Chương 7:

DÃY HÀM VÀ CHUỖI HÀM

7.1. Đặt $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ và $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Tìm $f(x)$. Chứng minh rằng f_n không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

Bài giải:

Đầu tiên ta đi tìm $f(x)$.

Ta có :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

Nên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Vậy $f(x) = 0\ \forall\, x^2 < 1, f(x) = \frac{1}{2}$ khi $x^2 = 1$ và $f(x) = 1\ \forall x^2 > 1$

Tóm lại hàm số f được xác định như sau :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } |x| = 1 \\ 1 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}$$

Chứng minh f_n không hội tụ về f trên $\mathbb{R}$.

Lấy dãy số $\{x_n\}$ trong $(0,1)$ được xác định như sau:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[2n]{2}}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta có :

$$f(x_n) = 0 \text{ và } f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{3}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do $d(f_n, f)$ không hội tụ về 0 nên $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $\mathbb{R}$.

7.2. Tìm miền hội tụ của chuỗi và tính tổng chuỗi đó?

1) $\sum_{n=0}^{\infty} ax^{2n+1}$, $(a \neq 0)$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$
3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(2+x)^n}$, $(a \neq 0)$
4) $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$
5) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$
6) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(x)$

<u>Bài giải :</u>

1) $\sum_{n=0}^{\infty} ax^{2n+1}$ $(a \neq 0)$

Ta có :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n}x = \sum_{n=0}^{+\infty} ax(x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} by^n$$

Với $b = ax, y = x^2$

Nếu $x = 0$ thì $b = 0$, chuỗi đã cho hội tụ.

Xét khi $x \neq 0$, lúc đó $b \neq 0$. Theo **Mệnh đề 1.3** chương 6 trang 139 thì

$$\sum_{n=0}^{+\infty} by^n \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} y^n \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |y| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Vậy trong cả hai trường hợp trên chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-1 < x < 1$.

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ax^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} by^n = \frac{b}{1-y} = \frac{ax}{1-x^2}.$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k}$

Ta có :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ hoặc } x < -1$$

Chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $x > 1$ hoặc $x < -1$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{(2+x)^n}$, $(a \neq 0)$

Ta có :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(2+x)^n} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+x)^n} \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2+x}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \text{ hoặc } x < -3$$

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{(2+x)^n} = a\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2+x}}\right) = \frac{a(2+x)}{(2+x)-1} = \frac{a(x+2)}{x+1}$$

4) $\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$

Ta có :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k \text{ hội tụ} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k \Leftrightarrow \left|\frac{1+x}{1-x}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Chuỗi đã cho hội tụ với $x < 0$ khi đó :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k = \frac{3}{1-\frac{1+x}{1-x}} = \frac{3(1-x)}{1-x-(1+x)} = \frac{3(x-1)}{2x}$$

5) $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}$

Ta có :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k$$

Nên

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |e^x| < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

Vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $x < 0$. Khi đó:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (e^x)^k = \frac{1}{1-e^x}.$$

6) $\sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(x)$

Ta có

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln^k(x) \text{ hội tụ} \Leftrightarrow |\ln(x)| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Vậy chuỗi chỉ hội tụ khi và chỉ khi $\frac{1}{e} < x < e$. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln^k(x) = \frac{1}{1-\ln(x)}.$$

7.3. Chứng minh $f_n(x) = nxe^{-nx}, x \geq 0$ hội tụ đều trên $[a, +\infty)$ với $a > 0$ nhưng không hội tụ đều trên $[0, a]$.

<u>**Bài giải:**</u>

Chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Đặt $f(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{li}} f_n(x)$.

Ta thấy $f_n(0) = 0$ suy ra

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$$

Theo quy tắc L'Hopital ta có :

$$\lim_{y\to+\infty} yxe^{-yx} = \lim_{y\to+\infty} \frac{(yx)'}{(e^{yx})'} = \lim_{y\to+\infty} \frac{x}{xe^{yx}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^{yx}} = 0.$$

Với $x > 0$ thì ta có :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-nx} = \lim_{y\to+\infty} yxe^{-yx} = 0$$

Tóm lại $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \forall x \geq 0$.

Với $a > 0$ ta cần chứng minh $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Ta có: $f_n(x) = nxe^{-nx} \ \forall x \geq a$. Xét $f_n'(x) = ne^{-nx} - n^2xe^{-nx} = (1 - nx)ne^{-nx} \leq (1 - na)ne^{-nx} \ \forall x \geq a$.

Có $N \in \mathbb{N}$ đủ lớn sao cho $1 - Na <$. Khi đó với $n \geq N$, ta có

$$f_n'(x) \leq ne^{-nx}(1 - na) < 0 \ \forall x \geq a.$$

Suy ra với $n \geq N$ thì f_n là hàm nghịch biến trên $[a, +\infty)$. Khi đó ta có :

$$d\left(f_n|_{[a,+\infty)}, f|_{[a,+\infty)}\right) = \sup_{n\in[a,+\infty)} |f_n(x) - 0| = \sup_{n\in[a,+\infty)} f_n(x) = f_n(a)$$

Vậy $\forall n > N$, $d(f_n, f) = f_n(a)$. Mà $f_n(a) \longrightarrow 0$ (chứng minh trên) nên $\{f_n\}$ hội tụ đều về f trên $[a, +\infty)$.

Chứng minh: với $a > 0$ thì $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0, a]$.

Lấy dãy $\{x_n\}$ trong $[0, a]$ xác định bởi :

$$x_n = \frac{a}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta thấy :

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{a}{n}\right) = n.\frac{a}{n}.e^{-n.\frac{a}{n}} = ae^{-a}.$$

Mà

$$d\left(f_n|_{[0,a]}, f|_{[0,a]}\right) = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = ae^{-a}$$

Vậy $d\left(f_n|_{[0,a]}, f|_{[0,a]}\right)$ không hội tụ về 0 nên f_n không hội tụ đều về f trên đoạn $[0, a]$.

7.4. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Hội tụ đều trên khoảng đóng bất kỳ không chứa ±1,±2,…

Bài giải:

Xét khoảng đóng $[a, b]$ không chứa ±1,±2,…

Có $C > 0$ sao cho $|x| < C\ \forall x \in [a, b]$.

