ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC AN GIANG

TOÁN CAO CẤP C

Giảng viên: Bùi Đức Thắng

NĂM HỌC 2013 – 2014

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

§ 1 BỔ TÚC VỀ TẬP HỢP SỐ THỰC VÀ HÀM SỐ

1.1 Một số tính chất của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Trong $\mathbb{R}$ có các tính chất quy ước sau đây:

$i)$ $-\infty < x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$ii)$ $x + (+\infty) = +\infty;\ x + (-\infty) = -\infty;\ x - (+\infty) = -\infty;\ x - (-\infty) = +\infty.$

$$iii) \begin{cases} \bullet\ x.(+\infty) = +\infty,\ x.(-\infty) = -\infty,\ khi\ x > 0. \\ \bullet\ x.(+\infty) = -\infty,\ x.(-\infty) = +\infty,\ khi\ x < 0. \\ \bullet\ \dfrac{x}{+\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \\ \bullet\ \dfrac{x}{-\infty} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad 2$$

1.2 Các khoảng trong $\mathbb{R}$

Khoảng đóng trong $\mathbb{R}$.	**Khoảng mở trong $\mathbb{R}$.**	**Khoảng nửa mở (nửa khoảng) trong $\mathbb{R}$.**
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$\cdot (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $\cdot (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ $\cdot (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$

▼ **Chú ý 1**

Nhiều khi người ta còn dùng một chữ in hoa nào đó để chỉ một khoảng đóng, khoảng mở hay khoảng nửa mở (nửa khoảng), chẳng hạn : $I,\ A,\ B,\ C$...

1.3 Tập hợp bị chặn, không bị chặn

1.3.1 Cận trên

♦ **Định nghĩa 1**

Số thực a gọi là một cận trên (hay là một số chặn trên) của tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ nếu $\forall x \in X \Rightarrow x \le a$. Khi đó ta cũng bảo X bị chặn trên bởi a. Nếu X không có cận trên nào thì X gọi là không bị chặn trên.

1.3.2 Cận dưới

♦ **Định nghĩa 2**

Số thực a gọi là một cận dưới (hay là một số chặn dưới) của tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ nếu $\forall x \in X \Rightarrow a \le x$. Khi đó ta cũng bảo X bị chặn dưới bởi a. Nếu X không có cận dưới nào thì ta gọi X không bị chặn dưới.

1.3.3 Tập hợp bị chặn

Tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ gọi là bị chặn, nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

1. 4 Ánh xạ và hàm số

1.4.1 Khái niệm về ánh xạ và hàm số

♦ **Định nghĩa 3**

• *Giả sử X và Y là hai tập hợp tuỳ ý. Nếu có một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử $y \in Y$ thì ta nói f là một ánh xạ từ X vào Y và ký hiệu:*

$$\begin{aligned} f:\ X &\to Y \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

• *Nếu X và Y là các tập hợp số thì f được gọi là hàm số. Trong tài liệu này chúng ta xét các hàm số thực của các biến số thực nghĩa là $X \subset \mathbb{R}$ & $Y \subset \mathbb{R}$.*

• *X được gọi là tập hợp xác định (hoặc miền xác định) của hàm số f. Số thực $x \in X$ được gọi là biến số độc lập (gọi tắt là biến số hoặc đối số).*

• *Số thực $y = f(x) \in Y$ được gọi là giá trị của hàm số tại điểm x. Tập hợp tất cả các giá trị $f(x)$ khi x lấy mọi số thực thuộc tập hợp X gọi là tập hợp các giá trị (hoặc miền giá trị) của hàm số f và được ký hiệu là $f(X)$. Như vậy:*

$$f(X) = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \exists x \in X : f(x) = y \right\}$$

1.4.2 Các phép toán trên các hàm số

Giả sử $f,\ g : X \to \mathbb{R}$ là hai hàm số thực xác định trên tập hợp X. Các hàm số :

a) $$\begin{aligned} f+g:\ X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f-g:\ X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f-g)(x) = f(x)-g(x) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} fg:\ X &\to Y \\ x &\mapsto (f.g)(x)=f(x).g(x) \end{aligned}$$

theo thứ tự , gọi là *tổng, hiệu, tích* của hai hàm số f & g.

d) Ngoài ra nếu $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in X$ thì hàm số $$\begin{aligned} \frac{f}{g}:\ X &\to Y \\ x &\mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

gọi là *thương* của hai hàm số f & g.

▼ **Chú ý 2**

Trong nhiều trường hợp người ta cho hai hàm số thực f và g mà không nói rõ tập xác định của chúng. Khi đó, tập xác định của hàm số $f+g$ được hiểu là *giao* của các tập xác định của hai hàm số f và g.

◈ **Ví dụ 1**

Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Tập xác định của hàm số

$f(x)+g(x) = \sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{x}$ là $[-1,\ 1] \cap \mathbb{R} \setminus \{0\} = [-1,\ 0) \cup (0,\ 1]$

1.4. 3 <u>Các loại hàm số đặc biệt</u>

a) <u>Hàm bị chặn, hàm không bị chặn</u>

- Ta gọi hàm số $y = f(x)$ là bị chặn trên trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số $M \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$.

- Ta gọi hàm số $y = f(x)$ là bị chặn dưới trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu tồn tại số $N \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq N$ với mọi $x \in D$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là bị chặn trong tập $D \subset \mathbb{R}$ nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại số $0 < M \in \mathbb{R}$ sao cho $\left|f(x)\right| \leq M$ với mọi $x \in D$.

◈ **<u>Ví dụ 2</u>**

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là các hàm số bị chặn vì $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mà $\left|\sin x\right| \leq 1$, $\left|\cos x\right| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Còn hàm số $y = \dfrac{1}{x}$ là hàm số không bị chặn trong khoảng $(0, +\infty)$.

b) <u>Hàm chẵn, hàm lẻ</u>

+ Giả sử X là một tập hợp số thực sao cho $-x \in X$ với mọi $x \in X$ và $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm số xác định trên X . Ta gọi:

- *f là một hàm số chẵn nếu: $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in X$.*
- *f là một hàm số lẻ nếu: $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in X$.*

+ Dễ dàng thấy rằng đồ thị của một hàm số chẵn đối xứng qua trục tung và đồ thị của một hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ.

◈ **<u>Ví dụ 3</u>**

Hàm số $y = x^2$ là một hàm số chẵn, còn hàm số $y = x^3$ là một hàm số lẻ.

c) <u>Hàm tuần hoàn</u>

• Giả sử hàm số $f : X \to \mathbb{R}$ xác định trên tập hợp số thực X . Nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in X$ ta đều có: $x + T \in X$ & $f(x+T) = f(x)$ (1) thì f gọi là một hàm số tuần hoàn.

Từ đẳng thức trên suy ra: Với mọi $x \in X$ thì $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots$

• Nếu trong tập hợp các số $T > 0$ thỏa mãn đẳng thức (1) có số nhỏ nhất thì số đó được gọi là <u>chu kì</u> của hàm số tuần hoàn f.

◈ **<u>Ví dụ 4</u>**

Các hàm số $f(x) = \sin x$ & $g(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là những hàm số tuần hoàn có chu kì 2π, hàm số $h(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ có chu kì π.

▼ **<u>Chú ý 3</u>**

Nếu f là một hàm tuần hoàn có chu kỳ T thì ta chỉ cần xét hàm số trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ :$[x_0, x+T]$ và vẽ đồ thị trên đoạn đó. Ta sẽ nhận được toàn bộ đồ thị của hàm số từ phần của đồ thị đã biết nhờ phép tịnh tiến theo các véc tơ $(kT, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Điểm x_0 thường được chọn sao cho có thể tận dụng được đặc điểm (nếu có) của hàm số (chẳng hạn tính chẵn , lẻ của hàm số).

d) <u>Hàm đơn điệu</u>

♦ **<u>Định nghĩa 4</u>**

Giả sử X và Y là hai tập hợp số thực.

1. *Hàm số* $f: X \to Y$ *gọi là tăng nếu :* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$
2. *Hàm số* $f: X \to Y$ *gọi là tăng nghiêm ngặt nếu :* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
$\forall x_1, x_2 \in X$
3. *Hàm số* $f: X \to Y$ *gọi là giảm nếu :* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$
4. *Hàm số* $f: X \to Y$ *gọi là giảm nghiêm ngặt nếu:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
$\forall x_1, x_2 \in X$
5. ***Hàm số f: X ③ Y tăng hoặc giảm gọi là hàm đơn điệu. Hàm số tăng nghiêm ngặt hoặc giảm nghiêm ngặt gọi là hàm đơn điệu nghiêm ngặt.***

◈ **<u>Ví dụ 5</u>**

Hàm số $f(x) = x^3 - 5$ là tăng nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = 2x^2 - 1$là giảm nghiêm ngặt trên khoảng $(-\infty, 0]$ và tăng nghiêm ngặt trên khoảng $[0, +\infty)$

e) **<u>Hàm số hợp</u>**

Cho ba tập hợp $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$. *Giả sử* $f: X \to Y$ & $g: Y \to Z$ *là hai hàm số.*

Với mỗi $x \in X$, $y = f(x) \in Y$, $g(y) = g[f(x)]$

Hàm số $h: X \xrightarrow[x \mapsto h(x) = g[f(x)]]{} Z$ *gọi là hàm số hợp của hai hàm số* f *và* g, *ký hiệu là* $h = g \circ f$. *Như vậy* $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

h) <u>Hàm số ngược</u>

♦ **<u>Định nghĩa 5</u>**

Giả sử X *và* Y *là hai tập hợp bất kì và* $f: X \to Y$ *là một song ánh từ* X *lên* Y. *Khi đó với mỗi* $y \in Y$, *tồn tại một phần tử duy nhất* $x \in X$ *sao cho* $f(x) = y$.

