

概念、性质、定理、公式必须清楚，解法必须熟练，计算必须准确

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{可逆} \\ r(A) = n \\ A \text{的列(行)向量线性无关} \\ A \text{的特征值全不为} 0 \\ Ax = o \text{只有零解} \Leftrightarrow \forall x \neq o, Ax \neq o \\ \forall \beta \in \mathbb{R}^n, Ax = \beta \text{总有唯一解} \\ A^T A \text{是正定矩阵} \\ A \cong E \\ A = p_1 p_2 \cdots p_s \quad p_i \text{是初等阵} \\ \text{存在} n \text{阶矩阵} B, \text{使得} AB = E \text{ 或 } BA = E \end{cases}$$

⑩：全体  $n$  维实向量构成的集合  $\mathbb{R}^n$  叫做  $n$  维向量空间.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{不可逆} \\ r(A) < n \\ A \text{的列(行)向量线性相关} \\ 0 \text{是} A \text{的特征值} \\ Ax = o \text{有非零解, 其基础解系即为} A \text{关于} \lambda = 0 \text{的特征向量} \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \quad |aE + bA| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(aE + bA) < n \\ (aE + bA)x = o \text{有非零解} \\ \lambda = -\frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{矩阵等价} (\cong) \\ \text{矩阵相似} (\sim) \\ \text{矩阵合同} (\simeq) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

✓ 关于  $e_1, e_2, \dots, e_n$  :

①称为  $\mathbb{R}^n$  的标准基,  $\mathbb{R}^n$  中的自然基, 单位坐标向量  $p_{\text{教材}87}$  ;

②  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性无关;

③  $|e_1, e_2, \dots, e_n| = 1$  ;

④  $\text{tr} E = n$  ;

⑤任意一个  $n$  维向量都可以用  $e_1, e_2, \dots, e_n$  线性表示.

**行列式的定义**  $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

✓ 行列式的计算:

①行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和。

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。

②若  $A$  与  $B$  都是方阵（不必同阶），则  $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$  （拉普拉斯展开式）  
 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$

③上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积。

④关于副对角线： $\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & & \\ & & a_{2n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & & \\ & & a_{2n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n} \cdots a_{n1}$  （即：所有取自不同行不同列的  $n$  个元素的乘积的代数和）

⑤范德蒙德行列式： $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$

**矩阵的定义** 由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列的表  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  称为  $m \times n$  矩阵. 记作： $A = (a_{ij})_{m \times n}$  或  $A_{m \times n}$

**伴随矩阵**  $A^* = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $A_{ij}$  为  $|A|$  中各个元素的代数余子式。

✓ 逆矩阵的求法:

①  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$       ②:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$       主...换位  
副...变号

$$\textcircled{2} (A:E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:A^{-1})$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$$

✓ 方阵的幂的性质:  $A^m A^n = A^{m+n}$   $(A^m)^n = (A)^{mn}$

✓ 设  $A_{m \times n}, B_{n \times s}$ ,  $A$  的列向量为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ,  $B$  的列向量为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ ,

$$\text{则 } AB = C_{m \times s} \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \dots, c_s) \Leftrightarrow A\beta_i = c_i, \quad (i=1, 2, \dots, s) \Leftrightarrow \beta_i \text{ 为}$$

$$Ax = c_i \text{ 的解} \Leftrightarrow A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s) = (c_1, c_2, \dots, c_s) \Leftrightarrow c_1, c_2, \dots, c_s \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表}$$

示, 即:  $C$  的列向量能由  $A$  的列向量线性表示,  $B$  为系数矩阵.

同理:  $C$  的行向量能由  $B$  的行向量线性表示,  $A^T$  为系数矩阵.

$$\text{即: } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n = c_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \dots + a_{2n}\beta_n = c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \dots + a_{mn}\beta_n = c_m \end{cases}$$

✓ 用对角矩阵  $\Lambda$   $\textcircled{左}$  乘一个矩阵, 相当于用  $\Lambda$  的对角线上的各元素依次乘此矩阵的  $\textcircled{行}$  向量;

用对角矩阵  $\Lambda$   $\textcircled{右}$  乘一个矩阵, 相当于用  $\Lambda$  的对角线上的各元素依次乘此矩阵的  $\textcircled{列}$  向量.

