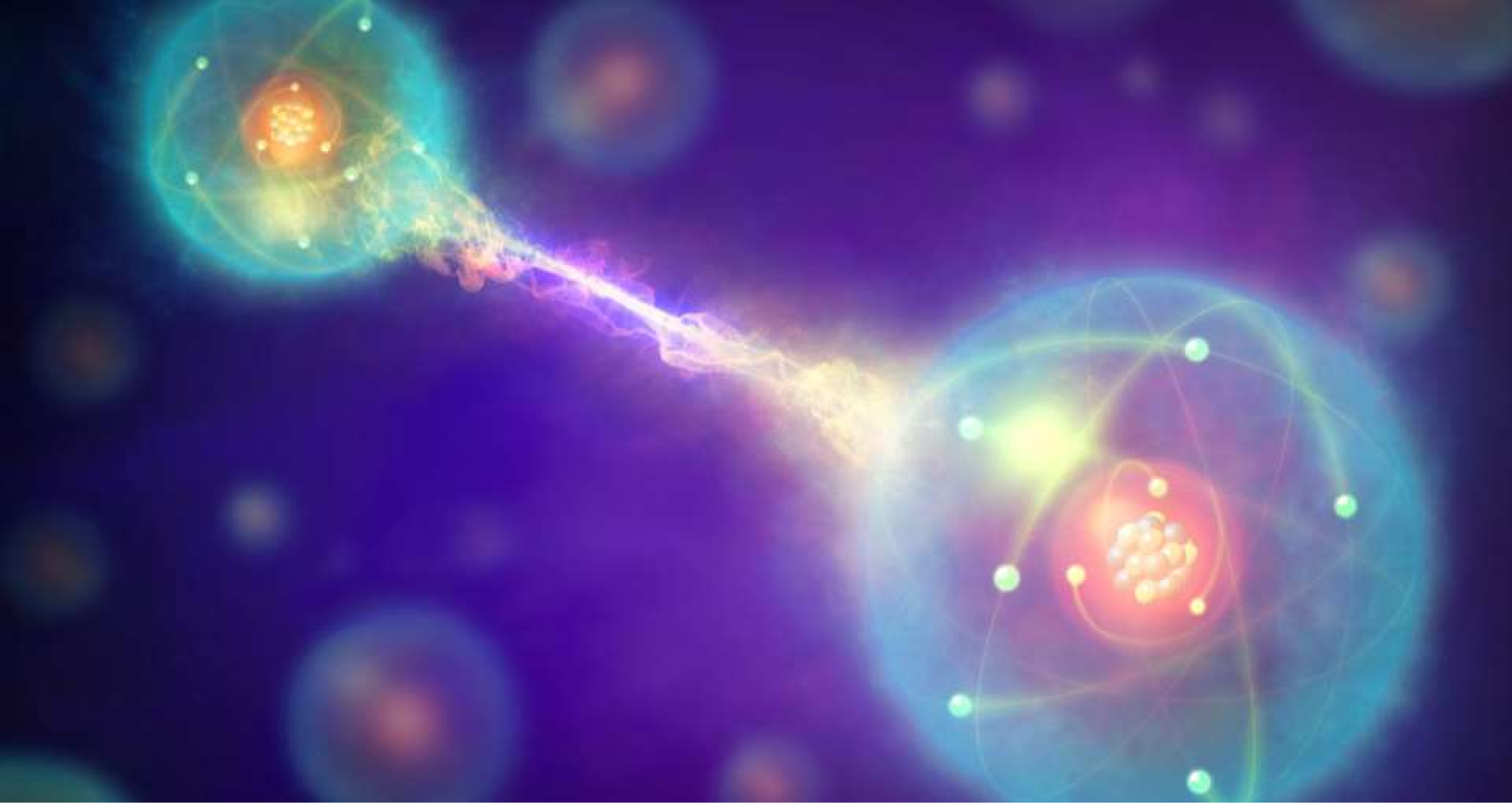


第23章 量子力学初步

华南理工大学
South China University of Technology

本章作业

新教材268页	4	6	7	8	14	16	22
旧教材290页	1	4	7	8	259页 25-21	13	23

注意

- 请缺交作业的同学尽快补交作业

23.1 德布罗意波

自然界在许多方面都是明显地对称的

光波 → 粒子性

波动性？ ← 粒子

波粒二象性

L. De Broglie
1892 – 1987

1924年， 德布罗意在博士论文《量子论研究》中，大胆地提出了如下假设：

不仅电磁波具有波粒二象性，一切的实物粒子都具有波粒二象性。

爱因斯坦： “我相信这一假设的意义远远超出了单纯的类比。”