Ánh xạ $g: Y \xrightarrow[y \mapsto g(y) = x]{} X$ *gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ* f, *kí hiệu* f^{-1}.

▼ **<u>Chú ý 4</u>**

Nếu $g: Y \to X$ là ánh xạ ngược của song ánh $f: X \to Y$ thì: $g[f(x)] = x, \forall x \in X$
& $f[g(y)] = y, \forall y \in Y$.

✡ **<u>Định lý 1</u>**

Giả sử hàm số $f: X \to \mathbb{R}$ *là tăng (giảm) nghiêm ngặt trên tập hợp số thực* X.

Khi đó f *là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp* $Y = f(X)$ *và hàm số ngược*

$f^{-1}: Y \to X$ *của* f *là tăng (giảm) nghiêm ngặt trên* Y.

1.4.4 <u>Hàm số sơ cấp</u>

a) <u>Hàm số mũ</u> $y = a^x$, với $1 \ne a > 0$.

Hàm mũ có miền xác định là $\mathbb{R}$, *miền giá trị là* $(0, +\infty)$. *Nếu* $a > 1$ *thì hàm đồng biến,* $0 < a < 1$ *thì hàm nghịch biến.*

b) <u>Hàm số lôgarit</u> $y = \log_a x$, *với* $1 \neq a > 0$.

Hàm lôgarit có miền xác định là $(0, +\infty)$, *miền giá trị là* $\mathbb{R}$. *Nếu* $a > 1$ *thì hàm đồng biến* $0 < a < 1$ *thì hàm nghịch biến. Hàm lôgarit* $y = \log_a x$ *là hàm số ngược của hàm số mũ* $y = a^x$.

c) <u>Hàm số lũy thừa</u>: $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$.

• *Nếu* α *- là **số hữu tỷ** thì miền xác định của hàm lũy thừa phụ thuộc vào* α. *Chẳng hạn* $y = x^{\frac{1}{2}}$ *có miền xác định là* $(0, +\infty)$; *nhưng hàm số* $y = x^{-\frac{1}{3}}$ *có miền xác định lại là:* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• *Nếu* α *- là **số vô tỷ dương** thì ta quy ước miền xác định là* $[0, +\infty]$.

• *Nếu* α *- là **số vô tỷ âm** thì ta quy ước miền xác định của nó là* $(0, +\infty)$.

1.4.5 <u>Các hàm số lượng giác</u>.

• $y = \sin x$ *có miền xác định* $\mathbb{R}$, *miền giá trị* $[-1, 1]$, *là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

• $y = \cos x$ *có miền xác định* $\mathbb{R}$, *miền giá trị* $[-1, 1]$ *là hàm chẵn, tuần hoàn với chu kỳ* 2π.

• $y = \tan x$ *có miền xác định:* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, *miền giá trị* $\mathbb{R}$, *là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* π.

• $y = \cot x$ *có miền xác định:* $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *miền giá trị* $\mathbb{R}$, *là hàm lẻ, tuần hoàn với chu kỳ* π.

1.4.6 <u>Các hàm số lượng giác ngược</u>.

- *Hàm* $y = \arcsin x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \sin x$
- *Hàm* $y = \arccos x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \cos x$
- *Hàm* $y = \arctan x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \tan x$
- *Hàm* $y = \operatorname{arc}\cot x$ *là hàm ngược của hàm số* $y = \cot x$

Tóm tắt định nghĩa của các hàm số ngược:

Hàm số lượng giác ngược	**Miền xác định**	**Miền giá trị**
$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arc}\cot x \Leftrightarrow x = \sin y$	$-\infty \leq x \leq +\infty$	$0 \leq y \leq \pi$

§ 2 <u>GIỚI HẠN HÀM SỐ</u>.

2.1 <u>Giới hạn hàm số</u>.

2.1.1 <u>Các định nghĩa</u>

♦**<u>Định nghĩa 6</u>** (*Lân cận của một điểm*)

Ta gọi lân cận δ *của điểm* x_0 ($\delta > 0$) *là tập hợp* $V_\delta(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x - x_0| < \delta\right\}$.

♦**<u>Định nghĩa 7</u>** (*Định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ* $\varepsilon-\delta$)

Giả sử I *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên tập* $I\setminus\{x_0\}$. *Ta nói rằng số thực* L *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* x *dần tới* x_0 *và viết* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ *hay* $f(x)\to L$ *khi* $x\to x_0$, nếu $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \forall x\in I$:

$0<\left|x-x_0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\varepsilon.$

▼ **<u>Chú ý 6</u>**

Không được quên điều kiện $\left|x-x_0\right|>0$, tức là $x\neq x_0$. Hàm số $f(x)$ có thể xác định hay không xác định tại x_0. Trong trường hợp $f(x)$ xác định tại x_0, giới hạn L của hàm số $f(x)$ không có quan hệ gì với $f(x_0)$.

♦**<u>Định nghĩa 8</u>** (*Định nghĩa giới hạn hàm số theo dãy*)

Giả sử I *là một khoảng chứa điểm* x_0 *và* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên tập* $I\setminus\{x_0\}$.*Ta nói rằng số thực* L *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* x *dần tới* x_0 *và viết* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ *hay* $f(x)\to L$ *khi* $x\to x_0$, *nếu* $\left(\forall\{x_n\}\subset I\setminus\{x_0\}\right)$ *mà* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L.$

2.1.2 <u>Các giới hạn một phía</u>

Nếu $x<x_0$ *mà* $x\to x_0$ *thì ta quy ước viết* $x\to x_0^-$ *và nếu* $x>x_0$ *mà* $x\to x_0$ *thì ta quy ước ta viết* $x\to x_0^+$.

♦ **<u>Định nghĩa 9</u>** (Giới hạn bên trái)

Số L *được gọi là giới hạn trái của hàm số* $f(x)$ *khi* $x\to x_0^-$ *nếu* $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ \delta>0$:

$0<x_0^- - x<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$. *Khi đó viết* $L=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$.

♦ **<u>Định nghĩa 10</u>** (Giới hạn phải)

Số L *được gọi là giới hạn phải của hàm số* $f(x)$ *khi* $x\to x_0^+$, *nếu* $\forall\varepsilon>0, \exists\ \delta>0$

$0<x-x_0^+<\delta \Rightarrow \left|f(x)-L\right|<\varepsilon$. *Khi đó viết* $L=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$.

✡ **<u>Định lý 2</u>**

Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ là $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

2.1.3 <u>Giới hạn hàm số khi x → + ∞ và x → -∞</u>

♦ **<u>Định nghĩa 11</u>**

a) *Giả sử* X *là một tập hợp số thực không bị chặn trên và* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên* X . *Ta gọi số thực* L *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x\to+\infty$ *và viết* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ *nếu cho trước số dương* ε *nhỏ tùy ý, có thể chỉ ra một số thực M sao cho* $(\forall x\in X),\ x>M\Rightarrow\left|f(x)-L\right|<\varepsilon.$

b) *Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn dưới và* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên* X. *Ta gọi số thực* L *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to -\infty$ *và viết* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ *nếu cho trước số dương* ε *nhỏ tùy ý, có thể chỉ ra một số thực* M *sao cho* $(\forall x \in X),\ x < M \Rightarrow \left| f(x) - L \right| < \varepsilon$.

2.1.4 Giới hạn vô cực bằng ∞

♦ **Định nghĩa 12**

Giả sử số thực x_0 *là một điểm thuộc khoảng* I *và* $f(x)$ *là một hàm số xác định trên tập hợp* $I \setminus \{x_0\}$.

a) Ta gọi $+\infty$ *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to x_0$ *và viết* $\lim\limits_{x \to x_0} = +\infty$ *hay* $f(x) \to +\infty$ *khi* $x \to x_0$, *nếu với một số thực A cho trước bất kì, tồn tại một số* $\delta > 0$ *sao cho* $(\forall x \in I)\ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow f(x) > A$.

b) Ta gọi $-\infty$ *là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to x_0$ *và viết* $\lim\limits_{x \to x_0} = -\infty$ *hay* $f(x) \to -\infty$ *khi* $x \to x_0$, *nếu với một số thực* A *cho trước bất kì, tồn tại một số* $\delta > 0$ *sao cho* $(\forall x \in I)\ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow f(x) < A$.

