第三章 逻辑代数

第3章 逻辑代数基础

逻辑代数是由英国数学家布尔在1849年发明的，所以也被称为布尔代数。逻辑代数组成了一种数学工具，用来描述逻辑门的输入输出行为。

变量是一个符号用来表示逻辑量，变量只有0和1两种取值。

逻辑代数和代数是不同的。

§3.1 逻辑代数运算法则

A 的非运算是 $\overline{A}$

$\overline{0}=1$

$\overline{1}=0$

或运算
逻辑加

"+"

$0+0=0$

$0+1=1$

$1+0=1$

$1+1=1$

与运算
逻辑乘

" • "

$0 \bullet 0 = 0$

$0 \bullet 1 = 0$

$1 \bullet 0 = 0$

$1 \bullet 1 = 1$

1. 逻辑代数的基本定律

每一个定律给出两种形式：一种形式是加，另一种形式是乘，两种形式互换叫做"对偶式"。

	加	乘	
1) 定律 1	$A+B=B+A$;	$AB=BA$	(交换律)
2) 定律 2	$A+(B+C)=(A+B)+C$;	$A(BC)=(AB)C$	(结合律)
3) 定律 3	$A+(BC)=(A+B)(A+C)$;	$A(B+C)=AB+AC$;	(分配律)
4) 定律 4	$A+0=A$, $A+1=1$;	$A\cdot 1=A$, $A\cdot 0=0$	
5) 定律 5	$A+\overline{A}=1$;	$A\cdot\overline{A}=0$	(互补律)
6) 定律 6	$A+A=A$;	$A\bullet A=A$	(重叠律)
7) 定律 7		$\overline{\overline{A}}=A$	(还原律)
8) 摩根定理	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$;	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$	(摩根定理)
推论	$\overline{A+B+C}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	

2. 基本规则

1) 代入规则

等式两侧某一变量都用一个逻辑函数代入，等式仍成立。

例如:

如果 $\overline{AX} = \overline{A} + \overline{X}$ $X = BC$

左: $\overline{AX} = \overline{ABC}$ 右: $\overline{A} + \overline{BC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

那么 $\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

我们已将其应用到了摩根定理的推论中。

2) 反演规则

反演规则是把表达式中所有“+ ” 换成 “•” ，“•”换成“+”，“1” 换成“0”，“0”换成“1”，原变量换反变量，反变量换原变量的一种运算规则。

$$F\left\{\begin{array}{ccc} 1 & \Longleftrightarrow & 0 \\ + & \Longleftrightarrow & \bullet \\ \text{原变量} & \Longleftrightarrow & \text{反变量} \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{新函数} \\ \overline{F}\end{array}$$

函数 $\overline{F}$ 叫做F的反函数。如果函数F成立，那么 $\overline{F}$ 也成立。

3) 对偶规则

对偶规则是将表达式中所有 + 换成 • ，• 换成 +， 0 换成 1 ，1 换成 0 。

$$\text{函数 } \mathbf{F} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} + & \Longleftrightarrow & \bullet \\ 1 & \Longleftrightarrow & 0 \end{array} \right\} \quad \text{新函数 } \mathbf{F'}$$

新函数 F’ 叫做 F 的对偶式。如果表达式 F 在一个逻辑代数中是成立的，F’ 也成立。

如果 F 成立，F’ 也成立

注意：1. 运算顺序不变

2. 多变量上的非号保持不变

例 1:

函数 $F=A(B+\overline{C})+CD$

分别给出 F' 和 $\overline{F}$

解:

$$F' = (A+B\overline{C})(C+D)$$

$$\overline{F} = (\overline{A}+\overline{B}C)(\overline{C}+\overline{D})$$

例 2:

$$G = \overline{\overline{W\overline{X}+Y}+\overline{Z}}+X$$

$$G' = \overline{\overline{(W+\overline{X})Y}\cdot\overline{Z}}\cdot X$$

$$\overline{G} = \overline{\overline{(\overline{W}+X)\overline{Y}}\cdot Z}\cdot\overline{X}$$

3. 常用公式

1) $A+AB=A$; $A(A+B)=A$ 吸收律

证明： $A+AB = A(1+B) = A$

2） $AB+A\overline{B}=A$; $(A+B)(A+\overline{B})=A$

证明： $AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

3) $A+\overline{A}B = A + B;\qquad A(\overline{A}+B)=AB$

证明: 用分配率 $(A+BC=(A+B)(A+C))$

$$A+\overline{A}B = (A+\overline{A})(A+B) = A+B$$

4) $AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C;\qquad (A+B)(\overline{A}+C)(B+C) = (A+B)(\overline{A}+C)$

