座位号________ 专业班级________ 学院________ 学号 □□□□□□□□□□□□ 姓名________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科生期末考试

2019-2020-1 学期《线性代数与解析几何》B 卷

注意事项：1. 开考前请将密封线内各项信息填写清楚；
2. 所有答案请直接答在试卷上；
3．考试形式：闭卷；
4. 本试卷共 八大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

评阅教师请在试卷袋上评阅栏签名

一 填空题：共 6 题，每题 3 分，共 18 分。

得分一

1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $A^2-2A+E=0$，则 $A^{-1}=$ __2E−A__.

2. 由 m 个 n 维向量组成的向量组，当 __m>n__ 时，向量组一定线性相关.

3. 当 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时, $A^6=E$. $A^{11}=$ __$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$__

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+kx_2+x_3=0\\ 2x_1+x_2+x_3=0\\ kx_2+3x_3=0\end{cases}$ 只有零解, 则 k 应满足的条件是 __$k\neq\frac{3}{5}$__

5. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似, 则 $x=$ __0__, $y=$ __1__

6. 当 t 满足 __$-\frac{4}{5}<t<0$__ 时, 实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$ 是正定的.

二 选择题：共 6 题，每题 3 分，共 18 分。

得分二

1. 设 A、B 为同阶可逆矩阵, 则（ D ）

(A) $AB = BA$　　(B) 存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$

(C) 存在可逆矩阵 C, 使 $C^T AC = B$　　(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q, 使 $PAQ = B$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} - a_{21} & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 设有 $P_2 P_1 A = B$, 则 $P_2 =$ （ B ）

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可以表示成（ C ）.

(A) 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 等价的向量组　　(B) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等秩向量组

(C) $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$　　(D) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

4. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, ξ, η 是 A 的分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 则(C)

(A) 对任意数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$，$k_1\xi + k_2\eta$ 都是 A 的特征向量.

(B) 存在常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$，$k_1\xi + k_2\eta$ 是 A 的特征向量.

(C) 当任意数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ 时，$k_1\xi + k_2\eta$ 不可能是 A 的特征向量.

(D) 存在惟一的一组常数 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$，使 $k_1\xi + k_2\eta$ 是 A 的特征向量.

5. 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵，k_1，k_2 是任意两个实数，则(A)是正定矩阵.

(A) $A^* + B^*$　(B) $A^* - B^*$　(C) $A^* B^*$　(D) $k_1 A^* + k_2 B^*$

6. 设 $a > 0, b > 0, c > 0$，由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 表示的曲面为（ B ）.

(A) 单叶双曲面　(B) 双叶双曲面　(C) 二次锥面　(D) 椭球面

得分三

三 (8 分) 计算 n（$n\ge 2$）阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$设 D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1级)}$$

$$=xD_{n-1}+a_0=\cdots=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

得分四

四 (10 分) 求点到直线的距离和平面方程

（1）求点 M(1，0，1)到直线 $\begin{cases} x=y \\ 3x-z=0 \end{cases}$ 的距离.

（2）已知点 A(2,8,5)和 B(-1,2,-3)，求线段 AB 中垂面的方程.

解 点 O(0,0,0) 是直线上的点。

直线的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ ， $\vec{s}\times\overrightarrow{OM}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}-$

点 M 到直线的距离$=\dfrac{\left|\vec{s}\times\overline{OM}\right|}{|\vec{s}|}=\dfrac{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}}=\sqrt{\dfrac{6}{11}}$

（2）设平面上动点坐标为 $P(x,y,z)$． 则

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}$$

所求平面方程为：$6x+12y+16z-79=0$

得分五

五 (15 分) 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\lambda)x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

对λ不同值，讨论方程组解的情况，有解时用特解和导出组的基础解系表示出方程组所有解.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \end{array}\right)$$ (+5分)

当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1 = k_1 - 2k_2 - 1 \\ x_2 = -3k_1 + 2k_2 + 2 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ k_1, k_2是任意常数 （+5分）

当$\lambda \neq \dfrac{1}{2}$时，$\tilde{A} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = 2k - 1 \\ x_3 = k + 1 \\ x_4 = k \end{cases}$$

通解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ k是任意常数 （+5分）

得分六

六 （10 分）已知向量组 $\alpha_1=(1,-1,\ 2,\ 4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,\ 2,\ -2,0)$，$\alpha_5=(2,\ 1,\ 5,0)$

(1) 求该向量组的秩.

(2) 求该向量组的包含 α_1, α_2 在内的极大线性无关组, 并将其余向量由该极大线性无关组线性表示.

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T\right)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&2&1\\2&1&7&-2&5\\4&2&14&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$ （+3 分）

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩 $=4$ （+2 分）

(2) 包含 α_1,α_2 的极大线性无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ （+2 分）

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4+k_4\alpha_5=\alpha_3$

$$\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T,\alpha_3^T\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&2&3\\-1&3&2&1&0\\2&1&-2&5&7\\4&2&0&0&14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2&3\\0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}k_1=3\\k_2=1\\k_3=0\\k_4=0\end{cases}\quad \text{得到}\quad \alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$$ （+3分）

得分七

七 (15 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 C 使 C^TAC 为对角矩阵

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\0&-2\lambda+10&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0$$

得：$\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$ （+7 分）

将 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 可求得属于特征值 5 的且正交化、单位化的两个特征向量为：

$\eta_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T,\eta_2=(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6})^T$ （+4 分）

属于特征值-4 的一个单位化的特征向量为：

$\eta_3=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$ （+2 分）

所求正交矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$C^TAC=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$ （+2 分）

八 (6 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 证明: 秩$(A)=n$ 的充分必要条件是存在一个 n 阶实矩阵 B, 使 $AB+B^TA$ 是正定矩阵.

得分八

证：“充分性”(反证法)

反设 $r(A)<n$，则$|A|=0$. 于是$\lambda=0$是 A 的特征值, 假设相应的特征向量为α，即

$A\alpha=0\ (\alpha\neq 0)$，所以 $\alpha^TA^T=0$.

所以 $\alpha^T(AB+B^TA)\alpha=\alpha^TAB\alpha+\alpha^TB^TA\alpha=0$, 和 $AB+B^TA$是正定矩阵矛盾;（+3 分）

“必要性”

因为 $r(A)=n$，所以 A 的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全不为 0.

取 $B=A$，则 $AB+B^TA=AA+AA=2A^2$，它的特征值为$2\lambda_1^2,2\lambda_2^2,\cdots,2\lambda_n^2$全部为正,

所以$AB+B^TA$是正定矩阵. （+3 分）