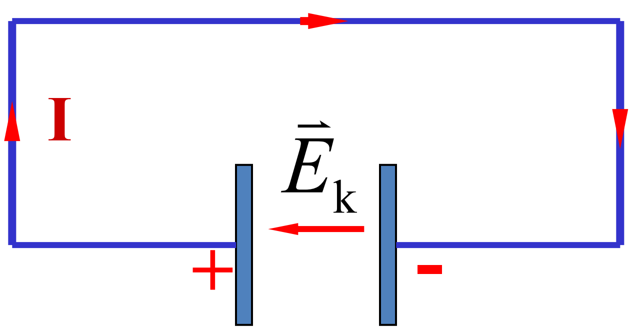
19.2 动生与感生电动势

➢引起磁通量变化的原因

☐ 稳恒磁场中的导体运动， 或者回路面积变化、取向变化等 ⟶ 动 生 电 动 势

☐ 导体不动，磁场变化 ⟶ 感 生 电 动 势

➢电动势



$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$\vec{E}_{\mathrm{k}}$ ：非静电强度

闭合电路的总电动势 $$\boxed{\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

动生电动势

□动生电动势的非静电力场来源 ⟹ 洛伦兹力

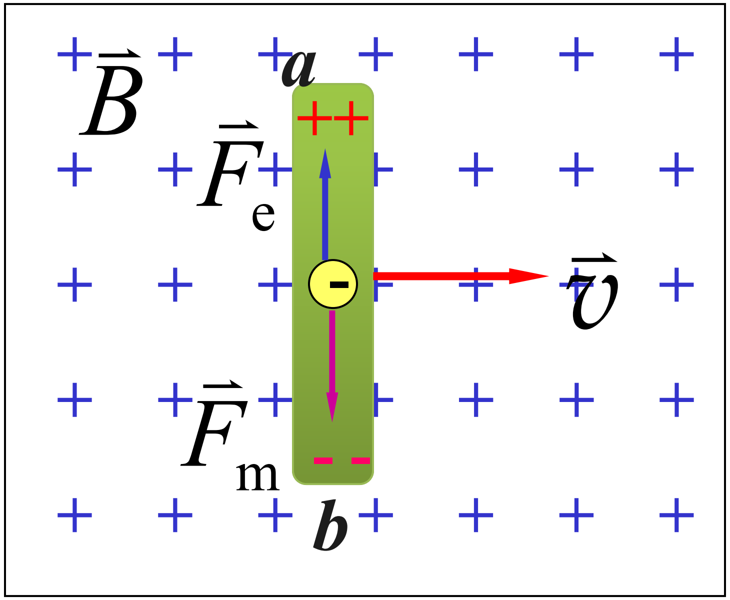
$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = (-e)\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{k}} = \frac{\vec{F}_{\mathrm{m}}}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}$$

动生电动势：

$$\varepsilon_i = \int_b^a \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_b^a (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



