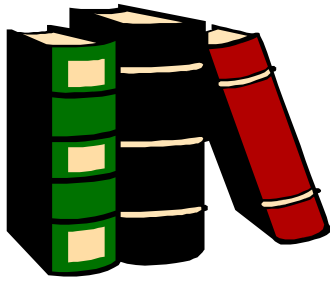
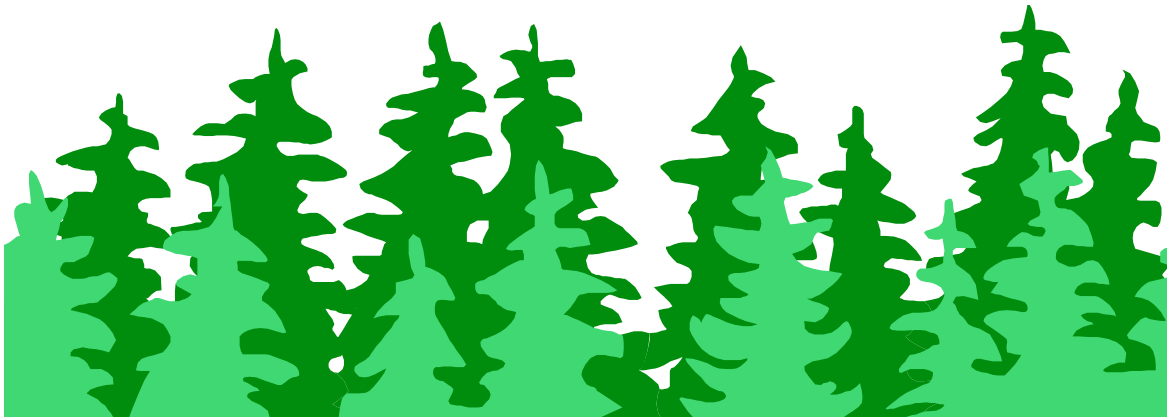
6.6 赫夫曼树及其应用

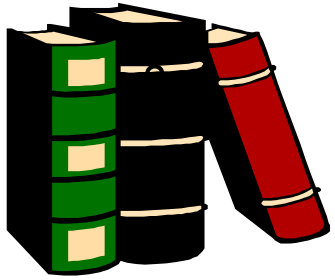
- 最优二叉树（赫夫曼树）的定义
- 如何构造最优二叉树
- 赫夫曼编码
- 赫夫曼树存储表示及构造算法

