0: P \geq P_0$ $H_1: P < P_0$	同上	若 $z \leq -z_{\alpha}$，則拒絕 H_0； 若 $z > -z_{\alpha}$，則接受 H_0。
(3) 右尾檢定 $H_0: P \leq P_0$ $H_1: P > P_0$	同上	若 $z \geq z_{\alpha}$，則拒絕 H_0； 若 $z < z_{\alpha}$，則接受 H_0。

(3)信賴區間檢定

	母體比例之信賴區間	決策法則
(1) 雙尾檢定 $H_0: P = P_0$ $H_1: P \neq P_0$	$\left(\overline{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}, \overline{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}\right)$	若區間包含 P_0，則接受 H_0，反之，則拒絕 H_0。
(2) 左尾檢定 $H_0: P \geq P_0$ $H_1: P < P_0$	$\left(-\infty, \overline{P} + z_{\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}\right)$	同上
(3) 右尾檢定 $H_0: P \leq P_0$ $H_1: P > P_0$	$\left(\overline{P} - z_{\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}, \infty\right)$	同上

(4) P值法（見電腦報表）

步驟**4**：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例7.12

4. 兩個母體比例差的假設檢定

步驟**1**：設定虛無假設及對立假設。

(1) 雙尾檢定： $H_0: P_1 - P_2 = P_0$ ；
$H_1: P_1 - P_2 \neq P_0$

(2) 左尾檢定： $H_0: P_1 - P_2 \geq P_0$ ；
$H_1: P_1 - P_2 < P_0$

(3) 右尾檢定： $H_0: P_1 - P_2 \leq P_0$ ；
$H_1: P_1 - P_2 > P_0$

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

兩個母體比例差的抽樣分配為常態分配

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \sim N(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}})$$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$E(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = P_1 - P_2 = P_0$$

$$\sigma_{\bar{P}_1 - \bar{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。

檢定統計量與棄卻域

統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$	$Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$\lvert Z \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
$H_0: p_1 - p_2 \geq 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$	$Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$Z < -z_\alpha$
$H_0: p_1 - p_2 \leq 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$	$Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	$Z > z_\alpha$

P的混合估計值與估計標準誤

(1) $P_0 = 0$時，根據虛無假設 $H_0: P_1 - P_2 \begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix} 0$（分別為右尾、雙尾、左尾檢定），若取等號，則表示 $P_1 = P_2 = P$，亦即假想兩個母體的比例相同，因此需用比例 P 的**混合估計值**(pooled estimate of the proportion P)來估計此共同的母體比例，其為：

$$\overline{P} = \frac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2} \tag{10-24}$$

式中 X_1 與 X_2 分別是樣本 1 與 2 之成功的次數。於是，$\overline{P}_1 - \overline{P}_2$ 的估計標準誤為：

$$\sigma_{\overline{P}_1 - \overline{P}_2} = \sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_1} + \frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_2}} \tag{10-25}$$

(2) $P_0 \neq 0$時，表示 $P_1 \neq P_2$，此時不存在共同的母體比例，故 $\overline{P}_1 - \overline{P}_2$ 的估計標準誤為：

$$\sigma_{\overline{P}_1 - \overline{P}_2} = \sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1} + \frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}} \tag{10-26}$$

亦即，分別以 $\overline{P}_1$ 與 $\overline{P}_2$ 取代未知的母體比例 P_1 與 P_2。

步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例7.13

---

4. 單一母體之變異數的檢定

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

雙尾檢定：$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$，$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

左尾檢定：$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$，$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

右尾檢定：$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$，$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

抽樣分配為卡方分配

自常態母體隨機抽取大小為 n 的樣本，則：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

亦即 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 為自由度 $df = n-1$ 的卡方分配 (χ^2)。

母體分配	檢定統計量	抽樣分配
常態	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}
未知	無	無

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。

(1)方法一：臨界值法（拒絕域）

	臨界值		拒絕域
(1) 雙尾檢定 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	右端臨界值 $c_1 = \frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 左端臨界值 $c_2 = \frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$	(9-14) (9-15)	$S^2 \geq c_1$ 或 $S^2 \leq c_2$
(2) 左尾檢定 $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$c = \frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$	(9-16)	$S^2 \leq c$
(3) 右尾檢定 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$c = \frac{1}{n-1}\sigma_0^2\chi^2_{\alpha}(n-1)$	(9-17)	$S^2 \geq c$

(2)方法二：檢定統計量（卡方）

	檢定統計量	決策法則
(1) 雙尾檢定 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ (9-18)	若 $\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。
(2) 左尾檢定 $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	若 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。
(3) 右尾檢定 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	若 $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$，則拒絕 H_0；否則接受 H_0。

(3)方法三：信賴區間法

	信賴區間	
(1)雙尾檢定	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	(9-19)
(2)左尾檢定	$\left(-\infty, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$	(9-20)
(3)右尾檢定	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \infty\right)$	(9-21)