Do $n^2 - n^{\frac{3}{2}} \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 - n^{\frac{3}{2}} > C^2\ \forall n \geq N$

Ta có :

$$\frac{|x|}{n^2 - x^2} - \frac{C}{n^2 - C^2} = \frac{(n^2 + |x|C)(|x| - C)}{(n^2 - x^2)(n^2 - C^2)} \leq 0\ \forall x \in [a, b], n \geq N$$

Lúc đó :

$$\left|\frac{2x}{n^2 - x^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \leq \frac{2C}{n^2 - C^2} \leq \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}}\ \forall x \in [a, b], n \geq N$$

Ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2C}{n^{\frac{3}{2}}}$$

là chuỗi hội tụ nên theo **định lý 1.3** trang 164 chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

hội tụ đều trên $[a, b]$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 7.5

Chứng minh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Hội tụ đều trên $[p, +\infty)$ nếu $p > 1$.

Bài giải:

Với mọi $x \in [p, +\infty)$ ta có:

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^p}.$$

Với $p > 1$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

là một chuỗi số hội tụ (**Mệnh đề 1.3** Chương 6 trang 139). Suy ra chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

hội tụ đều trên $[p, \infty)$ (theo **Định lý 1.3** Chương 7 trang 164).

7.6. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$$

a) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[0,+\infty)$
b) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[-a,a]$ trong đó $0<a<1$
c) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $[b,+\infty)$ trong đó $b>-1$
d) Chứng minh rằng chuỗi trên hội tụ đều trên $(-\infty,-c]$ trong đó $c>1$

Bài giải:

a) Với mọi $x \in [0,+\infty)$ ta có

$$\frac{x^n}{n^2(1+x^n)} < \frac{1}{n^2}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $[0,+\infty)$.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$|1+x^n| \geq 1-|x^n| = 1-|x|^n \geq 1-a^n > 0 \ \ \forall x \in [-a,a] \subset (-1,1)$$

Do $a^n \to 0$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N, a^n < \frac{1}{2}$ hay $0 < \frac{a^n}{1-a^n} < 1$.

Nên

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right| = \frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|} \leq \frac{a^n}{n^2(1-a^n)} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in [-a,a], n \geq N$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $[-a,a]$.

c) Đặt

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)} \text{ với } x \in [b, +\infty)$$

$S(x)$ hoàn toàn xác định theo câu a) và câu b).

Với một $\varepsilon > 0$.

Theo câu a) ta có một $L \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m \geq L$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in [0, +\infty), m \geq L \ \ (1)$$

Theo câu b) ta có một $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in[b,0)} |S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m \geq M$$

hay nói cách khác

$$|S_m(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in [b, 0), m \geq M \ (2)$$

Từ $(1), (2)$ suy ra

$$\sup_{x\in[b,+\infty)} |S_m(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall m \geq \max\{M, L\}$$

d) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta có $|1 + x^n| \geq |x^n| - 1 \geq c^n - 1 > 0$

Do $c^n \to +\infty$ nên có $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq N, c^n > 2$ nghĩa là $\dfrac{c^n}{c^n - 1} < 2$.

Nên

$$\left|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}\right| = \frac{|x|^n}{n^2|1+x^n|} \leq \frac{|x|^n}{n^2(|x|^n - 1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{|x|^n - 1}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{c^n - 1}\right) = \frac{c^n}{n^2(c^n - 1)} \leq \frac{2}{n^2}, \forall x \in [-\infty, -c], n \geq N$$

Do chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ hội tụ nên theo **Định lý 1.3** trang 164 ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$ hội tụ đều trên $(-\infty, -c]$.

7.7. Nếu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Bài giải:

Xét :

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$$

Ta có :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Và chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hội tụ nên suy ra chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

hội tụ đều về hàm f trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Đồng thời

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$$

khả tích trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Do đó :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ nx}{n^3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

7.8. Nếu $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ và

$$f(x) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{li}} f_n(x)$$

Chứng minh rằng dãy hàm trên không hội tụ đều trên [0,1] và

$$\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

<u>Bài giải :</u>

Trước hết ta tính $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, ta xét 2 trường hợp:

- Với $x = 0$ thì $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Nên $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
- Với $x > 0$ thì theo quy tắc L'Hopital, ta có :

$$\lim_{y\to\infty} y.x.e^{-yx^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{yx}{e^{yx^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{(yx)'}{\left(e^{yx^2}\right)'} = \lim_{y\to\infty} \frac{x}{x^2.e^{yx^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{x.e^{yx^2}} = 0$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} n.x.e^{-nx^2} = 0$ nên $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Vậy ta có : $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ nên $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$.

Chứng minh $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Ta xét dãy $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng $x_n \in [0,1]$ và

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n.\frac{1}{\sqrt{n}}.e^{-n.\frac{1}{n}} = \sqrt{n}.e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Do đó ta có :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \sqrt{n}.e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Suy ra $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Chứng minh $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

Thật vậy, do $f \equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Mặt khác,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx.e^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\left(\int e^{-nx^2}d(-nx^2)\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-n})$$

Mà ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

7.9. Nếu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ và $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$.

Tìm $\int_0^1 f(x)dx$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$

Dãy f_n có hội tụ đều về f trên $[0,1]$ không?

Bài giải:

Tìm $\int_0^1 f(x)dx$:

Với $x = 0$ thì $f_n(x) = 0$ nên

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Với $x \neq 0$ thì

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{1+n^2x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{nx} + nx^3} = 0$$

Vậy $f(x) = 0$.

Vì $f \equiv 0$ nên

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

Ta có :

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{2n}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 \frac{d(nx^2)}{1+(nx^2)^2} = \arctan nx^2|_0^1 = \arctan$$

Vì $\arctan n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Dãy $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

Thật vậy.

Ta xét dãy $\{x_n\}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó rõ ràng $x_n \in [0,1]$ và

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n.\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n^2.\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Do đó ta có :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(x_n) = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Suy ra $\{f_n\}$ không hội tụ đều về f trên $[0,1]$.

7.10. Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ thì

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 3.2x + 4.3x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)x^n + \cdots$$

<u>Bài giải:</u>

Ta xét chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Chuỗi này hội tụ với mọi $x \in (-1,1)$.

Đặt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Khi đó

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \forall x \in (-1,1)$$

Theo **Hệ quả 3.4** thì f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \ \forall x \in (-1,1)$$

Tiếp tục áp dụng **Hệ quả 3.4**, ta có f' khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$$
$$= 2 + 3.2x + 4.3x^2 + \cdots + (n+1)nx^{n-1} + \cdots$$

với mọi $x \in (-1,1)$.

7.11. Cho

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}, -1 \le x \le 1$$

Tính $f'(x)$ nếu có .

Bài giải:

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$.

Trước hết ta chứng minh $f(x)$ xác định.

Ta có :

$$\left|\frac{x^n}{n^2(\ln n)^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \ \forall x \in [-1,1], n \geq 3$$

mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ, từ đó ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(ln\, n)^2}$ hội tụ đều trên $[-1,1]$.

Tính $f^{'}(x)$.