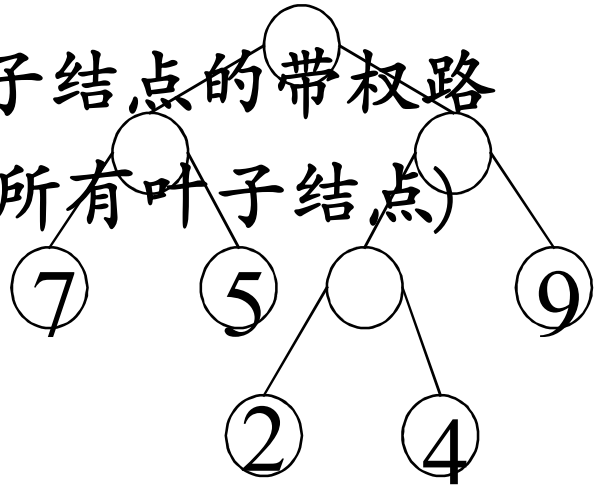


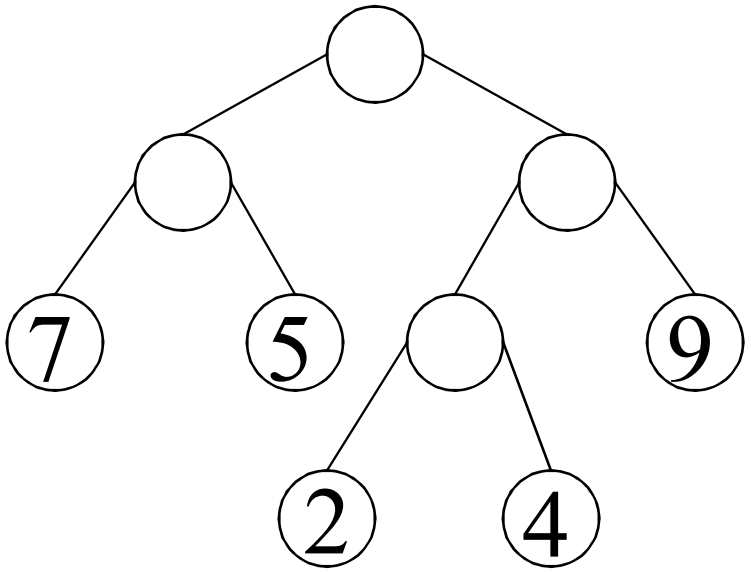


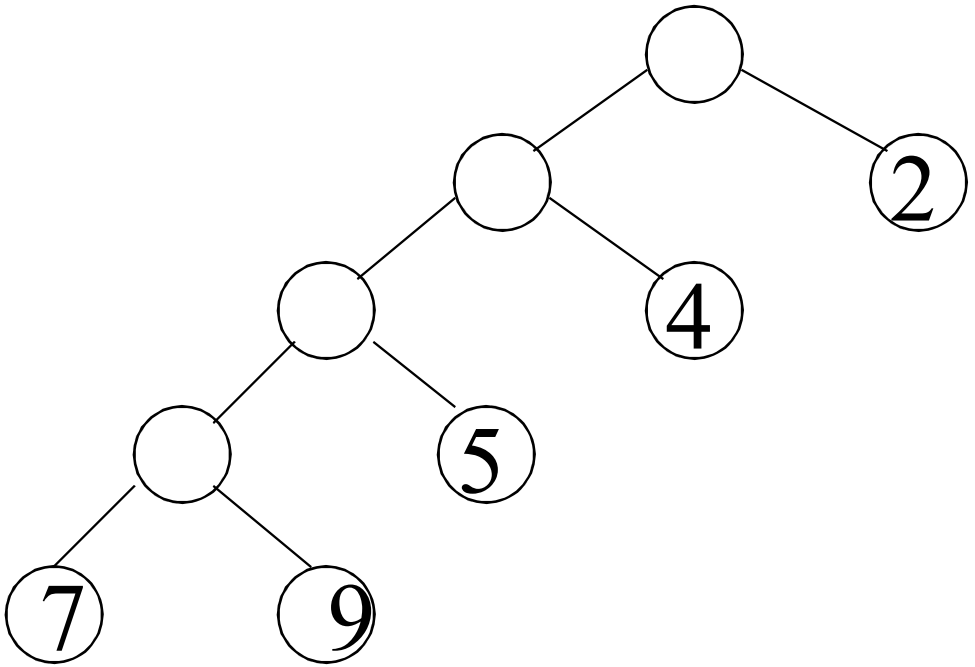
6.6.1 最优二叉树（赫夫曼树）

- 结点的路径长度：从根结点到该结点的路径上分支的数目。
- 树的路径长度：树中每个结点的路径长度之和
- 结点的带权路径长度：从根结点到该结点的路径长度(l_k)与结点上权(w_k)的乘积。
- 树的带权路径长度：树中所有叶子结点的带权路径长度之和----$WPL(T) = \Sigma w_k l_k$ (对所有叶子结点)









WPL(T)=

7×2+5×2+2×3+

4×3+9×2

=60

WPL(T)=

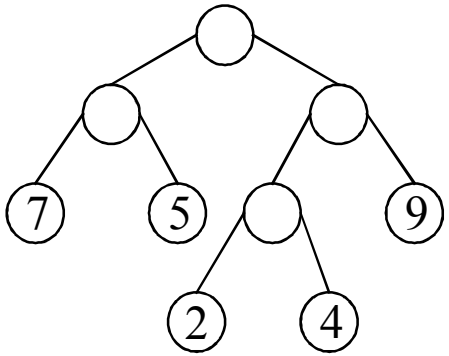
7×4+9×4+5×3+

4×2+2×1

=89

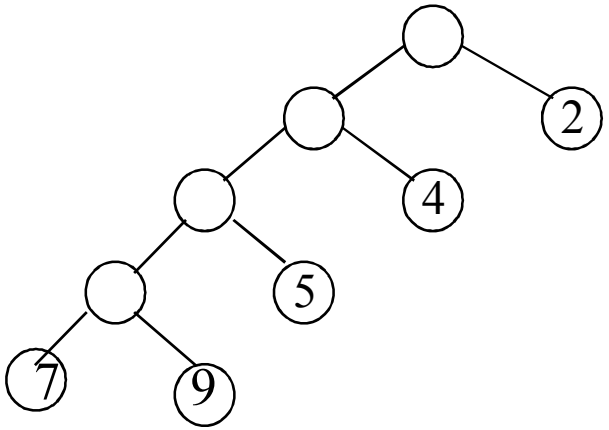
6.6.1 最优二叉树（赫夫曼树）

- 在所有含n个叶子结点、并带相同权值的二叉树中，必存在一棵其**带权路径长度WPL取最小值**的树，称为“最优二叉树(赫夫曼树)”。



是不是最优二叉树?

