姓名________ 学号________ 学院________ 专业班级________ 座位号________

（密封线内不答题）

诚信应考，考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学本科期末考试试卷

《线性代数与解析几何》试卷 A （20-21 学年度第一学期）

注意事项：1. 考生答题前请将密封线内各项信息填写完整；
2. 将所有答案直接书写在本试卷上；
3. 本试卷共八大题，满分 100 分；考试时间 120 分钟；
4. 以下题号/得分表为教师改卷专用，考生勿填。

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得 分									

一.选择题(单选，每题 3 分，共 18 分)

1. A、B 都是对称矩阵，若 AB 亦是对称矩阵，则下列说法不正确的是（ B ）。
（A）A、B 可交换　　（B）A，B 中至少有一个是单位阵
（C）A^T，B 可交换　　（D）A^T，B^T 可交换

2. A 是 n 阶正交矩阵的充分必要条件为（ C ）。
（A）A 的行、列向量组都是正交向量组；　　（B）A 可相似于对角矩阵；
（C）A 的列向量组是 n 维线性空间的标准正交基；　　（D）$|A|=\pm1$；

3. $\{\alpha_i\}_3$ 是由 3 个 4 维行向量构成的向量组，$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4}),\ i=1,2,3$；
$\{\beta_j\}_4$ 是由 4 个 3 维列向量构成的向量组，$\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})^T$，$j=1,2,3,4$；
若向量组 $\{\alpha_i\}_3$ 的秩 $r\{\alpha_i\}_3=2$，则（ C ）。
（A）$r\{\beta_j\}_4<2$　　（B）$r\{\beta_j\}_4>2$
（C）$r\{\beta_j\}_4=2$　　（D）$r\{\beta_j\}_4$ 的值不确定

4. 行列式 $\begin{vmatrix}1&3&5&7\\3&5&7&1\\5&7&1&3\\7&1&3&5\end{vmatrix}$ 的值为（ B ）；
（A）1024　　（B）2048
（C）-1024 为任意常数　　（D）-2048

5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（ C ）；
（A）$a=0,\ b=2$　　（B）$a=2,\ b=0$
（C）$a=0,\ b$ 为任意常数　　（D）$a=2,\ b$ 为任意常数

6. A 是数域上的 n 阶矩阵，则下列说法正确的是（ D ）。

（A）A 有 n 个特征向量，则 A 可对角化；

（B）A 等价于单位阵，则 A 可对角化；

（C）A 是对称矩阵，则 A 可对角化；

（D）A 有 n 个互不相同特征值，则 A 可对角化；

二.填空题(每空 3 分，共 15 分)

1．过点(1,1,1)且与平面 x+2y+z+1=0 平行的平面方程为（ $x+2y+z-4=0$ ）。

2．线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=-2\\ x_1+3x_2+2x_3=1\\ 3x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$ 的解为（ $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ ）。

3．行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&8&1&4\\3&27&1&9\\4&64&1&16\end{vmatrix}$ 的值为（ -12 ）。

4．R^3 中向量 α 在一组基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 下的坐标为 $\alpha=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$，则 α 在另一组基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 下的坐标为（ $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ ）；β_1,β_2,β_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为 ($\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$).

三、(7 分)

$xy=1$ 是 xoy 平面的曲线，求将此曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转面的方程。

解：设 P(x,y,z)为旋转面上任一点

则 P 点位于母线 xy=1 上的点 $P_0(x,y_0,0)$绕 x 轴旋转一周的圆上，且满足：

$y^2+z^2=r^2$，$y_0=r$，$xy_0=1$

所求旋转面方程为：$y^2+z^2=\dfrac{1}{x^2}$

四、(12 分)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, C=B^{-1}A^{*}B,$ 矩阵 A^{*}为 A 的伴随矩阵。

求: $C-2E_3$ 的特征值与特征向量(E_3 为 3 阶单位阵)。

方法一

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad B^{-1}A^{*}B-2E=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&-2\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda E_3-\left(B^{-1}A^{*}B-2E\right)\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\1&\lambda-1&2\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2\to\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$$

对应特征向量：

$$\lambda_1=-1,\ \eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\ \lambda_2=\lambda_3=2,\ \eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

方法二

若 λ,α 是 A 的特征值, 特征向量$\to\frac{1}{\lambda},\alpha$ 是 A^{-1} 的特征值, 特征向量$\to\frac{|A|}{\lambda},\alpha$ 是 A^{*}的特征值, 特征向量

若μ,β是 A^{*}的特征值, 特征向量$\to\mu, B^{-1}\beta$ 是 $B^{-1}A^{*}B$ 的特征值, 特征向量$\to\mu-2, B^{-1}\beta$ 是 $B^{-1}A^{*}B-2E$ 的特征值, 特征向量

求 A 的特征值：$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2=0\ \to\ \lambda_1=4,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

$$\to\ |A|=4,\ B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求与特征值对应的特征向量：$\lambda_1=4,\ \eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \lambda_2=\lambda_3=1,\ \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\to A^{*}$的特征值, 特征向量为：$\mu_1=\frac{|A|}{\lambda_1}=1,\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \mu_2=\mu_3=4,\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\to B^{-1}A^{*}B-2E$ 的特征值, 特征向量为：

$$\delta_1=\mu_1-2=-1,\ \gamma_1=B^{-1}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$\delta_2=\delta_3=4-2=2,\ \gamma_2=B^{-1}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \gamma_3=B^{-1}\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

五、(15 分)