动生电动势的方向：首先取定 $d\vec{l}$ 的方向，$\varepsilon > 0$ 表示 ε 的方向与 $d\vec{l}$ 一致，反之则反。

例1

一矩形导体线框，宽为l，与运动导体棒构成闭合回路。如果导体棒一速度v 做匀速直线运动，求回路内的感应电动势。

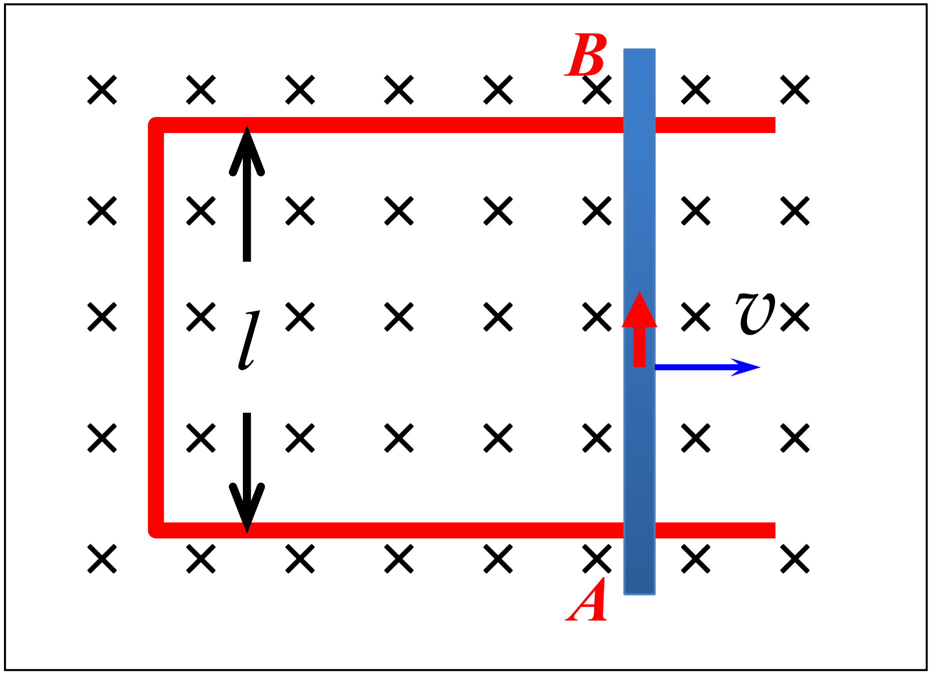
解： 选择dl方向A→ B

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_0^l vB\mathrm{d}l$$

$$= vBl$$

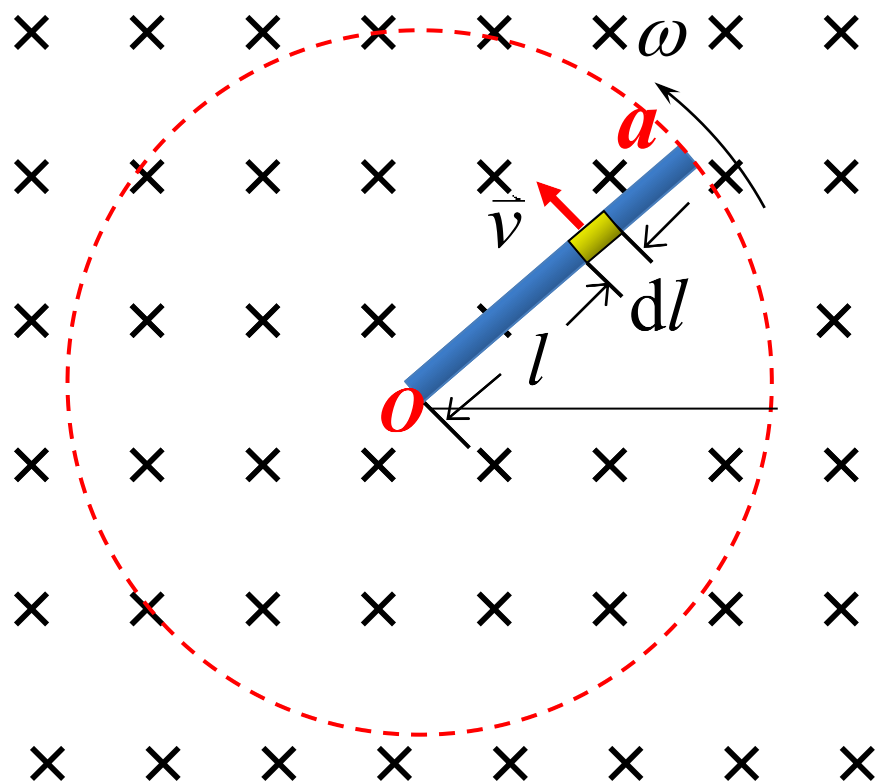
电动势方向：$A\rightarrow B$



老方法： 伸开右手，拇指与其余四指垂直，掌心迎着磁力线方向，拇指指向导线运动方向，四指与导线平行，则四指所指方向即为动生电动势方向。

例2

一根长为L的铜棒，在均匀磁场B中以角速度ω在与磁场方向垂直的平面上做匀速转动。求棒的两端之间的感应电动势大小。



解：若选择dl方向O→ a

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_0^L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_0^L vB\,\mathrm{d}l$$

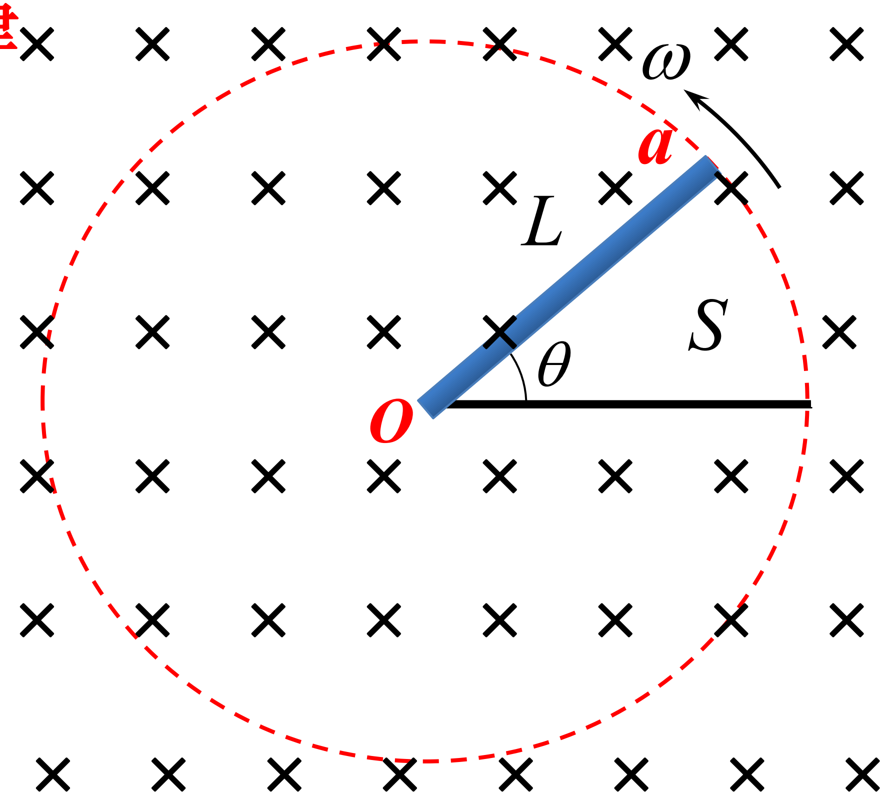
$$= -\int_0^L B\omega l\,\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{1}{2}B\omega L^2$$