WPL(T)= 7×2+5×2+2×3+4×3+9×2=60



肯定不是最优二叉树

WPL(T)= 7×4+9×4+5×3+4×2+2×1=89

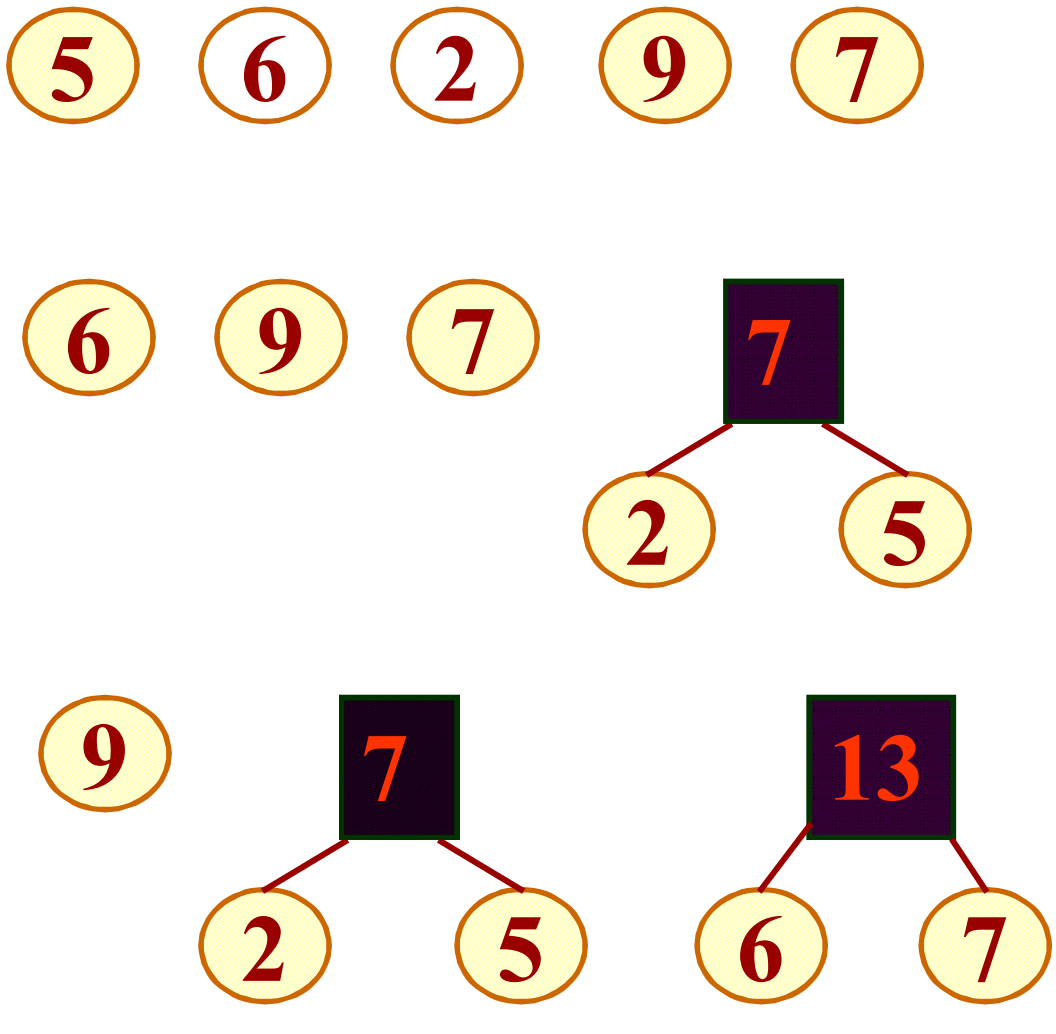
6.6.1 最优二叉树（赫夫曼树）

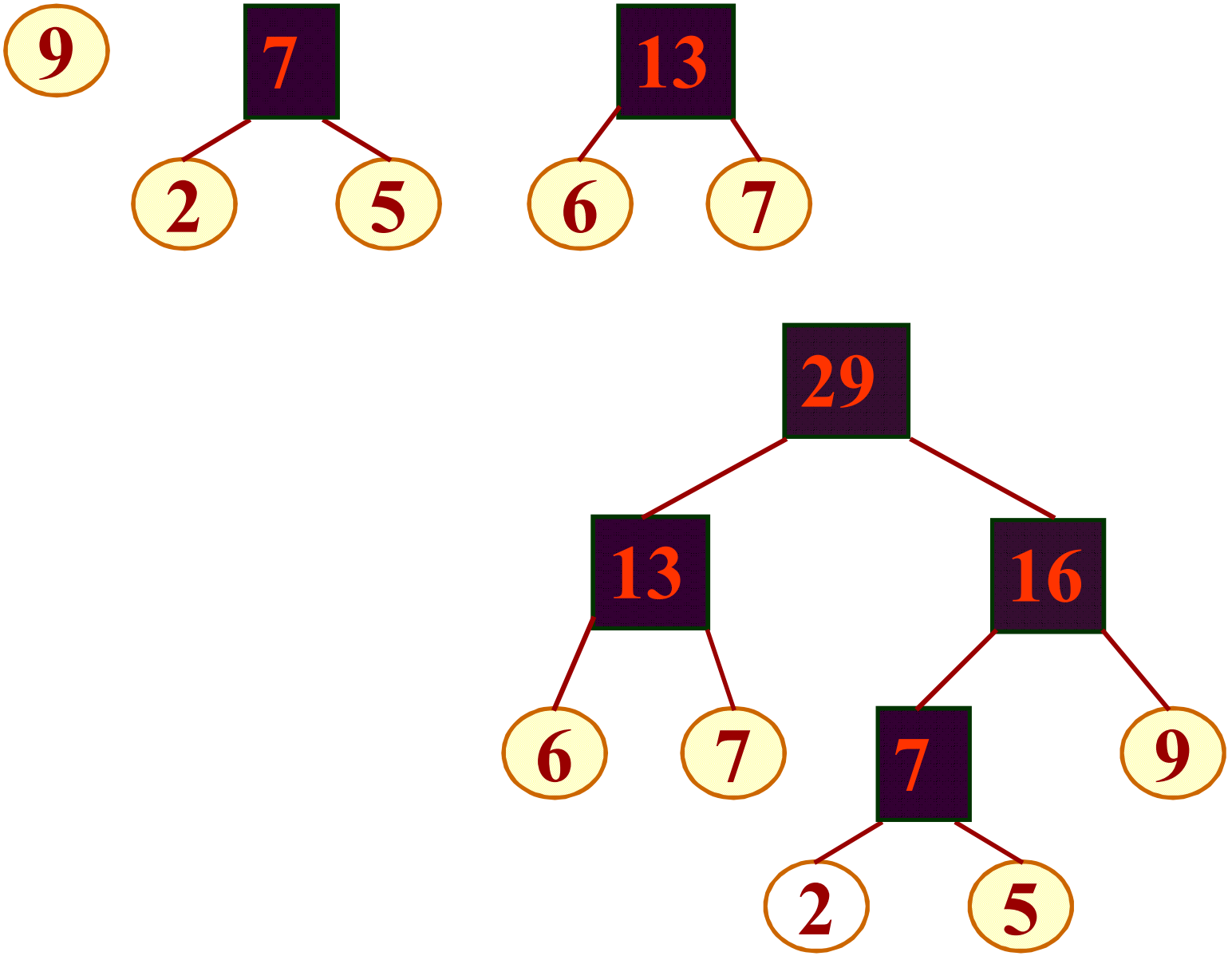
如何构造最优二叉树----赫夫曼算法

- 输入： n 和 n 个权值 $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$
- 输出： 赫夫曼树

1. 根据给定的 n 个权值 $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$，构造 n 棵二叉树的集合 $F = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$，其中每棵二叉树中均只含一个带权值为 w_i 的根结点，其左、右子树为空树；
2. 在 F 中选取其根结点的权值为最小和次小的两棵二叉树，分别作为左、右子树构造一棵新的二叉树，并置这棵新的二叉树根结点的权值为其左、右子树根结点的权值之和；
3. 从 F 中删去这两棵树，同时加入刚生成的新树；
4. 重复 2 和 3 两步，直至 F 中只含一棵树为止

