

## 直线光栅化算法

- □ DDA算法
- □ Bresenham算法

#### 圆光栅化算法

- □中点算法
- □中点整数算法
- □中点整数优化算法







# 2.1直线光栅化法

## **DDA算法 (Digital Differential Analyzer)**

- David F. Rogers 的描述 (适用于所有象限)
- James D. Foley的描述 (只适用于第一象限 , 且 K<1)
- 本教程的描述(适用于所有象限及任何端点)

#### Bresenham算法

- 基本原理
- Bresenham算法
- 整数 Bresenham算法
- 一般整数 Bresenham算法







# 2.1.1 DDA算法算法

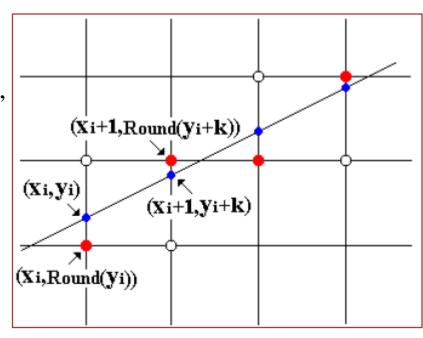
## 1)David F. Rogers 描述描述

直线的基本微分方程是:

$$\frac{dy}{dx} = 常数 (k)$$

设直线通过点 P1(x1,y1)和P2(x2,y2),则直线方程可表示为:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$







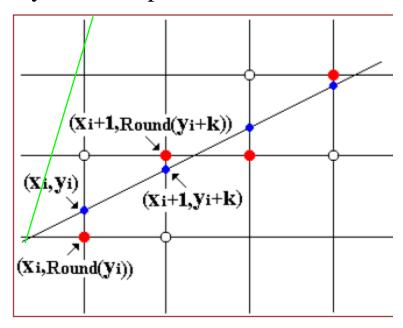


## 1)David F. Rogers 描述描述

◆ 如果已知第 i点的坐标 , 可用步长 StepX 和 StepY得到

第 i+1点的坐标为:

- xi+1=xi+ StepX
- yi+1=yi+ StepY \_ 或 yi+1=yi+ k \* StepX
- ◆ 例图中
  - k < 1
  - StepX=1
  - StepY=k
- ◆ 将算得的直线上每个点的当前坐标, 按四舍五入得到光栅点的位置







# 1) David F. Rogers 描述

```
// Digital Differential Analyzer (DDA) routine for rasterizing a
     line
// The line end points are (xs,ys) and (xe,ye) assumed not equal.
// Round is the function. Note: Many Round functions are
    floor functions, i.e Round (-8.5)=-9 rather than -8. The
    algorithm assumes this is the case.
// Approximate the line length
If (|xs- xe | ≥ | ys-ye |) then //插补长度
   Length \leftarrow |xs- xe |;
else
   Length \leftarrow | ys-ye |;
end if
```







## 1) David F. Rogers 描述描述

```
// Select the larger of \Delta x or \Delta y to be one raster unit.
StepX = (xe - xs) / Length;
StepY = (ye -ys) / Length;
x = xs; //首点
y = ys;
i = 1; // Begin main loop
while (i≤ Length)
    WritePixel (Round(x), Round(y), value));
    x = x + StepX;
    y = y + StepY;
    i++;
end while
```







### 2) James D.Foley 描述描述

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

有:

$$y_{i+1} = yi + k * Step X$$

- □ 若 0 < k < 1,即  $\Delta x > \Delta y$ 
  - □因光栅单位为1,
  - □可以采用每次 x方向增加 1,
  - □而 y方向增加 k的办法得到下一个直线点。





## 2) James D.Foley 描述描述

```
void Line ( //设 0≤ k≤ 1,xs<xe
   int xs,ys; //左端点
   int xe,ye; //右端点
   int value) //赋给线上的象数值
   int x; //x以步长为单位从 xs增长到 xe
   double dx = xe - xs;
   double dy =ye-ys;
   double k =dy/dx; // 直线之斜率 k
   double y =ys;
   for (x=xs; x \le xe; x++)
       WritePixel(x,Round(y),value);//置象数值为 value
       y+=k; // y移动步长是斜率 k
    } // End of for
} // Line
```







