And the Lord did sayeth:

$$\oint E \cdot dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint B \cdot dA = 0$$

$$\oint E \cdot ds = \frac{-d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint B \cdot ds = \mu_0 i + \frac{\mu_0 \varepsilon_0 d\Phi_E}{dt}$$

And there was light.

第20章 麦克斯韦方程组

§20麦克斯韦方程组

重点

- 位移电流及全电流定律
- 积分形式的麦克斯韦方程组
- 电磁波的基本概念

难点

- 对位移电流的理解和应用
- 麦克斯韦方程组的意义

回顾

	静电场	稳恒磁场
高斯定理	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_S q$	$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$
环路定理	$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_L I$

有旋电场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

非稳恒磁场

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\neq 0$$

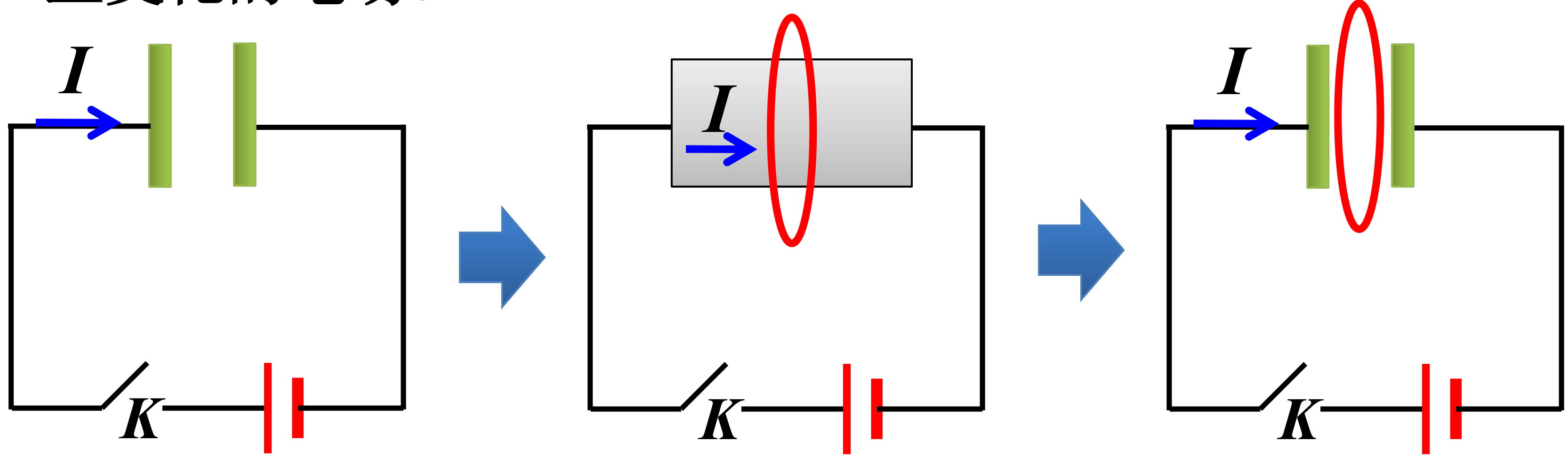
➢ 思考

非稳恒电场 $(\partial \vec{E}/\partial t\neq 0)$ 是否会产生磁场？

未完的故事

开关闭合瞬间，
产生变化的电场。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}\neq 0$$



磁场由变化的电场产生

引入

$$I_{假想} = I_{传导} = \frac{dq}{dt} = \frac{d(\sigma S)}{dt}$$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma=\varepsilon E = D$$

$$I_{假想} = \frac{d(DS)}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = S\frac{dD}{dt}$$

