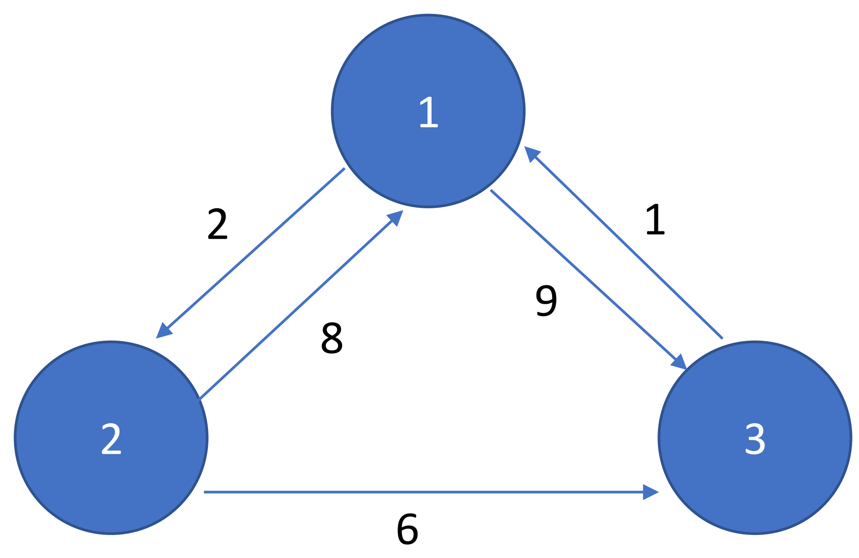
所有点对的最短路径问题

$G=(V,E)$是一个有向图，其中每条边(i,j)有非负长度$l(i,j)$，如果顶点i到顶点j没有边，则$l(i,j)=\infty$。假设$V=\{1,2,\ldots,n\}$，$i\neq j$，定义d_{ij}^{k}是从i到j，并且不经过$\{k+1,k+2,\ldots,n\}$中任何顶点的最短路径长度，则可递归计算

$$d_{ij}^{k}=\begin{cases} l(i,j) & if\ k=0 \\ \min\{d_{ij}^{k-1},d_{ik}^{k-1}+d_{kj}^{k-1}\} & if\ 1\le k\le n\end{cases}$$

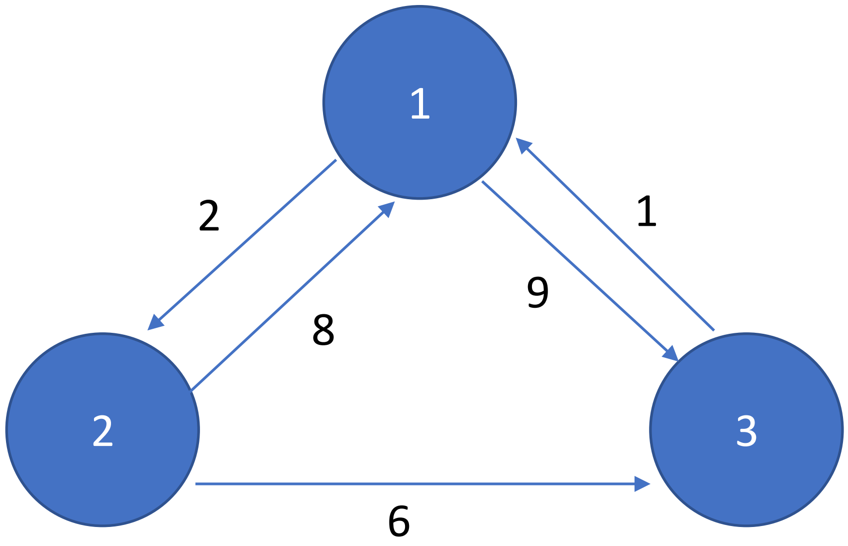


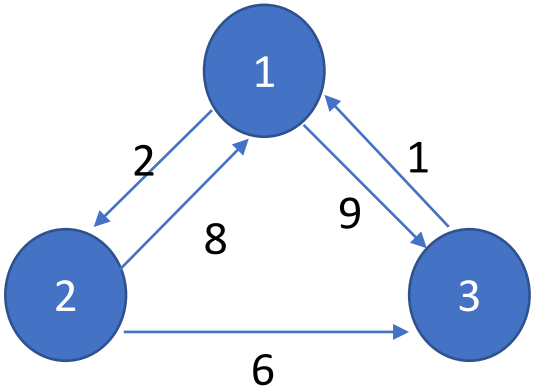
1. 根据下面的有向图，用Floyd算法求所有点对的距离.

