

多波束测深系统路线优化设计

摘要

本文从分析多波束测深系统测线在不同测线方向下的覆盖效果出发,得出平行于坡面等高线的测线的覆盖效果最佳的结论,基于该结论对简单坡面地形海域和复杂曲面地形海域的测量路线进行设计,对海洋探索领域具有一定意义。

针对问题一:由于测量船的测线和海底坡面的等高线平行,进行测深时可认为等深测量,即在每条测线上测量船距海底深度一致,在分析问题,可研究测量船在测线上某一点时波束的发射情况,将其转化为二维平面的几何问题分析,结合平面几何的相关知识,分析各参数(换能器开角 θ 、水深 D 、海底坡面坡度 α)与覆盖宽度 W 以及重叠率 η 之间的关系,进而建立覆盖宽度 W 和重叠率 η 的数学模型,并将题目所给各参数的具体数值带入模型中进行求解,详细结果见下文表2。

针对问题二:本问探究了测线的方向不断变化时,覆盖宽度的变化情况,分析过程中,结合空间立体几何的知识,研究了相关平面之间的关系,找出波束平面与海底坡面的交线 L 的方向向量,得到其与水平面的夹角后将原本的空间立体几何问题转变为问题一中二维平面的几何问题,在此过程中,对测线夹角的特殊值单独进行讨论。最终基于问题一中覆盖宽度的数学模型在本问中建立覆盖宽度关于测线方向夹角和测量船距海域中心点的距离 s 的数学模型,然后将题目所给参数的具体数值代入模型当中进行求解,下详细结果见下文表3。

针对问题三:本问要求设计一组总长度最短的测线,使其完全覆盖待测海域且重叠率满足10%—20%之间。因此本文以测线长度最短为目标函数,以完全覆盖待测海域、重叠率符合要求作为约束条件,建立单目标优化模型,然后结合问题二的分析结果证明测线平行于等高线时覆盖效果最佳,故在此布线准则上,将重叠率控制在10%设计出一组总长度最短的测线。

针对问题四:本问要求利用所给数据设计一组多波束测量测线,满足所给条件。本文首先将数据可视化,模拟出海底地形的三维立体图,基于问题三中的分析结果可知,测线方向沿坡面等高线时的测量效果最佳,观察三维立体图发现本问海底地形呈现不规则起伏状态,故采取分而治之的思想,根据地形等高线的分布情况对矩形海域进行划分,将划分后的每个曲面拟合为平面,针对每个平面分别设计沿等高线的一组测线,使其测线总长度最短,并尽可能地覆盖整个待测海域同时保证相邻条带间的重叠率在20%以下,漏测率尽可能的低。

关键词: 等高线, 空间立体几何, 单目标优化模型, 分而治之, 拟合

一、问题重述

1.1 问题背景

测量海水深度时可根据声波在水中的传播特性利用单波束测深法进行探测,但由于该方法测深数据分布具有沿航迹数据密集、测线间缺少数据的特点,不利用海面测距。故在此基础上发展多波束测深系统,该系统成功克服了单波束测深的缺点,在海底平坦的海域内,能够测量出以测量船测线为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。但真实海底地形起伏变化较大,容易出现漏测或测量效率较低等情况。因此研究海底起伏变化的地形对多波束测深系统的测量影响有重要意义。

1.2 问题重述

本文主要致力解决四个问题,通过建立数学模型对问题进行分析。

问题一：平面几何分析，求解数据

海底坡面和与测线方向垂直的平面的交线形成一条与水平面夹角为 α 的斜线,该夹角称为坡度。建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。根据所给数据,利用上述模型计算表 1 中所列位置的指标值。

问题二：空间解析几何，求解数据

考虑矩形的待测海域,海底坡面的法向在水平面上投影与测线方向的夹角为 β ,建立多波束测深覆盖宽度的数学模型,并根据所建模型对所给数据进行计算。

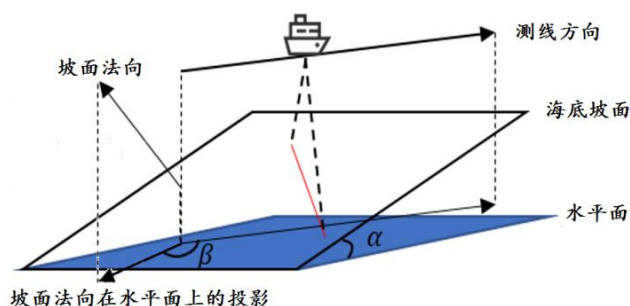


图 1 问题二示意图

问题三：测深策略设计

根据所给矩形海域及多波束换能器的数据,设计一组测线,使其长度最短、并完全覆盖整个待测海域,且测线相邻条带之间的重叠率处于 10%~20%之间。

问题四：分析数据，策略设计

根据所给附件信息，对多波束测量船的测量布线进行设计，使得沿测线扫描形成的条带尽可能地覆盖整个待测海域，相邻条带之间的重叠率尽量控制在 20% 以下，且测线的总长度尽可能短。设计完成后计算出测线总长度、漏测区域面积占总待测区域面积的百分比以及重叠率超过 20% 部分的测线总长度。

二、模型假设

1. 假设测量船在测深时不驶出矩形海域；
2. 假设测量船在转换测线过程中的行驶距离不计入测线长度；
3. 假设外界因素（如风速）不会使测量船产生水平或竖直方向上的抖动；
4. 假设多波束测深系统工作时不会产生故障，影响数据的准确性和连续性；
5. 假设问题四中计算重叠率时，相邻区域是被完全扫描过的。

三、问题分析

3.1 问题一分析

本问中，由于测量船的测线和海底坡面的等高线平行，进行测深时可认为等深测量，即在每条测线上测量船距海底深度一致，在分析问题时，可研究测量船在测线上某一点时波束的发射情况，将其转化为二维平面的几何问题分析，进而得到各参数（换能器开角 θ 、水深 D 、海底坡面坡度 α ）与覆盖宽度 W 以及重叠率 η 之间的关系。

3.1.1 第一小问

本问要求建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。测量船在测线上进行测量时，在同一条测线上不同位置所测得距海底深度、覆盖宽度等数据相同，故可针对船在某一点时的测量过程进行二维平面的几何分析。结合三角函数公式，根据换能器开角 θ 和水深 D 分别求出测量船左右两侧发射的波束达到海底坡面时距离测量船竖直方向上在海底坡面得到的投影点的最远距离，两者之和即为波束在海底坡面上的测量距离范围，在水平方向上的投影即为该次测量的覆盖宽度 W 。

3.1.2 第二小问

本小问给出了多波束换能器的开角 θ 、海底坡面坡度 α 以及海域中心点处的海水深度 D 的具体数据。由于题目中以海域中心为中心原点，故本问规定以坡面高度上升的方向为正方向，破面高度下降的方向为负方向，通过几何关系求出不同位置处的海水深度 D ，利用上述所建数学模型代入各参数通过 Python 求出测量船处于海面不同位置时所测得的覆盖宽度 W 以及该条测线与前一条测线的重叠率 η 。

3.2 问题二分析

本问中，由于测量船的测线方向与坡面的法线在水平面上的投影存在夹角 β ，故在测线上不同位置处的覆盖宽度可能不相等，不同于问题一的二维平面分析，本问属于空间解析几何，建立空间直角坐标系，利用直线方程描述各线和面，研究各面、各线之间的关系，寻找覆盖宽度的表达式。

3.2.1 第一小问

本问在建立多波束测深覆盖宽度的数学模型时，要考虑夹角 β 的存在对覆盖宽度的影响。由于覆盖宽度位于坡面与测量船发射的波束形成的平面二者的交线上，通过该直线刻画测量船测深时波束的发射分布情况，平面示意图如下所示：

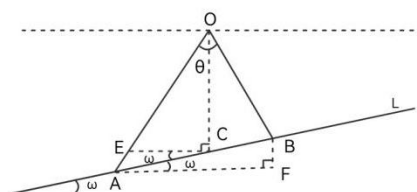


图 2 覆盖宽度平面示意图

其中 ω 为直线 L 与水平面的夹角，结合问题一分析结果，即可得到覆盖宽度的表达式。

首先以海域中心点对应的海底坡面上的点为原点，正南方向为 X 轴正方向，正东方向为 Y 轴正方向，竖直向上为 Z 轴正方向，建立空间直角坐标系，当夹角 β 为 0° 、 90° 、 180° 、 270° 时 $\tan \beta$ 为 0 或不存在，故不能直接建立平面方程或直线方程，本文在此对其进行分情况讨论：

1. 当 $\beta \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 时, 由已知条件可描述海底坡面和侧面与其投影所形成平面的平面方程, 而二者交线 L' 即为测量船测深过程中测量船位置对应海底坡面上的点所形成的直线, 根据几何知识可得到海水深度 D 、直线 L' 与水平面的夹角 ϕ 以及测量船距海域中心点处的距离 s 的关系。同时由于测线 L_0 方向向量即为波束平面的法向量, 根据海底坡面的法向量与波束平面的法向量可得到直线 L 的方向向量, 进而得到直线 L 与水平面的夹角 ω , 最终结合问题一分析结果得出此情况下覆盖宽度的表达式。
2. 当 $\beta = 0^\circ$ 或 180° 时, 测线垂直于海底坡面与水平面的交线, 直线 L' 在水平面上的投影与 Y 轴重合, 此时 L' 与水平面夹角 ϕ 即为海底坡面坡度 α , 测量船左右两侧发射的波束探测到的覆盖宽度相同, 根据几何关系可得到覆盖宽度 W 与测量船位置处的海水深度 D 的关系式、海水深度 D 、直线 L' 与水平面的夹角 ϕ 以及测量船距海域中心点处的距离 s 的关系, 二者综合即可得到此情况下覆盖宽度 W 的数学模型。
3. 当 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时, 测线平行于海底坡面与水平面的交线, 与问题一中模型相同, 根据问题一分析结果可直接得出结论。

