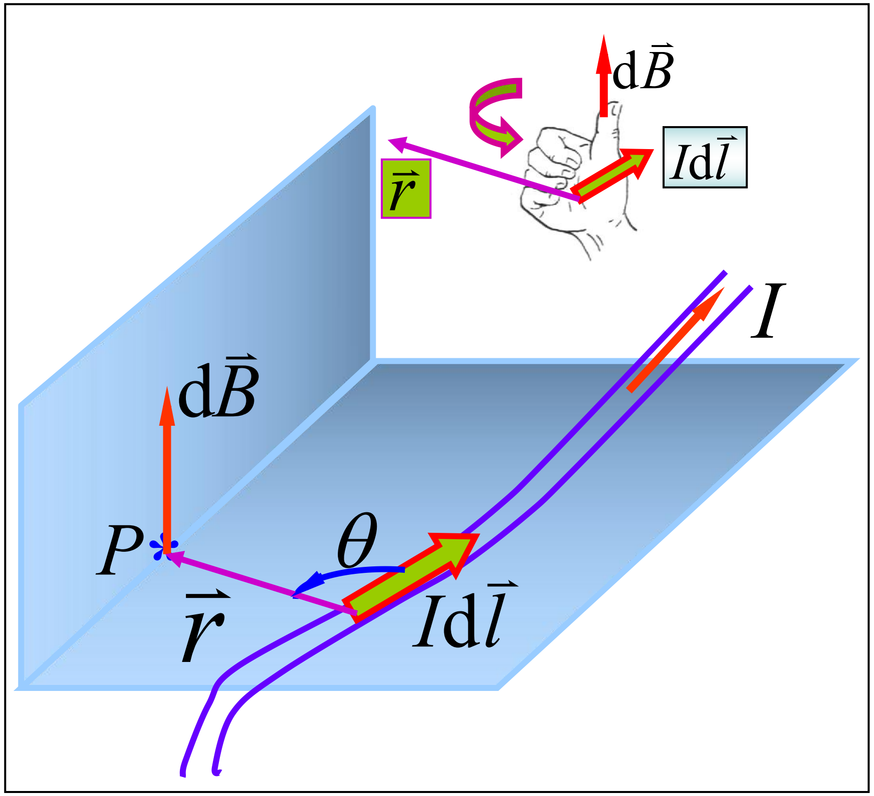
16.3 毕奥-萨伐尔定律

➢电流元（*Idl*）在空间产生的磁场

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$



真空磁导率

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\cdot A^{-2}}$$

➢任意载流导线在点 P 处的磁感强度

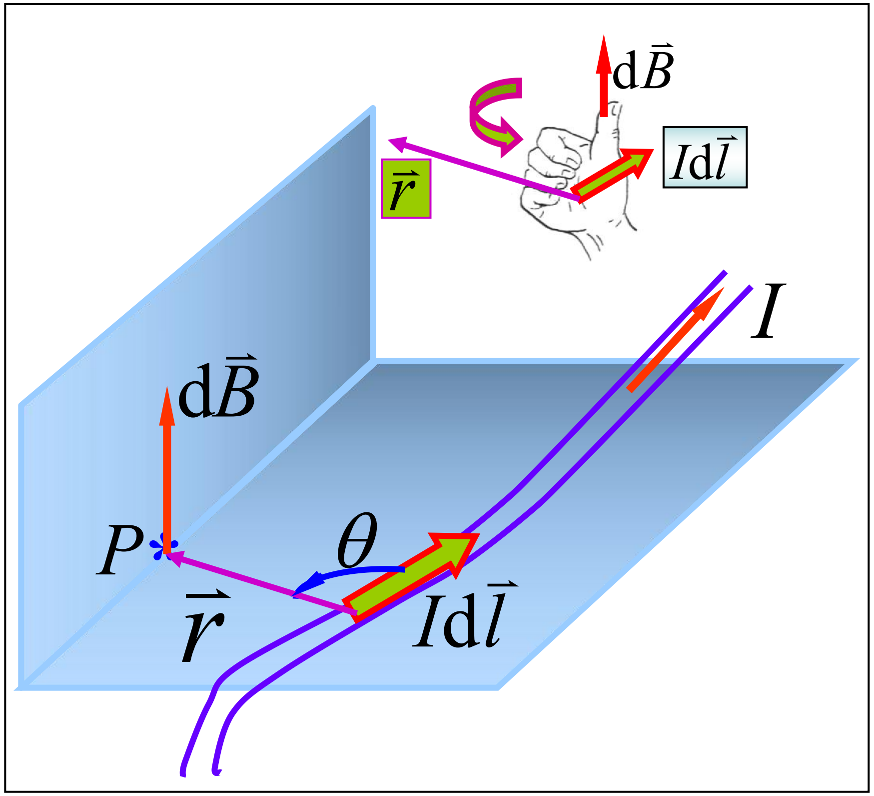
磁感强度叠加原理

$$\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B}$$

$$= \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

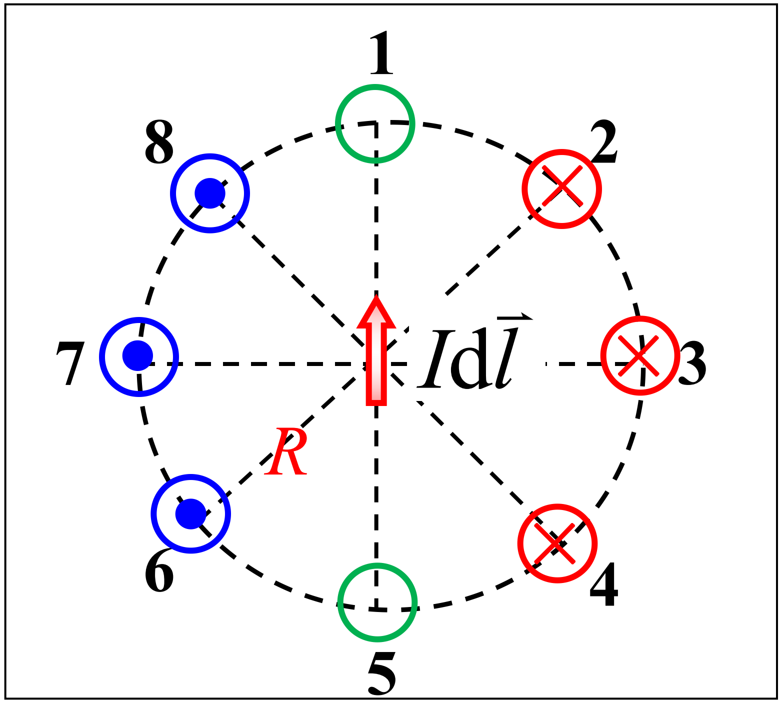
$$= \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\hat{r}$:沿$\vec{r}$方向的单位矢量



例题 1

■判断下列各点磁感强度的大小和方向。



1、5点：$\mathrm{d}B = 0$

3、7点：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}$

2、4、6、8 点：

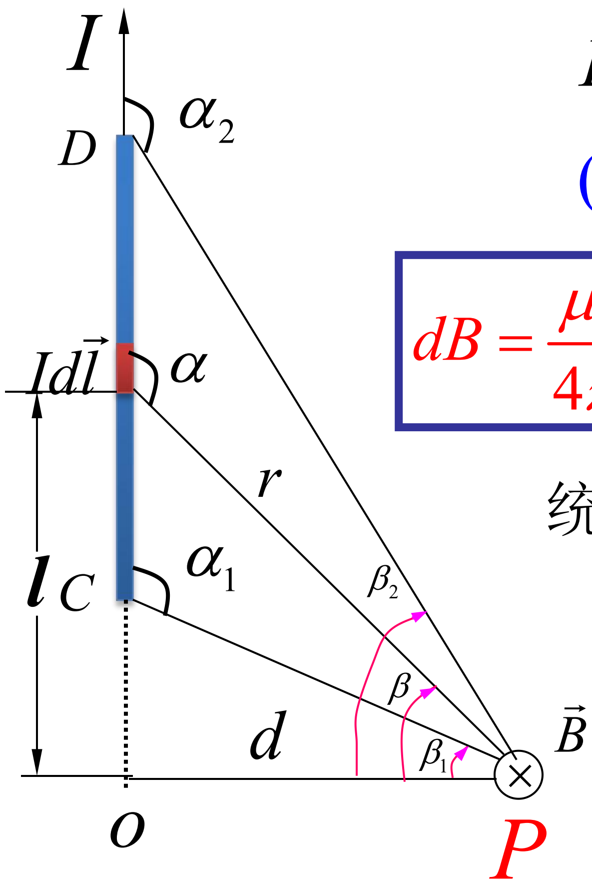
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin 45^0$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

