幂法

董波
数学科学学院
大连理工大学

幂法、反幂法作用

求方阵的全部特征值

求特征多项式的方法　　计算量大

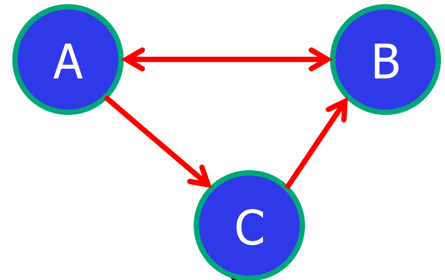
实际应用中仅需矩阵的极端特征值

模最大特征值　　　　幂法

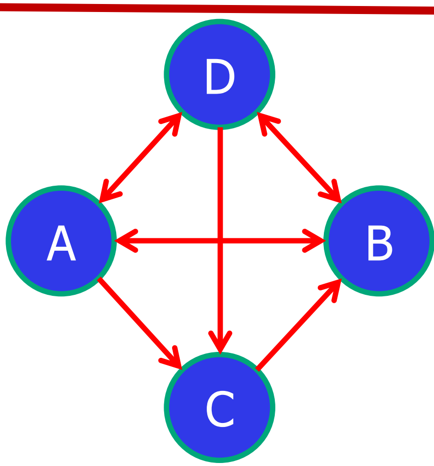
模最小特征值　　　　反幂法

应用：Pagerank

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda=1 \quad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda=1 \quad x=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda=1 \quad x=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

最大特征值1对应的特征向量反映重要性

幂法

假定n阶方阵A可对角化，其特征值和对应的特征向量分别为

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \qquad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

对任一n维向量v，均可表示为$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. 故

$$Av = A\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\right) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n$$

从而

$$A^k v = \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \alpha_2 \lambda_2^k x_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k x_n = \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right)$$

有

$$\frac{A^k v}{\lambda_1^k} \to \alpha_1 x_1 \qquad \frac{A^k v}{A^{k-1} v} \to \lambda_1$$

收敛速度取决于比值 λ_2/λ_1 的大小

幂法流程

幂法的本质是 $v_k = A^k v_0$

算法流程:

任取一个非零初始向量 $v_0 \in R^n$

$$v_1 = Av_0$$

$$v_2 = A^2 v_0 = Av_1$$

$$v_{k+1} = A^{k+1} v_0 = Av_k$$

存在问题:

$\alpha_1 = 0$ 将会怎样?

重新选择初始向量

迭代向量的各个不等于零的分量将随$k \to \infty$而趋于无穷

规范化迭代向量

幂法

假定n阶方阵A具有n个线性无关的特征向量

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

且对应的特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

则对任一n维非零向量 v_0，经使用迭代过程

$$v_k = A^k v_0$$

计算可得

$$v_k = \alpha_1 \lambda_1^k x_1, \qquad \alpha_1 \neq 0 \qquad \frac{v_k}{v_{k-1}} = \lambda_1$$

幂法改进

任取初始向量：$v_0 \neq 0$

迭代 **规范化**

$$v_1 = Av_0, \qquad u_1 = \frac{v_1}{\max(v_1)} = \frac{Av_0}{\max(Av_0)}$$

$$v_2 = Au_1 = \frac{A^2 v_0}{\max(Av_0)}, \qquad u_2 = \frac{v_2}{\max(v_2)} = \frac{A^2 v_0}{\max(A^2 v_0)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$v_k = Au_{k-1} = \frac{A^k v_0}{\max(A^{k-1} v_0)}, \qquad u_k = \frac{v_k}{\max(v_k)} = \frac{A^k v_0}{\max(A^k v_0)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

则有迭代向量序列$\{v_k\}$及规范化向量序列$\{u_k\}$。

收敛性分析

$$u_k = \frac{v_k}{\max(v_k)} = \frac{\lambda_1^k\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n\right)}{\max\left(\lambda_1^k\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n\right)\right)} \to \frac{x_1}{\max(x_1)}$$

$$v_k = \frac{A^k v_0}{\max(A^{k-1} v_0)} = \frac{\lambda_1^k\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n\right)}{\max\left(\lambda_1^{k-1}\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} x_2 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1} x_n\right)\right)}$$

于是， $\mu_k = \max(v_k) \to \lambda_1$

复杂情形

- 重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = -\lambda_{r+1} = \cdots = -\lambda_{r+s}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = \overline{\lambda}_{r+1} = \cdots = \overline{\lambda}_{r+s}$

反幂法

作用：反幂法用来计算矩阵A按模最小的特征值及对应的特征向量

1. 假设实矩阵A具有n个线性无关的特征向量$x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. 相应的特征值满足$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$

反幂法：对于A^{-1}应用幂法：对于给的初始向量v_0

$$\begin{cases} u_k = A^{-1} v_{k-1} \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases} \xrightarrow{\text{避免求逆}} \begin{cases} A u_k = v_{k-1} \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases} \xrightarrow{\text{A=LU}} \begin{cases} L w_k = v_{k-1} \\ U u_k = w_k \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases}$$

带原点平移的反幂法：对$(A - pI)^{-1}$用幂法

$$\begin{cases} u_k = (A - pI)^{-1} v_{k-1} \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases} \xrightarrow{\text{避免求逆}} \begin{cases} (A - pI) u_k = v_{k-1} \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases} \xrightarrow{\text{A-pI=LU}} \begin{cases} L w_k = v_{k-1} \\ U u_k = w_k \\ v_k = u_k / \max(u_k) \end{cases}$$