Ta có :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln \quad)^2}{(\ln(n+1))^2}$$

Theo quy tắc L'Hopital, ta có :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{(\ln(x+1))^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln\ x}{x}}{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}} = \mathrm{li}_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Do đó $\alpha = 1$.

Nên suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ Có bán kính hội tụ là $R = 1$.

Do đó theo **hệ quả $\mathbf{3.4}$**, f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(\ln n)^2}$$

7.12. Cho

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, -1 < x < 1$$

Tính $f'(x)$ nếu có .

Bài giải:

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trong đó $a_n = 0$ nếu n lẻ và $a_n = \frac{1}{n+1}$ nếu n chẵn.

Khi đó :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vì $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\sqrt[n]{2} . \sqrt[n]{n+\frac{1}{2}}} = 1$

Nên suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là 1.

Do đó theo **hệ quả 3.4**, f khả vi trên $(-1,1)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Do đó :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k+1} x^{2k-1}$$

7.13. Tìm bán kính hội tụ và miền hội tụ của

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$
3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n\ln n}$
6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n.5^n}$
7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$
8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$
9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Bài giải:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{x^n}{2^n}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\left|\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}\right|}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sup\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)=1$$

+ Bán kính hội tụ $R=1$.

+ Miền hội tụ . Xét :

- $x=1$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$$

Ta có

$$\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}=\frac{\left(1+2\,\mathrm{si}\quad\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}=\frac{\left(1+2\,\mathrm{si}\quad\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}$$

$$=\frac{\left(\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^2+\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^2+2\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{2^n}$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}\right)^{2n}}{2^n}=\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right)^{2n}$$

Nên $\dfrac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ không hội tụ về 0.

Vậy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$ phân kì.

- $x=-1$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n\frac{1}{2^n}$$

Theo trên ta có $(-1)^n\dfrac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ không hội tụ về 0.

Vậy $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2}\right)^n}{2^n}$ phân kì.

Miền hội tụ của chuỗi đã cho: $(-1,1)$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right| = \frac{1}{e}$$

+ Bán kính hội tụ $R = e$.

+ Miền hội tụ:

- $x = e$ .Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n}$$

Ta có :

$$\frac{\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!\,e^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Nên $\frac{n!e^n}{n^n}$ là dãy tăng nên không hội tụ về 0.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^n}$ phân kì.

- Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{n!\,e^n}{n^n}$$

Ta có :

$(-1)^n \cdot \frac{n!\,e^n}{n^n}$ không hội tụ về 0 cũng do $\frac{n!\,e^n}{n^n}$ là dãy tăng.

Nên $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{n!\,e^n}{n^n}$ phân kì.

Vậy miền hội tụ : $(-e, e)$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} x^n$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 2$$

+ Bán kính hội tụ $R = \frac{1}{2}$.

+ Miền hội tụ :

- Xét $x = \frac{1}{2}$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Mà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

phân kì nên theo tiêu chuẩn so sánh ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

phân kì.

- Xét $x = -\frac{1}{2}$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ta có :

Vì hàm $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên $(0,\infty)$ nên

$$n\,\mathrm{l}\ \left(1+\frac{1}{n}\right) < n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Suy ra :

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$< (n+2)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\ \forall n$$

hay

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}}\ \forall n$$

Nên $\left\{\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right\}$ là dãy dương giảm và

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0$$

Suy ra $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{n}=0$$

Vậy miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n.3^n\ln n}$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n-1]{\left|\frac{1}{n.3^n.\ln n}\right|}=\frac{1}{3}.\lim_{n\to\infty}\sup\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}\sqrt[n-1]{\ln n}}=\frac{1}{3}$$

+ Bán kính hội tụ $R=3$.

+ Miền hội tụ :

- Xét $x=3$. Chuỗi trở thành

$$\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln n}$$

Đặt $f(x)=\frac{1}{x.\ln x}$, $x\in[2,\infty)$.

Có $f(x)>0\ \forall x\in[2,\infty)$, f là hàm giảm và

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x.\ln x}dx=\int_{\ln}^{+\infty}\frac{1}{u}du$$

Vậy $\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n.\ln n}$ phân kì theo tiêu chuẩn tích phân.

- Xét $x=-3$.Chuỗi trở thành

$$\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n.\ln n}$$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ : $[-3,3)$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n}$

Ta có :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n.5^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-3}{5}\right)^n}{n}$$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = 1$$

+Xét khi $\frac{x-3}{5} = 1.$

Lúc đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, chuỗi này phân kì.

+Xét khi $\frac{x-3}{5} = -1.$

Lúc đó chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-1 \leq \frac{x-3}{5} < 1$ hay $-2 \leq x < 8$.

Vậy miền hội tụ: $[-2,8)$.

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n^2|} = \lim_{n\to\infty} \sup\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$$

Mặt khác $-1 < x + 3 < 1$ tương đương với $-4 < x < -2$.

- Khi $x = -4$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

- Khi $x = -2$. Chuỗi trở thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hội tụ theo định lý chuỗi điều hòa (trang 145).

Vậy miền hội tụ : $(-4, -2)$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

Theo câu 2, chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$$

Hội tụ khi và chỉ khi $-e < x + 3 < e$ hay $-e - 3 < x < e - 3$.

Vậy miền hội tụ $(-e - 3, e - 3)$.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n.3^n}$

Tương tự câu 6. Ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n.3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\left(\frac{5-x}{3}\right)^n}{n}$$

Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $-1 \leq \frac{5-x}{3} < 1$ hay $2 < x \leq 8$.

Vậy miền hội tụ : $(2,8]$.

7.14. Cho $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, $0 \le x \le 1$. Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

Bài giải:

Chứng tỏ (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0.

Ta có $f_n(0) = 0$ và $f_n(1) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nên (f_n) hội tụ từng điểm về hàm 0 tại 0 và 1.

Xét $0 < x < 1$. Đặt

$$\frac{1}{1-x^2} - 1 = c > 0$$

Lúc đó :

$$1 - x^2 = \frac{1}{1+c}$$

Ta có :

$$n^2(1-x^2)^n = \frac{n^2}{(1+c)^n} \le \frac{n^2}{1 + nc + \frac{n(n-1)c^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}}$$

$$\le \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}} \quad \forall n \ge 3$$

Cho $n \to \infty$ ta có :

$$\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6}} \to 0$$

Nên theo nguyên lý kẹp ta có $n^2(1-x^2)^n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy ta có (f_n) hội tụ điểm về hàm 0.

