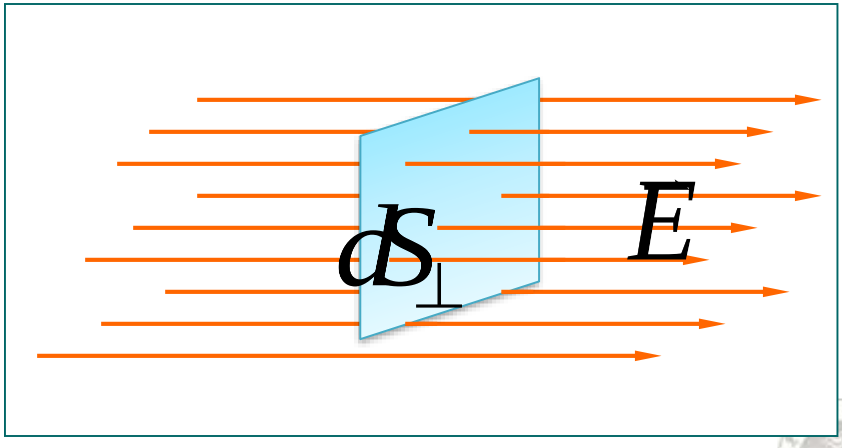
14.3 电通量与高斯定理

➢ 电场线(电场的图示法)

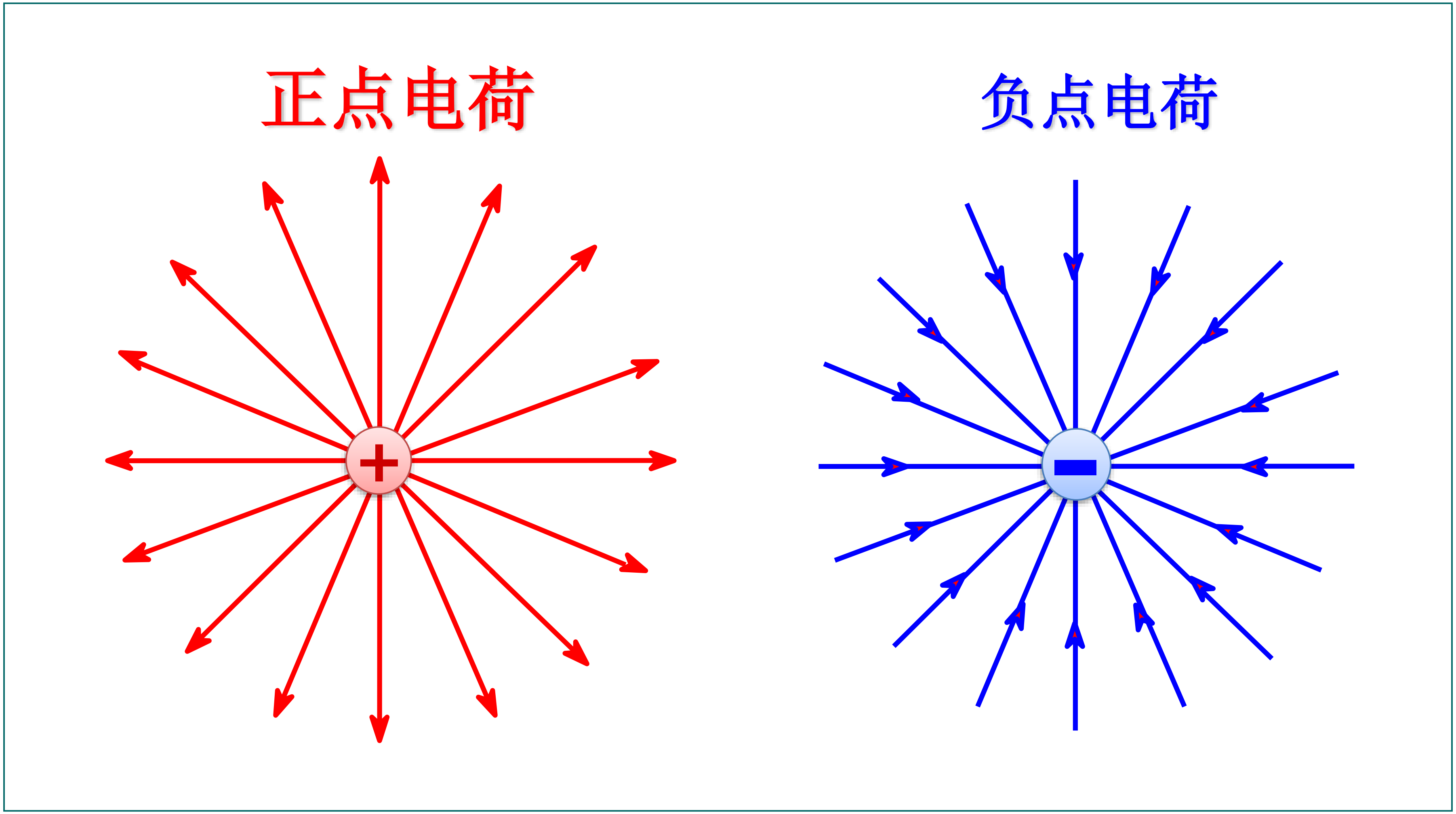
规 定

- 曲线上每一点切线方向为该点电场方向
- 通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小

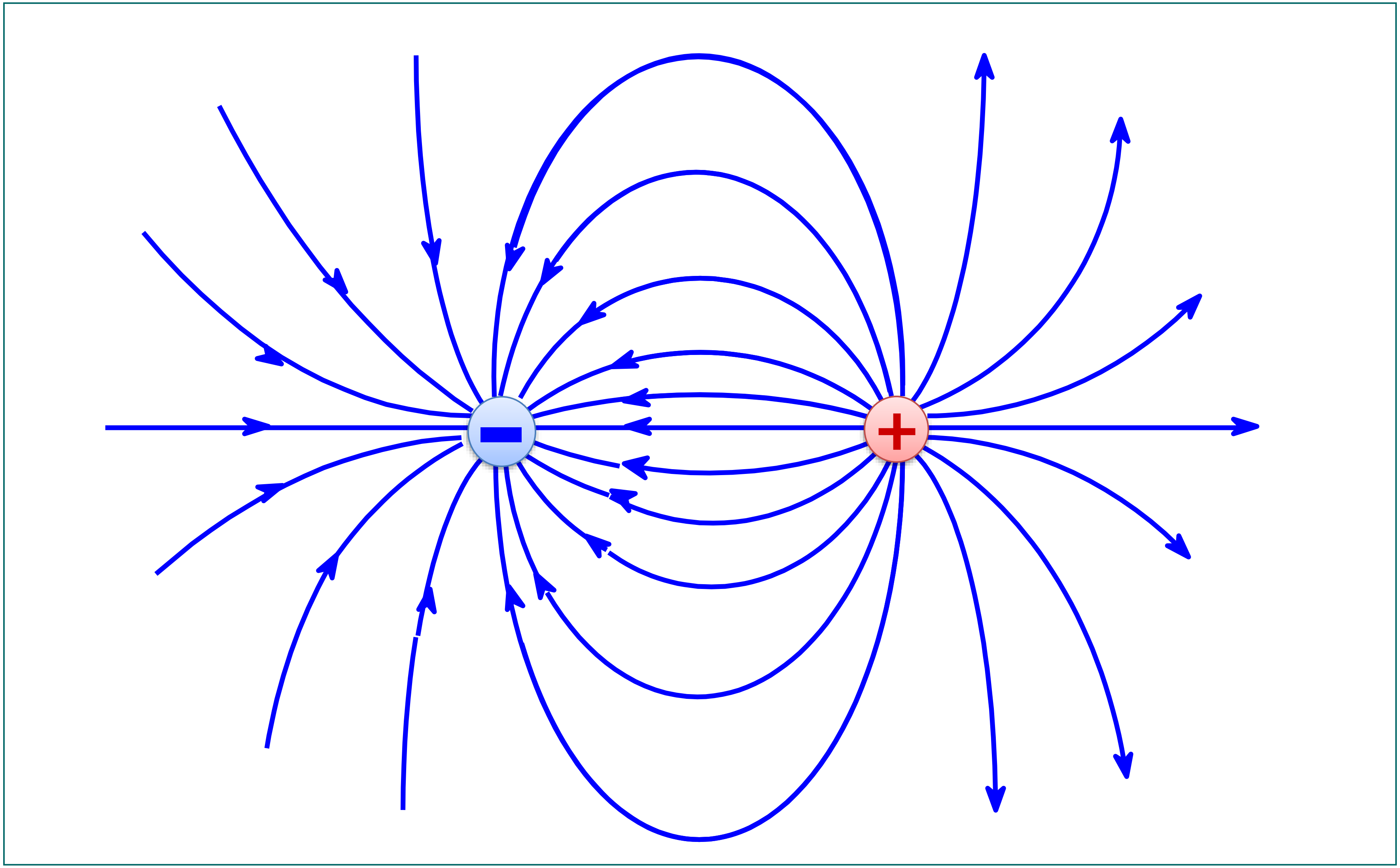
$$|E| = E = \mathrm{d}N/\mathrm{d}S_{\perp}$$