例如：已知权值 W={5, 6, 2, 9, 7}




9
7
2
5
13
6
7
29
13
16
6
7
7
9
2
5

6.6.2 赫夫曼编码

- 赫夫曼编码是赫夫曼树的一个应用。赫夫曼编码应用广泛，如JPEG中就应用了赫夫曼编码。
- 数据通信中，需要将传送的文字转换成**二进制**的字符串，用0，1码的不同排列来表示字符。
- 例如，需传送的报文为“AFTER DATA EAR ARE ART AREA”，这里用到的字符集为“A，E，R，T，F，D”，各字母出现的次数为{8，4，5，3，1，1}。现要求为这些字母设计编码。
- 要区别6个字母，最简单的二进制编码方式是等长编码，固定采用3位二进制，可分别用000、001、010、011、100、101对A，E，R，T，F，D进行编码发送，当对方接收报文时再按照三位一分进行译码。
- **显然编码的长度取决报文中不同字符的个数**。若报文中可能出现26个不同字符，则固定编码长度为5。

6.6.2 赫夫曼编码

- 然而，传送报文时总是**希望总长度尽可能短**。在实际应用中，各个字符的出现频度或使用次数是不相同的，如A、B、C的使用频率远远高于X、Y、Z，自然会想到设计编码时，让使用频率高的用短码，使用频率低的用长码，以优化整个报文编码。
- 同时 编码不能产生“**二义性**”
- 例如：*a*：0，*c*：1，*t*：01
- 那么0101代表什么？
- 消除“**二义性**”，采用**前缀编码**

6.6.2 赫夫曼编码

- 前缀编码：任何一个字符的编码都不是同一字符集中另一个字符的编码的前缀。
- 利用赫夫曼树可以构造一种不等长的二进制编码，并且构造所得的赫夫曼编码是一种最优前缀编码，即使所传电文的总长度最短。

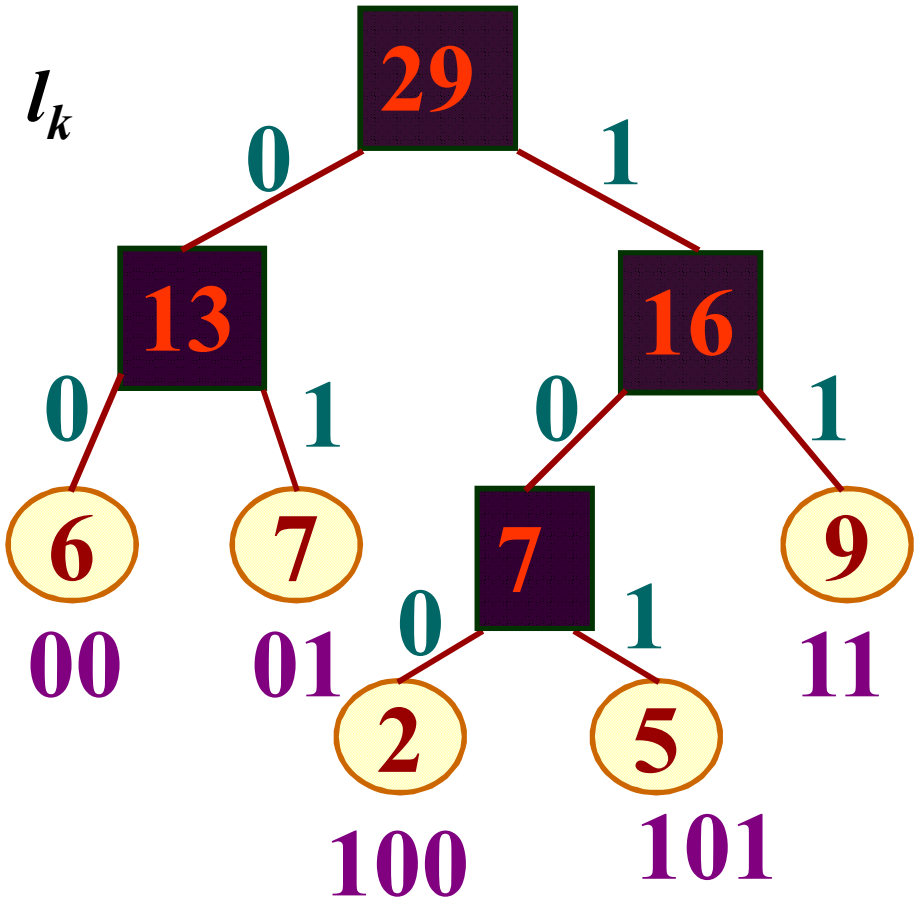
例如: *a*,*b*,*c*,*d*,*e* 5个字符的出现频次为 5, 6, 2, 9, 7
求其编码?

