14.2 电场 静电场

➢电场

电荷 ⇄ 电场 ⇄ 电荷

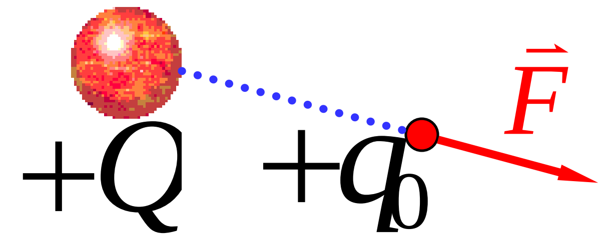
物质
- 电场
  - 电荷：电场力&做功
  - 导体：静电感应
  - 电介质：极化
- 实物

➢静电场

相对观察者静止的电荷激发的电场。

电场强度

$$E=\frac{F}{q_0}$$



$\left\{\begin{array}{ll} +Q: & \text{场源电荷} \\ +q_0: & \text{试验电荷} \end{array}\right.$

(试验电荷为点电荷、且电荷量足够小，故对原电场几乎无影响)

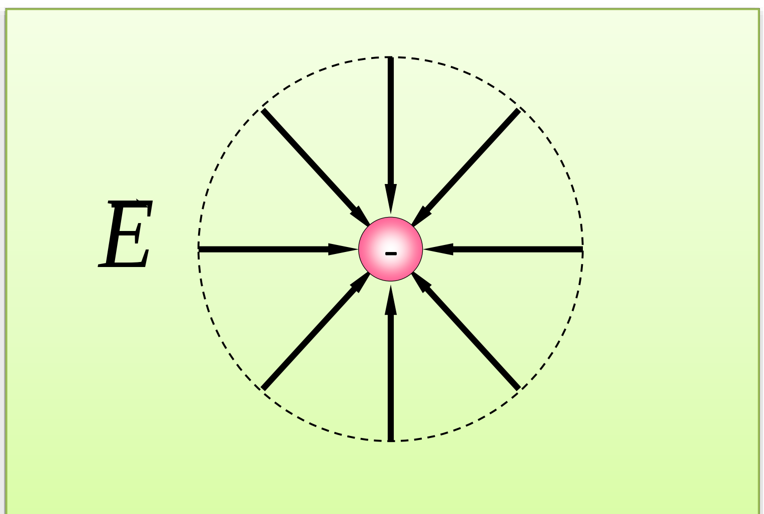
电场中某点处的电场强度 $\vec{E}$ 等于位于该点处的单位试验电荷所受的力，其方向为正电荷受力方向。

- 单位：$\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$
- 电荷 q 在电场中受力 $\vec{F}=q\vec{E}$

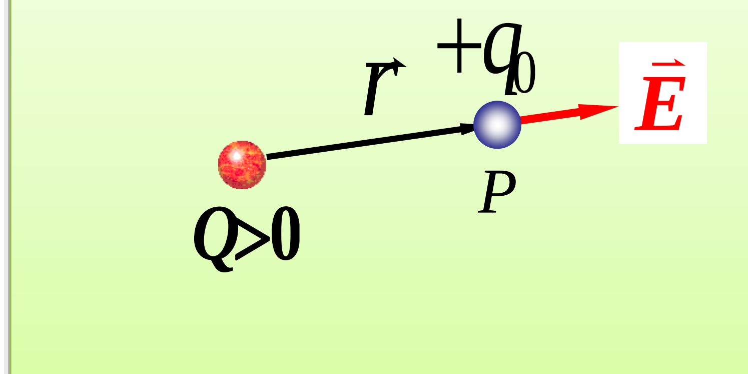
点电荷电场强度

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq_0}{r^2}\vec{e}_r$$

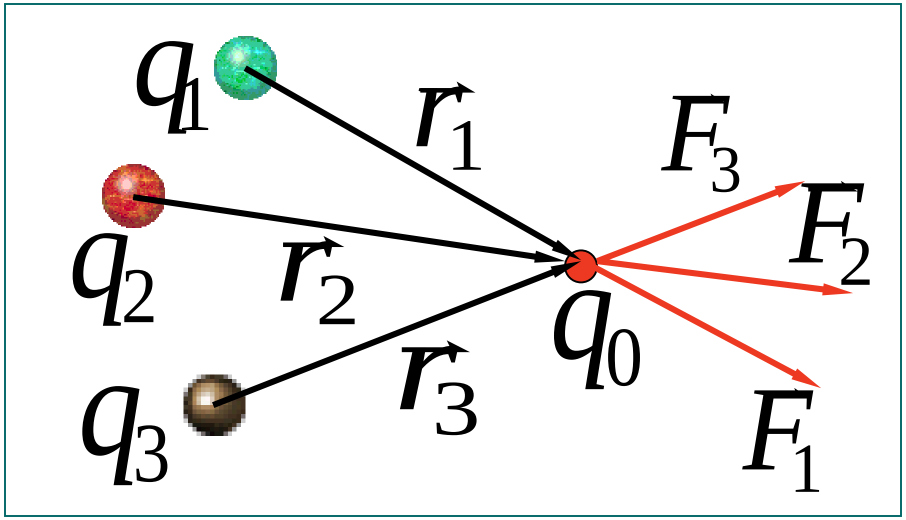
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$



