



CHAPTER | 9

變異數分析

1. 一個教育學者想要比較以三種不同的教學方法對學生學習數學的影響。他抽選了 30 個學生隨機分成三組來實驗，並將每個學生期末成績記錄下來。請分別說明此實驗中的「因子」、「處理」、「實驗單位」、「效果」及「反應值」所代表的意義。

解 因子：教學方法。

處理：三種不同的教學方法。

實驗單位：學生。

效果：不同的教學方法對學生學習數學的影響力。

反應值：每個學生期末成績。

2. 承上題的教學方法實驗，請說明：

(1)何為「組間變異」，何為「組內變異」？

(2)除了教學方法之外，可能還有哪些干擾因子會影響實驗反應值？

解 (1)組間變異：三種不同教學方法影響學生數學期末成績所造成的變異。

組內變異：每一種教學方法誘因下各有 10 個學生，這 10 個學生學習數學期末成績的差異即為組內變異。

(2)學生的年齡、體質、智力、平時的學習環境等因素，都可能影響學習數學的成績。

3. 承第 1 題，請說明實驗中關於「隨機性」與「重複性」的作法。

解 隨機性：將 30 個學生隨機分成三組，以求將其他干擾因素的影響力平均分配到各組之中，進而降低干擾因素對分析結果的可能誤導。

重複性：每一組中有 10 個學生，即有 10 個重複(replications)。

4. (1)某社會科學學者蒐集了 300 個婦女的資料，依照她們的教育程度分成國小、國中、高中職及大專以上四類，並且希望研究教育程度與結婚年齡之間的關係。請說明這組資料是觀察性資料還是實驗性資料。

(2)請各舉一例說明「觀察性資料」與「實驗性資料」的特質。

解 (1)這組資料是「觀察性資料」，因為分析者並未控制其他諸如家庭背景、身高、體重、居住地區等干擾因素。

(2)觀察性資料例子：記錄已經發生車禍的機車騎士是否配戴安全帽。

實驗性資料例子：將 100 隻健康條件相似的老鼠隨機分成兩組，餵食兩種不同食品，並飼養在相同的環境，半年後測量體重增加量。

5. 某手機電池工廠有三種不同製程，他們想知道三種製程下所製造的電池電力耗盡時間是否有所差別，所以從三種製程中各挑出 5 個電池，並記錄完成電力耗盡時間（小時）如下：

A 製程：6.0 8.5 7.3 5.9 8.2

B 製程：9.0 8.8 7.6 8.1 7.0

C 製程：6.0 6.3 9.2 7.1 9.8

- (1) 請求出這組資料的 ANOVA 表。
 (2) 檢定三種製程對電池耗盡時間的影響是否有顯著差異。(顯著水準為 0.05)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方	F 檢定值
製程	2	2.12	1.06	0.62
隨機誤差	12	20.46	1.70	
總變異	14	22.58		

$F = 0.62 < F_{0.05}(2, 12) = 3.89$ ，不棄卻虛無假設，三種製程無顯著差異。

6. 某洋芋片食品公司想知道一種新推出的洋芋片，在北、中、南地區的三家分店的平均銷售量是否有所不同。他們在這三家分店各記錄 5 天、6 天及 4 天的銷售量，資料如下：(單位：包)

北區分店：10, 13, 14, 16, 17

中區分店：5, 8, 10, 11, 12, 14

南區分店：6, 8, 9, 13

- (1) 請求出這組資料的 ANOVA 表。
 (2) 檢定三個地區的平均銷售量是否有顯著差異。(顯著水準為 0.1)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方	F 檢定值
地區	2	66.93	33.47	3.79
誤差	12	106.00	8.83	
總變異	14	172.93		

$F = 3.79 < F_{0.1}(2, 12) = 2.81$ ，棄卻虛無假設，三地的平均銷售量有顯著差異。

7. 為了比較三種不同的電腦程式教學法，某高中將 30 個成績相似的學生隨機分成三組教學，經過三個月後考試成績如下：

A：88 79 82 91 71 70 66 77 56 68

B：78 70 86 85 74 65 68 80 47 56

C：72 74 89 82 70 58 72 72 45 60

- (1) 請求出這組資料的 ANOVA 表。
 (2) 檢定三種教學方法是否有顯著差異。(顯著水準為 0.05)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方	F 檢定值
數學方法	2	155	78	0.55
誤差	27	3,831	142	
總變異	29	3,986		

