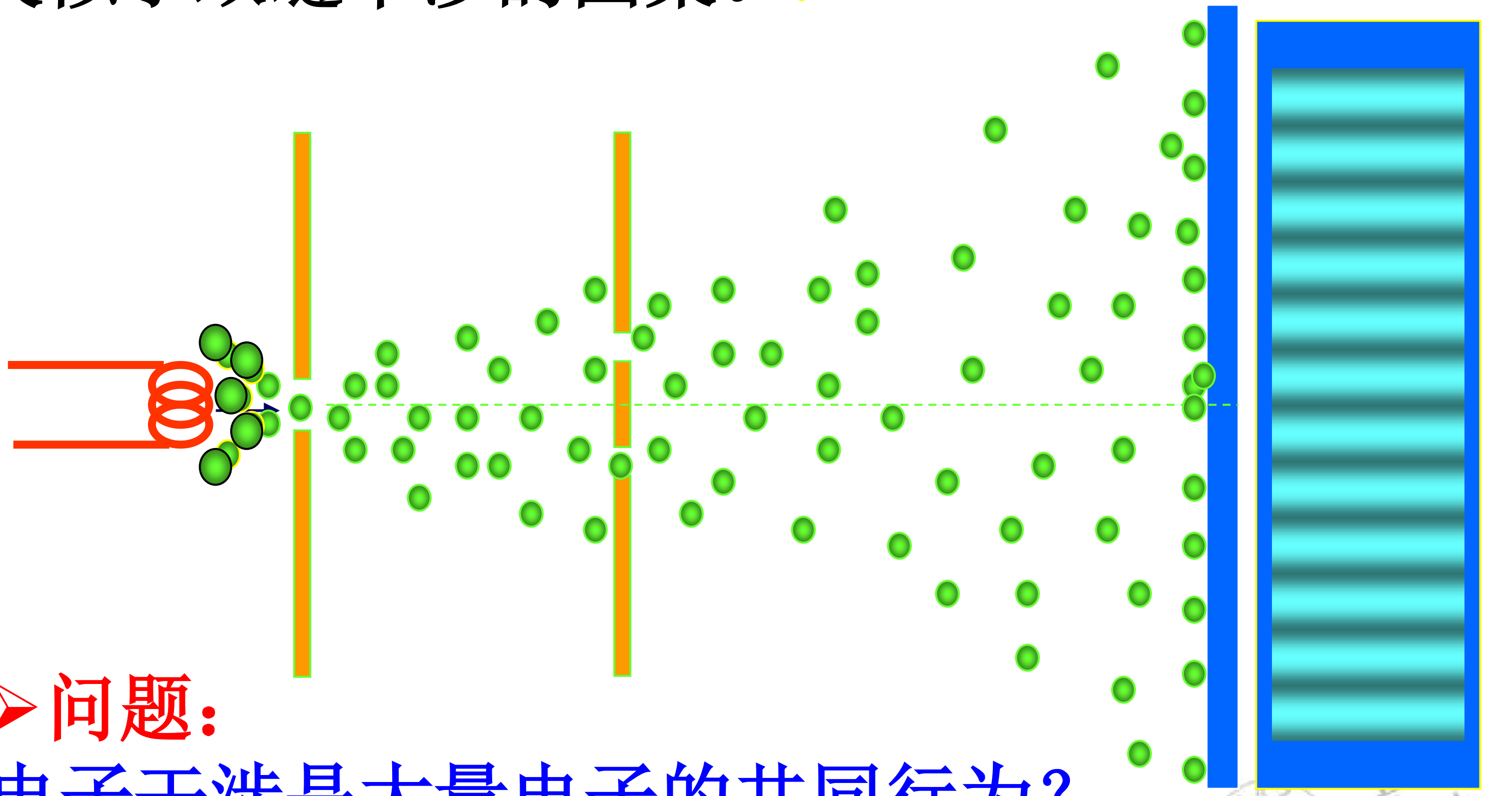
电子双缝干涉

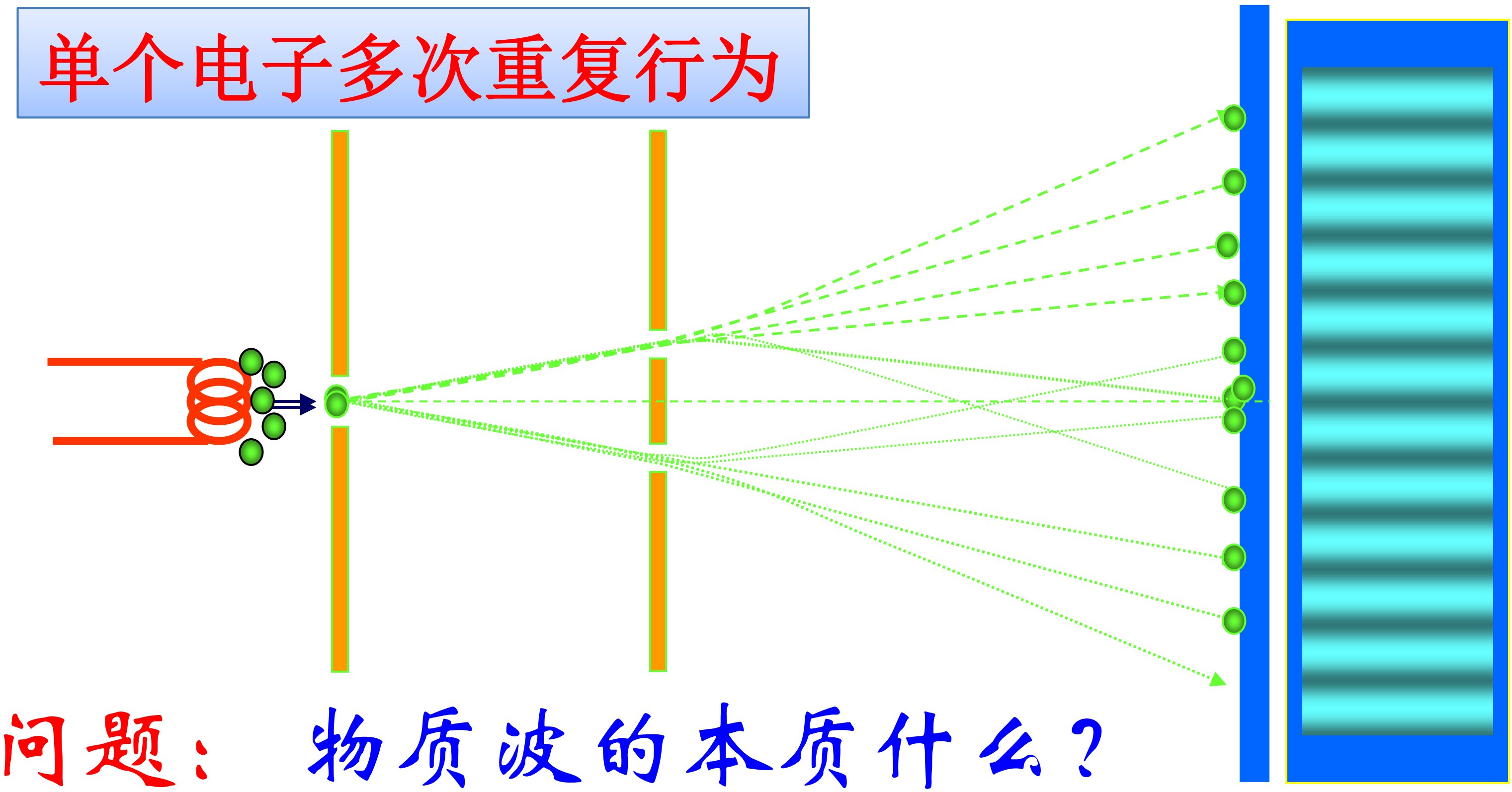
1961年琼森(Claus Jönsson)将一束电子加速到50keV，让其通过一缝宽为$a=0.5\times10^{-6}$m，间隔为$d=2.0\times10^{-6}$m的双缝，当电子撞击荧光屏时，发现了类似于双缝干涉的图案。



