

# 矩阵的Jordan分解

董波  
数学科学学院  
大连理工大学



# 代数重数、几何重数

## 代数重数

设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $A$  的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

其中  $m_i (i=1, 2, \dots, s)$  均为正整数,  $\sum_{i=1}^s m_i = n$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$

为  $A$  的不同特征值, 称  $m_i$  为  $\lambda_i$  的代数重数;

## 几何重数

把与  $\lambda_i$  对应的线性无关的特征向量的个数, 即子空间  $N(\lambda_i \mathbf{I}_n - A)$  (即  $(\lambda_i \mathbf{I}_n - A)x = 0$  的解空间, 称为  $\lambda_i \mathbf{I}_n - A$  的零空间) 的维数, 称为  $\lambda_i$  的几何重数, 记为  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i = n - \text{rank}(\lambda_i \mathbf{I}_n - A)$ .

# 代数重数与几何重数关系

$$\text{代数重数} \geq \text{几何重数} \quad m_i \geq \alpha_i$$

取特征子空间  $N(\lambda_i I_n - A)$  的一组基  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_i}$

扩充为  $\mathbb{R}^n$  的基  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_i}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-\alpha_i}$

令  $U = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\alpha_i}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-\alpha_i})$

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= U^{-1}(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_{\alpha_i}, A\mathbf{y}_1, \dots, A\mathbf{y}_{n-\alpha_i}) \\ &= (\lambda_i U^{-1}\mathbf{x}_1, \dots, \lambda_i U^{-1}\mathbf{x}_{\alpha_i}, U^{-1}A\mathbf{y}_1, \dots, U^{-1}A\mathbf{y}_{n-\alpha_i}) = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{\alpha_i} & B \\ \mathbf{O} & C \end{pmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I_{\alpha_i} - \lambda_i I_{\alpha_i}) \cdot \det(\lambda I_{n-\alpha_i} - C) \\ &= (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \cdot \det(\lambda I_{n-\alpha_i} - C) \end{aligned}$$



## 半单、亏损

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵,  $\lambda_i$ 为其特征值,  $m_i$ 和 $\alpha_i$ 分别为其代数重数和几何重数. 如果 $m_i = \alpha_i$ , 则称特征值 $\lambda_i$ 为**半单的**; 如果 $m_i > \alpha_i$ , 则称特征值 $\lambda_i$ 为**亏损的**.

- 代数重数为1的特征值一定是半单的.
- 不同特征值对应的特征向量是线性无关的.
- 每个特征值都是半单的矩阵(有完备的特征向量系)等价于可对角化.
- 存在亏损的特征值的矩阵称为亏损矩阵等价于不可对角化.

# 例题

例 下列矩阵是否可以对角化?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad \det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$$

$\mathbf{A}$ 可对角化

# 例题

例 下列矩阵是否可以对角化?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{B}) = \lambda^2(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 0, m_1 = 2, \lambda_2 = 2, m_2 = 1 \quad \text{rank}(\lambda_1 \mathbf{I}_3 - \mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{B}) = 1,$$

几何重数  $\alpha_1 = 3 - 1 = 2$        $\lambda_1$  是半单的

$\mathbf{B}$  可对角化

---

# 例题

例 下列矩阵是否可以对角化?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{C}) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 2, m_1 = 2, \lambda_2 = 3, m_2 = 1 \quad \text{rank}(\lambda_1 \mathbf{I}_3 - \mathbf{C}) = 2,$$

几何重数  $\alpha_1 = 3 - 2 = 1$        $\lambda_1$  是亏损的

$\mathbf{C}$  为亏损矩阵, 不可对角化

# Jordan块

称下面的 $k \times k$ 阶方阵为Jordan块

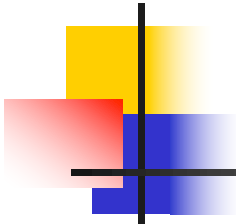
$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_4(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$$





由若干个Jordan块排成的块对角矩阵为Jordan阵.

$$J = \begin{pmatrix} J_3(2) & & \\ & J_4(0) & \\ & & J_2(1) \end{pmatrix} = \text{diag}(J_3(2), J_4(0), J_2(1))$$

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵, 则存在 $n$ 阶可逆矩阵 $T$ 使得

$$A = TJT^{-1}$$

其中 $J = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_k}(\lambda_k)), n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

称上式为 $A$ 的**Jordan分解**,  $J$ 称为 $A$ 的**Jordan标准型**,  $T$ 称为**变换矩阵**. 若不计Jordan块的次序, 则Jordan标准型唯一.



