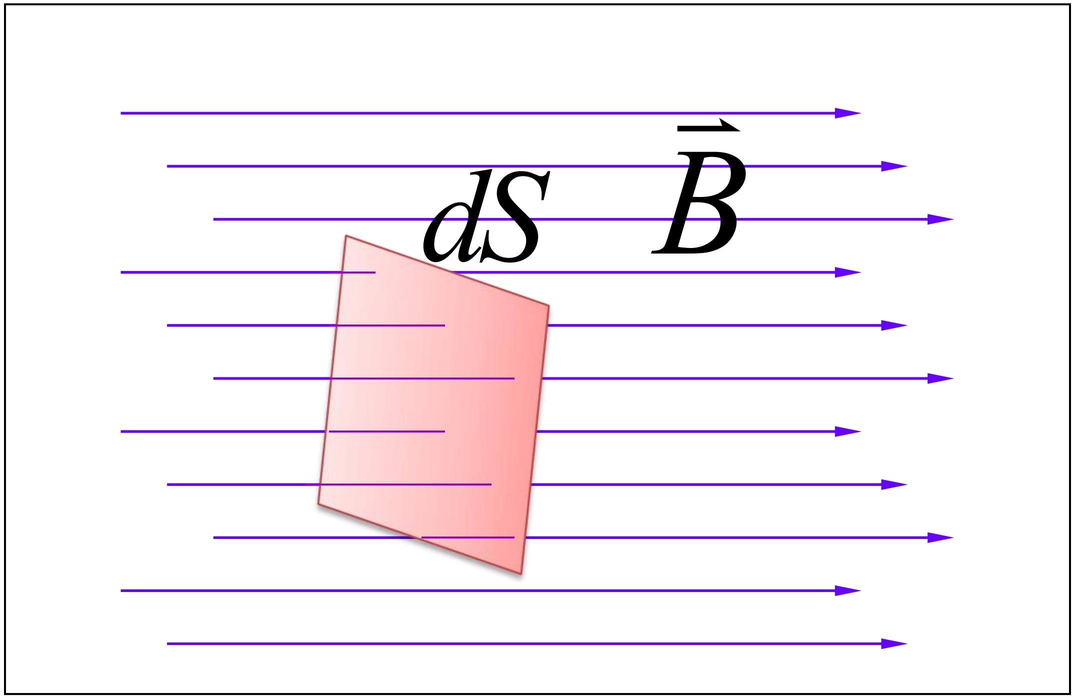
16.5 磁场的高斯定理&安培环路定理

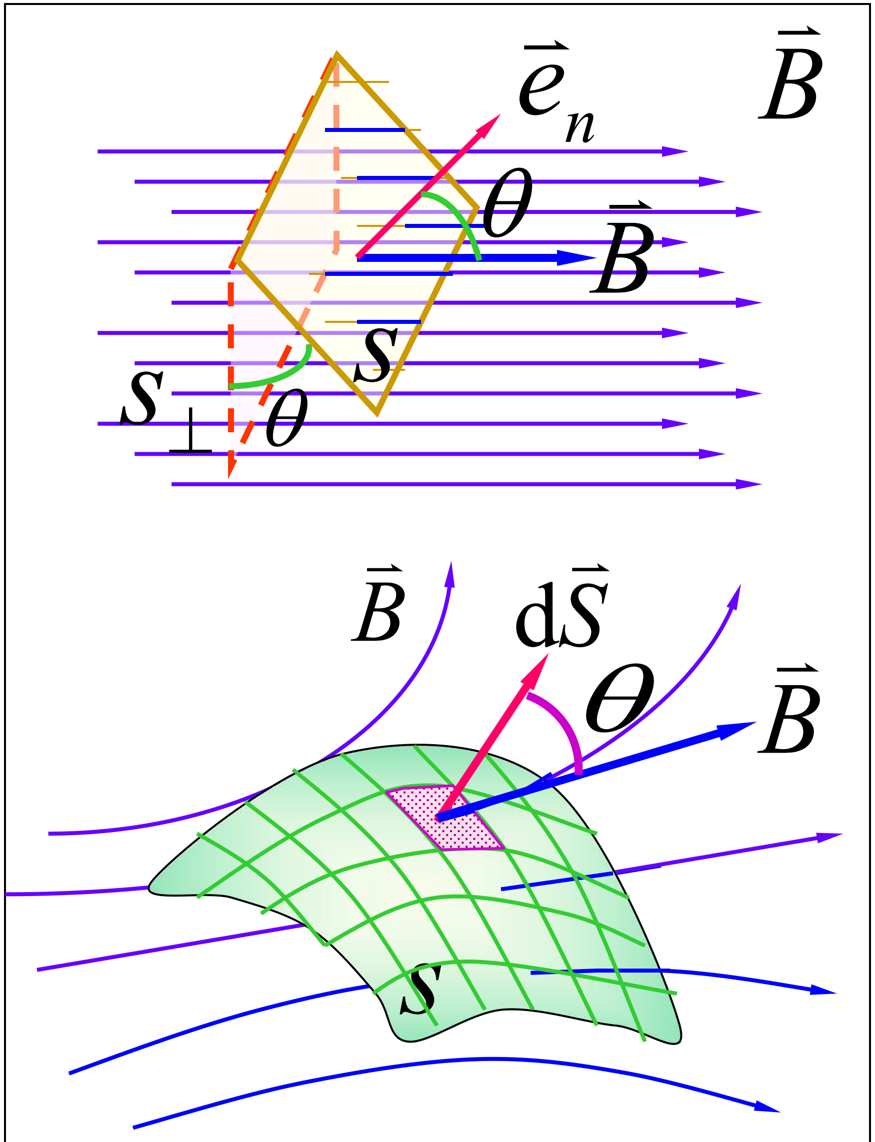
➢磁感强度&磁感线

磁场中某点处垂直 $\vec{B}$ 矢量的单位面积上通过的磁感线数目等于该点 $\vec{B}$ 的数值。



$$B = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

磁通量



- **磁通量**：通过某一曲面的磁感线数

匀强磁场

$$\Phi = BS\cos\theta = BS_\perp$$

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot S\vec{e}_n$$

非匀强磁场

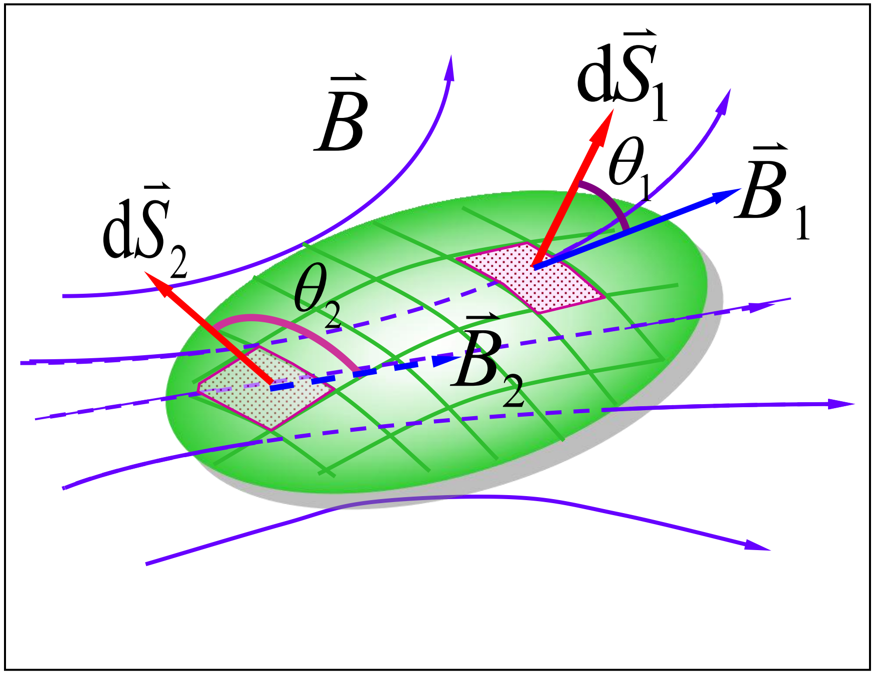
$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