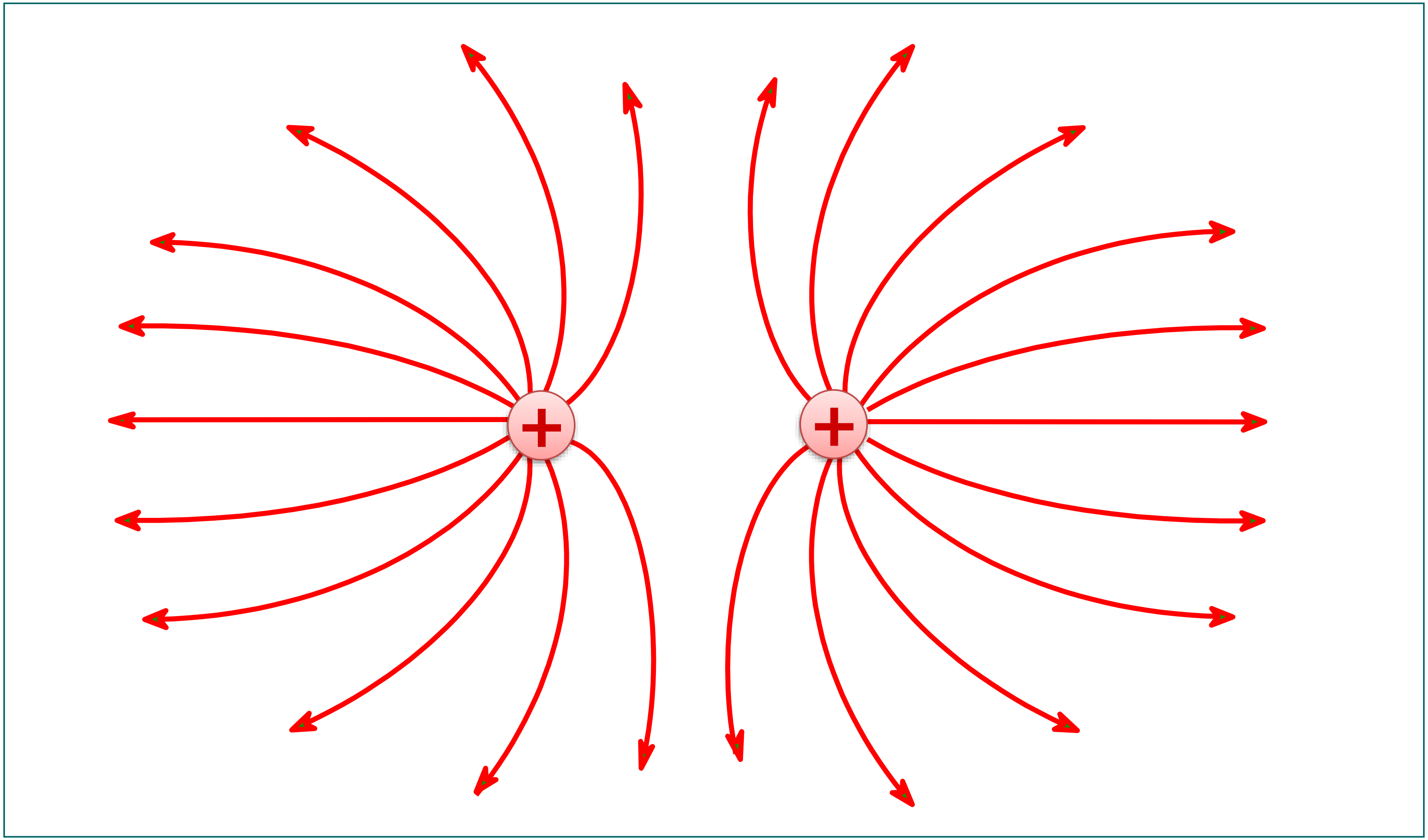
点电荷的电场线



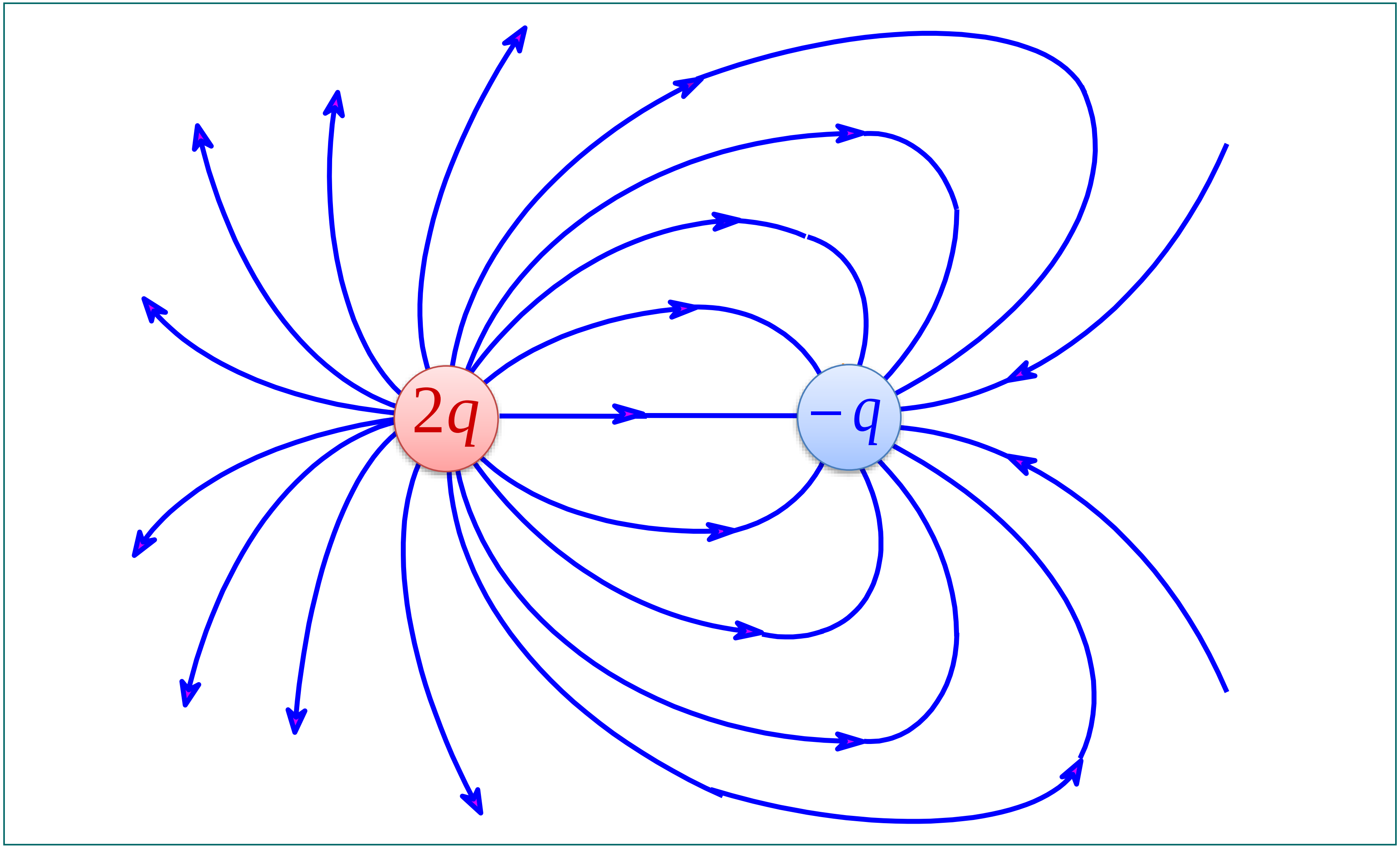
等量异号点电荷的电场线



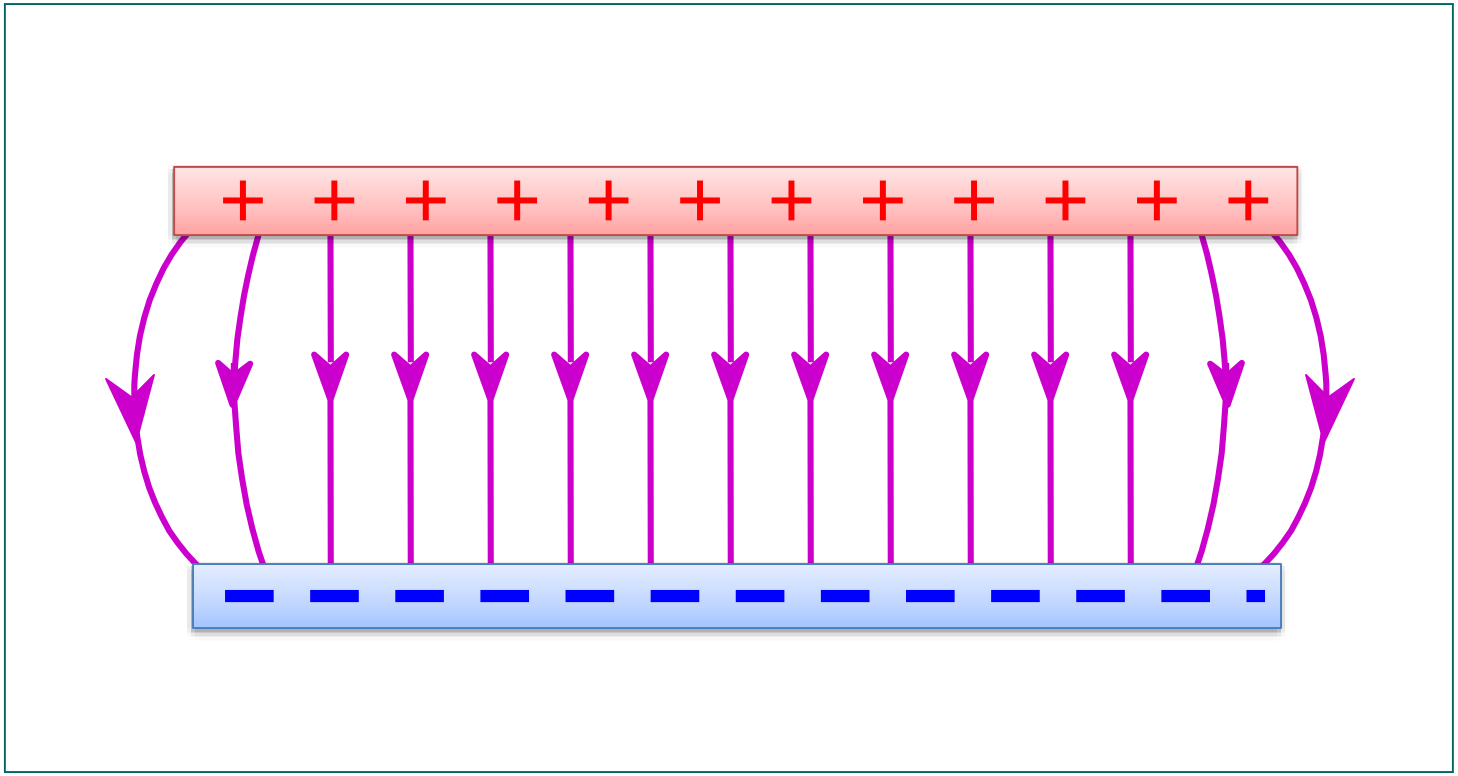
等量正点电荷的电场线



不等量异号电荷的电场线

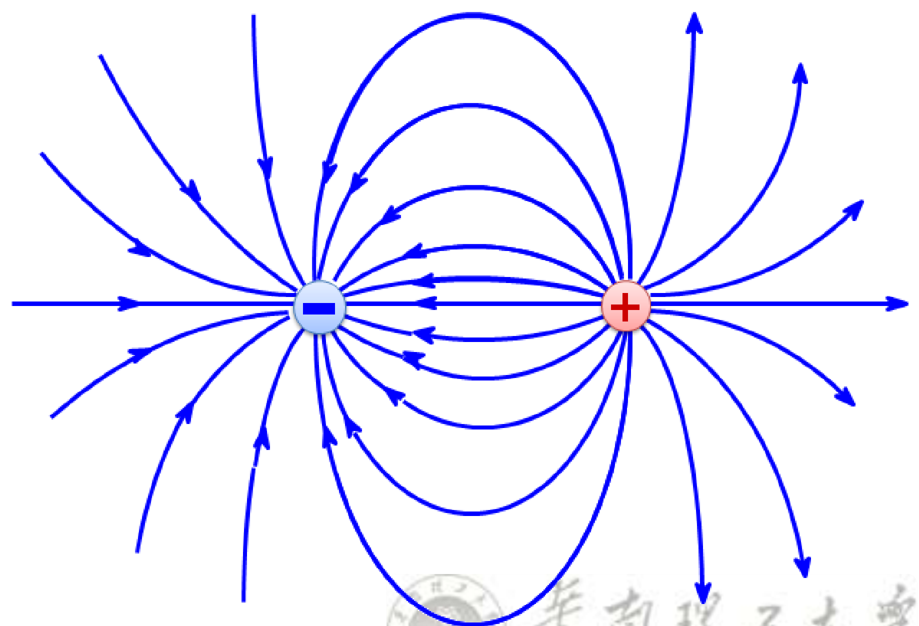


带电平行板电容器的电场线



电场线特性

- 始于正电荷（或来自无穷远），止于负电荷(或去向无穷远)，在没有电荷的地方不中断
- 没有电荷的地方任意两条电场线不相交、不相切
- 电场线不闭合(静电场)
- 电场线密集处，电场强度较大；电场线稀疏处，电场强度较小

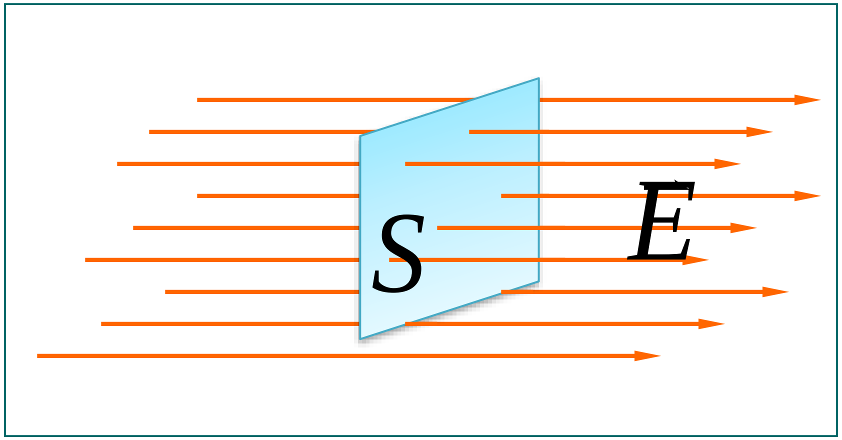


电场强度通量

➢穿过电场中某一个面的**电场线数**叫做这个面的**电场强度通量(电通量)**

- 均匀电场，E垂直于平面

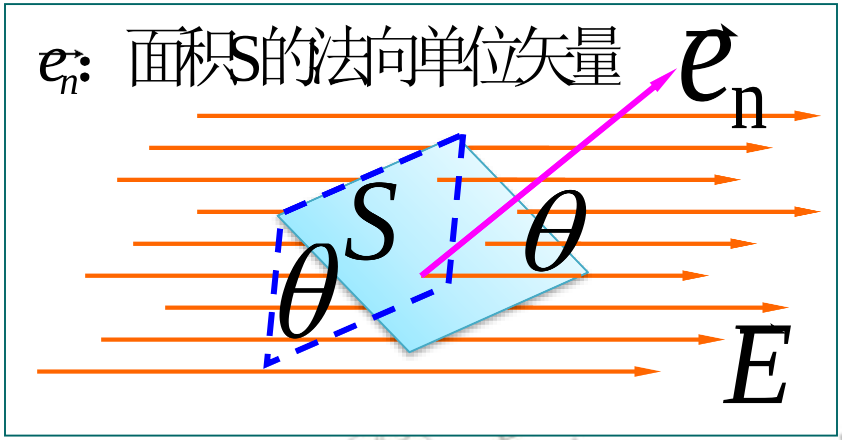