毕奥-萨伐尔定律

例题2

□载流直导线的磁场。 求载流直导线CD产生的$\vec{B}$



$Id\vec{l}$在P点产生$d\vec{B}$,方向垂直版面向里

($所有电流元在$P$点产生的$d\vec{B}$方向相同):

$$\boxed{dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}} \qquad \boxed{B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}}$$

l,α,r 三个变量

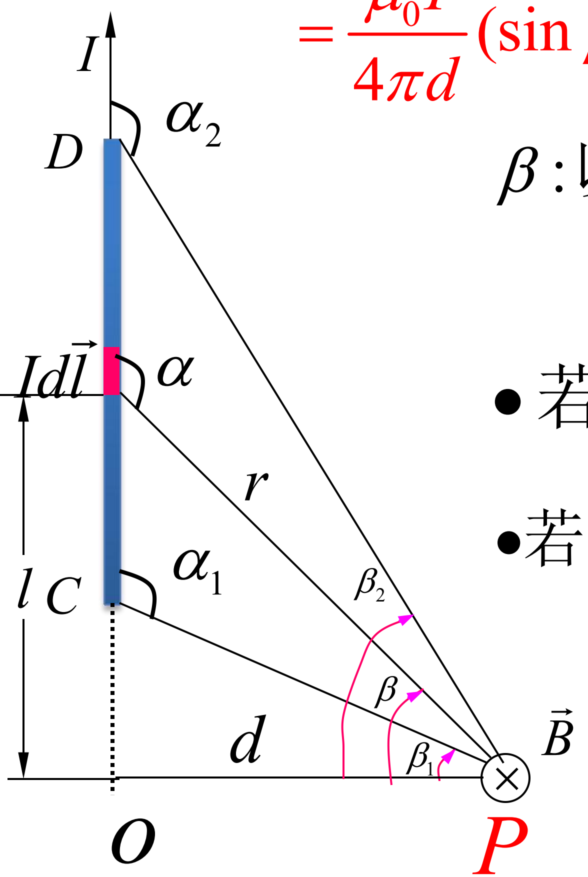
统一变量成β: $l=d\tan\beta \Rightarrow dl=d\sec^2\beta d\beta$

$$\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)=\cos\beta=\frac{d}{r} \qquad r=d\sec\beta$$

$$B=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\sec^2\beta\cos\beta d\beta}{d^2\sec^2\beta}$$

$$B=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\sec^2\beta\cos\beta d\beta}{d^2\sec^2\beta}=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)$$