单位：$1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{T}\times 1\mathrm{m}^2$

磁场的高斯定理



$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

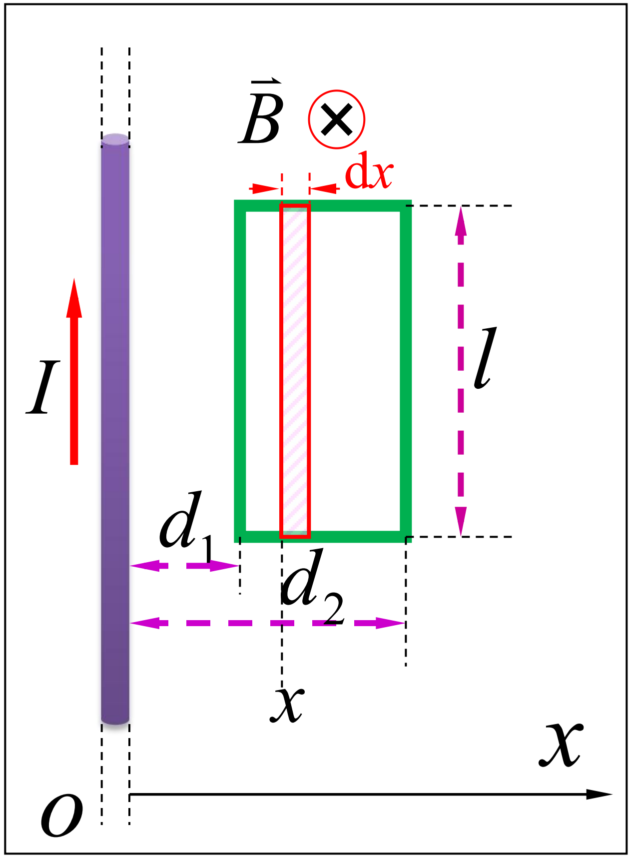
磁场高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

◆ **物理意义：**通过任意闭合曲面的磁通量必等于零（故磁场是**无源的**）。

例题 1

如图载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量。



解： $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l \mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

安培环路定理

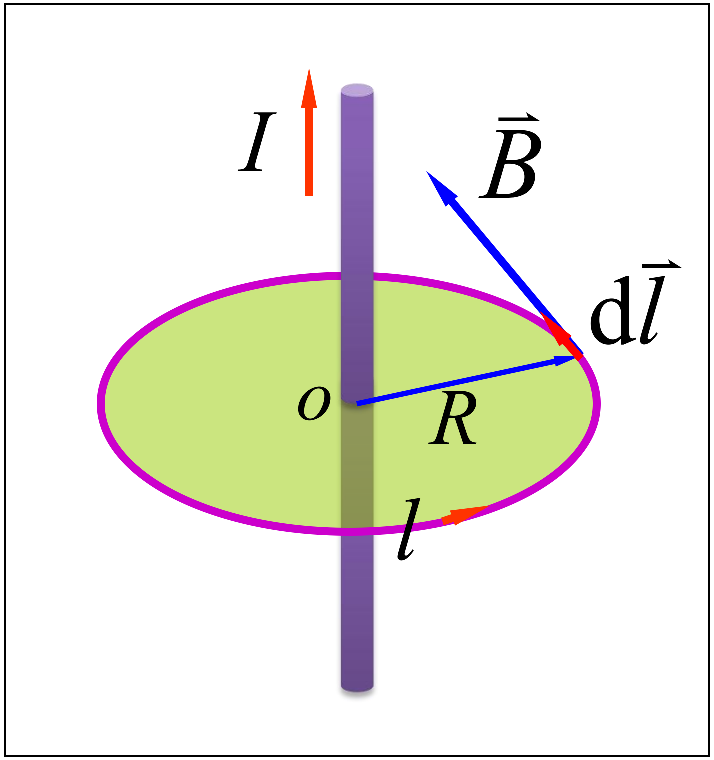
无限长载流直导线的磁感强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

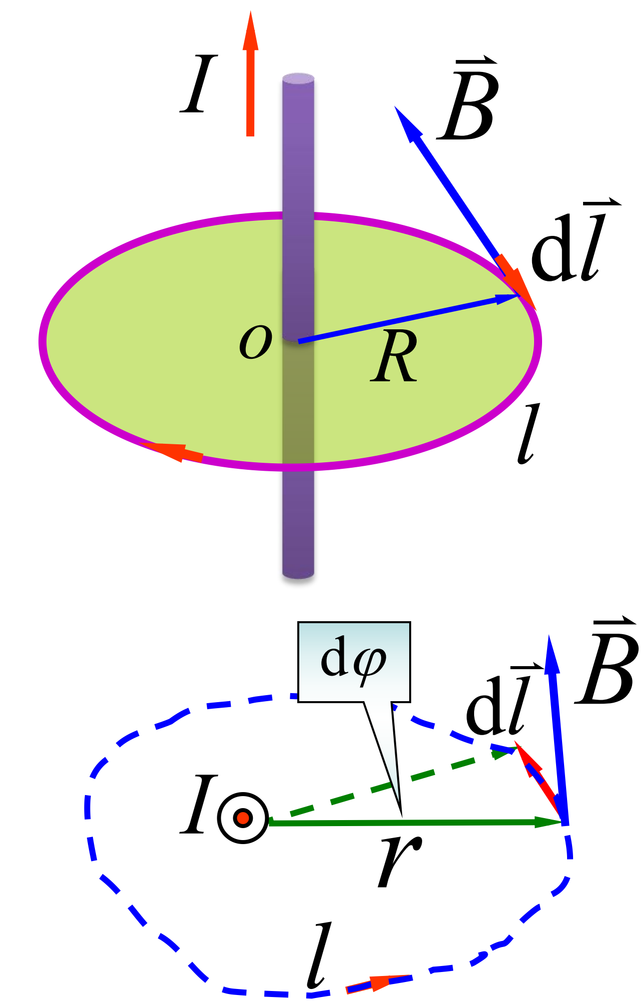
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l \mathrm{d}l$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$