3.2.2 第二小问

本问中, 测量船以海域中心为起点, 朝不同方向进行测深 (β 角决定测线方向), 将换能器开角 θ 、坡度 α 、海域中心点处海水深度 D_0 、测量船距海域中心点处的距离以及测线方向夹角 β 等参数代入上述所建立模型进行求解, 得到最终结果。

3.3 问题三分析

本问要在所给海域内设计一组测量长度最短并能完全覆盖整个海域的测线, 同时保证相邻条带间重叠率在 $10\% \sim 20\%$ 之间, 本文以测量长度为目标函数, 测量区域覆盖整个海域、相邻条带间的重叠率约束范围、最长测线长度不得超过矩形内最长线段为约束条件, 过程较为复杂, 因约束条件较为泛化, 直接求解最优结果过程较为复杂, 结合问题二的求解结果分析测线组整体的平行曲折关系对测量效果的影响, 寻找最优的测线关系, 进而在此范围内求取最优参数, 最终得到最优的测线设计方案。

3.4 问题四分析

本问给出了一矩形海域单波束测量的测深数据,要求利用该数据设计一组多波束测量测线,满足所给条件。本文首先将附件所给数据进行可视化,模拟出海底地形的三维立体图,基于问题三中的分析结果可知,测线方向沿坡面等高线时的测量效果最佳,观察三维立体图发现本问海底地形呈现不规则起伏状态,故本文采取分而治之的思想,根据地形等高线的分布情况对矩形海域进行划分,将划分后的每个曲面拟合为易于求解的平面,针对每个平面分别设计沿等高线的一组测线,使其测线总长度最短,并尽可能地覆盖整个待测海域同时保证相邻条带间的重叠率在 20% 以下,漏测率尽可能的低。

四、符号说明

符号	意义
W	覆盖宽度
θ	换能器开角
α	海底坡面坡度
D	海水深度
d	两相邻测线间的水平间距
l	两条测线的覆盖宽度的重叠部分长度
β	测线与坡面法向量在水平面上的投影的夹角
ϕ	测线及其在水平面上的投影所形成平面与坡面交线与水平面的夹角
s	测量船距海域中心点的水平距离
ω	波束平面与破面的交线与水平面的夹角
L_i	第 i 条测线的长度
$A(L_i)$	第 i 条测线的覆盖区域
Ω	第三问中整个待测矩形海域
L_M	第三问中待测矩形海域对角线长度
φ	第四问中拟合平面与水平面的夹角

x	一条测线上重叠率超过 20%部分的长度
X	一个区域内重叠率超过 20%部分的总长度

五、问题一模型的建立与求解

本问中，测量船的测线和海底坡面与水平面的交线平行，即测量船在一条测线上测量的正下方的海底深度是相同的。即可取测量船位于某一位置时波束发射情况进行二维平面几何分析。

5.1 多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型的建立

5.1.1 覆盖宽度的模型建立

对测量船在测线上某一位置时进行平面几何关系分析，分析示意图如下：

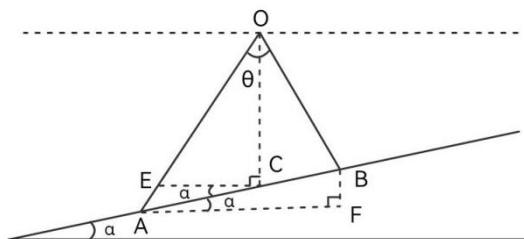


图 3 覆盖宽度平面示意图

由图可知，多波束测深的覆盖宽度 W 即为线段 AB 在水平面上的投影 AF ，即：

$$W = AF = AB \cdot \cos \alpha$$

其中， AB 为海底坡面接收到波束的长度范围， α 为海底坡面坡度。

以测量船正下方所对应的海底坡面上的点 C 为界限可将 AB 分为两部分：

1. AC ，为坡面接收到测量船发射的左侧部分的波束的长度范围。
2. BC ，为坡面接收到测量船发射的右侧部分的波束的长度范围。

其中，对于 AC ，结合正弦定理可知线段 AC 满足如下关系：

$$\frac{AC}{\sin \angle AOC} = \frac{OC}{\sin \angle OAC}$$

其中， OC 为测量船所在位置的海水深度 D ， $\angle AOC = \frac{\theta}{2}$ ，

$\angle OAC = \pi - \angle AEC - \angle ACE$ ，结合平行线的相关知识可知 $\angle ACE = \alpha$ ，由三角形外角定理可知：

$$\angle AEC = \angle AOC + \angle OCE = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

整合上述关系式可得：

$$AC = D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

类比可知，对于 BC，有：

$$\frac{OC}{\sin \angle OBC} = \frac{BC}{\sin \angle BOC}$$

其中， $\angle BOC = \frac{\theta}{2}$ ， $\angle OBC = \pi - \angle OAB - \angle BAO = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha$ ，故可得：

$$BC = D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)}$$

综上所述，最终可得多波束测深的覆盖宽度 W 的关系式为：

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \right]$$

5.1.2 相邻条带之间重叠率的模型建立

由题目定义可知，当测线之间相互平行且海底地形平坦时，则相邻条带之间的重叠率定义为： $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ ，其中， d 为相邻两条测线的间距， W 为前一条测线的覆盖宽度，示意图如下所示：

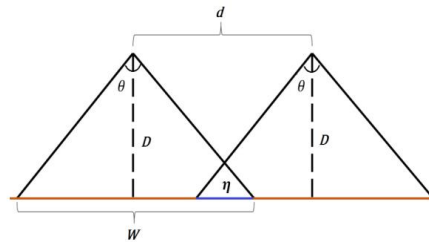


图 4 重叠率定义示意图

由图可知， $\eta = 1 - \frac{d}{W} = \frac{W-d}{W}$ ，由几何关系可知 $W-d$ 即为两条相邻带之间重叠部分长度，本文定义该部分长度为 l 。

由题目定义可知该公式成立前提条件为测线之间相互平行且海底地形平坦，此条件保证了每条测线上的覆盖宽度为一个定值，且两相邻条带在不同位置处重叠部分相同，从而能够计算两条相邻带的重叠率。

在本问中，虽然海底呈一个坡面，但测量船的测线和海底坡面与水平面的交线平行，导致每条测线上不同位置处的覆盖宽度相同，故仍能遵守其条件约束，使用该公式进行计算。相邻条带间覆盖宽度的重叠情况具体示意图如下所示：

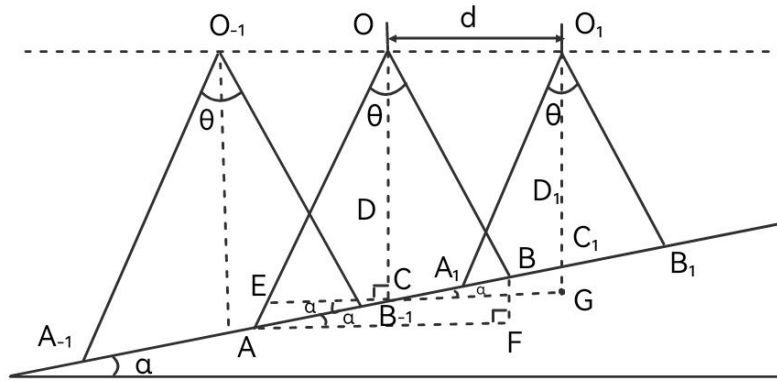


图 5 相邻条带间覆盖宽度的重叠情况具体示意图

由图可知，分别经过点 O 、 O_1 的两条测线的覆盖宽度的重叠部分长度 l 为线段 A_1B 在水平方向上的投影，始终保持不变：

$$l = A_1B \cdot \cos \alpha$$

故可知两条带之间的重叠率 η 的表达式为： $\eta = \frac{l}{W}$ ，其中， W 为经过点 O 的测线的覆盖宽度 AF 。

因为 l 为两条带覆盖宽度的重叠部分，由线段间的组合关系可知：

$$l = A_1B \cdot \cos \alpha = (BC + A_1C_1 - CC_1) \cdot \cos \alpha$$

其中， $CC_1 = \frac{d}{\cos \alpha}$ ，由上述建立的覆盖宽度模型可知：

$$BC = D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)}$$

$$A_1C_1 = D_1 \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

整理上述表达式可得 l 的表达式为：

$$l = \left(D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + D_1 \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} - \frac{d}{\cos \alpha} \right) \cdot \cos \alpha$$

同时由上述对覆盖宽度 W 的建模可知：

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \right]$$

将 l 与 W 的表达式代入 $\eta = \frac{l}{W}$ 中可得 η 最终表达式为：

$$\eta = \frac{\left[D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + D_1 \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} - \frac{d}{\cos \alpha} \right]}{D \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \right]}$$

5.1.3 小结

综上所述，通过几何分析、三角函数等数学知识具体分析探测船在海底为坡面进行测深时波束的发射情况建立了覆盖宽度与相邻条带之间重叠率的数学模型：

覆盖宽度 W 的数学模型

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \right]$$

相邻条带之间重叠率 η 的数学模型：

$$\eta = \frac{\left[D \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} + D_1 \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} - \frac{d}{\cos \alpha} \right]}{D \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \right]}$$

5.2 模型求解

本问给出了换能器开角 θ 以及海底坡面的坡度 α 的具体数值，同时给出了海域中心点处的海水深度 D_0 以及相邻两测线间距 $d = 200m$ ，由于题目表示测量船在不同位置时选择以此点到海域中心的距离为标准，且数值带有正负，故在本问中以海域中心点为中心原点，规定以坡面高度上升的方向为正方向，破面高度下降的方向为负方向，在此基础上，通过几何关系可求出两条测线上相邻位置处的海水深度的关系，结合上述建立模型，进一步可得出条带覆盖宽度和与前一条测线的重叠率的结果。