$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$



电场强度的叠加原理



点电荷 q_i 对 q_0 的作用力

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r_i^3}\vec{r}_i$$

由力的叠加原理得 q_0 所受合力 $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

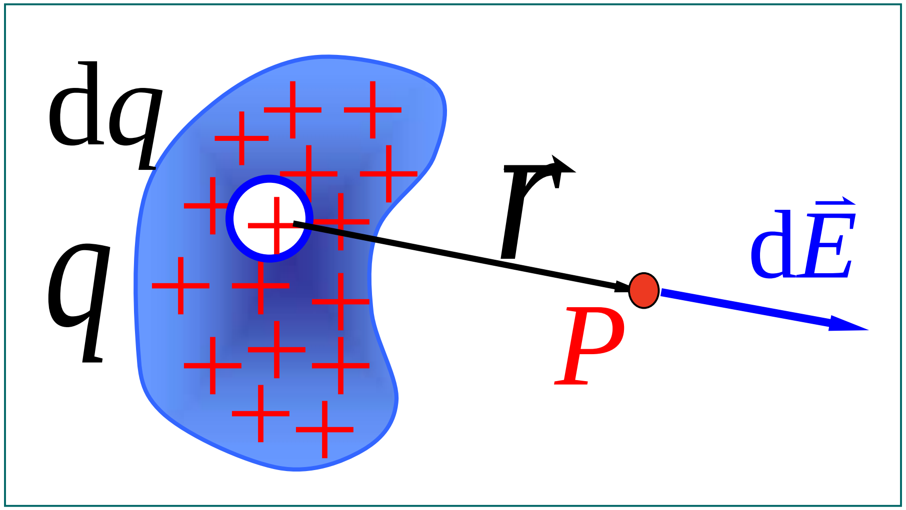
故 q_0 处总电场强度 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0}$

电场强度的叠加原理 $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$

电荷连续分布情况

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$



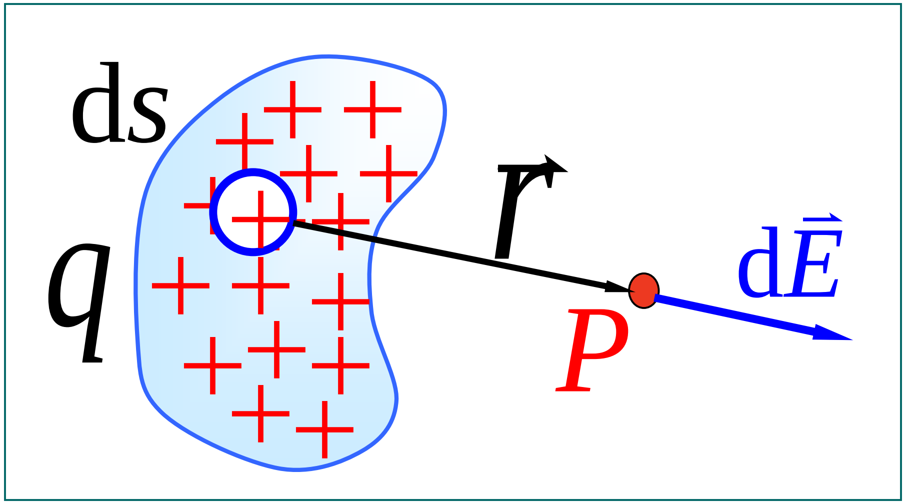
➢电荷体密度 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

点P处电场强度 $$\boxed{\vec{E}=\int_V\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\,\mathrm{d}V}{r^2}\vec{e}_r}$$

二维&一维

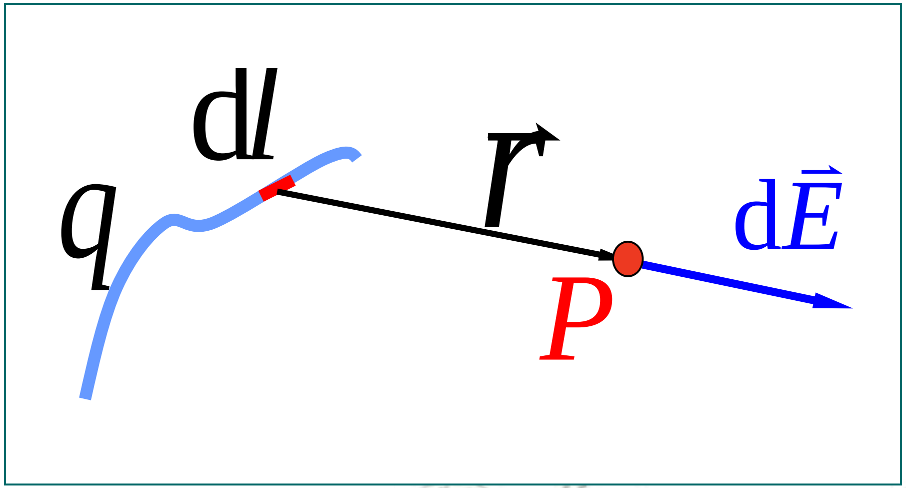
- ➢电荷面密度 $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$

$$E = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \vec{e}_r}{r^2} \mathrm{d}s$$