设闭合回路l为圆形回路（l与I成右螺旋）



***l*与*I*成右螺旋**

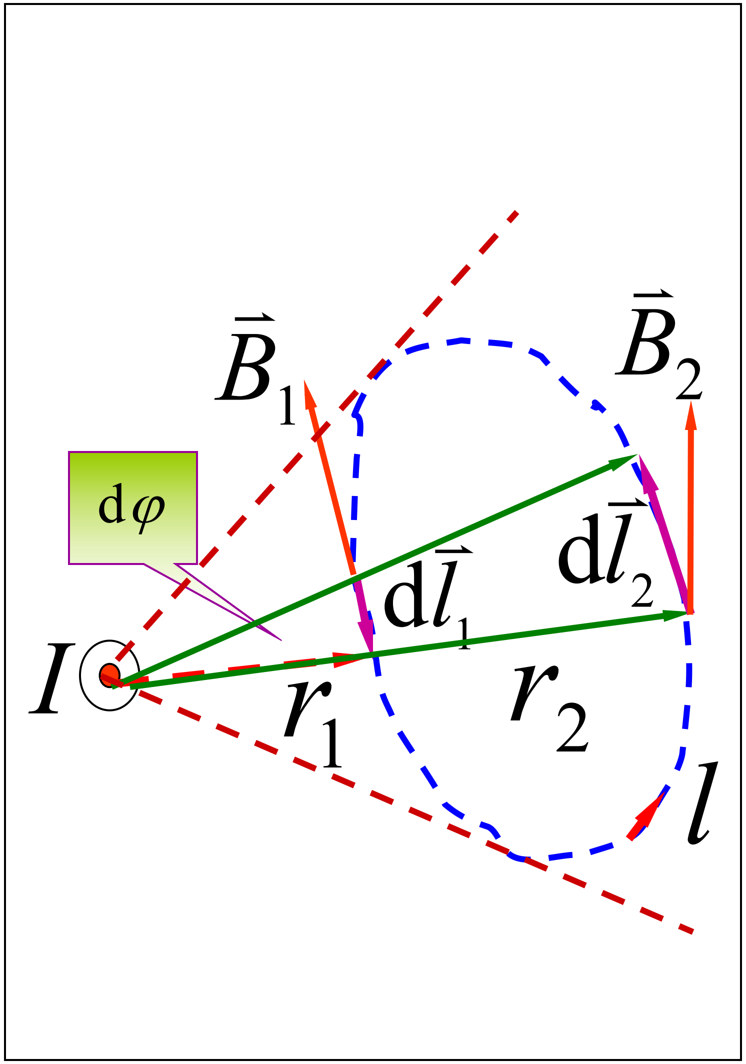
若回路绕向为逆时针时

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l = -\mu_0 I$$

➢对任意形状的回路

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_l \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$



➢电流在回路之外

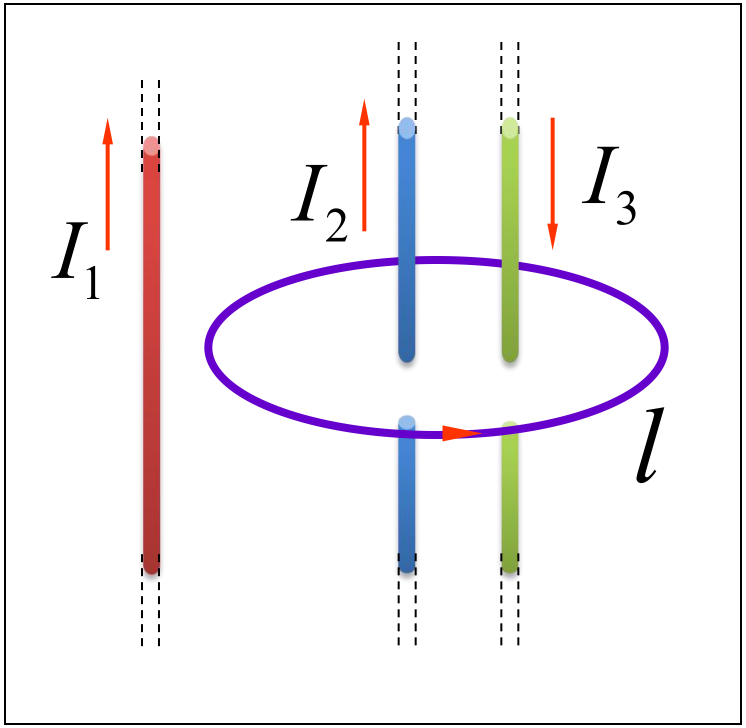
$$\vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2 \mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{L_1} \mathrm{d}\varphi + \int_{L_2} \mathrm{d}\varphi \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [-\varphi + \varphi] = 0$$

多电流情况



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

以上结果对**任意形状**的闭合电流或伸向无限远的电流均成立。

➢ 安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

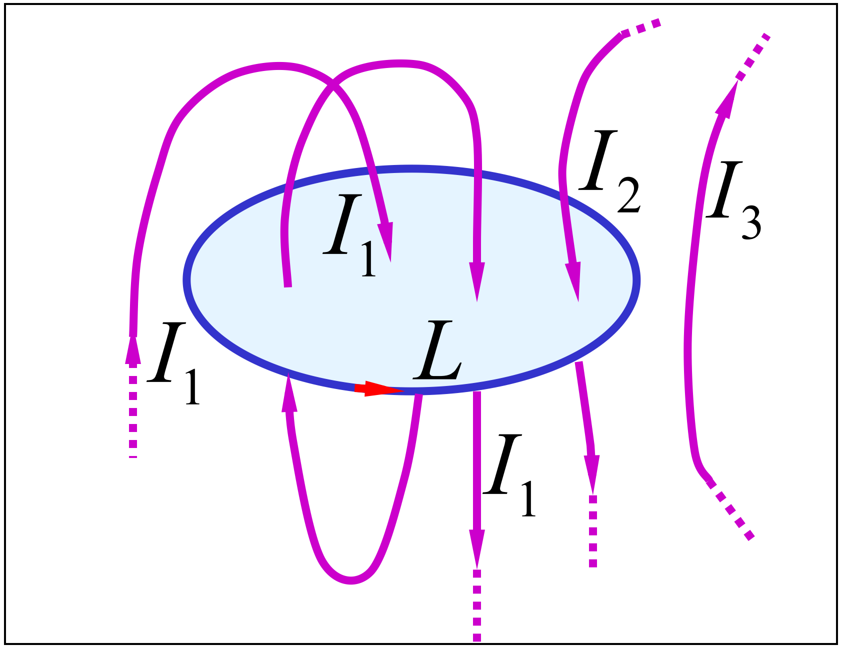
在稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的积分值，等于 μ_0乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和。

注意

电流I正负的规定：I与 L成右螺旋时，I为正；反之为负.

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



问：1）$\vec{B}$ 是否与回路 L 外电流有关？

2）若 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$，是否回路 L上各处 $\vec{B} = 0$？

