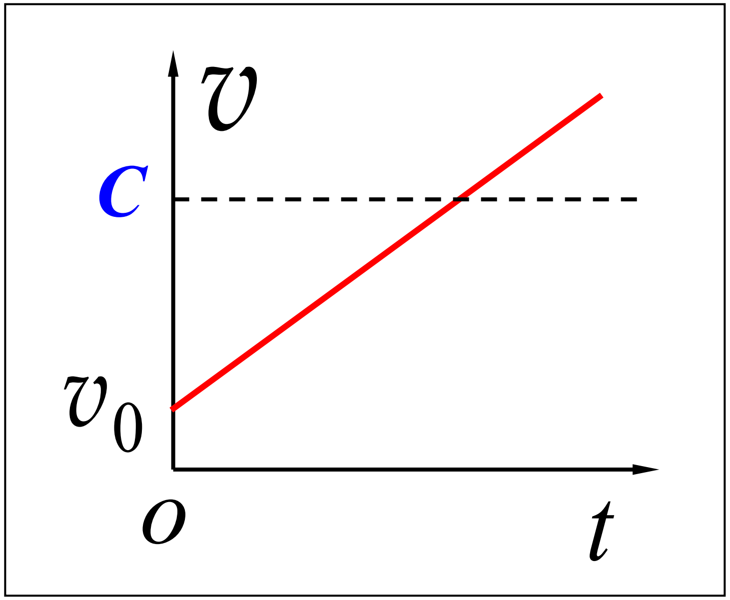
➢牛顿定律与光速极限的矛盾

物体在合外力力作用下的运动

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$$

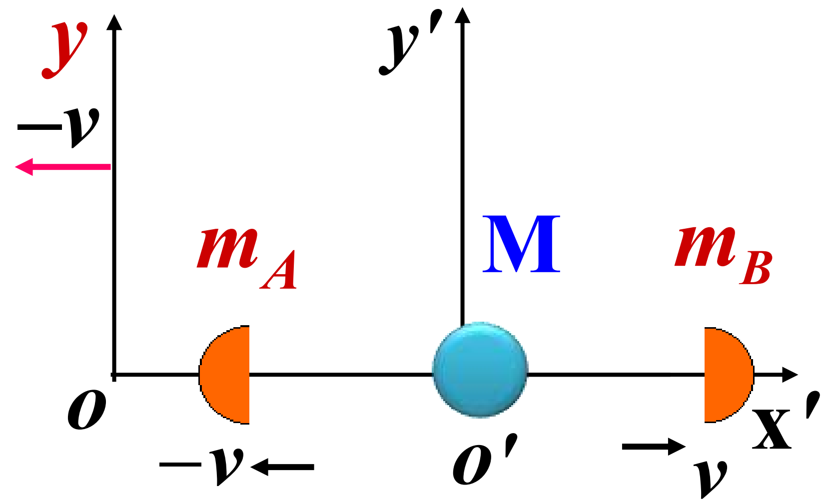


一维匀加速直线运动：

$$v_t=v_0+at$$

相对论质量

设：S'系的o'处有一静止的粒子，t'时刻分裂成两个完全相同的粒子：两粒子分别沿X'轴的正反方向运动



$$S': \; u'_A = -v; \; u'_B = v$$

设S系相对A静止，即以$-v$沿x'轴运动。 $S: M; m_A; m_B$

S系看：m_A粒子 $u_A=0$

m_B粒子 $u_B = \dfrac{u'_B + v}{1+\dfrac{v}{c^2}u'_B} = \dfrac{2v}{1+(\frac{v}{c})^2}$