✓ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

$$\text{✓ 分块矩阵的转置矩阵: } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

$$\text{分块矩阵的逆矩阵: } \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}CB^{-1} \\ O & B \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B \end{pmatrix}$$

$$\text{分块对角阵相乘: } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}, A^n = \begin{pmatrix} A_{11}^n & \\ & A_{22}^n \end{pmatrix}$$

分块对角阵的伴随矩阵:  $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} BA^* & \\ & AB^* \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} & (-1)^{mn} |A| B^* \\ (-1)^{mn} |B| A^* & \end{pmatrix}$

✓ 矩阵方程的解法 ( $|A| \neq 0$ ): 设法化成 (I)  $AX = B$  或 (II)  $XA = B$

(I) 的解法: 构造  $(A:B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:X)$

(II) 的解法: 将等式两边转置化为  $A^T X^T = B^T$ ,  
用 (I) 的方法求出  $X^T$ , 再转置得  $X$

- ① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.
- ② 单个零向量线性相关; 单个非零向量线性无关.
- ③ 部分相关, 整体必相关; 整体无关, 部分必无关. (向量个数变动)
- ④ 原向量组无关, 接长向量组无关; 接长向量组相关, 原向量组相关. (向量维数变动)
- ⑤ 两个向量线性相关  $\Leftrightarrow$  对应元素成比例; 两两正交的非零向量组线性无关  $p_{\text{教材114}}$ .
- ⑥ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中任一向量  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都是此向量组的线性组合.
- ⑦ 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关  $\Leftrightarrow$  向量组中至少有一个向量可由其余  $n-1$  个向量线性表示.  
向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow$  向量组中每一个向量  $\alpha_i$  都不能由其余  $n-1$  个向量线性表示.
- ⑧  $m$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关  $\Leftrightarrow r(A) < n$ ;  
 $m$  维列向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow r(A) = n$ .
- ⑨ 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示法唯一.
- ⑩ 矩阵的行向量组的秩 = 列向量组的秩 = 矩阵的秩. 行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

**行阶梯形矩阵** 可画出一条阶梯线, 线的下方全为 0; 每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行的行数, 阶梯线的竖线后面的第一个元素非零. 当非零行的第一个非零元为 1, 且这些非零元所在列的其他元素都是 0 时, 称为 **行最简形矩阵**

- ⑪ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系;

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

即: 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

✓ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系:

对  $A$  施行一次初等  $\textcircled{行}$  变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵  $\textcircled{行}$  乘  $A$ ;

对  $A$  施行一次初等  $\textcircled{列}$  变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵  $\textcircled{列}$  乘  $A$ .

**矩阵的秩** 如果矩阵  $A$  存在不为零的  $r$  阶子式, 且任意  $r+1$  阶子式均为零, 则称矩阵  $A$  的秩为  $r$ . 记作  $r(A) = r$

**向量组的秩** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的极大无关组所含向量的个数, 称为这个向量组的秩. 记作  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

**矩阵等价**  $A$  经过有限次初等变换化为  $B$ . 记作:  $A \cong B$

**向量组等价**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  可以相互线性表示. 记作:  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cong (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

⑫ 矩阵  $A$  与  $B$  等价  $\Leftrightarrow PAQ = B$ ,  $P, Q$  可逆  $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$ ,  $A, B$  为同型矩阵  $\Rightarrow A, B$  作为向量组等价, 即: 秩相等的向量组不一定等价.

矩阵  $A$  与  $B$  作为向量组等价  $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Rightarrow$

矩阵  $A$  与  $B$  等价.

⑬ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示  $\Leftrightarrow AX = B$  有解

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \Rightarrow r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

⑭ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且  $s > n$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性相关.