证明:

冗余定理

$$AB+\overline{A}C+BC = AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BC = AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC$$

$$= AB+\overline{A}C$$

推论: $AB+\overline{A}C+BCDE = AB+\overline{A}C$

5) 异或公式

$$A \oplus B = \overline{A \odot B}$$

证明： $\overline{AB + \overline{A}\,\overline{B}} = (\overline{A}+\overline{B})(A+B) = \overline{A}B + A\overline{B}$

$A \oplus A = 0,\quad A \oplus \overline{A} = 1,\quad A \oplus 0 = A,\quad A \oplus 1 = \overline{A}$

6) 如果 $A \oplus B \oplus C = D$

那么 $\begin{cases} A \oplus B \oplus D = C; \\ A \oplus C \oplus D = B; \\ B \oplus C \oplus D = A; \end{cases}$

多变量异或，变量为1的个数为奇数，异或结果为1；1的个数为偶数，结果为0；与变量为0的个数无关。

§3.2 逻辑函数的标准形式

3.2.1 最小项及标准与或式

1. 最小项(标准与项)

与项定义为原变量或其反变量的逻辑乘项.

$$AB \quad B\overline{C}D \quad \overline{A}E$$

最小项（标准与项）： n 变量函数，n 变量组成的与项中，每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且只出现一次。

$$n\ \text{个变量} \Rightarrow 2^n\ \text{个最小项}$$

例如：三个变量A, B, C, 它们是 $2^3 = 8$ 个最小项:

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\quad \overline{A}\,\overline{B}C\quad \overline{A}B\overline{C}\quad \overline{A}BC\quad A\overline{B}\,\overline{C}\quad A\overline{B}C\quad AB\overline{C}\quad ABC$$

2. 最小项真值表

变量 / 最小值	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
A B C / 最小项	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1

- 当 **A B C** 取某一组值时, 只有一个最小项值为 **1** , 其他都等于 **0**

- 使某一最小项为1时，变量取值的二进制数对应的十进制数为此最小项的编号

例如:

ABC: 010　　$\overline{A}B\overline{C}=1$　　$010=$ 2

最小项 $\overline{A}B\overline{C}$ 是数 m_2

例如:

2 变量 A, B:　　$m_1=\overline{A}B$,　　$m_3=AB$

4 变量 A, B, C, D:　　$m_1=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$

$m_5=\overline{A}B\overline{C}D$

$m_{13}=AB\overline{C}D$

1: 原变量　　变量取**1**对应于原变量

0: 反变量　　变量取**0**对应于反变量

3. 最小项特点

① 对变量的任意一组取值, 只有一个最小项值为1, 其他项皆为0

② 任意两最小项之积为0 $$m_i \cdot m_j = 0$$

③ 全体最小项之和为1 $$\sum m_i = 1$$

4. 标准与或式

$$F = \overline{A}B + A\overline{C} + A\overline{B}C$$ 与或式

如果与或式中的与项均为最小项（标准与项），构成最小项之和的形式，称为逻辑函数的标准与或式。

例如:

$$\left.\begin{aligned} F_1(A,B,C) &= \overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}BC+ABC \\ &= m_2 + m_6 + m_3 + m_7 \\ &= \sum m(2,3,6,7) \end{aligned}\right\} \text{标准与或式}$$

m 可以忽略

与或式说明，变量取何值时函数F=1。

例 1: 把下列函数转化为标准与或式:

$$F(A,B,C) = AB + BC + AC$$

与或式

$$= AB(C+\overline{C}) + BC(A+\overline{A}) + AC(B+\overline{B})$$

$$\left.\begin{aligned} &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_5 \\ &= \sum m(3,5,6,7) \end{aligned}\right\} \text{标准与或式}$$

注: F(A,B,C) 必须写全，涉及字母顺序即最小项编号

3.2.2 最大项及标准或与式

和项（或项）定义为字母(原变量或反变量)的逻辑加项.

