绪论

董波
数学科学学院
大连理工大学

主要内容

- 计算机科学计算研究对象与特点
- 误差的基本概念和有效数字
- 向量与矩阵的范数

计算机科学计算研究对象与特点

本课程主要研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现

主要内容包括:

数值代数

$$Ax = b$$

数值逼近（数值微分积分）

$$f(x) \quad f'(x)$$

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x$$

微分方程数值解法

$$u' = f(t, u), u(t_0) = u_0$$

矩阵分析简介

$$\{A_k\}_{k=0}^{\infty} \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k \quad f(A) = e^A、\sin A$$

$$\frac{dA(t)}{dt} \quad \int_a^b A(t)\, dt$$

实际问题求解

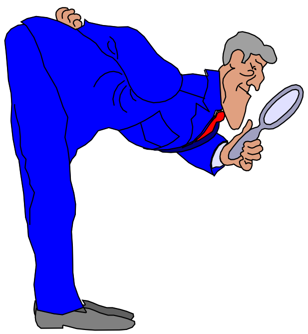
一、构造计算机可行的有效算法

二、给出可靠的理论分析，即对任意逼近达到精度要求，保证数值算法的收敛性和数值稳定性，并可进行误差分析。

三、有好的计算复杂性，既要时间复杂性好，是指节省时间，又要空间复杂性好，是指节省存储量，这也是建立算法要研究的问题，它关系到算法能否在计算机上实现。

四、数值实验，即任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值试验证明是行之有效的。

有效算法



考察线性方程组的解法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Cramer求解法则(18世纪)

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad i=1,2,\cdots,n, \qquad (D\neq 0)$$

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 i 列

$$D_i = \det(A_i) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Laplace展开定理

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

A_{ij}表示元素 a_{ij}的代数余子式

理论非常漂亮　　实际计算困难（运算量大得惊人）

线性方程组的求解 ⟹ 计算n+1个n阶行列式 ⟸ Laplace展开定理

设计算k阶行列式所需要的乘法运算的次数为m_k，则

$$m_k = k + k\,m_{k-1}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} m_n &= n + n\,m_{n-1} = n + n\left[(n-1) + (n-1)m_{n-2}\right] \\ &= n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n(n-1)\cdots 3\cdot 2 \\ &> n! \end{aligned}$$

利用Cramer法和Laplace展开定理来求解一个n阶线性方程组，所需的乘法运算次数就大于

$$(n+1)n! = (n+1)!$$

求解25阶线性方程组

总的的乘法运算次数将达：

$$26! = 4.0329\times10^{26}（次）$$

若使用每秒百亿次的串行计算机计算，一年可进行的运算应为：

$$365(天)\times24(小时)\times3600(秒)\times10^{10}\approx3.1536\times10^{17}（次）$$

共需要耗费时间为：

$$\left(4.0329\times10^{26}\right)\div\left(3.1536\times10^{17}\right)\approx1.2788\times10^{9}\approx13(亿年)$$

它远远超出目前所了解的人类文明历史！

Cramer 算法是“实际计算不了”的。

Gauss消元法可在不到一秒钟之内即可完成上述计算任务。

随着科学技术的发展，又出现了主元消去法，大大提高了消去法的计算精度。

这就是研究数值方法的必要性