Tính $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$:

Đặt $1-x^2=u$. Dùng kĩ thuật đổi biến, ta có :

$$\int_0^1 n^2x(1-x^2)^n dx=\frac{n^2}{2}\int_0^1 u^n du=\frac{n^2}{2}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1=\frac{n^2}{2(n+1)}$$

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\infty$$

7.15. Cho (f_n) là một dãy hàm hội tụ đều về hàm f trên D, $x\in D'$. Giả sử

$$a_n=\lim_{t\to x} f_n(t)$$

tồn tại với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng (a_n) là dãy hội tụ và

$$\lim_{t\to x} f(t)=\lim_{t\to x} a_n$$

Bài giải:

Chứng minh (a_n) hội tụ.

Ta sẽ chứng minh (a_n) Cauchy. Thật vậy, với $\varepsilon>0$, có $N\in\mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{t\in D}|f_n(t)-f_m(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall m,n>N$$

Xét $m,n>N$ bất kì, do

$$\lim_{t\to x} f_m(t)=a_m \text{ và } \lim_{t\to x} f_n(t)=a_n$$

Nên

$$|a_m-a_n|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Từ điều trên, ta có (a_n) là dãy Cauchy nên hội tụ về a.

Chứng minh $\lim_{t\to x} f(t) = a$

Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{t\in D}|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n > N$$

Có $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n > M$$

Gọi $l = \max\{M, N\} + 1$

Có $\delta > 0$ sao cho $|f_l(t) - a_l| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall t \in D \cap B(x, \delta)$

Lấy $t \in D$, và $t \in B(x, \delta)$. Ta có :

$$|f(t) - a| \leq |f(t) - f_l(t)| + |f_l(t) - a_l| + |a_l - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ta có điều phải chứng minh.

7.16. (Định lý Dini) Cho (f_n) là một dãy hàm liên tục, hội tụ từng điểm về hàm số liên tục f trên $[a, b]$. Chứng tỏ rằng nếu $f_n(x) > f_{n+1}(x)$, $\forall x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, thì (f_n) hội tụ đều trên $[a, b]$.

Bài giải:

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử f_n không hội tụ đều về f, thì $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ sao cho $d(f_n, f) \geq \varepsilon$.

Nên $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tồn tại một $N > n$ và một $x \in [a, b]$ sao cho $f_N(x) - f(x) \geq \varepsilon$

Ta xây dựng dãy số như sau:

$n = 1$ có số n_1 và $x_1 \in [a, b]$ sao cho $f_{n_1}(x_1) - f(x_1) \geq \varepsilon$

$n = n_1$ có số $n_2 > n_1$ và $x_2 \in [a,b]$ sao cho $f_{n_2}(x_2) - f(x_2) \geq \varepsilon$

…

$n = n_{k-1}$ có số $n_k > n_{k-1}$ và $x_k \in [a,b]$ sao cho $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \geq \varepsilon$

...

Dãy (x_k) trong $[a,b]$ nên có dãy con $\left(x_{k_l}\right)$ hội tụ về $x \in [a,b]$

Do $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ nên có N đủ lớn sao cho $\forall n \geq N$, $f_n(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ta có $n_{k_N} \geq N$ nên

$$f_{n_{k_N}}(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{2} \ (1)$$

Mặt khác ta lại có $f_{n_{k_N}}\left(x_{k_l}\right) - f\left(x_{k_l}\right) \geq f_{n_{k_l}}\left(x_{k_l}\right) - f\left(x_{k_l}\right) \geq \varepsilon$. Cho $l \to +\infty$, ta có :

$$f_{n_{k_N}}(x) - f(x) \geq \varepsilon \ (2)$$

Rõ ràng (1) và (2) mâu thuẫn nhau nên ta có điều phải chứng minh.

7.17. Cho $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2 sao cho $\phi(x) = x$ khi $0 \leq x \leq 1$ và $\phi(x) = 2 - x$ khi $1 \leq x \leq 2$.

Đặt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

Chứng minh rằng f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nhưng không khả vi tại mọi điểm trên $\mathbb{R}$.

Bài giải:

Nhận thấy $\phi(x) = 1 - |1 - x|\ \forall x \in [0,2]$ nên liên tục trên $[0,2]$. Mặt khác f là hàm tuần hoàn chu kỳ 2 nên ta có f liên tục trên $\mathbb{R}$.

Xét dãy các hàm:

$$f_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

liên tục trên $\mathbb{R}$, ta có $\left||f_n|\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n = a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 4$ nên $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ hội tụ đều về f. Suy ra f cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta chứng minh tại mọi $x \in \mathbb{R}$ thì f đều không khả vi. Thật vậy, giả sử tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = L$$

Đầu tiên ta chứng minh bất đẳng thức sau:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$$

Thật vậy, vì $0 \leq \phi(t) \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên nếu $|x - y| \geq 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta xét khi $|x - y| < 1$. Giả sử $x \leq y$ và ta có $y - 1 < x \leq y$.

Vì luôn tồn tại $T \in \mathbb{Z}$ sao cho $2T \leq x < 2T + 2$ (chọn $T = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$) nên ta đặt $a = x - 2T, b = y - 2T$ ($a \in [0,2]$ và $b - 1 < a \leq b$), bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$|\phi(a) - \phi(b)| \leq |a - b|\ \forall a \in [0,2], b \in [a, a+1) \subset [a, 2] \cup [2,3)$$

- Nếu $b \leq 2$, ta có

$$|\phi(a) - \phi(b)| = |(1 - |1 - a|) - (1 - |1 - b|)| = \left||1 - a| - |1 - b|\right|$$
$$= \max\{|1 - a| - |1 - b|, |1 - b| - |1 - a|\} \leq |a - b|$$

- Nếu $b \in (2,3)$ thì $a \in (1,2)$, ta có $\phi(b) = \phi(b - 2) = b - 2$ và $\phi(a) = 2 - a$.

Suy ra $|\phi(a) - \phi(b)| \leq \phi(a) + \phi(b) = b - 2 + 2 - a = |b - a|$

Vậy bất đẳng thức đư c chứng minh.