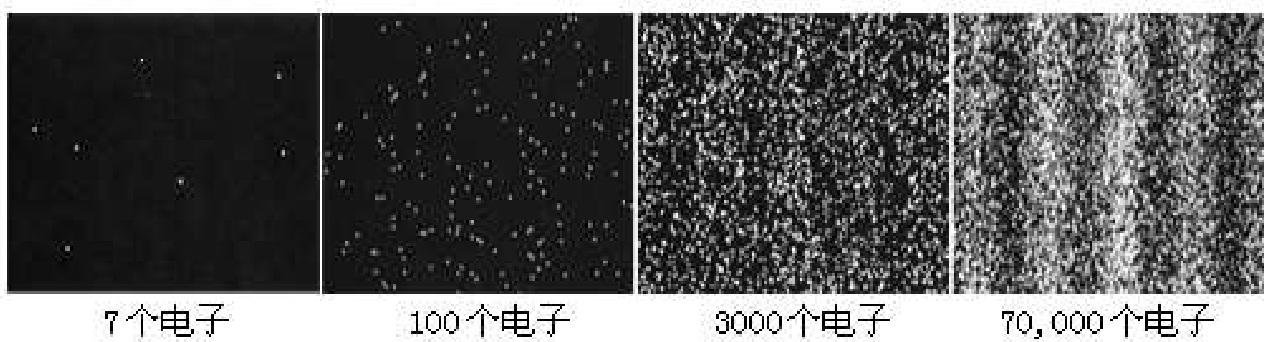
➢问题：

电子干涉是大量电子的共同行为？

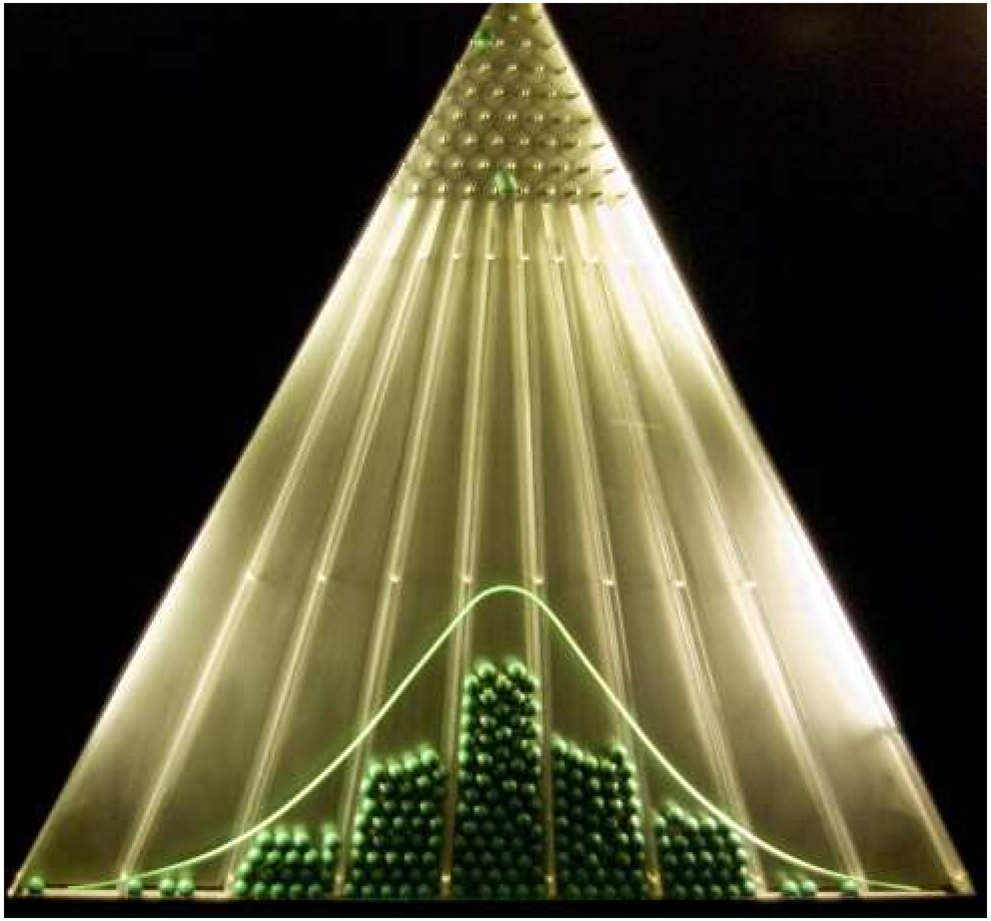
单电子双缝干涉



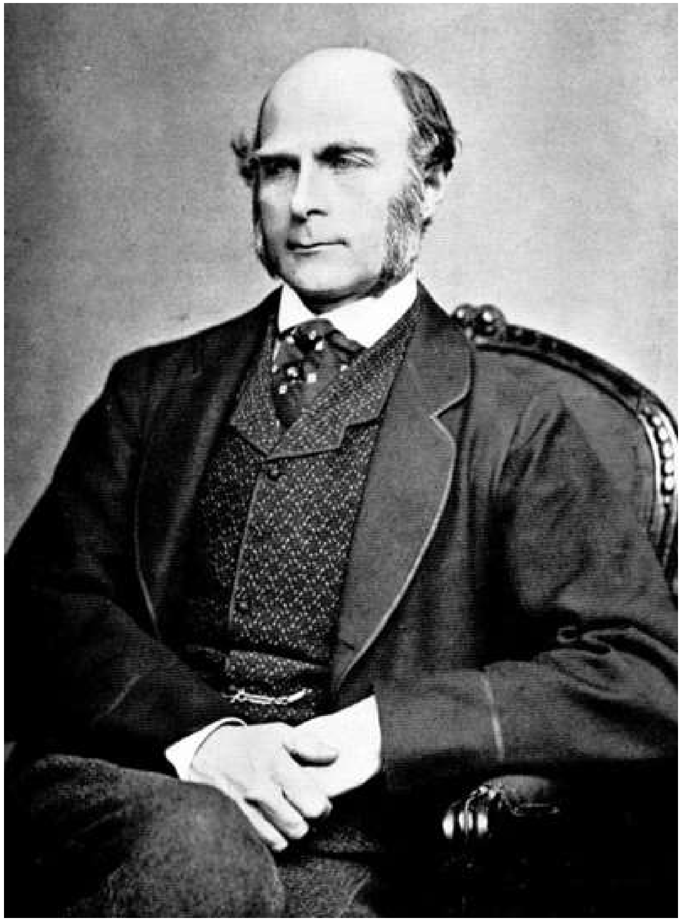
➤ 问题： 物质波的本质什么？



伽尔顿板实验



伽尔顿板实验