$$\Phi_e = ES$$



- 均匀电场，E与平面夹角 θ

$$\Phi_e = ES\cos\theta$$

$$\Phi_e = E\cdot S$$



任意曲面的电通量

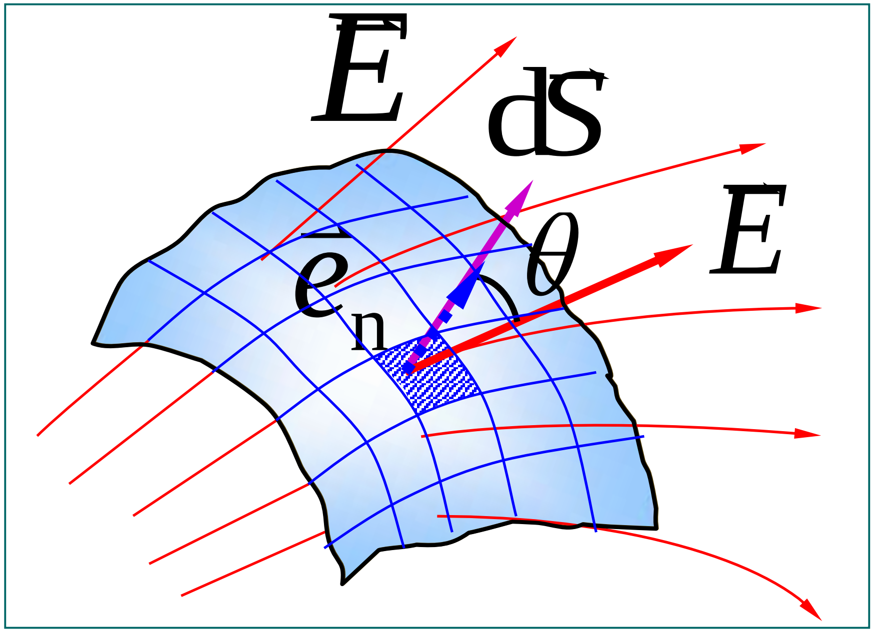
□非均匀电场的电通量

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{S}=\mathrm{d}S\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}}=\int\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}}=\int_{S}E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

$$\Phi_{\mathrm{e}}=\int_{S}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