是否回路 L 内无电流穿过？

安培环路定理的应用——例题2

求无限长载流圆柱体的磁场。

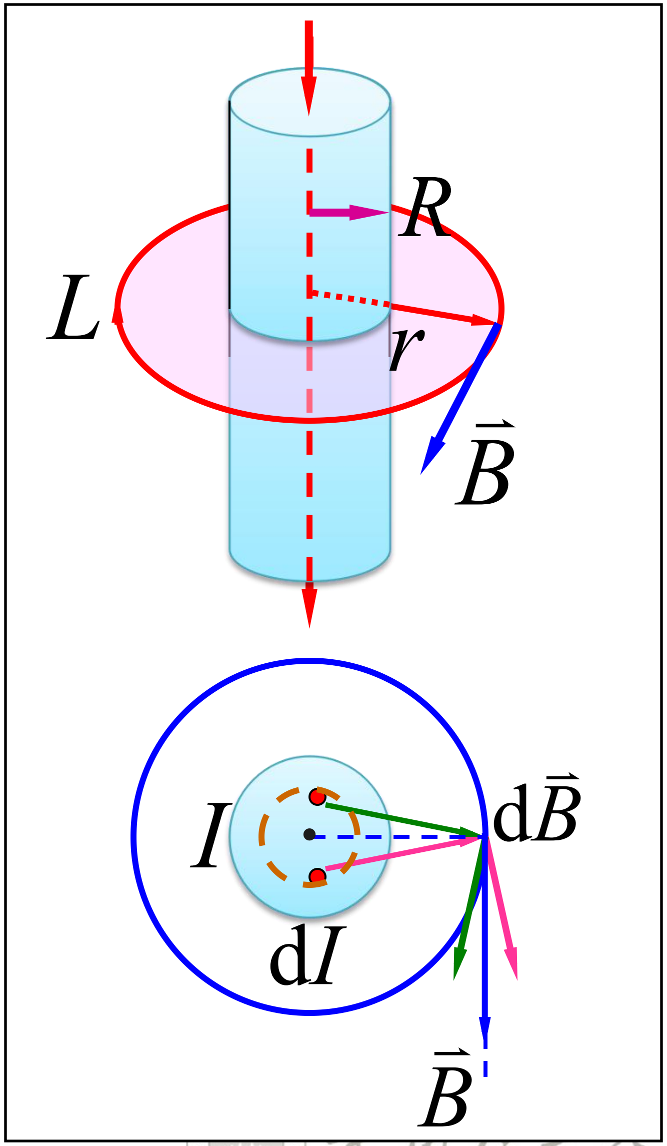
解： 1）对称性分析 2）选取回路

$r > R$ $\quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

$2\pi rB = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

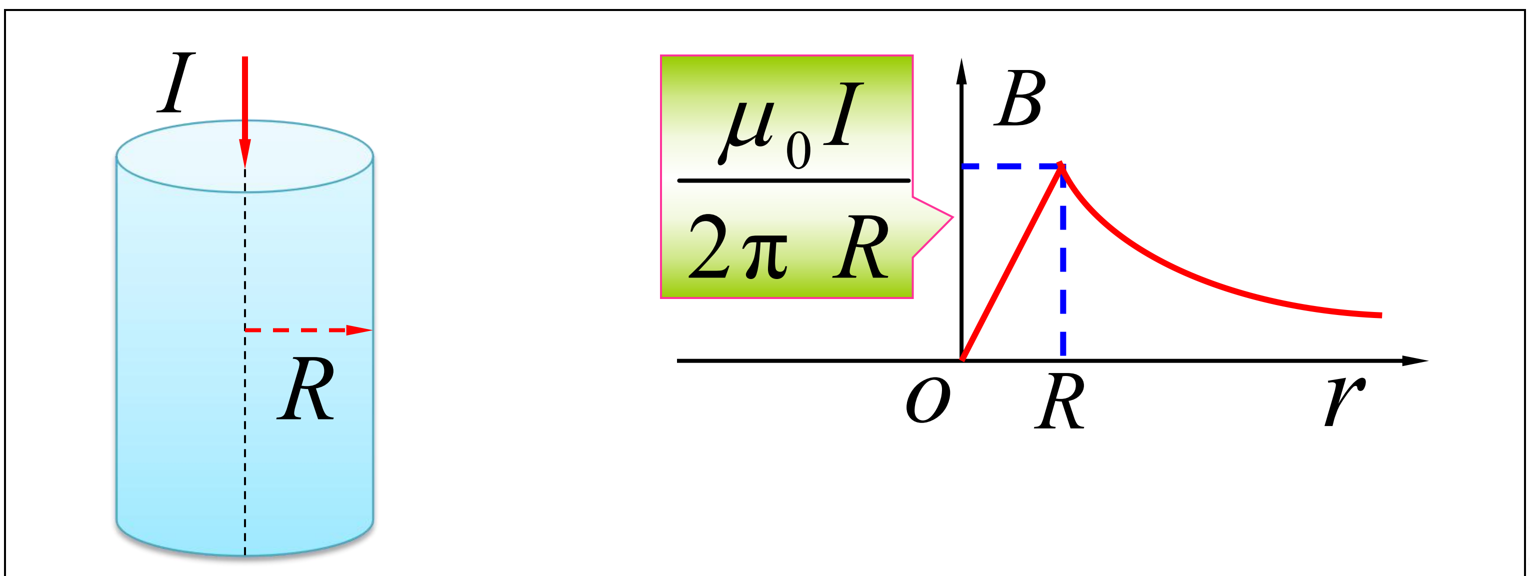
$0 < r < R \quad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

$2\pi rB = \dfrac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$



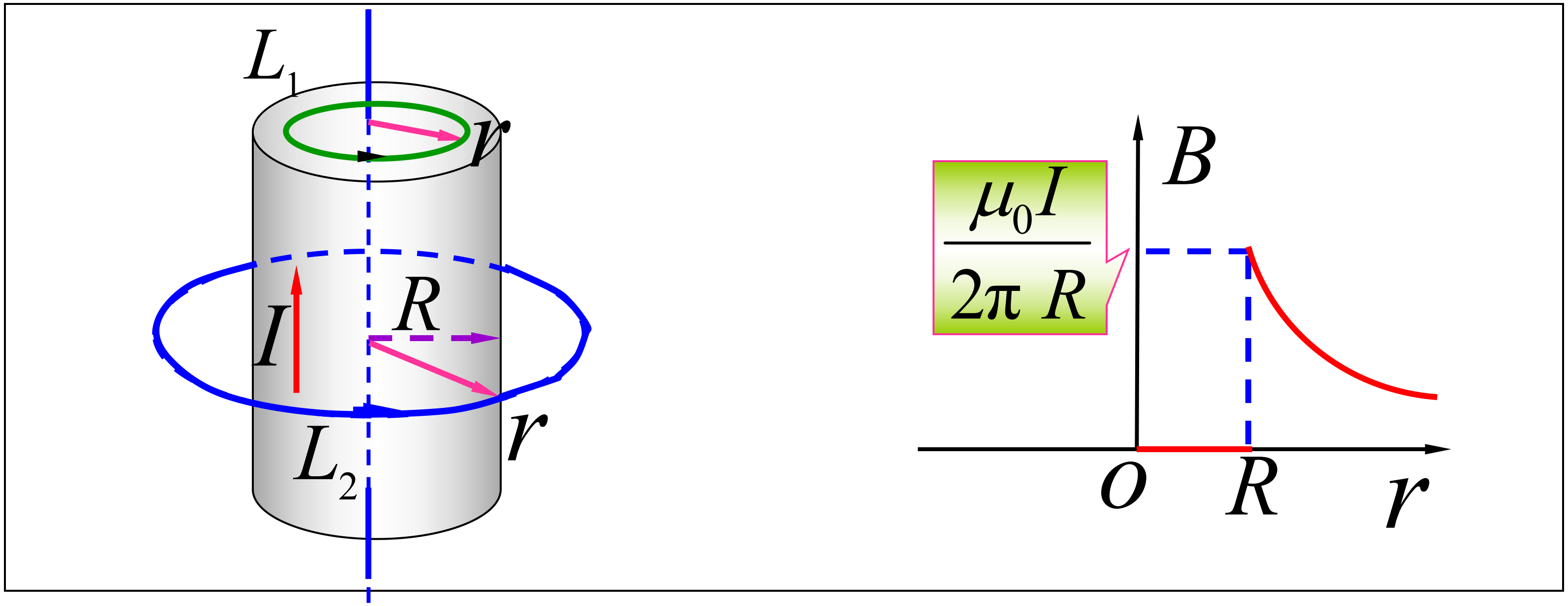
$\vec{B}$ 的方向与I 成右螺旋

$$
\begin{cases}
0<r<R, & B=\dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\
r>R, & B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}
\end{cases}
$$



