

诚信应考, 考试作弊将带来严重后果!

华南理工大学期末考试

《线性代数与解析几何》(A)试卷(16-17年度第1学期)

注意事项: 1. 考前请将密封线内填写清楚;

2. 所有答案请直接答在试卷上;

3. 考试形式: 闭卷;

4. 本试卷共 8 大题, 满分 100 分, 考试时间 120 分钟.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评卷人									

一、(15分) 填空题.

1. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 0, 5)$, $\alpha_2 = (-4, -2, 3, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 1, k)$, $\alpha_4 = (-1, 0, 2, 1)$, 则当 $k =$ _____ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

2. 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, $|A| = a$, $|B| = b$, 分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$, 则 $|C| =$ _____.

3. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \geq 2$, 则 $A^n - 2A^{n-1} =$ _____.

4. 设 4 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且 $|A| = 4$, $|B| = 1$, 则 $|A + B| =$ _____.

5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1 - k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$, 则二次型 f 为正定时 k 的取值范围是 _____.

二、(15分) 选择题:

1. 设 A 是 2 阶可逆方阵, 若 $|\lambda A| = 4|A|$, 则必有().

(A) $\lambda = \pm 1$, (B) $\lambda = 4$, (C) $\lambda = \pm\sqrt{2}$, (D) $\lambda = \pm 2$

2. 矩阵 A 一个 r 级子式不为零, 且有一个 $r + 1$ 级子式等于零, 则 $r(A)$ 一定().

(A) $\geq r$, (B) $< r$, (C) $= r$, (D) $= r + 1$.

3. 设 A 为 n 可逆方阵, λ 为 A 的一个特征值, 则 A^* 的特征值之一是().

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$, (B) $\lambda^{-1}|A|$, (C) $\lambda|A|$, (D) $\lambda|A|^n$.

4. 已知 β_1, β_2 是非齐次方程组 $AX = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是齐次方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 设 k_1, k_2 为数域 P 中的任意数, 则 $AX = b$ 的通解为().

(A) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$, (B) $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$,
(C) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$, (D) $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

5. m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q , 使得 $A = PBQ$ 是 A 与 B ()的充分必要条件.

(A) 相似 (B) 合同 (C) 等价 (D) 正交相似

三、(8分)计算行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & x_3 + 1 & \cdots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & x_3^2 + x_3 & \cdots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & x_3^{n-1} + x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

四、(15分)实数 λ 取何值时, 线性方程组:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2. \end{cases}$$

无解? 有唯一解? 有无穷多个解? 若有唯一解求出解; 有无穷多个解时求出通解.

五、(15 分) 在 \mathbb{R}^3 中, 求由基 $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, -1)$, $\varepsilon_3 = (1, -1, 1)$ 到基 $\eta_1 = (1, 1, 0)$, $\eta_2 = (2, 1, 3)$, $\eta_3 = (0, 1, -1)$ 的过渡矩阵, 并求向量 $\xi = (3, 5, 0)$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的坐标.

六、(10分) 求过点 $(1, 0, -1)$, 且平行于向量 $\alpha = 2i + j + k$ 和 $\beta = i - j$ 的平面方程.

七、(15 分) 设3阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的特征值、特征向量; (2) 求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为对角形.

八、(7 分) 证明: 与齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系等价的线性无关的向量组仍然是该齐次线性方程组的基础解系.