向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性无关, 且可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 则  $s \leq n$ .

⑮ 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且  $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 则两向量组等价;

$P$  教材94, 例10

⑯ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

⑰ 向量组的极大无关组不唯一, 但极大无关组所含向量个数唯一确定.

⑱ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑲ 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 若  $r(A) = m$ ,  $A$  的行向量线性无关;

若  $r(A) = n$ ,  $A$  的列向量线性无关, 即:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.

✓ 矩阵的秩的性质:

$$\textcircled{1} \text{ 若 } A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1$$

$$\text{若 } A = O \Leftrightarrow r(A) = 0$$

$$0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$$

②  $r(A) = r(A^T) = r(A^T A)$   $p_{\text{教材101, 例15}}$

③  $r(kA) = r(A)$  若  $k \neq 0$

④ 若  $A_{m \times n}, B_{n \times s}$ , 若  $r(AB) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(B) \leq n \\ B \text{ 的列向量全部是 } Ax = 0 \text{ 的解} \end{cases}$

⑤  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

⑥ 若  $A$  可逆  $\Rightarrow r(AB) = r(B)$   
 若  $B$  可逆  $\Rightarrow r(AB) = r(A)$  即: 可逆矩阵不影响矩阵的秩.

⑦ 若  $r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow \begin{cases} \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解} \\ \Rightarrow \begin{cases} r(AB) = r(B) \\ A \text{ 在矩阵乘法中有左消去律} \end{cases} \begin{cases} AB = O \Rightarrow B = O \\ AB = AC \Rightarrow B = C \end{cases} ; \end{cases}$

若  $r(B_{n \times s}) = n \Rightarrow \begin{cases} r(AB) = r(B) \\ B \text{ 在矩阵乘法中有右消去律.} \end{cases}$

⑧ 若  $r(A) = r \Rightarrow A$  与唯一的  $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  等价, 称  $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$  为矩阵  $A$  的等价标准型.

⑨  $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$   $\max\{r(A), r(B)\} \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$   $p_{\text{教材70}}$

⑩  $r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$   $r\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \neq r(A) + r(B)$

$$\beta \text{可由} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{线性表示} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A:\beta) \left\{ \begin{array}{l} < n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{有无穷多解} \xrightarrow{\text{当} A \text{为方阵时}} |A| = 0 \\ \Leftrightarrow \text{表示法不唯一} \\ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{线性相关} \Leftrightarrow Ax = 0 \text{有非零解} \end{array} \right. \\ = n \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{有唯一组解} \xrightarrow{\text{当} A \text{为方阵时}} |A| \neq 0 \Rightarrow \text{克莱姆法则} \\ \Leftrightarrow \text{表示法唯一} \\ \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{线性无关} \Leftrightarrow Ax = o \text{只有零解} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\beta \text{不可由} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{线性表示} \Leftrightarrow Ax = \beta \text{无解} \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow r(A) \neq r(A:\beta) \\ \Leftrightarrow r(A) < r(A:\beta) \\ \Leftrightarrow r(A) + 1 = r(A:\beta) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{教材72} \\ \text{讲义87} \end{array}$$

$$\textcircled{\text{⑩}}: \left\{ \begin{array}{l} Ax = \beta \text{有无穷多解} \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ < \neq \end{array} \right\rangle \text{其导出组有非零解} \\ Ax = \beta \text{有唯一解} \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \\ < \neq \end{array} \right\rangle \text{其导出组只有零解} \end{array} \right.$$