动生电动势方向：$a \rightarrow O$

方法二：法拉第磁感应定律

假想形成扇形的闭合回路，取顺时针方向为回路的绕行正方向



$$\Phi = BS = B \bullet \frac{1}{2} L^2 \theta$$

$$= \frac{1}{2} B L^2 \theta$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} B L^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} B L^2 \omega$$

动生电动势方向：

逆时针，$a \rightarrow O$

例3

一长直导线中通电流 I =10A，有一长为L= 0.2m的金属棒与导线垂直共面。当棒以速度v = 2 m/s平行与长直导线匀速运动时，求棒产生的动生电动势。

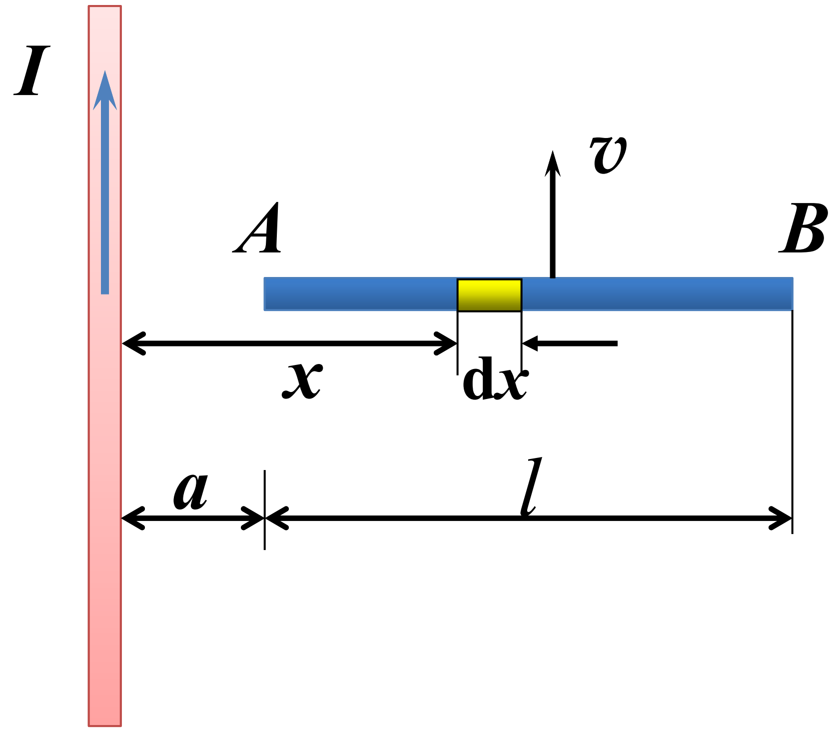
解： 选择dl方向A→ B

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_\mathrm{i} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -Bv\mathrm{d}x$$

$$\varepsilon_\mathrm{i} = -\int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

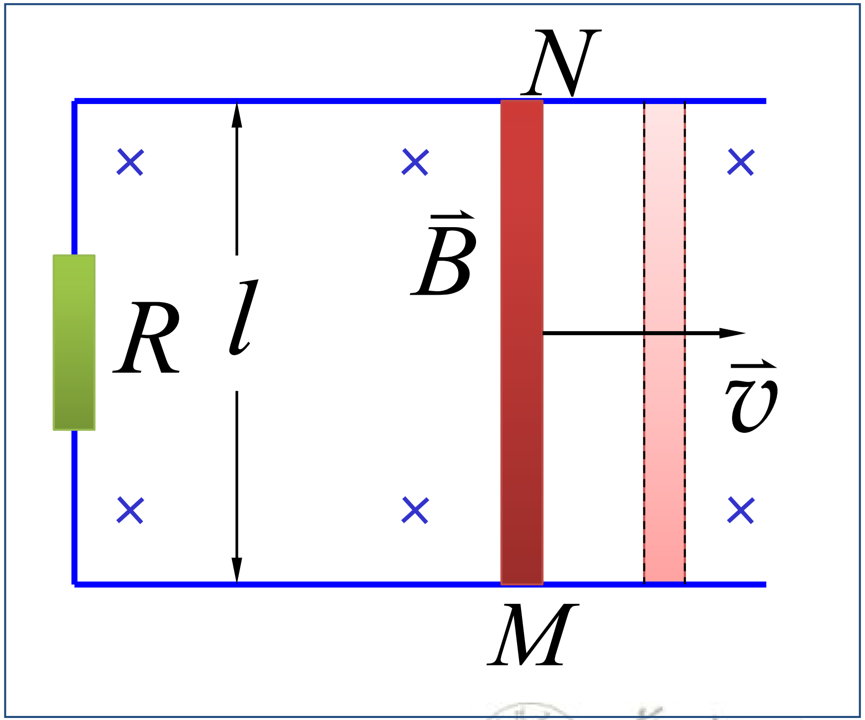
$$= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$



电动势方向：$B \rightarrow A$

例4

一导线矩形框的平面与磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场相垂直。在此矩形框上，有一质量为m 长为l的可移动的细导体棒MN；矩形框还接有一个电阻R，其值较之导线的电阻值要大得很多。开始时，细导体棒以速度 $\vec{v}_0$ 沿如图所示的矩形框运动，试求棒的速率随时间变化的函数关系。



