座位号______ 专业______ 学院______ 学号______ 姓名______
（密封线内不答题）
密 封 线

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何 》(B)试卷(17-18年度第1学期)

注意事项：1. 考前请将密封线内填写清楚;
2. 所有答案请直接答在试卷上;
3. 考试形式：闭卷;
4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

一、 (12分) 填空题.

得分	

1. 若n阶行列式D的值等于d, 则将D的第一列移到最后一列,其余各列依次保持原来次序向左移动, 则得到的新行列式的值为 $(-1)^{n-1}d$.

2. 行列式$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$的值为 2000 .

3. 矩阵方程$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$的解$X =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. 已知向量组$\alpha_1 = (1,2,3)$, $\alpha_2 = (1,4,a)$, $\alpha_3 = (2,a,9)$线性相关, 则$a =$ 1或 6 .

二、 (18分) 选择题:

得分	

1. A 是3阶方阵，A^*是其伴随矩阵, A的所有二阶子式都等于零, 则(A).

(A) $r(A) \le 1, r(A^*) = 0$ (B) $r(A) = 1, r(A^*) = 0$

(C) $r(A) \le 1, r(A^*) = 1$ (D) $r(A) \le 2, r(A^*) = 1$.

2. 下列命题错误的是(B).

(A) 属于不同特征值的特征向量必线性无关;

(B) 属于同一特征值的特征向量必线性相关;

(C) 相似矩阵必有相同的特征值;

(D) 特征值相同的矩阵未必相似.

3. 设A,B为正定矩阵, 则(C).

(A) $AB, A+B$一定都是正定阵;

(B) AB是正定阵, $A+B$不是正定阵;

(C) $A+B$是正定阵, AB不一定是正定阵;

(D) AB必不是正定阵, $A+B$必是正定阵.

4. 设A是n阶方阵且$|A|=0$, 则(C).

(A) A中必有两行（列）元素对应成比例;

(B) A中至少有一行（列）元素全为零;

(C) A中至少有一行（列）向量是其余各行向量的线性组合;

(D) A中每一行向量是其余各行向量的线性组合.

5. 下列命题错误的是(D).

(A) 若干个初等矩阵的积必是可逆矩阵; (B) 可逆矩阵的和未必是可逆矩阵;

(C) 可逆矩阵必是有限个初等矩阵的积; (D) 两个初等矩阵的积仍是初等矩阵.

6. 设A,B为正交矩阵, k是非零实数, P是可逆矩阵, 则(C).

(A) $A+B$也是正交矩阵; (B) kA也是正交矩阵;

(C) AB也是正交矩阵; (D) $P^{-1}AP$也是正交矩阵.

三、 (9分)计算行列式:

得分	

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1)$$

$$=b^{n-2}\left(\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}-a|a+b|\right)=b^n$$

$$D_n=aD_{n-1}+b^n=a\left(aD_{n-2}+b^{n-1}\right)+b^n=a^2D_{n-2}+ab^{n-1}+b^n$$

$$=\cdots=a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$$

$$=a^{n-1}(a+b)+a^{n-2}b^2+a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$$

$$=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+b^n=\sum_{i=0}^{n}a^{n-i}b^i$$

得分	

四、 (15分) 讨论参数p,t 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t \end{cases}$$

有解? 无解? 有解时, 试用特解和导出组的基础解系表示其通解.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$$

(1)当$t \neq -2$时，线性方程组无解

(2)当$t=-2, p \neq -8$有无穷多解：

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 0 \\ x_2+2x_3+2x_4 &= 1 \\ (p+8)x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c-1 \\ x_2 = -2c+1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c \end{cases} \quad (c\text{是任意实数})$$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c是任意实数)

(3)当$t=-2, p=-8$有无穷多解：

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 0 \\ x_2+2x_3+2x_4 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4c_1-c_2-1 \\ x_2 = -2c_1-2c_2+1 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (c_1,c_2\text{是任意实数})$$

通解: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c_1,c_2是任意实数)

五、 (15 分) 已知$\mathbb{R}^4$中两组基: 标准基$\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1,0)$, $\varepsilon_4 = (0,0,0,1)$ 和基$\beta_1 = (2,1,-1,1)$, $\beta_2 = (0,3,1,0)$, $\beta_3 = (5,3,2,1)$, $\beta_4 = (6,6,1,3)$.