2.1.5 Giới hạn khi $x \to \infty$.

♦ **Định nghĩa 13**

Giả sử X là một tập hợp số thực không bị chặn trên và $f(x)$ *là một hàm số xác định trên* X. *Ta viết :*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \vee f(x) \to +\infty$ *khi* $x \to +\infty$ *nếu với một số thực* A *cho trước bất kì, tồn tại một số thực B sao cho* $(\forall x \in X)\ x > B \Rightarrow f(x) > A$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \vee f(x) \to -\infty$ *khi* $x \to +\infty$ *nếu với một số thực* A *cho trước bất kì, tồn tại một số thực* B *sao cho* $(\forall x \in X)\ x > B \Rightarrow f(x) < A$.

⁕ *Các đẳng thức:* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \ldots$ *được định nghĩa tương tự.*

2.1.6 Một số định lý về giới hạn của hàm số

1) Nếu tồn tại các giới hạn: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ & $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B;\ A, B \in \mathbb{R}$. Khi đó:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \pm g(x) \Big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B.$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) . g(x) \Big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) . \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A . B.$

c) Nếu $B \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

$d)\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = A^B.$

e) Từ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|A\right|.$

f) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)\right] = u_0$ & $f(u)$ xác định tại u_0 và trong lân cận của u_0 thì:

$\lim\limits_{x\to x_0} f\left[u(x)\right] = f\left[\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right] = f(u_0).$

2) Nếu $f(x) \le g(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$

3) Nếu $f(x)\le g(x)\le h(x)\ \forall x\in V_\delta(x_0)$ & $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L.$

2.2 <u>Một số giới hạn đáng nhớ</u>

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	2	$\lim\limits_{\alpha x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$	3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{\alpha x\to 0}\dfrac{tg\alpha x}{\alpha x}=1$	5	$\lim\limits_{x\to +\frac{\pi}{2}} tgx = +\infty$	6	$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} tgx = -\infty$
7	$\lim\limits_{x\to +\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$	8	$\lim\limits_{x\to -\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$	9	$\lim\limits_{x\to +\infty} arccotgx = 0$
10	$\lim\limits_{x\to -\infty} arc\cot gx=\pi$	11	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty,$ $(a>1)$	12	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0, (a>1)$
13	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0;$ $(0<a<1)$	14	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty;$ $(0<a<1)$	15	$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = +\infty,$ $(a>1)$
16	$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = -\infty,$ $(a>1)$	17	$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = -\infty$ $(0<a<1)$	18	$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty$ $(0<a<1)$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$
22	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0(\alpha>0)$	23	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^p}{e^x}=0$	24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$	26	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$	27	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}.$

2.3 <u>Vô cùng bé và vô cùng lớn</u>.

2.3.1 <u>Định nghĩa vô cùng bé, vô cùng lớn</u>

♦ **<u>Định nghĩa 14</u>**

Giả sử x_0 là một điểm trên khoảng (a, b) và $f(x)$ là một hàm số xác định trên tập hợp $(a,b)\setminus\{x_0\}$

1. *Hàm số $f(x)$ gọi là một vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Hàm số $f(x)$ gọi là một vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = +\infty$.*

(Vô cùng bé và vô cùng lớn khi $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty \vee x \to -\infty$ được định nghĩa tương tự)

▼ **Chú ý:**

1) Cần phân biệt khái niệm ***"vô cùng bé"*** với khái niệm ***"rất bé"*** :

Một hằng số c dù có giá trị tuyệt đối bé đến mấy cũng chỉ là một số rất bé mà không thể xem là một vô cùng bé. Chẳng hạn c = 0,000.000.001 thì nó không thể bé hơn 0,000.000.0001 được. Như vậy các số 0,000.000.001 ; 0,000.000.0001 chỉ là các số rất bé mà không phải là các đại lương VCB. Riêng số 0 có thể xem VCB vì hàm $f(x) = 0$ dần tới giới hạn 0 (trong mọi quá trình).

2) Cần phân biệt khái niệm "***vô cùng lớn***" với khái niệm "***không bị chặn***" :

Một hàm số nếu là vô cùng lớn thì không bị chặn vì nó có giá trị tuyệt đối lớn hơn mọi số dương k cho trước, kể từ một lúc nào đó của quá trình. Nhưng một hàm không bị chặn có thể không phải là một vô cùng lớn.

2.3.2 Tính chất của VCB và VCL

Vì VCB, VCL là những giới hạn, do đó theo tính chất của giới hạn, với các VCB và VCL khi $x \to x_0$ ta có:

1. Tổng hai (VCB) là một (VCB)
2. Tích của một (VCB) và một đại lượng bị chặn là một (VCB)
3. Tích của hai (VCL) là một (VCL)
4. Tổng của một (VCL) và một đại lượng bị chặn là một (VCL)
5. Nếu $\alpha(x)$ là một (VCB) và $\alpha(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$ là một (VCL)
6. Nếu $\alpha(x)$ là một (VCL) $\Rightarrow \dfrac{1}{\alpha(x)}$ là một (VCB)
7. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) = L + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to x_0$.

2.3.3 So sánh các VCB.

♦ **Định nghĩa 15**

Xét hai VCB $f(x)$ *và* $g(x)$ $\left(khi\ x \to x_0\ hay\ x \to \infty \right)$.

i) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ *thì ta nói* $f(x)$ *là VCB bậc cao so với* $g(x)$ *(nghĩa là* $f(x)$ *dần tới* 0 *nhanh hơn* $g(x)$ *đến nỗi tỷ số* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *vẫn còn dần tới 0)*

ii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ *thì ta nói* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là VCB cùng cấp .*

iii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *thì* $f(x)$ *và* $g(x)$ *được gọi là hai VCB tương đương, ký* *hiệu là :* $f(x) \sim g(x)$.

2.3.3 So sánh các VCL

♦ **Định nghĩa 16**

Xét hai VCL $f(x)$ *và* $g(x)$ (*khi* $x \to x_0$ *hay* $x \to \infty$)

i) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$ *thì ta nói* $f(x)$ *là VCL bậc cao so với* $g(x)$.

ii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = k \neq 0 \ (k = const)$ *thì ta nói* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là hai VCL cùng bậc.*

iii) *Nếu* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = 1$ *thì* $f(x)$ *và* $g(x)$ *được gọi là hai VCL tương đương, ký hiệu là:* $f(x) \sim g(x)$.

✡ **Định lý 3 (Định lý thay thế VCB hay VCL tương đương)**

Giả sử $f(x),\ F(x),\ g(x),\ G(x)$ *là các (VCB) (hay các VCL) đồng thời khi* $x \to a$

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(x) \sim F(x) \\ g(x) \sim G(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet \ \lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to a} F(x).G(x) \\ \bullet \ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{F(x)}{G(x)} \end{cases}$$

▼ **Chú ý 7**

$$\text{Nếu } \begin{cases} f(x) \sim F(x) \\ g(x) \sim G(x) \\ khi \ \ x \to a \end{cases} \not\Rightarrow \begin{cases} f(x) \pm g(x) \sim F(x) \pm G(x) \\ khi \ x \to a \end{cases}$$

◈ **Ví dụ 6**

$$1) \begin{cases} f(x) = x + x^2 \\ F(x) = x - x^2 \\ g(x) = G(x) = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) + g(x) = x^2 \\ F(x) + G(x) = -x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \sim F(x) \\ g(x) \sim G(x) \\ Khi \ \ x \to 0 \end{cases} \end{cases} \not\Rightarrow \big(f(x) + g(x)\big) \sim \big(F(x) + G(x)\big)$$

$$\text{vì } \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}} = -1 \neq 1.$$

$$2) \ Cho: \begin{cases} f(x) = \cos x \\ F(x) = 1 - x \\ g(x) = G(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \sim F(x) \\ g(x) \sim G(x) \\ Khi \ \ x \to 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) - f(x) = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} \\ G(x) - F(x) = x \end{cases} \end{cases} \not\Rightarrow \big(g(x) - f(x)\big) \sim \big(G(x) - F(x)\big)$$

vì: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right).\sin\dfrac{x}{2}=1.0\ =0\neq 1.$

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

• Khi giải bài toán $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$), chúng ta nên tập thói quen "thay" giá trị $x=a\,(hay\,x=\infty)$ vào biểu thức của $f(x)$. Nếu được *một số cụ thể* thì bài toán không phải dạng vô định, số đó chính là đáp số của bài toán. Lúc đó chúng ta *kết thúc giải bài toán*. Nếu trong quá trình "thay" đó mà chúng ta được một trong 7 *dạng vô định* : $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0.\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ thì phải tìm cách *khử dạng vô định*.