Francis Galton

(1822~1911, England)

23.2 波函数和薛定谔方程

➢波恩提出

Max Born

1882～1970

□ 物质波是一种概率波

概率波的意义：不可能精确地预知微观粒子的位置，只能告诉该粒子在空间某处出现的概率。

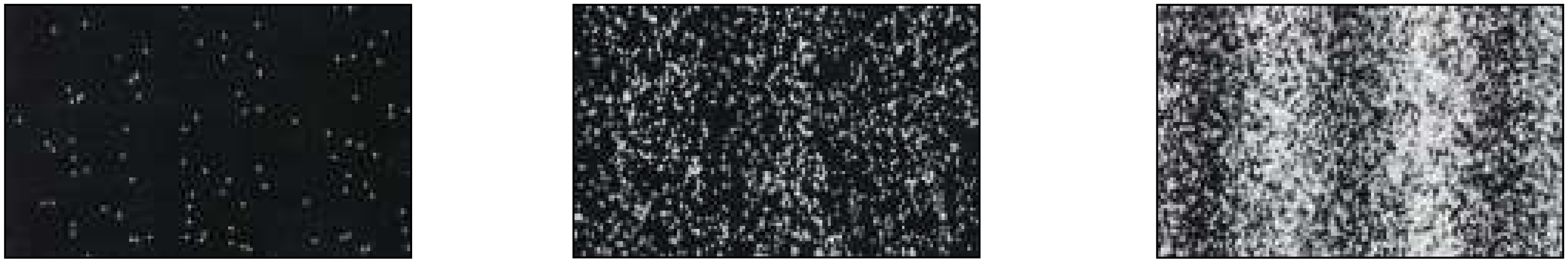
物质波 ➡ 概率波 ➡ ~~位置$\vec{r}(t)$~~?