讨论参数 s,t 的取值与非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-4x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1 \\ 3x_1+x_2+sx_3+5x_4=-2 \\ x_1+2x_2+5x_4=t \end{cases}$ 相容性的关系，

当方程组有解时，求出对应齐次方程组的基础解系及非齐次方程组的通解。

解：

方程组增广矩阵 $\tilde{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & s & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & s+10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$

若 t≠1, r($\tilde{A}$)≠r(A), 方程组无解

若 t=1, 方程组有解。此时:

若 s≠-10, r(A)=3，

对应齐次方程基础解系为：$\eta=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

非齐次方程一个特解：$\eta_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

非齐次方程组通解为：$X=\eta_0+k\eta=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

若 s=-10, r(A)=2，

对应齐次方程基础解系为：$\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

非齐次一个特解：$\eta_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

非齐次方程组通解：$X=\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

六、(15 分)

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+2x_1+x_3+1$ 是一个三元二次多项式函数。

① 写出 $f(x_1,x_2,x_3)$ 中二次型部分的系数矩阵 A；

② 求正交矩阵 G，在线性变换 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=G\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=GY$ 下将上述二次型变换为标准型；

③ 在 $X=GY$ 变换下，指出二次多项式方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 是 R^3t 中一个什么图形。

解：① $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $f(X)=X^TAX+b^TX+1$，其中：$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

② 求 A 特征值 $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ $\rightarrow$ $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=-1$

求特征值对应的特征向量 $\lambda_1=2,\ \eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda_2=\lambda_3=-1,\ \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

将 η_2,η_3 正交化 $\rightarrow \beta_2=\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\eta_3-\dfrac{(\eta_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,β_2,β_3 单位化得: $\varepsilon_1=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\rightarrow G=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&2/\sqrt6\end{pmatrix}$ 满足：$G^TAG=G^{-1}AG=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

对应标准型为: $X^TAX=Y^TG^TAGY=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

③ $X=GY\rightarrow f(X)=f(GY)=Y^TG^TAGY+b^TGY+1$

$$=2y_1^2-y_2^2-y_3^2+\sqrt3y_1-\sqrt2y_2+1=2\left(y_1+\frac{\sqrt3}{4}\right)^2-\left(y_2+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2-y_3^2+\frac{9}{8}=0$$

$$\rightarrow\ \frac{\left(y_2+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}{9/8}+\frac{y_3^2}{9/8}-\frac{\left(y_1+\frac{\sqrt3}{4}\right)^2}{9/16}=1$$

旋转曲面图形为开口在 y_1 轴上，中心在 $\left(-\dfrac{\sqrt3}{4},\ -\dfrac{\sqrt2}{2},0\right)$ 处的单叶双曲面。

七、 (12 分)

已知 R^3t (空间直角坐标系)中直线方程 $l:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$, $P(1,2,1)$ 是 l 上一点；

$\Pi_1: x+z+1=0,\ \ \Pi_2: y-z+2=0$ 是 R^3t 中两张平面。求:

① l 与 Π_1 的关系是什么？l 到 Π_1 的距离 $d(l,\Pi_1)$；

② l 与 Π_2 的夹角 θ;

③ 过 P 点与 Π_1,Π_2 两平面交线的平面方程。

解：① 直线 l 的方向 $\vec{s}=(-1,0,1)$，平面 Π_1 的法线方向 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)\to\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{s}=0\to l\ /\!/\ \Pi_1$ 平行

平面 Π_1 的上取一点 $P_1(-1,0,0)\to\overrightarrow{P_1P}=(2,2,1)\to d(l,\Pi_1)=d(P,\Pi_1)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot P_1P\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

② 平面 Π_2 的法线方向 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,-1)\to\ \sin\theta=\left|\cos\sphericalangle\left(\vec{s},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{s}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{2}\to\theta=\dfrac{\pi}{6}$

③ 平面束方程：$\lambda_1(x+z+1)+\lambda_2(y-z+2)=0$。由过 $P(1,2,1)$ 点$\to\lambda_1=-\lambda_2$

所求平面方程为：$x-y+2z-1=0$

三、(6 分)

A 为 n≥2 阶方阵，A^*为 A 的伴随矩阵。证明: $r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$

证明：若 $r(A)=n$，则|A|≠0, 由 $A\cdot A^*=|A|E_n\ \to\ |A^*|\neq 0\ \to\ r(A^*)=n$

若 $r(A)<n-1$，则 A 中所有 n-1 阶子式 $M_{ij}=0,\ \forall i,j=1\sim n\ \to\ A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=0$

$\to A^*$是零矩阵 $\to\ r(A^*)=0$

若 $r(A)=n-1$，则$|A|=0$且 A 中至少有一个非零的 n-1 阶子式 $\to\ r(A^*)\geq 1$。同时，

齐次方程组 $AX=\theta$ (θ 为零向量或零矩阵)的基础解系有 n-r=1 个线性无关解，记为 η

令 $A^*=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，$\beta_j$ 为 A^* 的第 j 列，

由 $A\cdot A^*=|A|E_n=\theta\ \to\ A(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\theta,\ldots,\theta)$

即: $A\beta_j=\theta,\ \forall j=1\sim n\ \to\beta_j$ 为齐次方程组 $AX=\theta$ 的解

$\to$ 所有 β_j 为可由基础解系 η 线性表出 $\to\ r\{\beta_j\}_n=r(A^*)\leq 1$

$\therefore\ r(A^*)=1$

评分标准：
与线性代数有关的概念、原理、方法用错或出现理解错误，不给分；
其它的如四则运算出现错误，则尽量少扣分；
请各位老师据情掌控。