——位移电流 I_d

20.1位移电流&位移电流密度

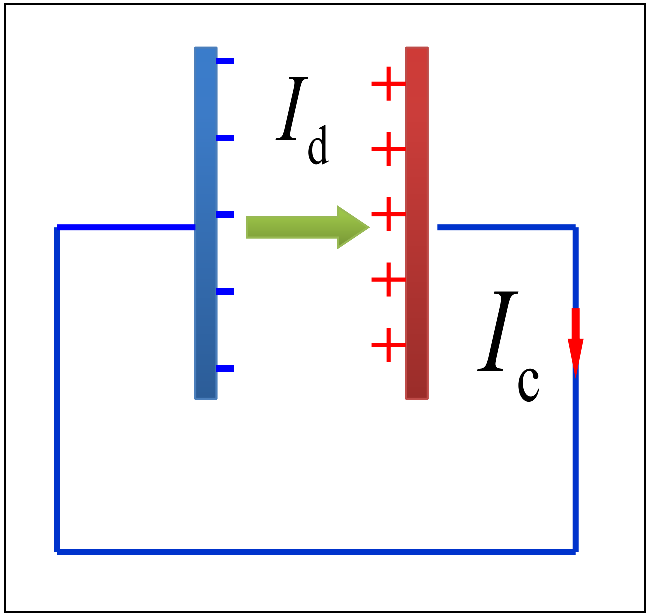
□位移电流：$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{dt} = I_{传导}$

电流在非稳恒的情况下也是连续的。

□位移电流密度：$\vec{j}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$

$\frac{d\vec{D}}{dt}$方向：时刻与传导电流同向

	传导电流I_c	位移电流I_d
起源	电荷运动	电场变化
热效应	有	无
存在媒介	导体	导体、电介质、真空



思考

➢一平行板电容器，<u>略去边缘效应</u>，下面情况是否存在位移电流：

1）充电完毕后，断开电源，然后拉开两极板。此过程中两极板间是否有 j_D？

$j_D=0$ $\because$ σ不变 $\therefore$ $D=\sigma$不变

2）充电完毕后，仍接通电源，然后拉开两极板。此过程中两极板间是否有 j_D？为什么？

$j_D\neq 0$ $\because U=E\cdot d$

U不变，$d\uparrow$, $E\downarrow$ **D 改变！**

全电流

如果电路中同时有**传导电流**和**位移电流**通过某一截面，则二者之和称为**全电流**。

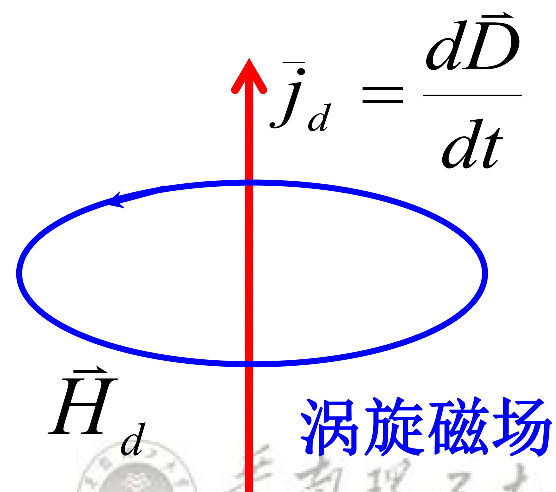
- 全电流电流密度 $\vec{j}_{全} = \vec{j}_c + \vec{j}_d = \vec{j}_c + \dfrac{d\vec{D}}{dt}$
- 全电流电流强度 $I_{全} = I_c + I_d = I_c + \dfrac{d\Phi_D}{dt}$

全电流在任何情况下总是连续的。

➢ 麦克斯韦认为：

位移电流激发磁场的规律与传导电流相同：

$$\oint_L \vec{H}_d \cdot d\vec{l} = I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



全电流定律

在磁场中沿任一闭合回路磁场强度的线积分，数值上等于该闭合回路内传导电流和位移电流的代数和。

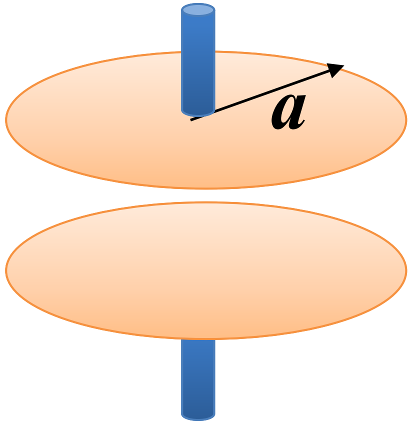
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{全} = I_c + I_d = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt} = I_c + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