- ➢电荷线密度 $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$

$$E = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \vec{e}_r}{r^2} \mathrm{d}l$$



具体计算

- 具体计算时应采用<u>分量式</u>，步骤如下

① 选取合适的坐标系，再取微元dq，写出$d\vec{E}$表达式，并画出$d\vec{E}$方向。

（2）写出分量：dE_x，dE_y，dE_z

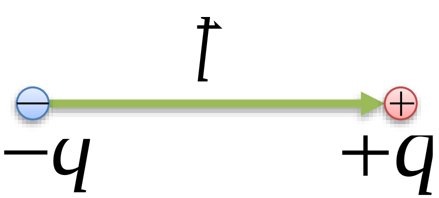
(3) 对称性分析可简化计算，能使我们立即判断电场强度的某些分量为零

(4)积分求出：$E_x=\int dE_x$，$E_y=\int dE_y$，$E_z=\int dE_z$

(5)$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}$

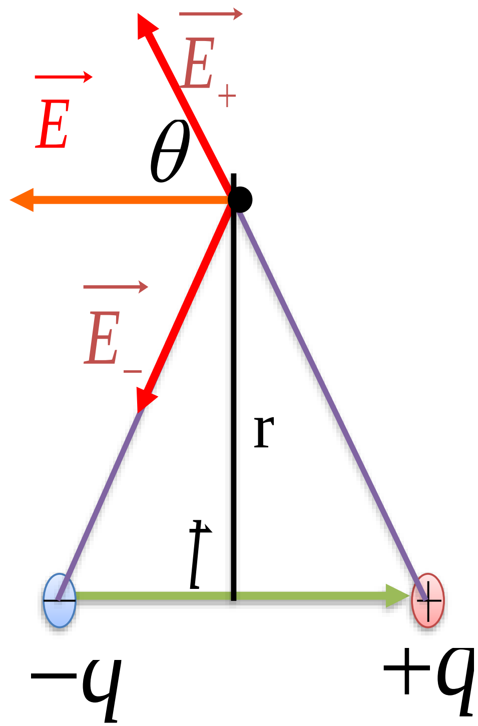
例1: 电偶极子

➤**电偶极子：**相距很近、等量异号的点电荷系统。



电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{l}$ (方向:负电荷→正电荷)

求轴线的中垂线上任一点 (r) 的场强



$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+(l/2)^2} = E_-$$

$$E = 2E_+\cos\theta = 2E_+\frac{l/2}{\sqrt{r^2+(l/2)^2}}$$

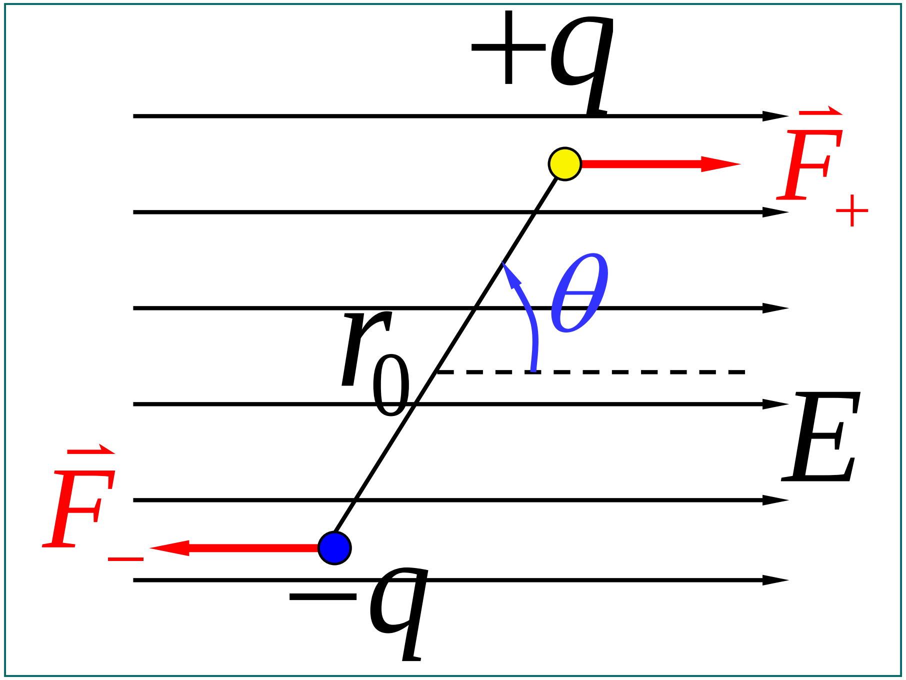
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r^2+(l/2)^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (r \gg l)$$

