

三次样条插值

董波
数学科学学院
大连理工大学





样条函数应用

样条函数是一个重要的逼近工具，在插值、数值微分、曲线拟合等方面有着广泛的应用。



各种插值比较

多项式Lagrange插值:

整体性强, 光滑性好 (无穷阶连续), 但不一定收敛

分段多项式(Lagrange)插值:

局部性好, 光滑性差 (C^0 连续), 收敛性保证

分段多项式(Hermite)插值:

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证,

但需要导数值信息

~~样条插值~~ 样条函数: 满足一定光滑性的分段多项式

局部性好, 满足一定光滑性, 收敛性保证, 只需函数值信息

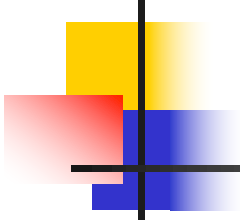
样条函数

对区间 $(-\infty, +\infty)$ 的一个分割:

$$\Delta: -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty,$$

若分段函数 $s(x)$ 满足条件:

- (1) 在每个区间 $(-\infty, x_1], [x_j, x_{j+1}] (j = 1, \dots, n-1)$ 和 $[x_n, +\infty)$ 上, $s(x)$ 是一个次数不超过 m 的实系数代数多项式;
 - (2) $s(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上具有直至 $m-1$ 阶的连续微商,
- 则称 $y = s(x)$ 为对应于分割 Δ 的 m 次样条函数, x_1, x_2, \dots, x_n 为样条节点
-



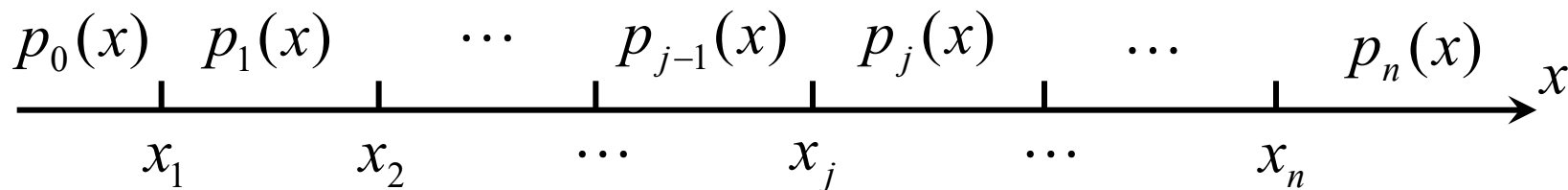
以 x_1, x_2, \dots, x_n 为节点的 m 次样条函数的全体记为:

$$S_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

问题: 如何判断一个分段的 多项式函数是样条函数?

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \leq x_1 \\ p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \\ p_j(x), & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \vdots & \\ p_n(x), & x_n \leq x \end{cases} \quad p_j(x) \in \mathbf{P}_m (j = 0, 1, \dots, n)$$

样条函数判定



$$p_{j-1}^{(i)}(x_j) = p_j^{(i)}(x_j), \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

令 $q_j(x) = p_j(x) - p_{j-1}(x) \in P_m$

x_j 是 $q_j(x)$ 的 m 重根

$$\Rightarrow q_j^{(i)}(x_j) = p_{j-1}^{(i)}(x_j) - p_j^{(i)}(x_j) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\Rightarrow q_j(x) = c_j(x - x_j)^m$$

光滑因子

$$\Rightarrow p_j(x) = p_{j-1}(x) + c_j(x - x_j)^m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

样条函数判定定理

$$s(x) = \begin{cases} p_0(x), & x \leq x_1 \\ p_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots \\ p_j(x), & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \vdots \\ p_n(x), & x_n \leq x \end{cases} \quad p_j(x) \in \mathbf{P}_m (j = 0, 1, \dots, n)$$

于是 $s(x)$ 是 m 次样条的充要条件是

$$p_0(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m,$$

$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x - x_1)^m,$$

$$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x - x_2)^m = p_0(x) + c_1(x - x_1)^m + c_2(x - x_2)^m,$$

...

