姓名______ 学号______ 学院______ 专业班级______ 座位号______

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

《工科数学分析》2017-2018 学年第一学期期末考试试卷 (B) 卷

参考答案

注意事项：

1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚;
2. 所有答案请直接答在试卷上;
3. 考试形式：闭卷;
4. 本试卷共 5 个大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟。

题　号	一	二	三	四	五	总　分
得　分						
评卷人						

一、 填空题（5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=$ $\underline{\quad 3 \quad}$;

2. 设曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 有拐点 $(1,-1)$，且在 $x=0$ 处有极大值，则 $a=$ $\underline{\quad -3 \quad}$， $b=$ $\underline{\quad 0 \quad}$， $c=$ $\underline{\quad 1 \quad}$;

3. 设 $y=\sin(2x)$，则 $\mathrm{d}^{(n)}y=$ $\underline{\quad 2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{d}x^n \quad}$;

4. $\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}+e^{x^2}\sin x\right)\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad \frac{\pi}{2} \quad}$;

5. 反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad \ln 2 \quad}$。

二、 计算下列各题（3 小题，每小题 8 分，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

解：考虑带 Peano 余项的 Maclaurin 公式，

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4),$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)+2-x^2+\frac{1}{12}x^4+o(x^4)-3}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{12}+o(1)\right)\\&=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

2. 求不定积分 $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$

解：令 $t=\ln x$，则 $x=e^t, \mathrm{d}x=e^t\mathrm{d}t$,

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \int \cos t e^t \mathrm{d}t.$$

由分部积分法，

$$\begin{aligned}\int \cos t e^t \mathrm{d}t &= \int e^t \mathrm{d}\sin t \\ &= e^t \sin t - \int \sin t e^t \mathrm{d}t \\ &= e^t \sin t + \int e^t \mathrm{d}\cos t \\ &= e^t \sin t + e^t \cos t - \int \cos t e^t \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此，

$$\int \cos t e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)e^t + C.$$

即，

$$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

3. 计算定积分 $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

解：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\cos t}{a^3\cos^3 t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2} \tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

三、 解答题（4 小题，每题 8 分，共 32 分）

1. 证明数列 $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots$ 收敛，并求其极限。

解：数列的通项 a_n 满足 $a_1 = \sqrt{3}$，且 $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$.

先证明数列 $\{a_n\}$ 有界，$0 < a_1 = \sqrt{3} < 3$，若 $0 < a_n < 3$，则

$$0 < \sqrt{3a_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

因此，由归纳法有 $0 < a_n < \sqrt{3}$.

另一方面，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{3}{a_n}} > 1$，因此 $a_{n+1} > a_n$，数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列。

由单调有界收敛定理，数列 $\{a_n\}$ 收敛，记其极限为 a，则 a 满足

$$a = \sqrt{3a}.$$

因此，$a = 0$ 或 $a = 3$，而 $\{a_n\}$ 单调递增，$a > a_1 = \sqrt{3}$。因此，数列的极限为 3.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 其中 $g''(x)$ 连续，且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$。

(1) 求 $f'(x)$；(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性。

解：(1) 当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = \frac{(g'(x) + e^{-x})x - (g(x) - e^{-x})}{x^2} = \frac{xg'(x) - g(x) + e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

当 $x = 0$ 时，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{g''(0) - 1}{2}. \end{aligned}$$

因此，

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x)-g(x)+e^{-x}(x+1)}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{g''(0)-1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(2) 由于 $g''(x)$ 连续，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 也连续，因此 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处都连续。在 $x = 0$ 处，

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xg''(x) - xe^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2} = f'(0).$$

因此，$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处也连续。即，$f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

3. 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4} + 3\int_{\frac{\pi}{4}}^{t} \cos^2 u \sin u \mathrm{d}u \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程，并求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t \sin t} = \tan t.$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时，$x = \frac{\sqrt{2}}{4}, y = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