$A+B \qquad \overline{A}+B+\overline{C} \qquad \overline{D}+E+F$

1. 最大项

n 变量组成的或项中, 每个变量都以原变量或反变量的形式出现一次, 且只出现一次, 此或项为最大项（标准或项）。

n 个变量 $\Longrightarrow$ 2^n 个最大项

3变量的最大项真值表

变量 A B C	M_0 $A+B+C$,	M_1 $A+B+\overline{C}$,	M_2 $A+\overline{B}+C$,	M_3 $A+\overline{B}+\overline{C}$,	M_4 $\overline{A}+B+C$,	M_5 $\overline{A}+B+\overline{C}$,	M_6 $\overline{A}+\overline{B}+C$,	M_7 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1
0 1 0	1	1	0	1	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1	0	1	1
1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	1	1	0

- 当 **ABC** 取某一组值时, 只有一个最大项值为**0**, 其他都等于**1**

- 使某一最大项 M_i 为**0**时, **ABC**取值的二进制数对应的十进制数 i 为此最大项的编号

例如:

3个变量 A, B, C

$$M_2 = A+\overline{B}+C \quad (010 \text{ 使 } A+\overline{B}+C = 0)$$

$$M_4 = \overline{A}+B+C$$

4个变量 A,B,C,D

$$M_2 = A+B+\overline{C}+D$$

$$M_{10} = \overline{A}+B+\overline{C}+D$$

注意: 最大项 $\begin{cases} \mathbf{0} \Longleftrightarrow \text{原变量} \\ \mathbf{1} \Longleftrightarrow \text{反变量} \end{cases}$

2. 标准或与式

$$F=(A+\overline{B})(B+C)$$ 或与式

逻辑函数表达式为一组最大项之积的形式，称为标准或与式。

或与式说明，变量取何值时，函数**F=0**。

例如:

$$F_2(A,B,C)=(A+B+C)(A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1

$$=M_0\bullet M_1\bullet M_4\bullet M_5$$

$$=\prod M(0,1,4,5)$$

M 可以被忽略

3.2.3 两种标准式间的关系

1) 最大项与最小项互为反函数

$$\overline{m_i} = M_i \qquad F(A,B,C): \overline{m_1} = \overline{\overline{A}\ \overline{B}\ C} = A + B + \overline{C} = M_1$$

$$\overline{M_j} = m_j$$

001 最小项码 　　 0 0 1 最大项码

2) 如果不在最小项中出现的编号，一定出现在最大项的编号中。

$$F(A,B,C) = \sum m(2,3,6,7)$$ F_1 与或式

$$= \prod M(0,1,4,5)$$ F_2 或与式

A B C	F	F_1	F_2
0 0 0	0		M_0
0 0 1	0		M_1
0 1 0	1	m_2	
0 1 1	1	m_3	
1 0 0	0		M_4
1 0 1	0		M_5
1 1 0	1	m_6	
1 1 1	1	m_7	

$$F = F_1 = F_2$$

F_1 说明函数何时为 1

F_2 说明函数何时为 0

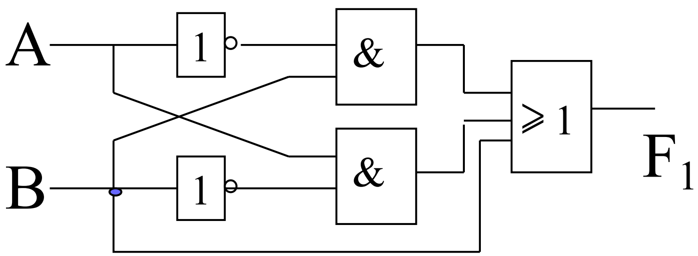
标准与或式和标准或与式是一个逻辑关系的两种表达方式。

§3.3　逻辑函数的公式化简

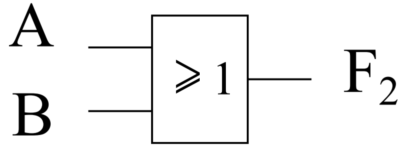
化简目的：少用元件完成同样目的，成本低。

例如：　　用门电路来实现函数功能：

$$F_1 = \overline{A}B + B + A\overline{B}$$



$$F_2 = A + B$$



用 逻辑代数（定律，定理，公式）化简逻辑函数

例 1：化简函数

$$F = A\overline{B} + \overline{\overline{A}C + \overline{B}C}$$

$$= A\overline{B} + \overline{\overline{A}C} \bullet \overline{\overline{B}C}$$

$$= A\overline{B} + (A + \overline{C})(B + \overline{C})$$

$$= A\overline{B} + AB + A\overline{C} + B\overline{C} + \overline{C}$$

$$= A + \overline{C}$$

例 2: 化简函数

$$F = \underbrace{A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}}_{C+\bar{C}\ \text{互补律}} + \bar{D}\bar{E}(B+G) + \bar{D} + (\bar{A}+B)D + A\bar{B}CDE + A\bar{B}DEG$$