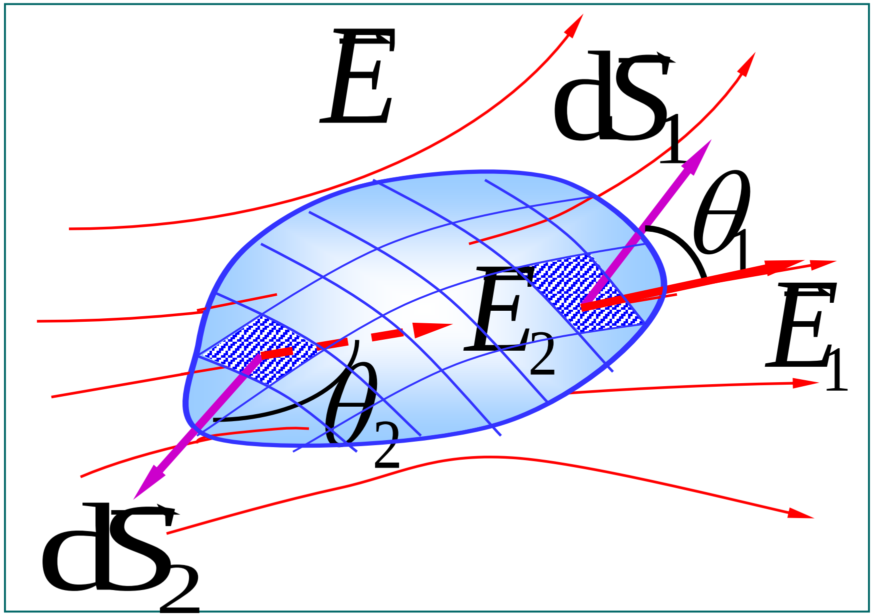
□对于不闭合的任意曲面，面积元 的单位法向矢量可取曲面的任一侧

□对于闭合曲面，通常规定自闭合曲面内部指向外部的方向为面积元 的正法线方向

□ 闭合曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

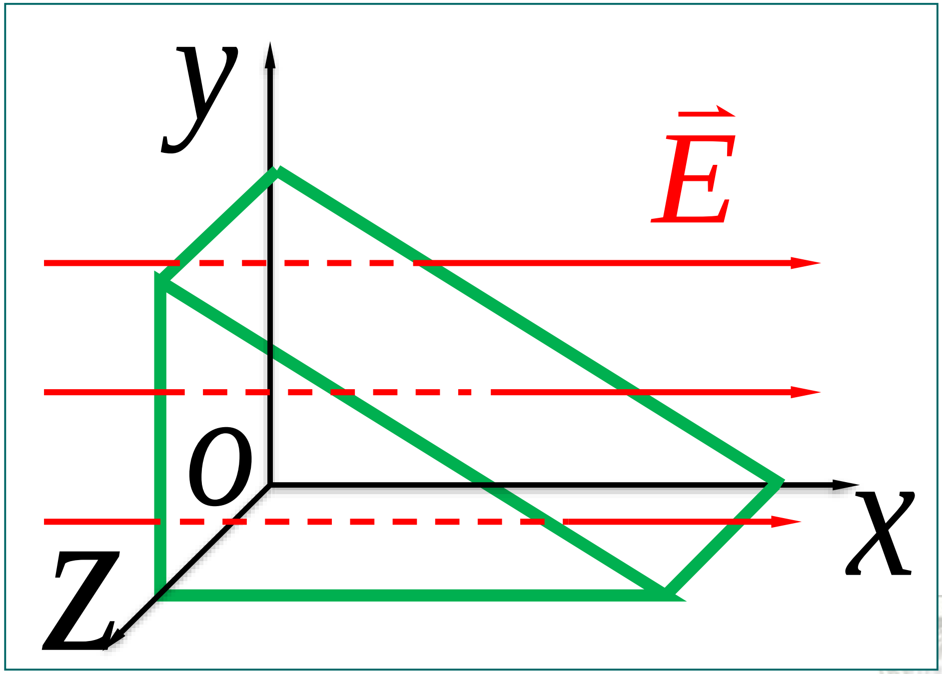


对于$\mathrm{d}S_1$， $\theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}\Phi_{e1} > 0$

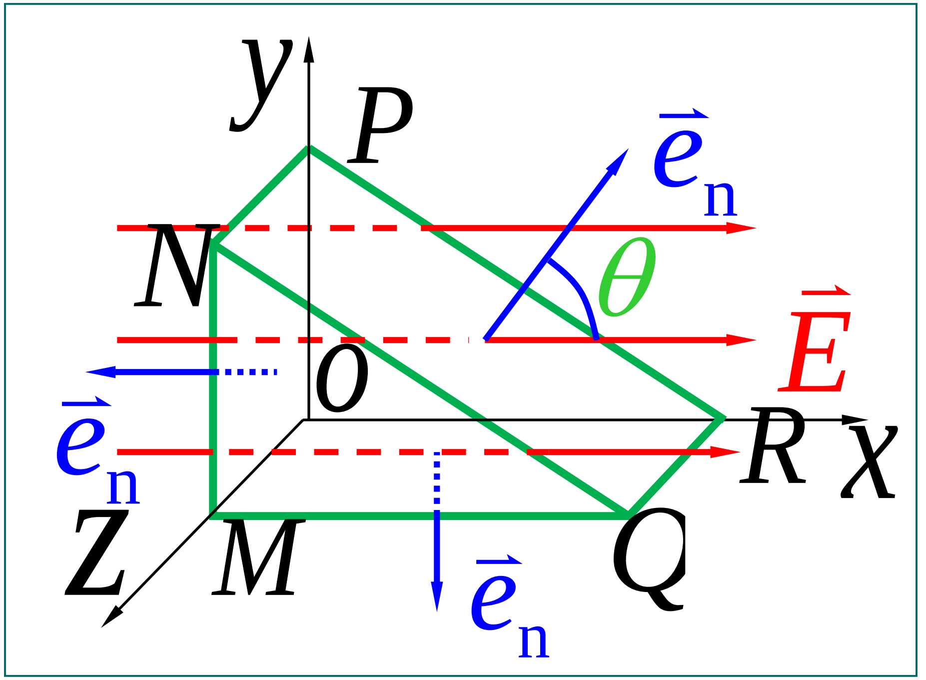
对于$\mathrm{d}S_2$， $\theta_2 > \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}\Phi_{e2} < 0$

例1

如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度 $\vec{E}=200\vec{i}\,\mathrm{N\cdot C^{-1}}$ 的匀强电场中，求通过此三棱柱体的电场强度通量。



解： $\Phi_{e}=\Phi_{e前}+\Phi_{e后}+\Phi_{e左}+\Phi_{e右}+\Phi_{e下}$



$$\left\{\begin{aligned} &\Phi_{e前}=\Phi_{e后}=\Phi_{e下}=\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \\ &\Phi_{e左}=\int_{S左}\vec{E}\cdot d\vec{S}=ES_{左}\cos\pi=-ES_{左} \\ &\Phi_{e右}=\int_{S右}\vec{E}\cdot d\vec{S}=ES_{右}\cos\theta=ES_{左} \end{aligned}\right.$$

$$\Phi_{e}=\Phi_{e前}+\Phi_{e后}+\Phi_{e左}+\Phi_{e右}+\Phi_{e下}=0$$

高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0。

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

请思考：

- 高斯面上的电场强度 $\vec{E}$ 与哪些电荷有关？
- 哪些电荷对高斯面的电通量 Φ_{e} 有贡献？

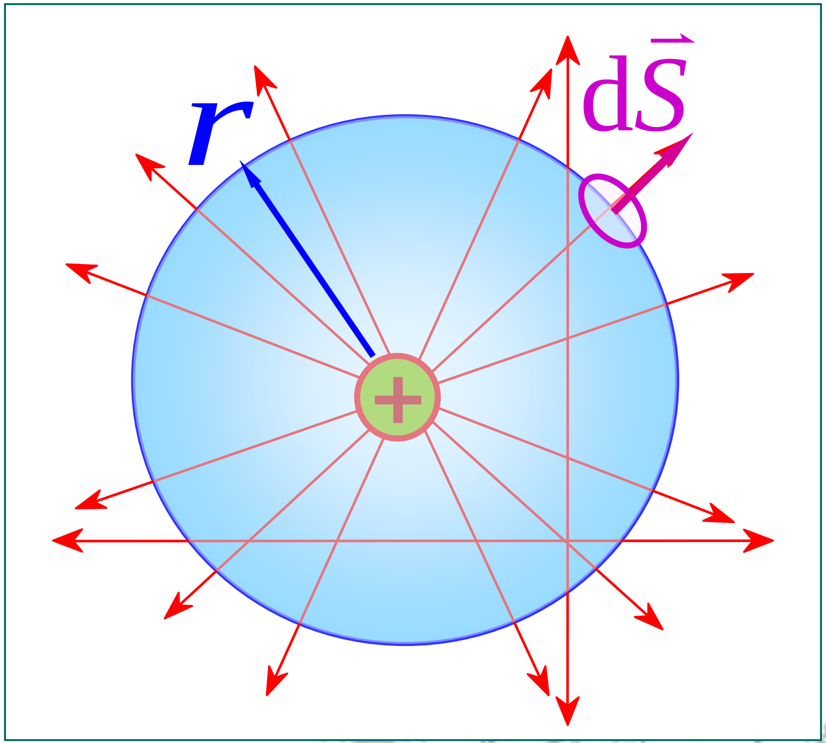
高斯定理的导出 $\begin{cases} \text{库仑定律} \\ \text{电场强度叠加原理} \end{cases}$