### 3)已有算法描述分析

## Rogers 描述:

- ◆  $\Re$ 用 x = x + Step X , y = y + Step Y ,
- ◆逼近点并不是直线的一个最好的逼近;

## D.Foley描述: 可能引起积累误差

- ◆未分析直线端点不在象素点上的情况;
- ◆只给出 0一 450第一个八卦限的描述。

## 为避免引起积累误差, D.Foley描述中采用

- $\bullet$  double dx =xe-xs;
- ◆double dy =ye-ys;
- ◆double k =dy/dx; // 直线之斜率 k







## 4)本教程描述——任意方向直线插补算法

```
void DDALine (
   float xs, ys; //起点
   float xe, ye; //终点
   int value) //赋给线上的象数值
   int n, ix, iy, idx, idy;
   int Flag; //插补方向标记
   int Length; //插补长度
   float x, y, dx, dy;
```









```
dx=xe-xs;
               dy=ye-ys;
if (fabs(dy)<fabs(dx)) { //X方向长, 斜率 <=1
   Length=abs(Round(xe)-Round(xs));
   Flag=1; //最大的插补长度和方向标记
   ix=Round(xs); //初始 X点
   idx=isign(dx);//X方向单位增量
   y= ys+dy/dx*((float)(ix)-xs); //初始 Y点修正
   dy=dy/fabs(dx); //Y方向斜率增量
else { // Y方向长, 斜率 >1
   Length=abs(Round(ye)-Round(ys));
   Flag=0;
   iy= Round(ys); //初始 Y点
   idy=isign(dy);//Y方向单位增量
    x= xs+dx/dy*((float)(iy)-ys); //初始 X点修正
    dx=dx/fabs(dy); //X方向斜率增量
```







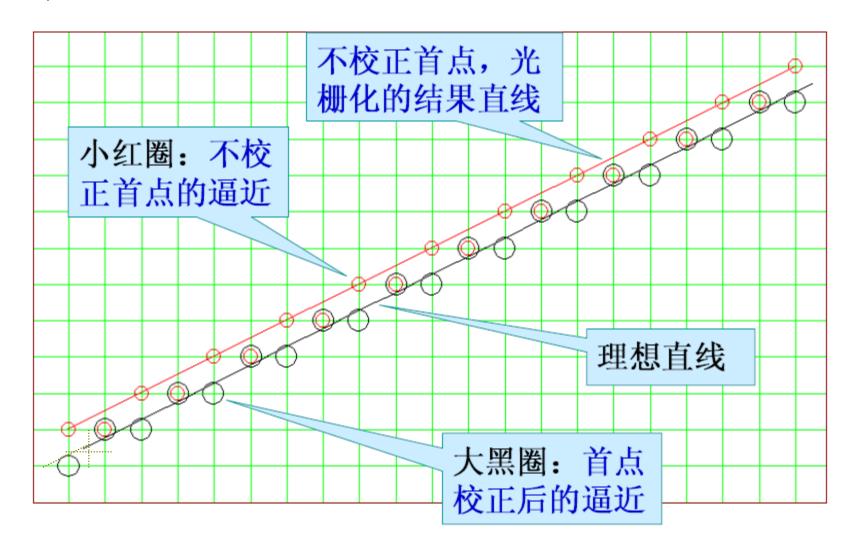
```
if (Flag) { //X方向单位增量
    for (n=0; n<= Length; n++) {//X方向插补过程
        WritePixel(ix, Round(y), value);
        ix += idx;
        y+=dy;
   } //End of for
} //End of if
else { //Y方向斜率增量
    for (n=0; n<= Length; n++) {//Y方向插补过程
        WritePixel (Round(x), iy, value);
        iy+=idy;
        x+=dx;
      //End of for
} //End of else
 //Finish
```







# 5)本教程描述 ——首点校正对逼近的影响









#### 2.1.2 Bresenham算法

- □ Bresenham算法是计算机图形学典型的直 线光栅化算法。
- □ 从另一个角度看直线光栅化显示算法的原理:

由直线的斜率确定选择在 x方向或 y方向上每次递增 (减) 1个单位 ,另一变量的递增 (减) 量为 0或 1,它取决于实际直线与最近光栅网格点的距离 ,这个距离的最大误差为 0.5。