➢结论：传导电流和位移电流都能激发涡旋磁场。

位移电流的引入深刻地揭示了电场和磁场的内在联系，反映了自然界对称性的美。法拉第电磁感应定律表明了变化磁场能够产生涡旋电场，位移电流假设的实质则是表明变化电场能够产生涡旋磁场。变化的电场和变化的磁场互相联系，相互激发，形成一个统一的电磁场。

例1

一圆形平行板电容器，两极板的半径为a。设其正在充放电，电荷按规律$Q=Q_o\sin\omega t$变化，忽略边缘效应。求两极板间的位移电流密度和位移电流？



解：(1)平行板之间的电位移大小为

$$D=\sigma=\frac{Q}{S}$$

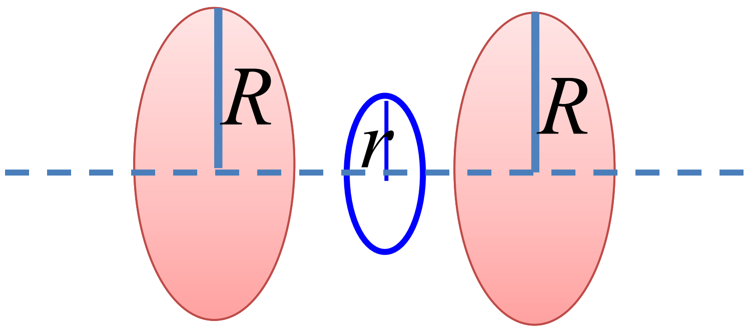
$$j_D=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\omega Q_o}{S}\cos\omega t$$

j_D均匀分布在横截面上，与传导电流同向。

（2）位移电流强度 $I_d=j_D \bullet S=\omega Q_o\cos\omega t$

例2

有一平板电容器，两极板是半径R=0.1m的导体圆板，匀速充电使电容器两极板间电场的变化率为$dE/dt = 10^{13} V\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}$。求：(1)位移电流；(2)两极板间离两板中心连线为r处的磁感强度B_r和$r=R$处的B_R。



解: (1) 电容器两极板间的位移电流

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = S\frac{dD}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 2.8(A)$$

(2) 以两板中心连线为轴，取半径为r的圆形回路，应用全电流定律

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

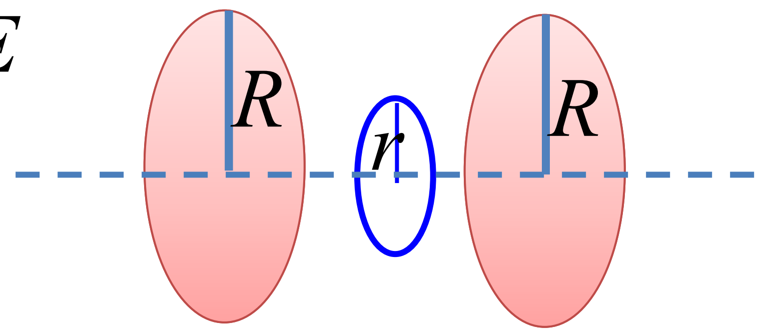
当$r<R$时

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c + \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\cdot 2\pi r = \frac{B}{\mu_0}\cdot 2\pi r$$

$$I_c = 0\,;\quad \Phi_D = S'D = \pi r^2 \varepsilon_0 E$$

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$



$$\frac{B}{\mu_0}\cdot 2\pi r = \pi r^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \Rightarrow B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