解: 如图建立坐标

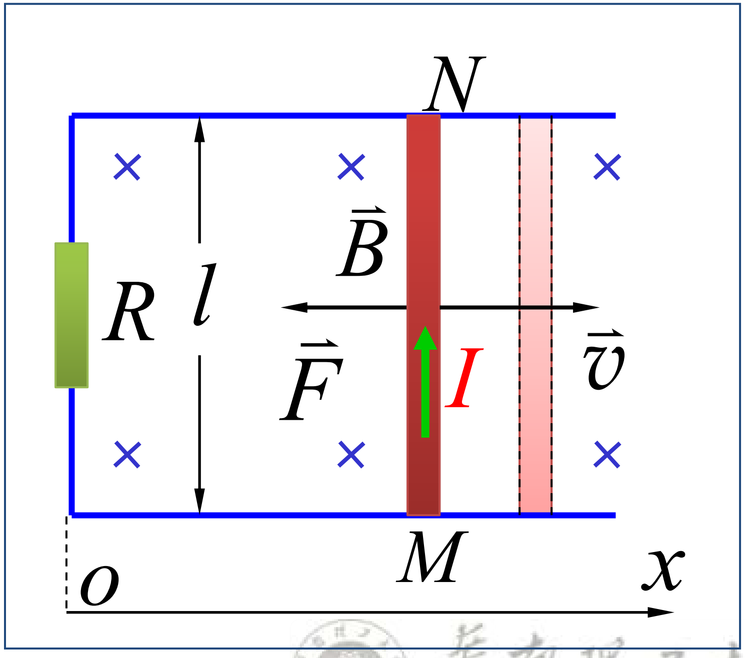
棒中 $\varepsilon_{\mathrm{i}} = Blv$ 且 $M \longrightarrow N$ $\quad I = \dfrac{\varepsilon_i}{R} = \dfrac{Blv}{R}$

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$ 方向沿Ox轴反向

牛顿第二定律 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

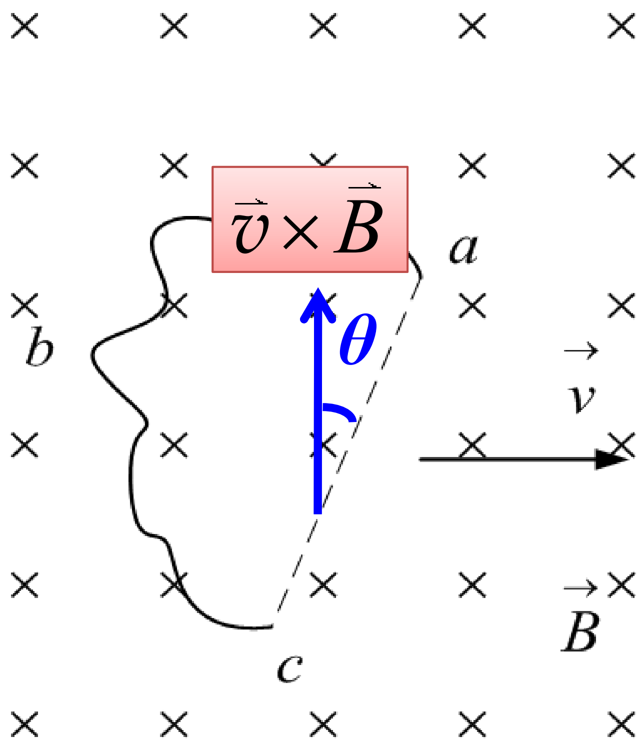
则 $$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int_0^t \frac{B^2 l^2}{mR}\mathrm{d}t$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(B^2 l^2 / mR)t}$$



例5

在垂直于均匀磁场B的平面内，有一以速度V运行的导线abc，如图所示，求导线中的动生电动势



解：用一直导线ac与导线abc构成一闭合刚性回路：

$$\varepsilon_{abca} = 0$$

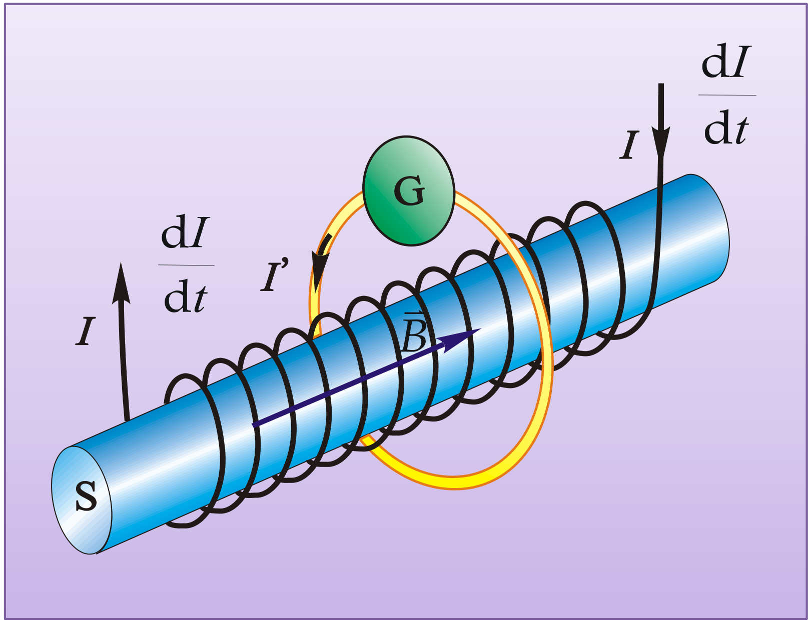
$$\varepsilon_{abca} = \varepsilon_{abc} + \varepsilon_{ca}$$