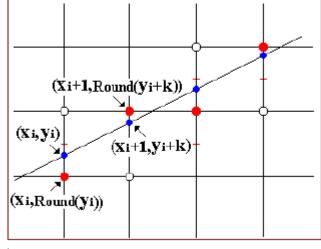






## 1) Bresenham的基本原理

- □ 假定直线斜率 k在 0~1之间 。此时 ,只需考 虑 x方向每次递增 1个单位 , 决定 y方向每次 递增 0或 1。 □
- □ 设直线的当前点为 (xi,y)当前光栅点为 (xi,yi)
- □ 下一个 直线的点应为 (xi+1,y+k) 直线的光栅点
  - ▶ 或为右光栅点 (xi+1,yi) ( y方向递增量 0)
  - ▶ 或为右上光栅点 (xi+1,yi+1) ( y方向递增量 1)





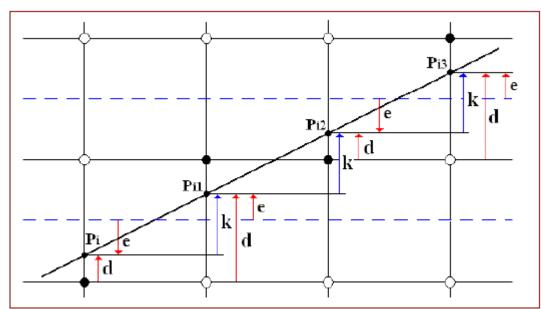




□ 记 直线与它垂直方向最近的下光栅点的误差为 d,

有: d=(y+k)-yi, 且

- $\square 0 \le d \le 1$
- □当 d<0.5: 下一个象素应取右光栅点 (xi+1,yi)
- □当 d≥ 0.5: 下一个象素应取右上光栅点 (xi+1,yi+1)



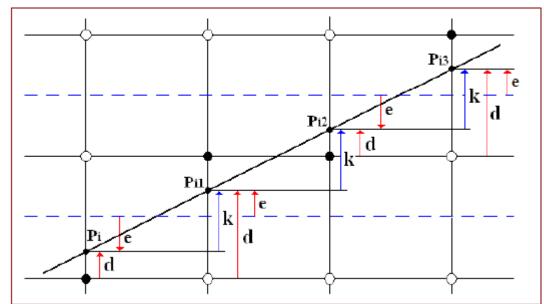






### 1) Bresenham的基本原理

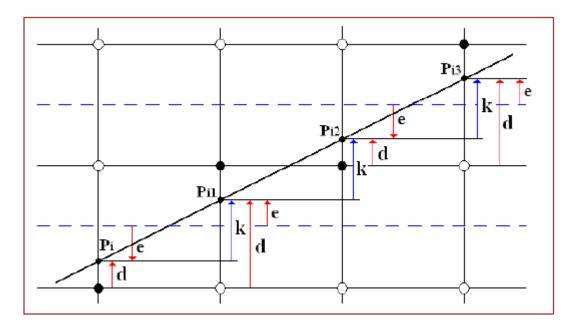
- □ 如果直线的 (起)端点在整数点上,误差项 d的 初值: d0=0
- x坐标每增加 1, d的值相应递增直线的斜率值 k, 即: d=d+k
- □ 一旦 d≥ 1, 就把它减去 1, 保证 d的相对性, 且在 0-1之间。







- □ 令 e=d-0.5, 关于 d的判别式和初值可简化成:
  - □ e的初值 e0= -0.5, 增量亦为 k;
  - □ e<0时, 取当前象素 (xi,yi)的右方象素 (xi+1,yi);
  - □ e>0 时 , 取当前象素 (xi,yi) 的右上方象素 (xi+1,yi+1);
  - □ e=0时 , 可任取上 、下光栅点显示 。