根据动量守恒：$Mv=m_B u_B$ 其中 $M=m_A+m_B$

$$(m_A+m_B)v=m_B\frac{2v}{1+(v/c)^2} \Rightarrow m_B=m_A\frac{1+(v/c)^2}{1-(v/c)^2}$$

$$\boxed{Mv=m_Bu_B}$$

$$\boxed{u_B=\frac{2v}{1+(v/c)^2}}$$

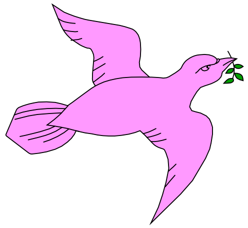
$$m_B=m_A\frac{1}{\sqrt{1-(u_B/c)^2}} \Leftarrow \text{联立消去}v$$

$$\xrightarrow[m_A=m_o]{m_B=m} m=m_o\frac{1}{\sqrt{1-\left(u/c\right)^2}}$$

m_0：静止质量

结论：同一物体处在不同运动速度，其质量不同；不同惯性参考系，物体的相对速度不同，其质量也不同

质量-速度关系



$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left({}^{v}\!/\!{}_{c}\right)^2}}$$

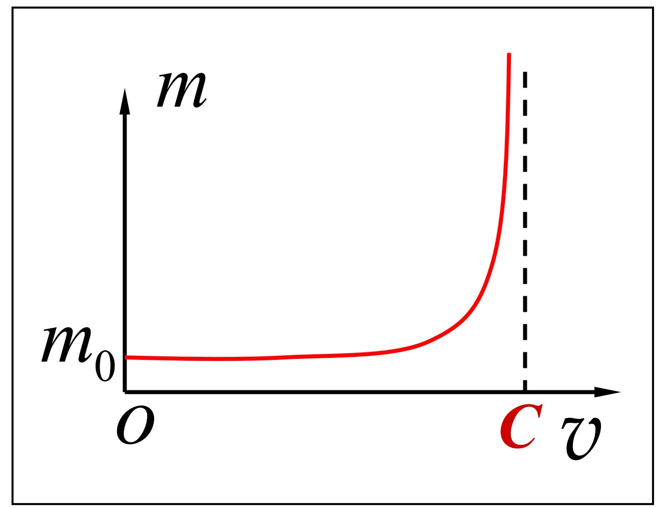
质速关系反映了物质(质量)与运动(能量)的不可分割性

例：$v = 10^4\ m/s$

$$\frac{m - m_o}{m_o} \approx 10^{-10}$$

电子 $v = 0.98c$ 时，$m = 5.03m_o$

$v << c$ 则 $m = m_o$



考夫曼-布塞尔
质速关系曲线

相对论动力学方程

$$m = m_o \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}}$$

相对论质点动力学方程

- 假设物体沿X轴方向运动，合外力沿X方向

$$F = \frac{m_0}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

相对论动能

□若物体从静止状态，到速度增加到v，则：

$$E_K=\int\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}\bullet d\vec{r}=\int\vec{v}\bullet d\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\int(v^2dm+mvdv)=\int c^2dm=\int_{m_0}^{m}c^2dm=mc^2-m_oc^2$$

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\Rightarrow m^2c^2-m^2v^2=m_o^2c^2$$

等式两边微分：$c^2dm=v^2dm+mvdv$

$$\boxed{E_K=mc^2-m_oc^2}$$

相对论动能

$$\cancel{E_k=\frac{1}{2}\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}v^2}$$

质能方程

□静止能量 $E_0 = m_o c^2$ $\qquad$ $\boldsymbol{E_K = mc^2 - m_o c^2}$

□总能量 $E = mc^2 = E_K + m_o c^2$ 相对论质能方程

a. 物体处于静止状态时，物体也蕴涵着相当可观的静能量。

例：$m_0 = 1\text{kg}$， $E_0 = m_0 c^2 = 9\times 10^{16}\,\text{J}$

现有 **100** 座楼，每楼 **200** 套房，每套房用电功率 **10000 W**，总功率 $2\times 10^8\,\text{W}$ ，每天用电 **10 小时**，年耗电 $2.72\times 10^{15}\,\text{J}$ ，可用约 **33 年**。