吸收律

吸收律

$$= A\bar{B} + \bar{D} + \overline{A\bar{B}}D$$

$$= A\bar{B} + \bar{D} + D \qquad = A\bar{B} + 1 \qquad = 1$$

例 3：将以下函数化简为最简或与式

$$G=(A+B+\overline{C})(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

解：　对偶规则

$$G'=AB\overline{C}+AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$=AB+A\overline{C}+B\overline{C}$$

$$G=(A+B)(A+\overline{C})(B+\overline{C})$$

例 4:

$$L = AB + A\overline{C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$$

摩根定理

$$= A\overline{\overline{B}C} + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D} + ADE(F+G)$$

$$A + \overline{A}B = A + B$$

$$= A + \overline{B}C + B\overline{C} + \overline{B}D + B\overline{D}$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$= A + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}CD + B\overline{C}D + B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}D + BC\overline{D}$$

$$AB + A\overline{B} = A$$

$$= A + \overline{B}D + B\overline{C} + C\overline{D}$$

最简式 $\begin{cases} \text{项数最少} \\ \text{每项中变量数最少} \end{cases}$

§3.4　卡诺图化简逻辑函数

当我们使用逻辑代数简化逻辑函数时，有时并不确定函数是否为最简形式。卡诺图是一种用来简化逻辑函数的最有效工具。

3.4.1 卡诺图

卡诺图与**真值表**相似，列出了所有输入值和输出值。卡诺图由一组单元格组成，每个单元格代表一组二进制输入值。

卡诺图中**单元格**数目为2^n，n 是变量的个数。每个格子代表一个最小项。

n 个变量 → 2^n 个单元格

2个变量的卡诺图：F(A,B)

F

B \ A	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$ m_0	$A\bar{B}$ m_2
1	$\bar{A}B$ m_1	AB m_3

变量取值

$$\left.\begin{array}{l} 0\ \text{代表}\ \ \bar{A},\bar{B} \\ 1\ \text{代表}\ \ A,B \end{array}\right\}\text{最小项}$$

变量位置确定，每小格代表的最小项就确定。

3个变量的卡诺图：F(A,B,C)

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	2	6	4
1	m_1	3	7	5

每两个相邻的单元格之间只有一个变量不同。

AB顺序的排列方法

- 几何相邻：位置相邻
- 逻辑相邻：只有一个变量变化

相邻格

卡诺图的另外画法:

F

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

F

AB \ C	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

每个小格有 n 个相邻格

相邻格与排列方式无关

4个变量的卡诺图: F(A,B,C,D)

F CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

F AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

每个单元格有四个相邻格。

3.4.2 用卡诺图表示逻辑函数

例 1: 用卡诺图表示真值表:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

F: C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

例 2：画出标准与或式和或与式

$$F(X,Y,Z)=\sum m(0,4,6) \qquad F(X,Y,Z)=\prod M(1,2,3,5,7)$$

F 何时为 1（最小项） **F 何时为 0（最大项）**

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	**0**	1	1
1	**0**	**0**	**0**	**0**

等 价

例 3：画出非标准与或表达式

$$F(X,Y,Z) = XY + \overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Z}$$

$$= XY(Z+\overline{Z}) + \overline{Y}Z(X+\overline{X}) + \overline{X}\,\overline{Z}(Y+\overline{Y})$$

$$= XYZ + XY\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$$

$$= \sum m(0,1,2,5,6,7)$$

F Z \ XY	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

直接填入XY:

在 **XY = 11** 的两个格中填**1**

F Z \ XY	00	01	11	10
0	**1**	**1**	**1**	
1	**1**		**1**	**1**

3.4.3 卡诺图化简

1. 求最简与或式

方法:

圈相邻格中的1，合并最小项

根据下面规则将含有 1 的相邻格圈在一起

① 一组必须是一个矩形，2^n 个相邻格

② 尽可能多圈1

③ 每个圈中至少有一个其它圈未圈过的1，1可以重复圈，所有的1都要圈

④ 消去圈内同一变量的原变量和反变量，留下不变的变量是 1 的写原变量，是0 的写反变量，组成“与”项

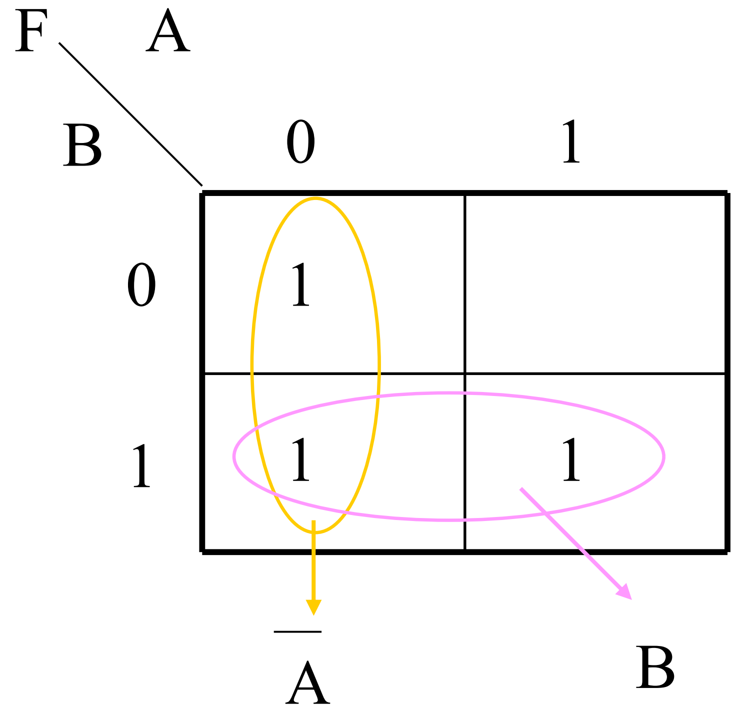
⑤ 加和各圈之间为“或”关系

尽可能多地把相邻的矩形的 2^n 个 1 圈在一起，消去变化了的 n 个变量，留下不变的变量是 1 写原变量，是 0 写反变量，组成"与"项；每个圈中至少有一个别的圈没圈过的 1，所有的 1 都要圈；1 可以重复圈；圈之间为"或"的关系。

圈 1个1，2个1，4个1，8个1，16个1

例 1: 用卡诺图法化简下列函数：

$$F(A,B)=\sum(0,1,3)$$



解:

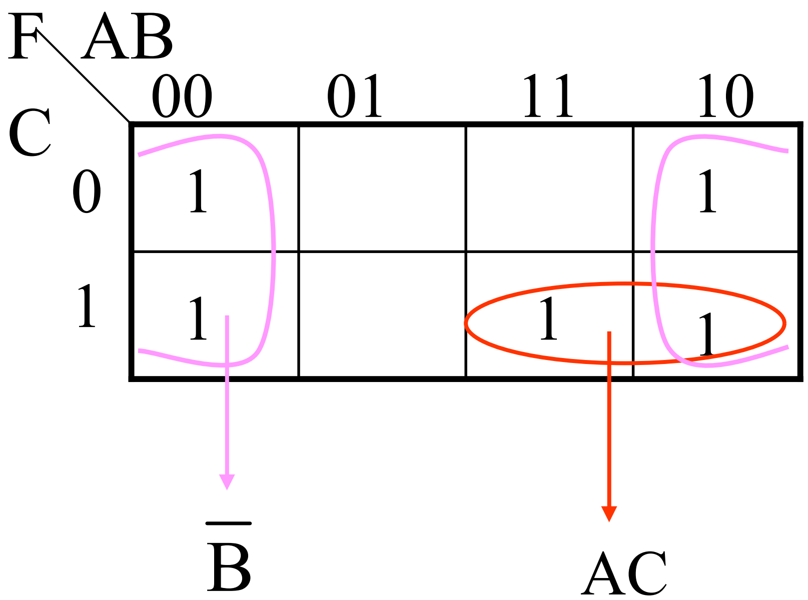
① 用卡诺图表示

② 圈 1

③ 所有与项相加：

$$F=\overline{A}+B$$

例 2: 化简函数



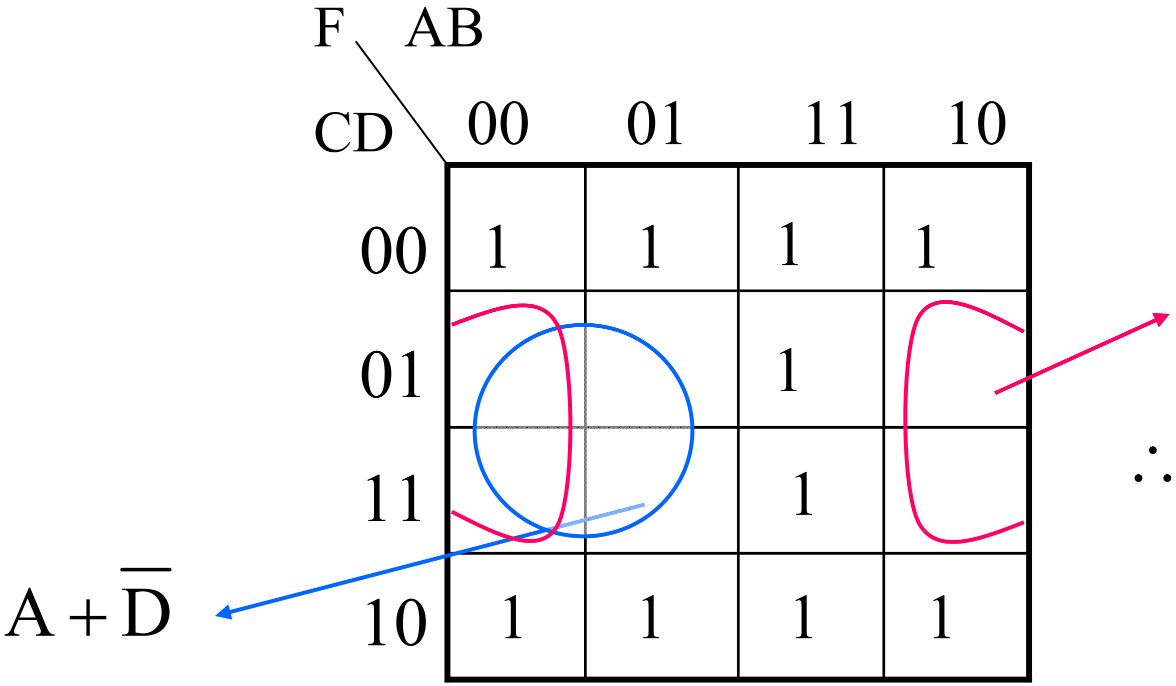
可以划分成多少个组？

$$F=\overline{B}+AC$$

2. 求最简或与式

尽可能多的把相邻矩形个0 圈在一起, 消去变化了的n 个变量, 留下不变的变量, (是0 写原变量, 是 1 写反变量)组成或项; 每个圈中至少有一个别的圈没圈过的0, 所有0 都要圈, 0 可重复圈, 圈之间为与关系.

例 3　圈 0：



$B+\overline{D}$

$$\therefore F=(A+\overline{D})(B+\overline{D})$$

$$=AB+\overline{D}$$

与或式与或与式能够相互转换

总结：**与或式 —— 圈1**

或与式 —— 圈0

例 4:

把下列函数简化为最简与或式

G CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	
01		1		
11				1
10		1	1	

独立的 1 必须圈起来

$$G = B\overline{D} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}CD$$

例 5：把下列函数化简为最简与或式

F C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

F C \ AB	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1	1	

$$\left.\begin{aligned} F &= \mathbf{A\bar{C} + \bar{A}C + AB} \\ &= \mathbf{A\bar{C} + \bar{A}C + BC} \end{aligned}\right\} \text{取其一}$$

最简式不是唯一的

例 6:

把下列函数分别简化为最简与或式和最简或与式

$$F(A,B,C,D)=\overbrace{(\underset{1}{\overline{A}}+\underset{1}{\overline{C}})}^{0}\overbrace{(\underset{1}{\overline{A}}+\underset{0}{B}+\underset{1}{\overline{D}})}^{0}\overbrace{(\underset{1}{\overline{B}}+\underset{0}{D})}^{0}\overbrace{(\underset{1}{\overline{A}}+\underset{0}{B}+\underset{1}{\overline{C}}+\underset{0}{D})}^{0}$$

解: 画出卡诺图，直接圈出 0

F: CD \ AB	00	01	11	10
00		0	0	
01				0
11			0	0
10		0	0	0

最简或与式：圈 0

$$F(A,B,C,D)=(\overline{B}+D)(\overline{A}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{D})$$

最简与或式：圈 1

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}D+B\overline{C}D+\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

例7: 化简函数

$$F(W,X,Y,Z)=\overline{\overline{W}\,\overline{X}+\overline{Y}Z+(\overline{W}+Y)X\overline{Z}+\overline{(W+Z)(\overline{W}+\overline{Y})}}$$

$$\overline{W+Z}+\overline{\overline{W}+\overline{Y}}$$

$$\overline{F}=\overline{W}\,\overline{X}+\overline{Y}Z+\overline{W}X\overline{Z}+XY\overline{Z}+\overline{W}\,\overline{Z}+WY$$