当$r > R$时

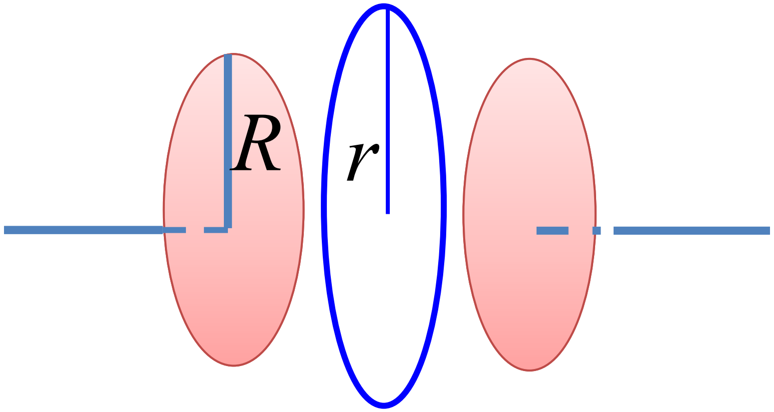
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \frac{B}{\mu_0} \cdot 2\pi r$$

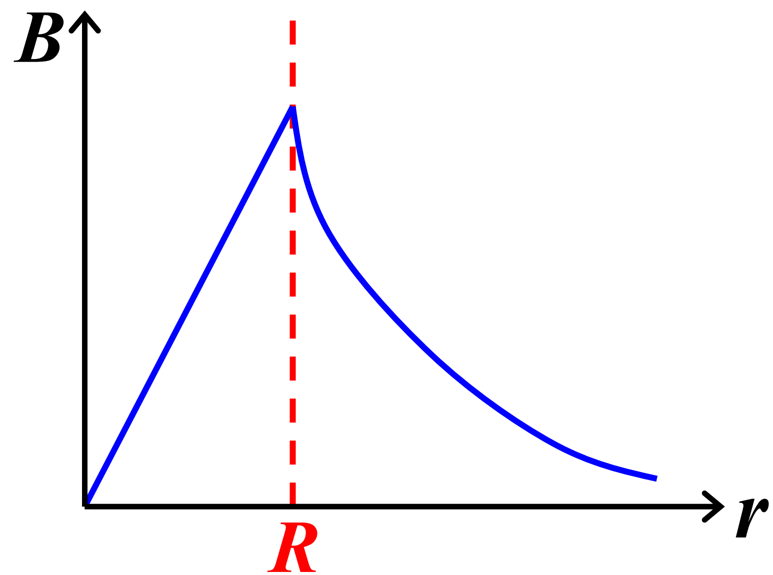
$$I_c = 0\;;\qquad \frac{d\Phi_D}{dt} = S\frac{dD}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

所以 $$\frac{B}{\mu_0} \cdot 2\pi r = \pi R^2 \cdot \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2} \cdot \frac{R^2 dE}{r dt}$$

当$r = R$时 $$B = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2} \cdot \frac{RdE}{dt} \approx 5.6 \times 10^{-8} (T)$$