b. 相对论中的质量既是惯性的量度，又是<u>总能量</u>的量度。

c. 如果一个系统的质量发生变化，能量必有相应的变化。

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

d. 对一个<u>孤立系统</u>而言，总能量守恒，总质量也守恒。

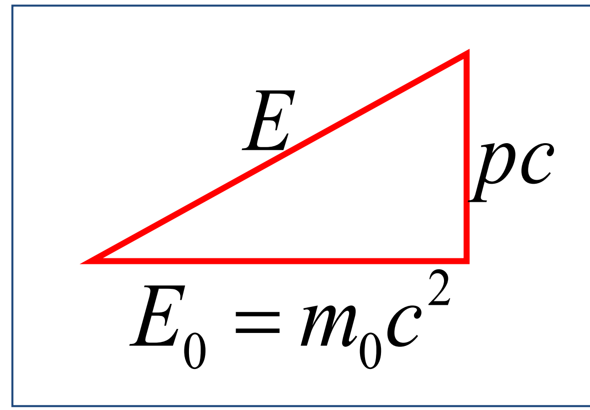
动量与能量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p = mv$$

$$\left(mc^2\right)^2\left(1 - v^2/c^2\right) = \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$



$$\boxed{E^2 = E_0^2 + p^2 c^2}$$

光子 $m_0 = 0, \quad E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{光子} = E/c = mc$

例 7

设一质子以速度v=0.80c 运动，求其静能、总能量、动能和动量。已知质子的静质量：$m_0 = 1.673\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

解：质子的静能 $E_0 = m_0c^2 = 938\mathrm{MeV}$

1 MeV = 1.602×10⁻¹³ J

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{938}{(1-0.8^2)^{1/2}}\mathrm{MeV} = 1563\mathrm{MeV}$$

$$E_\mathrm{k} = E - m_0c^2 = 625\mathrm{MeV}$$

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 6.68\times10^{-19}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

例8

在参照系S中，有两个静止质量都是m_0的粒子A、B，分别以速度 $\vec{v}_A=v\vec{i}$，$\vec{v}_B=-v\vec{i}$ 运动。相碰后合在一起成为一个粒子。求这个粒子的静止质量M_o？

解： 设合成粒子的速度为 $\vec{u}$

$$m = m_o \frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$$

由动量守恒：

$$m_A v - m_B v = Mu$$

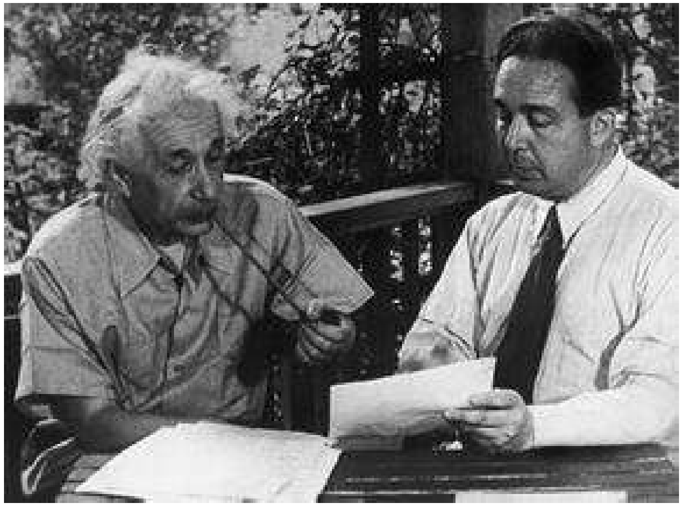
$\because\ |v_A| = |v_B|$ $\therefore\ m_A = m_B$ $\therefore\ u = 0$，合成粒子静止

$(M=M_0)$

由相对论质量守恒：

$$M_0 = M = m_A + m_B = \frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/C)^2}}$$

质能方程的应用



爱因斯坦本人对于制造原子弹的贡献在于：

“关于原子弹和罗斯福，我所做的仅仅是：鉴于希特勒可能首先拥有原子弹的危险，我签署了一封由西拉德起草给总统的信。”