5.2.1 不同位置处海水深度的求解

对两条侧线相邻位置处两点的海水深度进行几何分析，分析示意图如下所示：

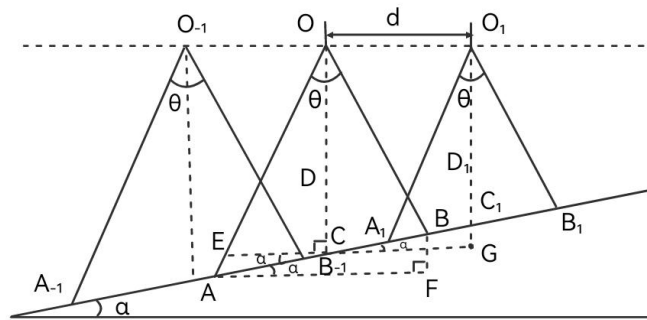


图 6 相邻条带间覆盖宽度的重叠情况具体示意图

由图可知，点 O、O₁ 处海水深度分别对应线段 OC、O₁C₁，由几何关系可知：

$$O_1C_1 = OC - C_1G$$

其中， $C_1G = CG \cdot \tan \alpha = d \cdot \tan \alpha$ ，故整理上式可得：

$$D_1 = D - d \cdot \tan \alpha$$

同理，对于 O 点右侧点处的海水深度 D_{-1} 有：

$$D_{-1} = D + d \cdot \tan \alpha$$

依照上述两个公式，以此求得不同位置处的海水深度 D ，结果展示如下：

表 1 结果展示

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513

5.2.2 对覆盖宽度和重叠率的求解

结合上文所建立的覆盖宽度以及相邻条带之间重叠率的数学模型，将换能器开角 $\theta = 120^\circ$ 、海底坡面坡度 $\alpha = 1.5^\circ$ 以及前文求解出的海面不同位置处的海水深度 D ，代入模型中利用 Python 进行求解，计算结果展示如下：

表 2 求解结果展示

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	315.705	297.526	279.346	261.167	242.987	224.807	206.628	188.448	170.269

与前一条测线 的重叠率/%	—	33.64	29.59	25.27	19.78	13.78	6.81	-1.39	-11.17
------------------	---	-------	-------	-------	-------	-------	------	-------	--------

六、问题二模型的建立与求解

与第一问不同，本问中测量船的测线方向与坡面的法线在水平面上的投影存在夹角 β ，导致测线上不同位置处的覆盖宽度可能不相等，因此需建立空间直角坐标系研究各平面、各直线之间的关系，通过分析空间解析几何问题得到波束平面与海底坡面的交线与水平面的夹角，将原本的三维空间问题转换为问题一中的二维平面几何问题，利用问题一中结论得到结果，同时考虑到当 β 为一些特殊值时，导致不能正常建立平面的平面方程和直线的直线方程，需另作讨论。

6.1 建立覆盖宽度的数学模型

6.1.1 整体分析思路

覆盖宽度所在直线 L 为多波束平面与海底坡面的交线，当得到直线 L 与水平面的夹角 ω 时，可将此空间几何问题转变为问题一中的问题模型进而得到结果。

首先，当 β 为普通值时（可正常建立平面方程和直线方程），通过建立空间直角坐标系，由已知条件可得到测线 L_0 的直线方程，而 L_0 的方向向量即为波束平面的法向量，结合海底坡面的法向量与波束平面的法向量可得到两平面交线 L 与水平面的夹角 ω ，同时根据海底坡面与测线及其投影所形成的平面得到两平面交线 L' （测量船测深过程中测量船位置对应海底坡面上的点所形成的直线）及其与水平面夹角 ϕ ，研究图形的几何关系可得到海水深度 D 与夹角 ϕ 和测量船距海域中心点距离 s 的关系，最后在问题一基础上得到此情况下覆盖宽度 W 的数学模型。

当 β 为特殊值（ 0° 、 90° 、 180° 、 270° ）时，具体考虑测线方向与海底坡面关系，结合几何图形知识研究覆盖宽度 W 与各参数的具体关系

6.1.2 坐标原点的选择

在问题求解过程中，需描述各平面的平面方程并分析测量船位置处海水深度 D 与直线 L' 与水平面夹角 ϕ 和测量船距海域中心点距离 s 的关系。

首先若坐标原点不在海底坡面上，则在描述平面方程时需考虑截距问题，处理过程较为复杂。

其次，若以矩形海域的四个顶点中的某一个作为原点，由于建模过程中矩形海域的长宽数据不知，测线 L_0 的直线方程不便于建立，同时复杂化了参数 D 、 ϕ 以及 s 三者关系的分析过程。

而以海域中心点对应的海底坡面上的点作为空间直角坐标系原点时，便于对各平面及直线的描述，同时简化了参数关系的分析过程，故最终选择该点作为坐标系原点。

6.1.3 空间解析几何分析

以海域中心点对应的海底坡面上的点为原点，正南方向为 X 轴正方向，正东方向为 Y 轴正方向，竖直向上为 Z 轴正方向，建立空间直角坐标系，具体示意图如下所示：

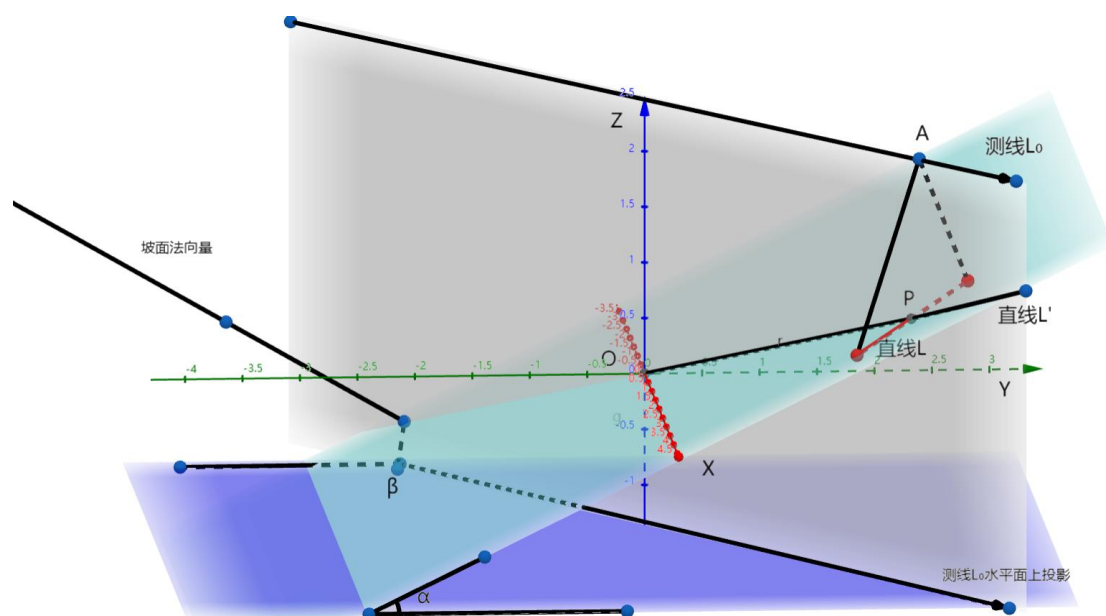


图 7 问题 2 三维示意图

如图所示， O 点为坐标原点，即海域中心点对应的海底坡面上的点，则海域中心点 Z 的

坐标为 $(0,0, D_0)$ ，点 A 为测量船的位置。海底坡面坡度为 α ，故海底坡面的平面方程为：

$$y \cdot \tan \alpha - z = 0$$

由平面方程可知，其存在法向量 $\mathbf{p}_1 = (0, -\tan \alpha, 1)$ 。

由于 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时， $\tan \beta$ 无意义，故分情况讨论：

1. 当 $\beta \neq 90^\circ$ 或 270° 时

测线 L_0 与其在水平面上的投影所形成的平面方程为：

$$x + y \cdot \tan \beta = 0$$

由平面方程可知，其存在法向量 $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{1}{\tan \beta}, 1, 0 \right)$ 。

由于当 $\beta = 0^\circ$ 或 180° ，法向量 \mathbf{p}_2 无意义，因此进一步分情况讨论：

① 当 $\beta \neq 0^\circ$ 或 180° 时

假设直线 L' 的方向向量为 \mathbf{l}' ，则有方程组：

$$\begin{cases} \mathbf{l}' \cdot \mathbf{p}_1 = 0 \\ \mathbf{l}' \cdot \mathbf{p}_2 = 0 \end{cases}$$

解之可得向量 $\mathbf{l}' = (-\tan \beta, 1, \tan \alpha)$ 。故直线 L' 与水平面夹角 ϕ 的正切值为：

$$\tan \phi = \left| \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \beta + 1}} \right|。$$

结合上图，由三角形几何关系可得此时测量船位置处水深 D 的表达式为：

$$D = D_0 - s \cdot \tan \phi$$

由于测线 L_0 方向向量为 $(-\tan \beta, 1, 0)$ ，故可知波束平面的法向量 $\mathbf{p}_3 = (-\tan \beta, 1, 0)$ ，直线 L 的方向向量为 \mathbf{l} ，则满足以下方程组：

$$\begin{cases} \mathbf{l} \cdot \mathbf{p}_1 = 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{p}_3 = 0 \end{cases}$$

解之可得 L 的方向向量 $\mathbf{l} = \left(\frac{1}{\tan \beta}, 1, -\tan \alpha \right)$ ，同时，直线 L 与水平面夹角 ω 的正切值

为：

$$\tan \omega = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tan \beta}\right)^2 + 1}}$$

基于问题一所建立模型结果：

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \right]$$

综合上述方程，最终可得出覆盖宽度 W 的数学模型：

$$\left\{ \begin{array}{l} W = (D_0 - s \cdot \tan \phi) \cdot \cos \omega \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \omega\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)} \right] \\ \omega = \arctan \left[\frac{\tan \alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tan \beta}\right)^2 + 1}} \right] \end{array} \right.$$

