

Rapport

Jean-Didier Pailleux - Maxence Joulin - Damien Thenot - Romain Robert - Robin Feron

Test de primalité

https://github.com/CHPS-M1-PRIME-NUMBERS/Prime_numbers

10/01/2018



Projet de Programmation numérique

Table des matières

1	Introduction	1
2	État de l'art	1
2.1	Tests de primalité	1
2.2	Nombres Hautement composés	3
3	Implémentation	4
3.1	Organigramme	4
3.2	Langages de programmation	4
3.3	Outils	5
4	Analyse des résultats	5
4.1	Lancement d'un test	5
4.2	Résultats	6
5	Bilan Technique du Projet	9
6	Organisation interne du groupe	10
7	Conclusion	11

1 Introduction

Ce document est le compte-rendu de notre travail qui s'inscrit dans le cadre du module *Projet de Programmation numérique* du master *Calcul Haute Performance Simulation* de l'**UVSQ**. Le sujet de ce projet a été proposé par l'encadrant Sébastien Gougeaud.

Ce projet découle d'un thème qui est le test de primalité, et consiste à tester si un nombre est bien premier ou non. Un nombre premier est un entier qui admet uniquement deux diviseurs distincts et positifs (1 et lui même). Les nombres premiers prennent une place importante dans le domaine des mathématiques et ont des propriétés très utiles particulièrement dans le domaine de la cryptographie. La recherche de très grands nombres premiers est devenue de plus en plus importante et de nombreux tests de primalité ont pu émerger, voir évoluer, devenir plus performants et de plus en plus rapides.

Il existe actuellement deux types de tests de primalité, les déterministes qui permettent d'établir avec certitude le résultat et les tests probabilistes qui émettent un résultat non fiable avec une certaine probabilité d'erreur mais sont plus rapides que les tests déterministes.

L'objectif de ce projet consiste à implémenter plusieurs de ces tests et ainsi comparer leur vitesse d'exécution. Ceci pour l'exécution des tests de primalité pour un nombre premier, et pour une exécution sur les tests avec n nombres premiers. De plus un test probabiliste sera programmé pour ainsi comparer la fiabilité du résultat et le temps que nécessite de faire cet algorithme.

Une partie bonus nous a été proposée lors de notre entretien avec Monsieur Gougeaud qui consiste à implémenter une fonctionnalité pour déterminer si un nombre est hautement composé (c'est à dire que le nombre de ses diviseurs est supérieur strictement à tout les nombres inférieur à lui).

Dans la première partie de ce document, on présentera l'état de l'art de notre projet. Après cela, on mentionnera les différents outils et langages de programmation utilisés au cours de la phase d'implémentation. Puis dans une autre partie l'analyse des résultats établis lors des tests du projet accompagné d'un comparatif de la performance des tests. Finalement, dans les deux dernières parties, on établira un bilan quant à l'organisation interne au sein du groupe et un bilan technique du projet qui mettra en avant les limites de chaque test de primalité.

2 État de l'art

2.1 Tests de primalité

Au cours de ce projet il nous a été demandé d'implémenter plusieurs algorithmes pour déterminer si un nombre est premier ou non. Voici les différents tests utilisés pour ce travail :

— Méthode naïve le **Crible d'Ératosthène**¹ (Déterministe) :

Cette méthode est utilisée pour le memory bound. Cet algorithme va procéder à une élimination dans une table d'entiers de 2 à N de tous les multiples de chaque entier présent dans ce tableau. En supprimant tous les multiples à la fin, seuls les entiers qui ne sont multiples d'aucun autre resteront et par conséquent ces nombres seront donc premiers. Le memory bound va donc être une liste des entiers restant à la fin de l'application du crible.