$$\varepsilon_{abc} = -\varepsilon_{ca} = \varepsilon_{ac}$$

与连接该导线两端的直导线ac以同一速度运动所产生的动生电动势相同。

感生电动势

导体回路固定，其周围的磁场发生变化，穿过导体的磁通量也会发生变化，回路中产生的感应电动势。



$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

麦克斯韦提出：变化的磁场激发有旋电场即感生电场。

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

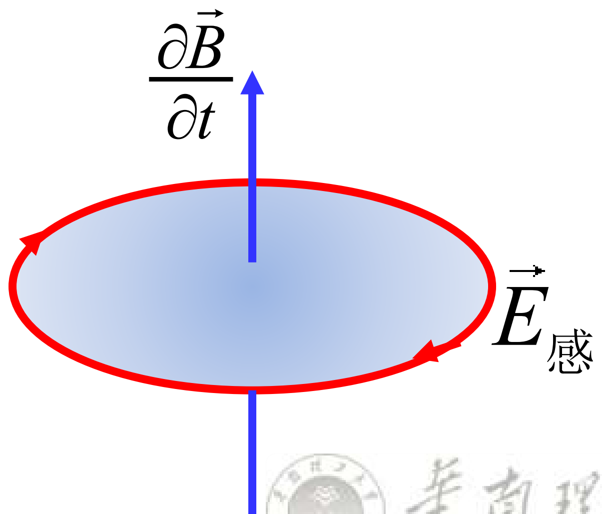
麦克斯韦提出：在磁场变化时，不但在导体回路中，而且在空间任一点都会产生感生电场，感生电场沿任何闭合路径的环路积分都满足：

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$ 电场和磁场的联系

L：空间内任一静止回路

S： L回路所限定的面积

$\vec{E}_{感}$与$\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$满足左手螺旋关系



感生电场 *vs.* 静电场

- 静电场由电荷产生，感生电场是由变化的磁场产生
- $\vec{E}_{静}$ 和 $\vec{E}_{感}$均对电荷有力的作用
- 静电场的电场线不闭合，感生电场的电场线是闭合的，所以又称为有旋电场
- 静电场是保守场 $\oint_L \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$
- 感生电场是非保守场 $\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \neq 0$

总结：感应电动势的计算

➤法拉第电磁感应定律 $\xi = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

➤电动势的定义 $\xi = \int_a^b \vec{E}_\mathrm{k}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ *or* $\oint_L \vec{E}_\mathrm{k}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

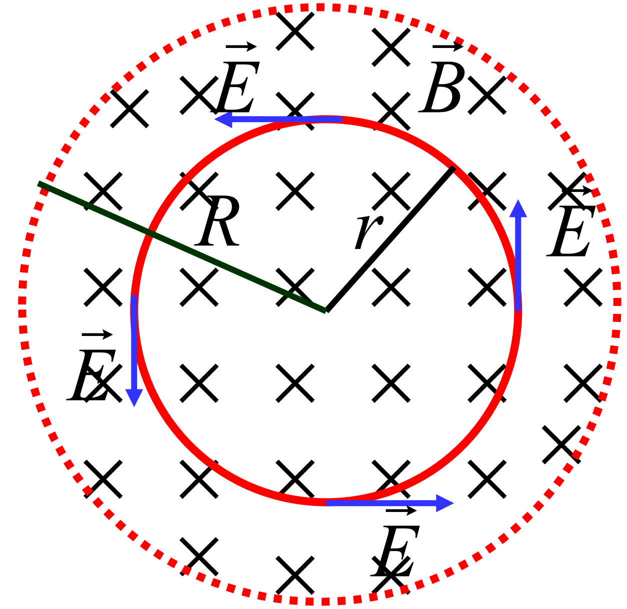
动生电动势 $\vec{E}_\mathrm{k} = \vec{v}\times\vec{B}$ $\xi = \int_b^a (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

感生电动势 $\vec{E}_\mathrm{k} = \vec{E}_{感}$ $\xi = \oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

例6

在半径为*R*的无限长螺线管内部的磁场 $\vec{B}$随时间作线性变化（$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=$常量）时，求管内外的感生电场$\vec{E}$ 。



解：变化磁场所激发的感生电场的电场线在管内外都是与螺线管同轴的同心圆。

$$\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L E\,\mathrm{d}l=2\pi rE$$

$$=-\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$E=-\frac{1}{2\pi r}\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