### 1) Bresenham的基本原理

□ Bresenham算法的构思巧妙: 它引入动态 误差 e, 当 x方向每次递增 1个单位, 可根据 e的符号决定 y方向每次递增 0或 1。

- □e<0, y方向不递增
- □e>0, y方向递增1
- □x方向每次递增1个单位, e=e+k

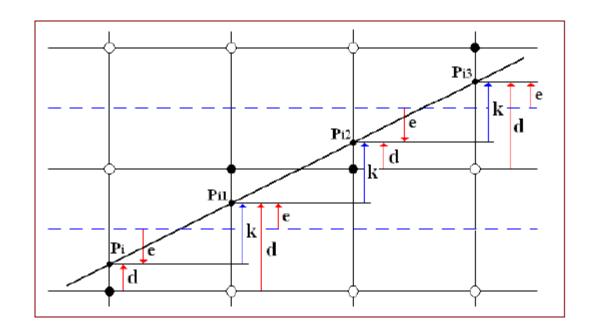






## 1) Bresenham的基本原理

□ 因为 e是相对量 , 所以当 e>0时 , 表明 e的 计值将进入下一个参考点 (上升一个光栅 点), 此时须: e=e-1



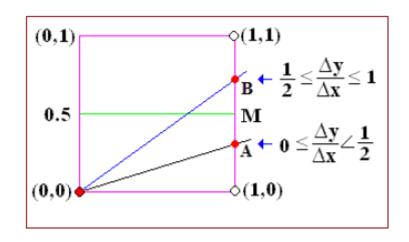


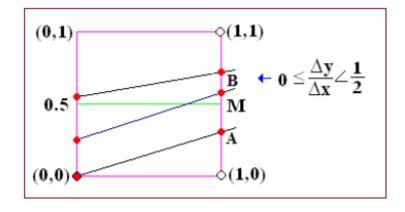




# 2) Bresenham算法的实施 ——Rogers 版

- □ 通过 (0,0)的所求直线 的斜率大于 0.5, 它与 x=1直线的交点离 y=1 直线较近, 离 y=0直 线较远, 因此取光栅 点 (1,1)比 (1,0)更逼近 直线;
- □ 如果 斜率 小于 0.5, 则 反之;
- □ 当 斜率 等于 0.5, 没有确定的选择标准, 但本算法选择 (1,1)。











# 2) Bresenham算法的实施——Rogers 版

```
//Bresenham's line resterization algorithm for the first octal.
//The line end points are (xs,ys) and (xe,ye) assumed not equal.
// Round is the integer function.
// x,y, \triangle x, \triangle y are the integer, Error is the real.
//initialize variables
X=XS
y=ys
\Delta x = xe -xs
\Delta y = ye - ys
//initialize e to compensate for a nonzero intercept
Error = \Delta y/\Delta x-0.5
```







# 2) Bresenham算法的实施——Rogers 版

```
//begin the main loop
for i=1 to \Delta x
     WritePixel (x, y, value)
     if (Error \ge 0) then
          y=y+1
           Error = Error -1 提问学生why?
     end if
     x=x+1
     Error = Error + \Delta y / \Delta x
next i
finish
```







### 3)整数 Bresenham算法

- □上述 Bresenham算法在计算直线斜率和误差项时要用到浮点运算和除法,采用整数算术运算和避免除法可以加快算法的速度。
- □ 由于上述 Bresenham算法中只用到误差项 (初值 Error = $\Delta$  y/ $\Delta$ x-0.5) 的符号
- □ 因此只需作如下的简单变换:
  NError = 2\*Error\*Ax
- □ 即可得到整数算法, 这使本算法便于硬件 (固件)实现







# 3)整数 Bresenham算法

```
//Bresenham's integer line resterization algorithm
for the first octal.
//The line end points are (xs,ys) and (xe,ye) assumed
not equal. All variables are assumed integer.
//initialize variables
X=XS
y=ys
\Delta x = xe -xs
\Delta y = ye - ys
//initialize e to compensate for a nonzero intercept
NError = 2*\Delta y - \Delta x
                               (Error = \Delta y/\Delta x-0.5)
```







# 3)整数 Bresenham算法

```
//begin the main loop
for i=1 to \Delta x
     WritePixel (x, y)
     if (NError >=0) then
          y=y+1
          NError = NError -2*\Delta x (Error = Error -1)
     end if
     x=x+1
     NError = NError +2*\Delta y (Error = Error +\Delta y/\Deltax)
next i
finish
```