— Méthode naïve **l'algorithme d'Euclide** (Déterministe) :

Les premiers algorithmes naïfs sont très simples mais coûteux en temps de calcul. Un nombre est en effet premier si aucun nombre qui lui est inférieur le divise. Cet algorithme va donc essayer de diviser le nombre n dont on souhaite tester la primalité par tout ces nombres. Si l'un d'entre eux donne pour reste de la division 0, alors n n'est pas premier. Afin de limiter le nombre de calculs nécessaires on peut se limiter à tester uniquement tout les nombres inférieurs à \sqrt{n} . En effet, si un nombre $a > \sqrt{n}$ divise n, alors $a \times b = n$ où b est forcément plus petit que \sqrt{n} . Donc n aura été prouvé non premier par b avant d'essayer a.

On peut également utiliser l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver de manière itérative le plus grand diviseur commun de deux nombres (PGCD). Or on dit que a et b sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1. Il suffit donc de prouver que chaque nombre inférieur à \sqrt{n} a pour PGCD 1 avec n pour dire que n est premier.

Ces deux méthodes sont très simples à implémenter mais deviennent très rapidement coûteuses en temps de calcul pour des nombres très grands, s'approchant de 2^{64} par exemple.

— **Pocklington** (Déterministe) :

Le test de primalité de Pocklington-Lehmer utilise le théorème de Pocklington pour vérifier la primalité d'un nombre. L'algorithme consiste à utiliser une factorisation partielle du nombre N-1, où N est le nombre dont on souhaite tester la primalité. Cette factorisation partielle nous permet d'obtenir un nombre que l'on nommera A et qui doit remplir certaines conditions pour qu'on puisse appliquer le théorème. Nous avons déjà la factorisation de A qui nous servira pour la suite de l'exécution de l'algorithme. La suite consiste à tester les conditions requises sur tous les facteurs premiers de A, ces conditions sont de trouver un nombre a qui mis à la puissance N-1 modulo N donne 1 et que le plus grand diviseur commun entre $\frac{a^{(N-1)}}{p}$ et N soit égal à 1, avec p le facteur premier de A tester en ce moment. Si on a trouvé un a remplissant les conditions pour chaque p alors on peut dire que le nombre N est premier.

— **AKS** Version 2002 (Déterministe) :

L'algorithme AKS est l'acronyme de ses créateurs (Agrawal-Kayal-Saxena). AKS est un algorithme déterministe, inconditionnel (il fonctionne peu importe l'entrée) et polynomiale c'est l'un des rares algorithmes à vérifier toutes ces propriétés. Cet Algorithme se base sur une généralisation du petit théorème de Fermat² qui est : "Pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier a

1. zanotti.univ-tln.fr/ALGO/I51/Crible.html

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Test_de_primalit%C3%A9_AKS

premier avec n , n est un nombre premier si et seulement si : $(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{n}$.

En ce qui concerne l'algorithme il est effectuée en 5 étapes.³ :

Pour la version réalisée (2002), la complexité est de l'ordre de $\log(n)^{12}$ cependant il existe beaucoup de variantes qui améliorent l'algorithme (exemple en 2005 une nouvelle variante d'AKS s'exécute en $\log(n)^6$ ce qui représente une belle optimisation comparée à la version initiale). La plupart des optimisations concernent l'étape 5 qui occupe une grande partie de l'exécution de l'algorithme.

— **Miller-Rabin** (Probabiliste) :

Miller-Rabin, basé sur le petit théorème de Fermat

$a^p - 1 \equiv 1 \pmod{p}$, consiste à tirer parti d'une équation ou d'un système d'équations qui soient vraies pour des valeurs premières et à regarder si elles sont toujours vraies pour un nombre dont nous voulons tester la primalité. L'algorithme Miller-Rabin prend en entrée un entier n dont on souhaite vérifier la primalité et un entier k qui représente le nombre d'itération du test de Miller-Rabin, plus k est élevé et plus l'analyse est précise (moins de chance d'erreurs). Il fait partie des tests probabiliste et est donc plus rapide que les tests déterministe.

2.2 Nombres Hautement composés

Deux algorithmes ont été étudiées pour les nombres hautement composés. Le premier est une méthode naïve qui consiste à calculer le nombre de diviseur d'un nombre n et de comparer ce nombre avec le nombre de diviseurs pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$.