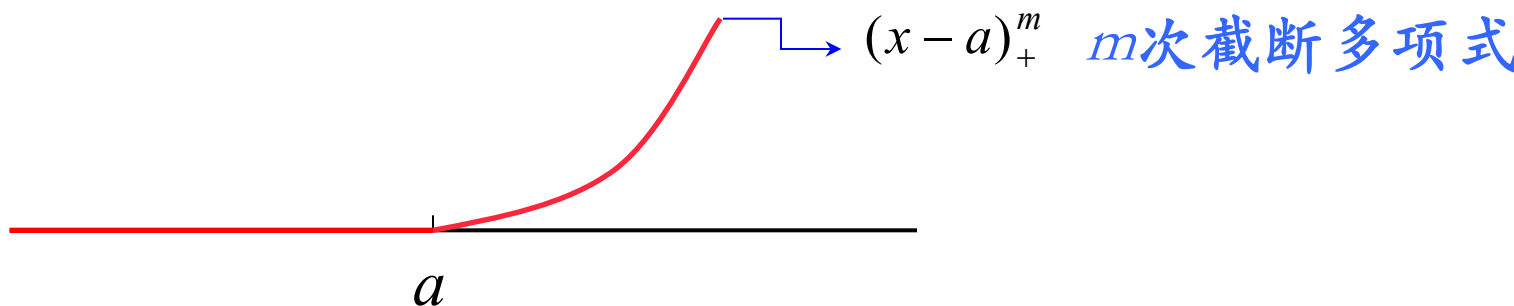
$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n(x - x_n)^m = p_0(x) + \sum_{j=1}^n c_j(x - x_j)^m$$

截断多项式

为了便于表示分段信息, 引进截断多项式:

$$(x-a)_+^m = \begin{cases} (x-a)^m, & x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$$

易见 $(x-a)_+^m$ 是 $C^{m-1}(-\infty, +\infty)$ (表示 $(-\infty, +\infty)$ 上 $m-1$ 次连续可微函数的集合) 类的分段 m 次多项式。



定理

任意 $s(x) \in S_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 均可唯一地表示为

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{j=1}^n c_j (x - x_j)_+^m, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 $p_m(x) \in P_m$, $c_j (j=1, 2, \dots, n)$ 为实数。

定理

为使 $s(x) \in S_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 必须且只须存在 $p_m(x) \in P_m$ 和 n 个实数 c_1, c_2, \dots, c_n , 使得

$$s(x) = p_m(x) + \sum_{j=1}^n c_j (x - x_j)_+^m, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$S_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{span} \{1, x, \dots, x^m, (x - x_1)_+^m, (x - x_2)_+^m, \dots, (x - x_n)_+^m\}$$

$$\dim S_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = m + n + 1$$

例题

例 验证分片多项式是三次样条函数.

$$S(x) = \begin{cases} 1-2x & x < -3 \\ 28+25x+9x^2+x^3 & -3 \leq x < -1 \\ 26+19x+3x^2-x^3 & -1 \leq x < 0 \\ 26+19x+3x^2 & 0 \leq x \end{cases}$$

解 利用光滑因子验证.

$$(28+25x+9x^2+x^3)-(1-2x)=(x+3)^3,$$

$$(26+19x+3x^2-x^3)-(28+25x+9x^2+x^3)=-2(x+1)^3,$$

$$(26+19x+3x^2)-(26+19x+3x^2-x^3)=x^3,$$

该函数为三次样条函数.



三次样条插值及其收敛性

有些实际问题中提出的插值问题，要求插值曲线具有较高的光滑性和几何光顺性。样条插值适用于这类问题。例如，在船体放样时，模线员用压铁压在样条（弹性均匀的窄木条）的一批点上，强迫样条通过这组离散的值点。当样条取得合适的形状后，再沿着样条画出所需的曲线。在小挠度的情形下，该曲线可以由三次样条函数表示。由于样条函数插值不仅具有较好的收敛性和稳定性，而且其光滑性也较高，因此，样条函数成为了重要的插值工具。其中应用较多的是三次样条插值。

样条函数构造

设给定节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 及节点上的函数值

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

三次样条问题就是构造 $s(x) \in S_3(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 满足

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

利用两点三次Hermite插值公式, 设

$$s'(x_k) = m_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n), \quad h_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时,

$$\begin{aligned} s(x) = & \left(1 - 2 \frac{x - x_k}{-h_k}\right) \left(\frac{x - x_{k+1}}{-h_k}\right)^2 y_k + \left(1 - 2 \frac{x - x_{k+1}}{h_k}\right) \left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2 y_{k+1} \\ & + (x - x_k) \left(\frac{x - x_{k+1}}{-h_k}\right)^2 m_k + (x - x_{k+1}) \left(\frac{x - x_k}{h_k}\right)^2 m_{k+1}, \end{aligned}$$

样条函数构造

求 $s(x)$ 的关键在于确定 $n+1$ 个常数 m_0, m_1, \dots, m_n . 对 $s(x)$ 求二阶导数

$$s''(x) = \frac{6x - 2x_k - 4x_{k+1}}{h_k^2} m_k + \frac{6x - 4x_k - 2x_{k+1}}{h_k^2} m_{k+1} \\ + \frac{6(x_k + x_{k+1} - 2x)}{h_k^3} (y_{k+1} - y_k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} s''(x) = -\frac{4}{h_k} m_k - \frac{2}{h_k} m_{k+1} + \frac{6}{h_k^2} (y_{k+1} - y_k).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} s''(x) = \frac{2}{h_{k-1}} m_{k-1} + \frac{4}{h_{k-1}} m_k - \frac{6}{h_{k-1}^2} (y_k - y_{k-1}).$$

