参考答案.

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何》(A)试卷(14-15年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3. 考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 8 大题，满分 100 分，考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									
评卷人									

座位号________ 专业________ 学院________ 学号________ 姓名________ (密封线内不答题) 密 封 线

一、(15分) 填空题.

1. 设A为n阶矩阵，且$|A|=2$，则$||A|A^{-1}|=$ 2^{n-1}.

2. 已知向量组$\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)$，$\alpha_3=(1,3,4,-2)$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$，则向量组的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$ 2.

3. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$A$ 的特征值为 $-1,1,1$.

4. 若矩阵A 相似于$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$|A^{-1}|^3=$ $-\frac{1}{8}$.

5. 已知直线的普通方程为$\begin{cases}2x-3y-z+4=0,\\4x-6y+5z-1=0.\end{cases}$ 则该直线的点向式方程为

$\frac{x}{-21}=\frac{y-\frac{19}{21}}{-14}=\frac{z-\frac{9}{7}}{0}$ 或 $\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{19}{21}}{2}=\frac{z-\frac{9}{7}}{0}$ (注：点(x_0,y_0,z_0)取法不唯一，答案不唯一)

二、(15分) 选择题:

1. 设A,B是n阶方阵，则必有(B).

(A) $|A+B|=|A|+|B|$ (B) $|AB|=|BA|$

(C) $AB=BA$ (D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2. 矩阵A的秩$\geq r$,则(C).

(A) A有一个$r+1$级子式不为零

(B) A的所有$r+1$级子式不为零

(C) A有一个r级子式不为零

(D) A有一个r级子式不为零, 所有$r+1$级子式全为零

3. 设A, B为n阶矩阵, A^*, B^*分别是A, B的伴随矩阵,分块矩阵$C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, 则$C$的伴随矩阵$C^* =$ (D).

(A) $\begin{pmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

4. 设5阶实对称矩阵A 的特征值为0, 1, 2, 3, 4, 则A的秩$r(A) =$ (C).

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

5. 设实二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_1x_3$是正定的, 则$t$的取值范围是(A).

(A) $-2 < t < 2$ (B) $0 < t < 2$ (C) $-2 < t < 0$ (D) t为任何实数

三、 (8分)计算行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -1 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & a+b_1 \end{vmatrix}.$$

$$= aD_{n-1} + b_n$$

$$= a^2 D_{n-2} + ab_{n-1} + b_n$$

$$= \cdots$$

$$= a^n + a^{n-1}b_1 + a^{n-2}b_2 + \cdots + a_1 b_{n-1} + b_n$$

四、 (16分)实数λ 取何值时，线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + (\lambda^2+1)x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+1)x_3 = 0, \\ x_1 + (2\lambda+1)x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多个解? 若有唯一解求出解; 有无穷多个解时求出通解.

解：$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda^2+1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2\lambda+1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2 & 2 \end{array}\right)$, $D=|A|=\lambda(\lambda-2)$ $\begin{cases} D_1 = 2-\lambda \\ D_2 = \lambda-2 \\ D_3 = 0 \end{cases}$

1) 当$\lambda \neq 0$且$\lambda \neq 2$时，有唯一解 6，$\begin{cases} x_1 = \frac{-(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = -\frac{1}{\lambda}, \\ x_2 = \frac{(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = +\frac{1}{\lambda}, \\ x_3 = \frac{0}{\lambda(\lambda-2)} = 0. \end{cases}$ $(-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, 0)$

2) 当$\lambda=0$时 5

$\because \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore r(A)=2 \neq 3 = r(\tilde{A})$, 无解.

3) 当$\lambda=2$时 5 ~~r(A)=r(Ã)=2~~

$\because \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\therefore r(A)=r(\tilde{A})$,

方程组有无穷多个解. 通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad k\text{任意}$$

$(-11, 1, 4)$

$\begin{cases} x_3 = 8x_2 - 4 \\ x_1 = -21x_2 + 10 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_3 = 8x_2 \\ x_1 = -21x_2 \end{cases}$ $k(-\frac{21}{8}, \frac{1}{8}, 1)$

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ +

$(10, 0, -4)$

五、(15 分) 设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,2,3)^T$, $\beta_3=(3,4,a)^T$线性表出.

(1) 求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的一个极大无关组;

(2) 求a的值;

(3) 将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示出来.

解: 1) 令 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\because |A|=1\neq 0 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组.

2) 由于4个3维向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_i$ $(i=1,2,3)$ 线性相关.

若β_1,β_2,β_3线性无关, 则α_i可由β_1,β_2,β_3线性表出, 与题设矛盾.

$\therefore \beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性相关.

故 $|(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0 \Rightarrow a=5$

3) 令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3\\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2\\ \beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3\end{cases}$$

六、(10分)求解矩阵方程: $2X = AX + B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解： $(2E-A)X = B$

$|2E-A| = 3 \neq 0 \qquad \therefore\ 2E-A$ 可逆

$$\therefore\ X = (2E-A)^{-1}B$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

七、(15 分) 设3阶实矩阵$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量.

(1) 求矩阵A的特征值以及x的值;

(2) 求出矩阵A的特征向量;

(3) 求满秩矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角形.

解：1) $|\lambda E - A| = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$ 得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$.

因为A有3个无关的特征向量，所以对应二重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

A有两个线性无关的特征向量.

$\therefore\ r(E-A) = 1$

$$E-A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -x & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，由 $E-A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

当 $\lambda=-2$ 时，$-2E-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & -3 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得 $\lambda_3=-2$ 对应特征向量 $\eta_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

(3) 令 $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

八、(6 分) 设n阶实方阵A为可逆矩阵，将A 的第i行与第j行互换后得到的矩阵记为B, 证明为B可逆矩阵，并求AB^{-1}.

证：设将单位矩阵E的 i,j 行互换得到的初等矩阵记为 $P(i,j)$.

则 $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$，故

$$B=P(i,j)A$$

$$\because |B|=|P(i,j)||A|=-|A|\neq 0$$

$\therefore B$ 可逆

且 $AB^{-1}=A\left(P(i,j)A\right)^{-1}$

$$=A\cdot A^{-1}\cdot P(i,j)^{-1}=P(i,j)^{-1}=P(i,j)$$

其表达为：

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & (i) & & (j) & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$