• Các ký hiệu $0, 1, \infty$ ở trong các *dạng vô định* không được hiểu *là những số cụ thể*. Chẳng hạn ký hiệu 0 không được hiểu là số 0 trong tập số thực $\mathbb{R}$ mà 0 ở đây là "*một đại lượng tiến tới 0*". Với cách hiểu đó thì dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ không phải là phép chia số 0 cho số 0, đây là một ký hiệu tượng trưng cho việc tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (hoặc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$) mà $f(x)$, $g(x)$ đồng thời là các VCB khi $x\to a\,(hay\,x\to\infty)$. Tương tự ký hiệu 1^{∞} nói lên việc tìm $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ mà $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ còn $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$,... Nắm vững ý nghĩa vô định và ký hiệu dạng vô định chúng ta sẽ không mắc phải những sai lầm kiểu: $\dfrac{\cancel{0}}{\cancel{0}}=1(!)$, $\dfrac{\cancel{\infty}}{\cancel{\infty}}=1(!)$, $0.\infty=0(!)$, $\infty-\infty=0(!)$, $1^{\infty}=1(!)$, $\infty^{0}=1(!)$, $0^{0}=0(!)\ldots$

Sau đây chúng ta sẽ nêu một số ***dạng toán tìm giới hạn của hàm số*** thường gặp:

DẠNG 1
DÙNG ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN ĐỂ CHỨNG MINH GIỚI HẠN CỦA MỘT HÀM SỐ NÀO ĐÓ .

◈ **Ví dụ 9**

Chứng minh: a) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}=13$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

Giải

$$a)\quad \left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right|=\left|\frac{4x^2-1-13(2x-1)}{2x-1}\right|=\left|\frac{(2x-1).(2x+1)-13(2x-1)}{(2x-1)}\right|$$

$$=\left|\frac{\cancel{(2x-1)}(2x+1-13)}{\cancel{(2x-1)}}\right|=\left|2x-12\right|=2\left|x-6\right|\Rightarrow\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right|<\varepsilon\Leftrightarrow 2\left|x-6\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\left|x-6\right|<\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\delta}\Rightarrow\left|x-6\right|<\delta\Rightarrow\left|\frac{4x^2-1}{2x-1}-13\right|<\varepsilon\Rightarrow\lim_{x\to 6}\frac{4x^2-1}{2x-1}=13,\ \text{(đpcm)}.$$

b) Cho $\varepsilon > 0$ bé tùy ý. Ta có: $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ $hay \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$ do đó nếu lấy

$M = \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ thì với mọi x thỏa mãn điều kiện $|x| > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$ c)

Với một số $A > 0$ cho trước bất kỳ, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > A \Leftrightarrow |x-1| > \frac{1}{\sqrt{A}}$. Chọn

$\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ ta được $f(A) > 0$ với mọi x mà $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

DẠNG 2

DÙNG ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN THEO DÃY ĐỂ CHỨNG MINH MỘT HÀM SỐ KHÔNG TỒN TẠI GIỚI HẠN KHI $x \to x_o$ HOẶC $x \to \infty$

◈ **Ví dụ 10** Chứng minh hàm số $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải

Nếu chọn hai dãy số có số hạng tổng quát : $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ & $x'_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos 2n\pi = 1 \\ \bullet \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0 \end{cases}$$

Như vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

DẠNG 3

TÌM GIỚI HẠN KHÔNG VÔ ĐỊNH

Nếu bài toán tìm giới hạn **không thuộc dạng vô định** thì không cần thiết biến đổi gì, chỉ việc áp dụng các định lý **phép tính giới hạn** để tính trực tiếp.

◈ **Ví dụ 11**

Tìm các giới hạn sau:

a) $I_a = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$, b) $I_b = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{2x}$,

c) $I_c = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x^2}$

Giải

Vì: a), b) không thuộc dạng vô định nào, nên ta có:

$$a)\ I_a = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3} = \frac{4+5}{4-3} = 9.$$

$$b)\ I_b = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{2x} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+1}}{2.1} = \frac{\cancel{2}.\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}.$$

c) Vì : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$, còn $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, nên $I_c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}$.

Theo kiến thức về hàm số mũ a^x đã biết thì khi cơ số $0 < a < 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$. Do đó $I_c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$.

Nhận xét :

Loại toán tìm giới hạn dạng *không vô định* nói chung không nhiều và dù sao cũng tương đối đơn giản. Phần lớn những bài toán tìm giới hạn thường thuộc vào một trong 7 dạng vô định đã nói ở trên.

DẠNG 4

KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH

⁂ **Phương pháp**

Khi giải bài toán tìm $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ (hoặc $x\to\infty$) mà $F(x)$ có dạng vô định thì ta phải biến đổi $F(x)$ về $G(x)$ sao cho $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \lim\limits_{x\to a} G(x)$ mà $G(x)$ không có dạng vô định. Dưới đây chúng tôi gợi ý, hướng dẫn một số phương pháp biến đổi để khử *dạng vô định*:

DẠNG 5 KHI TÌM $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ TRONG ĐÓ $f(x)$ VÀ $g(x)$ LÀ HAI ĐA THỨC ĐỐI VỚI x THÌ TA CHIA CẢ TỬ THỨC VÀ MẪU THỨC CHO x^k VỚI k LÀ LŨY THỪA CAO NHẤT ĐỐI x. CŨNG CÓ THỂ DÙNG CÁCH NÀY CHO NHIỀU TRƯỜNG HỢP TRONG PHÂN THỨC CÓ CHỨA CĂN THỨC.

◈ **Ví dụ 12**

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{8}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0,\ (chia\ cho\ x^3)$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = 1 \ \text{(chia cho } \sqrt{x}\text{)}$$

<u>DẠNG 6</u> KHI TÌM $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ TA PHÂN TÍCH CẢ TỬ SỐ VÀ MẪU SỐ THÀNH NHÂN TỬ, SAU ĐÓ RÚT GỌN ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH

◈ **<u>Ví dụ 13</u>**

$$a)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2+x)}{\cancel{(x+2)}(x-3)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x-3} = \frac{(-2)^2-2}{-2-3}$$

$$= \frac{4-2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{-\cancel{(1-x)}(x+2)}{\cancel{(1-x)}(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2} = \frac{-3}{3} = -1.$$

<u>DẠNG 7</u> KHI TÌM $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ MÀ $f(x)$ CÓ CHỨA CĂN THỨC THÌ CHÚNG TA NHÂN LƯỢNG "LIÊN HỢP" ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH.

◈ **<u>Ví du 14</u>**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

▼ **<u>Chú ý 8</u>**

Các đẳng thức sau đây thường dùng để khử dạng vô định khi có chứa căn thức :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ mà $n-$ lẻ: $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$
- $\forall n \in \mathbb{N}$: $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

<u>DẠNG 8</u> KHI TÌM $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ MÀ $f(x)$ LÀ MỘT BIỂU THỨC CHỨA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC THÌ TA BIẾN ĐỔI $f(x)$ VÀ DÙNG $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH.

◈ **<u>Ví dụ 15</u>**

Tính $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$.

Giải

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{x^2\ (\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{x^2\ (\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4.\left(\frac{x}{2}\right)^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{2}{4}.1.\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

<u>DẠNG 9</u>: TÌM GIỚI HẠN DẠNG : $I=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left(f(x)\right)^{g(x)}$

※ **<u>Phương pháp</u>**

1) Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ (hữu hạn) và $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$ (hữu hạn) $\Rightarrow I=A^B$

2) Nếu $A\neq 1$ còn $B=\pm\infty\Rightarrow I=A^{+\infty}\vee I=A^{-\infty}$.

3) Nếu $A=1$ còn $B=\infty$ thì **:**

$$I=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left[1+(f(x)-1)\right]^{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left(\left[1+(f(x)-1)\right]^{\frac{1}{(f(x)-1)}}\right)^{(f(x)-1)\,g(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}(f(x)-1).g(x)}.$$

◈ **<u>Ví dụ 16</u>**

a) $I_a=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)=\dfrac{1}{2}$ (hữu hạn) và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}=1$ (hữu hạn) suy ra $I_a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{1}{2}$.

b) $I_b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{2-\dfrac{1}{x}}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty}=0.$

c) $I_c=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right]^{\frac{x(2x-1)}{x^2-4x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-4x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}} = e^2.$$

DẠNG 10: KHI GẶP GIỚI HẠN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN lôgarit CHÚNG TA NÊN BIẾN ĐỔI VÀ ÁP DỤNG CÁC GIỚI HẠN: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$ **ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH.**

◈ **Ví dụ 17**

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a+x}{a}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{a\,\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}$$

$$b)\ \lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}-1\right)}{x-e}$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}} = \frac{1}{e}.$$

DẠNG 11: KHI GẶP GIỚI HẠN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN *hàm số mũ* CHÚNG TA NÊN BIẾN ĐỔI VÀ ÁP DỤNG CÁC GIỚI HẠN:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ **ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH.**

◈ **Ví dụ 18**

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x} = \frac{2}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1.\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin 2x}-1}{x}-\frac{e^{\sin x}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2.\left(e^{\sin 2x}-1\right)}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)}{\sin x}.\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2.1-1.1 = 2-1 = 1.$$

DẠNG 12: ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ "THAY THẾ (VCB) HAY (VCL) TƯƠNG ĐƯƠNG" ĐỂ KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH.