Xét dãy

$$y_n = x + \frac{t_n}{2^{2n+1}}$$

Với $t_n = \pm 1$ được xác định như sau:

(i) $t_n = 1$ nếu $\{4^n x\} \le \frac{1}{2}$

(ii) $t_n = -1$ nếu $\{4^n x\} > \frac{1}{2}$

(Ký hiệu $\{x\}$ chỉ phần lẽ của số thực x, đư c tính bằng: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$)

Ta sẽ chứng minh với cách chọn t_n như trên thì điều sau được thỏa mãn:

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Thật vậy, ta có :

Trường hợp 1: $\{4^n x\} \le \frac{1}{2}$

<u>Khả năng (1.a):</u> $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \le \{4^n x\} \le \frac{1}{2}$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\}) = \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x + \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right) = \{4^n x\} + \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

<u>Khả năng (1.b):</u> $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d + 1$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $0 \le \{4^n x\} < \frac{1}{2}$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\} + 1) = 1 - \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x + \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{3}{2}\right) = 2 - \left(\{4^n x\} + \frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \{4^n x\}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Trường hợp 2: $\{4^n x\} > \frac{1}{2}$

<u>Khả năng (2.a):</u> $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $\frac{1}{2} \leq \{4^n x\} \leq 1$ nên ta có

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\}) = \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x - \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} - \frac{1}{2}\right) = \{4^n x\} - \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

<u>Khả năng (2.b):</u> $\lfloor 4^n x \rfloor = 2d + 1$ với $d \in \mathbb{Z}$

Vì $\frac{1}{2} \leq \{4^n x\} < 1$ nên ta có :

$$\phi(4^n x) = \phi(4^n x - 2d) = \phi(\{4^n x\} + 1) = 1 - \{4^n x\}$$

Và

$$\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) = \phi\left(4^n x - \frac{1}{2} - 2d\right) = \phi\left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right) = 2 - \left(\{4^n x\} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2} - \{4^n x\}$$

Suy ra

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}$$

Vậy ta có :

$$\left|\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right| = \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Mặt khác ta cũng có $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$. Suy ra $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

Ta có phép biến đổi sau:

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x}\right| = 2^{2n+1}.\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\phi(4^k x + t_n.2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right|$$

$$= 2^{2n+1}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right)\right|$$

(Vì với $k \geq n+1$ thì

$\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x) = \phi\left(4^k x + 2.t_n 2^{2(k-n-1)}\right) - \phi(4^k x) = 0$ do ϕ

tuần hoàn chu kỳ 2)

$$\geq 2^{2n+1}\left(\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\phi\left(4^n x + \frac{t_n}{2}\right) - \phi(4^n x)\right)\right|\right.$$

$$\left. - \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\phi(4^k x + t_n 2^{2k-2n-1}) - \phi(4^k x)\right)\right|\right)$$

$$\geq 2^{2n+1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n.\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left|t_n 2^{2k-2n-1}\right|\right) = 2^{2n+1}\left(\frac{3^n}{2^{2n+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k 2^{-(2n+1)}\right)$$

$$= 2^{2n+1}\left(\frac{3^n}{2^{2n+1}} - 2^{-(2n+1)}\frac{3^n - 1}{2}\right) = \frac{3^n + 1}{2}\ (*)$$

Đặt $u_n = \frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}$ thì do f khả vi tại x nên dãy $\{u_n\}$ hội tụ về $L \in \mathbb{R}$. Nhưng $(*)$ lại cho thấy u_n không bị chặn. Điều này gây mâu thuẫn và kết thúc chứng minh.

7.18. Cho (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm hội tụ đều trên D. Chứng minh rằng $(f_n + g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Hơn nữa, giả sử thêm rằng (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn. Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

<u>Bài giải:</u>

Chứng minh $(f_n + g_n)$ hội tụ đều trên D.

Cho $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ và } \sup_{x\in D}|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \forall n > N$$

Với mọi $n > N$, ta có :

$$|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in D$$

Suy ra

$$\sup_{x\in D}|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Chứng tỏ rằng dãy hàm $(f_n g_n)$ cũng hội tụ đều trên D.

Do (f_n) và (g_n) là hai dãy hàm bị chặn nên có $C_1 > 0$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)| < C_1 \text{ và } \underset{x\in D}{\mathrm{s}}\,|g_n(x)| < C_1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Cho $\varepsilon > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_1} \ \forall n \geq N$$

Lúc đó, ta có :

$$\sup_{x\in D}|g(x)| \le \sup_{x\in D}|g_N(x) - g(x)| + \sup_{x\in D}|g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_1} + C_1$$

Nên có $C_2 > 0$ sao cho $\sup_{x\in D}|g(x)| < C_2$

Có $M \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_2}\ \forall n \ge M$$

Đặt $\max\{M, N\} = L$. Với mọi $n > L$ ta có :

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \left|f_n(x)\big(g_n(x) - g(x)\big) + g(x)\big(f_n(x) - f(x)\big)\right|$$

$$\le |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < C_1\frac{\varepsilon}{4C_1} + C_2\frac{\varepsilon}{4C_2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\forall x \in D$$

Nên ta có $\sup_{x\in D}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Vậy $(f_n.g_n)$ hội tụ đều về $f.g$ trên D.

7.19. Xét

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < \dfrac{1}{n+1} \\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \text{khi } \dfrac{1}{n+1} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{khi } \dfrac{1}{n} < x \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng (f_n) hội tụ từng điểm nhưng không hội tụ đều về một hàm liên tục.

Bài giải:

Chứng minh (f_n) hội tụ từng điểm :

Với $f_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ nên $\big(f_n(0)\big)$ hội tụ.

Với $x \ne 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{1}{N} < x$

Lúc đó, $\forall n > N$ ta có $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < x$ nên $f_n(x) = 0$ nên ta cũng có $\left(f_n(x)\right)$ hội tụ.

Chứng minh (f_n) không hội tụ đều về hàm 0.

Ta có :

$$d(f_n, 0) \geq \left|f_n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)\right| = \left|\sin^2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Điều này suy ra (f_n) không hội tụ đều về hàm 0.

7.20. Chứng tỏ rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$$

không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ nhưng là chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

Bài giải:

Chứng tỏ chuỗi đã cho không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Cho $x \in \mathbb{R}$

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{(x^2+n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$

Mà chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Nên

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$$

không hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$

Chứng minh chuỗi hàm hội tụ đều trên mọi khoảng bị chặn $[a, b]$.

Gọi $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}, x \in \mathbb{R}$

Ta có $S_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2} x^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n} = x^2 \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$

Đặt

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n^2}, v_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n}$$

Thì theo tiêu chuẩn Leibnitz $u_m \to u, v_m \to v$ khi $m \to +\infty$ và $S_m(x) = u_m x^2 + v_m$. Đặt $S(x) = ux + v$. Do tồn tại $C > 0$ sao cho $x^2 < C\ \forall x \in [a, b]$ nên ta có

$$d(S_m, S) = \sup_{x \in [a,b]} |(u_m - u)x^2 + (v_m - v)| \leq |u_m - u|C + |v_m - v|$$

Nên $d(S_m, S) \to 0$ khi $m \to +\infty$, nghĩa là chuỗi số đã cho hội tụ đều trên $[a, b]$.