β:以垂线OP准线，顺着电流张开的角度取正

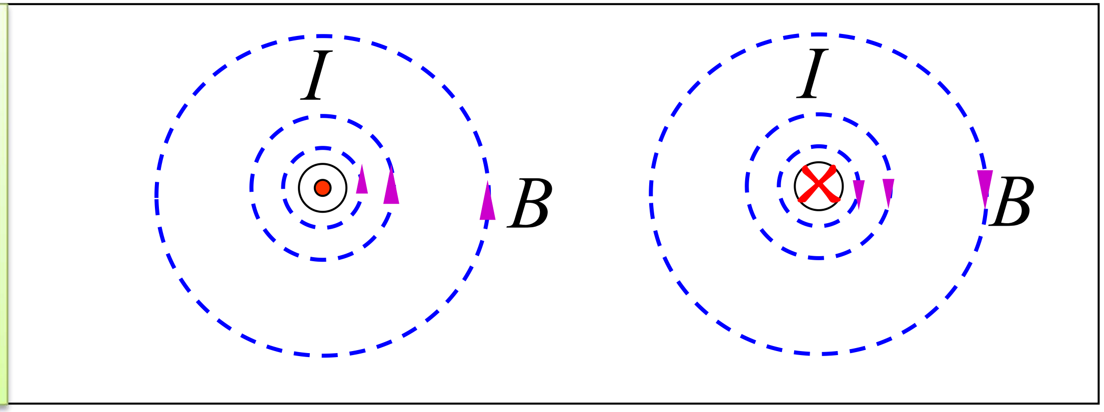
逆着电流张开的角度取负

- 若P点在直电流延长线上，$B=0$
- 若直线电流无限长,$\beta_1=-\dfrac{\pi}{2},\beta_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\quad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$
- 半无限长直线电流,在一端的垂线上

$\beta_1=0,\beta_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\quad B_P=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi d}$

➢无限长载流长直导线的磁场

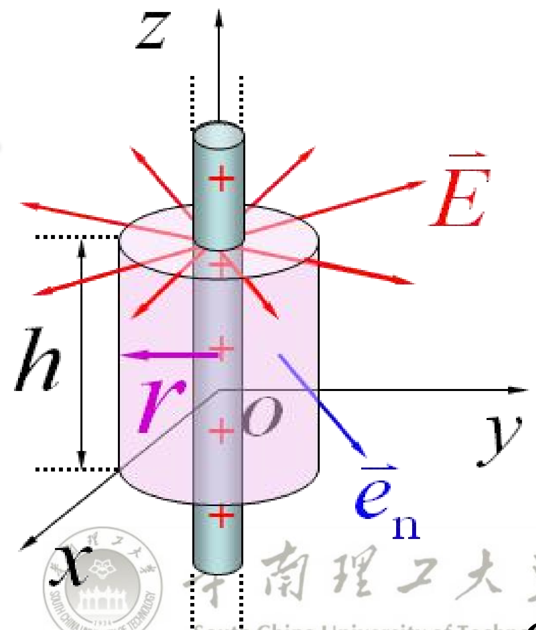
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