Để giúp cho việc thay thế "*tương đương*" được dễ dàng chúng ta nên nhớ một một số công thức thay thế tương đương sau:

1	$\sin x \sim x$	khi $x \to 0$
2	$\tan x \sim x$	khi $x \to 0$
3	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	khi $x \to 0$
4	$\arcsin x \sim x$	khi $x \to 0$
5	$\arctan x \sim x$	khi $x \to 0$
6	$e^{ax}-1 \sim ax$	khi $x \to 0$
7	$a^x-1 \sim x\ln a$	khi $x \to 0$
8	$\ln(1+ax) \sim ax$	khi $x \to 0$
9	$(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$	khi $x \to 0$ và $\alpha > 0$
10	$(\alpha \pm \beta \pm \gamma) \sim \alpha$	α, β, γ là các (VCB) khi $x \to a$ và α là (VCB) bậc thấp nhất (Quy tắc **ngắt bỏ (VCB) bậc cao**)
11	$(A \pm B \pm C) \sim A$	A, B, C là các (VCL) khi $x \to a$ và A là (VCL) bậc cao nhất (Quy tắc **ngắt bỏ (VCL) bậc thấp**)

◈ **Ví dụ 19**

$$a)\ I_a = \lim_{x\to 0}\frac{7x+\sin^2 x}{\sin 5x - x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{7}{5}.$$

$$b)\ I_b = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt[5]{1+15x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.4.\cancel{x}}{\frac{1}{5}.15.\cancel{x}} = \frac{2}{3}.$$

$$c)\ I_c = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3+3x)}{\ln(1+7x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x}}{7\cancel{x}} = \frac{3}{7}.$$

$$d)\ I_d = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^{2012}x}+\sqrt[6]{1+6x^2}-2}{\ln(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\arcsin^{2012}x}-1\right)+\left(\left(1+6x^2\right)^{\frac{1}{6}}-1\right)}{\ln(1+\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^{2012}x}-1}{\ln(1+\tan^2 x)} + \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+6x^2\right)^{\frac{1}{6}}-1}{\ln(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^{2012}x}{\tan^2 x} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cancel{6}.x^2}{\cancel{6}}}{\tan^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^{2012}}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} x^{2010} + \lim_{x\to 0} 1 = 0 + 1 = 1.$$

DẠNG 5

CÁC SAI LẦM VÀ THIẾU SÓT KHI TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

◈ **Ví dụ 20**

Tính $I = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

• Sai lầm thường gặp :

$$I = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

• Nguyên nhân sai lầm

Cách giải trên đã không xét các giới hạn riêng khi : $x \to +\infty$ *hay* $x \to -\infty$

• Lời giải đúng là:

• $I = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \sqrt{(-\infty)^2+1} - (-\infty) = \sqrt{(+\infty)+1} + \infty = +\infty, \ (+)$

• $I = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \dfrac{1}{+\infty} = 0 \ (++)$

Từ (+) và (++) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) \neq \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$

mà chỉ tồn tại *giới hạn trái*, *giới hạn phải* của hàm số đã cho khi $x \to \infty$.

◈ **Ví dụ 21**

Tính $I = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

• Sai lầm thường gặp :

$$I = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}} = 2 \bullet$$

Nguyên nhân sai lầm: Vì $x - \dfrac{1}{2} \not\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}$

• Lời giải đúng

$$(\circ)\ I = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}} = 2.$$

$(\circ\circ)\ I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{1+\frac{3}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}}=\dfrac{-2}{\sqrt{1+0}}=-2$

Từ $(\circ)$ và $(\circ\circ)\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

chỉ tồn tại *giới hạn phải* và *giới hạn trái* của hàm số đã cho khi $x\to\infty$.

◈ **Ví dụ 22** Tính $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}$

• Sai lầm thường gặp **:**

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}=\frac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{2}\sin2x}{2x}=2\sqrt{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}=2\sqrt{2}.$$

• Nguyên nhân sai lầm là: $\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x}\not\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}.\sin2x}{x}$.

• Lời giải đúng :

Vì : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}=\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}\left|\sin2x\right|}{x}$. Do đó :

• $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-\sqrt{2}\sin2x}{x}=-2\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin2x}{2x}=-2\sqrt{2}\ (*)$

• $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2\sin^2 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2}\sin2x}{x}=2\sqrt{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin2x}{2x}=2\sqrt{2}\ (**)$

Từ (*) & (**) $\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}\Rightarrow\nexists\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\cos4x}}{x}$,

chỉ tồn tại *giới hạn trái* và *giới hạn phải* của hàm số $f(x)$ tại điểm $x=0$.

§ 3 HÀM LIÊN TỤC
3.1 Hàm số liên tục tại một điểm
♦ **Định nghĩa 17**

Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại $x=x_0$ (hay liên tục tại điểm x_0) nếu thỏa mãn :

• $f(x)$ xác định tại x_0 và trong lân cận $V_\delta(x_0)$

• $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

3.2 Các điều kiện tương đương
✡ **Định lý 4**

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $x_0\in(a,b)$. Các điều kiện sau đây tương đương:

a) $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

b) $\forall\varepsilon>0$ bé tuỳ ý, $\exists\delta>0$ sao cho $\left|x-x_0\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$

c) Mọi dãy $\{x_n\}\subset(a,b)$ mà $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

3. 3 <u>Hàm liên tục một phía</u>.

3.3.1 <u>Hàm số liên tục bên phải</u>

♦ **<u>Định nghĩa 18</u>**

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[x_0, b) \subset \mathbb{R}$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ *liên tục phải* tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

3.3.2 H<u>àm số liên tục bên trái</u>

♦ **<u>Định nghĩa 19</u>**

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $(a,\ x_0] \subset \mathbb{R}$. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ *liên tục trái* tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

***Hiển nhiên** $f(x)$ **liên tục tại** x_0 **khi và chỉ khi** $f(x)$ **liên tục phải và liên tục trái tại** x_0.*

3.4 <u>Định nghĩa hàm số liên tục trên</u> : (a,b); $[a,b]$; $[a,b)$ hay $(a,b]$

♦ **<u>Định nghĩa 20</u>** (Hàm số liên tục trên khoảng (a,b))

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) $(a \in \mathbb{R}\ hay\ a = -\infty,\ b \in \mathbb{R}\ hay\ b = +\infty)$ gọi là liên tục trên khoảng này nếu nó liên tục tại mọi điểm của (a,b).

♦ **<u>Định nghĩa 21</u>** (Hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$)

Hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $[a,b]$ gọi là liên tục trên đoạn này nếu nó liên tục trên khoảng (a,b), liên tục phải tại điểm a và liên tục trái tại điểm b.

Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[a,b)$ (hay trên nửa khoảng $(a,b]$) được định nghĩa tương tự)

3.5 <u>Điểm gián đoạn</u>

3.5.1 <u>Hàm số gián đoạn tại một điểm</u>

♦ **<u>Định nghĩa 22</u>**

Ta bảo x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ khi $f(x)$ không liên tục tại x_0.

Như vậy x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ xảy ra trong các trường hợp sau:

- $f(x)$ không xác định tại x_0.
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc tồn tại nhưng bằng ∞.
- $f(x)$ xác định tại x_0 và có giới hạn hữu hạn nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

3.6 <u>Sự liên tục của một số hàm số thường gặp</u>

✡ **<u>Định lý 5</u>**

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì hàm số $|f(x)|$ cũng liên tục tại điểm x_0.

✡ **<u>Định lý 6</u>**

- Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại $x_0 \in I$ thì các hàm số $f(x) \pm g(x)$; $(fg)(x)$ $cf(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ cũng liên tục tại x_0.
- Ngoài ra nếu $g(x_0) \neq 0$ thì hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.

✡ **Định lý 7**

***Nếu** $f(x)$ **là một hàm số sơ cấp và** x_0 **thuộc miền xác định của nó thì** $f(x)$ **liên tục tại** x_0.*

Một số dạng bài tập về hàm liên tục

DẠNG 1
DÙNG NGÔN NGỮ $(\varepsilon - \delta)$ ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI $x = x_0$

◈ **Ví dụ 23**

Chứng minh rằng các hàm số $a)\ y = x^2,\ b)\ y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$.

Giải

$a)\ \forall \varepsilon > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}: \left|x^2 - x_0^2\right| = \left|(x-x_0)^2 + 2x_0(x-x_0)\right|^2 \le \left|x - x_0\right|^2 + 2\left|x_0\right|\left|x - x_0\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|x - x_0\right|^2 + 2\left|x_0\right|\left|x - x_0\right| - \varepsilon < 0\ (1).$

Đặt $t = \left|x - x_0\right| \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 + 2\left|x_0\right|t - \varepsilon < 0\ (2)$

$\Delta' = \left|x_0\right|^2 + \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon} \Rightarrow t_{1,2} = -\left|x_0\right| \pm \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}.$

với $t < -\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}$ thì thỏa mãn (2), nên $\left|x - x_0\right| < -\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon}$

Lại đặt: $-\left|x_0\right| + \sqrt{\left|x_0\right|^2 + \varepsilon} = \delta > 0$ thì $\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - x_0^2\right| < \varepsilon$ nên hàm số $y = x^2$ liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$.