（1）当 $r<R$ 时

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

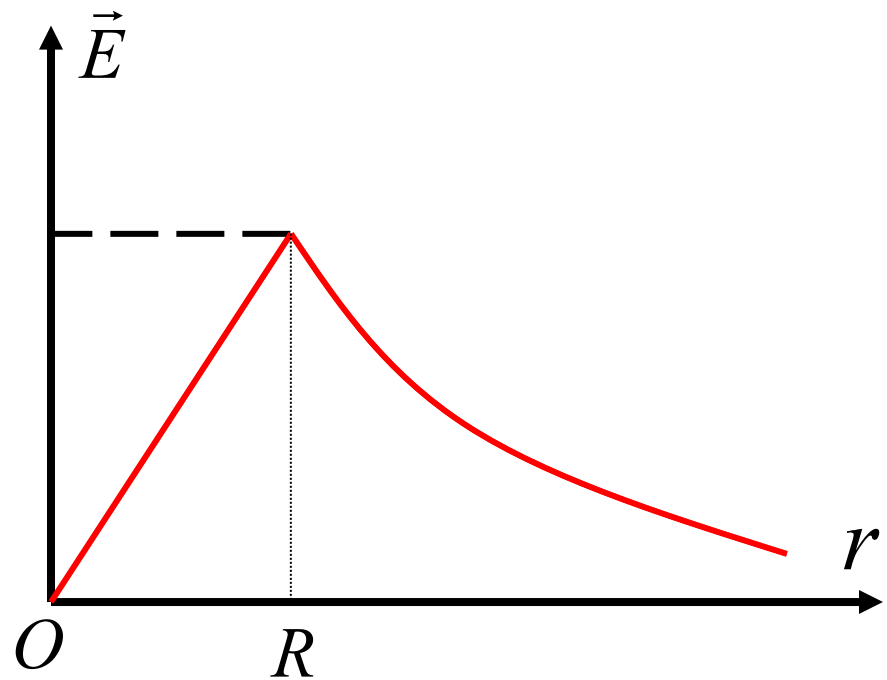
$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}S = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore E = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

(2) 当 $r>R$时

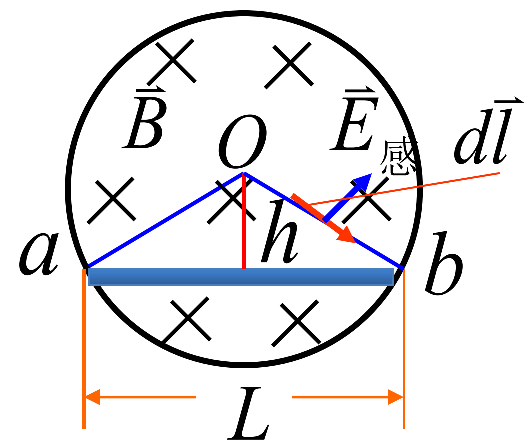
$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pi R^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore E = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



例7

在半径为R的圆柱体内，充满磁感强度为$\vec{B}$的均匀磁场，有一长为L的金属棒放在磁场中，如图所示。设$dB/dt>0$，且为已知，求棒两端的感生电动势。



解： 假想一回路***ObaO***，则

$$\varepsilon_{obao}=-\frac{d\Phi}{dt}=-S_{obao}\frac{dB}{dt}=-\frac{L}{2}h\frac{dB}{dt}$$

$$=-\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\cdot\frac{dB}{dt}$$

而$\varepsilon_{obao}=\varepsilon_{ob}+\varepsilon_{ba}+\varepsilon_{ao}$　　　但$\varepsilon_{ob}=\varepsilon_{ao}=\int\vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=0$

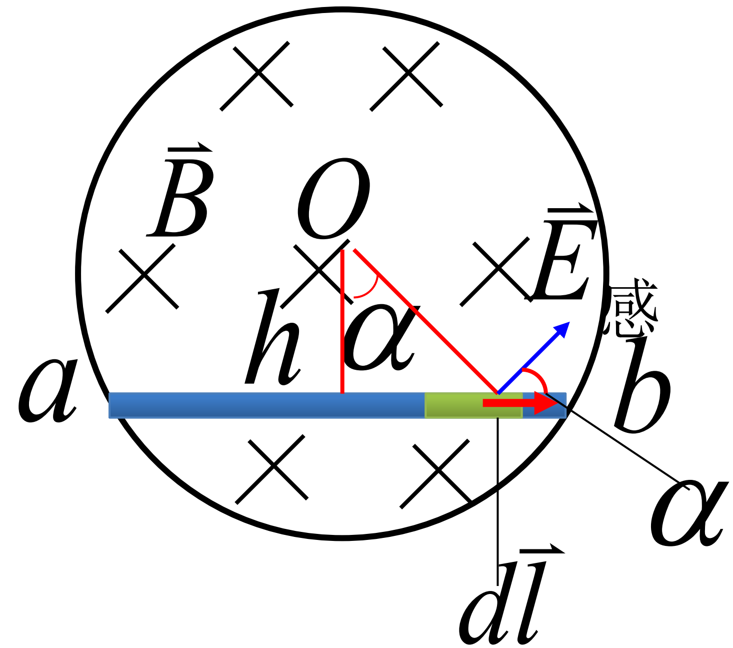
$$\therefore\varepsilon_{ba}=\varepsilon_{obao}=-\frac{L}{2}\sqrt{R^2-\frac{L^2}{4}}\cdot\frac{dB}{dt}$$

(方向$a\rightarrow b$)

方法二： 用$\varepsilon_i = \oint \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}$计算

$$\varepsilon_{ab} = \int \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \left|E_{感}\right| \cos\alpha \, dl$$

