1) Chứng minh hai vô cùng bé sau là tương đương: $\int\limits_0^{x^2}\left(1+7\sin^2 t\right)^{\frac{1}{t}}dt$ và $\sin^2 x$

Giải:
Ta xét

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\left(1+7\sin^2 t\right)^{\frac{1}{t}}dt}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\left(1+7\sin^2 t\right)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2}=$$ (Sử dụng sinx ~ x khi $x\to 0$ )

$$\overset{(L)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(1+7\sin^2\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(1+7\sin^2\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Đặt $y=\left(1+7\sin^2\left(x^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}\Leftrightarrow \ln y=\dfrac{\ln\left(1+7\sin^2\left(x^2\right)\right)}{x^2}$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+7\sin^2\left(x^2\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{7\sin^2\left(x^2\right)}{x^2}=$$ (sử dụng ln(1+u)~u khi $u->0$ )

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}\left(7\sin\left(x^2\right)\right)=1.7.0=0$$

=> $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$

Do đó, hai vô cùng bé $\int\limits_0^{x^2}\left(1+7\sin^2 t\right)^{\frac{1}{t}}dt$ và $\sin^2 x$ là tương đương khi $x\to 0$.