$b)\ \forall \varepsilon > 0\ \&\ x_0 \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\right| = \frac{\left|x - x_0\right|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x.x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{\left|x - x_0\right|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} \le \frac{\left|x - x_0\right|}{\frac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \left|x - x_0\right| < \frac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}.\varepsilon$. Đặt : $\delta = \frac{3}{4}.\sqrt[3]{x_0^2}.\varepsilon \Rightarrow \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_o}\right| < \varepsilon$

nên hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ liên tục tại điểm $x = x_0 \in \mathbb{R}$.

DẠNG 2
XÉT SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI ĐIỂM $x = x_0$.

⁎ **Phương pháp**

• Để xét sự liên tục của hàm số tại điểm x_0 ta cần xét: $f(x)$ có xác định tại x_0 và trong lân cận của x_0 hay không và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ có bằng $f(x_0)$?

- Nếu $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện trên thì kết luận $f(x)$ liên tục tại x_0.
- Nếu một trong những điều kiện trên không thỏa mãn thì $f(x)$ gián đoạn tại x_0.

• Trong một số trường hàm số $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, có thể dùng định nghĩa liên tục trái, liên tục phải để xét :

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì $f(x)$ liên tục trái tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} (x) = f(x_0)$ thì $f(x)$ liên tục phải tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

◈ **Ví dụ 24**

Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{0\right\} \\ \sqrt{2} & khi\ x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$.

Giải

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{0\right\} \Rightarrow f(x) = \sin x + \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin x} = \sin x + \dfrac{\sqrt{2}\left|\sin x\right|}{\sin x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\sin x + \dfrac{\sqrt{2}\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right) = \sin 0 + \sqrt{2} = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}. \\ \bullet \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{2}\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}}\right) = \sin 0 - \sqrt{2} = 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt{2} \neq -\sqrt{2} = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$.

• **Ví dụ 25**

Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & khi\ x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & khi\ x \neq 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$.

Giải

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x} - 1) - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$.

◈ **Ví dụ 26**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & khi\, x \neq 0 \\ 1 & khi\, x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 0$.

Giải

Chọn hai dãy điểm $\left\{x_n\right\}$ và $\left\{x'_n\right\}$ với $x_n = \dfrac{1}{n\,\pi}$ & $x'_n = \dfrac{2}{\pi(1+4\,n)}$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ x'_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{\dfrac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0 & (1) \\ \bullet \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{\dfrac{2}{\pi(1+4n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1, & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ không tồn tại, nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x=0$.

◈ **<u>Ví dụ 27</u>**

Tính $f(0)$ để $f(x) = \dfrac{e^{\sin 7x} - e^{\sin 3x}}{x}$ liên tục tại $x=0$.

<u>Giải</u>

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 7x} - e^{\sin 3x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 4$$

Vậy: Để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì $f(0) = 4$.

<u>DẠNG 3</u>

XÉT SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN TOÀN BỘ $\mathbb{R}$.

⁎ **<u>Phương pháp</u>**

Để xét tính liên tục của hàm số trên toàn bộ $\mathbb{R}$, ta có thể tiến hành theo các bước sau :
- Tìm miền xác định của hàm số đã cho.
- Nếu hàm số đã cho là hàm số sơ cấp thì nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.
- Nếu hàm số cho bởi nhiều công thức, thì chúng ta cần phải xét tại điểm biên giữa hai khoảng và dùng định nghĩa liên tục trái và liên tục trái để xét.

◈ **<u>Ví dụ 28</u>**

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x-1} & khi\ \ x \neq 1 \\ -\pi & khi\ \ x = 1 \end{cases}$.

Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

<u>Giải</u>

- Nếu $x \neq 1 \Rightarrow \sin \pi x$ & $x-1$ là các hàm số sơ cấp liên tục, nên $f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{x-1}$ là thương của hai hàm sơ cấp liên tục nên $f(x)$ liên tục với mọi $x \neq 1$, (1)
- Đặt: $t = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ x \to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x-1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi(t+1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(\pi+\pi t)}{t}$

$= \pi \lim\limits_{\pi t\to 0} \dfrac{\sin(\pi+\pi t)}{\pi t} = -\pi \lim\limits_{\pi t\to 0} \dfrac{\sin \pi t}{\pi t} = -\pi.1 = -\pi = f(1) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại

$x = 1, (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

◈ **Ví dụ 29**

Cho $f(x) = \begin{cases} e^x & khi\ x < 0 \\ a + x & khi\, x \geq 0 \end{cases}$. Chọn a như thế nào để $f(x)$ liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

Giải

Hàm số $f(x)$ cho bởi hai công thức, nên nó không phải là hàm số sơ cấp. Miền xác định của $f(x)$ là toàn bộ $\mathbb{R}$.

- Nếu $x < 0 \Rightarrow f(x) = e^x$ là hàm số sơ cấp nên nó liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$ mà $x < 0$.
- Nếu $x > 0 \Rightarrow f(x) = a + x$ cũng hàm số sơ cấp nên nó liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$ mà $x > 0$.
- Nếu $x = 0$ ta có:

$+ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^o = 1,$ (1)

$+ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a + x) = a,$ (2)

$+ f(0) = a$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy : Với $a = 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$.

⁂

BÀI TẬP CHƯƠNG 1:
GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN

Dạng không vô định					
TT	**Đề ra**	**ĐS**	**TT**	**Đề ra**	**ĐS**
1.1	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$	-2	**1.2**	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4x-3}{2x+7}\right)^5$	$\left(\dfrac{9}{13}\right)^5$
1.3	$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$	$\dfrac{\sqrt{14}}{2}$	**1.4**	$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
1.5	$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{5x-1}{2x+7}}$	$\dfrac{2}{3}$	**1.6**	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+3}{2x^3+2x^2+x+6}$	$\dfrac{3}{4}$
Khử dạng vô định bằng cách phân tích thành nhân tử					
1.7	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$	1	**1.8***	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$	$n.a^{n-1}$
1.9	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{1-x^3}\right)$	1	**1.10***	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{1}{1-x}\right)$	$\dfrac{n-1}{2}$
1.11	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$	8	**1.12**	$\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}$	-8
1.13	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x(x+5)-6}$	$\dfrac{3}{7}$	**1.14**	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$	$\dfrac{15}{11}$
Khử dạng vô định bằng cách nhân lượng liên hợp					
1.15	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$	$2\sqrt{5}$	**1.16**	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$	$\dfrac{3}{2}$
1.17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$	$\dfrac{1}{2}$	**1.18**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$	$\dfrac{1}{12}$
1.19	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$	$\dfrac{3}{2}$	**1.20***	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\ (2\le n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n}$
1.21	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$	$\dfrac{1}{n!}$	**1.22**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$	$\dfrac{1}{2}$
1.23	$\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$	1	**1.24**	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{3x+58}}{x-2}$	$\dfrac{189}{16}$

1.25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$	0	**1.**26	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$	2
1.27	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$	$\dfrac{4}{3}$	**1.**28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a}}{x}$	$\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{a^2}}$
1.29	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$	$\dfrac{1}{3}$	**1.**30	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	0
1.31	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$	$\dfrac{4}{3}$	**1.**32	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$	$\dfrac{1}{3}$
1.33	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$	$-\dfrac{1}{9}$	**1.**34	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$	π
1.35	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	3	**1.**36	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$	$-\dfrac{2}{3}$
1.37	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$	$\dfrac{4}{3}$	**1.**38	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$	$\dfrac{3}{2}$
1.39	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$	$-\dfrac{11}{12}$	**1.**40	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-2x}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$	$\dfrac{10}{3}$
1.41	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$	$-\dfrac{11}{24}$	**1.**42	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$	$\dfrac{5}{2}$
Khử dạng vô định $I=\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left(f(x)\right)^{g(x)}$					
1.43	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5x-2}{x^2-3x+7}\right)^x$	e^8	**1.**44	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$	e^{15}
1.45	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$	$\left[\begin{matrix}+\infty\\0\end{matrix}\right.$	**1.**46	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$	e^{-4}
1.47	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$	e	**1.**48	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$	**1**
1.49	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	**1.**50	$\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}$	e^{-1}
1.51	$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	**1.**52	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{tgx}$	**1**

1.53	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$	1	**1.54**	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}}$	**1**
Dùng VCB (hay VCL) tương đương để khử dạng vô định					
1.55	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tgx)}{x+\sin^3 x}$	1	**1.56**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+\sin^4 x}$	$-\dfrac{1}{2}$
1.57	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$	$\dfrac{9}{4}$	**1.58**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x\sin x)}{tg^2 x}$	**2**
1.59	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$	1	**1.60**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$	$-\dfrac{1}{2}$
1.61	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x...\sin nx}{n!\,x^n}$	1	**1.62**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$	$\dfrac{a^2}{b^2}$
Dùng các giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a};\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ **(hoặc biến đổi lượng giác) để khử dạng vô định.**					
1.63	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{x^2+x}$	$\ln\frac{5}{3}$	**1.64**	$\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$	1
1.65	$\lim\limits_{x\to +\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$	0	**1.66**	$\lim\limits_{x\to +\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,]$	0
1.67	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$	1	**1.68**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$	$\dfrac{3}{2}$
1.69	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$	1	**1.70**	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$	$\frac{n^2-m^2}{2}$
1.71	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x-\sin x.\sin 4x}{x^4}$	6	**1.72**	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$	$\dfrac{\pi}{2}$
1.73	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^3x-3tgx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$	-24	**1.74**	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\,tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$	$\dfrac{1}{2}$