由例6 $E_{感} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{h}{r}$



$$\therefore \varepsilon_{ab} = \int_a^b \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\frac{h}{r} dl$$

$$= \frac{h}{2}\frac{dB}{dt}\int_a^b dl = \frac{h}{2}\frac{dB}{dt} L$$

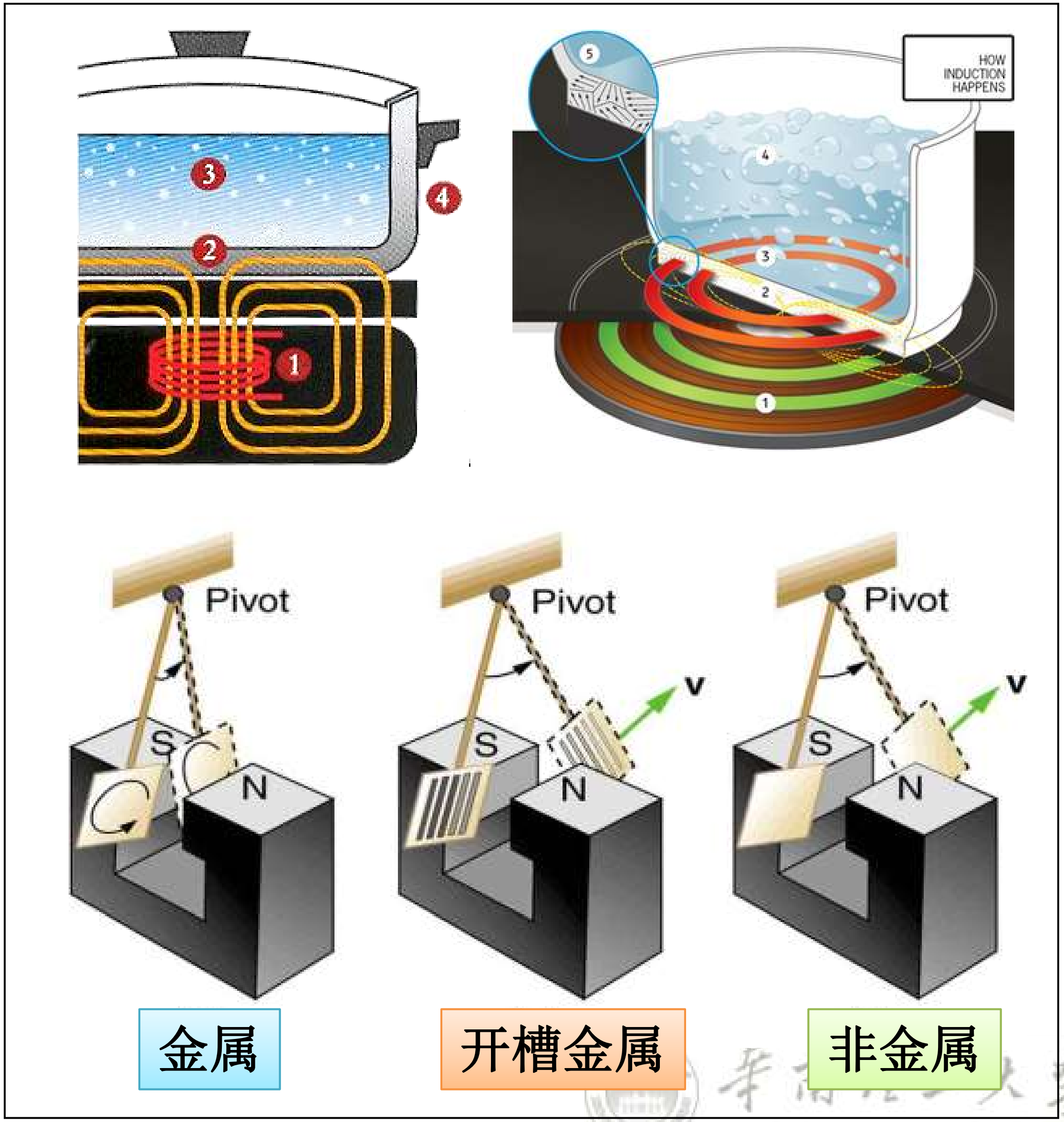
$$= \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \cdot \frac{dB}{dt}$$

方向$a \to b$

涡电流(视频)

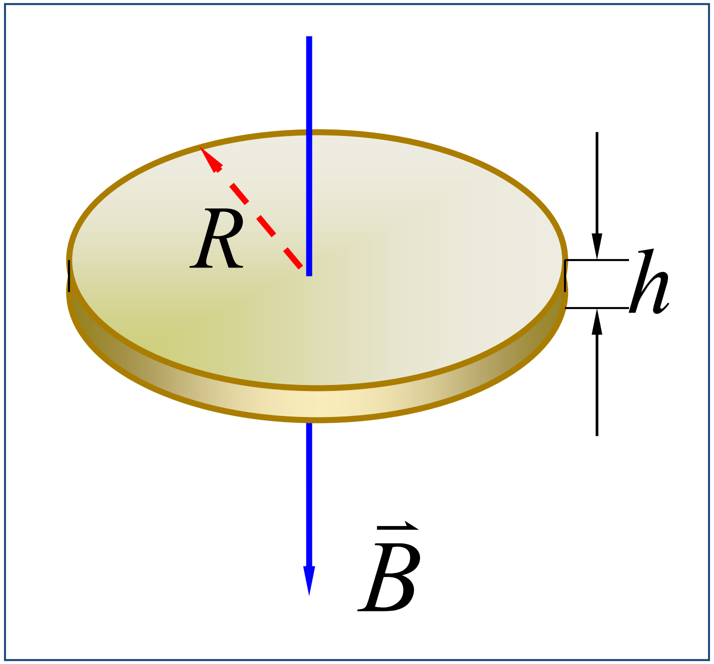
感应电流不仅能在导电回 路内出现，而且当大块导体与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，也会激起感应电流——涡电流，简称涡流。