外电场对电偶极子的力矩和取向作用

➤匀强电场中 $F = F_+ + F_- = qE - qE = 0$

$$\vec{M} = \vec{M}_+ + \vec{M}_-$$
$$= \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$
$$= q\vec{r}_+ \times \vec{E} + (-q)\vec{r}_- \times \vec{E}$$
$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E}$$
$$= q\vec{l} \times \vec{E}$$



$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \quad \vec{M} = 0$$

稳定平衡

非稳定平衡

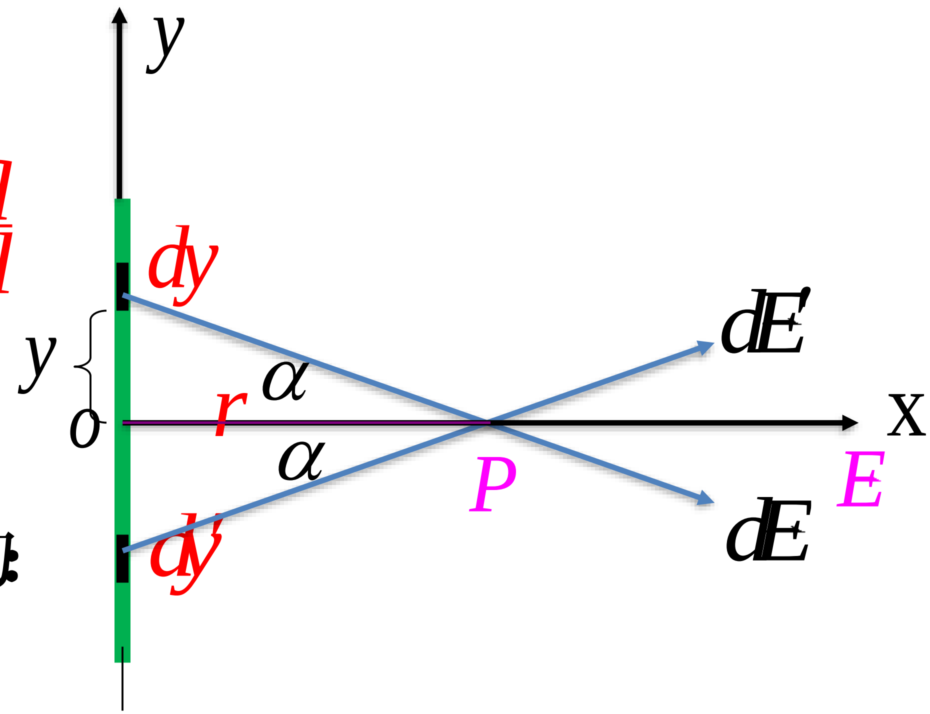
□力矩M总是使电偶极矩p转向电场E的方向

例2: 均匀带电杆

例2：求均匀带电细棒中垂线上的场强分布。设棒长为$2l$，带电量为q

解：选细棒中点为坐标原点，

建立坐标系oxy



带电细棒电荷线密度为：$\lambda=\dfrac{q}{2l}$

在细棒上取一线元dy，

带电量为：$dq=\lambda\cdot dy$

该电荷元在P点的场强大小为：

$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2+y^2}$$

对其进行正交分解：

$$dE_x=dE\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{r^2+y^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r\cdot dy}{(r^2+y^2)^{3/2}}$$

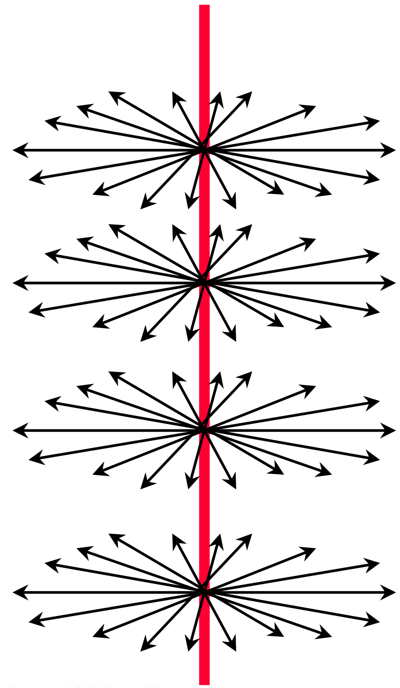
由于电荷分布对于OP直线的对称性，所以全部电荷在P点的场强沿y轴方向的分量之和为零，因而P点的总场强E应沿x轴方向

$$E=\int dE_x=\int_{-l}^{l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r\cdot dy}{(r^2+y^2)^{3/2}}=2\int_0^{l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda r\cdot dy}{(r^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\lambda l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$