$F = 0.55 < F_{0.1}(2, 27) = 2.57$ ，不棄卻虛無假設，三種教學方法無顯著差異。

8. 以下是某國在過去五年，進口各項民生用品的總金額：（單位：百萬美元）

石油：2.1 2.5 2.6 2.1 3.5

飲料：5.6 6.2 7.8 6.8 5.4

建材：1.5 1.0 1.8 1.9 1.7

電腦：4.5 4.2 4.1 4.6 4.2

(1) 請求出這組資料的 ANOVA 表。

(2) 檢定四種民生用品的每年平均進口總額是否有顯著差異。（顯著水準為 0.05）

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方	F 檢定值
用品類別	3	66.270	22.090	60.94
誤差	16	5.800	0.362	
總變異	19	72.07		

$F = 60.94 < F_{0.05}(3, 16) = 3.24$ ，棄卻虛無假設，四種民生用品的平均進口總額有顯著差異。

9. 請算出第 6 題的多重 t 及 Scheffe 聯合信賴區間，並做比較。（顯著水準為 0.1）

解

多重 t 信賴區間

$$S = \sqrt{8.83} = 2.97$$

$$\frac{\alpha}{(2 \times 3)} = \frac{0.1}{6} = 0.0167$$

$$t_{0.0167}(15-3) = 2.402$$

$$\mu_1 - \mu_2 : \left(4 - 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}, 4 + 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} \right) = (-0.319, 8.319)$$

$$\mu_1 - \mu_3 : \left(5 - 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}, 5 + 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} \right) = (0.215, 9.785)$$

$$\mu_2 - \mu_3 : \left(1 - 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}, 1 + 2.402 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} \right) = (-3.605, 5.605)$$

信賴區間

$$F_{0.1}(2, 12) = 2.81$$

$$\sqrt{(3-1)F_{0.1}(2, 12)} = \sqrt{2 \times 2.81} = 2.371$$

$$\mu_1 - \mu_2 : \left(4 - 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}, 4 + 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} \right) = (-0.264, 8.264)$$

$$\mu_1 - \mu_3 : \left(5 - 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}, 5 + 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} \right) = (0.276, 9.724)$$

$$\mu_2 - \mu_3 : \left(1 - 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}, 1 + 2.371 \times 2.97 \times \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} \right) = (-3.546, 5.546)$$

北區分店與南區分店有顯著差異。

10. 請算出第 8 題的多重 t 及 Scheffe 聯合信賴區間，並做比較。(顯著水準為 0.1)

解 多重 t 信賴區間

$$S = \sqrt{0.362} = 0.602$$

$$\frac{\alpha}{(2 \times 6)} = \frac{0.05}{12} = 0.00417$$

$$t_{0.00417}(20-4) = 3.008$$

$$\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 0.632$$

$$\mu_1 - \mu_2 : (-3.08 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, -3.08 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (-4.994, -2.356)$$

$$\mu_1 - \mu_3 : (-0.98 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, -0.98 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (-2.124, 0.464)$$

$$\mu_1 - \mu_4 : (-1.76 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, -1.76 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (-2.904, -0.316)$$

$$\mu_2 - \mu_3 : (4.78 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, 4.78 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (3.636, 6.224)$$

$$\mu_2 - \mu_4 : (2.04 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, 2.04 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (0.896, 3.484)$$

$$\mu_3 - \mu_4 : (-2.74 - 3.008 \times 0.602 \times 0.632, -2.74 + 3.008 \times 0.602 \times 0.632) = (-3.884, -1.296)$$

信賴區間

$$F_{0.05}(3, 16) = 3.24$$

$$\sqrt{(4-1)F_{0.05}(3, 16)} = \sqrt{3 \times 3.24} = 3.118$$

$$\mu_1 - \mu_2 : (-3.08 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, -3.08 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (-4.987, -2.613)$$

$$\mu_1 - \mu_3 : (-0.98 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, -0.98 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (-2.207, 2.167)$$

$$\mu_1 - \mu_4 : (-1.76 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, -1.76 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (-2.947, -0.573)$$

$$\mu_2 - \mu_3 : (4.78 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, 4.78 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (3.593, 5.967)$$

$$\mu_2 - \mu_4 : (2.04 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, 2.04 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (0.853, 3.227)$$

$$\mu_3 - \mu_4 : (-2.74 - 3.118 \times 0.602 \times 0.632, -2.74 + 3.118 \times 0.602 \times 0.632) = (-3.927, -1.553)$$