$\overline{F}$

YZ \ WX	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11	1		1	1
10	1	1	1	1

直接在 $\overline{F}$ K-map 中填1, 圈0

$$\overline{F}=(\overline{W}+Y+Z)(W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})$$

$$F=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{W}+Y+Z}+\overline{W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}}$$

$$=W\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{W}XYZ$$

例8: $F = A\bar{B}C + \bar{A}\bar{D} + AB\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D}$

化简上述函数，并分别使用与非门和或非门电路实现。

解: 用卡诺图表示

F (CD \ AB)	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

1) 用与非门

$\Longrightarrow$ 圈 1

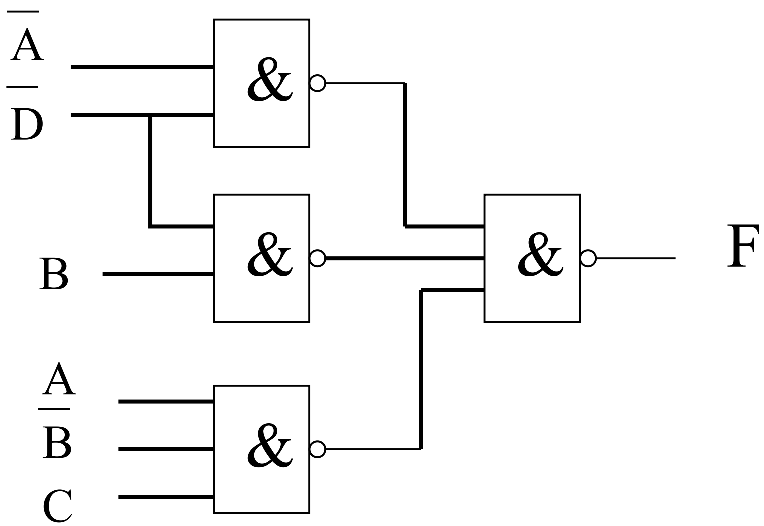
$$F = \overline{\overline{\bar{A}\bar{D} + B\bar{D} + A\bar{B}C}}$$

$$= \overline{\overline{\bar{A}\bar{D}} \bullet \overline{B\bar{D}} \bullet \overline{A\bar{B}C}}$$

与或 $\longrightarrow$ 与非 - 与非

$$F=\overline{\overline{\bar{A}\bar{D}}\bullet\overline{B\bar{D}}\bullet\overline{A\bar{B}C}}$$

与非-与非门



2) 用或非门 ⟹ 圈 0

F: CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11				1
10	1	1	1	1

$$F = \overline{\overline{(A+\bar{D})(\bar{B}+\bar{D})(\bar{A}+B+C)}}$$

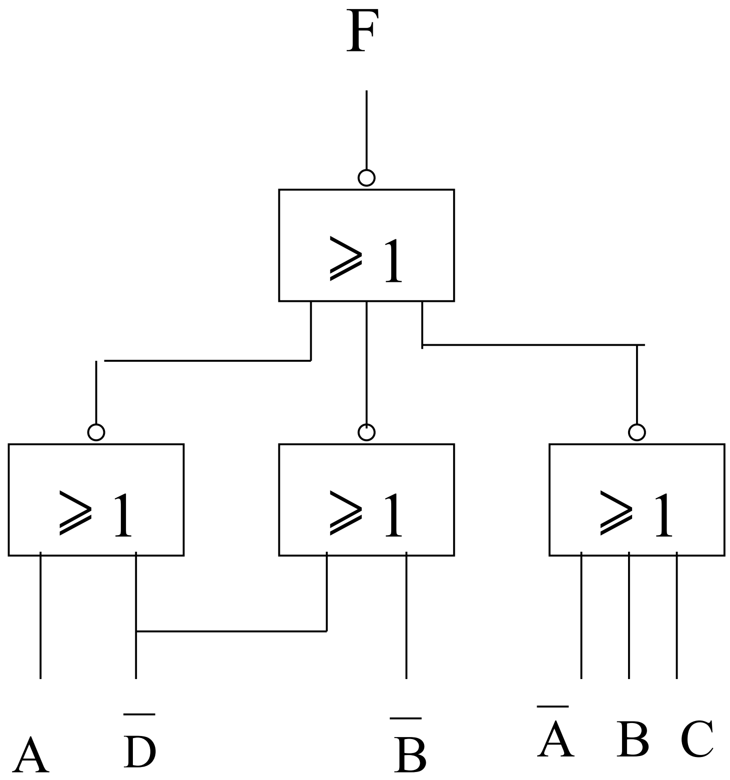
$$F = \overline{\overline{A+\bar{D}} + \overline{\bar{B}+\bar{D}} + \overline{\bar{A}+B+C}}$$