德布罗意公式

德布罗意认为，一个动量为p，能量为E的自由粒子，相当于一个频率为ν，波长为λ的单色平面波——物质波或德布罗意波

假设质量为m、以匀速运动的粒子具有频率为ν，波长为λ，则

$$\boxed{\begin{aligned} \nu &= E/h \\ \lambda &= h/p \end{aligned}}$$

德布罗意公式

注意：1. 两个方程是相互独立的

2. 严格地，E和p都是相对论的总能量和动量

德布罗意公式

- 若考虑相对论效应 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{h}{m_0 v}\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}$

- 若不考虑相对论效应(v<<c) $\lambda = \dfrac{h}{m_0 v} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$

例：用电压U加速电子 $\mathrm{E_k} = \dfrac{1}{2} m_0 v^2 = eU$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} = 12.25 \frac{1}{\sqrt{U}} \mathring{\mathrm{A}} \qquad 1\mathring{\mathrm{A}} = 10^{-10}\mathrm{m}$$

设$U = 150\mathrm{V}$ $\lambda = 12.25 \dfrac{1}{\sqrt{150}} = 1\mathring{\mathrm{A}}$

例：子弹$m = 0.05kg$，$v = 500m/s$，求德布罗意波长。

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}}{0.05\times500} = 2.65\times10^{-25}\ \mathring{\mathrm{A}}$$

思考

➢如何证明实物粒子具有波动性？

□选择怎样的实物粒子？ $\lambda = h/p = h/mv$

电子（质量轻）

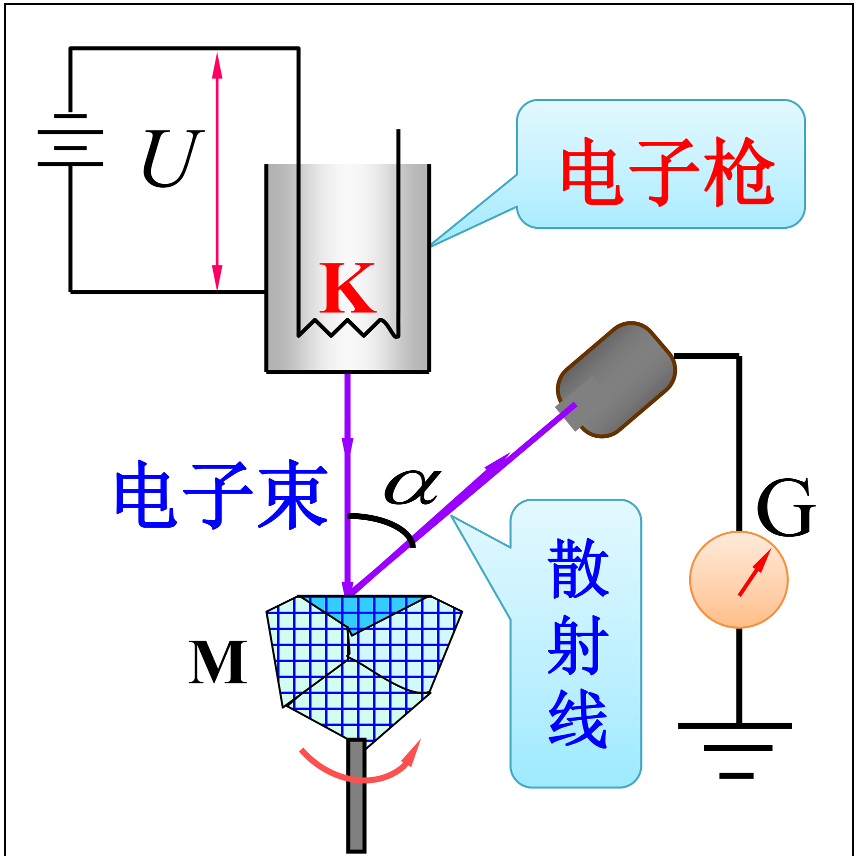
□进行怎样的实验？ $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 eU}} = 1\mathring{A}$ X射线波长

