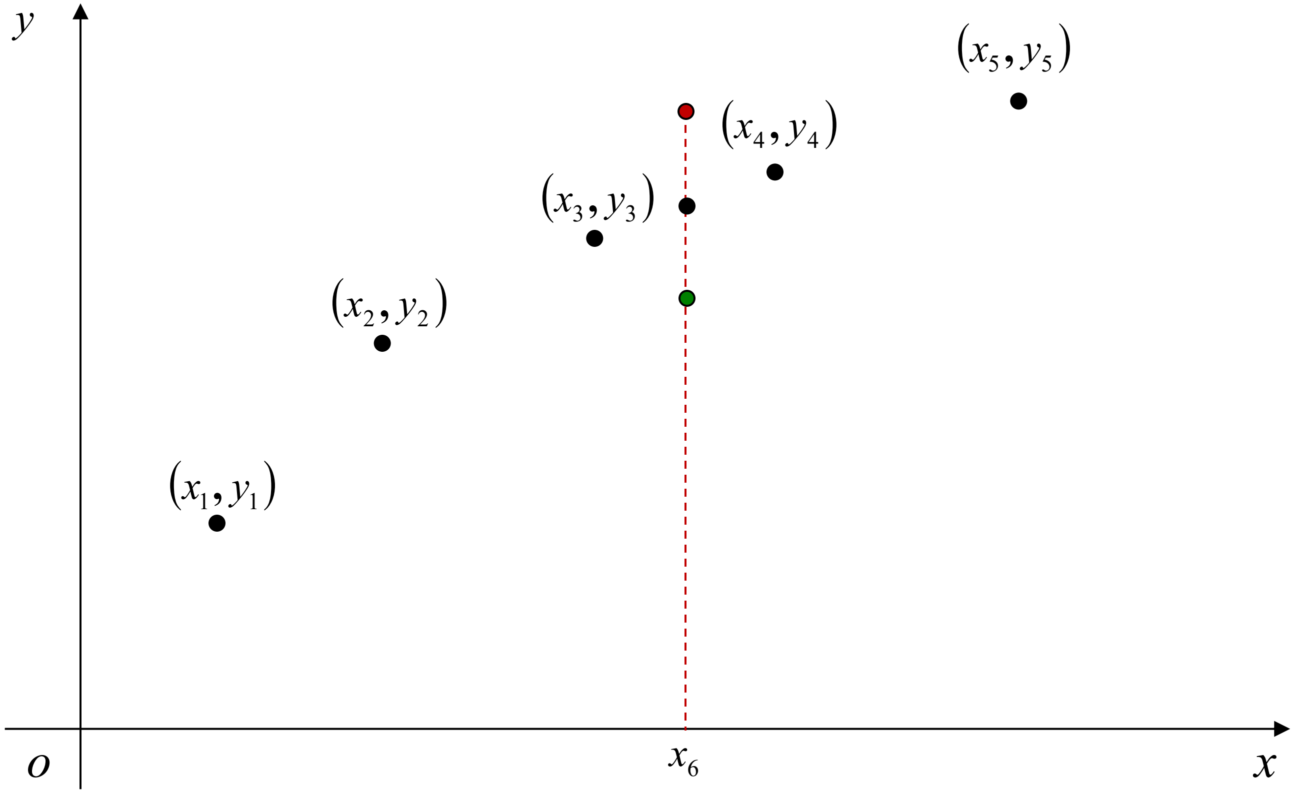
插值与逼近

董波
数学科学学院
大连理工大学

基本问题



插值应用

- 插值方法是数值分析中的一个简单而又重要的方法，利用该方法可以通过函数在有限个点处的函数值求出其近似函数，进而估算出函数在其它点处的值

- 插值方法在离散数据处理、函数的近似表示、数值微分、数值积分、曲线与曲面的生成等方面有重要的应用

主要介绍插值方法中的多项式插值方法

问题描述

设已知函数在n个互异点处的函数值和导数值

$$f(x_1), f'(x_1), \cdots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1);$$

$$f(x_2), f'(x_2), \cdots, f^{(\alpha_2-1)}(x_2);$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$f(x_n), f'(x_n), \cdots, f^{(\alpha_n-1)}(x_n),$$