例题 3

求无限长载流圆柱面的磁场。

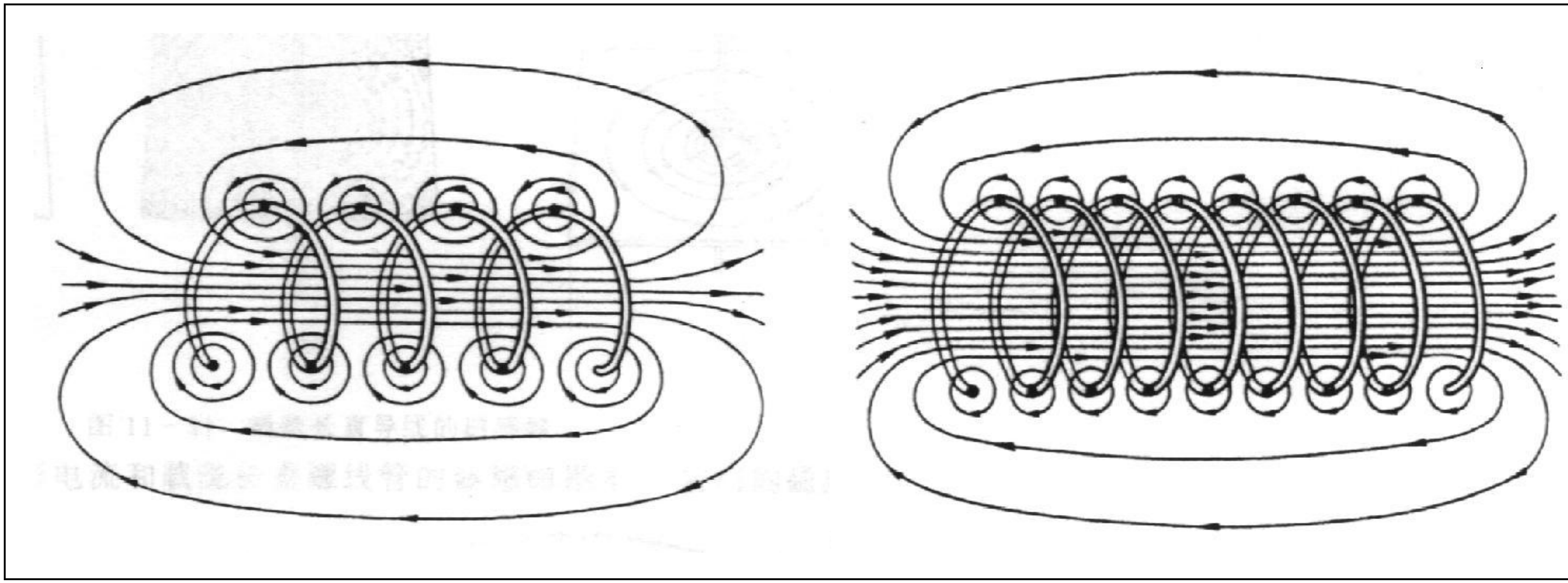


解： $0<r<R,\ \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ $\qquad B=0$

$r>R,\ \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$ $\qquad B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

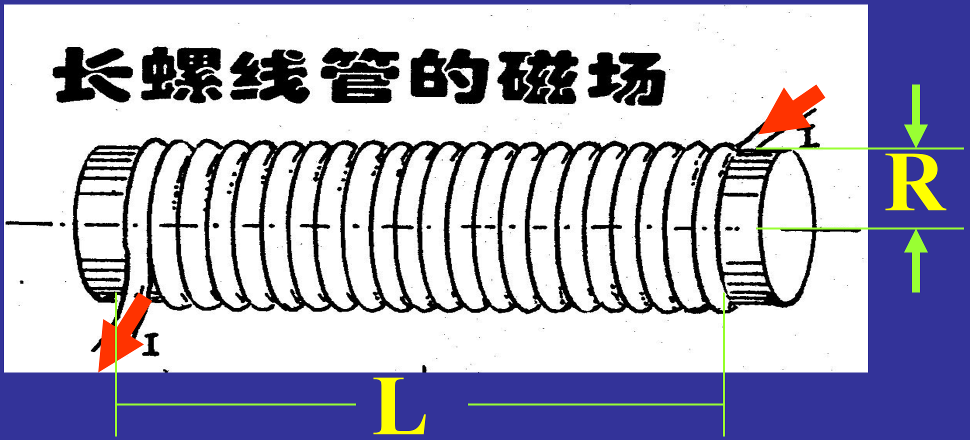
例题4

求长直密绕螺线管(单位长度的匝数为n)内磁场。



解： 1) 对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向, 外部磁感强度趋于零， 即 $B \simeq 0$ 。

