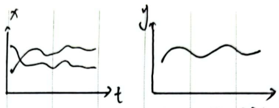
状态空间表达式的解

- **为什么**
  - 表征系统随时间的演变：
  - 后续章节的理论基础
    - 定性分析：稳定性、能控性、能观性
    - 定量分析：曲线、测试响应
    - 离散化
- **是什么**
  - 齐次状态方程的解：$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 状态演变受初始状态影响，无外力 $x(t) = f(x_0, 0)$
    - 级数展开法 $\begin{cases} b_1 = Ab_0 \\ b_2 = \frac{1}{2!}A^2 b_0 \\ \vdots \\ b_k = \frac{1}{k!}A^k b_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-t_0)^k x(t_0) = e^{A(t-t_0)} x(t_0)$ $\left[e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} \right]$
  - 非齐次状态方程的解 $x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x(t_0)}_{X_{0u}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau}_{X_{0x}}$
- **怎么算**
  - ☆ 求解状态转移矩阵 $x(t) = \Phi(t-t_0) x(t_0)$ 给定任意时刻的状态，可求其它所有时刻状态。
  - 性质
    - ①：$\Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t+\tau)$
    - ②：$\Phi(t-t) = I$
    - ③：$[\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t)$
    - ④：$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$
  - 求解：
    - ① 无穷级数定义 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t-t_0)^k$
    - ② 基于坐标变换 $A \xrightarrow{x=Tz} \bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$ $\downarrow$ $e^{At} = T e^{\bar{A}t} T^{-1} \longleftarrow e^{\bar{A}t} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_n t} \end{bmatrix}$
    - ③ 基于拉氏变换 $\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \to (sI-A)X(s) = X_0$, $X(s) = (sI-A)^{-1} X_0$ $\Downarrow$ $x(t) = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]X_0 \Rightarrow e^{At} = L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$
    - ④ 基于哈密顿定理 $\sum_{k=0}^{\infty}[\,] \to \sum_{k=0}^{n-1}[\,]$

231216

王愉杰