线性方程组的矩阵式

 $Ax = \beta$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

向量式

 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta$$

矩阵转置的性质:	$(A^T)^T = A$	$(AB)^T = B^T A^T$	$(kA)^T = kA^T$	$ A^T  =  A $	$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	$(A^T)^* = (A^*)^T$
矩阵可逆的性质:	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	$(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$	$ A^{-1}  =  A ^{-1}$	$(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$	$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1} = A^{-k}$	
伴随矩阵的性质:	$(A^*)^* =  A ^{n-2} A$	$(AB)^* = B^* A^*$	$(kA)^* = k^{n-1} A^*$	$ A^*  =  A ^{n-1}$	$(A \pm B)^* \neq A^* \pm B^*$	$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \frac{A}{ A }$	$(A^k)^* = (A^*)^k$
$r(A^*) = \begin{cases} n & \text{若 } r(A) = n \\ 1 & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0 & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$		$ AB  =  A  B $	$ kA  = k^n  A $	$ A^k  =  A ^k$	$ A \pm B  \neq  A  \pm  B $	$AA^* = A^*A =  A E$ (无条件恒成立)	



$$\left. \begin{array}{l} (1) \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, } \eta_1 + \eta_2 \text{ 也是它的解} \\ (2) \eta \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, 对任意 } k, k\eta \text{ 也是它的解} \\ (3) \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解, 对任意 } k \text{ 个常数} \\ \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 也是它的解} \end{array} \right\} \text{ 齐次方程组}$$

线性方程组解的性质:  $\left\{ \begin{array}{l} (4) \gamma \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, } \eta \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解, } \gamma + \eta \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解} \\ (5) \eta_1, \eta_2 \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的两个解, } \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解} \\ (6) \eta_2 \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, 则 } \eta_1 \text{ 也是它的解} \Leftrightarrow \eta_1 - \eta_2 \text{ 是其导出组 } Ax = o \text{ 的解} \\ (7) \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k \text{ 是 } Ax = \beta \text{ 的解, 则} \\ \quad \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 也是 } Ax = \beta \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 \\ \quad \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \dots + \lambda_k\eta_k \text{ 是 } Ax = o \text{ 的解} \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 0 \end{array} \right\}$

✓ 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵, 若  $r(A) = m \Rightarrow r(A) = r(A: \beta) \Rightarrow Ax = \beta$  一定有解,

当  $m < n$  时, 一定不是唯一解  $\Rightarrow \frac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}} < \frac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$ , 则该向量组线性相关.

$m$  是  $r(A)$  和  $r(A: \beta)$  的上限.

✓ 判断  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  是  $Ax = o$  的基础解系的条件:

- ①  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  线性无关;
- ②  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$  都是  $Ax = o$  的解;
- ③  $s = n - r(A)$  是每个解向量中自由未知量的个数.

✓ 一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

✓ 若  $\eta^*$  是  $Ax = \beta$  的一个解,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  是  $Ax = o$  的一个解  $\Rightarrow \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, \eta^*$  线性无关

✓  $Ax = o$  与  $Bx = o$  同解 ( $A, B$  列向量个数相同), 则:

- ① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等;
- ② 它们对应的部分组有一样的线性相关性;
- ③ 它们有相同的内在线性关系.

✓ 两个齐次线性方程组  $Ax = o$  与  $Bx = o$  同解  $\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A) = r(B)$ .

✓ 两个非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  与  $Bx = \gamma$  都有解, 并且同解  $\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} A: \beta \\ B: \gamma \end{pmatrix} = r(A) = r(B)$ .

✓ 矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$  的行向量组等价  $\Leftrightarrow$  齐次方程组  $Ax = o$  与  $Bx = o$  同解  $\Leftrightarrow PA = B$  (左乘可逆矩阵  $P$ );  $P_{教材101}$

矩阵  $A_{m \times n}$  与  $B_{l \times n}$  的列向量组等价  $\Leftrightarrow AQ = B$  (右乘可逆矩阵  $Q$ ).