➢点电荷位于球面中心

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$$

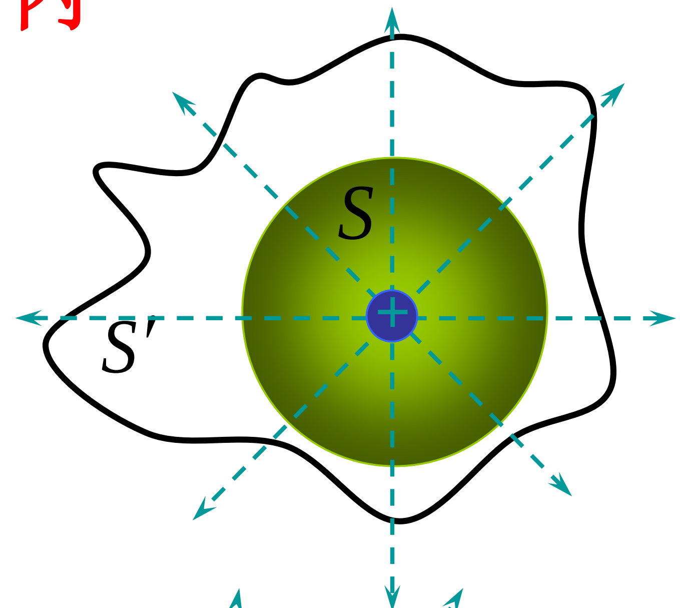
$$\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



➢点电荷在任意形状的高斯面内

通过球面S的电场线也必通过任意曲面S’，即它们的通量相等，为q/ε_0

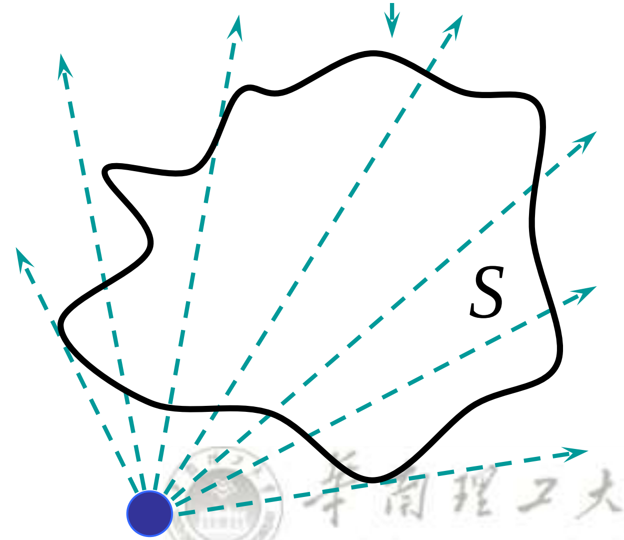
$$\Phi_e = \oint_{S'} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



➢电荷q 在闭合曲面以外

穿进曲面的电场线条数等于穿出曲面的电场线条数。

$$\Phi_e = \oint_{S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$



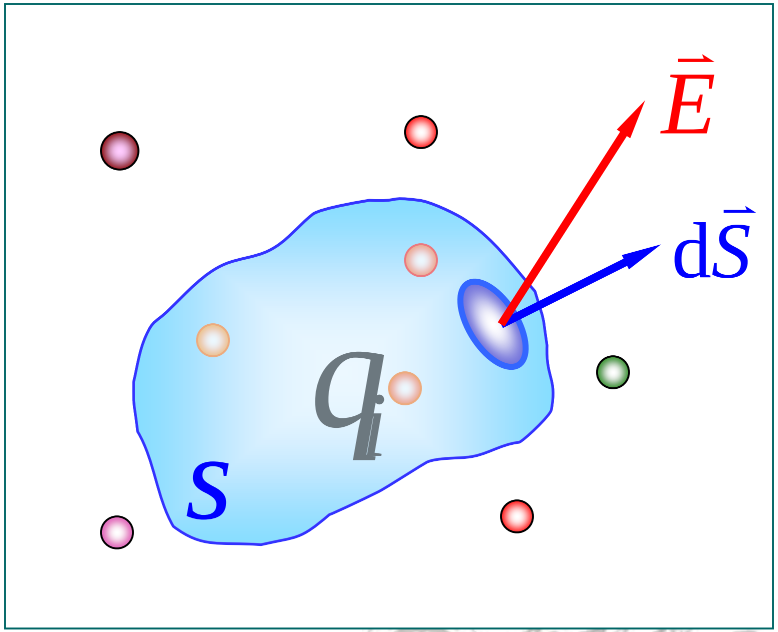
➢点电荷系的电场 （电场强度的叠加原理）

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2\cdot d\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_n\cdot d\vec{S}$$

$$= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \cdots + \Phi_{en}$$

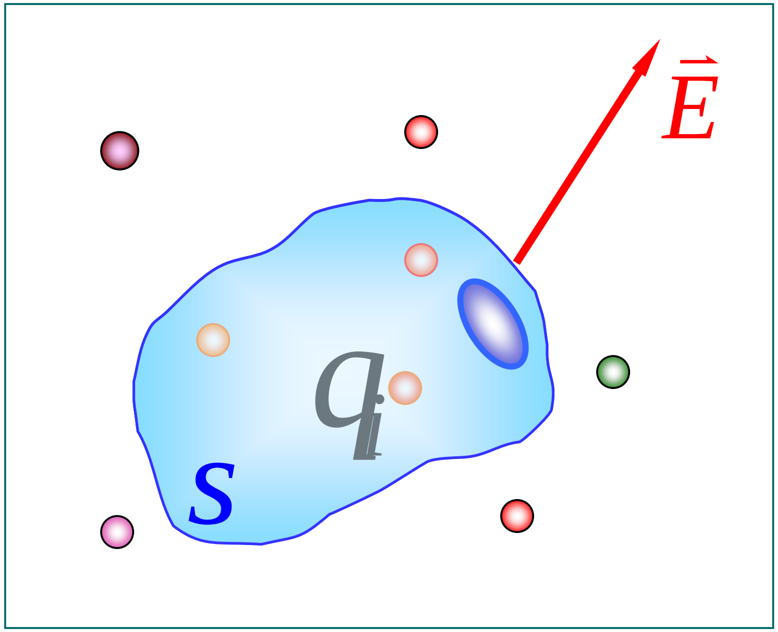
$$\Phi_{ei}^{out} = 0 \qquad \Phi_{ei}^{in} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_i^{in}$$

$$\therefore \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i^{in}$$

闭合面外的电荷对通过闭合面的电场强度通量没有贡献，但是对闭合面上各点的电场强度是有贡献的，即闭合面上各点的电场强度是由闭合面内、外所有电荷共同激发的。



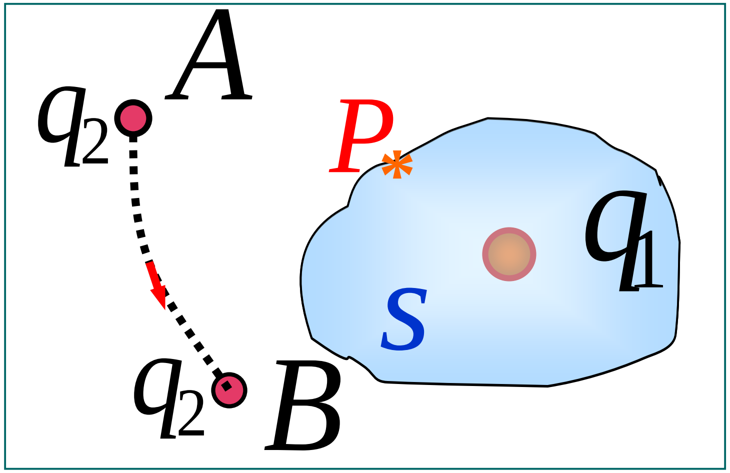
高斯定理将静电场与场源电荷联系了起来，揭示了静电场是有源场这一普遍性质。

讨论

◆ 将q_2从A移到B,

点P电场强度是否变化?