载流“无限长”长直螺线管内外的磁场分布



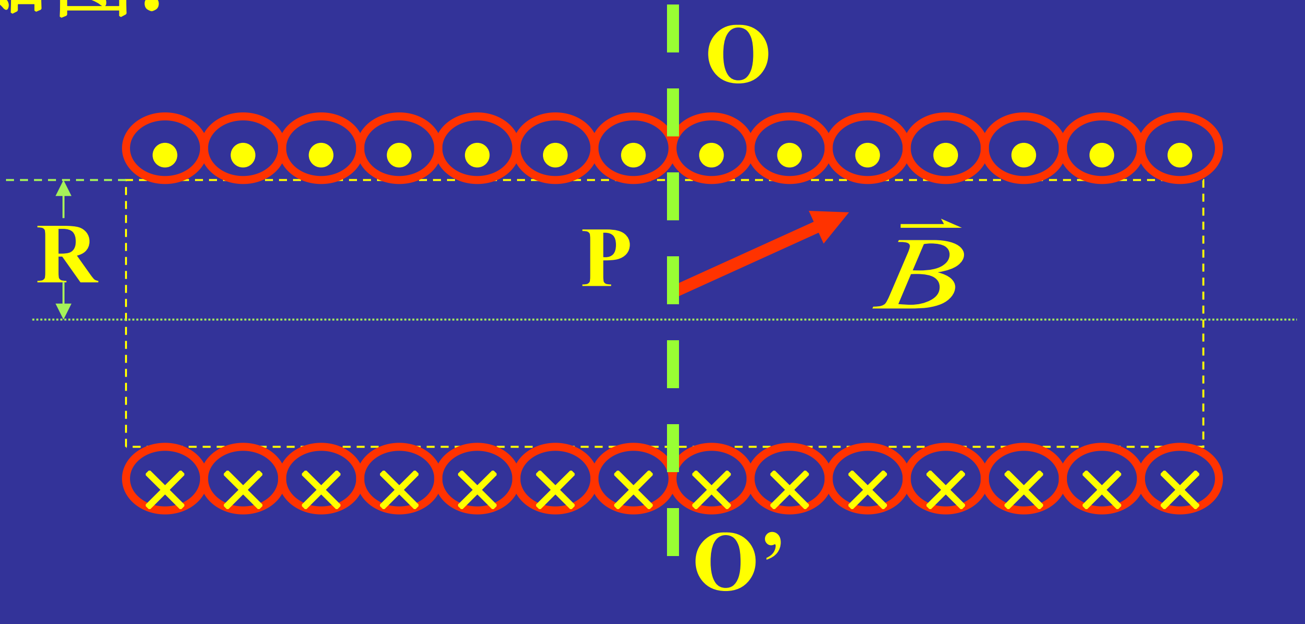
（通常L>20R）

已知：单位长度匝数n

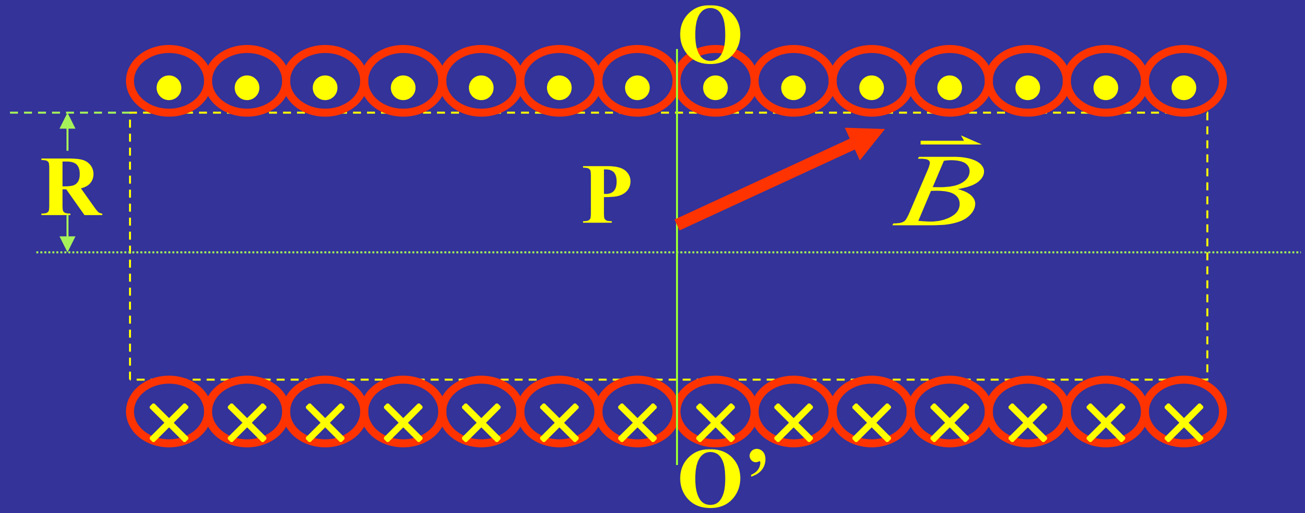
电流I。

解：分析磁场分布

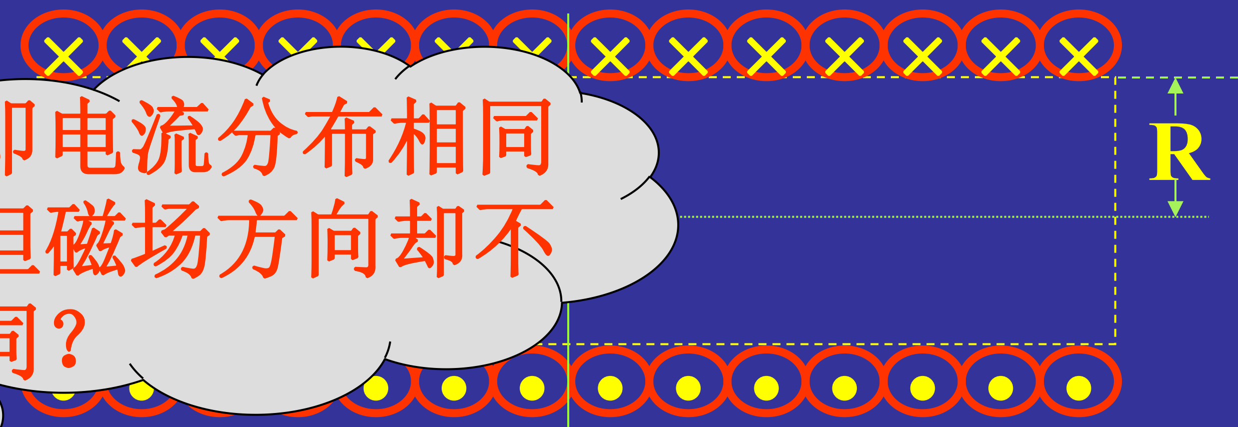
证明磁场总是平行中心轴线，设P点磁感应强度如图：



假若磁场不平行轴线。

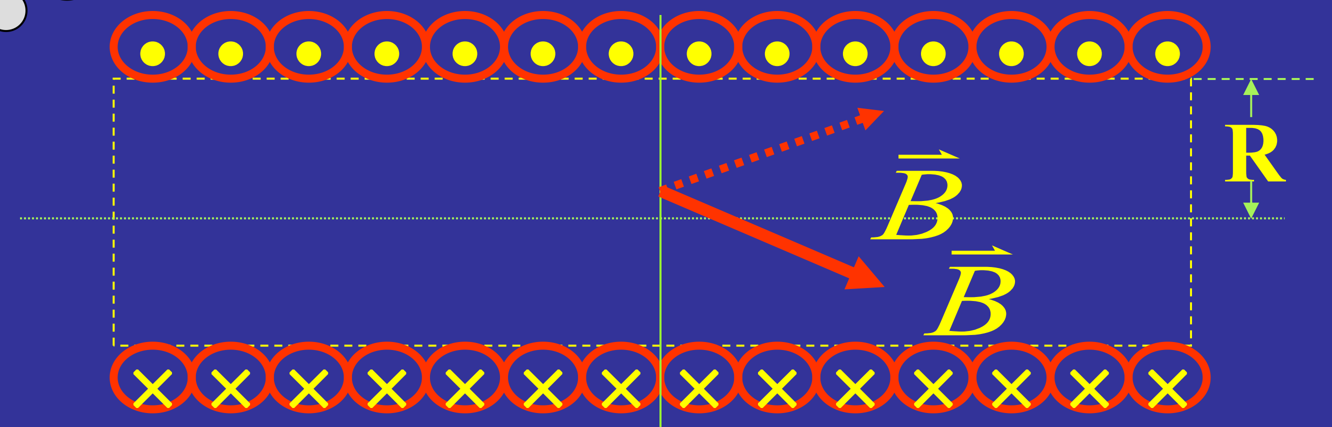


以OO'为轴旋转180度；



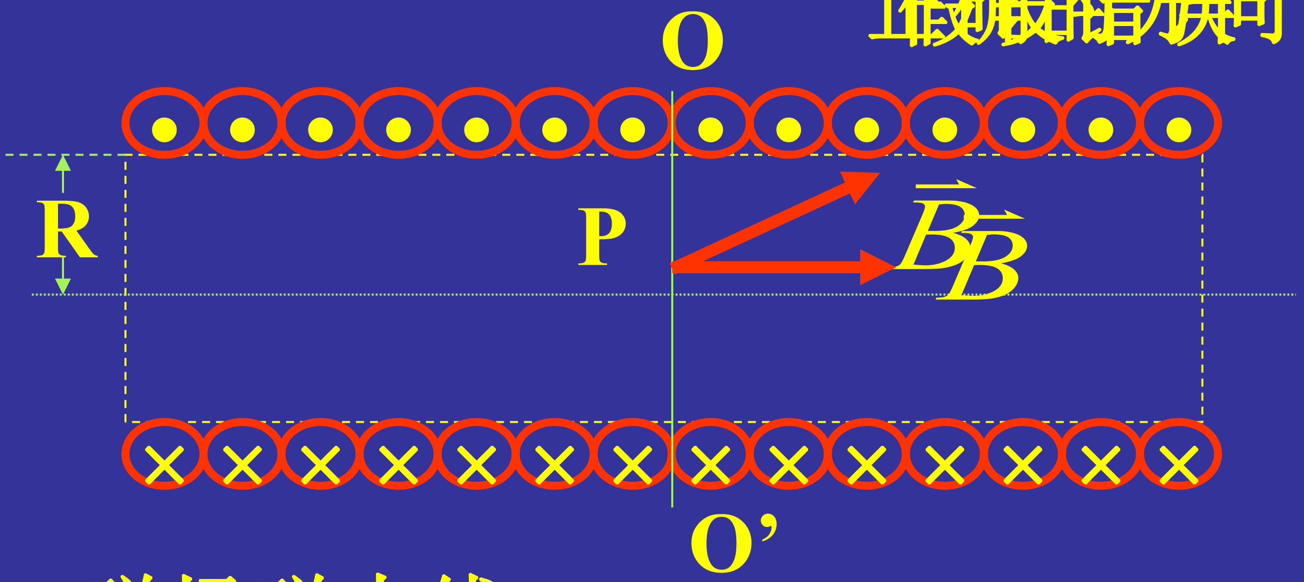
即电流分布相同但磁场方向却不同？

电流方向改变，磁场方向如图！

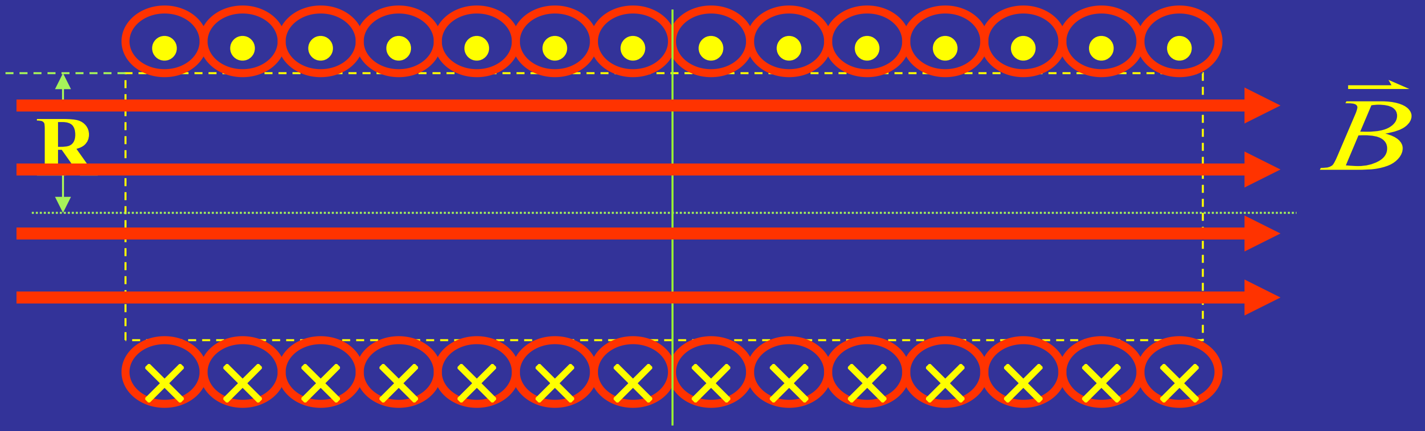


正确的方向！

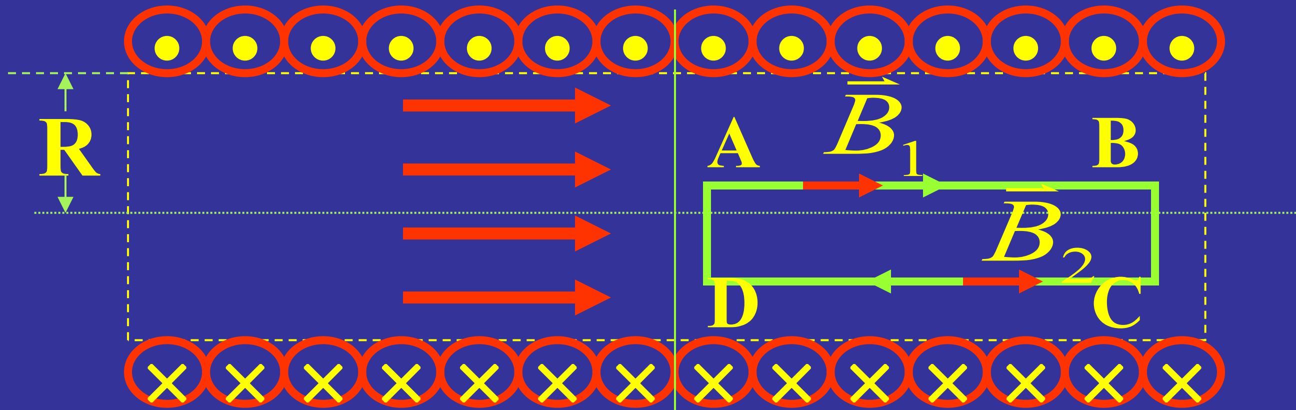
假设的错误



磁场磁力线：



为什么磁力线画成均匀的？



作安培环路L ABCDA

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i = 0$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B}_2\cdot d\vec{l}$$

$$+ \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_1 l_{AB} + 0 - B_2 l_{CD} + 0 = 0$$