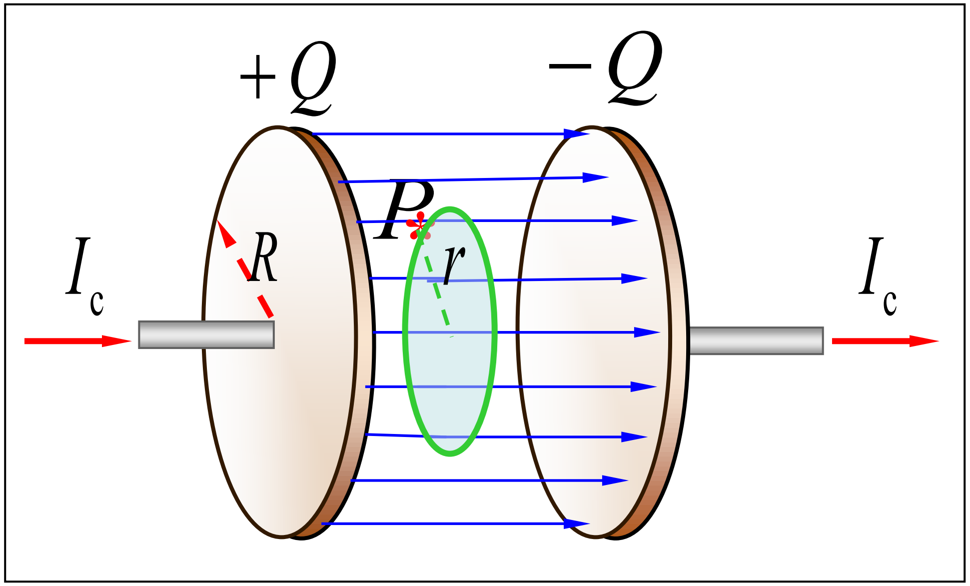


例3

有一圆形平行平板电容器R=3.0cm, 现对其充电,使电路上的传导电流$I_c=dQ/dt$=2.5A ,若略去边缘效应, 求（1）两极板间的位移电流;（2）两极板间离开轴线的距离为r=2.0cm 的点P处的磁感强度 。

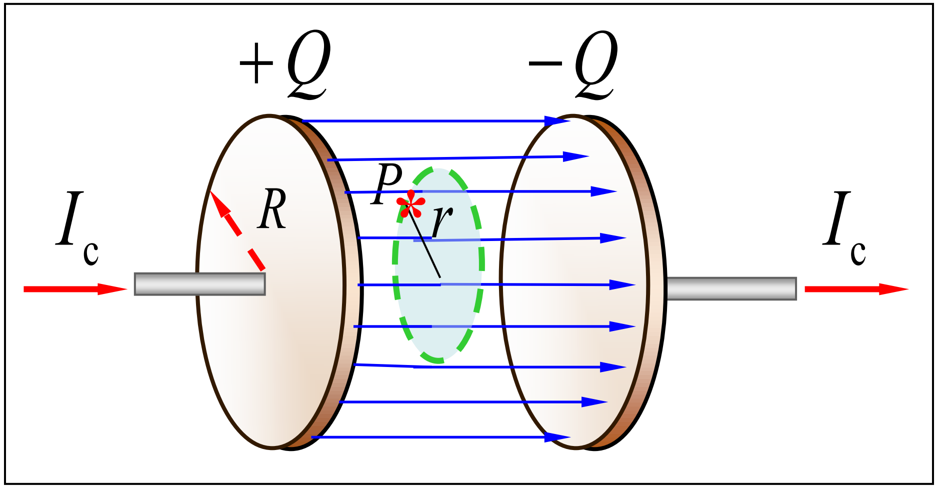
解：(1) $I_d=I_c=2.5\text{A}$

(2)作一平行于极板半径为r为的圆形回路, 此圆面积的电位移通量



$$\Phi = D(\pi r^2)$$

$$\because D=\sigma \qquad \therefore \Phi_D = DS = \sigma\pi r^2 = \frac{Q}{\pi R^2}\pi r^2 = \frac{r^2}{R^2}Q$$



$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{r^2}{R^2}\frac{dQ}{dt} = \frac{r^2}{R^2} I_c$$

思考: 真的需要这么算?

$$\because \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d = I_d$$

$$\therefore H(2\pi r) = I_d = \frac{r^2}{R^2} I_c$$

计算得 $H = \dfrac{r}{2\pi R^2} I_c$

$$\therefore B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I_c$$

代入数据计算得 $B = 1.11 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$

20.2 麦克斯韦方程组

James Clerk Maxwell
(1831-1879)
英国物理学家，经典电磁理论的奠基人，气体动理论创始人之一。

- 提出了气体分子按速率分布的统计规律。
- 提出了有旋电场和位移电流的概念，建立了经典电磁理论，预言了以光速传播的电磁波的存在。

麦克斯韦方程组

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

➢介质性质方程：

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

➢电磁场力公式：

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

麦克斯韦方程组：完全描述经典电磁场的动力学。

➢微分形式

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{D}&=\rho\\ \nabla\cdot\vec{B}&=0\end{aligned}\right\}\text{散度}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}&=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\text{旋度}$$