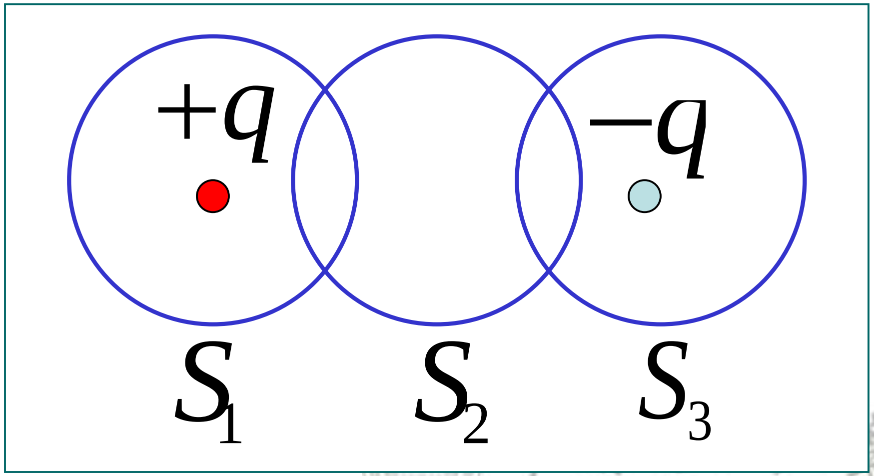
穿过高斯面S的Φ_e有否变化?



◆ 在点电荷$+q$和$-q$的静电场中，做如下的三个闭合面S_1, S_2, S_3,求通过各闭合面的电通量。

$$\Phi_{e1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0 \qquad \Phi_{e3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



用高斯定理求解的静电场必须具有一定的**对称性**

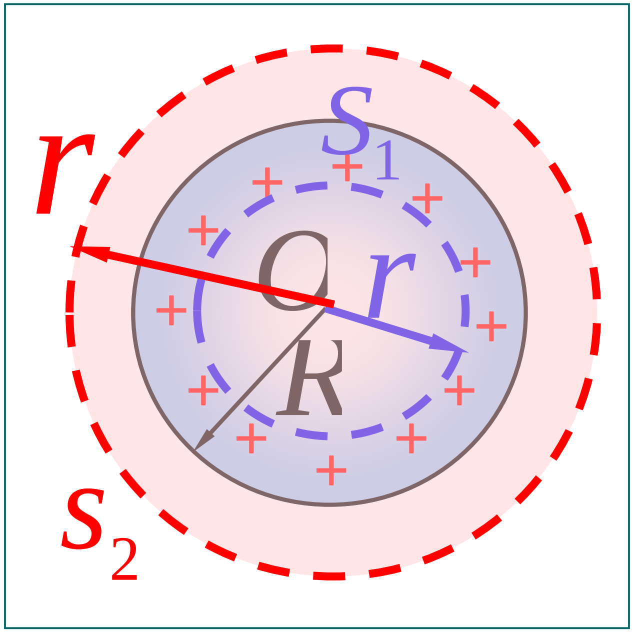
其步骤为：

- □ 对称性分析
- □ 根据对称性选择合适的高斯面
- □ 高斯面上场强处处相等或分区域相等；或者部分高斯面上的通量为零，部分高斯面上的场强相等
- □ 应用高斯定理计算

例2

求均匀带电球壳的电场强度。

一半径为 R，均匀带电Q的薄球壳，求球壳内外任意点的电场强度。



解：(1) $0<r<R$

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$

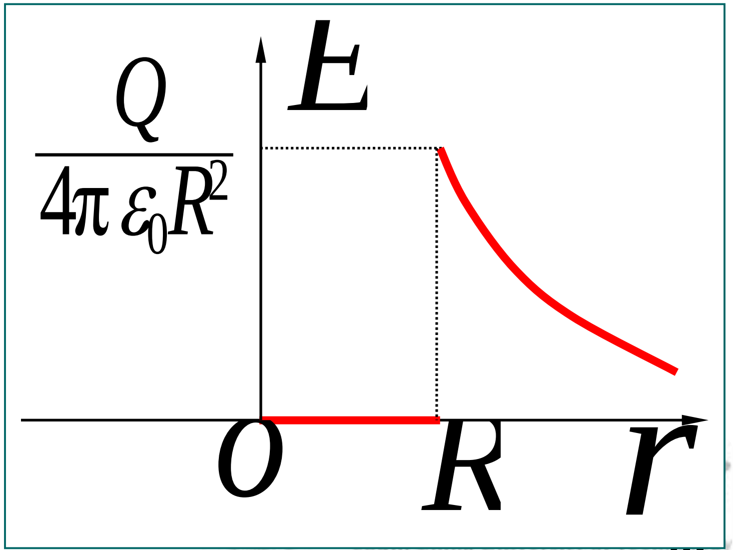
$$\boxed{E=0}$$

(2) $r>R$

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

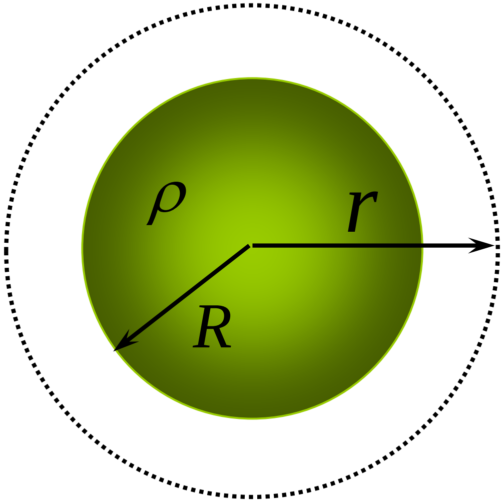


例3

求均匀带电球体的场强分布。（已知球体半径为R，带电荷为q，电荷密度为ρ）

解：(1) 球外某点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

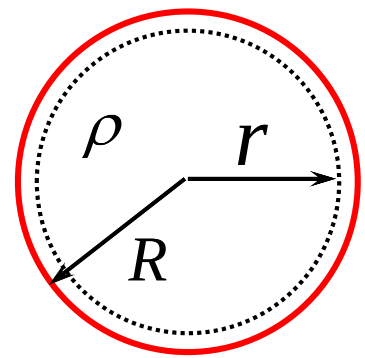


$$E\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

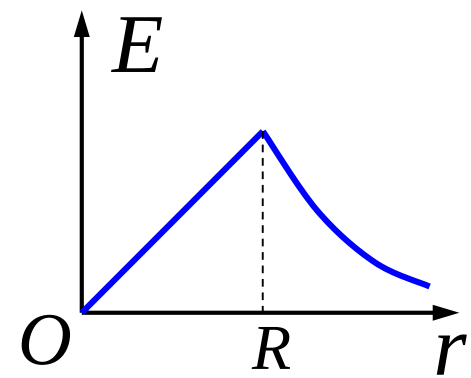
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

(2) 球体内一点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_o} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$



$$E\oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{4\pi R^3/3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$



$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad (r < R)$$

例4

求无限长均匀带电直线的电场强度。

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为λ，求距直线为r处的电场强度。

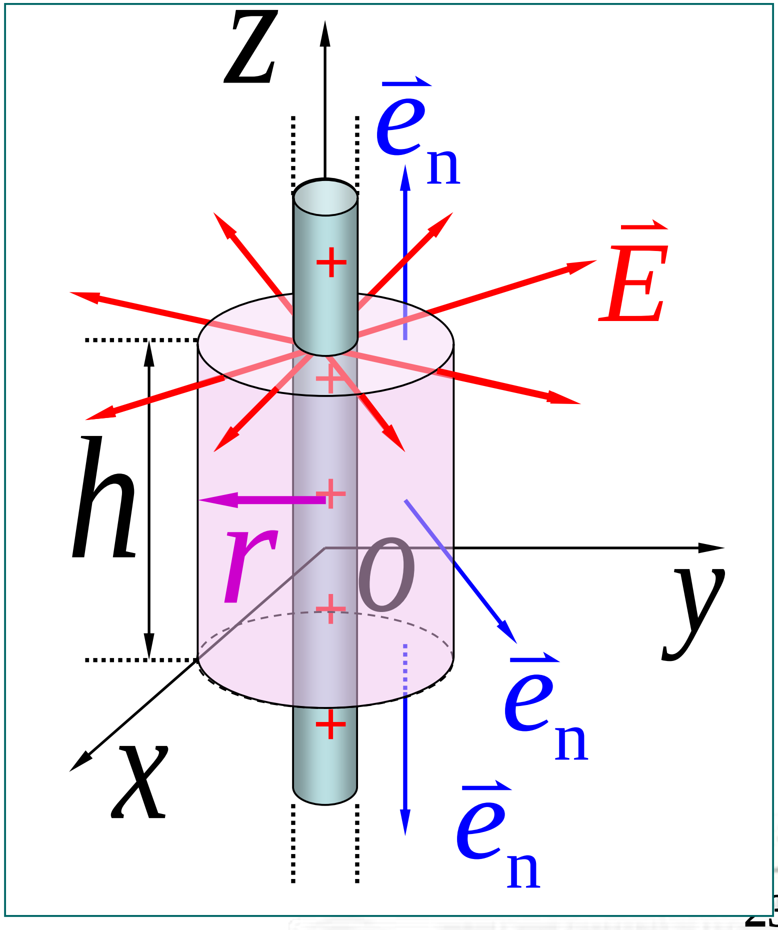
解：对称性分析：**轴对称**

选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$\int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(\text{上底})} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(\text{下底})} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