Floyd算法

如果$i \neq j$并且(i,j)是G中的边，则置 $D_0[i,j] = l(i,j)$；否则置$D_0[i,j] = \infty$。然后执行n次迭代，在第k次迭中，

$$D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}.$$





Floyd算法

如果$i \neq j$并且(i,j)是G中的边，则置$D_0[i,j] = l(i,j)$；否则置$D_0[i,j] = \infty$。然后执行n次迭代，在第k次迭中，

$$D_k[i,j] = \min\{D_{k-1}[i,j], D_{k-1}[i,k] + D_{k-1}[k,j]\}.$$

D_0	1	2	3
1	0	2	9
2	8	0	6
3	1	∞	0

初始状态

D_1	1	2	3
1	0	2	9
2	8	0	6
3	1	3	0

D[3,2]<D[3,1]+D[1,2]=3,更新D[3,2]

D_2	1	2	3
1	0	2	8
2	8	0	6
3	1	3	0

D[1,3]<D[1,2]+D[2,3]=8,更新D[1,3]

D_3	1	2	3
1	0	2	8
2	7	0	6
3	1	3	0

D[2,1]<D[2,3]+D[3,1]=7,更新D[2,1]

2. 有容量为9的背包，要装入4种体积为2,3,4和5的物品，它们的价值分别为3,4,5和7。在不超出背包容量的前提下，尽可能多地在背包内装入物品，使总价值最大。

KNAPSACK算法

输入：物品集合$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，体积分别为$s_1, s_2,\cdots,s_n$，价值分别为$v_1, v_2,\cdots,v_n$，容量为C的背包。

输出：$\sum_{u_i \in S} v_i$的最大总价值，且满足$\sum_{u_i \in S} s_i \leq C$，其中$S \subseteq U$

for $i \leftarrow 0$ to n

    $V[i, 0] \leftarrow 0$

for $j \leftarrow 0$ to C

    $V[0, j] \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ to n

    for $j \leftarrow 1$ to C

        $V[i, j] \leftarrow V[i-1, j]$

        if $s_i \leq j$ then $V[i, j] \leftarrow \max\{V[i-1, j], V[i-1, j-s_i]+v_i\}$

return $V[n, C]$

$v_1=3$， $v_2=4$ ， $v_3=5$， $v_4=7$
$s_1=2$， $s_2=3$ ， $s_3=4$， $s_4=5$
$C = 9$

$$\text{if } s_i \le j \text{ then } V[i, j] \leftarrow \max\{V[i\text{-}1, j], V[i\text{-}1, j\text{-}s_i]+v_i\}$$

使用动态规划， 求V[4,9]。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0									
2	0									
3	0									
4	0									

初始状态

$v_1=3$， $v_2=4$ ， $v_3=5$， $v_4=7$
$s_1=2$， $s_2=3$ ， $s_3=4$， $s_4=5$
C = 9

if $s_i \le j$ then $V[i, j] \leftarrow \max\{V[i\text{-}1, j], V[i\text{-}1, j\text{-}s_i]+v_i\}$

使用动态规划， 求V[4,9]。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0									
3	0									
4	0									

只考虑第一件物品，容量大于等于2时放入。

$v_1=3$， $v_2=4$ ， $v_3=5$， $v_4=7$
$s_1=2$， $s_2=3$ ， $s_3=4$， $s_4=5$
$C = 9$

$$\text{if } s_i \le j \text{ then } V[i, j] \leftarrow \max\{V[i\text{-}1, j], V[i\text{-}1, j-s_i]+v_i\}$$

使用动态规划，求V[4,9]。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7	7	7	7	7
3	0									
4	0									

考虑第一二件物品。容量为2时，放入第一件物品；容量为3或4时，放入第二件；容量大于4时，放入第一、二件物品。

$v_1=3$， $v_2=4$ ， $v_3=5$， $v_4=7$
$s_1=2$， $s_2=3$ ， $s_3=4$， $s_4=5$
$C = 9$

$$\text{if } s_i \le j \text{ then } V[i, j] \leftarrow \max\{V[i-1, j],\ V[i-1, j-s_i]+v_i\}$$

使用动态规划， 求V[4,9]。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7	7	7	7	7
3	0	0	3	4	5	7	8	9	9	12
4	0	0	3	4	5	7	8	10	11	12

最大价值为12。