讨论:（1）对于中垂面上的场强分布

面上距O点为r的场强大小均相等

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\lambda l}{\sqrt{r^2+l^2}}$$



（2）细棒为无限长 $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

(3) $r>>l$ 的情况 $E=\dfrac{\lambda l}{2\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\lambda 2l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

例3

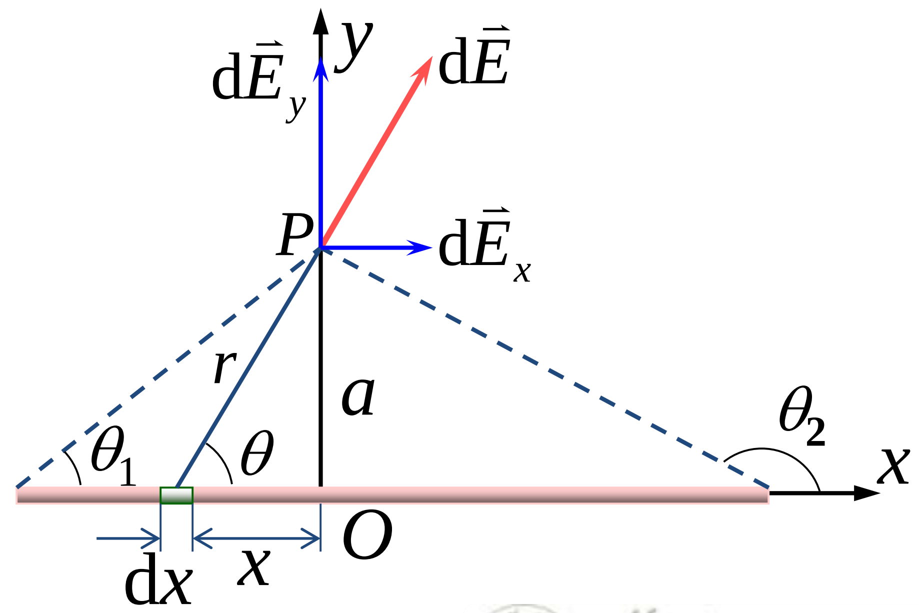
真空中有均匀带电直线，长为L，总电荷量为Q。线外有一点P，离开直线的垂直距离为a，P点和直线两端连线的夹角分别为θ_1和θ_2。求P点的场强。（设电荷线密度为λ）

解： 电荷元：$dq=\lambda dx$

$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\cos\theta$$

$$=\frac{\lambda\,\mathrm{d}x\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda\,\mathrm{d}x\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta} = a\csc\theta \qquad x = -a/\tan\theta$$

$$\mathrm{d}x = a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda\mathrm{d}x\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\,a\csc^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2\csc^2\theta} = \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{d}\theta$$

$$E_x=\int\frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{d}\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sin\theta_2-\sin\theta_1\right)$$

$$\mathrm{d}E_y=\frac{\lambda\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{d}\theta$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