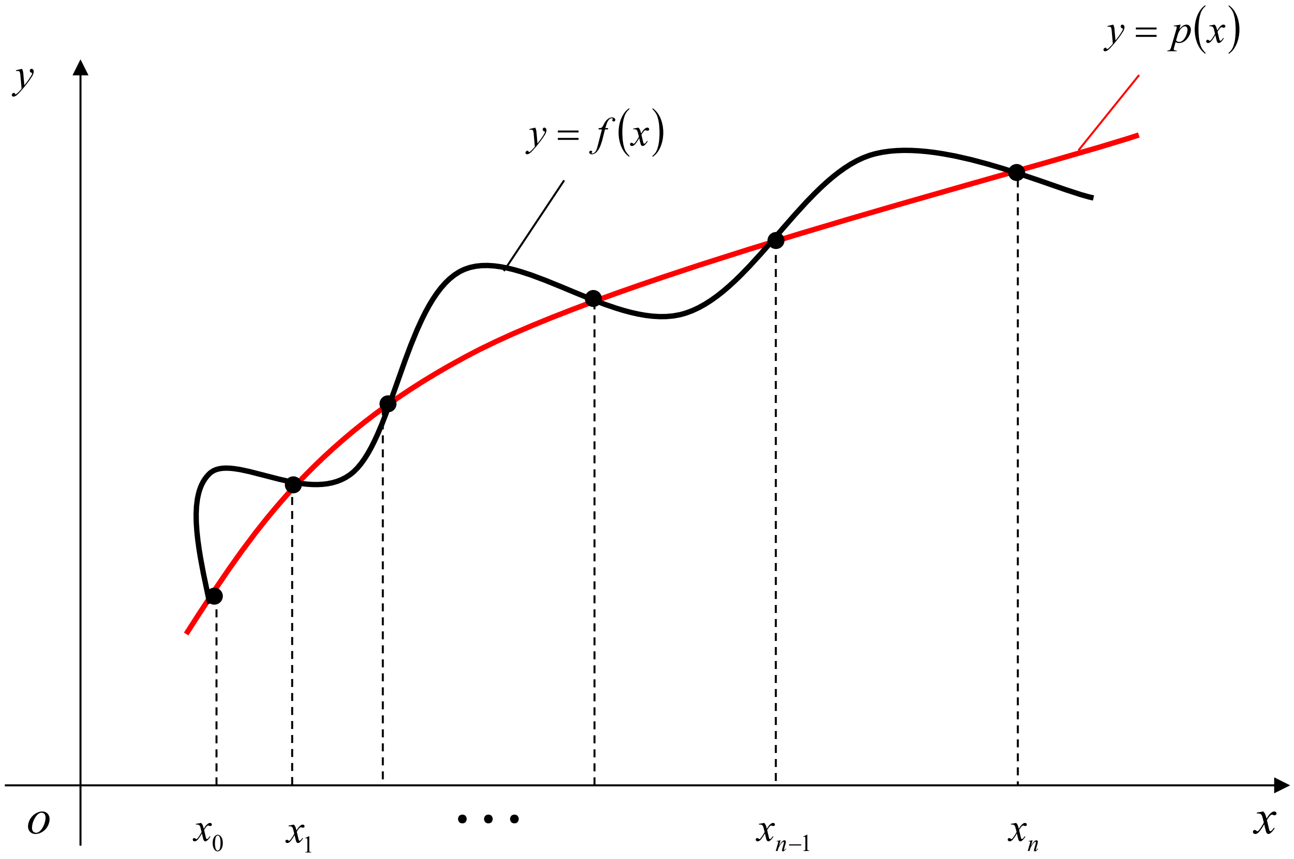
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ 个条件

构造一个简单易算的函数p(x)，使其满足下述条件：

$$p^{(\mu_i)}(x_i) = f^{(\mu_i)}(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad \mu_i = 0, 1, \cdots, \alpha_i - 1。$$

以上问题称作**插值问题**，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**，$p(x)$ 称为 $f(x)$ 关于节点组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**插值函数**，条件称为**插值条件**。

插值几何表示



插值需考虑的问题

- 简单函数类的选取问题：如代数多项式，三角多项式，分段多项式，有理函数，样条函数等
- 存在唯一性问题
- 余项估计问题
- 收敛性问题

基本思想

- 简单函数类的基底需满足的条件
- 给出具体的基底
- 给出系数

仅有函数值信息

假设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的未知或复杂函数，但已知该函数在互异点

$$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$

目标是在一个简单函数类 $S = \mathrm{span}(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) \subset C[a,b]$

中找一个函数，

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

使之满足条件

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

即在给定点 x_i 处，$p(x)$ 与 $f(x)$ 是相吻合的。

求解方法

将已知点信息代入

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

插值问题等价于求解方程组：

$$p(x_i) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

解存在条件-Haar条件

Haar条件

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是$[a,b]$上的函数，且对$[a,b]$上的任意n个互异点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

则称 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 在$[a,b]$上满足Haar条件。

解的存在唯一性

解存在唯一性定理

设已知函数 $f(x)$ 在 n 个互异点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的函数值

$$y_i = f(x_i) \quad (i=1,\cdots,n),$$

简单函数类S的基函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ \cdots,\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Haar条件，则存在唯一的

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\in S,$$

满足插值条件 $p(x_i)=y_i$，$i=1,\cdots,n.$

插值基函数

函数 $l_1(x), l_2(x), \cdots, l_n(x)$，满足

$$l_k(x_i) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad k = 1, \cdots, n; i = 1, \cdots, n.$$

$l_k(x)\ (k = 1,2,\ldots,n)$ 称为插值基函数。

插值函数存在唯一性定理

在上述定理的假设下，函数

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x)$$

是S中满足插值条件 $p(x_i) = y_i,\ i = 1,2,\cdots,n$ 的唯一函数。