□电流与磁感强度成**右手螺旋**关系

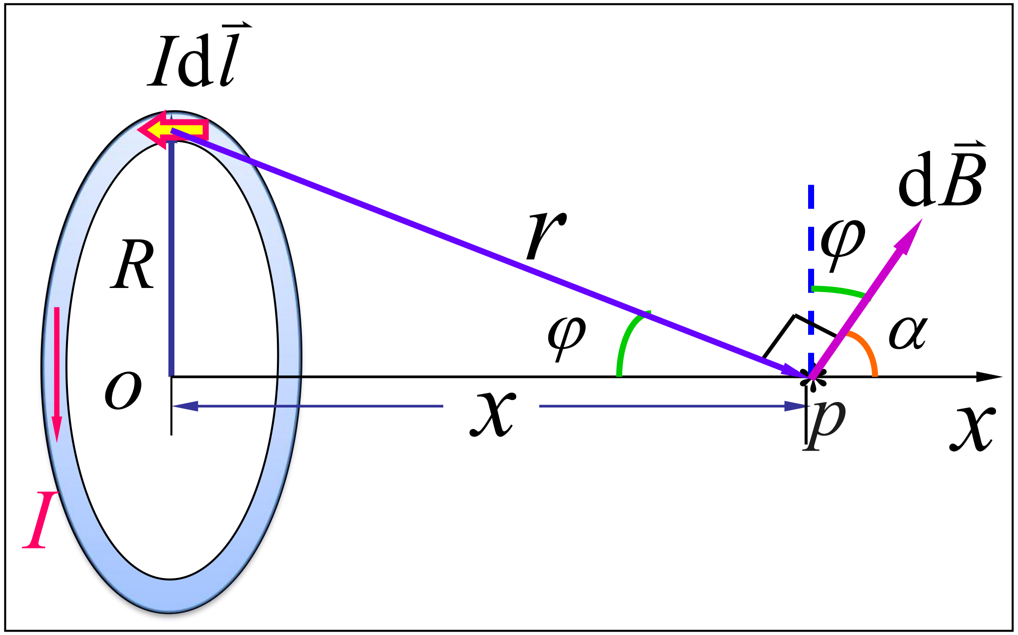
无限长均匀带电直线的电场强度

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



□圆形载流导线轴线上的磁场。

解： 分析点*P*处磁场方向（对称性）$dB_x = \mathrm{d}B\cos\alpha$



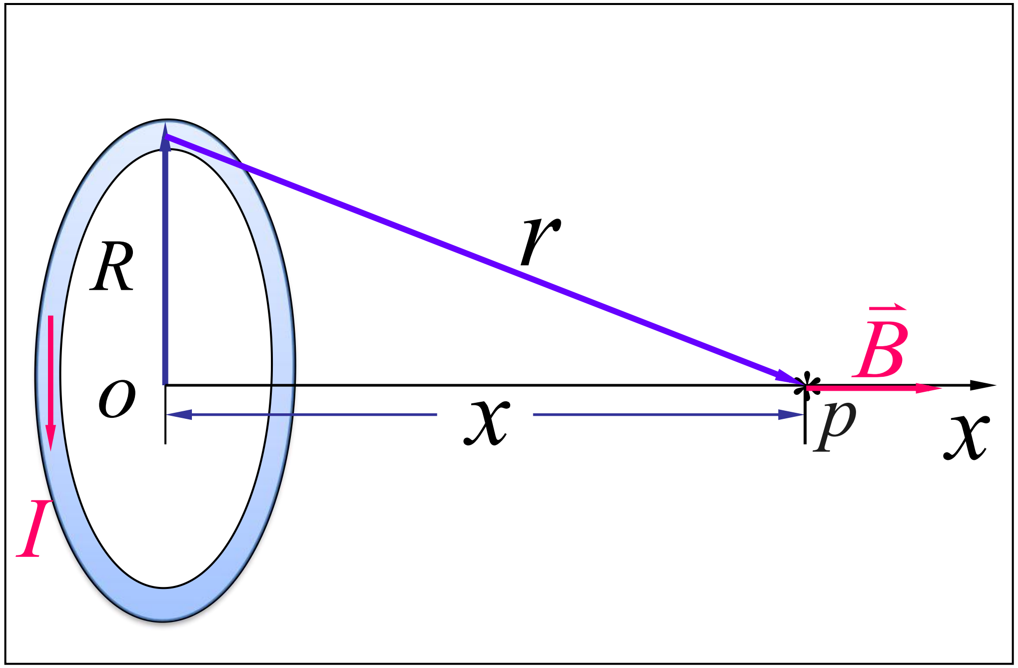
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha = \sin\varphi = R/r$$

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{r^3}$$

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论 （1）若线圈有 N 匝 $B=\dfrac{\boxed{N}\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$



（2）$x=0$ $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

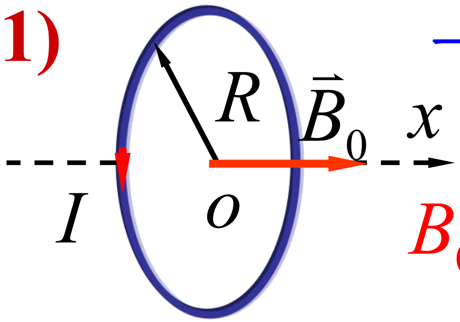
（3）$x>>R$

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3},$$

$$B=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

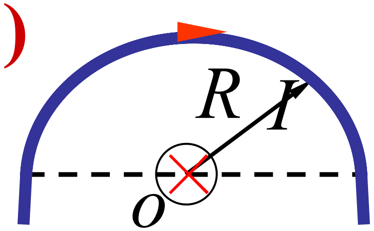
推广(圆心处的磁感应强度)

(1) 一个圆环



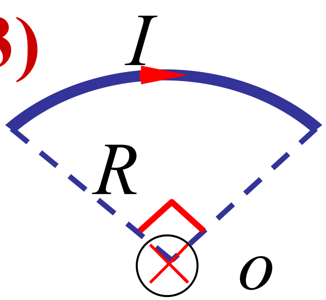
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

(2) 半个圆环



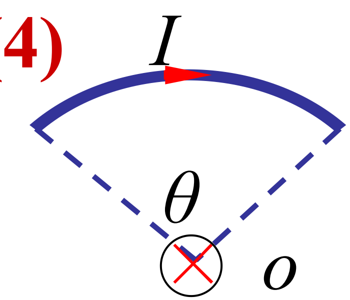
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