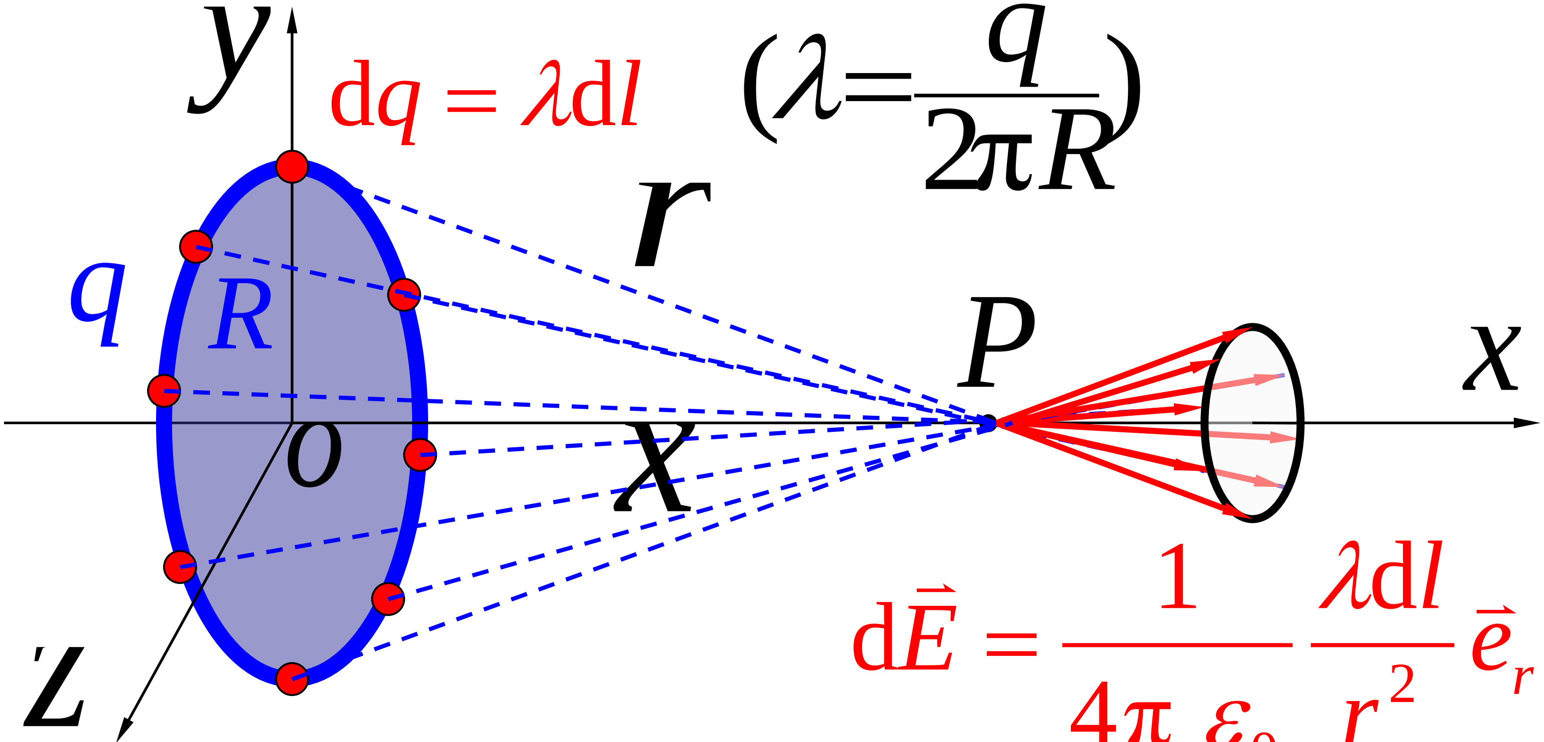
无限长带电直线： $\theta_1=0$ ， $\theta_2=\pi$

$$E_x=0 \qquad E=E_y=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

例4

正电荷q均匀分布在半径为R的圆环上，计算在环的轴线上任一点P的电场强度。

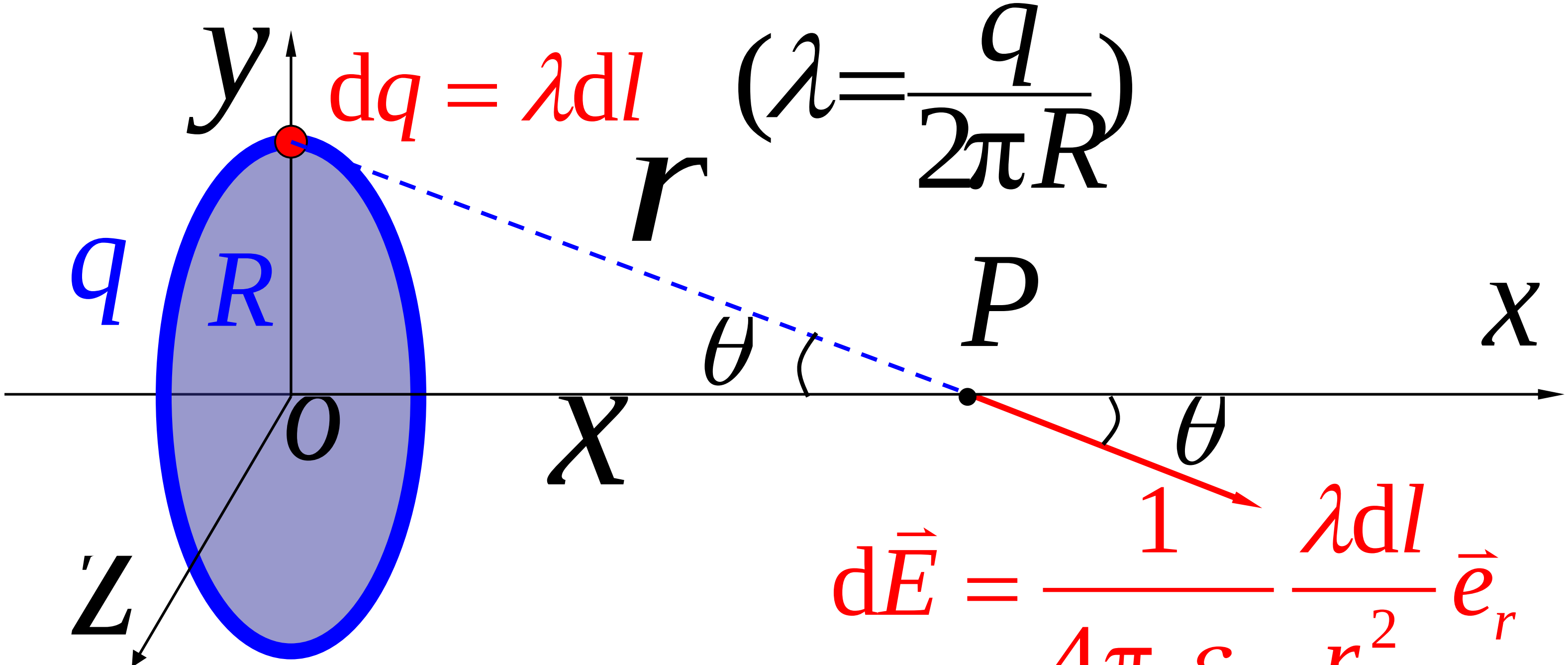
解： $\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$　　由对称性有 $\vec{E}=E_x\vec{i}$