梯度算符 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

□ 麦克斯韦的电磁理论的特点

- ✓ 物理概念创新
- ✓ 逻辑体系严密
- ✓ 数学形式简单优美
- ✓ 演绎方法出色
- ✓ 电场与磁场以及时间空间的明显对称性

20.3 电磁波

如果有一个变化的电场：

$$E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

就会激发一个变化的磁场：

$$H = H_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

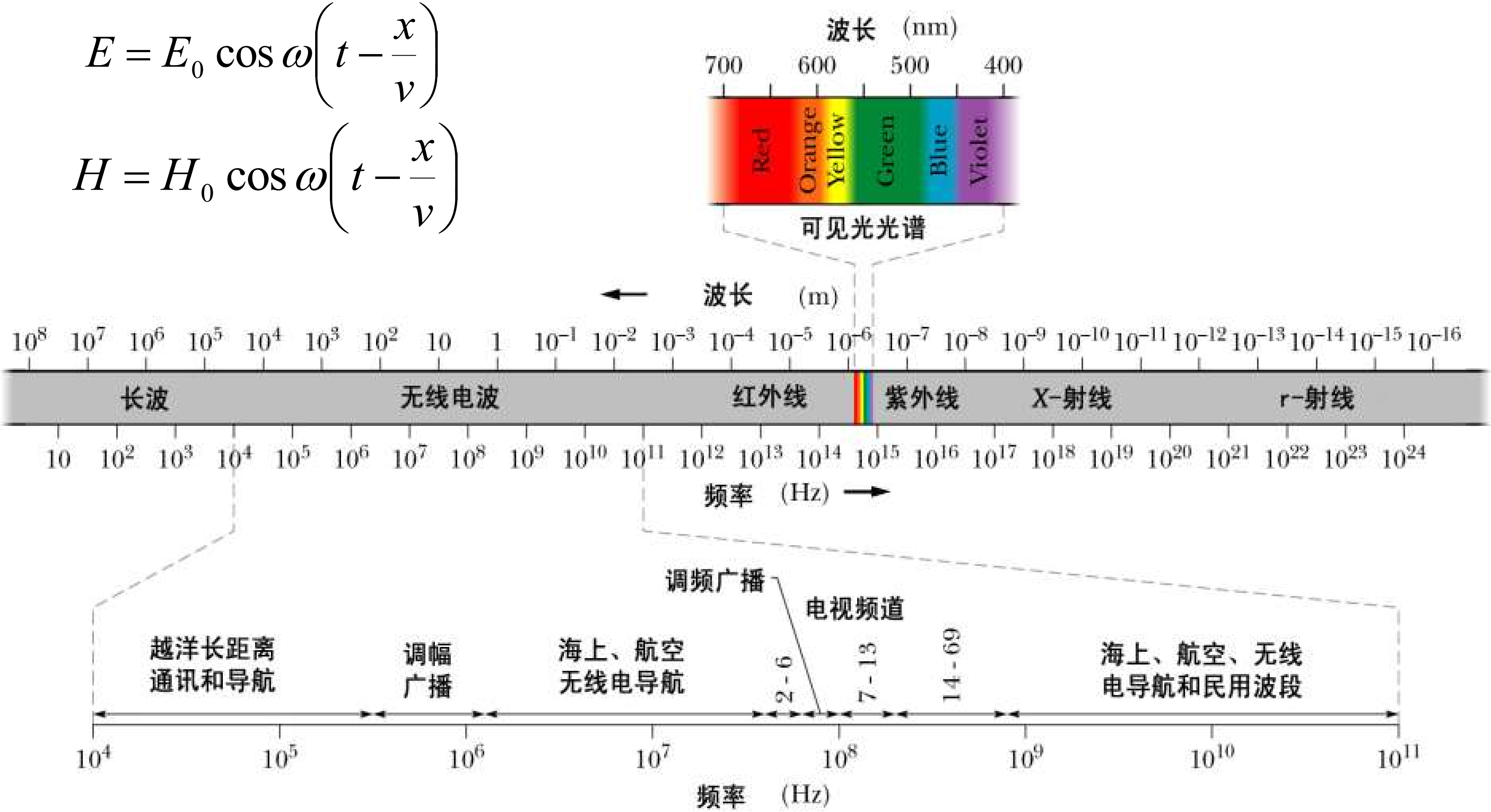
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