7.21. Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ và $h(x) = |x|$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

<u>Bài giải:</u>

Khai triển hàm $g(x) = x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos 0x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$$

Dùng tích phân từng phần ta có :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{x}{n}\sin n \quad \begin{matrix}\pi\\ -\pi\end{matrix} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\sin nxdx = \frac{1}{n^2}\cos nx \quad \begin{matrix}\pi\\ -\pi\end{matrix} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin \qquad dx = -\frac{x}{n}\cos n \quad \begin{matrix}\pi\\ -\pi\end{matrix} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\cos nxdx = -\frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

Vậy suy ra:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

Nên

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\cos n\pi\,.\sin nx$$

Khai triển hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 0x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx \qquad \frac{2\pi^2}{3}$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx$$

Dùng tích phân từng phần ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{x^2}{n} \sin \qquad {}_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{4\pi}{n^2} \cos n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = -\frac{x^2}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = 0$$

Vậy suy ra :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \qquad \frac{4}{n^2} \cos n\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = 0$$

Nên

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi \,.\cos n$$

Khai triển hàm $h(x) = |x|$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Ta có:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos 0x\, dx \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x\, dx \qquad \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

và với $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx\, dx$$

Dùng kết quả tính toán hàm $g(x)$, ta suy ra :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} - \quad \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} \quad \cos nx \, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\pi} x \cos nx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{co} \qquad dx = 2\left(\frac{x}{n}\sin nx \quad \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2}$$

Và $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{0} - \quad \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} \quad \sin nx \, dx$

$$= 2\int_{0}^{\pi} x \sin nx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{si} \qquad dx = 2\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{2\pi}{n}\cos n\pi$$

$$= 0$$

Vậy suy ra:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2} \text{ và } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx \, dx = 0$$

Nên

$$h(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2} . \cos$$

7.22. Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

liên tục trên miền $x > 1$ và có đạo hàm mọi cấp trên miền này.

<u>**Bài giải:**</u>

Theo bài **7.5** ta thấy rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

hội tụ đều trên mỗi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 1$ (*). Nên $f(x)$ liên tục trên $(1, \infty)$.

Đặt $f_n = \dfrac{1}{n^x}$, ta có: $f_n' = \dfrac{-\ln n}{n^x}$.

Xét chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln}{n^x}$

Xét một $x_0 > 1$.

Ta có :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\alpha t^{\alpha-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\alpha t^\alpha} = 0 \text{ (Do } \alpha > 1 \text{ áp dụng quy tắc L'Hopital)}$$

Nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{x_0-1}{2}}} = 0$$

Vậy có số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\ln n < n^{\frac{x_0-1}{2}}$ với mọi $n \geq N$

Ta có :

$$\frac{\ln n}{n^x} < \frac{n^{\frac{x_0-1}{2}}}{n^{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}} \ \forall x \geq x_0, n \geq N$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$ hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x}$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[x_0, \infty), x_0 > 1 (**)$

Từ (*) và (**), áp dụng **Mệnh đề 2.3** (trang 169), ta đư c f có đạo hàm liên tục trên $(1, \infty)$ và

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \ \forall x \in (0, \infty)$$

Giả sử hàm số có đạo hàm liên tục cấp k,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$$

và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^x}$ hội tụ đều trên mỗi khoảng $[x_0, \infty), x_0 > 1$.

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x}$$

Tương tự như trên, xét một $x_0 > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^{\frac{x_0-1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x_0-1}{2(k+1)}}} \right)^{k+1} = 0$$

Nên có số $M \in \mathbb{N}$ sao cho $\ln^{k+1}(n) < n^{\frac{x_0-1}{2}}$ với mọi $n \geq M$

$$\frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x} < \frac{n^{\frac{x_0-1}{2}}}{n^{x_0}} = \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}} \ \forall x \geq x_0, n \geq M$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{x_0+1}{2}}}$ là chuỗi hội tụ nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^{k+1}(n)}{n^x}$ hội tụ đều trên mọi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 1$.

Vậy f có đạo hàm liên tục cấp $k+1$ trên $(1,\infty)$ và

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{k+1}(n)}{n^x}\ \forall x \in (0,\infty)$$

Ta có điều phải chứng minh.

7.23. Chứng tỏ rằng hàm

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

xác định và thuộc lớp C^∞ trên miền $x > 0$.

Bài giải:

Thực ra ta chỉ cần chứng minh cho hàm

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}\ \forall x > 0$$

Vì $f(x) = 2g(\pi x) - 1\ \forall x > 0$.

Đầu tiên ta chứng minh g xác định.

Với một $x > 0$. Có số $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nx \geq 1$. Ta có

$$\frac{1}{e^{n^2 x}} \leq \frac{1}{e^{nNx}} \leq \frac{1}{e^n}\ \forall n \geq N$$

Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ hội tụ nên $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ hội tụ.

Vậy g xác định.

Đặt $g_n(x) = e^{-n^2 x}$, thì $g_n^{(k)}(x) = (-n^2)^k e^{-n^2 x}$.

Tượng tự bài trên ta chỉ cần chứng minh với một $k \in \mathbb{N}$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x)$$

hội tụ tuyệt đối trên mỗi khoảng $[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$.

Thật vậy, với một $x_0 > 0$, có $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nx_0 \geq 2$.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2k}}{e^n} = 0$ (có thể chứng minh bằng quy tắc L'Hopital cho $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y^{2k}}{a^y}, a > 1$).

Nên có $M \in \mathbb{N}$ sao cho $\dfrac{n^{2k}}{e^n} \leq 1\ \forall n \geq M$.

Đặt $\max\{M, N\} = L$ ta có

$$\left|g_n^{(k)}(x)\right| = \frac{n^{2k}}{e^{n^2x}} \leq \frac{n^{2k}}{e^{nNx}} \leq \frac{n^{2k}}{e^{2n}} \leq \frac{1}{e^n}\ \forall n \geq L$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x)$ hội tụ tuyệt đối trên $[x_0, \infty), x_0 > 0$.

Ta có điều phải chứng minh.

7.24. Với những giá trị nào của α thì

a) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ từng điểm trên $[0,1]$

b) Dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-n}$ hội tụ đều trên $[0,1]$

Bài giải:

a) Ta chứng minh với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì dãy hàm f_n hội tụ từng điểm trên $[0,1]$.

Thật vậy.

Với $x = 0$ thì $f_n(0) = 0$

Với $x > 0$, ta có

$$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{e^{nx}}$$

- Nếu $\alpha \leq 0$ thì hiển nhiên

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

- Nếu $\alpha > 0$, ta có $e^x > 1$ và

$$0 \le \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \le \frac{n^{[\alpha]+1}}{(e^x)^n}$$

Mà $\frac{n^{[\alpha]+1}}{(e^x)^n} \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên theo nguyên lý kẹp thì $\frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do đó :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in [0,1]$$

Vậy với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì f_n hội tụ từng điểm trên $[0,1]$.

b) Ta chứng minh dãy hàm f_n hội tụ đều trên $[0,1]$ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

Bởi vì với $\alpha \ge 1$ thì ta chọn $x_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Suy ra $f_n(x_n) = n^{\alpha-1}e^{-1} \ge e^{-1}$.