② 当 $\beta = 0^\circ$ 或 180° 时：

此时，测线垂直于海底坡面与水平面的交线，直线 L' 在水平面上的投影与 Y 轴重合，

此时 L' 与水平面夹角 ϕ 即为海底坡面坡度 α ，简易分析图如下所示：

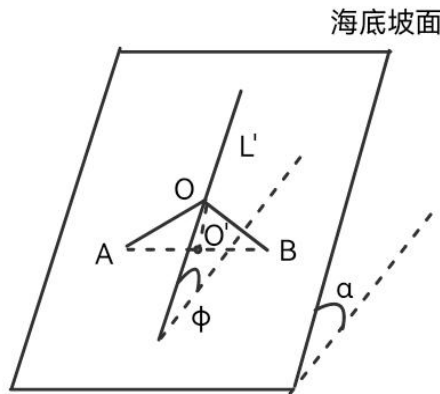


图 8 测线覆盖示意图

图中，点 O 为测量船位置，平面 OAB 为波束平面，易知此时测量船位置处水深 D 即

为 OO' ，由于测量船两侧波束对称发射，故几何关系可知，覆盖宽度 W 的表达式为：

$$W = 2 \cdot D \cdot \tan \frac{\theta}{2}$$

结合上述分析可知， $D = D_0 - s \cdot \tan \phi = D_0 - s \cdot \tan \alpha$ ，综合两个表达式可知覆盖宽 W 的数学模型为：

$$W = 2 \cdot (D_0 - s \cdot \tan \alpha) \cdot \tan \frac{\theta}{2}$$

2. 当 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时：

此时，测线平行于海底坡面与水平面的交线，与问题一中模型相同，根据问题一分析结果可直接得出结论，此情况下，覆盖宽度的数学模型为：

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \right]$$

6.1.4 小结

综上所述可知，本问中随着夹角 β 不同，多波束测深的覆盖宽度 W 的数学模型随之变化，综合以上三种情况建立最终的多波束测深的覆盖宽度的数学模型如下：

1. 当 $\beta = 90^\circ$ 或 270° 时：

$$W = D \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} + \frac{1}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \right]$$

2. 当 $\beta = 0^\circ$ 或 180° 时：

$$W = 2 \cdot (D_0 - s \cdot \tan \alpha) \cdot \tan \frac{\theta}{2}$$

3. 当 $\beta \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 时：

$$\left\{ \begin{array}{l} W = (D_0 - s \cdot \tan \phi) \cdot \cos \omega \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \omega\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right)} \right] \\ \omega = \arctan \left[\frac{\tan \alpha}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tan \beta}\right)^2 + 1}} \right] \end{array} \right.$$

6.2 模型求解

根据题目要求，求解测量船从海域中心点处出发，由测线方向夹角 l （夹角 β ）决定，在测量船距离海域中心点不同距离时所测得的覆盖宽度。针对不同的 β 值，选择符合条件的多波束测深的覆盖宽度模型进行求解，求解结果展示如下：

表 3 求解结果展示

覆盖宽度 / m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角 / °	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	180	415.69	365.29	314.89	264.5	214.1	163.7	113.3	62.9
	225	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.82	594.49	630.16	665.84

七、问题三模型的建立与求解

为求解最优的测线设计方案，首先确定目标函数及约束条件建立优化模型，为简化模型，

结合问题二的求解结果分析测线组整体的平行曲折关系对测量效果的影响,寻找最优的测线关系,按照此关系对测线进行整体布局,对原优化模型进行简化,后求取最优参数。

7.1 优化模型的建立

7.1.1 模型准备

本文定义 $L_i (i=1,2,3\cdots n)$ 表示第 i 条侧线的长度, $A(L_i)$ 表示第 i 条测线的覆盖区域,

Ω 表示整个矩形海域, 故相邻条带间的重叠率表示为:

$$\eta = \frac{A(L_i) \cap A(L_j)}{A(L_i)}$$

其中, $i=1,2,3\cdots n-1 \quad j=i+1$ 。

7.1.2 最短测量长度的单目标优化模型

Step1: 目标函数确定

本问要求目标为测量长度最短, 即测线的总长度最小, 则有目标函数:

$$\min \sum_{i=1}^n L_i$$

Step2: 约束条件确定

① 约束条件 1: 该组测线可完全覆盖整个待测海域, 即所有测线的可测宽度覆盖待测海域:

$$\bigcup_{i=1}^n A(L_i) \supset \Omega$$

② 约束条件 2: 该组测线需满足任意相邻两条侧线条带的重叠率满足 10%~20% 的要求:

$$0.1 \leq \frac{A(L_i) \cap A(L_j)}{A(L_i)} \leq 0.2 \quad i=1,2,3,\cdots n-1 \quad j=i+1$$

③ 约束条件 3: 由于待测量海域为南北长 2 海里, 东西宽 4 海里的矩形海域, 海域内最长距离为该矩形的对角线长度 $L_M = 1852 \times \sqrt{2^2 + 4^2} = 8282m$ 。则有:

$$0 < L_i \leq L_M \quad i = 1, 2, 3 \cdots n-1$$

Step3：模型整合

综上所述，建立如下最短测量长度的单目标优化模型：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^n L_i \\ s.t. & \begin{cases} \bigcup_{i=1}^n A(L_i) \supset \Omega \\ 0.1 \leq \frac{A(L_i) \cap A(L_j)}{A(L_i)} \leq 0.2 & i = 1, 2, 3, \cdots n-1 \quad j = i+1 \\ 0 < L_i \leq L_M & i = 1, 2, 3 \cdots n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

7.2 测线布局选择

在上述所建优化模型当中，由于约束条件不够精准，约束过于泛性，没有对测线的走向布局进行约束，故模型的求解极为复杂，本文对测线走向对测量结果的影响进行分析，确定测线最优的走向布局后，对模型进行简化处理。

证明等高平行侧线效果最佳

1. 在问题二中所建立的覆盖宽度的数学模型可求出不同 β 值下，长度为 4.2 海里测线（ β 互补的测线归为同一条测线）的覆盖宽度，结合最终求解结果可知，相同侧线长度下， $\beta = 90^\circ$ 时覆盖宽度最大，因此在海域面积确定的情况下，一组 $\beta = 90^\circ$ 的测线总长度最小，即测线沿着坡面的等高线进行测量时能够保证测线总长度最小。
2. 测线沿海底坡面的等高线测量时，测线的覆盖区域在水平面的投影为矩形，即同一测线上不同位置处的覆盖宽度相同，覆盖率可根据实际需求进行调控。
3. 测线方向沿海底坡面的等高线方向时，在矩形海域下更便于完全覆盖，不易漏测。

7.3 简化模型与求解

结合上述分析可知，在题目所给待测海域中，一组沿南北方向的测线，既能使测线的测量长度达到最短，同时又可实现对待测海域的完全覆盖，且当相邻两侧线条带间的重叠率调控在 10% 的水平时，相邻条带间重叠部分最少，从而保证侧线数量最少，即测量长度最短。

对测线进行布局时,为防止测线覆盖宽度超出待测海域部分而导致增加测量长度的后果,本文选择自西向东,测线方向沿南北方向、对侧线进行布局,使得首条测线覆盖宽度恰好包括待测海域边缘。

7.3.1 初始海水深度的求解

假设首条测线位置处对应的海水深度为 D_1 , 具体示意图如下所示:

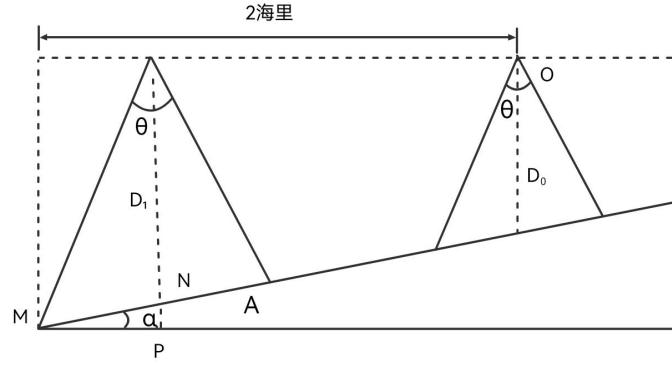


图 9 初始海水深度求解分析图

结合问题二分析结果可知 D_1 与海域中心点的海水深度 D_0 以及首条测线距海域中心点的距离 s 的关系为:

$$D_1 = D_0 + s \cdot \tan \alpha$$

同时, 由图结合几何关系可以得到:

$$MN = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

$$MP = MN \cdot \cos \alpha$$

$$MP + s = 2(NM)$$

上述等式联立即可得出 D_1 和 s 值。

7.3.2 相邻测线间间距的确定

基于问题一结果可知, 当相邻测线间距 $d_n (n=1,2,3 \cdots n)$ 相同时, 相邻测线间重叠率不

一致，故若要保证每两条相邻的测线间的重叠率为 10%，则 n 不同时， d_n 不同。

结合问题一中建立的相邻条带之间重叠率的数学模型，可知相邻两条测线间的重叠率为：

$$\eta = \frac{\left[D_n \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} + (D_n - d_n \cdot \tan \alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} - \frac{d}{\cos \alpha} \right]}{D_1 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \right]} = 10\%$$

其中， $n = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

解得 $d_n = 2.9385D_n$ ，同时有 $D_{n+1} = D_n - d_n \cdot \tan \alpha$ ，求出 d_n 的值结果展示如下：

表 4 布线求解结果展示

$d_1 = 589.64m$	$d_{12} = 240.95m$	$d_{23} = 98.50m$
$d_2 = 543.57m$	$d_{13} = 222.14m$	$d_{24} = 90.79m$
$d_3 = 501.11m$	$d_{14} = 204.78m$	$d_{25} = 83.70m$
$d_4 = 461.97m$	$d_{15} = 188.77m$	$d_{26} = 77.15m$
$d_5 = 425.86m$	$d_{16} = 174.03m$	$d_{27} = 71.13m$
$d_6 = 392.57m$	$d_{17} = 160.44m$	$d_{28} = 65.57m$
$d_7 = 361.89m$	$d_{18} = 147.90m$	$d_{29} = 60.46m$
$d_8 = 333.62m$	$d_{19} = 136.35m$	$d_{30} = 55.73m$
$d_9 = 307.54m$	$d_{20} = 125.70m$	$d_{31} = 51.38m$
$d_{10} = 283.50m$	$d_{21} = 115.88m$	$d_{32} = 47.36m$
$d_{11} = 261.36m$	$d_{22} = 106.83m$	$d_{33} = 43.65m$