样条函数构造

由三次样条函数的二次连续条件

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} s''(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^-} s''(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\frac{1}{h_{k-1}} m_{k-1} + 2 \left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right) m_k + \frac{1}{h_k} m_{k+1} = 3 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k^2} + \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}^2} \right).$$

等式两端除以 $\frac{h_k + h_{k-1}}{h_{k-1} h_k}$ ，化简得到基本方程组

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k-1}}, \quad \mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_k + h_{k-1}} = 1 - \lambda_k,$$

$$g_k = 3 \left(\mu_k \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} + \lambda_k \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \right), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

n-1个方程
n+1个未知量

第一类边界条件

第一类边界条件

$$\begin{cases} s'(x_0) = f'_0, \\ s'(x_n) = f'_n, \end{cases} \Leftrightarrow m_0 = f'_0, m_n = f'_n$$

$$\begin{cases} 2m_1 + \mu_1 m_2 = g_1 - \lambda_1 f'_0, \\ \lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k, & (k = 2, 3, \dots, n-2) \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} = g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n, \end{cases}$$

三对角
严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \lambda_3 & 2 & \mu_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \lambda_1 f'_0 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{bmatrix}$$

第二类边界条件

第二类边界条件

$$\begin{cases} s''(x_0) = f_0'', \\ s''(x_n) = f_n'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{3(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{h_0}{2} f_0'', \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_0 = 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{2} f_0'', \\ g_n = 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{2} f_n''. \end{cases}$$

三对角
严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

第三类边界条件

第三类边界条件(周期性条件)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} s^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_n^-} s^{(p)}(x), \quad (p = 0, 1, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} s''(x) = -\frac{4}{h_0} m_0 - \frac{2}{h_0} m_1 + \frac{6}{h_0^2} (y_1 - y_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_n^-} s''(x) = \frac{2}{h_{n-1}} m_{n-1} + \frac{4}{h_{n-1}} m_n - \frac{6}{h_{n-1}^2} (y_n - y_{n-1}),$$

由边界条件, $m_0 = m_n$, 所以

$$\frac{1}{h_0} m_1 + \frac{1}{h_{n-1}} m_{n-1} + 2 \left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_{n-1}} \right) m_n = 3 \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0^2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^2} \right),$$

第三类边界条件

简写为 $\mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = g_n,$

$$\begin{cases} \mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, & \lambda_n = \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \\ g_n = 3 \left(\mu_n \frac{y_1 - y_0}{h_0} + \lambda_n \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right). \end{cases}$$

严格对角占优

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

例题

例 给定插值条件

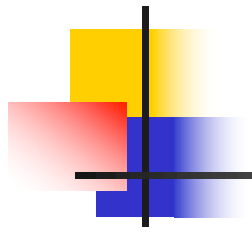
x_i	0	1	2	3
y_i	0	0	0	0

以及第一类边界条件 $m_0 = 1, m_3 = 0$ 求三次样条插值函数.

解: $\lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1} + h_k} = \frac{1}{2}, \quad \mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1} + h_k} = \frac{1}{2}, \quad g_k = 0, \quad k = 1, 2.$

$$\lambda_k m_{k-1} + 2m_k + \mu_k m_{k+1} = g_k \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 = 0 \\ \frac{1}{2}m_1 + 2m_2 + \frac{1}{2}m_3 = 0 \end{cases}$$

再由边界条件 $m_0 = 1, m_3 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{4}{15}, m_2 = \frac{1}{15}.$



$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x(1-x)(15-11x), & x \in [0,1] \\ \frac{1}{15}(x-1)(x-2)(7-3x), & x \in [1,2] \\ \frac{1}{15}(x-3)^2(x-2), & x \in [2,3]. \end{cases}$$

三次样条函数应用

例 已知正弦函数表

x_i	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
f_i	0.4794	0.6442	0.7833	0.8912	0.9636	0.9975	0.9917	0.9463

以及边界条件 $s''(0.5) = -0.4794$, $s''(1.9) = -0.9463$

用三次样条插值函数 $s(x)$ 计算诸节点中点处的函数值，并将计算结果与 $\sin x$ 在相应点处的函数值相比较。

解 利用在第二类边界条件中介绍的方法，计算结果列表如下：

x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$s(x)$	0.56462	0.71733	0.84144	0.93206	0.98547	0.99959	0.97386
$\sin x$	0.56464	0.71736	0.84147	0.93204	0.98545	0.99957	0.97385

三次样条插值函数的收敛性

定理

设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $s(x)$ 是以 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为节点, 满足三种边界条件中的任何一种的三次样条插值函数,

记 $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$, 则当 $h \rightarrow 0$ 时, $s(x)$ 和 $s'(x)$ 在 $[a, b]$ 上分别一致收敛于 $f(x)$ 和 $f'(x)$.