- **Xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0 cho trước (Từ bài 1.75 → 1.78)**
- **Xét tính liên tục của hàm số trên nửa khoảng (đoạn) đã cho (Từ bài 1.79 → 1.80)**

1.75	$f(x)=\begin{cases} x^2-x & khi\ x\ge 1\\ \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}} & khi\ x<1\end{cases}$ (tại $x_0=1$)	$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

1.76	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & khi\, x\neq -1\\ -2 & khi\, x=-1\end{cases}$ (tại $x_0=-1$)	$f(x)$ liên tục tại $x_0=-1$.
1.77	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+2x} & khi\, x>0\\ \dfrac{\sqrt{\sin x+1}}{4} & khi\ x<0\\ \dfrac{1}{8} & khi\ x=0\end{cases}$ (tại $x_0=0$)	$f(x)$ không liên tục tại $x_0=0$.
1.78	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ 2 & khi\ x=0\end{cases}$ (tại $x_0=0$)	$f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.
1.79	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+2x-3}} & khi\ x>1\\ 1 & khi\ x=1\end{cases}$ trên $[1;+\infty)$	$f(x)$ liên tục trên nửa khỏang: $[1;+\infty)$
1.80	$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ (trên đoạn $[-2;2]$)	$f(x)$ liên tục trên đoạn: $[-2;2]$
Tìm giá trị của tham số (hoặc các tham số) để các hàm số sau đây liên tục tại điểm x_0 (Từ bài 1.81 → 1.84)		
1.81	$f(x)=\begin{cases}a.\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-3}} & khi\ x>2\\ \dfrac{2x-a}{x-1} & khi\ x\leq 2\end{cases}$ (tại $x_0=2$)	$a=\dfrac{4}{\sqrt{6}+1}$
1.82	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x} & khi\ x<0\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & khi\ x\geq 0\end{cases}$ (tại $x_0=0$)	$a=-2$
1.83	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & khi\, x<0\\ x+m & khi\ x\geq 0\end{cases}$ (tại $x_0=0$)	$m=2$
1.84	$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+3 & khi\ x<1\\ 5 & khi\ x=1\\ 2x-3b & khi\ x>1\end{cases}$ tại $x_o=1$	$\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}$

Tìm giá trị của tham số (hoặc các tham số) để các hàm số sau đây liên tục trên toàn bộ $\mathbb{R}$ (Từ bài 1.85 → 1.90)		
1.85*	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - ax - 1}{x^2 + x - 2} & khi\ x > 1 \\ bx^2 - 3x + 4 & khi\ x \le 1 \end{cases}$	$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$
1.86	$f(x) = \begin{cases} x + 1 & khi\ x \le 1 \\ 3ax + 3 & khi\ x > 1 \end{cases}$	$a = -\dfrac{1}{3}$
1.87	$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & khi\ x > 2 \\ \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} & khi\ x \le 2 \end{cases}$	$a = -\dfrac{1}{3}$
1.88	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^3}{\lvert x - 1 \rvert} & khi\ x \ne 1 \\ a & khi\ x = 1 \end{cases}$	$a = 0$
1.89	$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & khi\ x \ge 1 \\ x & khi\ x < 1 \end{cases}$	$a = -1$
1.90	$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & khi\ x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x + b & khi\ x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$	$b = \dfrac{a\pi}{2}$

--------------- Hết ---------------

CHƯƠNG 2
PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1 ĐẠO HÀM

1.1 Định nghĩa 1 (Số gia đối số, số gia hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a,b) & $x_0 \in (a,b)$.

• *Gọi* $\Delta x = x - x_0$ *là số gia của đối số* x *tại* x_0.

• *Gọi* $\Delta y = f(x_0 + \Delta_x) - f(x_0)$ *là số gia của hàm số* y *tại* x_0.

1.2 Đạo hàm, đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái

♦ **Định nghĩa 2**

• *Nếu tồn tại và hữu hạn* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số* $f(x)$ *tại* x_0 *và được ký hiệu là* $f'(x_0)$ *hay* $\dfrac{dy}{dx}$. *Như vậy:* $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

• *Nếu chỉ tồn tại và hữu hạn* $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *hay* $f'(x_0^-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *thì các giới hạn đó lần lượt gọi là đạo hàm bên phải hoặc đạo hàm bên trái của hàm số* $f(x)$ *tại điểm* x_0.

✡ **Định lý 1**

Hàm số $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ *có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm* x_0 *và các đạo hàm đó bằng nhau.*

Từ định lý 1 trên chúng ta suy ra :

• Nếu $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$.

• Nếu $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+) \Rightarrow \nexists f'(x_0)$.

1.3 Ý nghĩa hình học của đạo hàm.

Trong mặt phẳng toạ độ, nếu đường cong có phương trình $y = f(x)$ và điểm $M(x_0 f(x_0))$ thuộc đường cong này. *Nếu tại điểm* x_0 $\exists f'(x_0)$ *thì phương trình tiếp tuyến với đường cong* $y = f(x)$ *tại điểm* $M(x_0, f(x_0))$ *là :*

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

1.4 Đạo hàm trên (a, b), [a, b]

♦ **Định nghĩa 3**

• *Ta nói rằng* $f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* (a,b), *nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm* $x \in (a,b)$.

• *Ta nói rằng hàm số* $f(x)$ *có đạo hàm trên đoạn* $[a,\ b]$ *nếu:*

· $f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* (a,b).

· $f(x)$ *có đạo hàm bên phải tại* a *và* $f(x)$ *có đạo hàm bên trái tại* b .

1.5 Mở rộng khái niệm đạo hàm.

♦ **Định nghĩa 4** (Đạo hàm bằng ∞)

• *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a,b) & $x_0 \in (a,b)$ *nếu*

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ *thì ta nói rằng đạo hàm của* $f(x)$ *tại* x_0 *bằng* $+\infty$ *và viết*

$f'(x_0) = +\infty$

• $f'(x_0) = -\infty$ *định nghĩa tương tự.*

1.6 Quan hệ giữa đạo hàm và liên tục.

✡ **Định lý 2** *Hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại* x_0 *thì nó liên tục tại* x_0.

Từ Định lý 2 $\Rightarrow$ Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0.

▼ **Chú ý 1**

Điều ngược lại không phải bao giờ cũng đúng nghĩa là: *Nếu* $f(x)$ *liên tục tại* x_0 *thì chưa chắc* $f(x)$ *có đạo hàm tại* x_0.

◈ **Ví dụ 1**

Xét sự liên tục và có đạo hàm của hàm số $f(x) = |x|$ tại $x = 0$.

Giải

∘ Hàm số $f(x) = |x|$ xác định tại $x = 0$ và trong lân cận của điểm $x = 0$. Ta thấy:

$$\begin{cases} \bullet \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$. Mặt khác chúng ta có:

$$\begin{cases} \bullet f(0) = |0| = 0 \\ \bullet f'(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \bullet f'(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-).$$

$\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy: hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$, nhưng $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

1.7 Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Hàm số	***Đạo hàm***	**Hàm số**	***Đạo hàm***
$c \in \mathbb{R}$	0	$\cos x$	$-\sin x$
x^α	$\alpha x^{\alpha - 1}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
a^x $(0 < a \neq 1)$	$a^x \ln a$	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

e^x	e^x	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$arc\cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

1.8 Các quy tắc lấy đạo hàm

1- Đạo hàm của một tổng : $(u+v)' = u' + v'$

2- Đạo hàm của một tích : $(u\,v)' = u'v + u\,v'$

3- Đạo hàm của một thương : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

4- Đạo hàm của hàm hợp: Nếu hàm số $y = f(u)$ mà $u = \varphi(x)$ thì $y = f\left[\varphi(x)\right]$ là một hàm hợp của x. Khi ấy : $y'_x = y'_u . u'_x$.

5- Đạo hàm của hàm số ngược

✡ **Định lý 3**

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục và tăng nghiêm ngặt trong khoảng (a,b) và gả thiết rằng $x = \varphi(y)$ là hàm ngược xác định trong lân cận của điểm $y_0 = f(x_0)$ với $x_0 \in (a,b)$. Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ & $f(x_0) \neq 0$ thì hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại điểm y_0 & $x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

◈ **Ví dụ 2**

Cho hàm số $y = x^3$ có hàm ngược là $x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow x'(y) = \frac{1}{3x^2}$.

§2 VI PHÂN

2.1 Hàm khả vi và vi phân của hàm số

♦ **Định nghĩa 5** (Hàm khả vi)

• *Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) & $x_o \in (a,b)$. Cho x_0 số gia Δx sao cho $x_0 + \Delta x = x \in (a,b)$ và gọi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số ứng với số gia của đối số Δx.*

• *Ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 nếu có thể viết $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$, trong đó A là một hằng số, $0(\Delta x)$) là VCB bậc cao hơn Δx.*

♦ **Định nghĩa 6** (Vi phân của hàm số)

Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì biểu thức: $dy = A\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0. Từ định nghĩa ta thấy ngay rằng: Với Δx bé thì $dy \approx \Delta y$.