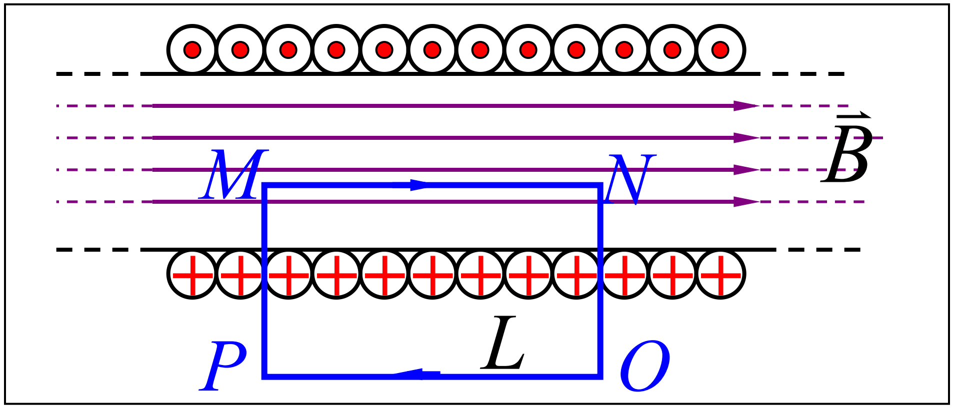
$\therefore B_1 = B_2$ 即管内是均匀场。

（用毕-萨定律计算已知：中心轴线处

$B = \mu_0 nI$ ，故管内各点 $B = \mu_0 nI$ ）

2）选回路 L

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流I成右螺旋



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{NO}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{OP}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{PM}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

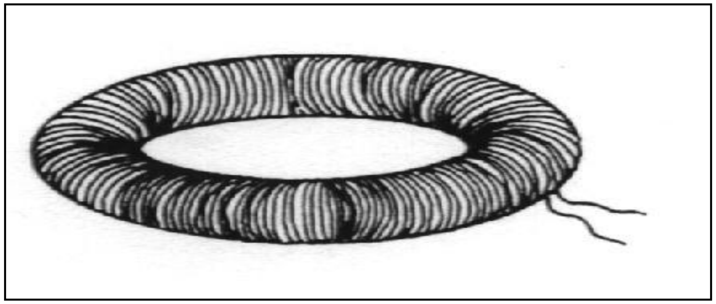
$$B\cdot\overline{MN} = \mu_0 nI\,\overline{MN}$$

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

结论：无限长载流螺线管外部磁场为零，内部磁场处处相等（方向平行于轴线）。

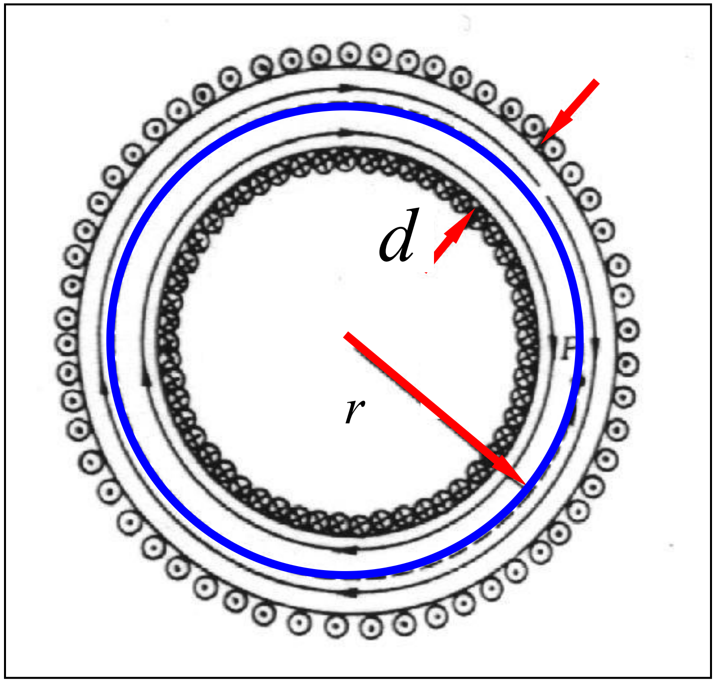
例题 5

求载流螺绕环内的磁场。



解： 1） 对称性分析；环内磁感线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.