Le deuxième algorithme utilise la propriété sur la forme qu'un nombre hautement composé doit avoir. Un nombre hautement composé possède des facteurs premiers qui sont les plus petits possible. Si l'on doit prendre en considération que la décomposition d'un entier $n > 1$ en produit de facteurs premiers comme suit $n = p_1^{c_1} * p_2^{c_2} * \dots * p_k^{c_k}$ où $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_k$ sont les k plus petits nombres premiers, avec c_k le dernier exposant non nul.

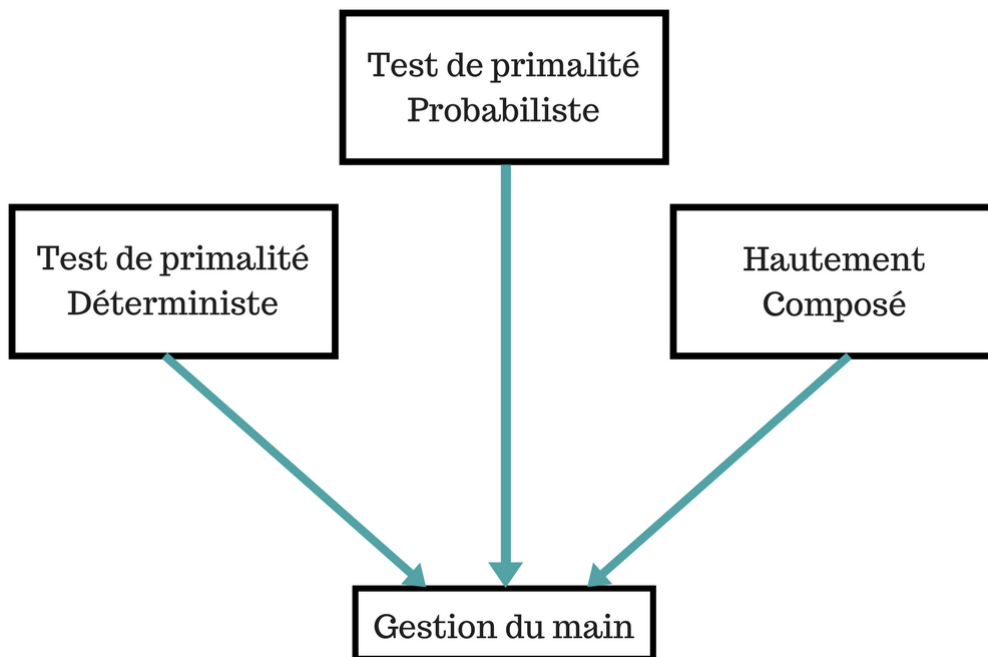
En conséquence, pour que n soit hautement composé, il faut que $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k$. En cas de non respect de cette règle si nous échangeons deux exposants on diminue le nombre n tout en conservant exactement le même nombre de diviseurs. Un exemple pour illustrer : $18 = 2^1 * 3^2$ peut être remplacé par $12 = 2^2 * 3^1$, ces deux nombres ont tout les deux 6 diviseurs. De plus il a été montré que le dernier exposant $c_k = 1$, sauf dans deux cas particuliers $n = 4$ et $n = 36$.

3. https://en.wikipedia.org/wiki/AKS_primality_test

3 Implémentation

3.1 Organigramme

L'organigramme suivant fait part de la décomposition que va adopter le projet. Le projet se décompose en trois catégories de tests pour les nombres hautement composé, les tests de primalité déterministe et les tests de primalité probabiliste.



3.2 Langages de programmation

Pour la réalisation du projet, nous avons convenu avec notre encadrant les langages que nous allions utiliser. Premièrement nous avons choisi le langage C++, langage adapté pour la programmation procédurale et pour la programmation orientée objet. De plus, il dispose de nombreuses bibliothèques permettant de manipuler des grands entiers supérieur à 2^{64} , de chronométrer l'exécution d'une portion du programme, et autre.

Deuxièmement le langage Shell. Celui-ci faisant partie du système d'exploitation UNIX, va nous permettre d'établir un script *test.sh* avec l'enchaînement de plusieurs lignes de commandes pour l'exécution de tests.