电子衍射实验（入射到晶体上）

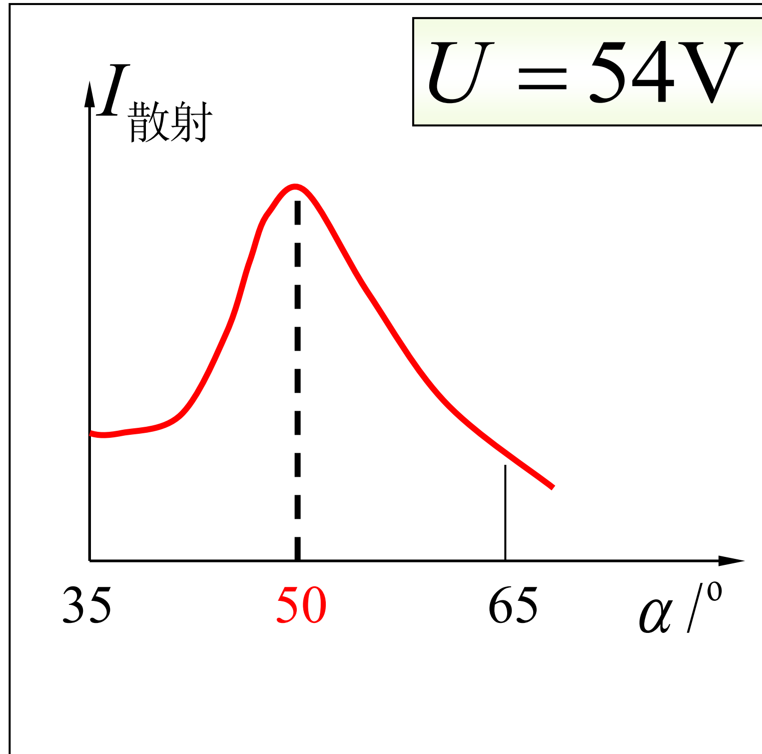
电子衍射
- 单晶：戴维逊-革末实验（镍晶体）
- 多晶：G.P. 汤姆逊实验（多晶金箔）

德布罗意波的实验证明

➢戴维逊-革末电子衍射实验 (1927年)