(3) 四分之一圆环

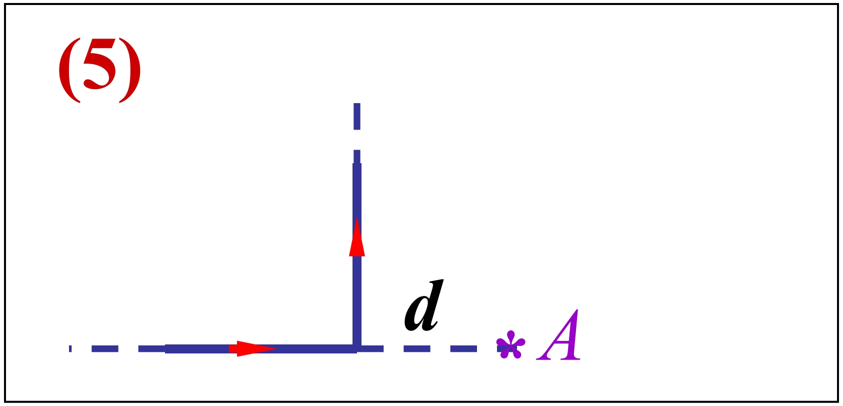


$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

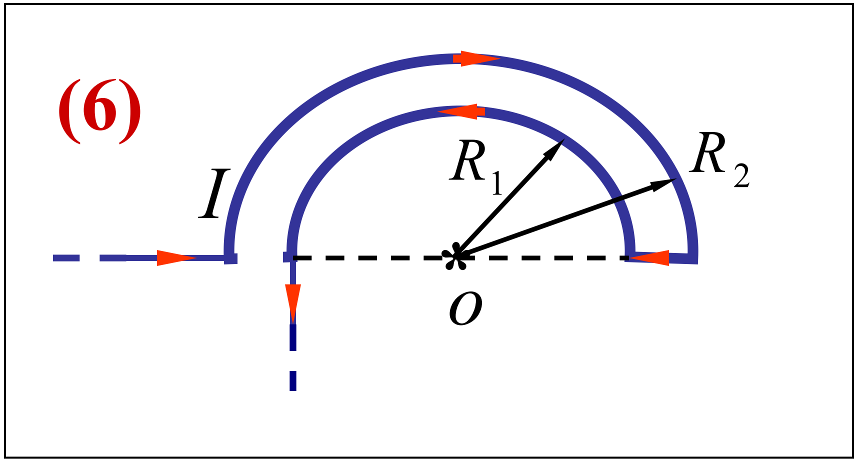
(4) 圆环的一部分



$$B_0 = \frac{\theta}{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2R}$$



$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$



以垂直于屏幕向内为正

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

磁偶极矩(简称：磁矩)