3.3 Outils

Pour ainsi produire le projet certains outils ont été utilisés pour obtenir le résultat présenté. En premier lieu nous avons installé la bibliothèque *GMP*. Cette dernière est une bibliothèque nécessaire pour utiliser *NTL*, de plus elle pourrait nous être utile dans le cas où l'on voudrait générer de très grands nombre car les types de base proposés par le C++ nous limite à l'utilisation de nombres de 64 bits maximum.

La deuxième bibliothèque utilisé est donc la bibliothèque *NTL*, qui propose certaines fonctionnalités pour le calcul du PolyModulo⁴ qui nous est indispensable pour l'implémentation du test de primalité AKS. N'ayant aucune connaissances nécessaire dans le domaine des mathématiques sur l'algèbre modulaire, l'utilisation de cette bibliothèque nous permet d'obtenir des fonctions pour ces calculs et de façon optimisée.

Nous avons également utilisé un service d'hébergement de gestion de développement utilisant le système de gestion de version *Git* qui est **GitHub**. Ceci nous a permis de travailler en groupe sur un dépôt de façon très facile tout en étant indépendant lorsque chacun devait travailler de son côté sur une fonctionnalité sans pour autant perturber le travail du reste du groupe. GitHub nous permet également de stocker les différentes versions de notre travail.

Enfin le dernier outil utilisé est *CMake*⁵. *CMake* est une famille d'outils multi-plateformes et open source permettant de construire, tester et emballer des logiciels. Nous l'utilisons pour la compilation du projet, la liaison avec plusieurs bibliothèques utilisées et pour la génération d'un makefile.

4 Analyse des résultats

4.1 Lancement d'un test

Pour lancer un test il faut exécuter le script "*test.sh*" qui va tout d'abord demander une option pour connaître le ou les tests que l'on veut exécuter. Pour cela nous avons à disposition les arguments suivants :

- a : Effectue chaque test
- k : AKS
- e : Euclide (Computation Bound)
- o : Modulo (Computation Bound)
- m : Crible d'Eratosthène
- p : Pocklington

4. https://en.wikipedia.org/wiki/AKS_primality_test

5. <https://cmake.org/>

- i : Miller-Rabin
- h : Nombre hautement composé naïve
- H : Nombre hautement composé définition.

Un nombre d'itérations sera demandé pour le test d'un nombre premier pour obtenir une moyenne sur le temps d'exécution. Puis il sera demandé un nombre "size" pour indiquer au programme combien de nombre premier (ou hautement composé) doit-il s'attendre à recevoir, puis les indiquer. Le programme va générer trois fichiers. Le fichier "*data.txt*" contient les résultats pour le temps d'exécution de l'échantillon de nombres donnée. Le fichier "*result.txt*" quant à lui contient les retours des tests pour le dernier nombre de l'échantillon. Le dernier fichier "*average.txt*" contiendra le temps moyen d'exécution pour le dernier nombre de cet échantillon.

4.2 Matériel et logiciel utilisé

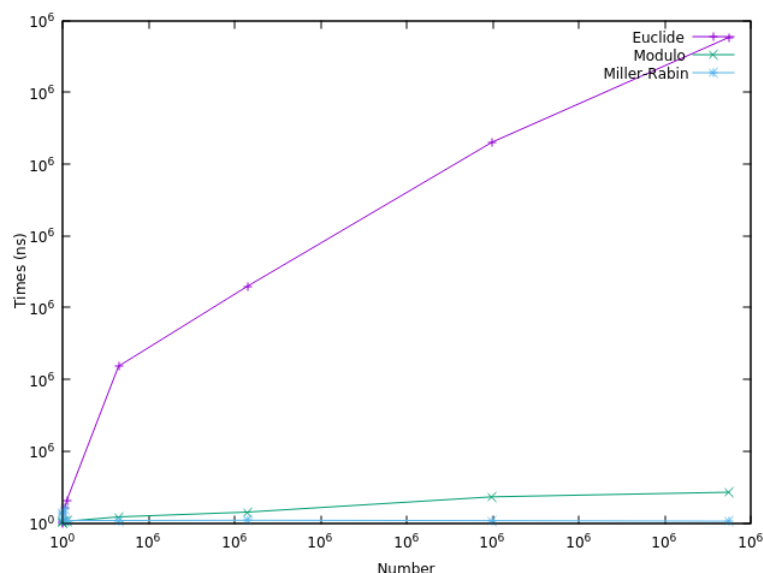
CONFIGURATION PC.