(4)方法四：P值

(1) 雙尾檢定：	右端：$\dfrac{1}{2}P$ 值 $= P(S^2 \geq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \geq \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$，若 $S_0^2 > \sigma_0^2$ 左端：$\dfrac{1}{2}P$ 值 $= P(S^2 \leq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \leq \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$，若 $S_0^2 < \sigma_0^2$	(9-22)
(2) 左尾檢定：	P 值 $= P(S^2 \leq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \leq \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$	(9-23)
(3) 右尾檢定：	P 值 $= P(S^2 \geq S_0^2 \mid \sigma_0^2) = P\left(\chi^2 \geq \dfrac{(n-1)S_0^2}{\sigma_0^2}\right)$	(9-24)

步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例7.10

5. 兩個母體變異數比的假設檢定

步驟1：設定虛無假設及對立假設。

(1) 雙尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\quad H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(2) 左尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$

$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\quad H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

(3) 右尾檢定：$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ 或 $H_0: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\quad H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

$\Rightarrow$ 拒絕 H_0 時，表示 $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

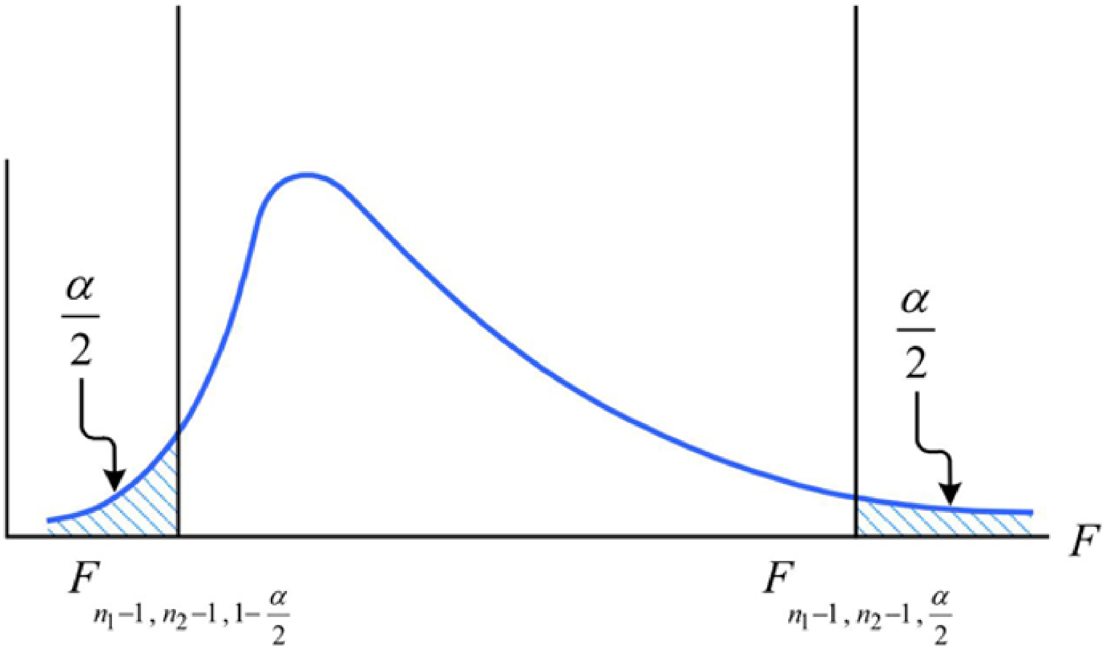
通常在進行兩組獨立樣本母體平均數比較之前，會先執行一個「檢查兩個母體之母體變異數是否相同」的檢定。

步驟2：確定抽樣分配並決定顯著水準。

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

當虛無假設為對時，則兩個母體的變異數為相等，而我們可以使用統計量F來做檢定

步驟3：找出合適的檢定統計量及所對應的棄卻域。



F 檢定決策法則

(1) 雙尾檢定：若 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1, df_2)$ 或 $F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0，反之則接受 H_0。

(2) 左尾檢定：若 $F \leq F_{1-\alpha}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0；反之則接受 H_0。

(3) 右尾檢定：若 $F \geq F_{\alpha}(df_1, df_2)$，則拒絕 H_0；反之則接受 H_0。

統計假設的配置法	檢定統計量	棄卻域
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F < F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$
$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$ $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

步驟4：依樣本觀測結果，判斷為棄卻或不棄卻虛無假設。

例7.11

---

6. 檢定力

檢定力(Power of test) 是當對立假設為真，我們拒絕虛無假設時所產生的機率。

檢定力 = P (棄卻虛無假設｜對立假設為真)

= 1- P (不棄卻虛無假設｜對立假設為真)

=1 – B

例7.14

Summary: 應用於統計推估的抽樣分配

A. 標準常態分配可估計母體參數 - 平均數、比例

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計兩個母體平均數差$\mu_1 - \mu_2$
3. 估計單一母體比例p
4. 估計兩個母體比例差$p_1 - p_2$

B. t分配可估計母體參數 - 平均數

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計兩個母體平均數差$\mu_1 - \mu_2$

C. 卡方分配可估計母體參數 - 變異數

1. 估計單一母體變異數σ^2或標準差σ。

D. F分配可估計母體參數 - 變異數比

1. 估計兩個母體變異數比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$或標準差比$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$。