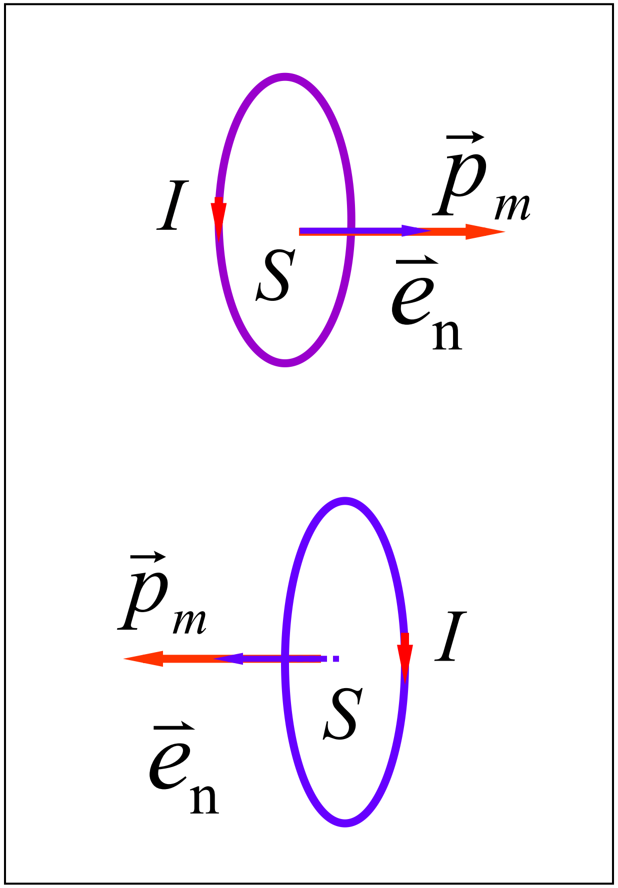
磁偶极子：小面积的环形电流

$$\boxed{\vec{p}_m = IS\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

单位正法线矢量 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$的方向与电流方向满足右手螺旋关系。

$$B = \frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}$$

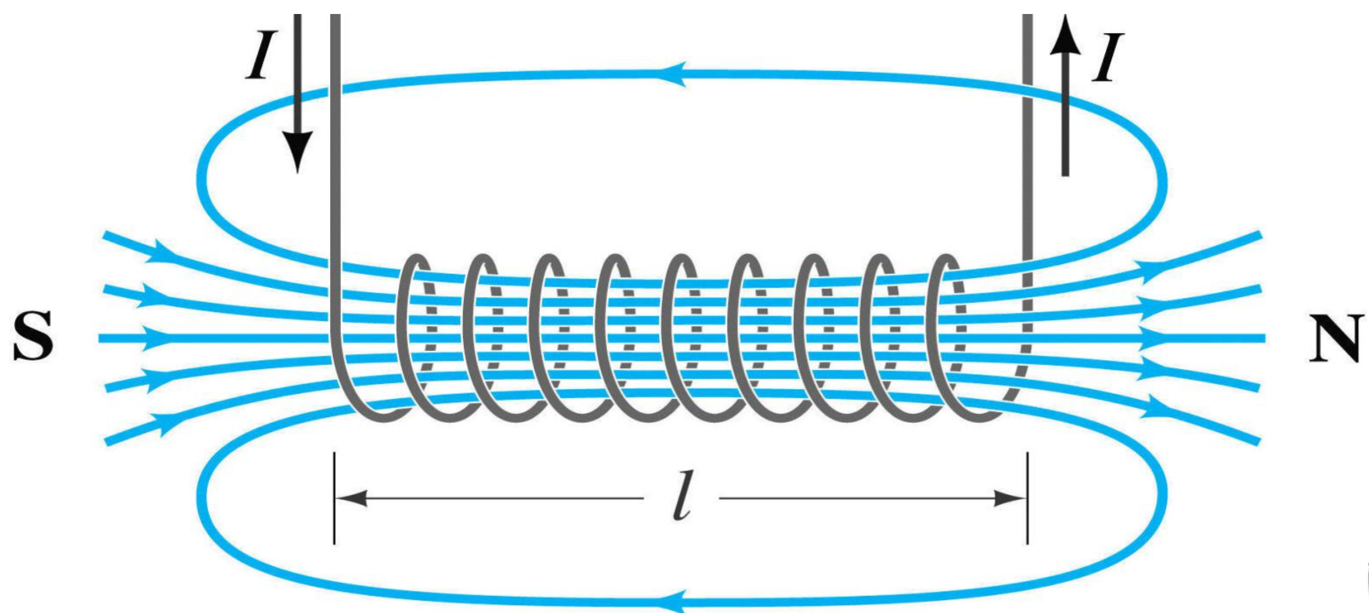
说明：$\vec{p}_m$的方向与圆电流的单位正法矢 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 的方向相同。



例题4

- 载流直螺线管内部的磁场。

如图所示，有一长为l，半径为R的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为N，通有电流I。设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度。

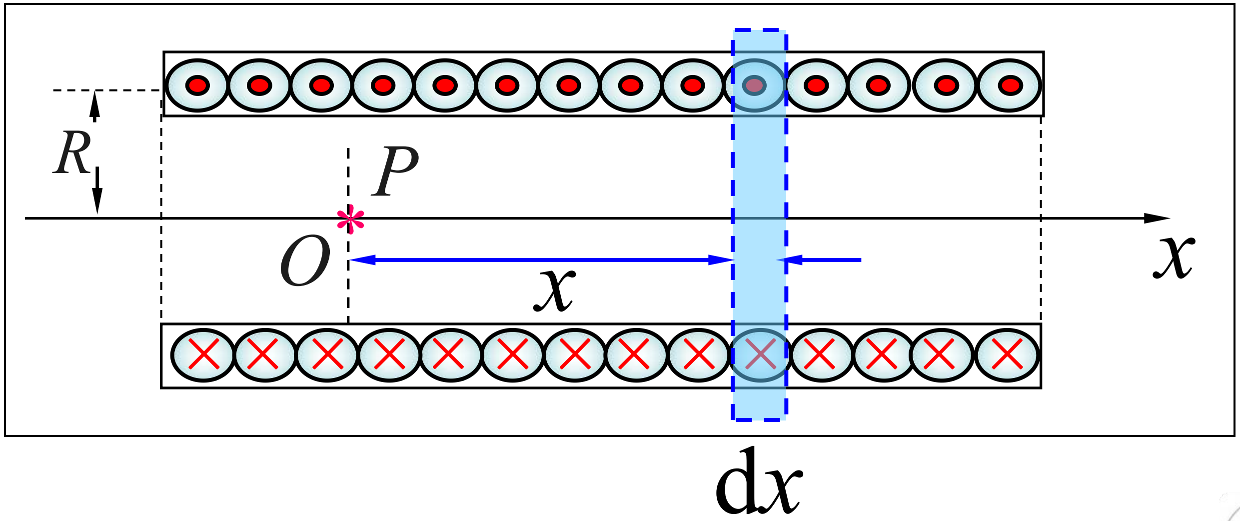


解： 螺线管可看成圆形电流的组合

由圆形电流磁场公式 $B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\,\boxed{In\,\mathrm{d}x}}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