COMPILATEUR, CMAKE version, NTL version, GMP version, C++ version.

4.3 Résultats

(INDIQUER LE NOMBRE D'ITERATIONS) Dans cette partie nous avons réalisé une batterie de tests sur un échantillon de nombres premiers. Cet échantillon de nombres premiers est la suivante : '3', '97', '1039', '50023', '102013', '1300837', '4301623', '9990887' et '15487253'. L'Étude demandé pour ce projet nous impose de faire une comparaison des résultats obtenus pour chaque test de primalité.

Dans les graphes 1 on peut observer l'évolution du temps d'exécution en fonction du nombre.



Pour commencer nous pouvons observer que les courbes d'évolutions du temps d'exécutions pour les méthodes naïve d'Euclide, d'Eratosthène et de Modulo ont des temps d'exécution très faible pour

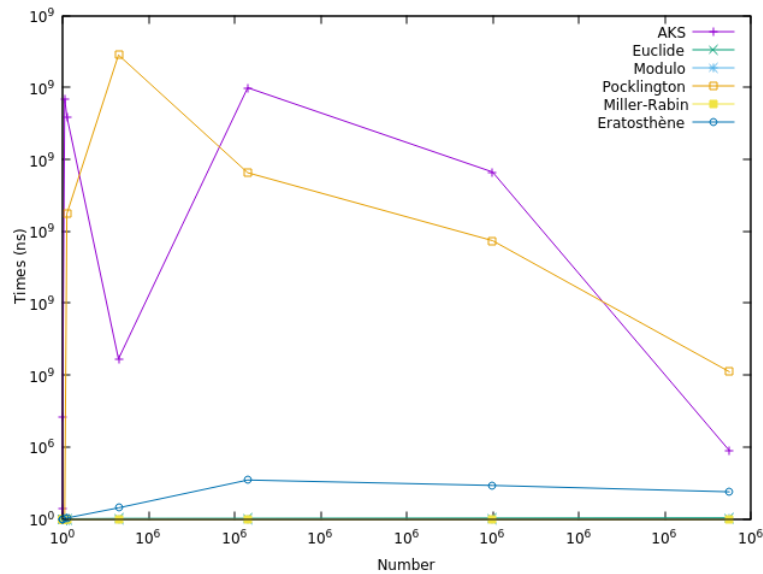


FIGURE 1 – Figure que moi j'ai vu

de petits nombre. Mais les nombres utilisés ici sont de taille raisonnable, mais pour des nombres de l'ordre de 2^{50} leur temps d'exécution augmente de façon considérable à cause de leur complexité. Pour l'algorithme de *memory_bound* l'utilisation de la mémoire devient beaucoup trop importante à cause du tableau de taille $N+1$ créé par l'algorithme de crible (Exemple pour 97 on utilise 97 bytes, mais pour 2^{50} on aura donc 2^{50} bytes utilisé en mémoires). Pour les tests nous nous sommes arrêté à 15487253 car nous sommes limité par les machines que nous avons, notamment la RAM disponible sur celles-ci.