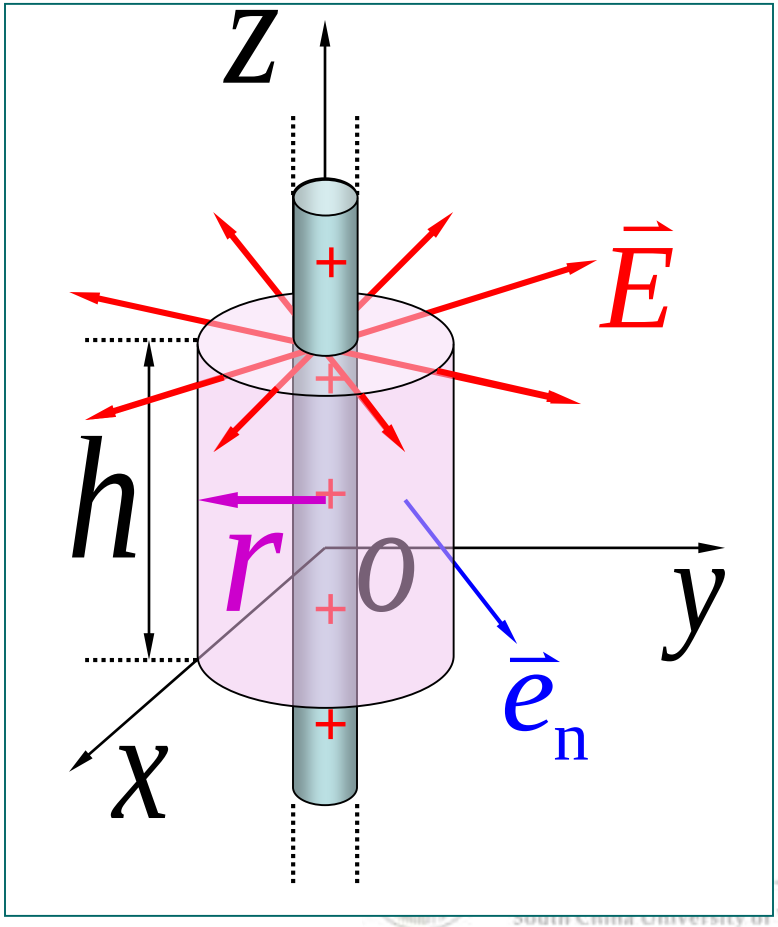
$$= \int_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s(\text{柱面})} E\,dS = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



例5

求无限大均匀带电平面的电场强度。

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解: 对称性分析: E 垂直平面

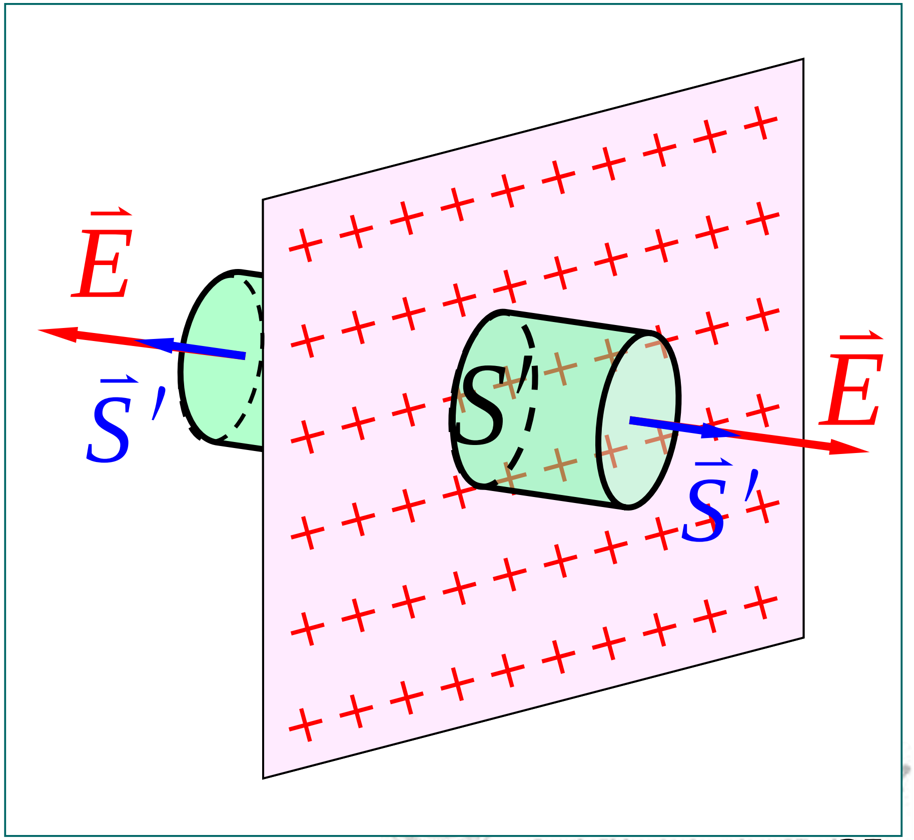
选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

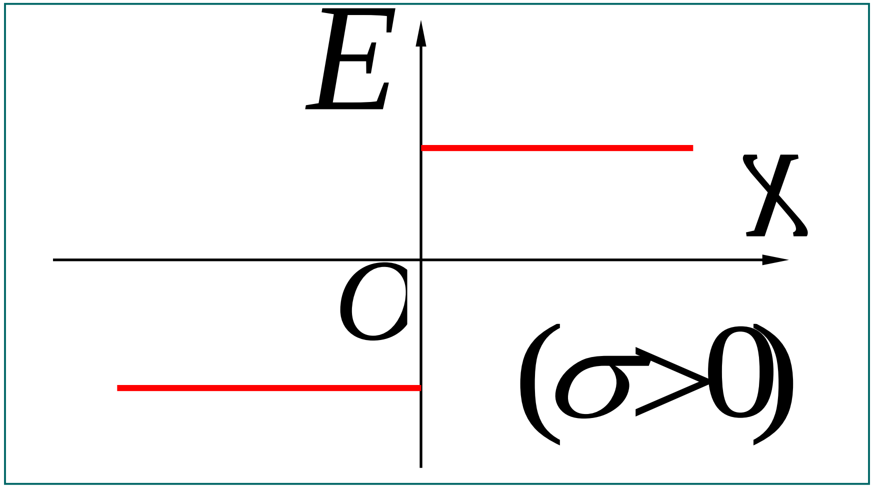
底面积

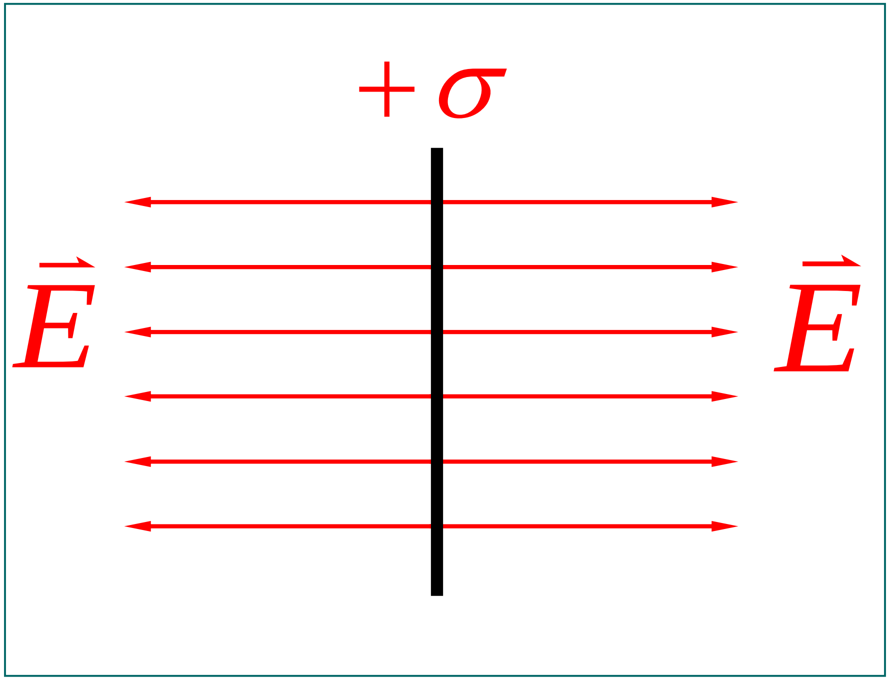
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