□ 物质波(微观粒子)由波函数$\Psi(x,t)$来描述

描述实物粒子状态或描述物质波的数学表达式——波函数

波函数的统计诠释

□电子双缝干涉

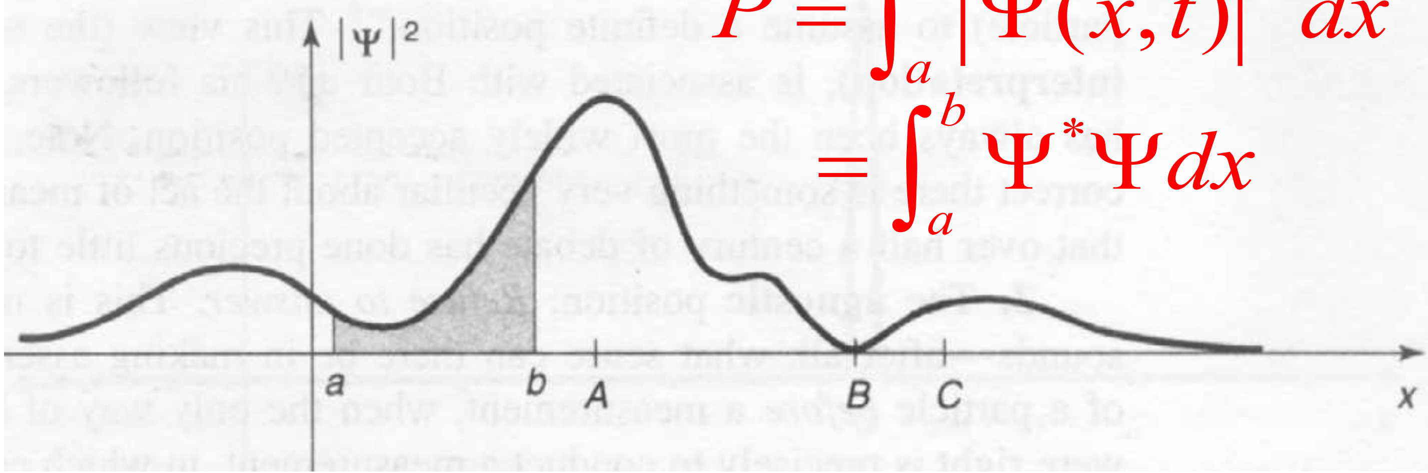


在空间某处发现粒子的概率与波函数模的平方 $|\Psi(x,t)|^2$ 成正比。

在a到b内发现粒子的概率：

$$P=\int_a^b|\Psi(x,t)|^2\,dx$$

$$=\int_a^b\Psi^*\Psi\,dx$$



波函数的性质

在空间V内发现粒子的概率：

$$P=\int_V \left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2 dV$$

$\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2=\Psi^*\Psi$ 概率密度：空间某处发现粒子的概率

- 某一时刻在整个空间内发现粒子的概率为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi|^2 dV=1 \qquad \text{归一化条件}$$

- 有限性 $\int|\Psi|^2 \mathrm{d}V\le 1$

- 单值性 $|\Psi|^2$ 是单值的

- 连续性 Ψ和$\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}x$一般连续

自由粒子的波函数

自由粒子：$\vec{F}=0$，E和P不变 $\Rightarrow$ $\nu=\dfrac{E}{h},\lambda=\dfrac{h}{P}$不变

平面简谐波：$y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t-\dfrac{x}{\lambda})]$