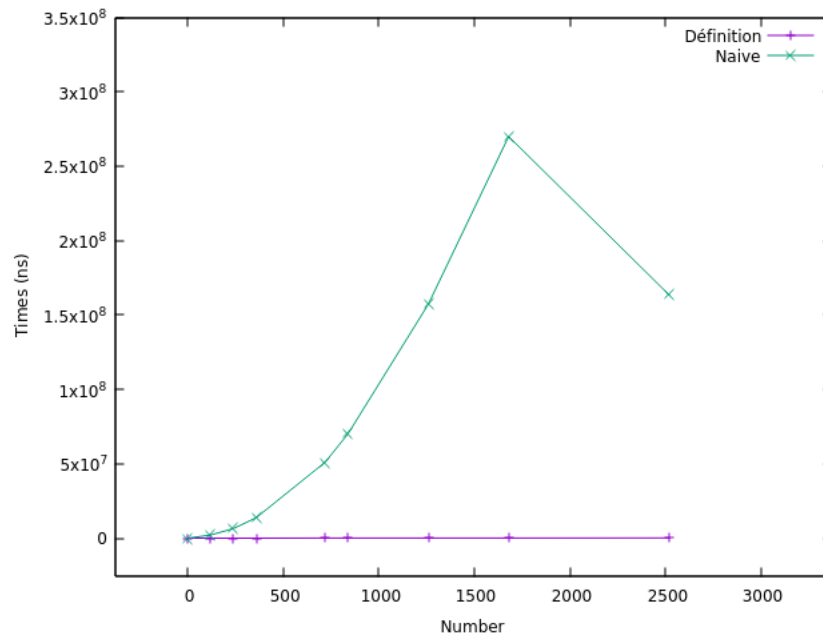
En observant la courbe de Miller Rabin on remarque que le temps d'exécution est très élevé pour les premiers résultats et qu'il accélère grandement pour les derniers, or en regardant les résultats fournis on s'aperçoit que ces derniers sont faux l'algorithme malgré des tests avec un plus grand nombre d'itération renvoie des résultats souvent incorrects lorsque le nombre étudié devient assez grand.

Concernant le test de Pocklington, la courbe ne nous permet pas de définir une évolution précise du temps d'exécution en fonction de la taille du nombre. En effet, la factorisation est la partie théoriquement la plus lourde de cet algorithme, elle est plus ou moins longue en fonction du N en entrée, il est en effet difficile de déduire le temps d'exécution à partir de la taille de N mais le temps d'exécution a quand même tendance à augmenter avec la taille du nombre. Des optimisations de cette partie lourde existe tel que le crible quadratique ou encore le crible algébrique.

En ce qui concerne la courbe pour AKS on peut observer deux ensembles de points qui correspondent à l'étape de détection de la primalité du nombre. En effet, le nombre peut être détecté

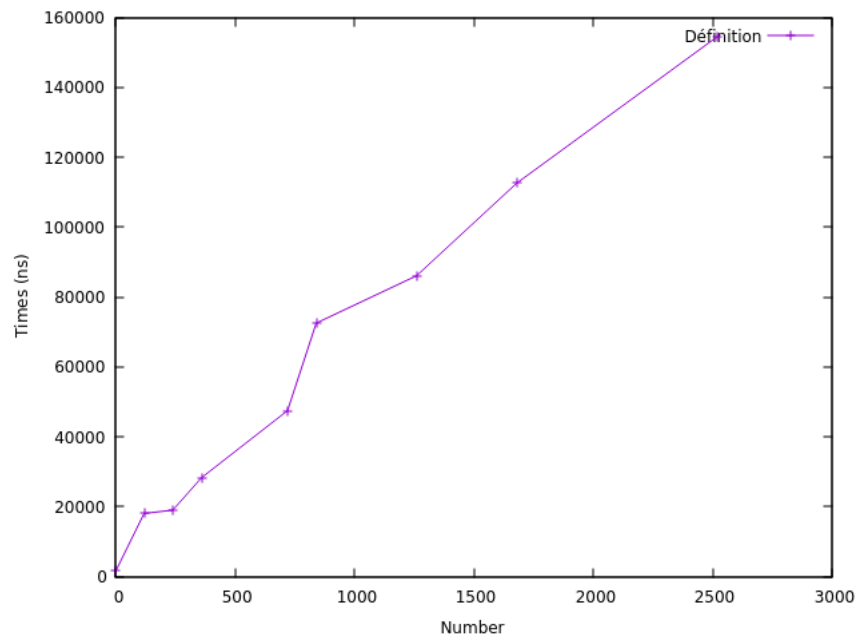
comme étant premier à l'étape 4 ou à l'étape 5 de l'algorithme. L'étape 5 est la dernière étape effectuée, et celle-ci met un certain temps à se faire, on observe donc cette différence de temps. Passé un certain rang cette différence de temps disparaît ($n > 5690034$)⁶). Sinon la courbe est légèrement croissante, elle va croître doucement compte tenu de la complexité de l'algorithme ($O \log(n)^{12}$).