则: *a*--101, *b*--00, *c*--100, *d*--11, *e*--01

则: 码文长度=Σ（每个字符编码长度*出现频次）

每个字符编码长度：l_k

出现频次:w_k



利用哈夫曼树来设计二进制的前缀编码，既满足前缀编码的条件，又保证报文编码总长最短

赫夫曼编码

- 对需要编码的数据进行两遍扫描:
- 第一遍统计原数据中各字符出现的频率，利用得到的频率值创建赫夫曼树，并必须把树的信息保存起来，以便解压时创建同样的赫夫曼树进行解压;
- 第二遍则根据第一遍扫描得到的赫夫曼树进行编码，并把编码后得到的码字存储起来

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

	weight	parent	lchild	rchild
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

根据第一个权值生成第一棵只有根结点的二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

根据第二个权值生成第二棵只有根结点的二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2	6	0	0	0
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

根据第三个权值生成第三棵只有根结点的二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2	6	0	0	0
3	2	0	0	0
4				
5				
6				
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2	6	0	0	0
3	2	0	0	0
4	9	0	0	0
5				
6				
7				
8				
9				

根据第四个权值生成第四棵只有根结点的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2	6	0	0	0
3	2	0	0	0
4	9	0	0	0
5	7	0	0	0
6				
7				
8				
9				

根据第五个权值生成第五棵只有根结点的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

当前森林中根结点权值次小的二叉树

当前森林中根结点权值最小的二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	0	0	0
2	6	0	0	0
3	2	0	0	0
4	9	0	0	0
5	7	0	0	0
6				
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	0	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	7	0	0	0
6	7	0	3	1
7				
8				
9				

以最小和次小分别为左右子树，生成的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

当前森林中有4棵二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	0	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	7	0	0	0
6	7	0	3	1
7				
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	**6**	0	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	**7**	0	0	0
6	7	0	3	1
7				
8				
9				

当前森林中根结点权值最小的二叉树

当前森林中根结点权值次小的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	**6**	**7**	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	**7**	**7**	0	0
6	7	0	3	1
7	13	0	2	5
8				
9				

以最小和次小分别为左右子树，生成的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

当前森林中有3棵二叉树

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	7	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	7	7	0	0
6	7	0	3	1
7	13	0	2	5
8				
9				

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	7	0	0
3	2	6	0	0
4	9	0	0	0
5	7	7	0	0
6	7	0	3	1
7	13	0	2	5
8				
9				

当前森林中根结点权值次小的二叉树

当前森林中根结点权值最小的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	7	0	0
3	2	6	0	0
4	9	8	0	0
5	7	7	0	0
6	7	8	3	1
7	13	0	2	5
8	16	0	6	4
9				

以最小和次小分别为左右子树，生成的二叉树

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	7	0	0
3	2	6	0	0
4	9	8	0	0
5	7	7	0	0
6	7	8	3	1
7	13	0	2	5
8	16	0	6	4
9				

当前森林中有2棵二叉树,分别为最小和次小

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

已知权值 W={ 5, 6, 2, 9, 7 }

算法实现：借助数组构造赫夫曼树

因为树中的结点从下标为1的数组元素开始存放，所以0代表空指针

	weight	parent	lchild	rchild
1	5	6	0	0
2	6	7	0	0
3	2	6	0	0
4	9	8	0	0
5	7	7	0	0
6	7	8	3	1
7	13	9	2	5
8	16	9	6	4
9	29	0	7	8