7.3.3 末尾测线及测线数量的确定

当测线按照上文所述方式进行布局，假设放置完第 i 条测线后，第 $i+1$ 条测线无法按照规律放置在待测海域内，结合上图分析可知：

$$\begin{cases} MN \cdot \cos \alpha + \sum_{n=1}^{i-1} d_n \leq 4 \times 1852 \\ MN \cdot \cos \alpha + \sum_{n=1}^i d_n > 4 \times 1852 \end{cases}$$

求解可得 $i = 34$ 。且可知第 i 条测线与海域边缘的距离为 $4 \times 1852 - MN \cdot \cos \alpha - \sum_{n=1}^{i-1} d_n = 17.63$ 。

判断第 i 条测线能否完全覆盖海域边缘：

$$\text{第 } i \text{ 条测线在靠近海域边缘侧的覆盖宽度为 } D_i \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} \approx 22.36 > 17.63, \text{ 因此在}$$

末尾测线处可完全将待测海域边缘处完全覆盖。

7.4 小结

本问建立出最短测量长度的单目标优化模型后，由于约束条件约束能力不强，直接求解复杂，本文选择优先分析测线整体的平行交叉关系对测量效果影响，最终可知待测海域一定时，当测线沿坡面的等高线分布时，测线的总长度最短。

当测线按上述方式分布时，各测线平行，并使得首条测线覆盖宽度恰好包括待测海域边缘，为使测量长度取得最短值，将相邻条带间的重叠率控制为 10%，此时重叠率最低，减少了各测线覆盖区域的重叠，从而以最短测量长度完成对待测海域的测量。最终共布线 34 条，总长度为 68 NM（海里）。

八、问题四模型的建立与求解

为设计出一组测量效果较好的测线组，根据所给附件数据模拟海底地形的三维立体图像，基于前三问的分析结果可知，测线沿海底地形等高线方向时的测量效果最好，故本文根据等

高线的分布特征对海底的不规则地形进行划分,对每部分曲面地形进行拟合处理得到拟合后的平面, 结合问题三的分析结果分别对各平面进行测线设计。

8.1 海底地势特征的模拟与区域划分

根据本题所给附件数据, 利用 MATLAB 对数据进行处理, 模拟出该待测矩形海域内海底地形的三维立体图像如下所示:

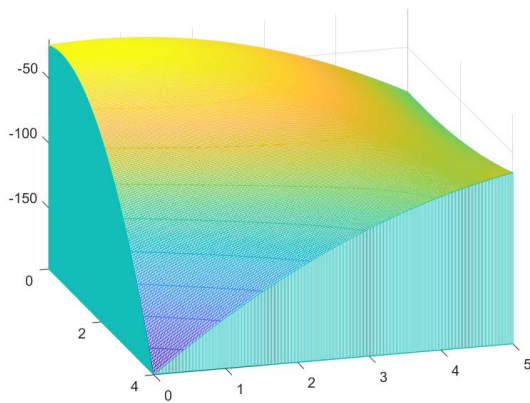


图 10 海底地形的三维立体图

观察图像可知, 海域内海底地形呈现不规则起伏状态, 基于前三问的分析结果可知, 测线在沿海底坡面的等高线时, 其测量效果最优, 故本问针对海底地形刻画其等高线分布特征, 二维平面的等高线分布情况如下图所示:

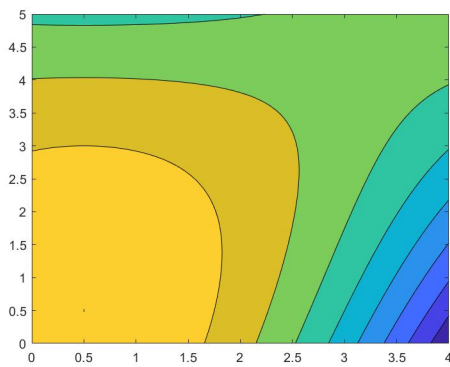


图 11 等高线分布图

观察上图可知, 其等高线呈区域性规律的分布特征, 因此本文采用分而治之的思想, 按

照等高线的分布情况对整个矩形海域进行划分，划分结果展示如下：

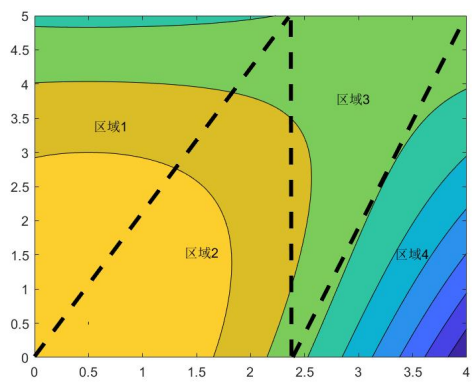


图 12 等高线划分结果图

如图将整个矩形海域划分为四个区域，对四个区域分别进行测线分布设计。

8.2 测线分布设计

将整个矩形区域划分为四个区域后，四个区域海底形状仍略呈曲面趋势，不可直接利用上述分析结果，故将四个区域的海底曲面地形进行拟合处理，将海底的曲面地形拟合为坡面地形，进而结合上述分析进行测线设计。

8.2.1 曲面拟合

通过分别选取区域曲面内的三个点来构建拟合平面，为了保证曲面拟合成为平面后各区域的连贯性，本文在选点过程中选取曲面的交点进行曲面拟合，具体点坐标如下图所示：

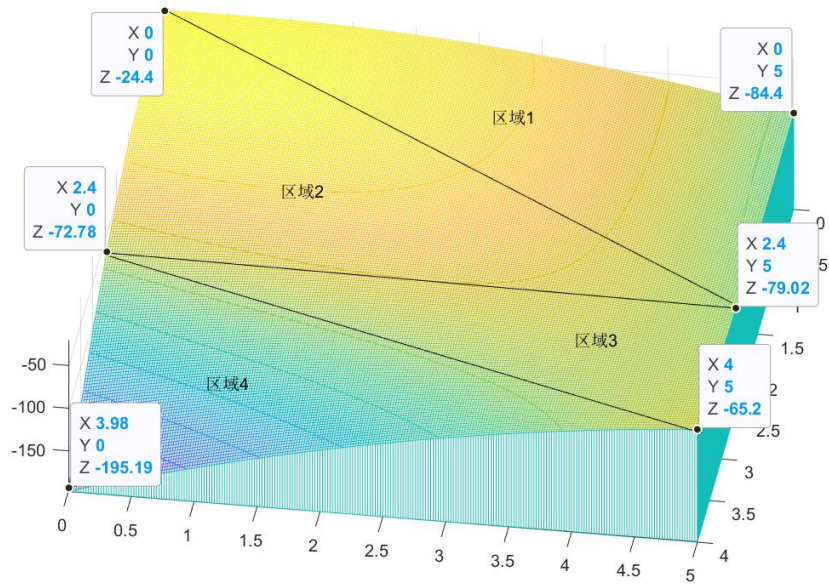


图 13 划分区域示意图

利用三点坐标确定各区域的平面后,根据空间几何相关知识求解得到各区域的拟合平面与水平面的夹角,结果如下表所示:

表 5 各区域面与水平面夹角值

	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4
与水平面夹角	0.37°	0.68°	0.21°	1.62°

8.22 测线布局

按上述分析,对四个区域平面分别进行测线布局,各平面上测线与其等高线方向一致,并使得首条测线覆盖宽度恰好覆盖待测海域边缘,示意图如下所示:

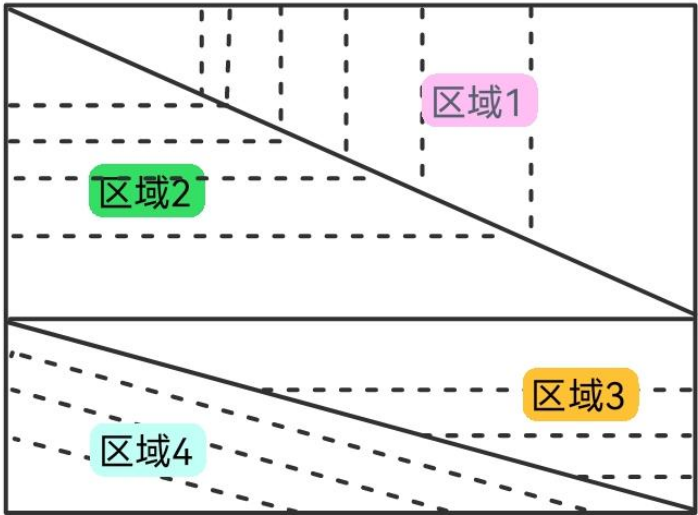


图 14 布线示意图

其中,虚线表示该平面上的测线分布情况,为了使测线总长度尽可能短,本文将相邻条带间的重叠率尽量控制为 10%,若 10%的重叠率下边缘测线超出区域所化范围,则适当提高重叠率。

此外本问多波束换能器的开角未知,查阅资料可知,换能器开角 θ 一般在 $130^{\circ} \sim 140^{\circ}$ 之间,本问综合考虑扫描覆盖范围和波束质量确定开角为 130° 。

对于相邻测线间的间距,同问题三分析过程一样,利用公式:

$$\eta = \frac{\left[D_n \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} + (D_n - d_n \cdot \tan \alpha) \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} - \frac{d}{\cos \alpha} \right]}{D_1 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \alpha\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \right]} = 10\%$$

求解出相邻测线的间距，区域 3 的求解结果展示如下，其余数据见补充材料。

表 6 区域 3 布线结果

测线编号	d	测线长度
1	162.76	8740.75
2	289.91	7821.18
3	285.81	6914.60
4	281.78	6020.80
5	277.80	5139.62
6	273.88	4270.87
7	270.02	3114.39
8	266.21	2569.98
9	262.45	1737.50
10	258.75	916.76
11	255.10	107.60