电流线密度 $In=I\dfrac{N}{l}$



n：单位长度的匝数

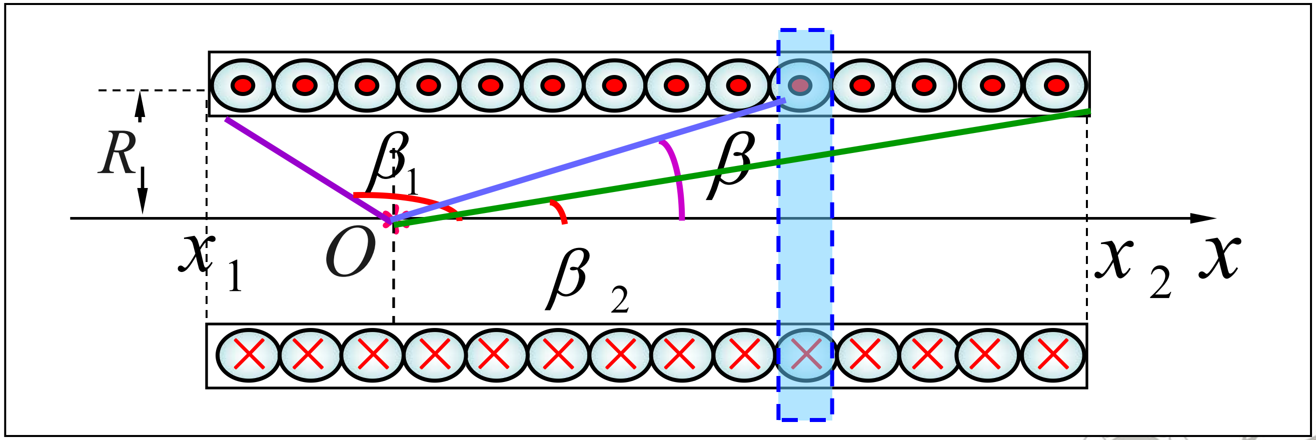
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2\ In\,\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$x=R\cot\beta \qquad \mathrm{d}x=-R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$R^2+x^2=R^2\csc^2\beta$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\,\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta\,\mathrm{d}\beta}$$

$$=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta \qquad =\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$