Pour les deux fonctionnalités sur les nombres hautement composés, l'échantillon suivant : ['2' '120' '240' '360' '720' '840' '1260' '1680' '2520'] a été utilisé pour comparer les deux procédures et observer l'évolution du temps d'exécution.



Nous pouvons observer que la méthode naïve prend énormément de temps pour s'exécuter en comparaison à la méthode appliquant la définition de ce type de nombre. En effet, pour un nombre N donné, la fonction va devoir calculer le nombre de diviseurs pour les $N-1$ nombres inférieurs à N et effectuer N comparaisons ce qui engendre beaucoup de latence. Et le temps pour le nombre 2520 est déjà assez élevé pour un nombre supérieur à 2^{10} . On peut donc imaginer la courbe accroître plus rapidement pour de très grands nombres. Mais étant limité par notre matériel, nous nous sommes contenté de ce type de nombre.

6. https://en.wikipedia.org/wiki/AKS_primality_test



Zoom sur la courbe pour la méthode appliquant la définition.

5 Bilan Technique du Projet

Après l'analyse des résultats nous pouvons constater que les différents tests appliqués possèdent chacun des limites. Tout d'abord, la principale limite du crible d'Eratosthène concerne la taille de son tableau. En effet, pour un nombre N très très grand, le crible va créer un tableau de booléen de taille $N+1$, ce qui va prendre énormément de place en mémoire, et avec les machines que nous avons à disposition nous sommes très vite limité à cause de la RAM. Puis pour la création de la liste contenant les nombres premiers de 2 jusqu'à N , la fonctionnalité de `memory_bound` va devoir parcourir toutes les cases du tableau du crible pour remplir sa liste, ce qui engendre une complexité de N pour cette opération de remplissage.

La méthode naïve effectue au pire \sqrt{N} divisions euclidiennes. Or cette division euclidienne n'est pas à temps constant. De plus pour un nombre N écrit en base 2, sa longueur vaut $\log_2(N)$. Notre algorithme effectuera donc $\sqrt{2^{\log_2(n)}}$ divisions euclidiennes. Nos méthodes naïves s'exécuteront donc en temps exponentiel. C'est pourquoi ces méthodes très simples et rapides pour de petits nombres deviennent très rapidement non applicable pour de très grand nombres. Le test d'un nombre aux alentours de 2^{64} prendra plusieurs années à s'exécuter même sur nos machines actuelles.

Ensuite, pour le test de Pocklington la limite principale est le besoin de factoriser le voisin d'en dessous du nombre dont on cherche à valider la primalité, c'est-à-dire $N-1$ si N est le nombre dont on met la primalité en question. La factorisation des grands nombres est une lourde tâche de calcul de difficulté exponentielle, ainsi même les programmes les plus efficaces demandent énormément de

temps, des années voir plus, pour factoriser certains nombres très grands. En réalité, nous avons la possibilité de factoriser $N-1$ qu'en partie, il suffit de factoriser $N-1$ jusqu'à trouver un A , créé à partir des facteurs premiers de $N-1$, qui respecte les conditions nécessaires pour appliquer le théorème.

Pour Miller-Rabin, les limites concernent le retour de l'algorithme auquel ils nous faut s'assurer que ce dernier ne renvoie pas "premier" pour un nombre composé ou inversement. Pour cela il faut faire plusieurs itérations de l'algorithme, et ce nombre d'itérations est difficile à déterminer et si on veut être sûr que le résultat soit correcte le nombre d'itérations peut être très élevé ce qui augmente le temps d'exécution nécessaire pour avoir des données correctes.