2）选回路



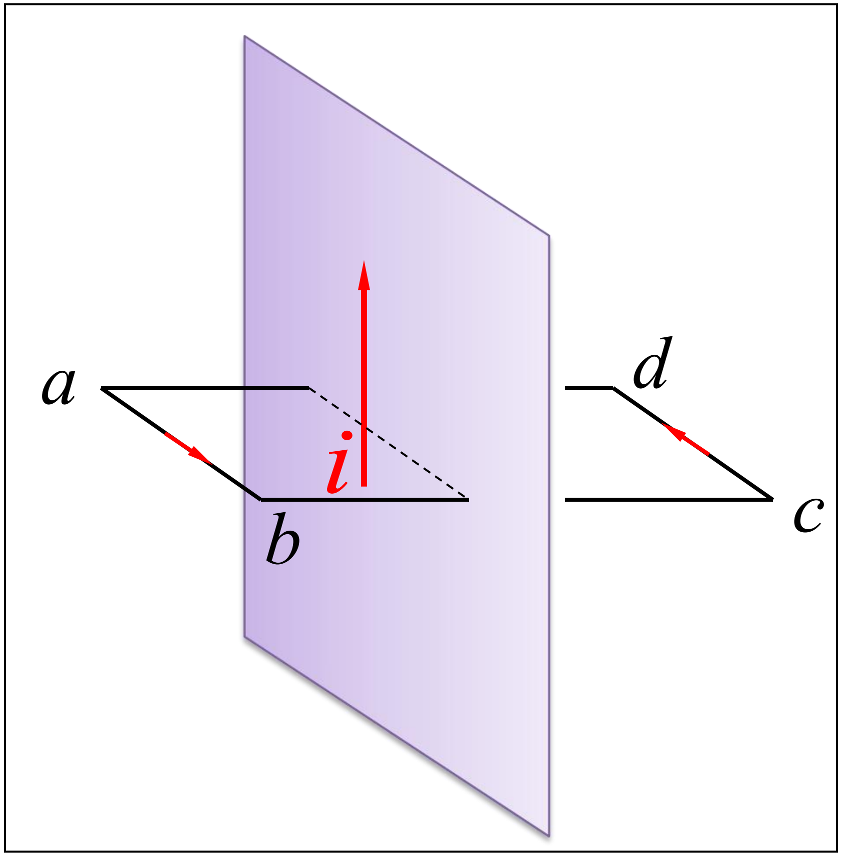
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} = \mu_0 n I$$

例题6

无限大均匀平面电流 (线密度为i)的磁场

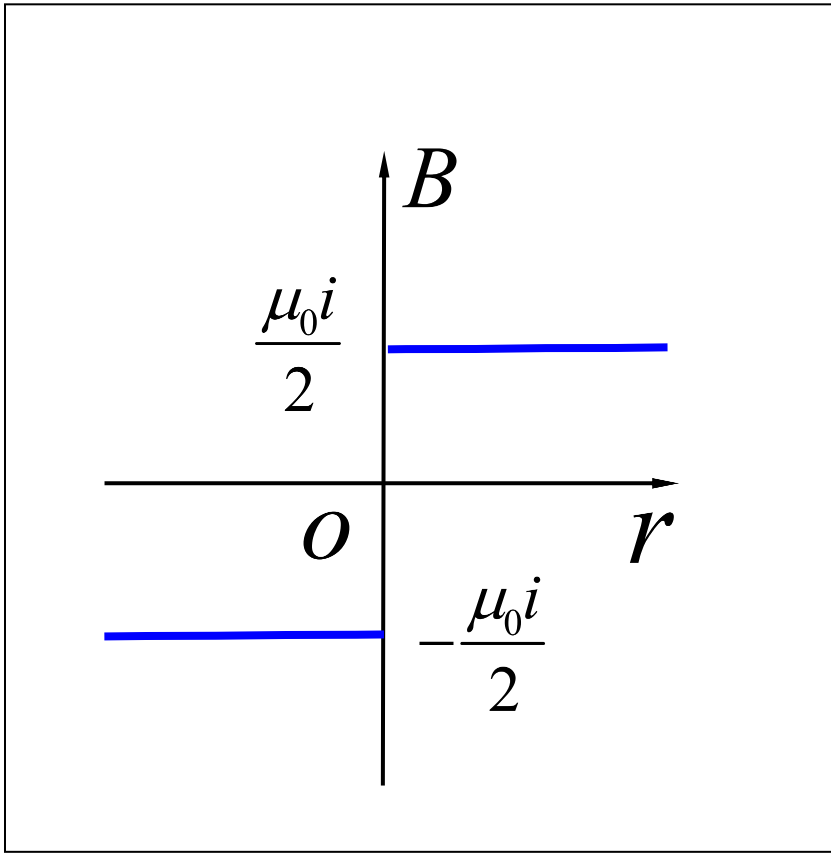
解： 如图，作安培环路$abcda$，应用安培环路定理

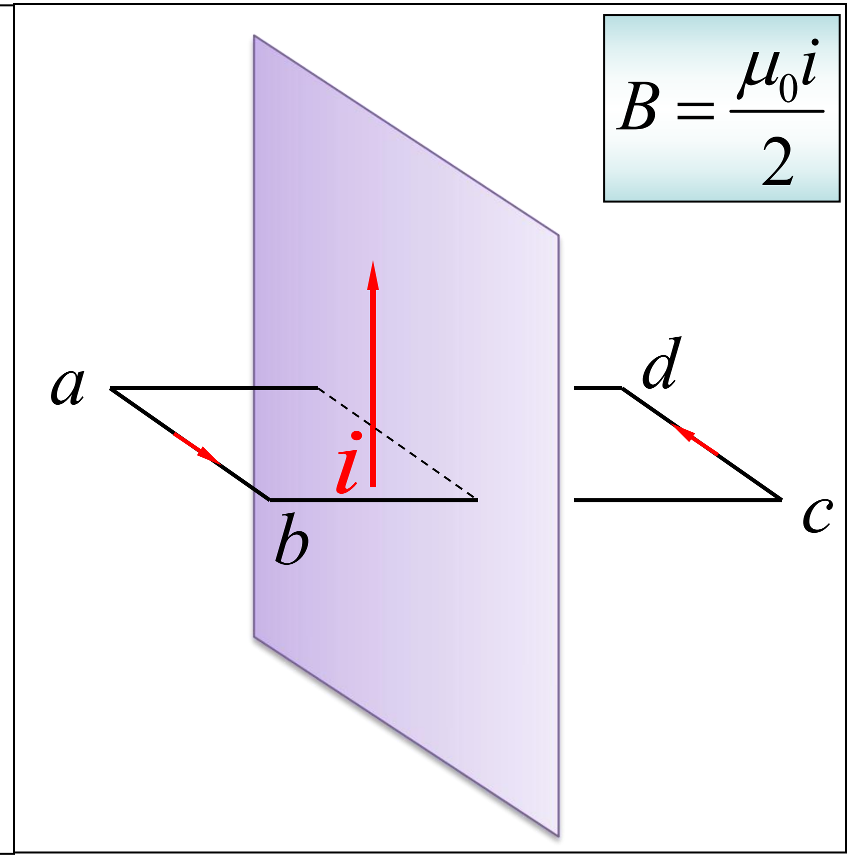


$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\int_a^b B\cdot dl$$

$$= 2B\overline{ab} = \mu_0 i\overline{ab}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$


B
$\frac{\mu_0 i}{2}$
O
r
$-\frac{\mu_0 i}{2}$


$B=\frac{\mu_0 i}{2}$
a
b
c
d
i

本章作业

课本P117~119

1, 2, 3, 4, 13, 14, 16, 17 (共8题)

注意:

- 10月17日(下周一)交本章作业
- 作业用A4纸, 不抄题, 有题号
- 选择&填空题要有解题过程