电子被镍晶体衍射实验



在α=50º 处测得电子射线强度有一极大值

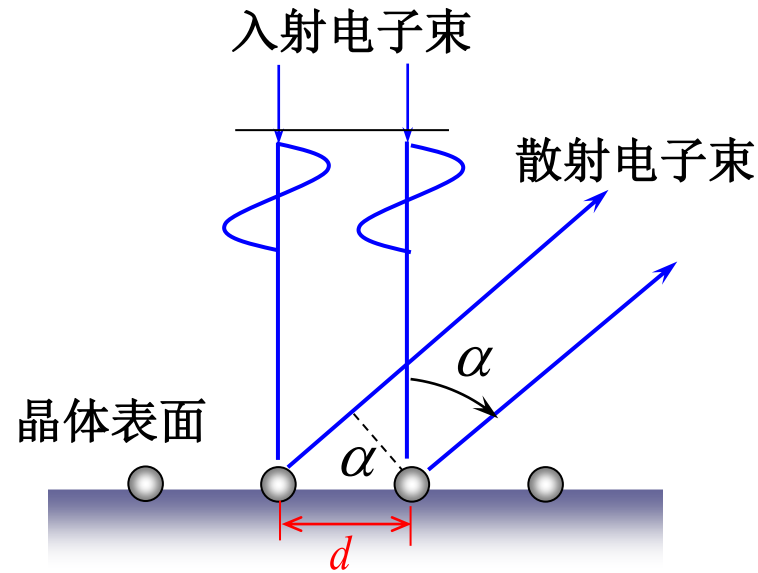
戴维逊-革末实验

若是电子衍射产生，应满足

$$d\sin\alpha = k\lambda \quad \left(k=1,2,3,\cdots\right)$$

镍单晶原子间距：

$$d = 2.15\times10^{-10}\,\mathrm{m}$$



取 $\alpha = 50°$ ， $\boldsymbol{k}$ =1

$$\lambda = \frac{d\sin\alpha}{k} = \frac{\left(2.15\times10^{-10}\,\mathbf{m}\right)\sin 50°}{1} = 1.65\times10^{-10}\,\mathbf{m}$$

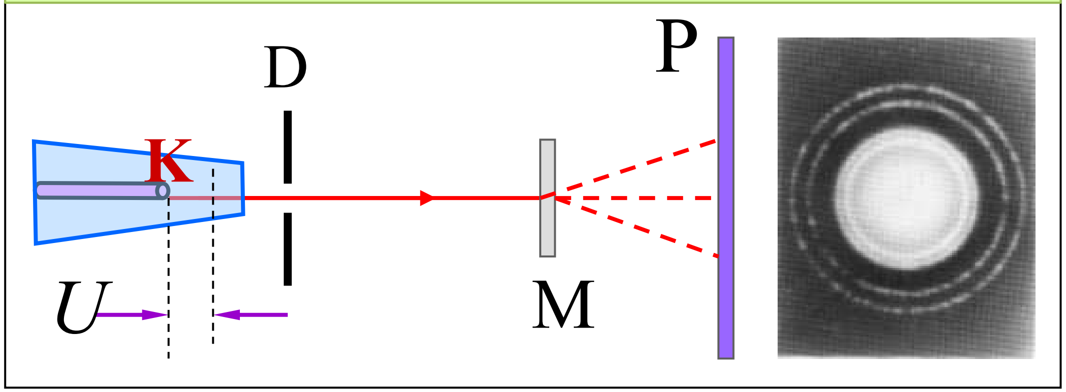
电子的德布罗意波长：$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}} = 1.67\times10^{-10}\,\mathbf{m}$

$$U = 54\mathrm{V}$$

证明电子通过单晶镍发生衍射

汤姆逊电子衍射实验

电子束透过多晶金箔的衍射



600eV的电子束穿多晶金箔形成的电子衍射花样

□应用：透射电子显微镜(TEM)

光学仪器的分辨率 $\frac{1}{\theta}=\frac{d}{1.22\lambda}$ $\begin{cases}\text{加大孔径}d\\ \text{减小波长}\lambda\end{cases}$ $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2meU}}$

23.2.3 海森伯不确定关系(P251)