自由粒子波函数：$\Psi(x,t)=\Psi_0\cos[2\pi(\nu t-\dfrac{x}{\lambda})]$

为体现其粒子性($\nu=\dfrac{E}{h},\lambda=\dfrac{h}{p}$) $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$

$$\Psi(x,t)=\Psi_0\cos[\frac{2\pi}{h}(Et-px)]=\Psi_0\cos[\frac{1}{\hbar}(Et-px)]$$

欧拉公式：$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$

自由粒子波函数：$\Psi(x,t)=\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$

自由粒子的薛定谔方程

自由粒子波函数

$$\Psi(x,t)=\psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=E\Psi(x,t) \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)=p\Psi(x,t) \\ -\hbar^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)=p^2\Psi(x,t) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Rightarrow E \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\Rightarrow p \end{array}}$$

自由粒子能量与动量关系

$$E=\frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad E\Psi(x,t)=\frac{p^2}{2m}\Psi(x,t)$$

□一维自由粒子的薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$$

一维薛定谔方程

粒子在势场$U(x,t)$中运动　$E = p^2/2m + U(x,t)$

$$\Rightarrow\quad E\Psi(x,t) = \left[p^2/2m + U(x,t)\right]\Psi(x,t)$$

□势场中的一维薛定谔方程　$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,t)\right]\Psi(x,t)$

Erwin Schrödinger
（1887-1961）

著名的奥地利理论物理学家，量子力学的重要奠基人之一，同时在固体比热、统计热力学、原子光谱等方面享有成就。

他对分子生物学的发展也做出贡献，使物理学和生物学相结合，形成了现代分子生物学的最显著的特点之一。

三维薛定谔方程

一维薛定谔方程 $$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)\right]\Psi(x,t)$$

一维→三维： $$x\to\vec{r},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

梯度算符 $$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ \Rightarrow\ \nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

拉普拉斯算符

□三维薛定谔方程 $$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t)$$

量子力学的首要问题

求解给定势场$U(x,t)$下的薛定谔方程，得到波函数 $\Psi(x,t)$

一维薛定谔方程 $$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)\right]\Psi(x,t)$$

➤若势场与时间无关 $U=U(x)$

$$\Psi(x,t)=\psi(x)f(t)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\psi\frac{df}{dt}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=f\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\mathrm{i}\hbar\psi\frac{df}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}f\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi f$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{f}\frac{df}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U$$

一维定态薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{1}{f}\frac{df}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\quad =E(\text{常数})$$

E为一个确定的能量值

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\hbar}{f}\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=E\\[2ex]-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{1}{\psi}\dfrac{d^2\psi}{dx^2}+U=E\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}\Rightarrow f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}\\[2ex]\boxed{\left[-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\psi(x)=E\psi(x)}\end{cases}$$

一维定态薛定谔方程

定态粒子的波函数： $\Psi(x,t)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}$

为什么叫定态？

定态的意义

$$\Psi(x,t)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}$$

➤**定态：** 稳定的状态

□定态粒子在空间的概率分布不随时间变化

$$|\Psi(x,t)|^2=\Psi^*\Psi=\psi^*(x)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}=\psi(x)\psi^*(x)=|\psi(x)|^2$$

概率密度 $|\Psi(x,t)|^2=|\psi(x)|^2$ 满足波函数的性质

□定态粒子的总能量不随时间变化的

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)\to E(\text{常数})$$

若势场不变，保守力不变，机械能(总能量)守恒。

例1

作一维运动的粒子被束缚在 $0 \le x$ 的范围内。

已知其波函数为 $\psi(x) = A\sin(\pi x / a)$

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

试求：(1) 常数A；

(2) 粒子在0到$a/2$区域出现的概率。

解：(1) 由归一化条件得：

$\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin\alpha)^2$

$$\int_0^a |\psi|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^a A^2 \sin^2(\pi x/a)\,\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/a}$$

在$0<x<a/2$区域内，粒子出现的概率为：

$$\int_0^{a/2} |\psi|^2 \,\mathrm{dV} = \frac{2}{a}\int_0^{a/2} \sin^2 \frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

概率取决于波函数的相对强度