# Jordan标准型

Jordan标准型是一个块对角矩阵, 对角元是矩阵 $A$ 的特征值.

对于特征值 $\lambda_i$ , 它的代数重数是Jordan标准型中以 $\lambda_i$ 为特征值的Jordan块的阶数之和. 不同Jordan块的特征值可能相同.

对于特征值 $\lambda_i$ , 它的几何重数, 即与 $\lambda_i$ 对应的线性无关的特征向量的个数, 恰为以 $\lambda_i$ 为特征值的Jordan块的个数.

---

# 例题

例 求矩阵  $A$  的 Jordan 标准型  $J$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

解:  $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^3$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \quad 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 3 - \text{rank} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

代数重数为3, 以-1为特征值的Jordan块的阶数之和为3.

几何重数为2, 以-1为特征值的Jordan块的个数为2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

# 例题

例 求矩阵  $A$  的 Jordan 标准型  $J$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

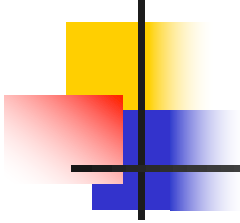
解:  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^4$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2, \quad 4 - \text{rank}(\lambda_1 I - A) = 2$$

代数重数为4, 以2为特征值的Jordan块的阶数之和为4.

几何重数为2, 以2为特征值的Jordan块的个数为2.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$



---

设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $\lambda_i$  为其特征值, 则  $A$  的 Jordan 标准型  $J$  中以  $\lambda_i$  为特征值, 阶数为  $l$  的 Jordan 块的个数为

$$r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l,$$

其中  $r_l = \text{rank}(\lambda_i \mathbf{I} - A)^l$ .  $r_0 = \text{rank}(\lambda_i \mathbf{I} - A)^0 = \text{rank}(\mathbf{I}) = n$

---



---

(1)  $l = 1$       $r_1 = \text{rank}(\lambda_1 I - A) = \text{rank}(2I - A) = 2$

$$r_2 = \text{rank}(\lambda_1 I - A)^2 = \text{rank}(2I - A)^2 = 0$$

以2为特征值, 阶数为1 的Jordan块的个数为

$$r_2 + r_0 - 2r_1 = 0 + 4 - 2 \times 2 = 0$$

(2)  $l = 2$

$$r_3 = \text{rank}(\lambda_1 I - A)^3 = \text{rank}(2I - A)^3 = 0$$

以2为特征值, 阶数为2 的Jordan块的个数为

$$r_3 + r_1 - 2r_2 = 0 + 2 - 2 \times 0 = 2$$

故  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

---

# 变换矩阵

$$A = TJT^{-1} \Rightarrow AT = TJ$$

$$T = (T_1, T_2, \dots, T_k),$$

$T_i$  为  $n \times n_i$  阶矩阵

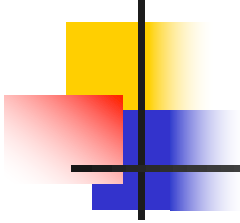
$$A(T_1, T_2, \dots, T_k) = (T_1, T_2, \dots, T_k) \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

$$AT_i = T_i J_{n_i}(\lambda_i)$$

$$T_i = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_{n_i}^i),$$

$t_k^i$  为  $n \times 1$  阶矩阵

$$A(t_1^i, t_2^i, \dots, t_{n_i}^i) = (t_1^i, t_2^i, \dots, t_{n_i}^i) \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$



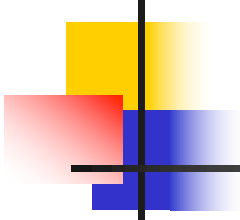
$$A(\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \dots, \mathbf{t}_{n_i}^i) = (\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \dots, \mathbf{t}_{n_i}^i) \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{cases} A\mathbf{t}_1^i = \lambda_i \mathbf{t}_1^i, \\ A\mathbf{t}_2^i = \lambda_i \mathbf{t}_2^i + \mathbf{t}_1^i, \\ \vdots \\ A\mathbf{t}_{n_i}^i = \lambda_i \mathbf{t}_{n_i}^i + \mathbf{t}_{n_i-1}^i. \end{cases}$$

$\mathbf{t}_1^i, \mathbf{t}_2^i, \dots, \mathbf{t}_{n_i}^i$  构成一条关于特征值  $\lambda_i$  的长度为  $n_i$  的Jordan链.

$$(A - \lambda_i I_n) \mathbf{t}_1^i = 0, \quad (A - \lambda_i I_n) \mathbf{t}_j^i = \mathbf{t}_{j-1}^i, j = 2, 3, \dots, n_i$$


---





---

$$(A - \lambda_i I_n) \mathbf{t}_1^i = 0, \quad (A - \lambda_i I_n) \mathbf{t}_j^i = \mathbf{t}_{j-1}^i, j = 2, 3, \dots, n_i$$

$\mathbf{t}_1^i$  是矩阵  $A$  的关于特征值  $\lambda_i$  的一个特征向量, 称为链首.