因此，曲线对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为

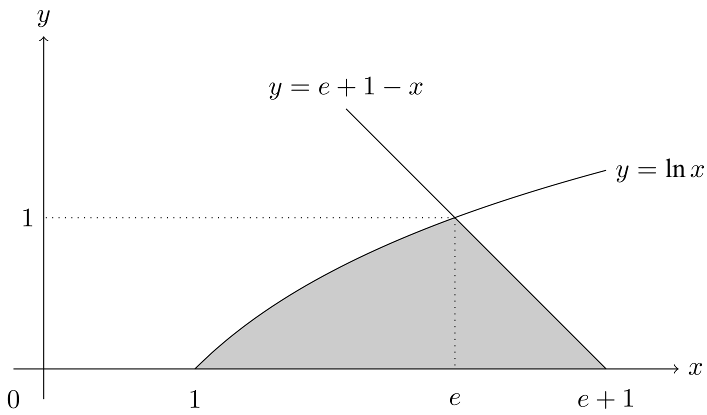
$$y - \frac{\sqrt{2}}{4} = x - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

即，$y = x$.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3\sin t \cos^4 t}.$$

4. 求曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = 0$ 及 $y = e + 1 - x$ 所围成的平面图形的面积。

解：曲线 $y = \ln x$ 与直线 $y = 0$ 交于 $(1, 0)$ 点，与直线 $y = e + 1 - x$ 交于 $(e, 1)$ 点。如图，



所求面积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e \ln x \mathrm{d}x + \int_e^{e+1} e + 1 - x \mathrm{d}x \\ &= x \ln x|_1^e - \int_1^e 1 \mathrm{d}x + (e+1) \cdot 1 - \frac{1}{2}((e+1)^2 - e^2) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

四、 证明题（2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a+)$ 与 $f(b-)$ 都存在，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续。

证明：定义函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(a+), & x=a, \\ f(x), & x\in(a,b), \\ f(b-), & x=b. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，知 $\tilde{f}(x)$ 在 (a,b) 连续。

$$\lim_{x\to a^+}\tilde{f}(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a^+)=\tilde{f}(a).$$

$$\lim_{x\to b^-}\tilde{f}(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b^-)=\tilde{f}(b).$$

因此，$\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续。所以，$\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 一致连续，$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续。

2. 证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$。

证明：由 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$\frac{\ln(1+x)}{\arctan x}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{\arctan x-\arctan 0}=\frac{\frac{1}{1+\xi}}{\frac{1}{1+\xi^2}}.$$

注意到，$\frac{1}{1+\xi^2}<1$，且 $\xi<x$，因此

$$\frac{\frac{1}{1+\xi}}{\frac{1}{1+\xi^2}}>\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}.$$

因此，

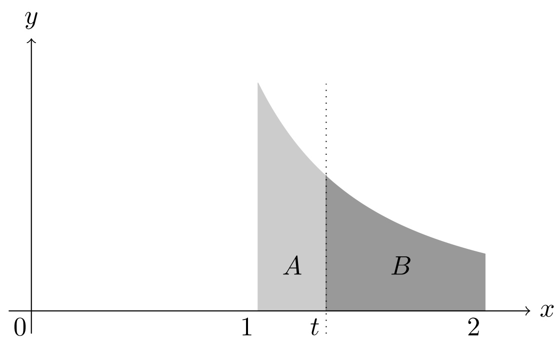
$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}.$$

五、 应用题（本题 9 分）

设由 $y=\frac{1}{x^2}, y=0, x=1, x=2$ 所围成的曲边梯形被直线 $x=t(1<t<2)$ 分成 A,B 两部分，将 A,B 分别绕直线 $x=t$ 旋转，所得旋转体体积分别为 V_A 和 V_B。问 t 为何值时，V_A+V_B 最小?

解:

$$\begin{aligned} V_A &= \int_1^t 2\pi(t-x)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= -2\pi\ \frac{t}{x}\bigg|_1^t - 2\pi\ \ln x\big|_1^t \\ &= 2\pi(t-1) - 2\pi\ln t. \\ V_B &= \int_t^2 2\pi(x-t)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\ \ln x\big|_t^2 + 2\pi t\ \frac{1}{x}\bigg|_t^2 \\ &= 2\pi(\ln 2 - \ln t) + \pi(t-2). \end{aligned}$$



因此，

$$V_A+V_B = 3\pi t - 4\pi\ln t + 2\pi(\ln 2 - 2) =: f(t).$$

由 $f'(t)=3\pi-\frac{4\pi}{t}=0$ 可知，$t=\frac{4}{3}$ 是 $f(t)$ 的极值点，且 $f''\left(\frac{4}{3}\right)>0$ 知其为极小值点。故 $t=\frac{4}{3}$ 时，V_A+V_B 极小。