11. 請使用例 9.14 的廣告資料檢定：

(1) 不同的廣告效果是否有顯著差異。

(2) 不同年齡層是否會影響消費者購買意願。(顯著水準為 0.1)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方
廣告	2	758.3	379.2
年齡	1	352.7	352.7
誤差	2	72.3	36.2
總變異	5	1,183.3	

$$(1) F_1 = \frac{379.2}{36.2} = 10.48 > F_{0.1}(2, 2) = 9.0, \text{ 棄卻 } H_0。$$

$$(2) F_2 = \frac{352.7}{36.2} = 9.74 > F_{0.1}(1, 2) = 8.53, \text{ 棄卻 } H_0。$$

12. 請使用例 9.15 的微積分教學資料檢定：

(1) 不同教學法之間是否有顯著差異。

(2) 不同地區的學生是否在學習上有顯著差異。(顯著水準為 0.05)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方
教學法	2	458.7	229.3
地區	2	4.7	2.3
誤差	4	62.7	15.7
總變異	8	526.0	

$$(1) F_1 = \frac{229.3}{15.7} = 14.16 > F_{0.05}(2, 4) = 6.94, \text{ 棄卻 } H_0。$$

$$(2) F_2 = \frac{2.3}{15.7} = 0.146 < F_{0.05}(2, 4) = 6.94, \text{ 不棄卻 } H_0。$$

13. 某化妝品公司想比較新型化妝品的三種包裝是否有影響銷售量。他們記錄了四家百貨專櫃，在過去一週的銷售量如下：

專櫃 包裝	北區	中區	南區	東區
A	300	400	180	240
B	420	460	380	500
C	180	260	400	360

- (1) 檢定不同包裝對銷售量的影響是否有顯著差異。
 (2) 檢定不同專櫃的銷售量的影響是否有顯著差異。(顯著水準為 0.1)

解

ANOVA 表

變異來源	自由度	平方和	均方
包裝	2	60,800	30,400
專櫃	3	11,467	3,822
誤差	6	52,533	8,756
總變異	11	124,800	

$$(1) F_1 = \frac{30,400}{8,756} = 3.472 > F_{0.1}(2, 6) = 3.46, \text{ 棄卻 } H_0。$$

$$(2) F_2 = \frac{3,822}{8,756} = 0.437 < F_{0.1}(3, 6) = 3.29, \text{ 不棄卻 } H_0。$$

14. 請用 Kruskal-Wallis 檢定重新分析第 5 題（手機電池製程）資料。

解

$$n = 15, k = 3$$

$$R_1 = 2.5 + 11 + 7 + 1 + 10 = 31.5 \text{ (製程 A)}$$

$$R_2 = 13 + 12 + 8 + 9 + 5 = 47 \text{ (製程 B)}$$

$$R_3 = 2.5 + 4 + 14 + 6 + 15 = 41.5 \text{ (製程 C)}$$

$$H = \frac{12}{15(15+1)} \sum_{i=1}^3 \frac{R_i^2}{5} - 3(15+1) = 0.05 \times 984.7 - 48 = 1.235$$

$$H = 1.235 < \chi_{0.05}^2(3-1) = 5.991$$

\Rightarrow 不拒絕 H_0 ，A、B、C 三個製程沒有顯著差異。

15. 請用 Kruskal-Wallis 檢定重新分析第 8 題（各類民生用品）資料。

解

$$n = 20, k = 4$$

$$R_1 = 6.5 + 8 + 9 + 6.5 + 10 = 40 \text{ (石油)}$$

$$R_2 = 17 + 18 + 20 + 19 + 16 = 90 \text{ (飲料)}$$

$$R_3 = 2 + 1 + 4 + 5 + 3 = 15 \text{ (建材)}$$

$$R_4 = 14 + 12.5 + 11 + 15 + 12.5 = 65 \quad (\text{電腦})$$

$$H = \frac{12}{20(20+1)} \sum_{i=1}^4 \frac{R_i^2}{5} - 3(20+1) = 0.0286 \times 2,830 - 63 = 17.938$$

$$H = 17.938 > \chi_{0.05}^2(4-1) = 7.815$$

\Rightarrow 拒絕 H_0 ，四種民生用品的進口總額有顯著差異。