Concernant l'implémentation de AKS, ce dernier pourrait être sûrement amélioré avec une plus grande connaissance de la bibliothèques NTL utilisé pour l'arithmétique modulaire ou même avec l'utilisation d'autres bibliothèques. De plus une plus grande connaissance en mathématiques aurait permis d'offrir une optimisation pour certaines lignes de code, notamment dans l'étape 5 de l'algorithme. Il aurait aussi été possible d'implémenter une variante de l'algorithme AKS de base qui est plus récente et donc plus optimisé pour un gain de performance certain. Il est également possible que la bibliothèque NTL fausse les résultats de temps pour l'algorithme AKS. En effet, la bibliothèque effectue certaines vérifications superflues qui ralentiraient le temps d'exécution du test.

Enfin, pour les tests d'un nombre hautement composé effectuent N calcul du nombre de diviseurs d'un nombre en partant de sa factorisation en nombre premier. C'est pourquoi tout comme les méthodes naïves pour les tests de primalités, en utilisant la méthode naïve d'un nombre aux alentours de 2^{64} prendra un temps considérable à s'exécuter même sur nos machines actuelles.

6 Organisation interne du groupe

Pour débiter la programmation de ce projet, il nous fallait en premier lieu établir la répartition du travail de groupe pour que le projet puisse avancer de façon efficace et de manière rapide. Le tableau ci-dessus va ainsi indiquer pour chaque membre du groupe la ou les fonctionnalités pour laquelle il a pu contribuer à l'élaboration :

Tâches	Jean-Didier	Maxence	Romain	Robin	Damien
Eratosthène/Memory Bound	x				
Euclide/Computation Bound		x			
AKS			x		
Pocklington					x
Miller-Rabin				x	
Highly Composite	x				
Cmake	x	x			
Script	x	x			

Concernant le rapport et les slides de présentation, nous avons tous contribué à l'élaboration du contenu de ces derniers et principalement Jean-Didier pour tout ce qui concerne la mise en page.

7 Conclusion

Ce document résume tout ce qui a été établi avant, pendant et après la réalisation de notre projet. Ce projet est donc une application de plusieurs algorithmes pour tester la primalité d'un nombre ou si il est hautement composé. Après une étude des tests sur un échantillon de valeurs on a pu faire plusieurs comparaisons entre ces méthodes et on a pu observer que les méthodes naïves sont très utiles pour les petits nombres mais deviennent très lentes pour les très grands nombres. De plus, Miller-Rabin est un test probabiliste qui pour nous n'est pas très intéressant. En effet ce dernier a une exécution rapide mais une probabilité élevée pour obtenir un résultat non conforme.

Dans l'état actuel, on peut revoir avec du recul, la manière avec laquelle notre projet a été réalisé. En effet, nous aurions sûrement revue notre répartition des tâches concernant certains algorithmes comme AKS et Pocklington. Ces derniers ont posés des problèmes pour certains membres du groupe car ces algorithmes ne sont pas faciles à appréhender et demande certaines connaissances notamment en mathématique pour les Polynômes Modulaire pour AKS. Des groupes de 2 pour leur implémentation aurait été préférable.

Ce travail a été réalisé par un groupe de 5 personnes. Le sujet a été très bien appréhendé par les membre du groupe et l'entente a été excellente. Grâce aux informations préalablement établies lors de notre entretien avec Monsieur Gougeaud, le travail au sein du groupe a pu être mené de façon assez indépendante, sans générer de conflits ni de problèmes d'organisation.

Pour finir, après observation de nos résultats, nous sommes rentré en phase de réflexion concernant la deuxième étape du projet qui aura lieu pendant le semestre 2. Cette étape consiste à paralléliser l'implémentation faite au cours de ce Semestre. Mais ici tout les tests de primalité ne sont pas forcément parallélisable. Nous pensons actuellement que seul le crible d'Eratosthène est parallélisable et donc il sera de notre ressort de penser à une manière de paralléliser l'implémentation faite ou alors paralléliser les tests comme ceux réalisés sur des grands ensembles de nombres pour accélérer l'exécution et de réussir les enjeux posés par la l'égalisation de charges sur les différents processeurs.