✓ 关于公共解的三中处理办法:

① 把(I)与(II)联立起来求解;

② 通过(I)与(II)各自的通解,找出公共解;

当(I)与(II)都是齐次线性方程组时,设  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是(I)的基础解系,  $\eta_4, \eta_5$  是(II)的基础解系,则 (I)与(II)有公共解  $\Leftrightarrow$  基础解系个数少的通解可由另一个方程组的基础解系线性表示.

$$\text{即: } r(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = r(\eta_1, \eta_2, \eta_3; c_1\eta_4 + c_2\eta_5)$$

当(I)与(II)都是非齐次线性方程组时,设  $\xi_1 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2$  是(I)的通解,  $\xi_2 + c_3\eta_3$  是(II)的通解,两方程组有公共解  $\Leftrightarrow \xi_2 + c_3\eta_3 - \xi_1$  可由  $\eta_1, \eta_2$  线性表示. 即:  $r(\eta_1, \eta_2) = r(\eta_1, \eta_2; \xi_2 + c_3\eta_3 - \xi_1)$

③ 设(I)的通解已知,把该通解代入(II)中,找出(I)的通解中的任意常数所应满足(II)的关系式而求出公共解.

**标准正交基**  $n$  个  $n$  维线性无关的向量,两两正交,每个向量长度为 1.

$$\text{向量 } \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \text{ 与 } \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \text{ 的内积 } (\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}$$

$$\text{α与β正交 } (\alpha, \beta) = 0. \quad \text{记为: } \alpha \perp \beta$$

$$\text{向量 } \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \text{ 的长度 } \|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$\text{α是单位向量 } \|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = 1. \quad \text{即长度为1的向量.}$$

✓ 内积的性质: ① 正定性:  $(\alpha, \alpha) \geq 0$ , 且  $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = o$

② 对称性:  $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

③ 双线性:  $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$$

$$(c\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta) = (\alpha, c\beta)$$

$A$  的特征矩阵  $\lambda E - A$ .

$A$  的特征多项式  $|\lambda E - A| = \varphi(\lambda)$ .

✓  $\varphi(\lambda)$  是矩阵  $A$  的特征多项式  $\Rightarrow \varphi(A) = O$

$A$  的特征方程  $|\lambda E - A| = 0$ .  $Ax = \lambda x$  ( $x$  为非零列向量)  $\rightarrow Ax$  与  $x$  线性相关

✓  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$   $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}A$ ,  $\text{tr}A$  称为矩阵  $A$  的迹.

✓ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的  $n$  各元素.

✓ 若  $|A| = 0$ , 则  $\lambda = 0$  为  $A$  的特征值, 且  $Ax = o$  的基础解系即为属于  $\lambda = 0$  的线性无关的特征向量.

✓  $r(A) = 1 \Leftrightarrow A$  一定可分解为  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $A^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)A$ , 从而  $A$  的特征值为:

$$\lambda_1 = \text{tr}A = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad p_{\text{指南358}}.$$

$\oplus (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$  为  $A$  各行的公比,  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  为  $A$  各列的公比.

✓ 若  $A$  的全部特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $f(A)$  是多项式, 则:

① 若  $A$  满足  $f(A) = O \Rightarrow A$  的任何一个特征值必满足  $f(\lambda_i) = 0$

②  $f(A)$  的全部特征值为  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ ;  $|f(A)| = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$ .

✓ 初等矩阵的性质:

$ E(i, j)  = -1$	$ E[i(k)]  = k$	$ E[i, j(k)]  = 1$
$E(i, j)^T = E(i, j)$	$E[i(k)]^T = E[i(k)]$	$E[i, j(k)]^T = E[j, i(k)]$
$E(i, j)^{-1} = E(i, j)$	$E[i(k)]^{-1} = E[i(\frac{1}{k})]$	$E[i, j(k)]^{-1} = E[i, j(-k)]$
$E(i, j)^* = -E(i, j)$	$E[i(k)]^* = kE[i(\frac{1}{k})]$	$E[i, j(k)]^* = E[i, j(-k)]$

✓ 设  $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 对  $n$  阶矩阵  $A$  规定:  $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$  为  $A$  的一个多项式.

$$\checkmark \lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 则: } \begin{cases} kA & k\lambda \\ aA+bE & a\lambda+b \\ A^T & \lambda \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \end{cases} \text{ 分别有特征值 } .$$

$$\checkmark x \text{ 是 } A \text{ 关于 } \lambda \text{ 的特征向量, 则 } x \text{ 也是 } \begin{cases} kA & k\lambda \\ aA+bE & a\lambda+b \\ A^{-1} & \frac{1}{\lambda} \\ A^* & \frac{|A|}{\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda} \\ A^2 & \lambda^2 \\ A^m & \lambda^m \end{cases} \text{ 关于 } \text{ 的特征向量.}$$

$\checkmark A^2, A^m$  的特征向量不一定是  $A$  的特征向量.