Do đó :

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \ge f_n(x_n) \ge e^{-1}$$

Nên f_n không hội tụ đều trên $[0,1]$ khi $\alpha \ge 1$.

Bây giờ ta chứng minh với $\alpha < 1$ thì dãy hàm f_n hội tụ đều trên $[0,1]$. Tức là chứng minh

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} \frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \to 0$$

khi $n \to \infty$.

Ta khẳng định $f_n(x) \le \frac{1}{n^{1-\alpha}}\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N} (*)$

Thật vậy, $(*)$ tương đương với

$$\frac{n^\alpha x}{e^{nx}} \le \frac{1}{n^{1-\alpha}} \Leftrightarrow nx \le e^{nx}$$

Xét hàm $g(t) = e^t - t,\ t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$g'(t) = e^t - 1 \ge 1 - 1 = 0\ \forall t \ge 0$$

Do đó hàm $g(t)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$. Suy ra $g(t) \ge g(0) = 1 > 0$.

Nên ta có $nx \leq e^{nx}$ $\forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.

Ta đã chứng minh $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$ $\forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$.

Nên khi $n \to +\infty$ thì $d(f_n, f) \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}} \to 0, \forall \alpha < 1$.

Vậy với mọi $\alpha < 1$ thì dãy hàm $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ hội tụ đều trên $[0,1]$.

7.25. Cho $0 \leq a_n \leq 1, \forall n \geq 0$. Chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $0 \leq x < 1$ và có tổng $\leq \frac{1}{1-x}$.

Hơn nữa, nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ, chứng minh rằng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$hội tụ khi $0 \leq x \leq 1$ và có tổng $\leq \min\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \frac{1}{1-x}\right)$.

<u>**Bài giải:**</u>

Khi $0 \leq a_n \leq 1$:

Ta có $|a_n x^n| \leq x^n$ $\forall n$

Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ là chuỗi hình học hội tụ do $0 \leq x < 1$.

Nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cũng hội tụ theo tiêu c ẫn so sánh

Ngoài ra ,

$$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{m} x^n \quad \forall m \geq 0$$

Cho $m \to \infty$ thì ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-n}$$

Khi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ :

Ta có $|a_n x^n| = a_n x^n \leq a_n \; \forall n \geq 0$.

Nên $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh do $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Khi $x = 1$, ta có :

$$\sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \quad \forall m \geq 0$$

Cho $m \to \infty$ thì ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \; \forall 0 \leq x \leq 1$$

Với $0 < x < 1$, theo chứng minh phần trên thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \frac{1}{1-x} \; \forall 0 \leq x < 1$$

Nên ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \min\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \frac{1}{1-x}\right)$$

7.26. Cho chuỗi số dương hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leq 1$.

Bài giải:

Ta có $|a_n x^n| \leq a_n \ \forall x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}$.

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x^n|$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh do $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ.

Vậy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|x| \leq 1$.

7.27. Chứng minh rằng

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ , \qquad |x| < 1,$$

Và

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k , m > 0, m \notin \mathbb{N}, |x| < 1.$$

Bài giải:

Chứng minh:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \ \ |x| < 1,$$

Xét chuỗi số sau:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}$$

Ta thấy $f(x)$ hội tụ với mọi x thỏa $|x| < 1$

Nên ta cũng có :

$$F(x) = \ln(x+1) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-t)^{n-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Ta có điều phải chứng minh

Chứng minh :

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k, m > 0, m \notin \mathbb{N}, |x| < 1.$$

Đầu tiên ta chứng minh chuỗi số đã cho hội tụ. Thật vậy, với $k > m$, ta có:

$$\left|\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\right|$$

$$= \left|\frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)(m-\lfloor m\rfloor-1)\dots\big(m-(\lfloor m\rfloor+k-\lfloor m\rfloor-1)\big)}{(k-\lfloor m\rfloor-1)!\,(k-\lfloor m\rfloor)\dots k}\right|$$

$$= \frac{(\lfloor m\rfloor+1-m)\dots\big((\lfloor m\rfloor+k-\lfloor m\rfloor-1)-m\big)}{(k-\lfloor m\rfloor-1)!} . \frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)}{(k-\lfloor m\rfloor)\dots k}$$

$$< 1. \frac{m(m-1)\dots(m-\lfloor m\rfloor)}{(k-\lfloor m\rfloor)\dots k} < 1$$

Nên chuỗi đã cho hội tụ khi $|x| < 1$

Đặt

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k, |x| < 1$$

Ta có :

$(1+x)f'(x)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!} x^{k-1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!} x^{k}$$

$$= m + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{k!} x^{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!} x^{k}$$

$$= m + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(k+m-k)}{k!} x^{k}$$

$$= m + m(f(x)-1) = mf(x)$$

Vậy ta có $mf(x) = (1+x)f'(x)$. Đặt $g(x) = f(x).(1+x)^{-m}$, ta có :

$$g'(x) = (1+x)^{-(\square+1)}\big(f'(x)(1+x) - mf(x)\big) = 0$$

Suy ra $g(x) = g(0) = f(0) = 1\ \forall x \in (-1,1)$, nghĩa là $f(x) = (1+x)^m$

Ta có điều phải chứng minh.

7.28. Cho

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Chứng minh rằng

a) $E(x)E(y) = E(x+y)$

b) $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$

c) $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$

d) $\big(C(x)\big)^2 + \big(S(x)\big)^2 = 1$

Bài giải:

Vì $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$ nên ta nhận thấy $E(x), C(x), S(x)$ hội tụ đều.

a) Gọi $E_M(x)$ là tổng riêng phần của chuỗi $E(x)$, ta có :

$$E_M(x) = \sum_{n=0}^{M}\frac{x^n}{n!}, E_M(y) = \sum_{n=0}^{M}\frac{y^n}{n!}$$

$$E_M(x).E_M(y) = \sum_{n=0}^{M}\frac{x^n}{n!}.\sum_{m=0}^{M}\frac{y^m}{m!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k} + \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$|E_M(x).E_M(y) - E_M(x+y)| = \left|\sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}\frac{x^k}{k!}.\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right|$$

$$\leq \left|\sum_{n=M+1}^{2M}\frac{(|x|+|y|)^n}{n!}\right| < \left|\sum_{n=M+1}^{+\infty}\frac{|x|+|y|^n}{n!}\right|$$