### 4)一般 Bresenham算法算法

- 要使第一个八卦的 Bresenham算法适用于
  - 一般直线, 只需对以下 2点作出改造:
  - □ 当直线的斜率 |k|>1时 , 改成 y的增量总是 1, 再用 Bresenham误差判别式确定 x变量是否 需要增加 1;
  - □ x或 y的增量可能是 "+1"或 "-1", 视直线所在的象限决定。





```
//Bresenham's integer line resterization algorithm for all quadrants
//The line end points are (xs,ys) and (xe,ye) assumed not equal. All variables
are assumed integer.
//initialize variables
x=xs
y=ys
\Delta x = abs(xe - xs)
                         \Delta x = xe -xs
\Delta y = abs(ye - ys)
                         \Delta y = ye - ys
sx = isign(xe - xs)
sy = isign(ye - ys)
//Swap \Delta x and \Delta y depending on the slope of the line.
if \Delta y > \Delta x then
      Swap(\Delta x, \Delta y)
     Flag=1
else
    Flag=0
```





```
//initialize the error term to compensate for a nonezero
intercept
NError = 2*\Delta y - \Delta x
//begin the main loop
for i=1 to \Delta x
     WritePixel(x, y, value)
     if (NError>=0) then
          if (Flag) then //\Delta y > \Delta x
             x=x+sx
                                        Y=Y+1
          else
             y=y+sy
          end if // End of Flag
          NError = NError - 2*\Delta x
     end if // End of NError
```







# 4)一般 Bresenham算法算法

```
if (Flag) then //\Delta y > \Delta x
       y=y+sy
    else
                               X=X+1
       X=X+SX
    end if
       NError = NError + 2*\Delta y
next i
finish
```







# 2.2 圆光栅化算法

#### 2.2.1利用圆的八方对称性画圆

- □对圆的分析均假定圆心在坐标原点, 因为即使圆心不在原点, 可以通过一个简单的 平移即可, 而对原理的叙述却方便了许多
- □ 即考虑圆的方程为: x<sup>2</sup>+y<sup>2</sup>=R<sup>2</sup>



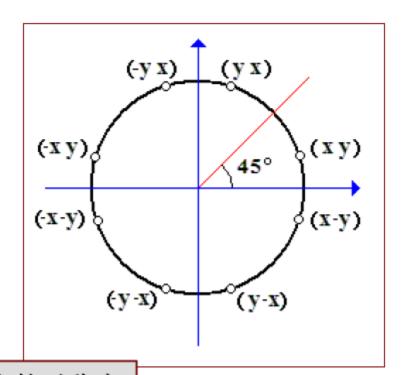




## 2.2.1利用圆的八方对称性画圆利用圆的八方对称性画圆

# void CirclePoints (int x,int y, int value)

```
WritePixel (x, y, value);
WritePixel (-x, y, value);
WritePixel (-x, -y, value);
WritePixel (x, -y, value);
WritePixel (y, x, value);
WritePixel (-y,x, value);
WritePixel (-y, -x, value);
WritePixel (y, -x, value);
```



显然,当x=0或x=y或y=0时,圆上的对称点只有4个,因此,CirclePoints()需要修正。





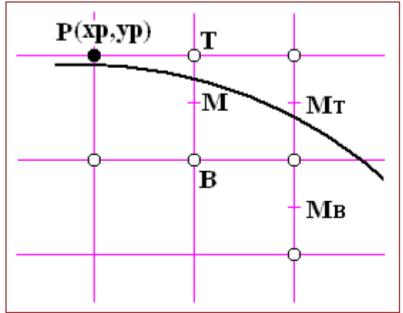


#### 2.2.2 中点圆算法 ——原理

□ 设 d是点 p(x,y)到圆心的距离 , 有:

$$d = F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

□ 按照 Bresenham算法符号变量的思想 , 以圆的下 2 个可选象素 中点的函数值 d的符号 决定选择 2个可 选象素 T和 B中哪一个更接近圆而作为圆的显示点 ?







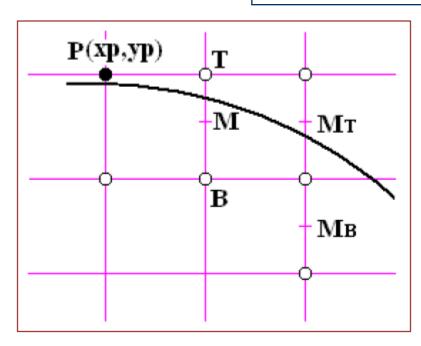


# 2.2.2 中点圆算法 ——原理

□  $d_M$ =  $F(x_M,y_M)$ =  $F(x_p+1,y_p-0.5)$ = $(x_p+1)^2$ + $(y_p-0.5)^2$ - $R^2$  如果  $d_M$ <0,表示下一中点 M在圆内, 用 T点逼近, 得