$\checkmark A$  与  $A^T$  有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

$A$  与  $B$  相似  $P^{-1}AP = B$  ( $P$  为可逆矩阵) 记为:  $A \sim B$

$A$  与  $B$  正交相似  $P^{-1}AP = B$  ( $P$  为正交矩阵)

$A$  可以相似对角化  $A$  与对角阵  $\Lambda$  相似. 记为:  $A \sim \Lambda$  (称  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准形)

$\checkmark A$  可相似对角化  $\Leftrightarrow n - r(\lambda_i E - A) = k_i$   $k_i$  为  $\lambda_i$  的重数  $\Leftrightarrow A$  恰有  $n$  个线性无关的特征向量. 这时,  $P$  为  $A$  的特征向量拼成的矩阵,  $P^{-1}AP$  为对角阵, 主对角线上的元素为  $A$  的特征值. 设  $\alpha_i$  为对应于  $\lambda_i$  的线性无关的特征向量, 则有:

$$\underbrace{A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}_P = (A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}.$$

⊕: 当  $\lambda_i = 0$  为  $A$  的重特征值时,  $A$  可相似对角化  $\Leftrightarrow \lambda_i$  的重数  $= n - r(A) = Ax = 0$  基础解系的个数.

$\checkmark$  若  $n$  阶矩阵  $A$  有  $n$  个互异的特征值  $\Rightarrow A$  可相似对角化.

✓ 若  $A$  可相似对角化, 则其非零特征值的个数 (重根重复计算)  $= r(A)$ .

$$\checkmark \text{ 若 } A \sim \Lambda \Rightarrow A^k = P\Lambda^k P^{-1}, \quad g(A) = Pg(\Lambda)P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & & \\ & g(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

✓ 相似矩阵的性质:

①  $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$ , 从而  $A, B$  有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

⊕  $x$  是  $A$  关于  $\lambda_0$  的特征向量,  $P^{-1}x$  是  $B$  关于  $\lambda_0$  的特征向量.

②  $\text{tr}A = \text{tr}B$

③  $|A| = |B|$  从而  $A, B$  同时可逆或不可逆

④  $r(A) = r(B)$

⑤  $A^T \sim B^T$ ;  $A^{-1} \sim B^{-1}$  (若  $A, B$  均可逆);  $A^* \sim B^*$

⑥  $A^k \sim B^k$  ( $k$  为整数);  $f(A) \sim f(B)$ ,  $|f(A)| = |f(B)|$

⑦  $A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$

⊕ 前四个都是必要条件.

✓ 数量矩阵只与自己相似.

✓ 实对称矩阵的性质:

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量;

② 不同特征值对应的特征向量必定正交;

⊕: 对于普通方阵, 不同特征值对应的特征向量线性无关;

③ 一定有  $n$  个线性无关的特征向量.

若  $A$  有重的特征值, 该特征值  $\lambda_i$  的重数  $= n - r(\lambda_i E - A)$ ;

④ 必可用正交矩阵相似对角化, 即: 任一实二次型可经正交变换化为标准形;

⑤ 与对角矩阵合同, 即: 任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形;

⑥两个实对称矩阵相似  $\Leftrightarrow$  有相同的特征值.

**正交矩阵**  $AA^T = E$

✓  $A$  为正交矩阵  $\Leftrightarrow A$  的  $n$  个行 (列) 向量构成  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基.