右表中数据可知区域 3 中测线总长度为：47654.05m。

同理可得另外三个区域中的测线总长度分别为：区域 1 为 87422.29m、区域 2 为 91488.25m、区域 4 为 26683.13m，共 253247.72m。

其中区域 4 中数据计算时，发现重叠率为 10%时无法完全覆盖区域末端边缘部分，对其重叠率不断调整后发现，当重叠率取 15%时，最后一条测线恰好覆盖区域末端的边缘。

8.2.3 漏测海区面积占比的计算

分析一区域上两相邻测线覆盖宽度重叠情况，分析示意图如下所示：

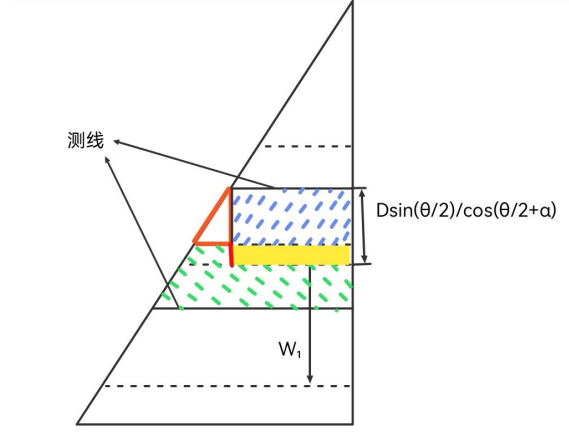


图 15 覆盖宽度漏测示意图

由图可知，两条黑实线为测线，其中绿色与蓝色阴影部分面积分别为两条测线相邻测的覆盖区域，黄色区域部分即为二者覆盖区域的重叠部分，而橙色线段所围三角形面积即为漏测区域，由于本文中，重叠率均为 10%（区域 4 为 15%），结合几何图形相关知识可得出漏测区域的三角形面积表达式为：

$$\frac{1}{2} \cdot \tan \varphi \cdot \left[D_{n+1} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} - \frac{W_n}{\eta} \right]^2$$

其中， φ 为区域三角形的顶角，故可得一个区域中漏测面积的表达式为：

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot \tan \varphi \cdot \left[D_{i+1} \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} + \alpha \right)} - \frac{W_i}{\eta} \right]^2$$

利用上式求解得出各区域的漏测面积分别如下：

区域 1: $96895.85 m^2$ ，区域 2: $188436.81 m^2$ ，区域 3: $267718.47 m^2$ ，区域 4: $553945.3 m^2$ 。

故可知漏测海域占总待测海域面积的百分比为：

$$\frac{96895.85 + 188436.81 + 267718.47 + 553945.3}{5 \times 4 \times 1852 \times 1852} \times 100\% \approx 1.61\%$$

8.2.4 重叠率超过 20%部分的总长度

由于在同一区域内，各测线沿区域内的等高线方向进行设计，相邻两条带间的重叠率可
进行调控，故重叠率超出 20%的部分只会存在一种情况：即某区域内测线在区域边缘处覆
盖到了另一区域，此时重叠率会超过 20%，具体情况如图所示：

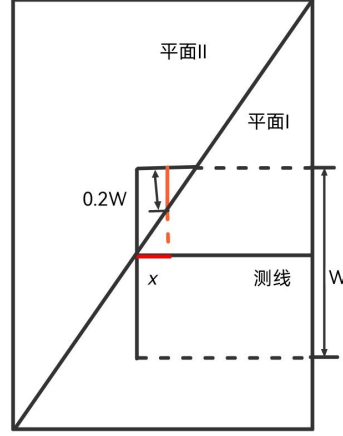


图 16 区域边缘重叠率简易分析图

由图可知，当平面 I 内的测线到达边缘处时，其覆盖宽度开始覆盖平面 II，当覆盖平面 II 的覆盖宽度为 $0.2W$ 时，表明此时该测线与平面二中的某一测线重叠率达到 20%，以测量船此刻位置开始到该条测线结束的长度（即图中红色线段长度 x ）即为重叠率超过 20%部分的长度，根据几何关系可知，其表达式为：

$$x = D \cdot \cos \alpha \cdot \tan \varphi \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} - \tan \varphi \cdot 0.2W$$

则，一个区域内重叠率超过 20%部分的总长度 X 的表达式为：

$$X = \sum_{i=1}^n D_i \cdot \cos \alpha \cdot \tan \varphi \cdot \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} - \tan \varphi \cdot 0.2W_i$$

基于该表达式，类比求解每个区域内的重叠率超过 20%部分的总长度分别为：

区域 1：1442.81m，区域 2：2917.88m，区域 3：3061.61m，区域 4：2334.96m。四者

相加，即可得到待测矩形海域内重叠率超过 20%部分的总长度为：9757.26m。

九、模型优缺点

9.1 模型的优点

1. 本文的模型均用数学公式推导而出，具有严谨性。
2. 本文模型均由自主建立，原创性高。
3. 在问题四中，本文对曲面海床进行了合理简化，减小了地势陡峭起伏的情况给模型求解带来的影响。
4. 在问题四处理曲面海床时，本文采用分而治之的思想，将复杂海域划分为若干区域，分别进行分析布线。

9.2 模型的缺点

1. 在问题四中，本文将多波束换能器的开角固定为 130° ，没有多次取值对比分析。
2. 对于地形很复杂的海域，拟合平面后可能与原来产生较大差异，因此本文建立的模型不太适用于地形复杂多变的海域。

9.3 模型的推广与改进

本文较为完整的分析了多波束测线法在简单地形海域的应用，考虑了多种角度下的覆盖效果，并提供了最优布线的方案，对现今海域测深的路线优化问题有较为实际的借鉴意义。

然而，在实际情况中，某些海域地形较为复杂，本文所建立的模型在应用过程中，具有一定限制，该模型在对曲面的拟合过程中，可采用更高阶的拟合方法，如基于分数阶傅里叶变换的 NURBS 曲面拟合方法，进而提高拟合精度，提高模型的可靠性以及适用性。

参考文献

- [1] 王俊森, 金绍华, 边志刚等. 利用相邻测线重叠区域进行多波束测深横摇运动残差改正[J]. 海洋技术学报, 2023, 42(04): 35-42.
- [2] 付盈盈. 多波束测深系统在河床变化分析中的应用[J]. 城市道桥与防洪, 2023(07): 266-269+29. DOI: 10.16799/j.cnki.csdqyfh.2023.07.063.
- [3] 马丹. 多波束海底地形可视化表达若干关键技术[D]. 山东科技大学, 2018. DOI: 10.27275/d.cnki.gsdku.2018.001390.
- [4] 孔德明, 黄紫双, 王书涛, 史慧超. 基于分数阶傅里叶变换的 NURBS 曲面拟合[J]. 计量学报, 2021, 42(03): 294-300.

附录

附录清单	
附件 1	使用 Python 对问题一模型进行求解
附件 2	使用 Python 对问题二模型进行求解
附件 3	问题三使用 Python 对矩形海域进行布线设计
附件 4	对海底复杂地形设计布线方案
附件 5	求解问题四的布线结果

附件 1
使用 Python 对问题一模型进行求解
<pre> #问题 1 代码 import numpy as np #角度参数 D = 70 alpha = 1.5 * np.pi / 180 sita = 120 * np.pi / 180 AOB = sita AOC = BOC = sita/2 BAF = ECA = alpha AEC = sita/2 + (np.pi)/2 OAC = (np.pi)/2 - sita/2 - alpha #正弦定理 AC = D * (np.sin(sita/2)/(np.sin((np.pi)/2-sita/2-alpha))) </pre>


```

OBA = np.pi/2 - sita/2 + alpha

#正弦定理

BC = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))

#求覆盖宽度

#W = W = D * np.cos(alpha) * (np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2-alpha)) +
np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2+alpha)))
W = (AC + BC) * np.cos(alpha)
print("AC = ",AC)
print("BC = ",BC)
print("覆盖宽度 W = ",W)

#求解覆盖率

D = 90.9487
d = 200
alpha = 1.5 * np.pi / 180
sita = 120 * np.pi / 180
D1 = 85.7116
W = 3

#求解 A1B
CB = D * np.sin(sita/2) / (np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))

CC1 = d / np.cos(alpha)

```

```
A1C1 = D1 * np.sin(sita/2) / (np.sin(np.pi/2 - sita/2 - alpha))
```

```
A1B = (CB + A1C1) - CC1
```

```
A1B = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha)) + D1 * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 - alpha)) - d / np.cos(alpha)
```

```
l1 = A1B * np.cos(alpha)
```

```
y = l1 / W
```

附件 2

使用 Python 对问题二模型进行求解

#问题 2 代码

#代码中 alpha 代表红色交线与水平面的夹角

```
import numpy as np
```

```
import math
```

#角度参数

#代码中的 womi 为推导公式中的 alpha

#代码中的 alpha 为推导公式中的 w

```
beita = 225 * np.pi / 180
```

```
womi = 1.5 * np.pi / 180
```

```
alpha = math.atan(np.tan(womi)/(np.sqrt((1/np.tan(beita))**2 + 1)))
```

```
m = np.tan(womi)/math.sqrt((np.tan(beita))**2+1)
```

```
sita = 120 * np.pi / 180
```

```
D = 120 - m * 0.3 * 1852
```

```

AOB = sita

AOC = BOC = sita/2

BAF = ECA = alpha

AEC = sita/2 + (np.pi)/2

OAC = (np.pi)/2 - sita/2 - alpha


#正弦定理

AC = D * (np.sin(sita/2)/(np.sin((np.pi)/2-sita/2-alpha)))

OBA = np.pi/2 - sita/2 + alpha


#正弦定理

BC = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))


#求覆盖宽度

#W = W = D * np.cos(alpha) * (np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2-alpha)) +
np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2+alpha)))

W = (AC + BC) * np.cos(alpha)

print("a = ",alpha)

print("AC = ",AC)

print("BC = ",BC)

print("覆盖宽度 W = ",W)


import math

x = 1.0

y = 1.0