$\mathrm{d}q=\lambda \mathrm{d}l$　　$(\lambda=\dfrac{q}{2\pi R})$

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \quad \left(\lambda = \frac{q}{2\pi R}\right)$$



$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$

$$E = \int_l \mathrm{d}E_x = \int_l \mathrm{d}E\cos\theta = \int \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$= \int_0^{2\pi R}\frac{x\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论

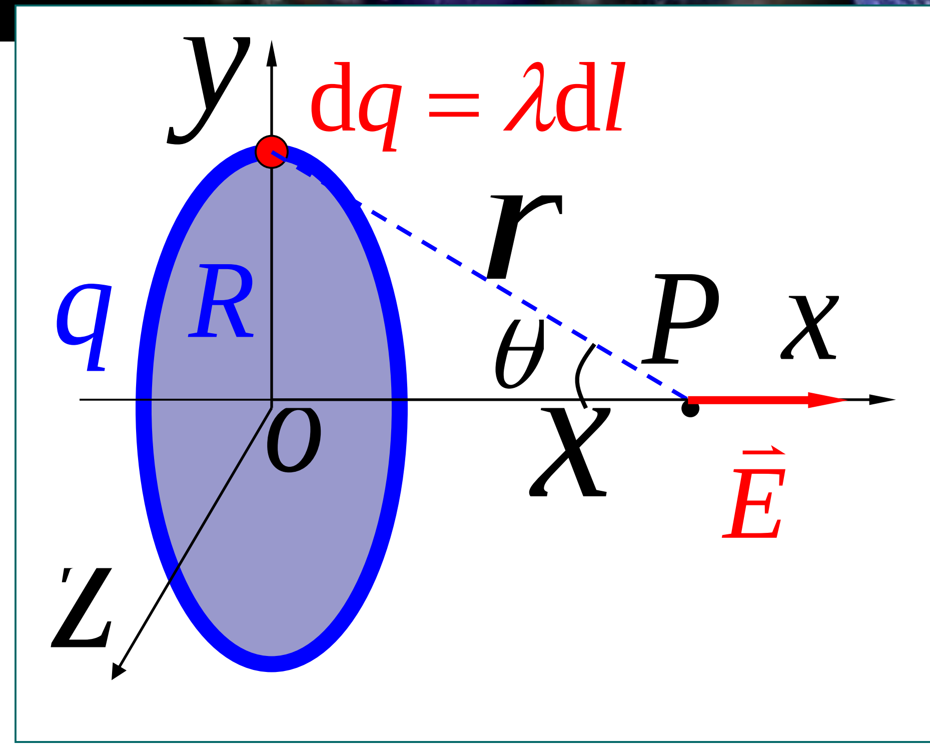
（1） $x>>R$

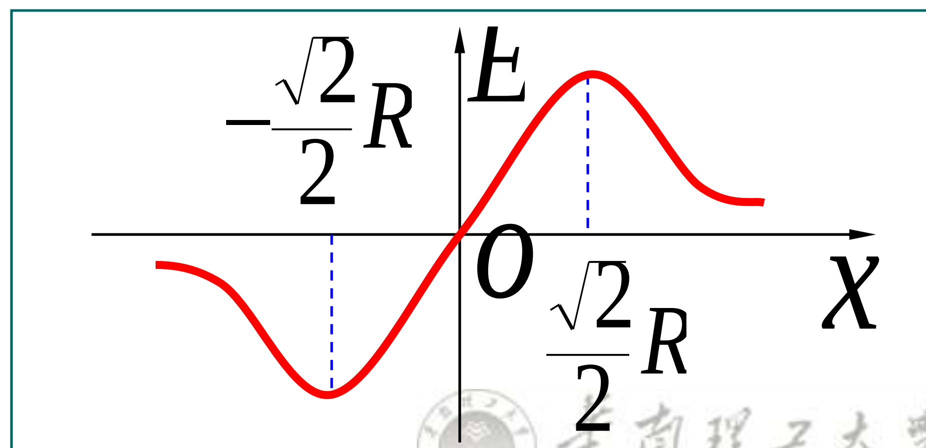
$$E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

（点电荷电场强度）

（2） $x\approx 0,\quad E_0\approx 0$

（3） $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0,\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$