1.用2n-1个数组元素存放赫夫曼树的每个结点

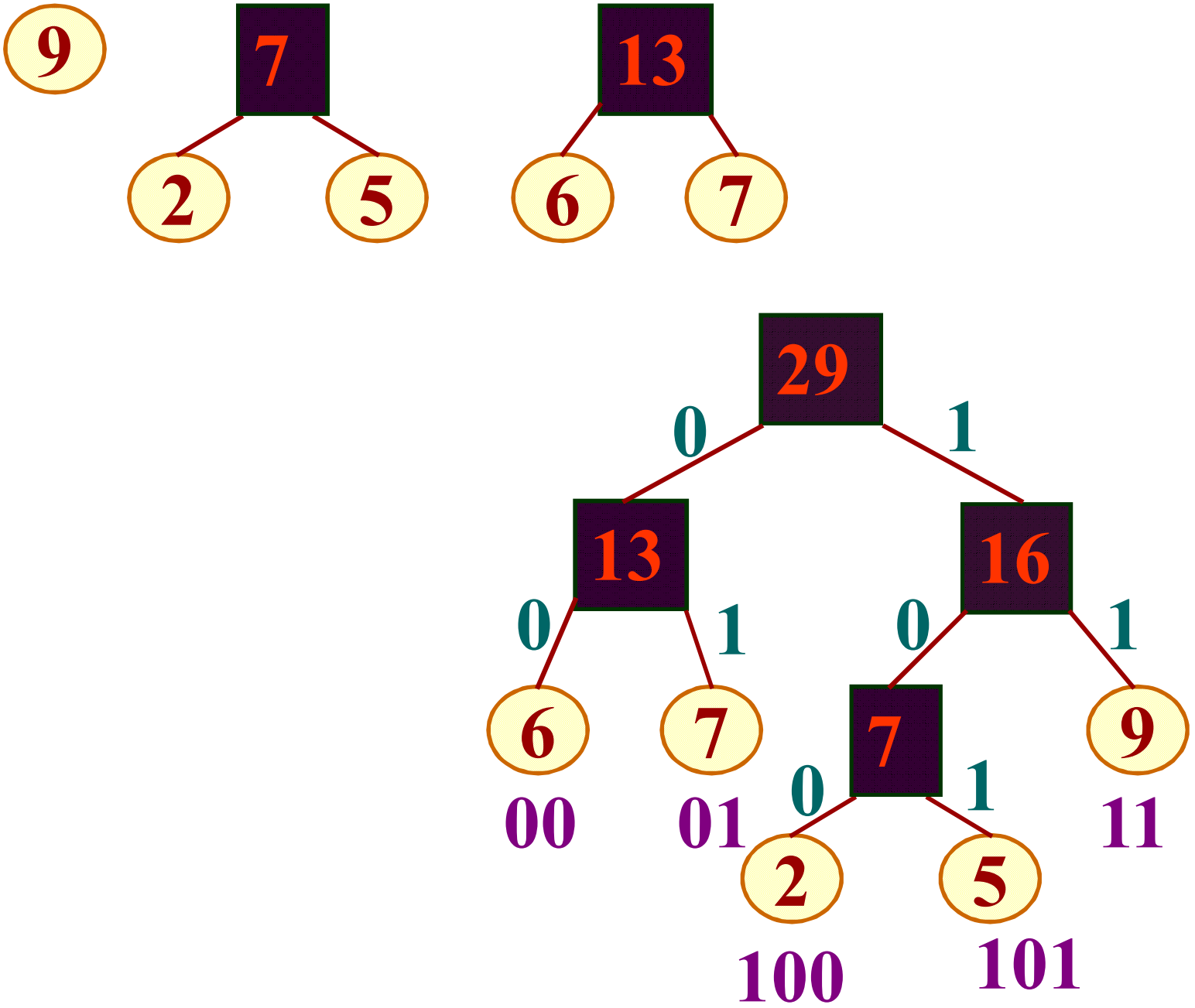
2. 每个结点存放权值，双亲指针（双亲所在数组元素的下标）和左孩子指针（所在数组元素的下标）、右孩子指针（所在数组元素的下标）

给定n个权值，说明赫夫曼树有n个叶子结点

赫夫曼树只有叶子结点和度为2的结点，所以结点总数为2n-1

存储表示及算法

```
typedef struct {
    int weight;
    int parent,lchild,rchild;
}HTNode, *HuffmanTree; //哈夫曼树
Typedef char **HuffmanCode;//哈夫曼编码
```


9
7
2
5
13
6
7
29
0
1
13
16
0
1
0
1
6
7
7
9
00
01
0
1
11
2
5
100
101