✓ 正交矩阵的性质: ①  $A^T = A^{-1}$ ;

②  $AA^T = A^T A = E$ ;

③ 正交阵的行列式等于 1 或 -1;

④  $A$  是正交阵, 则  $A^T$ ,  $A^{-1}$  也是正交阵;

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵;

⑥  $A$  的行 (列) 向量都是单位正交向量组.

**二次型**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$   $a_{ij} = a_{ji}$ , 即  $A$  为对称矩阵,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

**$A$  与  $B$  合同**  $C^T A C = B$ . 记作:  $A \simeq B$  ( $A, B$  为实对称矩阵,  $C$  为可逆矩阵)

**正惯性指数** 二次型的规范形中正项项数  $p$  **负惯性指数** 二次型的规范形中负项项数  $r - p$

**符号差**  $2p - r$  ( $r$  为二次型的秩)

✓ 两个矩阵合同  $\Leftrightarrow$  它们有相同的正负惯性指数  $\Leftrightarrow$  它们的秩与正惯性指数分别相等.

✓ 两个矩阵合同的充分条件是:  $A \sim B$

✓ 两个矩阵合同的必要条件是:  $r(A) = r(B)$

✓  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$  经过  $\begin{cases} \text{正交变换} \\ \text{合同变换} \\ \text{可逆线性变换} \end{cases}$   $x = Cy$  化为  $f = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2$  **标准形**.

✓ 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的正交变换有关, 但非零系数的个数是由  $\underbrace{r(A)}_{\text{正惯性指数} + \text{负惯性指数}}$  唯一确定的.

✓ 当标准形中的系数  $d_i$  为 -1 或 0 或 1 时, 称为二次型的**规范形**.

✓ 实对称矩阵的正 (负) 惯性指数等于它的正 (负) 特征值的个数.

✓ 惯性定理：任一实对称矩阵  $A$  与唯一对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ 合同.}$$

✓ 用正交变换化二次型为标准形：

① 求出  $A$  的特征值、特征向量；

② 对  $n$  个特征向量正交规范化；

③ 构造  $C$ （正交矩阵），作变换  $x = Cy$ ，则

$$(Cy)^T A (Cy) = y^T C^T A C y = y^T \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix} y \quad \text{新的二次型为 } f = \sum_1^n d_i y_i^2, \Lambda$$

的主对角上的元素  $d_i$  即为  $A$  的特征值.

**施密特正交规范化**  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关,

$$\text{正交化} \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 \end{cases}$$

$$\text{单位化: } \eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \quad \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \quad \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。让第二个解向量先与第一个解向量正交，再把第二个解向量代入方程，确定其自由变量。

例如：  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$  取  $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**正定二次型**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  不全为零,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0.$

**正定矩阵** 正定二次型对应的矩阵.

✓  $f(x) = x^T A x$  为正定二次型  $\Leftrightarrow$  (之一成立):

①  $\forall x \neq 0, x^T A x > 0$ ;

②  $A$  的特征值全大于 0;

③  $f$  的正惯性指数为  $n$ ;

④  $A$  的所有顺序主子式全大于 0;

⑤  $A$  与  $E$  合同, 即存在可逆矩阵  $C$  使得  $C^T A C = E$ ;

⑥ 存在可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^T P$ ;

⑦ 存在正交矩阵  $C$ , 使得  $C^T A C = C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \text{ 大于 } 0).$

✓ 合同变换不改变二次型的正定性.

✓  $A$  为正定矩阵  $\Rightarrow a_{ii} > 0$  ;  $|A| > 0$ .

✓  $A$  为正定矩阵  $\Rightarrow A^T, A^{-1}, A^*$  也是正定矩阵.

✓  $A$  与  $B$  合同, 若  $A$  为正定矩阵  $\Rightarrow B$  为正定矩阵

✓  $A, B$  为正定矩阵  $\Rightarrow A + B$  为正定矩阵, 但  $AB, BA$  不一定为正定矩阵.