思考：既然电子等实物粒子具有波动性，它们的坐标、动量和轨道能否精确地测量？

W. K. Heisenberg
1901-1976

- 1927年，德国物理学家海森伯从云室中观测到电子轨迹很粗，即电子坐标的不确定性。
- 根据电子单缝衍射实验找到了不确定关系。

位置与动量的不确定关系

□电子经过缝狭时的位置不确定：

$$\Delta x = b$$

一级暗纹对应衍射角

$$\sin\theta = \lambda / b$$

电子经过缝后 x 方向动量不确定：

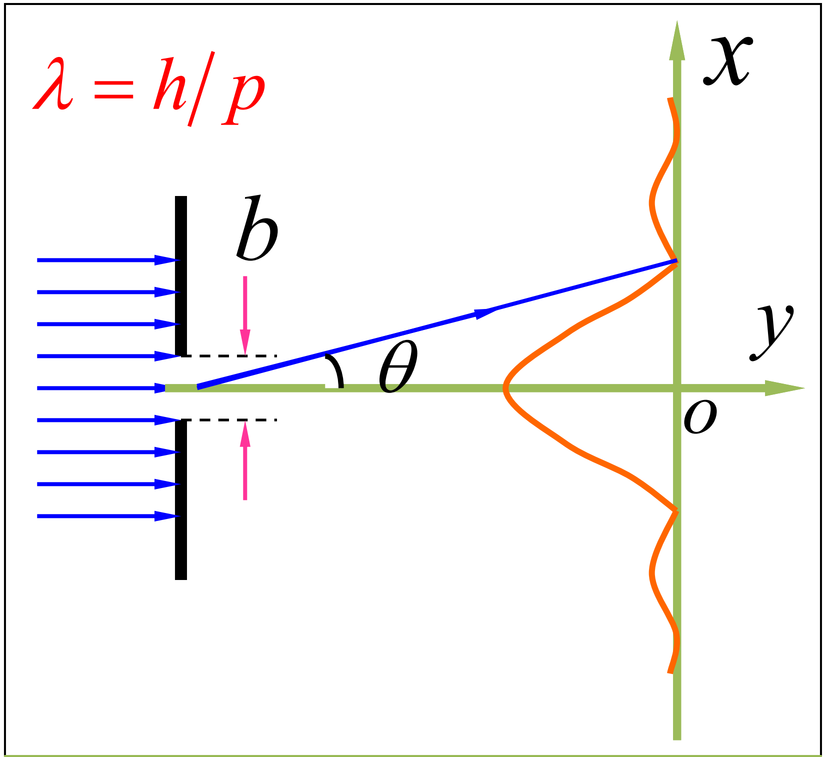
$$\Delta p_x = p\sin\theta = p\frac{\lambda}{b} = \frac{h}{b}$$

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

考虑次级大：$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq h}$

单缝衍射暗纹条件

$$b\sin\theta = \pm k\lambda (k = 1, 2, 3...)$$



电子的单缝衍射实验

位置与动量的不确定关系

➤推广到三维空间

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h$$

海森伯“位置和动量”不确定关系：对于微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述。

不确定关系的严格形式

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y \geq \dfrac{\hbar}{2} \\ \Delta z \Delta p_z \geq \dfrac{\hbar}{2} \end{cases}$$

$$\hbar = h/2\pi$$
$$= 1.05 \times 10^{-34}\,\mathbf{J \cdot s}$$

物理意义

- 微观粒子同一方向上的坐标与动量不可同时准确测量，它们的精度存在一个不可逾越的极限；

- 对宏观物体，因$\boldsymbol{h}$很小，所以 $\Delta x \Delta p_x \to 0$ 可视为位置和动量能同时准确测量；

- 爱因斯坦：“上帝不会掷骰子”。

  但不确定关系的发现意味着确定性的丧失，“上帝是一个赌徒”；

- 不确定性的根源是“波粒二象性”，这是自然界的根本属性，并不是测量效应。

例 1

一颗质量为10 g 的子弹，具有200m/s 的速率。 若其动量的不确定范围是动量的0.01% (这在宏观领域是十分精确的) , 则该子弹位置的不确定范围是多大?

解： 子弹的动量 $p = mv = 2\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

动量的不确定范围

$$\Delta p = 0.01\% \times p = 2\times10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

位置的不确定量范围

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63\times10^{-34}}{2\times10^{-4}}\mathrm{m} = 3.3\times10^{-30}\mathrm{m}$$

例 2

一电子(质量为9.109×10^{-31}kg)具有200m/s的速率，若其动量的不确定范围为动量的0.01%, 则该电子位置的不确定范围是多大?

解： 电子的动量 $p = mv = 1.82\times10^{-28}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

动量的不确定范围

$$\Delta p = 0.01\%\times p = 1.82\times10^{-32}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

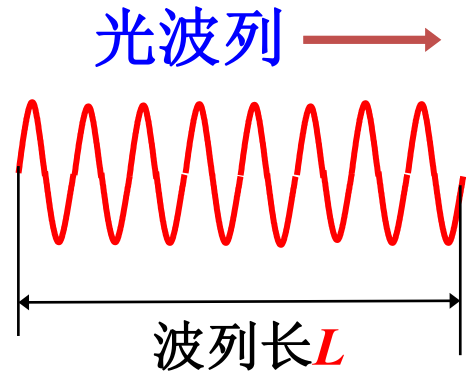
位置的不确定量范围

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p} = \frac{6.63\times10^{-34}}{1.82\times10^{-32}}\,\mathrm{m} = 3.6\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$