- $\Box$   $d_{MT} = F(x_{MT}, y_{MT}) = F(x_p+2, y_p-0.5) = (x_p+2)^2 + (y_p-0.5)^2 R^2$

注意:  $x_p^2+y_p^2-R^2$ 并不等于零

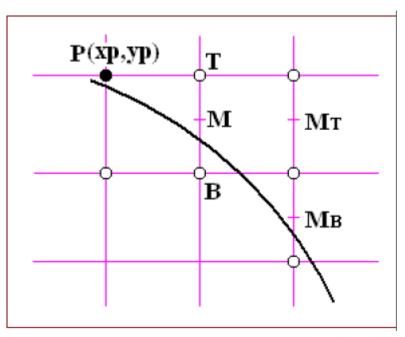






如果  $d_{M}>0$ ,表示下一中点 M在圆外 , 用 B点逼近 , 得

- $\Box$  d<sub>MB</sub>= F(x<sub>MB</sub>, y<sub>MB</sub>)= F(x<sub>p</sub>+2,y<sub>p</sub>-1.5)=(x<sub>p</sub>+2)<sup>2</sup>+(y<sub>p</sub>-1.5) <sup>2</sup>-R<sup>2</sup>
- □结论:
- □根据中点d的值, 决定
  - □显示的光栅点 (T或B)
  - □新的  $\Delta d$  (  $\Delta d_{MT}$ 或  $\Delta d_{MB}$  )
  - □更新 d





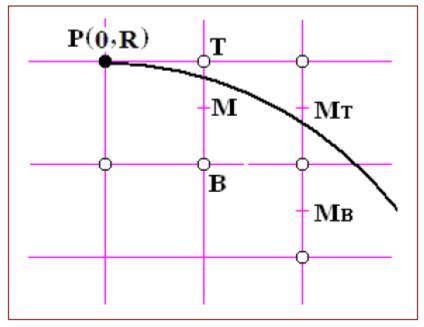




# 2.2.2 中点圆算法 ——原理

#### 初值

- 口得 $x_{M0}=0+1$ , $y_{M0}=R-0.5$
- $\Box$  d<sub>M0</sub>= F(x<sub>M0</sub>, y<sub>M0</sub>)= F(1,R-0.5)= 1<sup>2</sup>+( R-0.5) <sup>2</sup>-R<sup>2</sup>=1.25-R









## 2.2.3 中点圆算法 ——实施

```
//中点圆算法(假设圆的中心在原点)
void MidPointCircle(int radius,int value)
{
    int x=0;
    int y= radius;
    double d=1.25- radius;
```







# 2.2.3 中点圆算法 ——实施

```
While (y>x) {
   CirclePoints(x, y,value);
   if (d<0) //选择 T
       d+=2.0*x+3.0;
   else { //选择 B
       d+=2.0*(x-y)+5.0;
       y--;
   X++;
   } //End of while
```







## 2.2.4 中点圆整数算法 ——原理

- □ 中点圆算法 的半径是整数 , 而 用于该算法 符号判别的变量 d (初值 d=1.25- radius) 采用浮点运算 , 会花费较多的时间 。
- □ 为了将其改造成整数计算 , 定义新变量 : D = d 0.25
- □ 那么判别式 d<0等价于 D<-0.25。
- □ 在 D为整数情况下 , D<-0.25和 D<0等价
- □ 仍将 D写成 d(新的初值 d=1-radius),可得到 中点圆整数算法。







## 2.2.4中点圆整数算法——实施

```
//中点圆算法 (假设圆的中心在原点)
void MidPointCircle(int radius,int value)
   int x=0;
   int y= radius;
   int d=1- radius;
                        d=1.25-
  //CirclePoints(x, y, value);
```







# 2.2.4中点圆整数算法——实施

```
While (y>x) {
    CirclePoints(x, y,value);
    if (d<0) //选择 T
                          d+=2.0*x+3.0
        d+=2*x+3;
    else { //选择 B
                          d+=2.0*(x-y)+5.0
        d+=2*(x-y)+5;
        y--;
    } //End of else
    X++;
    //CirclePoints(x, y,value);
} //End of while
```



