

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел 1 Множества и отношения

	Наименование раздела	Оценочные средства текущего контроля успеваемости
1	Множества и отношения	Домашние задания №1– №4 Тест №1
2	Алгебраические структуры	Контрольная работа №1 Контрольная работа №2
3	Нечеткие множества	Контрольная работа №3 Тест №2
Промежуточная аттестация:		Письменная экзаменационная работа

Лекция 1

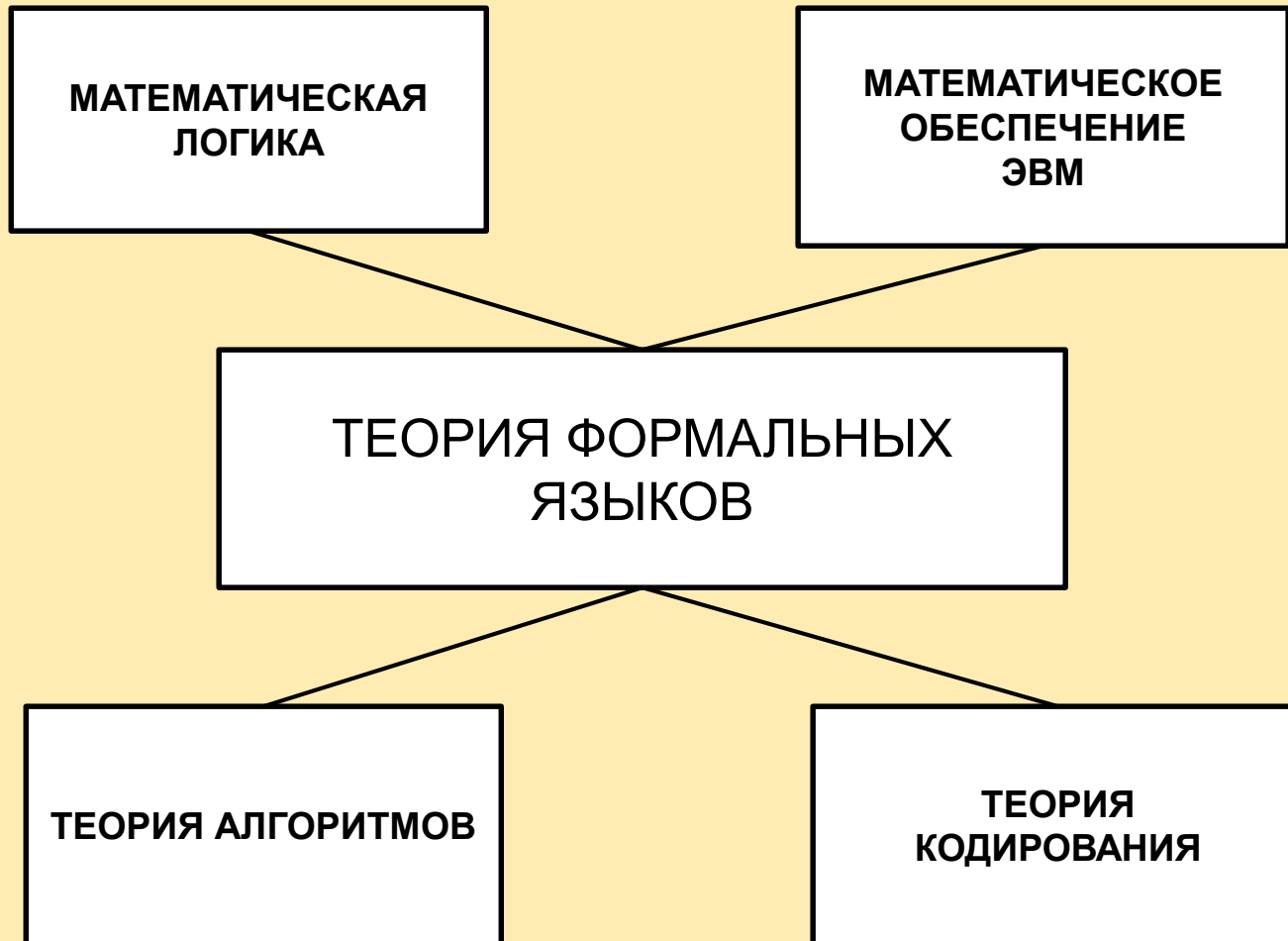
Элементы комбинаторики

- 1. Предмет и задачи комбинаторики.
- 2. Размещения и перестановки.
- 3. Сочетания.
- 4. Число разбиений.
Полиномиальная формула.

Литература

1. Мальцев И.А. Дискретная математика. — СПб: Лань, 2011.
<https://e.lanbook.com/book/638>
2. Жуков А.Е. Элементы комбинаторики : учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
<https://e.lanbook.com/book/638>
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2015.