例5

均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度。

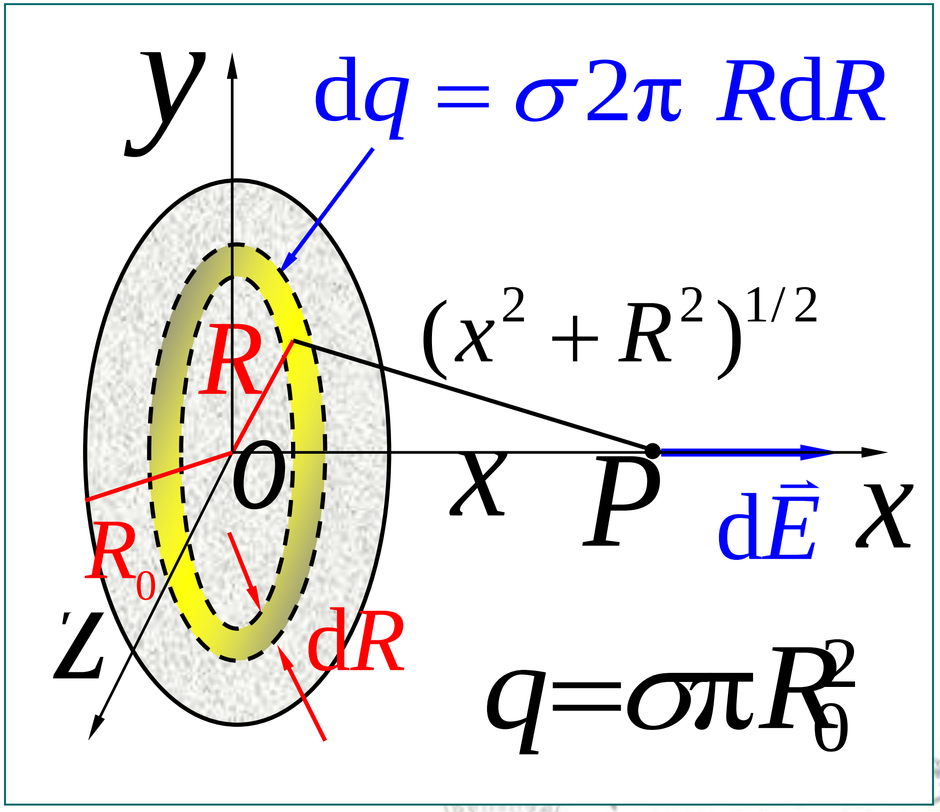
有一半径为 R_0，电荷均匀分布的薄圆盘，其电荷面密度为 σ． 求通过盘心且垂直盘面的轴线上任意一点处的电场强度。

解： 由例4

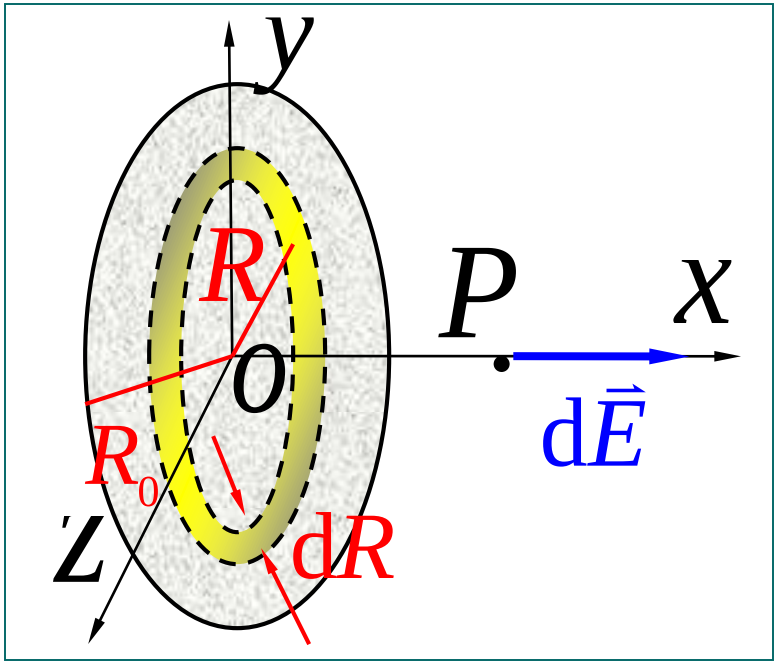
$$E = \frac{\boxed{q}\, x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\boxed{\mathrm{d}q} \cdot x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{xR\mathrm{d}R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



$$\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{xR\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$E = \int \mathrm{d}E_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{R\mathrm{d}R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)$$

讨 论

$x<<R_0 \quad E\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ （无限大均匀带电平面的电场强度）

$x>>R_0 \quad E\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ （点电荷电场强度）

$$\left[\left(1+\frac{R_0^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{R_0^2}{x^2}+\cdots\right]$$