有旋电场和有旋磁场的交替激发，形成电磁波。

电磁波谱

$$E = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$H = H_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$



□ 无线电波 波长范围和用途：

名称	长波	中波	中短波	短波	米波	微波		
						分米波	厘米波	毫米波
波长	30000～3000m	3000～200m	200～50m	50～10m	10～1m	100～10cm	10～1cm	1～0.1cm
频率	10～100kHz	100～1500 kHz	1.5～6MHz	6～30MHz	30～300 MHz	300～3000 MHz	3000～30000 MHz	30000～300000 MHz
主要用途	越洋长距离通信和导航	无线电广播	电报通信	无线电广播和电报通信	调频无线电广播、电视广播和无线电导航	电视、雷达、无线电导航等		

- **红外线：** **0.6 *mm*～760 *nm***

  热效应；不易被大气和浓雾吸收。

- **可见光：** **760 *nm*～400 *nm***

  能使人眼产生光的感觉。

- **紫外线：** **400 *nm*～5 *nm***

  有明显的化学效应和荧光效应，也有较强的杀菌本领。

- **X射线：** **5 *nm* ～ 0.04 *nm***

  穿透能力强，在医疗上用于透视和病理检查；在工业上用于检查金属材料内部的缺陷和分析晶体结构等。

- **γ射线：** 小于**0.04 *nm***

  穿透力比X射线更强，对生物的破坏力很大。

平面简谐电磁波

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_L I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

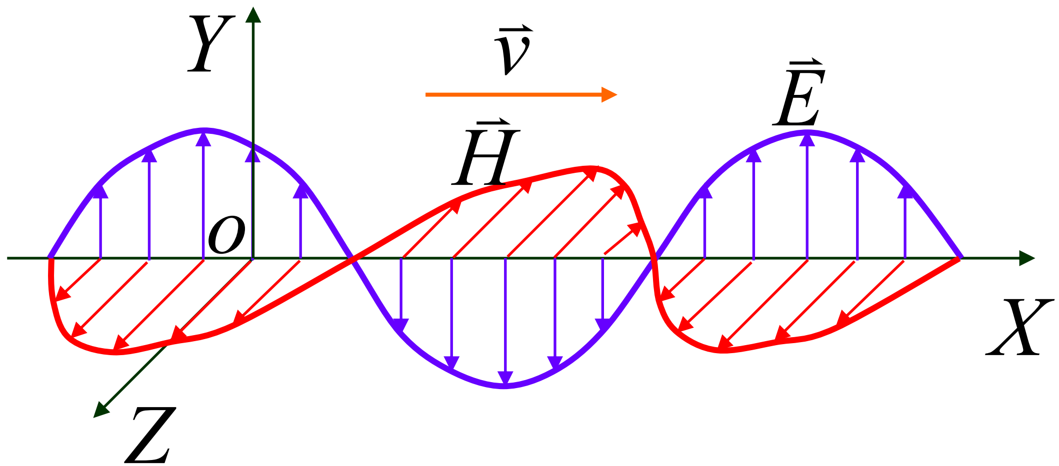
波动方程（平面简谐波）

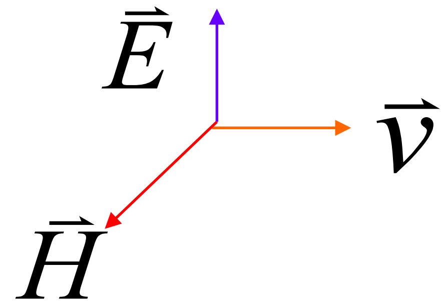
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

波函数 $E = E_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ $H = H_0 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$