```

```

# 计算反正切值

atan_value = math.atan(y / x)


# 输出结果

print("反正切值为:", atan_value)


#求解 0 度和 180 度情况

alpha = 1.5 * np.pi / 180
D = 207
#- 0.3 * 1852 * np.tan(alpha)
W = 2 * np.sqrt(3) * D
print("覆盖宽度为: ",W)


#求解 90 度和 270 度情况

alpha = 1.5 * np.pi / 180
D = 120
sita = 120 * np.pi / 180
AOB = sita
AOC = BOC = sita/2
BAF = ECA = alpha
AEC = sita/2 + (np.pi)/2
OAC = (np.pi)/2 - sita/2 - alpha


#正弦定理

AC = D * (np.sin(sita/2)/(np.sin((np.pi)/2-sita/2-alpha)))

```

```
OBA = np.pi/2 - sita/2 + alpha
```

```
#正弦定理
```

```
BC = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))
```

```
#求覆盖宽度
```

```
#W = W = D * np.cos(alpha) * (np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2-alpha)) +  
np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2-sita/2+alpha)))
```

```
W = (AC + BC) * np.cos(alpha)
```

```
print("AC = ",AC)
```

附件 3

问题三使用 Python 对矩形海域进行布线设计

```
#问题三代码
```

```
import numpy as np
```

```
import math
```

```
alpha = 1.5 * np.pi / 180
```

```
sita = 120 * np.pi / 180
```

```
#求解代数式
```

```
a = np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))
```

```
b = np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 - alpha))
```

```
c = np.tan(alpha) * b
```

```
e = 1 / np.cos(alpha)
```

```
f = a+b
```

```

print("a =",a)

print("b =",b)

print("c =",c)

print("e =",e)

print("f =",f)


#d 和 D 的关系式

d = D * 2.9835

D = D - d * np.tan(alpha)

```

附件 4

对海底复杂地形设计布线方案

```

#绘制海域三维立体交互图


import matplotlib.pyplot as plt

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

from ipywidgets import interact

import numpy as np


import pandas as pd


# 读取数据

data = pd.read_excel(r"D:\桌面\点集 - 0.1 副本.xlsx")

data = data.values #对读取的数据矩阵化

print(data) #输出数据 data


def plot_3d(elev=30, azim=30):

    fig = plt.figure()

    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

```

```

x = data[:,0]

y = data[:,1]

z = data[:,2]

ax.scatter(x, y, z)

ax.view_init(elev=elev, azim=azim)

plt.show()

interact(plot_3d, elev=(0,90), azip=(-180,180));

#绘制等高线图和海底示意图

x = a

y = b

z = c

% 使用 scatter3 绘制三维散点图

figure(1)

contourf(x, y, z)

figure(2)

meshz(x, y, z) %绘制海底示意图

hold on

contour3(x,y,z)%绘制等高线图

#问题四求解覆盖率

alpha = 0.21 * np.pi / 180

sita = 130 * np.pi / 180

sum_x = 0

```

D = 75.3

for i in range(11):

 d = D * 3.85

 AOB = sita

 AOC = BOC = sita/2

 BAF = ECA = alpha

 AEC = sita/2 + (np.pi)/2

 OAC = (np.pi)/2 - sita/2 - alpha

 AC = D * (np.sin(sita/2)/(np.sin((np.pi)/2-sita/2-alpha)))

 OBA = np.pi/2 - sita/2 + alpha

 #正弦定理

 BC = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))

 #求覆盖宽度

 W = (AC + BC) * np.cos(alpha)

 #1.x = BC * np.cos(alpha) * np.tan(0.45) - (0.2*W*np.tan(0.45)) #x 表示超过百分之二十的

测线长度

 x = BC * np.cos(alpha)/np.tan(0.31)-(0.2*W/np.tan(0.31))

 sum_x = sum_x + x

 D = D - d * np.tan(alpha)

 print("第",i+1,"次")

 print("超过百分之二十的测线长度为: ",sum_x)

#求解第四问漏测面积

import numpy as np

D = 83.23


```

W0 = 357

alpha = 0.37 * np.pi / 180

sita = 130 * np.pi / 180

AC = 181


#s1 表示底角的漏测面积
S1 = 0.5 * (AC * np.cos(alpha))**2 * np.tan(0.45)

sum_S = S1


for i in range(48):

    d = 3.84 * D

    D = D - d * np.tan(alpha)

    AOB = sita

    AOC = BOC = sita/2

    BAF = ECA = alpha

    AEC = sita/2 + (np.pi)/2

    OAC = (np.pi)/2 - sita/2 - alpha


    AC = D * (np.sin(sita/2)/(np.sin((np.pi)/2-sita/2-alpha)))

    OBA = np.pi/2 - sita/2 + alpha

    BC = D * np.sin(sita/2)/(np.sin(np.pi/2 - sita/2 + alpha))

    W = (AC + BC) * np.cos(alpha)

    S = 0.5 * (AC * np.cos(alpha) - W0 * 0.1 )**2 * np.tan(0.45)

    W0 = W

    sum_S = sum_S + S

print("漏测总面积为: ",sum_S)

```

附件 5

求解问题四的布线结果

#问题四区域 1 布线

```
sum_L = 0
```

```
alpha = 0.37 * np.pi / 180
```

```
D = 83.23
```

```
sum = 357.04 * np.cos(alpha)
```

```
for i in range(100):
```

```
    print("第",i+1,"次")
```

```
    d = 3.84* D
```

```
    sum = sum + d
```

```
    #sum_l = sum_l + d
```

```
    L= (D - 24.4)/60 * 2.4 * 1852
```

```
    sum_L = sum_L + L
```

```
    print("测线总长: ",sum_L)
```

```
    print("d:",d)
```

```
    D = D - d * np.tan(alpha)
```

```
    print("D:",D)
```

```
    print("sum:",sum)
```

