

数学分析与线性代数例题

佚名

2019 年 12 月 6 日

目录

1 微分中值定理及其应用	1
2 行列式	2

1 微分中值定理及其应用

定理 1 (极值的第二充分条件). 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 可导且 $f'(x_0) = 0$, 又 $f''(x_0)$ 存在.

1) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 是严格极大值;

2) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 是严格极小值.

例 1. 求 $y = \frac{1}{3}x\sqrt[3]{(x-5)^2}$ 的极值点与极值¹.

解. 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 当 $x \neq 5$ 时有

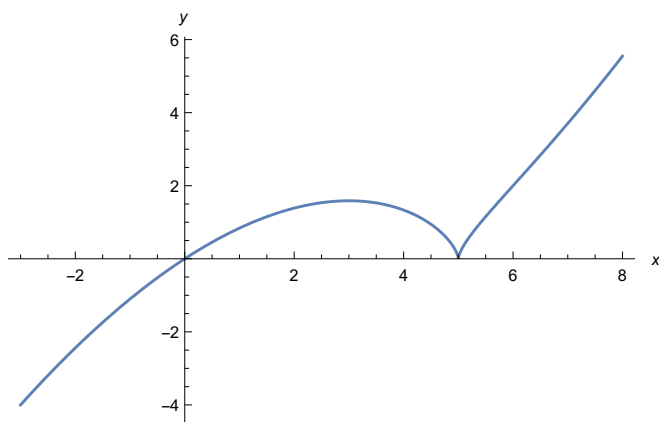
$$y' = \frac{1}{3} \left((x-5)^{\frac{2}{3}} + \frac{2x}{3}(x-5)^{-\frac{1}{3}} \right) = \frac{5(x-3)}{9(x-5)^{1/3}}. \quad (1)$$

令 $y' = 0$ 得稳定点 $x = 3$, 现列表如下:

x	$(-\infty, 3)$	3	$(3, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y'	+	0	-	不存在	+
y	\nearrow	$\sqrt[3]{4}$	\searrow	0	\nearrow

从表中可见 $x = 3$ 是极大值点, 极大值为 $f(3) = \sqrt[3]{4}$; $x = 5$ 为极小值点, 极小值为 $f(5) = 0$. 我们可以大致地画出函数的图形, 如图 1 所示.

¹原题摘自《数学分析简明教程》(上册) P142.

图 1: $y = \frac{1}{3}x^3\sqrt{(x-5)^2}$ 的函数图像

2 行列式

例 2. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 求由方程为 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ 的椭圆为边界的区域 E 的面积².

解. 断言 E 是单位圆盘 D 在线性变换 T 下的像. 这里 T 由矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ 确定, 这是因为若

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{x} = A\mathbf{u}$, 则

$$u_1 = \frac{x_1}{a}, u_2 = \frac{x_2}{b}$$

从而得 \mathbf{u} 在此单位圆内, 即满足 $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$, 当且仅当 \mathbf{x} 在 E 内, 即满足 $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 \leq 1$. 进而

$$\begin{aligned} \{\text{椭圆的面积}\} &= \{T(D)\text{的面积}\} \\ &= |\det A| \cdot \{D\text{的面积}\} \\ &= a \cdot b \cdot \pi \cdot (1)^2 \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

²原题摘自《线性代数及其应用》(第三版) P183.