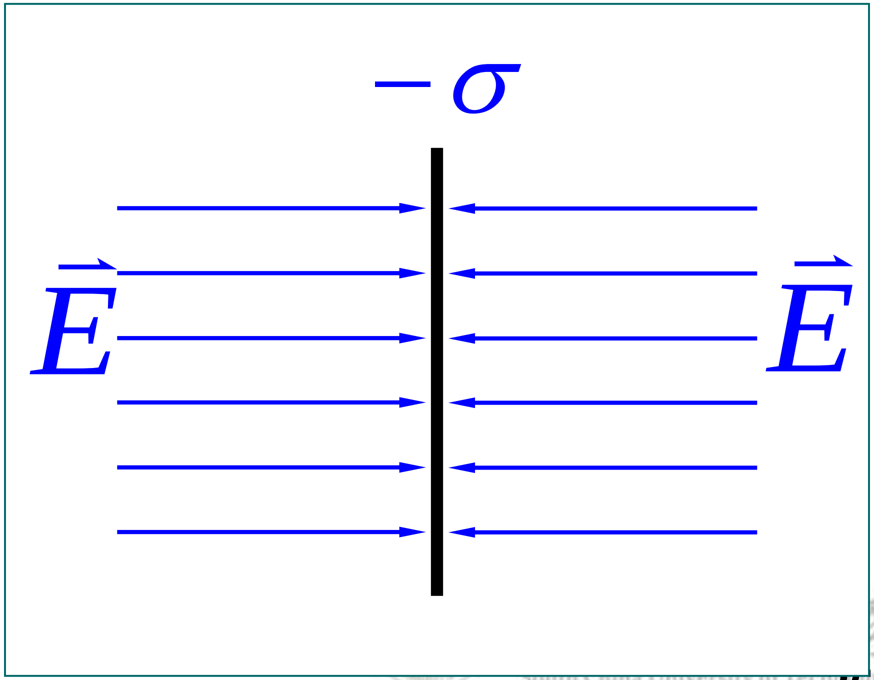
$$\boxed{E = \sigma / 2\varepsilon_0}$$



$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

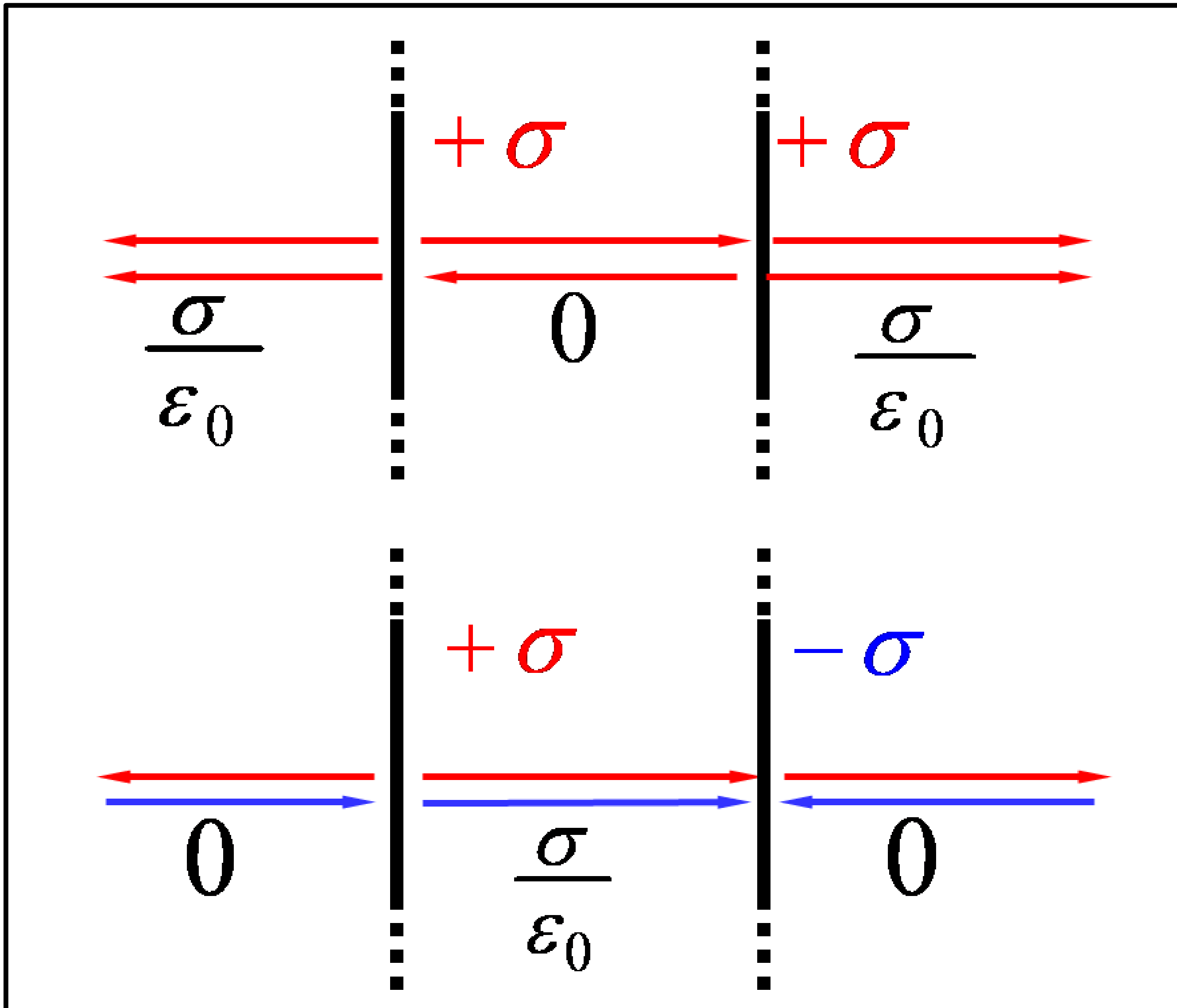






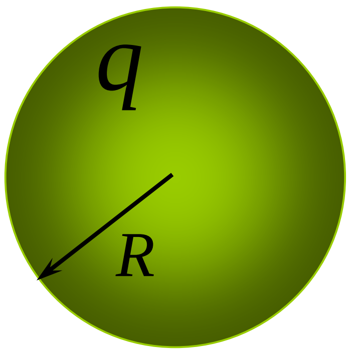
讨论

无限大带电平面的电场叠加问题



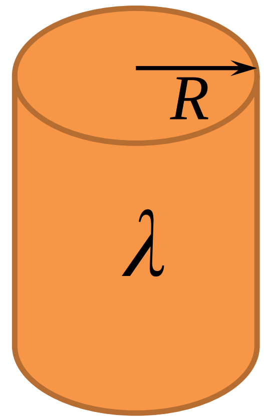
带电几何体的场强

带电球体



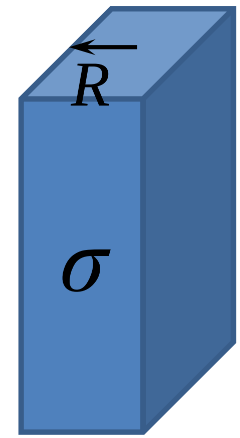
$$E=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,(r\le R)\\[2ex]\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,(r>R)\end{cases}$$

无限长圆柱体

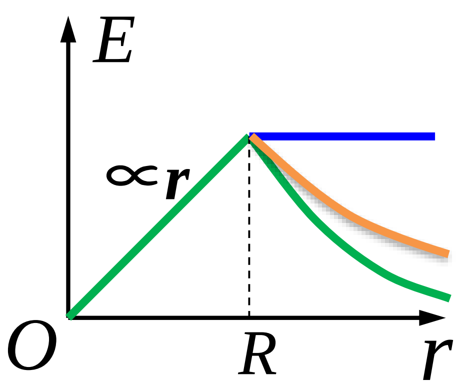


$$E=\begin{cases}\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\,(r\le R)\\[2ex]\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,(r>R)\end{cases}$$

无限大平板



$$E=\begin{cases}\dfrac{\sigma r}{2\varepsilon_0 R}\,(r\le R)\\[2ex]\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,(r>R)\end{cases}$$



$\propto r^{0}$，无限大平板

$\propto r^{-1}$，无限长圆柱体

$\propto r^{-2}$，球体

磁感强度也有类似的规律，请对比记忆。

➢用高斯定理计算电场强度的步骤

- □ 从电荷分布的对称性来分析电场强度的对称性，判定电场强度的方向。
- □ 根据电场强度的对称性特点，作相应的高斯面（通常为球面、圆柱面等），使高斯面上各点的电场强度大小相等。
- □ 确定高斯面内所包围的电荷之代数和。
- □ 根据高斯定理计算出电场强度大小。