第 1 次

测线总长: 4358.1264

d: 319.6032

D: 81.16606389797995

sum: 676.6357553625578

第 2 次

测线总长: 8563.356413562356

d: 311.67768536824303

D: 79.15330924775878

sum: 988.3134407308008

第 3 次

测线总长: 12619.481562636327

d: 303.9487075113937

D: 77.19046685257908

sum: 1292.2621482421946

第 4 次

测线总长: 16530.199347075384

d: 296.41139271390364

D: 75.27629898920264

sum: 1588.6735409560983

第 5 次

测线总长: 20299.115576195516

d: 289.06098811853815

D: 73.4095986274308

sum: 1877.7345290746366

第 6 次

测线总长: 23929.74664251559

d: 281.89285872933425

D: 71.58918866897884

sum: 2159.627387803971

第 7 次

测线总长: 27425.521739113545

d: 274.9024844888787

D: 69.81392120522501

sum: 2434.5298722928496

第 8 次

测线总长: 30789.785021996613

d: 268.08545742806405

D: 68.08267679336574

sum: 2702.615329720914

第 9 次

测线总长: 34025.79771884915

d: 261.4374788865244

D: 66.39436375052072

sum: 2964.0528086074382

第 10 次

测线总长: 37136.740185487724

d: 254.95435680199958

D: 64.7479174653429

sum: 3219.0071654094377

第 11 次

测线总长: 40125.71391132032

d: 248.6320030669167

D: 63.142299726698944

sum: 3467.6391684763544

第 12 次

测线总长: 42995.74347507418

d: 242.46643095052394

D: 61.57649806899733

sum: 3710.105599426878

第 13 次

测线总长: 45749.7784520255

d: 236.45375258494974

D: 60.04952513375076

sum: 3946.5593520118277

第 14 次

测线总长： 48390.69527393376

d: 230.59017651360293

D: 58.560418046970646

sum: 4177.1495285254305

第 15 次

测线总长： 50921.299042853345

d: 224.87200530036728

D: 57.10823781200093

sum: 4402.021533825798

第 16 次

测线总长： 53344.325299966375

d: 219.29563319808355

D: 55.69206871740841

sum: 4621.317167023881

第 17 次

测线总长： 55662.44175055199

d: 213.8575438748483

D: 54.31101775955618

sum: 4835.174710898729

第 18 次

测线总长： 57878.24994617991

d: 208.55430819669573

D: 52.9642140794961

sum: 5043.7290190954245

第 19 次

测线总长： 59994.28692518898

d: 203.382582065265

D: 51.65080841382518

sum: 5247.111601160689

第 20 次

测线总长： 62013.02681248515

d: 198.3391043090887

D: 50.36997255915961

sum: 5445.450705469778

第 21 次

测线总长： 63936.882379667695

d: 193.4206946271729

D: 49.12089884988881

sum: 5638.87140009695

第 22 次

测线总长： 65768.20656646746

d: 188.62425158357303

D: 47.90279964888003

sum: 5827.495651680523

第 23 次

测线总长： 67509.29396445649

d: 183.9467506516993

D: 46.71490685081254

sum: 6011.442402332223

第 24 次

测线总长： 69162.38226396468

d: 179.38524230712014

D: 45.55647139782808

sum: 6190.827644639343

第 25 次

测线总长： 70729.65366511578

d: 174.93685016765983

D: 44.42676280719224

sum: 6365.764494807003

第 26 次

测线总长: 72213.23625387259

d: 170.5987691796182

D: 43.3250687106688

sum: 6536.363263986621

第 27 次

测线总长: 73615.20534395894

d: 166.36826384896818

D: 42.25069440531678

sum: 6702.731527835589

第 28 次

测线总长: 74937.5847855048

d: 162.24266651641642

D: 41.20296241542671

sum: 6864.974194352006

第 29 次

测线总长: 76182.34824123961

d: 158.21937567523855

D: 40.18121206532008

sum: 7023.193570027244

第 30 次

测线总长: 77351.42043103852

d: 154.29585433082912

D: 39.18479906274243

sum: 7177.489424358073

第 31 次

测线总长: 78446.67834560649

d: 150.46962840093093

D: 38.21309509258749

sum: 7327.9590527590035

第 32 次

测线总长: 79469.95243006537

d: 146.73828515553595

D: 37.26548742069614

sum: 7474.697337914539

第 33 次

测线总长: 80423.02773819055

d: 143.09947169547317

D: 36.341378507480364

sum: 7617.796809610012

第 34 次

测线总长: 81307.64505802469

d: 139.55089346872458

D: 35.440185631128514

sum: 7757.347703078737

第 35 次

测线总长: 82125.50200957869

d: 136.09031282353348

D: 34.56134052015437

sum: 7893.43801590227

第 36 次

测线总长: 82878.25411531172

d: 132.71554759739277

D: 33.704288995058185

sum: 8026.1535634996635

第 37 次

测线总长: 83567.51584406562

d: 129.42446974102342

D: 32.868490618873906

sum: 8155.578033240687

第 38 次

测线总长: 84194.86162911181

d: 126.2150039764758

D: 32.053418356382

sum: 8281.793037217163

第 39 次

测线总长: 84761.82686095258

d: 123.08512648850686

D: 31.258558241773212

sum: 8404.87816370567

第 40 次

测线总长: 85269.90885550315

d: 120.03286364840913

D: 30.48340905455355

sum: 8524.91102735408

第 41 次

测线总长: 85720.56779826447

d: 117.05629076948563

D: 29.72748200348617

sum: 8641.967318123565

第 42 次

测线总长: 86115.22766508273

d: 114.15353089338689

D: 28.990300418370868

sum: 8756.120849016952

第 43 次

测线总长： 86455.27712007564

d: 111.32275360654413

D: 28.271399449466834

sum: 8867.443602623496

第 44 次

测线总长： 86742.07039129215

d: 108.56217388595265

D: 27.5703257743691

sum: 8976.005776509448

第 45 次

测线总长： 86976.92812465741

d: 105.87005097357734

D: 26.88663731215386

sum: 9081.875827483025

第 46 次

测线总长： 87161.13821674176

d: 103.24468727867081

D: 26.21990294461242

sum: 9185.120514761697

第 47 次

测线总长： 87295.95662687864

d: 100.6844273073117

D: 25.569702244397984

sum: 9285.804942069008

第 48 次

测线总长： 87382.60816914364

d: 98.18765661848826

D: 24.93562520991383

sum: 9383.992598687495

第 49 次

测线总长: 87422.28728469406

d: 95.7528008060691

D: 24.31727200677575

sum: 9479.745399493564

#问题四区域 2 布线

sum_L = 0

alpha = 0.68 * np.pi / 180

D = 73.97

sum = 162.78 * np.cos(alpha)

for i in range(100):

 print("第",i+1,"次")

 d = 3.82* D

 sum = sum + d

 #sum_l = sum_l + d

 L= (9260*D - 225944)/51.5

 sum_L = sum_L + L

 print("测线总长: ",sum_L)

 print("d:",d)

 D = D - d * np.tan(alpha)

 print("D:",D)

 print("sum:",sum)

第 1 次

测线总长: 8912.974757281552

d: 282.5654

D: 70.61628886018167

sum: 445.3339359383906

第 2 次

测线总长: 17222.932715442374

d: 269.75422344589396

D: 67.41463096369633

sum: 715.0881593842846

第 3 次

测线总长: 24957.21393338078

d: 257.52389028131995

D: 64.35813239874174

sum: 972.6120496656046

第 4 次

测线总长: 32141.91890449434

d: 245.84806576319346

D: 61.440211815213786

sum: 1218.460115428798

第 5 次

测线总长: 38801.96475709395

d: 234.70160913411667

D: 58.65458625353364

sum: 1453.1617245629145

第 6 次

测线总长: 44961.138906758446

d: 224.06051948849847

D: 55.99525761597907

sum: 1677.2222440514129

第 7 次

测线总长: 50642.15027615585

d: 213.90188409304005

D: 53.45649975138929

sum: 1891.124128144453

第 8 次

测线总长: 55866.67819261925

d: 204.20382905030706

D: 51.032846125433764

sum: 2095.32795719476

第 9 次

测线总长: 60655.4190687652

d: 194.94547219915697

D: 48.71907804989635

sum: 2290.273429393917

第 10 次

测线总长: 65028.1309666689

d: 186.10687815060408

D: 46.51021344562954

sum: 2476.380307544521

第 11 次

测线总长: 69003.67614155296

d: 177.66901536230483

D: 44.40149611498284

sum: 2654.049322906826

第 12 次

测线总长: 72600.06165659647

d: 169.61371515923443

D: 42.388385500606496

sum: 2823.6630380660604

第 13 次

测线总长: 75834.47815631717

d: 161.92363261231682

D: 40.46654690857868

sum: 2985.5866706783772

第 14 次

测线总长: 78723.336882015

d: 154.58220919077056

D: 38.631842174804426

sum: 3140.168879869148

第 15 次

测线总长: 81282.30500897983

d: 147.5736371077529

D: 36.88032075458886

sum: 3287.742516976901

第 16 次

测线总长: 83526.3393815525

d: 140.88282528252944

D: 35.20821121619846

sum: 3428.62534225943

第 17 次

测线总长: 85469.71871867868

d: 134.4953668458781

D: 33.61191312009407

sum: 3563.120709105308

第 18 次

测线总长: 87126.07435930142

d: 128.39750811875936

D: 32.08798926634978

sum: 3691.5182172240675

第 19 次

测线总长： 88508.4196137946

d: 122.57611899745615

D: 30.633158293564485

sum: 3814.0943362215235

第 20 次

测线总长： 89629.17778463746

d: 117.01866468141633

D: 29.24428761332999

sum: 3931.11300090294

第 21 次

测线总长： 90500.20891666533

d: 111.71317868292056

D: 27.91838666504182

sum: 4042.8261795858602

第 22 次

测线总长： 91132.83533449615

d: 106.64823706045975

D: 26.65260047652882

sum: 4149.47441664632

第 23 次

测线总长： 91537.86602212055

d: 101.81293382034009

D: 25.444203516636133

sum: 4251.2873504666595

第 24 次

测线总长： 91725.61989715065

d: 97.19685743355002

D: 24.290593826524635

sum: 4348.484207900209

第 25 次

测线总长: 91705.94802984227

d: 92.79006841732411

D: 23.18928741705028

sum: 4441.274276317533

第 26 次

测线总长: 91488.25485473326

d: 88.58307793313207

D: 22.137912920159504

sum: 4529.857354250665

#问题四区域 3 布线

sum_L = 0

alpha = 0.21 * np.pi / 180

D = 75.3

sum = 162.76 * np.cos(alpha)

for i in range(100):

 print("第",i+1,"次")

 d = 3.85* D

 sum = sum + d

 #sum_l = sum_l + d

 L= 9260*(D - 65.2)/10.7

 sum_L = sum_L + L

 print("测线总长: ",sum_L)

 print("d:",d)

 D = D - d * np.tan(alpha)

 print("D:",D)

 print("sum:",sum)

第 1 次

测线总长： 8740.747663551398

d: 289.905

D: 74.23743792069565

sum: 452.66390677255987

第 2 次

测线总长： 16561.932256602027

d: 285.8141359946783

D: 73.18986970822233

sum: 738.4780427672381

第 3 次

测线总长： 23476.529779792567

d: 281.780998376656

D: 72.15708378337263

sum: 1020.2590411438941

第 4 次

测线总长： 29497.33312876738

d: 277.80477256598465

D: 71.13887155254396

sum: 1298.0638137098788

第 5 次

测线总长： 34636.95467797832

d: 273.88465547729425

D: 70.13502736560856

sum: 1571.948469187173

第 6 次

测线总长： 38907.828828028345

d: 270.019855357593

D: 69.14534847437791

sum: 1841.968324544766

第 7 次

测线总长: 42322.21451706941

d: 266.20959162635495

D: 68.16963499165337

sum: 2108.177916171121

第 8 次

测线总长: 44892.19769676195

d: 262.4530947178655

D: 67.20768985085458

sum: 2370.6310108889866

第 9 次

测线总长: 46629.693773295905

d: 258.74960592579015

D: 66.25931876621759

sum: 2629.3806168147767

第 10 次

测线总长: 47546.45001396645

d: 255.09837724993773

D: 65.32433019355462

sum: 2884.4789940647142

第 11 次

测线总长: 47654.04791979035

d: 251.49867124518528

D: 64.40253529156755

sum: 3135.9776653098997

#问题四区域 4 的布线

```
#通过迭代求解一组测线
```

```
a,b,c = 9260.94,2965.81,9722.56
```

```
p = (a+b+c)/2
```

```
S = np.sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c))
```

```
H = 2 * S / c
```

```
AC = 428.32
```

```
sum_l = AC
```

```
sum_L = 0
```

```
alpha = 1.62 * np.pi / 180
```

```
D = 187.54
```

```
sum = 428.32 * np.cos(alpha)
```

```
for i in range(100):
```

```
    print("第",i+1,"次")
```

```
    d = 3.56* D
```

```
    sum = sum + d
```

```
    sum_l = sum_l + d/np.cos(alpha)
```

```
    print("sum_l",sum_l)
```

```
    L= c * (sum_l)/H
```

```
    sum_L = sum_L + L
```

```
    print("测线总长: ",sum_L)
```

```
    print("d:",d)
```

```
    D = D - d * np.tan(alpha)
```

```
    print("D:",D)
```

```
    print("sum:",sum)
```

```
第 1 次
```

```
sum_l 1096.2293582608188
```

```
测线总长:  3772.805136999641
```

d: 667.6424

D: 168.65782389079715

sum: 1095.7912037727579

第 2 次

sum_1 1696.8912912914711

测线总长: 9612.860534595753

d: 600.4218530512378

D: 151.67677060669268

sum: 1696.2130568239957

第 3 次

sum_1 2237.076502547681

测线总长: 17312.02828363627

d: 539.969303359826

D: 136.40542852355983

sum: 2236.1823601838214

第 4 次

sum_1 2722.8739976338643

测线总长: 26683.126519842815

d: 485.60332554387304

D: 122.67165800189439