Suy ra $|E_M(x).E_M(y) - E_M(x+y)| \to 0$ khi $M \to +\infty$

Vậy $E(x)E(y) = E(x+y)$

b) Đặt $C_M(x)$ và $S_M(x)$ là các tổng riêng phần của $C(x)$ và $S(x)$

$$C_M(x) = \sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, S_M(x) = \sum_{k=0}^{M}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ta có :

$$C_M(x)C_M(y) - S_M(x)S_M(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} . \sum_{h=0}^{M}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h)!} - \sum_{k=0}^{M}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} . \sum_{h=0}^{M}(-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} + \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \sum_{n=1}^{M+1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1} \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \left(\frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{M}(-1)^M \frac{x^{2k+1}y^{2M-2k+1}}{(2k+1)!\,(2M-2k+1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k}y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M}\sum_{k=n-M}^{M}(-1)^n \frac{x^{2k+1}y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

Đặt

$$A = 1 + \sum_{n=1}^{M} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \left(\frac{x^{2k} y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!} - \frac{x^{2k+1} y^{2n-2k-1}}{(2k+1)!\,(2n-2k-1)!} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} C_{2n}^{k}\, x^k y^{2n-k}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{M} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}.(x+y)^{2n} = C_M(x+y)$$

Và

$$B = -\sum_{k=0}^{M} (-1)^M \frac{x^{2k+1} y^{2M-2k+1}}{(2k+1)!\,(2M-2k+1)!}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{2M} \sum_{k=n-M}^{M} (-1)^n \frac{x^{2k} y^{2n-2k}}{(2k)!\,(2n-2k)!}$$

$$- \sum_{n=M+1}^{2M} \sum_{k=n-M}^{M} (-1)^n \frac{x^{2k+1} y^{2n-2k+1}}{(2k+1)!\,(2n-2k+1)!}$$

Thì

$$|B| \le \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{2M} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{2M} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$< \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Ta có :

$$|C_M(x)C_M(y) - S_M(x)S_M(y) - C_M(x+y)| = |B|$$

$$< \frac{(|x|+|y|)^{2M+2}}{(2M+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \sum_{n=M+1}^{+\infty} \frac{(|x|+|y|)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Nên $|C_M(x)C_M(y) - S_M(x)S_M(y) - C_M(x+y)| \to 0$ khi $M \to +\infty$ và ta có điều phải chứng minh.

c) Theo câu b) ta có $C(x) = C(x+y)C(-y) - S(x+y)S(-y)$ (*). Mặt khác nhận thấy $C(-t) = C(t)$ và $S(-t) = -S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ nên (*) thành:

$$\begin{aligned} C(x) &= C(x+y)C(y) + S(x+y)S(y) \\ &= \big(C(x)C(y) - S(x)S(y)\big)C(y) + S(x+y)S(y) \\ &= C(x)C^2(y) - S(x)S(y)C(y) + S(x+y)S(y) \end{aligned}$$

Mặt khác, theo câu d) , ta có $C(x) = C(x)\big(C^2(y) + S^2(y)\big)$. Suy ra:

$$C(x)C^2(y) + C(x)S^2(y) = C(x)C^2(y) - S(x)S(y)C(y) + S(x+y)S(y)$$

$$\Leftrightarrow S(y)\big(S(x+y) - S(x)C(y) - C(x)S(y)\big) = 0 \ (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có $S(x)\big(S(x+y) - S(x)C(y) - C(x)S(y)\big) = 0$ (2)

Với $x, y \in \mathbb{R}$ bất kỳ, nếu $S(x), S(y)$ có một số khác 0, (1) hoặc (2), ta suy ra ngay điều phải chứng minh.

Ngược lại, nếu $S(x) = S(y) = 0$, theo câu d) ta có $|C(x)| = |C(y)| = 1$ nên $|C(x+y)| = |C(x).C(y) - S(x)S(y)| = 1$, nghĩa là $S(x+y) = 0$. Vậy ta cũng đã có $S(x+y) = C(x)S(y) + S(x)C(y)$.

Trong cả 2 trường hợp, khẳng định của đề bài đều được chứng minh.

d) Từ đẳng thức b) ta cho $y = -x$ thì do $C(-x) = C(x)$ và $S(-x) = -S(x)$ nên

$$\big(C(x)\big)^2 + \big(S(x)\big)^2 = C(0) = 1\,.$$

7.29. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Bài giải:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$

Ta có $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n\to\infty} \sup n =$

Vậy chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $x+3=0$ hay $x=-3$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

Theo **Định lý chuỗi điều hòa** (trang 145), chuỗi số trên hội tụ khi và chỉ khi $x >$ 1.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$

Khi $x=0$, hiển nhiên chuỗi số hội tụ

Xét $x \neq 0$. Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^n.\sin\frac{x}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2.\sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right|\left|\frac{x}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{\left|\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right||x|} = \frac{2}{3} < 1$$

Nên chuỗi đã cho hội tụ với mọi $x \neq 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi số là $\mathbb{R}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

Ta có $\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

Do $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh, ta đư c $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

- Với $x = 0$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

Nên chuỗi này không hội tụ.

- Với $x < 0$, đặt $x = -t$ với $t > 0$, ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}.\cos(-nt) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt}.\cos nt$$

Ta chứng minh chuỗi này không hội tụ. Thật vậy, giả sử chuỗi trên hội tụ thì

$$\lim_{n\to\infty} e^{nt}.\cos nt = 0$$

Mà $|e^{nt} \cos nt| > |\cos nt|$ nên ta cũng có $\cos nt$ khi $t \to +\infty$

Mặt khác $\cos(n+1)t = \cos nt.\cos t - \sin nt.\sin t$

Nên ta có $\sin t.\sin nt \to 0$ khi $n \to +\infty$ (1)

Mặt khác, vì $\lim_{n\to\infty} \cos nt = 0$. Nên $\lim_{n\to\infty} |\sin nt| = 1$ (2)

Từ (1) và (2), ta phải có $\sin t = 0$, suy ra $t = k\pi$. Như vậy $\sin nt = \sin nk\pi$, mâu thuẫn với (2).

Vậy với $x < 0$ thì chuỗi trên không hội tụ.

- Với $x > 0$ thì ta có

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \le \frac{1}{e^{nx}}\ \forall n \in \mathbb{N}, x > 0$$

Mà $\dfrac{1}{e^x} < 1$.

Nên chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{nx}}$ hội tụ. Do đó theo tiêu chuẩn so sánh ta suy ra chuỗi $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ cũng hội tụ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(0, +\infty)$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Ta có :

$$\left|\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right| \le \frac{1}{(2n-2)^2} = \frac{1}{4(n-1)^2}\ \forall n \ge 2, x \in \mathbb{R}$$

Ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)^2}$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.