或与 ⟹ 或非 - 或非

化简：每个圈需一个门实现，各圈之间加一个门

$$F=\overline{\overline{A+\overline{D}}+\overline{\overline{B}+\overline{D}}+\overline{\overline{A}+B+C}}$$

或非-或非门



3.4.4 具有随意项的逻辑函数的化简

实际逻辑电路中, 有些变量(输入)组合不会出现或不允许出现, 如BCD码中1010~1111; 这些组合对输出不产生任何影响(是 1 是 0 不影响输出), 这种组合称 “随意项”.

例子:

我们使用 A,B,C 分别表示正转，反转，停：

A=1 正转

B=1 反转

C=1 停

任何时候仅一个结果

$$ABC\begin{cases}100\ \text{or}\\010\ \text{or}\\001\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}000\\011\\101\\110\\111\end{matrix}\right\}\text{随意项}$$

随意项

$$\left.\begin{array}{l}\text{卡诺图}\\\text{真值表}\end{array}\right\}\ \text{X 或 } \phi \qquad \text{逻辑函数}\ \left\{\begin{array}{l}\sum d(\quad)\\ =0\end{array}\right.$$

d ( ) 括号中为最小项编号

化简时，根据化简需要，φ 可作**1** 或 作**0**;

但不能既当**1** 同时又当**0**

例1: 用卡诺图化简函数

$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,7,11,15)+d(0,2,5)$$

解: 卡诺图　　　　下图中的标示: Φ_1, Φ_2, 和 Φ_3

F CD \ AB	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	1	Φ_3		
11	1	1	1	1
10	Φ_2			

如果:

$$\Phi_3=1,\Phi_1=\Phi_2=0$$

圈 1:

$$F=CD+\overline{A}D$$

圈 0:

$$F=D(\overline{A}+C)$$

如果： $\Phi_1 = \Phi_2 = 1, \Phi_3 = 0$

F / AB, CD	00	01	11	10
00	Φ_1			
01	1	Φ_3		
11	1	1	1	1
10	Φ_2			

圈 1：

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} + CD$$

例 2: 化简带有随意项的逻辑函数

$$G = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B，\qquad AB + AC = 0$$

$$AB = \Phi \qquad AC = \Phi$$

物理意义：这两项在函数中不起作用，不是数学上的等于**0**

C \ AB (G)	00	01	11	10
0	1	1	φ	
1		1	φ	φ

$$G = B + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

3.4.5 引入变量卡诺图

当变量多于五个时，可用VEM 方法来简化逻辑表达式，对于一个含有 ***n*** 变量的表达式，拿出一个变量当做新变量，然后画出 ***n*-1** 卡诺图。

例 1: 化简函数

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}\cdot\overline{C}+ABC$$

3-变量

拿出变量 ***C*** 在一个 **2**-变量卡诺图中将其画出：

F B\A	0	1
0	$\overline{C}$	$\overline{C}$
1	0	$C+\overline{C} \rightarrow 1$

当A=0, B=0 时，$F=\overline{C}$，在m_0 格填 $\overline{C}$

圈的原则与圈1相同，合并相同变量

$$F=\overline{B}\cdot\overline{C}+AB$$

例 2: $$F(C,D,E)=C\overline{E}+\overline{C}E+\overline{D}E+CDE$$

拿出 E 作为一个新变量（通常是最后一个变量）

F: D \ C	0	1
0	E	$E+\overline{E}$
1	E	$E+\overline{E}$

$$F=E+C$$

小 结

- 逻辑运算的基本定律、规则、公式
- 公式法化简逻辑函数
- 卡诺图法化简逻辑函数
  - 含随意项的函数化简
  - 变量卡诺图

作业:

3 . 8(1-10)
3 . 10
3 . 11(1, 3, 5, 7)
3 . 12 (1, 3, 5, 7)
3 . 15 (1, 3, 5, 7, 9)
3 . 17 (2, 4, 6)
3 . 18 (1, 3)

3 . 19(1, 3)
3 . 20
3 . 21(1, 3)
3 . 22(1, 3)
3 . 23 (2)