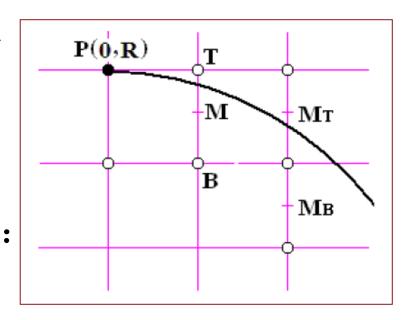




## 2.2.5中点圆整数优化算法 — 原理

- □ 用 Δd修正 d
- □ 1) 选择 T点  $(x_p \leftarrow x_p + 1)$ :
  - □d的增量 (一次差分):

$$\rightarrow \Delta d_T = 2x_p + 3$$



□∆d的增量 (二次差分):

$$\Delta^2 d_T = 2(x_p+1)+3-(2x_p+3)=2$$

$$\Delta^2 d_B = 2(x_p+1)-2y_p+5-(2x_p-2y_p+5)=2$$







# 2.2.5中点圆整数优化算法 — 原理

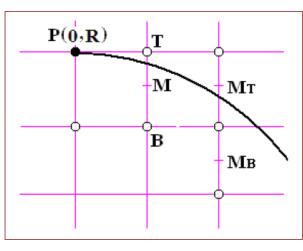
- □ 2) 选择 B点  $(x_p \leftarrow x_p + 1, y_p \leftarrow y_p 1)$ :
  - □d的增量 (一次差分):

$$\Delta d_B = 2x_p - 2y_p + 5$$

□∆d的增量 (二次差分):

$$\Delta^2 d_T = 2(x_p+1)+3-(2x_p+3)=2$$

$$\Delta^2 d_B = 2(x_p+1)-2(y_p-1)+5-(2x_p-2y_p+5)=4$$









## 2.2.5中点圆整数优化算法—实施

```
//中点圆整数优化算法 (假设圆的中心在原点)
void MidPointCircleInt(int radius,int value)
   int x=0;
   int y= radius;
   int d=1- radius;
   int dt=3;
   int db = -2*radius + 5;
```







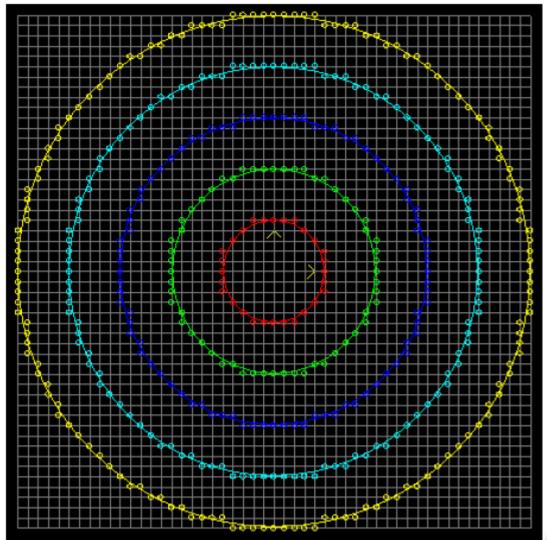
```
While (y>=x) {
          CirclePoints(x, y,value);
          if (d<0) //选择 T
                d=d+dt;
               dt+=2;
                db+=2;
          else { //选择 B
                d=d+db;
                dt+=2;
                db+=4;
                y--;
          x++;
     } //End of while
} //Finish
```







## 2.2.5中点圆整数中点圆整数优化算法 — 例子







# 总结

- □直线光栅化算法
  - □ DDA算法
  - □ Bresenham算法
- □圆光栅化算法
  - □中点算法
  - □中点整数算法
  - □中点整数优化算法
- □基本方法
  - □增量算法
  - □ 符号算法







# 2.3 椭圆光栅化算法







## 2.3.1 椭圆的扫描转换

中点画圆法可以推广到一般二次曲线的生成,下面以中心在原点的标准椭圆的扫描转换为例说明。 设椭圆的方程为

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

其中, a为沿x轴方向的长半轴长度, b为y轴方向的短半轴长度, a、 b均为整数。 不失一般性, 我们只讨论第一象限椭圆弧的生成。需要注意的是, 在处理这段椭圆时, 必须以弧上斜率为-1的点(即法向量两个分量相等的点)作为分界把它分为上部分和下部分, 如图2.6所示。