E和***H***作同相位的周期性变化 $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$

电磁波的性质



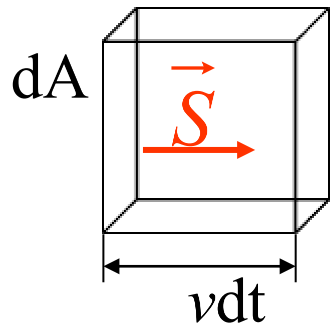


- 电磁波是横波，$\vec{E}$，$\vec{H}$，$\vec{v}$ 两两相互垂直。
- 偏振性，$\vec{E}$，$\vec{H}$ 分别在各自的平面方向上振动。
- 波速 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 真空中 $C=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.9979\times10^{8}\ m/s$
- 电磁波的传播不需要介质

电磁场的能量

➤能量密度： $\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$

➤能流密度：单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积上的能量，用 $\vec{S}$ 表示。



$$dW = \omega \cdot vdt \cdot dA$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

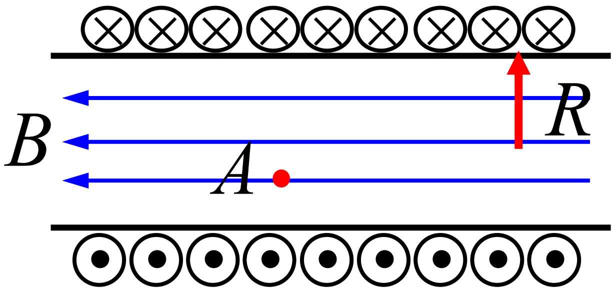
$$S = \frac{dW}{dAdt} = \omega v = \frac{v}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{\varepsilon}E \cdot \sqrt{\mu}H + \sqrt{\mu}H \cdot \sqrt{\varepsilon}E\right) = EH$$

➤能流密度矢量（坡印廷矢量）：$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

例4

一长直螺线管。导线中通有电流 i，且电流随时间的变化率 $di/dt=a>0$，螺线管单位长度的匝数为n，半径为R，管内磁导率为μ。求：(1)螺线管内与轴线相距为 r 的A点处的磁场强度 H；(2)A 点处的感生电场强度$E_{感}$；(3)A点处的坡印廷矢量 S。



解：(1) $H_A=\dfrac{B}{\mu}=ni$　　方向水平向左

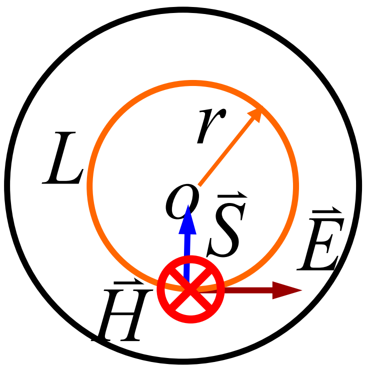
(2)作半径为 r 的闭合回路 L，则

$$\oint_{(L)}\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt}$$

$$2\pi rE_{感}=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\pi r^2\frac{dB}{dt}=-\pi r^2\mu n\frac{di}{dt}$$

$$E_{感}=-\frac{r}{2}\mu n\cdot\frac{di}{dt}$$

(3) $S=EH=\dfrac{1}{2}\mu n^2 ri\dfrac{di}{dt}$



垂直指向螺线管的轴线

电磁波的物质性

电磁波具有运动速度***C***，则其具有一定的动质量***m***

由相对论质能关系：

$$E=mC^2$$

设单位体积中，电磁场质量为***m***，能量为***ω***：***ω*** ***=mC²***

$$m=\frac{\omega}{C^2}=\frac{1}{2C^2}(\varepsilon E^2+\mu H^2)$$ ——质量密度

□电磁场的动量密度 $p=mv=mC=\dfrac{1}{2C}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)$

作 业

第19章(电磁感应):

P176习题 5, 7, 8, 9, 13, 14, 16

第20章(麦克斯韦方程组):

P188习题 1, 5, 7

注意

□11月11号(周五)交第19,20章作业(写在一起)