华南理工大学 South China University of Technology

例 3

氦氖激光器所发红光波长 $\lambda = 6328$ Å，谱线宽度 $\Delta\lambda=10^{-8}$ Å。求：当这种光子沿 x 方向传播时，它的 x 坐标不确定度(波列长度)。



解：

$$p_x = \frac{h}{\lambda} \qquad \Delta p_x = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} = \frac{h(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\Delta x \geq \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 4\times10^5\,\mathrm{m}$$

光源的单色性愈好，即Δλ越小，则波列长度愈长。

思考: 为什么谱线有宽度？ 能级有宽度(能量不确定性)

能量与时间的不确定关系

设粒子沿着x方向运动，根据狭义相对论

$$E^2 = E_0^2 + (cp)^2$$

由于动量的不确定性，会导致总能量的不确定性

$$2E\Delta E = 2c^2 p\Delta p \Rightarrow \underline{2mc^2\Delta E} = 2c^2 mv\Delta p = \underline{2c^2 m\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p}$$

$$\Delta E\Delta t = \Delta x\Delta p \geq h$$

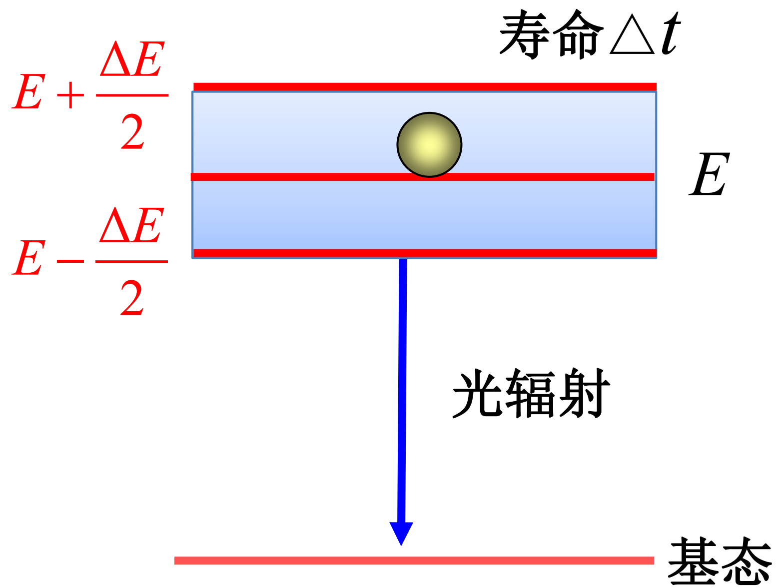
能量和时间的不确定关系 $\Delta E\Delta t \geq h$

华南理工大学 South China University of Technology

能量与时间的不确定关系

严格形式 $\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2$

反映了原子能级宽度$\triangle E$ 和原子在该能级的平均寿命 $\triangle t$ 之间的关系。



□激发态

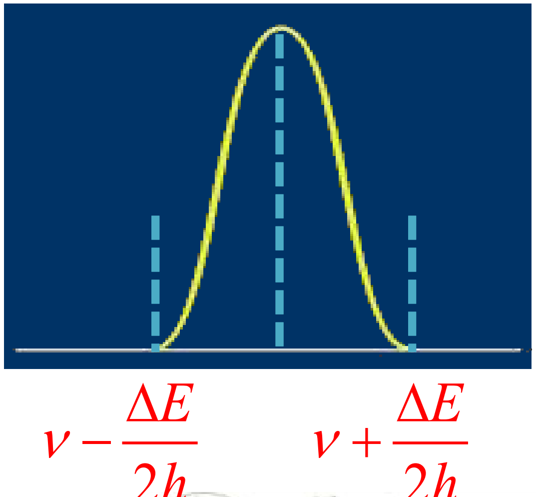
平均寿命 $\Delta t \sim 10^{-8}$ s

能级宽度 $\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \sim 10^{-8}$ eV

□基态

平均寿命 $\Delta t \rightarrow \infty$

能级宽度 $\Delta E \rightarrow 0$



辐射光谱线固有宽度