注意:

- 并不是任何一个特征向量都可以做链首
  - 链首要求: 特征向量、方程组可解
  - 选取: 对应特征向量空间中所有特征向量的某种线性组合
-

# 例题

例 计算例2中矩阵 $A$ 化Jordan标准型的变换矩阵 $T$ .

解

由 $A$ 的Jordan标准型  $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1$  对应两个Jordan块,即有两条Jordan链,长度为1和2.

对于阶数为1的Jordan块

求出 $\lambda_1$ 所对应的线性无关的特征向量

$$\mathbf{x}_1 = (2, 0, -1)^T, \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0)^T.$$

对应的变换矩阵的块为  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  的任意组合, 我们选取  $\mathbf{x}_1$

---

# 例题

对于阶数为2的Jordan块

构造  $\mathbf{y} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2$  使得  $(A - \lambda_1 I)\mathbf{z} = \mathbf{y}$  可解

$$(A - \lambda_1 I | \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 2k_1 \\ 3 & 0 & 6 & k_2 \\ -2 & 0 & -4 & -k_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 & 2k_1 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 - 3k_1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

需  $2k_2 - 3k_1 = 0$  取  $k_1 = 2, k_2 = 3, \mathbf{y} = (4, 3, -2)^T$

由  $(A - \lambda_1 I)\mathbf{z} = \mathbf{y}$  解出  $\mathbf{z} = (1, 0, 0)^T$

故变换矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

# 计算矩阵的Jordan分解

## Jordan标准型J

- 1、计算矩阵的全部特征值
- 2、计算特征值的代数重数（确定对角元）
- 3、计算特征值的几何重数（Jordan块个数）
- 4、利用定理2.11确定每个 $k$ 阶块的个数（为节省计算量从小到大计算）

## 变换矩阵T

- 1、求得Jordan标准型
- 2、计算每个Jordan块对应的Jordan链
  - 若Jordan块阶数为1，直接计算特征向量
  - 若阶数大于1，则先计算特征向量，利用特征向量的线性组合得到链首（保证线性方程组2.45有解）



# 例题

---

Jordan分解的应用：

计算初等函数在某个矩阵处的值（矩阵）

最简单的情形：

多项式函数（高次多项式）

---



---

## Hamilton-Caylay 定理

设  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $\psi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - A)$ , 则  $\psi(A) = \mathbf{O}$

---

# 例题

例 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 计算

(1)  $A^7 - A^5 - 19A^4 + 28A^3 + 6A - 4I$ ; (2)  $A^{-1}$ ; (3)  $A^{100}$ .

解  $\psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

(1) 令  $f(\lambda) = \lambda^7 - \lambda^5 - 19\lambda^4 + 28\lambda^3 + 6\lambda - 4$   
 $= (\lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 3\lambda - 2)\psi(\lambda) - 3\lambda^2 + 22\lambda - 8$

$$f(A) = -3A^2 + 22A - 8I = \begin{pmatrix} -19 & 6 & 0 \\ -64 & 43 & 0 \\ 19 & -3 & 24 \end{pmatrix}$$

# 例题

例 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 计算

(1)  $A^7 - A^5 - 19A^4 + 28A^3 + 6A - 4I$ ; (2)  $A^{-1}$ ; (3)  $A^{100}$ .

解  $\psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

(2) 由  $\psi(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = O$  得  $A \left( \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) \right) = I$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



# 例题

例 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 计算

(1)  $A^7 - A^5 - 19A^4 + 28A^3 + 6A - 4I$ ; (2)  $A^{-1}$ ; (3)  $A^{100}$ .

解  $\psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

(3) 设  $\lambda^{100} = g(\lambda)\psi(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c$

由  $\psi(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$ , 有  $\psi(2) = \psi(1) = \psi'(1) = 0$

$$\begin{cases} 2^{100} = 4a + 2b + c \\ 1 = a + b + c \\ 100 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{100} - 101 \\ b = -2^{101} + 302 \\ c = 2^{100} - 200 \end{cases} = \begin{pmatrix} -199 & 100 & 0 \\ -400 & 201 & 0 \\ 201 - 2^{100} & 2^{100} - 101 & 2^{100} \end{pmatrix}$$

$A^{100} = g(A)\psi(A) + aA^2 + bA + cI = aA^2 + bA + cI$