Введение



Дискретная математика – область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как в самой математике, так и в области ее приложений.

1. Предмет и задачи комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами (схемами).

Каждое такое правило называется *комбинаторной конфигурацией*.



Блез Паскаль
(1623 – 1662)



Пьер Ферма
(1601 – 1665)



*Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1646 – 1716)*

Основные задачи комбинаторики

- перечисление;
- пересчет;
- оптимизация.

Правило суммы:

Пусть X_1, X_2, \dots, X_k – конечные, попарно непересекающиеся множества, т.е. $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Тогда выполняется равенство:

$$| \cup_{i=1}^k X_i | = \sum_{i=1}^k |X_i|$$

Пусть $|X_1|=m$, $|X_2|=n$.

Для $k=2$ правило формулируется так:

если объект x может быть выбран m способами, а объект y – другими n способами, то выбор *либо x , либо y* может быть осуществлен $m+n$ способами.

Правило произведения:

Пусть X_1, X_2, \dots, X_k – конечные множества.

Тогда выполняется равенство:

$$|X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \dots \cdot |X_k|$$

Для $k=2$ правило формулируется так:
если объект x может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект y , в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

2. Размещения и перестановки

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $|X| = n$.

- **Определение 1**

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$
называется **выборкой объема r из n**
элементов или иначе **(n, r) -выборкой**.

- **Определение 2**

Выборка называется

- **упорядоченной**, если в ней задан порядок следования элементов;
- **неупорядоченной**, если порядок следования элементов в выборке не является существенным.

- **Определение 3**

Упорядоченная (n, r) выборка в которой элементы могут повторяться, называется **размещением с повторениями из n по r** ;

если элементы упорядоченной (n, r) выборки попарно различны, то она называется **размещением без повторений из n по r** или просто **размещением**.

- **Теорема 1**

Число различных *размещений с повторениями* из n элементов по r определяется по формуле:

$$\overline{A}_n^r = n^r$$

- **Теорема 2**

Число различных *размещений без повторений* из n элементов по r вычисляется по формуле:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{при } r \leq n,$$

$$A_n^r = 0 \quad \text{при } r > n.$$

- **Определение 4**

(n, n) размещение без повторений
называется **перестановкой множества X** .

Пусть имеем $\{x_1, \dots, x_r\} \neq \emptyset$,
 $n_i \in \mathbf{Z}$, $n_i > 0$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

- **Определение 5**

Каждая упорядоченная выборка, содержащая элемент x_i ровно n_i раз, где $1 \leq i \leq r$, называется **перестановкой с повторениями X** .

- **Теорема 3**

Число различных *перестановок без повторений* из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n !$$

3. Сочетания

- **Определение 6**

Неупорядоченная (n, r) выборка в которой элементы могут повторяться называется сочетанием с повторениями из n по r ;

если элементы неупорядоченной (n, r) выборки попарно различны, то она называется сочетанием без повторений или просто сочетанием.

- **Теорема 4**

Число сочетаний без повторений из n элементов по r вычисляется по формуле:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{при } r \leq n,$$

$$C_n^r = 0 \quad \text{при } r > n.$$

- **Теорема 5**

Число сочетаний с повторениями из n элементов по r вычисляется по формуле:

$$\overline{C_n^r} = C_{n+r-1}^r$$

4. Число разбиений.

Полиномиальная формула

Пусть X – конечное множество, $|X|=n$.

Множество $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ – **разбиение** X , если:

- $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^k X_i = X$

При этом $|X_i| = n_i, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- **Теорема 6**

Число разбиений множества X
вычисляется по формуле:

$$N(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

- **Теорема 7**

Число *перестановок с повторениями* из n элементов вычисляется по формуле:

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

где n_i – число повторений i -того элемента и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Бином Ньютона: $n \in \mathbf{Z}, n > 0$

$$(x_1 + x_2)^n = x_1^n + n x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x_1^{n-2} x_2^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x_1^{n-3} x_2^3 + \dots + x_2^n$$

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x_1^{n-r} x_2^r$$

C_n^r — биномиальные коэффициенты

Обобщенная формула бинома
Ньютона или **полиномиальная**
формула:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} C_{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

где $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$,

n_i – показатель степени переменной x_i

и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- **Теорема 8**

Коэффициенты полинома в правой части полиномиальной формулы вычисляются по формуле:

$$C_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Пример:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^n C_{(n-r)r} x_1^{n-r} x_2^r$$

$$C_{(n-r)r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r,$$

где $n - r + r = n$.



CP

Выпишите свойства размещений,
перестановок, сочетаний.