——《爱因斯坦文集》第三卷

核反应中的质量亏损

系统总能量守恒

$E = E_K + m_o c^2$

反应前粒子总的静质量：m_{01}

反应前粒子的总动能：E_{K1}

反应后粒子总的静质量：m_{02}

反应后粒子的总动能：E_{K2}

$$E_{K1} + m_{o1}c^2 = E_{K2} + m_{o2}c^2$$

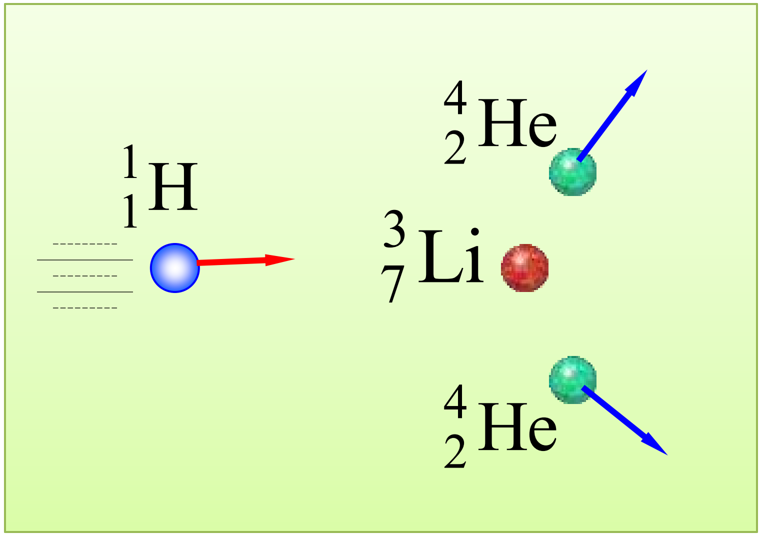
$$E_{K2} - E_{K1} = m_{o1}c^2 - m_{o2}c^2$$

静质量

$$\boxed{\Delta E = \Delta m_o c^2}$$

锂原子的核反应

$$ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$



1932年锂原子的核反应
克饶夫、瓦尔顿

反应前后总动能的增量：

$$ \Delta E_{\mathrm{k}} = 17.3\mathrm{MeV} $$

质量亏损：

$$ \Delta m_0 = \frac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{c^2} = 3.08 \times 10^{-29}\mathrm{kg} $$

$$ = 0.01855\mathrm{u} $$

$$ m_{\mathrm{H}} = 1.00783\mathrm{u} \qquad m_{\mathrm{Li}} = 7.01601\mathrm{u} \qquad m_{\mathrm{He}} = 4.00260\mathrm{u} $$

$$ \boxed{\Delta m_0 = 0.01864\mathrm{u}} $$

$$ \boxed{1\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}} $$

理论计算和实验结果相符

可控核聚变

核聚变是两个较轻的原子核聚合为一个较重的原子核，并释放出能量的过程。自然界中最容易实现的聚变反应是氢的同位素——**氘与氚的聚变**。

托卡马克(tokamak)是一种利用**磁约束**来实现受控核聚变的环形容器。**2017年7月**，我国科学家成功实现了托卡马克**101.2秒**稳态高约束运行，创造了新的世界纪录。

例3

在一种热核反应中，各种粒子的静质量如下：

$${}_1^2\mathrm{H}+{}_1^3\mathrm{H}\rightarrow{}_2^4\mathrm{He}+{}_0^1\mathrm{n}$$ 求：反应释放的能量。

氘核 $({}_1^2\mathrm{H})$ $m_\mathrm{D}=3.3437\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氚核 $({}_1^3\mathrm{H})$ $m_\mathrm{T}=5.0449\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

氦核 $({}_2^4\mathrm{He})$ $m_\mathrm{He}=6.6825\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

中子 $({}_0^1\mathrm{n})$ $m_\mathrm{n}=1.6750\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$

反应质量亏损 $\Delta m_0=(m_\mathrm{D}+m_\mathrm{T})-(m_\mathrm{He}+m_\mathrm{n})$

$$=0.0311\times10^{-27}\,(\mathrm{kg})$$

释放能量 $\Delta E=\Delta m_0c^2=2.799\times10^{-12}\,\mathrm{J}$

本章作业

课本218页

2, 4, 7, 11, 14, 15, 18, 19 (8题)

<u>注意</u>

- 下周五(11月18号)交本章作业
- 作业用**A4**纸, 不抄题, 有题号
- 选择&填空题要有解题过程