$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

（1）对于无限长的螺线管

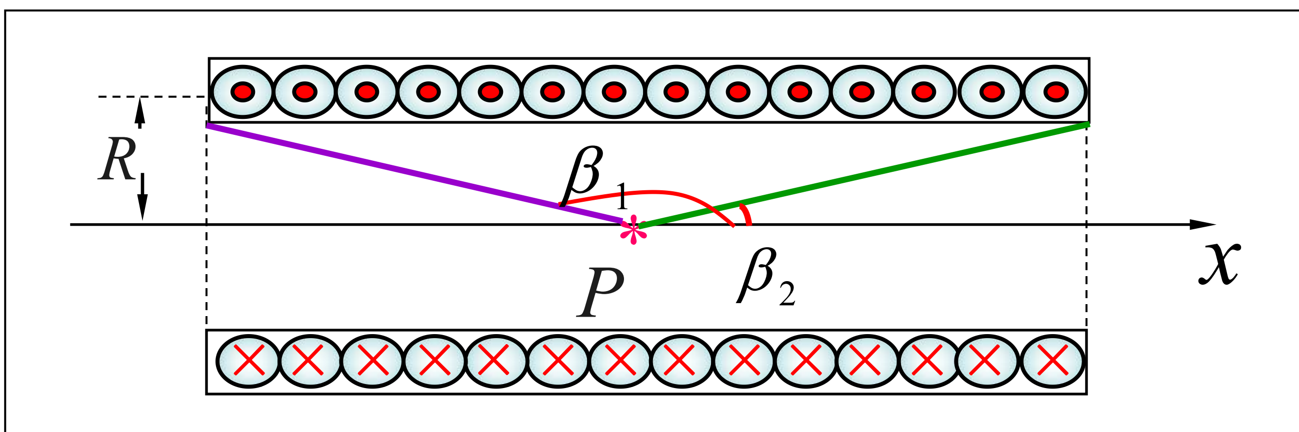
$$\beta_1=\pi,\quad \beta_2=0$$

故 $\boxed{B=\mu_0 nI}$

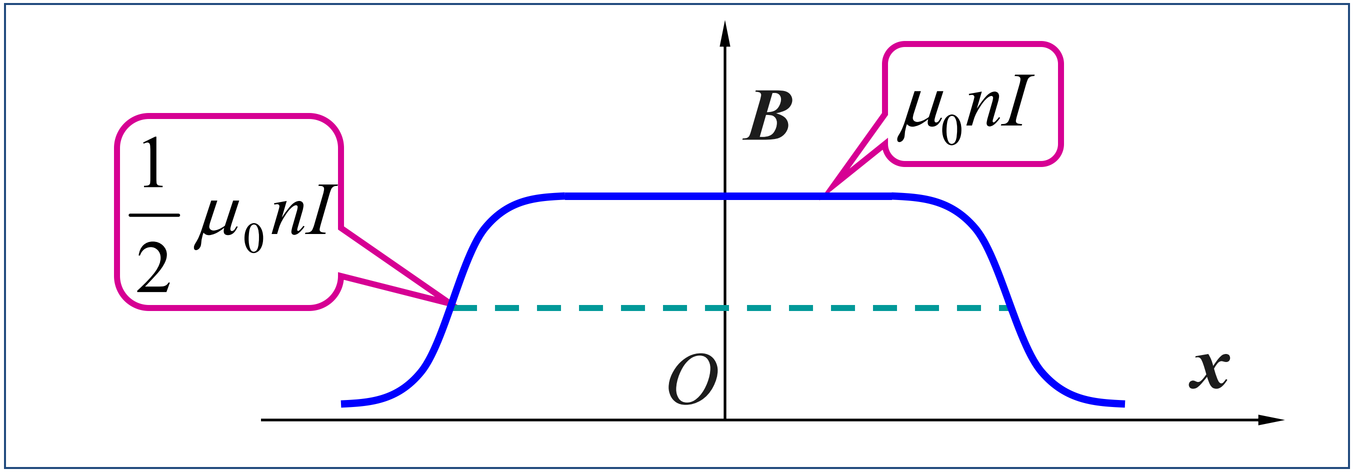
（2）半无限长螺线管的一端

$$\beta_1=\frac{\pi}{2},\quad \beta_2=0$$

$$\boxed{B=\mu_0 nI/2}$$



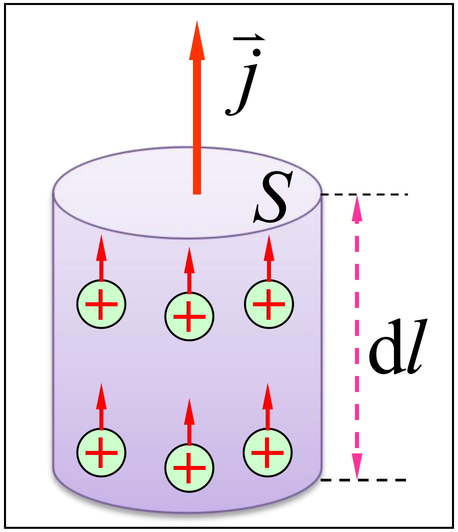
下图给出长直螺线管(长度远大于半径)内轴线上磁感强度的分布：



➤匀速运动点电荷的磁场

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$I=\frac{dq}{dt}=qnvS$$



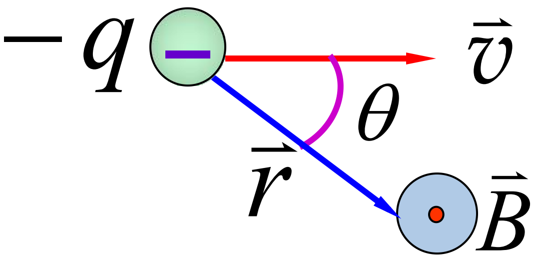
$$I\mathrm{d}\vec{l}=nS\mathrm{d}lq\vec{v}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nS\mathrm{d}lq\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}N=nS\mathrm{d}l$$

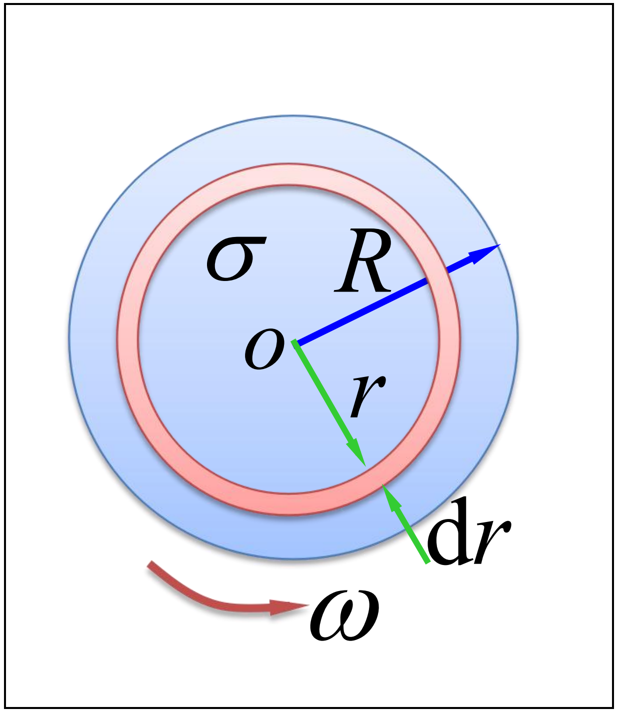
电流元内的点电荷数量

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$



例题5

半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ，并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度。



解法一：圆电流圆心处的磁场

$$\mathrm{d}I=\frac{dQ}{T}=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r\bigg/\frac{2\pi}{\omega}=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

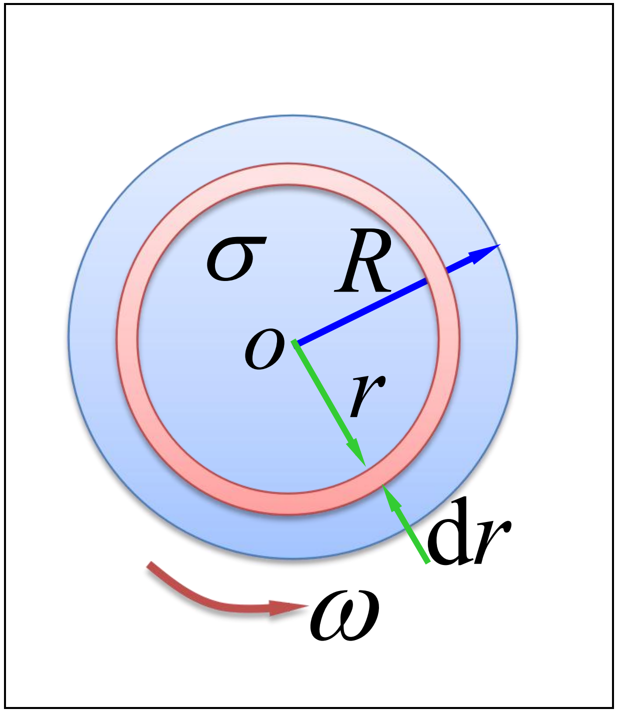
$$\mathrm{d}B_o=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B_o=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

$\sigma>0$，$\vec{B}_o$ 向外　$\sigma<0$，$\vec{B}_o$ 向内

解法二：运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$



$$\mathrm{d}B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv}{r^2} \qquad v = \omega r$$

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}B_o = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B_o = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

South China University of Technology