(1) 求由基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$到基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到的过渡矩阵;

(2) 求一个向量$\gamma \in \mathbb{R}^4$, 使得它在两组基下有相同的坐标.

得分	

(1)

$$\left(\eta_1^{\mathrm{T}},\eta_2^{\mathrm{T}},\eta_3^{\mathrm{T}},\eta_4^{\mathrm{T}},\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T,\varepsilon_4^T\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{array}\right)$$

$\eta_1^{\mathrm{T}},\eta_2^{\mathrm{T}},\eta_3^{\mathrm{T}},\eta_4^{\mathrm{T}}$到$\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T,\varepsilon_4^T$的过渡矩阵$C=\begin{pmatrix} 4/9 & 1/3 & -1 & -11/9 \\ 1/27 & 4/9 & -1/3 & -23/27 \\ 1/3 & 0 & 0 & -2/3 \\ -7/27 & -1/9 & 1/3 & 26/27 \end{pmatrix}$

(2)设γ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$和基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的坐标都是$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$

则 $\gamma=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=x_1\eta_1+x_2\eta_2+x_3\eta_3+x_4\eta_4$

$x_1(\eta_1-\varepsilon_1)+x_2(\eta_2-\varepsilon_2)+x_3(\eta_3-\varepsilon_3)+x_4(\eta_4-\varepsilon_4)=0$

$$\left(\eta_1^T-\varepsilon_1^T,\eta_2^T-\varepsilon_2^T,\eta_3^T-\varepsilon_3^T,\eta_4^T-\varepsilon_4^T\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+x_4 & = & 0 \\ x_2+x_4 & = & 0 \\ x_3+x_4 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = & -c \\ x_2 & = & -c \\ x_3 & = & -c \\ x_4 & = & c \end{cases} \quad (c\text{是任意常数})$$

得到γ的坐标$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=c\left(-1,-1,-1,1\right)$

$\gamma=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4=c\left(-1,-1,-1,1\right)$. 其中$c$是任意常数

六、 (10分) 已知直线的一般式方程

得分	

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 4 = 0, \\ 4x - 6y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$$

求它的对称式(也叫点向式)方程.

$$方向向量\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -21\vec{i} - 14\vec{j}$$

$$令x=0,\ 代入\begin{cases} 2x-3y-z+4=0 \\ 4x-6y+5z-1=0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} -3y-z+4=0 \\ -6y+5z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{19}{21} \\ z=\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

所以,$(0,19/21,9/7)$是直线上的一个点。

直线的点向式方程: $\dfrac{x}{-21} = \dfrac{y-19/21}{-14} = \dfrac{z-9/7}{0}$

（此题答案有多种）

七、 (15 分) 设3阶实矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组$Ax = \beta$有解, 但解不唯一.

得分	

(1) 求a的值;

(2) 求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角形.

$$(1)\quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -(a+2) \end{array}\right)$$

当$a=-2$时， $r(A)=r(A)=2<3$， $Ax=\beta$有解但不唯一 所以， $a=-2$.

$$(2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

A的所有特征值： $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$

对$\lambda=0$, $0E-A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得对应的特征向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

对$\lambda=3$, $3E-A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得对应的特征向量$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

对$\lambda=-3$, $-3E-A=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,得对应的特征向量$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化：$\beta_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\beta_2=\frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\beta_{33}=\frac{1}{|\alpha_3|}\alpha_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$,

得正交矩阵$T=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

八、 (6分) 设A为n阶矩阵且$A^m=E$, 其中m为某个给定的正整数, 证明: $(A^*)^m=E$, 这里A^*是A的伴随矩阵, E是单位矩阵.

得分	

证明： $AA^*=A^*A=|A|E$

$\because A^m=E$, 则有 $|A|^m=|A^m|=|E|=1.$

由于A,A^*可交换，有 $(AA^*)^m=A^m(A^*)^m$

$(A^*)^m=E(A^*)^m=A^m(A^*)^m=(AA^*)^m=(|A|E)^m=|A|^m E^m=E$