数学分析与线性代数例题

佚名

2019 年 12 月 6 日

目录

1 微分中值定理及其应用

定理 1 (极值的第二充分条件). 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 可导且 $f^{'}(x_0)=0$ ，又 $f^{''}(x_0)=0$ 存在.

1) 若 $f^{''}(x_0)<0$ ，则 $f^{'}(x_0)$ 是严格极大值

2) 若 $f^{''}(x_0)>0$ ，则 $f^{'}(x_0)$ 是严格极小值.

例 1. 求 $y=\frac{1}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的极值点与极值[1].

解. 函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，当 $x\neq 5$ 有

$$y^{'}=\frac{1}{3}\left((x-5)^{\frac{2}{3}}+\frac{2x}{3}(x-5)^{\frac{-1}{3}}\right)=\frac{5(x-3)}{9(x-5)^{\frac{1}{3}}} \tag{1}$$

令 $y^{'}=0$ 得稳定点 $x=3$ ，现列表如下：

x	$(-\infty,3)$	3	$(3,5)$	5	$(5,+\infty)$
$y^{'}$	$+$	0	$-$		$+$
y	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

从表中可见 $x=3$ 是极大值点，极大值为 $f(3)=\sqrt[3]{4}$；$x=5$ 为极小值点，极小值为 $f(5)=0$. 我们可以大致地画出函数的图形，如图 1所示.

[1]原题摘自《数学分析简明教程》（上册）P142.

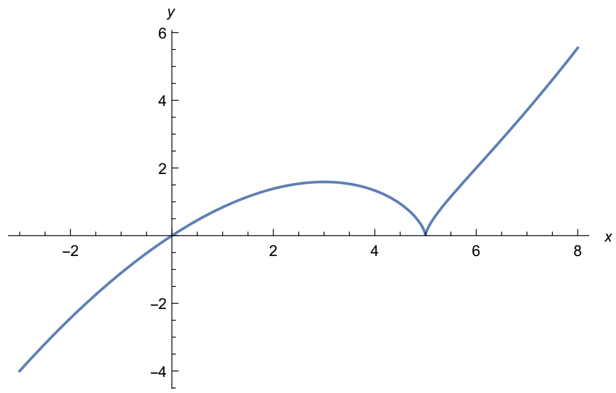

图 1: $y=\frac{1}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的函数图像

2 行列式

例 2. 若 $a,b\in\mathbb{R}^+$，求由方程为 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$ 的椭圆为边界的区域 E 的面积[2].

解. 断言 E 是单位圆盘 D 在线性变换 T 下的像. 这里 T 由矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$ 确定，这是因为若 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，且 $\mathbf{x}=A\mathbf{u}$，则

$$u_1=\frac{x_1}{a}\ u_2=\frac{x_2}{b}$$

从而得 u 在此单位圆内，即满足 $u_1^2+u_2^2\le 1$，当且仅当 x 在 E 内，即满足 $(x_1/a)^2+(x_2/b)^2\le 1$. 进而

$$\begin{aligned}\{\text{椭圆的面积}\}&=\{\text{T(D) 的面积}\}\\ &=|\det A|\cdot\{\text{D 的面积}\}\\ &=a\cdot b\cdot\pi\cdot(1)^2\\ &=\pi ab\end{aligned}$$

[2]原题摘自《线性代数及其应用》（第三版）P183.