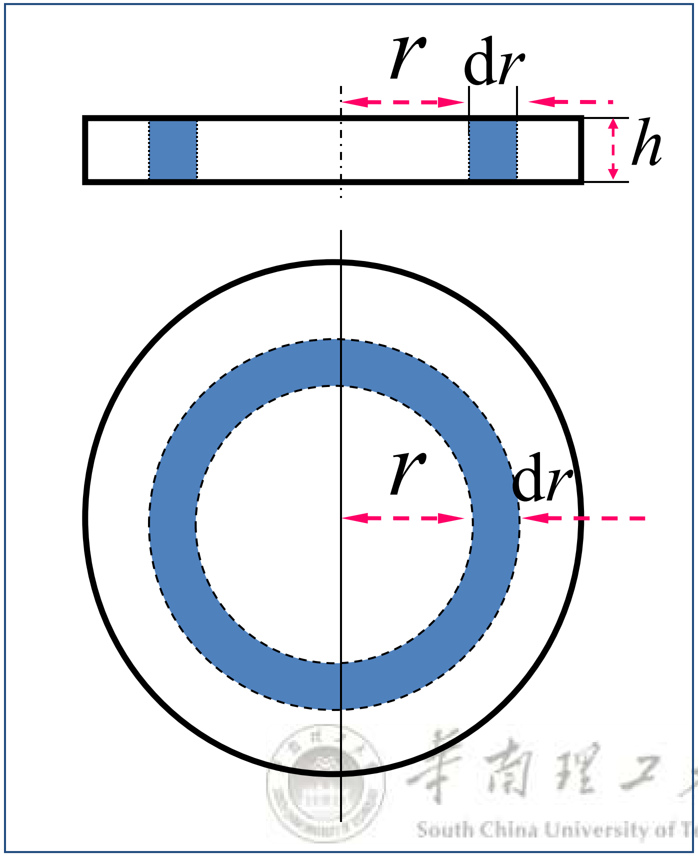
□应用： 热效应、电磁阻尼



例8

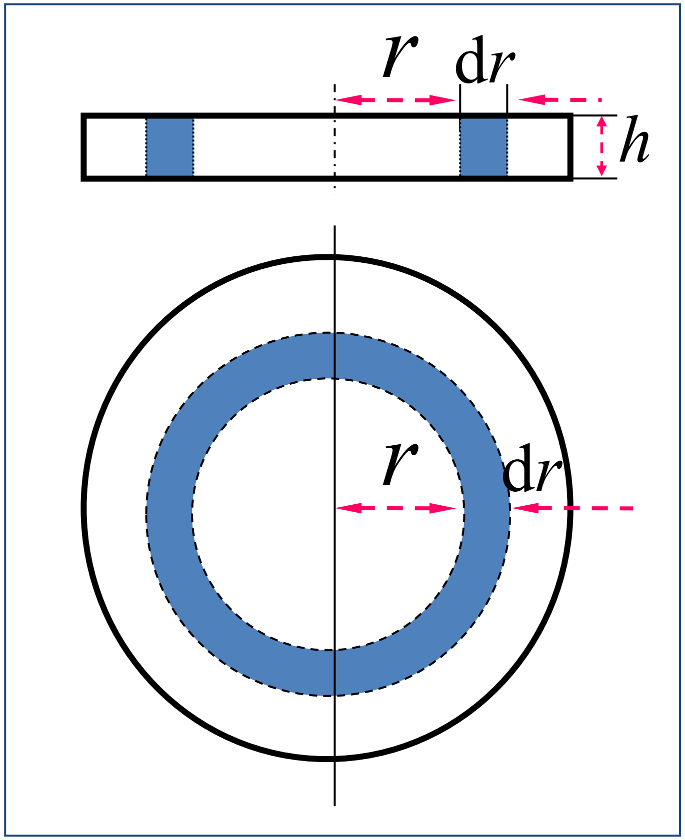
设有一半径为R ,高度为h 的铝圆盘，其电阻率为ρ。把圆盘放在磁感强度为$\vec{B}$ 的均匀磁场中，磁场方向垂直盘面，设磁场随时间变化，且$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$为一常量，求盘内的感应电流值。（圆盘内感应电流自己的磁场略去不计）





已知：R ， h , ρ , $\vec{B}$, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$

解： 如图取一半径为 r ,宽度为$\mathrm{d}r$,高度为 h 的圆环



圆环中的感生电动势的值为

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \frac{d\phi}{dt} = S\frac{dB}{dt} = \pi r^2 k$$

圆环的电阻 $\mathrm{d}R = \rho\dfrac{2\pi r}{h\mathrm{d}r}$

$$\mathrm{d}I = \frac{\varepsilon}{dR} = \frac{kh}{2\rho} r\mathrm{d}r \qquad I = \int \mathrm{d}I = \frac{kh}{2\rho}\int_0^R r\mathrm{d}r = \frac{1}{4\rho}kR^2 h$$