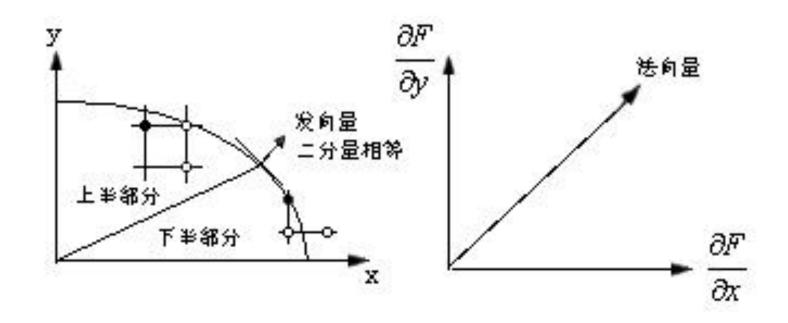


图 2.6 第一象限的椭圆弧





该椭圆上一点(x, y)处的法向量为

$$N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j = 2b^2xi + 2a^2yj$$







其中, i和j分别为沿x轴和y轴方向的单位向量。 从图2.6可看出, 在上部分, 法向量的y分量更大, 而在下部分, 法向量的x分量更大, 因而, 在上部分若当前最佳逼近理想椭圆弧的像素 $(x_P,y_P)$ 满足下列不等式

$$b^2(x_P+1) \le a^2(y_P-0.5)$$

而确定的下一个像素不满足上述不等式,则表明椭圆弧从上部分转入下部分。







在上部分,假设横坐标为 $x_P$ 的像素中与椭圆弧更接近点是 $(x_P, y_P)$ ,那么下一对候选像素的中点是

 $(x_P+1, y_P-0.5)$ 。 因此判别式为

$$d_1 = F(x_P + 1, y_P - 0.5) = b^2(x_P + 1)^2 + a^2(y_P - 0.5)^2 - a^2b^2$$

$$d'_{1} = F(x_{P}+2, y_{P}-0.5) = b^{2}(x_{P}+2)^{2} + a^{2}(y_{P}-0.5)^{2} - a^{2}b^{2}$$
$$= d_{1} + b^{2}(2x_{P}+3)$$





**\_\_\_\_\_** 

当 $d_1 \ge 0$ ,中点在椭圆之外,这时应取右下方像素,并且更新判别式为

$$d'_{1}=F(x_{P}+2, y_{P}-1.5)=b^{2}(x_{P}+2)^{2}+a^{2}(y_{P}-1.5)^{2}-a^{2}b^{2}$$
$$=d_{1}+b^{2}(2x_{P}+3)+a^{2}(-2y_{P}+2)$$

由于弧起点为(0, b),因此,第一中点是(1, b-0.5),对应的判别式是

$$d_{10}=F(1, b-0.5)=b^2+a^2(b-0.5)^2-a^2b^2$$
  
= $b^2+a^2(-b+0.25)$ 







在下部分,应改为从正下方和右下方两个像素中选择下一像素。 如果在上部分所选择的最后一像素是  $(x_P, y_P)$ ,则下部分的中点判别式 $d_2$ 的初始值为

$$d_{20} = F(x_P + 0.5, y_P - 1) = b^2(x_P + 0.5)^2 + a^2(y_P - 1)^2 - a^2b^2$$

 $d_2$ 在正下方向与右下方向的增量计算与上部分类似,这里不再赘述。下部分弧的终止条件是y=0。





#### 2 章 基本图形生成算法(I)

第一象限椭圆弧的扫描转换中点算法的伪C描述如下:

```
void MidpointEllipse(a, b, color)
int a, b, color;
{ int x, y;
 float d1, d2;
 x=0; y=b;
 d1=b*b+a*a*(-b+0.25);
 putpixel(x, y, color);
 while (b*b*(x+1) < a*a(y-0.5))
{ if(d1<0)
 \{d1+=b*b*(2*x+3);
  X++;
```





```
....
```

```
else { d1+=(b*b*(2*x+3)+a*a*(-2*y+2));
     x++; y--;
  putpixel(x, y, color);
  }/*上半部分*/
 d2 = sqr(b*(x+0.5)) + sqr(a*(y-1)) - sqr(a*b);
 while(y>0)
  { if(d2<0)
   d2+=b*b(2*x+2)+a*a*(-2*y+3);
    X++;
    y--;
   else { d2+=a*a*(-2*y+3);
```

sqr() 为平方函数