2.2 Quan hệ giữa đạo hàm và vi phân

✡ **Định lý 4**

Hàm số $y = f(x)$ *khả vi tại* x_0 *khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại* x_0.

▼ **Chú ý 2** Từ định lý 3 ở trên ta suy ra :

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì biểu thức vi phân của $f(x)$ là $dy = f'(x)dx$.
- Muốn chứng minh hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 ta đi chứng minh $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0.

2.3 Các quy tắc lấy vi phân

Nếu u, v *là hai hàm số có đạo hàm trên khoảng* (a,b) *thì :*

1) $dc = 0$ với $c = const$
2) $dx = \Delta x$ nếu x là biến độc lập.
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4) $d(cu) = c\,du$ với $c = const$
5) $d(uv) = vdu + udv$.
6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ nếu $v \neq 0$.

§ 3 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

3.1 Đạo hàm cấp cao

♦ **Định nghĩa 7**

Cho hàm số $y = f(x)$. *Nếu* $f(x)$ *có đạo hàm với mọi* $x \in (a,b)$ *thì* $f'(x)$ *cũng là một hàm của* x *trên* (a,b). *Khi đó nếu* $f'(x)$ *có đạo hàm trên* (a,b) *thì ta gọi* $\left(f'(x)\right)'$ *là đạo hàm cấp hai của hàm f(x) và ký hiệu* $f''(x)$. *Đạo hàm cấp* n *của* $f(x)$ *được ký hiệu* $f^{(n)}(x)$. *Theo định nghĩa ta có :* $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'$. *Ta quy ước:* $f^{(o)}(x) = f(x)$.

3.2 Công thức tính đạo hàm bậc cao của tổng, của tích.

1) $\left(f(x) + g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

2) $\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).\ g^{(n-k)}(x)$, với $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(Công thức: 2) gọi là công thức ***Leibnitz***)

3.3 Công thức đạo hàm bậc cao của một số hàm số

1) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0)$.

2) $(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin(ax + n\frac{\pi}{2})$

3) $\left(\cos ax\right)^{(n)} = a^n \cos(ax + n\frac{\pi}{2})$

4) $\left(x^m\right)^{(n)} = m.(m-1)(m-2)...(m-n+1)\,x^{m-n}$.

5) $\left(\ln x\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3.4 Vi phân cấp cao

Tương tự như với đạo hàm cấp cao, ta có thể nói về vi phân cấp cao.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ *khả vi trên* (a,b).

a) *Như đã biết biểu thức* $dy = y'dx$ *là vi phân cấp một của hàm số* $f(x)$. *Hàm số này phụ thuộc vào hai biến độc lập* x *và* Δx.

b) *Nếu hàm này khả vi trên* (a,b) *thì vi phân của nó:* $d(dy)$ *gọi là vi phân cấp hai của hàm* $y = f(x)$, *ký hiệu là* d^2y .

Như vậy: $d^2y = \left(y'\Delta x\right)' \Delta x = y''(\Delta x)^2$. *Nhưng do* $dx = \Delta x \Rightarrow d^2y = y''dx^2$

c) *Một cách tổng quát:* $d^n y = y^{(n)}dx^n$ *(nếu* y *- khả vi cấp* n *trên* (a,b)*).Vì hệ thức này nên đạo hàm cấp* n *còn có thể viết :* $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ *(chẳng hạn các đạo hàm cấp một hay đạo hàm cấp hai có thể viết :* $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \cdots$*)*

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP

VẤN ĐỀ 1

TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

※ **Phương pháp**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên miền D. Muốn tính $f'(x)$ chúng ta có thể dùng một trong hai phương pháp sau :

♦ Phương pháp 1 (Làm chậm)

Bước 1 : Cho x một số gia Δx và tính $f(x + \Delta x)$

Bước 2 : Tính số gia của hàm số $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x)$

Bước 3 : Tính giới hạn $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x + \Delta x\right) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

◈ **Ví dụ 7** Cho $f(x) = \sqrt{x}$. *Tính* $f'(x)$.

Giải

Bước 1 : Cho x một số gia Δx và *tính* $f\left(x + \Delta x\right) = \sqrt{x + \Delta x}$

Bước 2 : Số gia của hàm số là $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

Bước 3 : Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

♦ **Phương pháp 2** (Làm nhanh)

Bước 1 : Lấy bất kỳ $x_0 \in D$.

Bước 2 : Tính giới hạn $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Bước 3 : Từ công thức $f'(x_0)$ suy ra công thức $f'(x)$.

◈ **Ví dụ 8**

Cho $f(x) = \sqrt{x}.\ Tính\ f'(x).$

Giải

Lấy bất kỳ x_0. Theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_o} \frac{\cancel{(x - x_0)}}{\cancel{(x - x_0)}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{x \to x_o} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2.\sqrt{x_0}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

▼ **Chú ý 3**

Phương pháp 2 (Làm nhanh) như trên, có thể áp dụng để tính đạo hàm của hàm số cho bởi nhiều biểu thức toán học.

◈ **Ví dụ 9** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \pi x}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ 0 & khi\ x = 1 \end{cases}$

Hãy xét xem tại điểm $x_0 = 1$, hàm số $f(x)$ có đạo hàm hay không?

Giải

Xét: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin^2 \pi x}{(x-1)^2}$. Đặt $t = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ x \to 1 \Rightarrow t \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin^2 \pi x}{(x-1)^2}$.

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin^2(\pi + \pi t)}{t^2} = \lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2 .\pi^2 = \pi^2$. Vậy $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 1$ và $f'(1) = \pi^2$.

VẤN ĐỀ 2

TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG CÔNG THỨC VÀ QUY TẮC

⋇ **Phương pháp**:

1) Dựa vào bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản.
2) Áp dụng các công thức và quy tắc tính đạo hàm.
3) Cần chú ý thêm một số trường hợp sau đây:

a) Đạo hàm của hàm phụ thuộc tham số:

Hàm số phụ thuộc tham số được cho dưới dạng $x = \varphi(t),\ y = \psi(t);\ \ t \in (\alpha, \beta)$. Nếu hàm $x = \varphi(t)$ trong khoảng (α, β) có hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$ thì ta có $y = \psi[\varphi^{-1}(x)], (1)$.

Lấy đạo hàm hai vế theo x phương trình (1) và áp dụng công thức đạo hàm của hàm ngược, ta thu được: $y'_x = \psi'_t . t'_x = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_x} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

◈ **<u>Ví dụ 11</u>** Cho: $y = \psi(t) = \sin t$, $x = \varphi(t) = \cos^2 t$ với $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Tính* y'_x.

<u>Giải</u>

$$\varphi'_t = -2\cos t \sin t,\ \psi'_t = \cos t \Rightarrow y'_x = \frac{\cancel{\cos t}}{-2.\cancel{\cos t}.\sin t} = -\frac{1}{2\sin t}.$$

b) <u>Đạo hàm của hàm số mũ dạng</u> $y = f(x)^{g(x)}$

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x) \Rightarrow \left(\ln y\right)' = \left(g(x)\ln f(x)\right)' \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\left(\ln f(x)\right)'$$

$$\Leftrightarrow y' = y\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x).f'(x)}{f(x)}\right) \Leftrightarrow y' = f(x)^{g(x)-1}\left(g'(x)f(x)\ln f(x) + g(x)f(x)\right).$$

c) <u>Đạo hàm của hàm số lôgarit dạng</u> $y = \log_{g(x)} f(x)$

$$y = \log_{g(x)} f(x) \Rightarrow y = \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} \Rightarrow y' = \left(\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}\right)' \Leftrightarrow y' = \frac{\left(\ln f(x)\right)'\ln g(x) - \ln f(x)\left(\ln g(x)\right)'}{\ln^2 g(x)}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\ln g(x) - \ln f(x).\dfrac{g'(x)}{g(x)}}{\ln^2 g(x)} \Leftrightarrow y' = \frac{f'(x)\,g(x)\ln g(x) - g'(x).f(x).\ln f(x)}{f(x).g(x).\ln^2 g(x)}$$

<u>VẤN ĐỀ 3</u>

TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ. ỨNG DỤNG VI PHÂN ĐỂ TÍNH GẦN ĐÚNG

⁂ **<u>Phương pháp</u>**

- Muốn tìm vi phân của một hàm số $y = f(x)$, ta áp dụng công thức $dy = f'(x)\,dx$.
- Áp dụng vi phân để tính gần đúng :

Với Δx bé thì : $dy \approx \Delta y \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x$ với độ chính xác là $0(\Delta x)$, một vô cùng bé bậc cao hơn Δx.

◈ **<u>Ví dụ 12</u>**

1) Tính vi phân của các hàm số sau : $y = arctgx^3$; $s = e^{t^3}$.

<u>Giải</u>

1) $dy = \left(arctgx^3\right)' dx = \dfrac{3x^2}{1 + x^6}dx$; $ds = \left(e^{t^3}\right)' dt = 3t^2.e^{t^3}dt$

2) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,0018$. Tính giá trị gần đúng $f(1,0018) = (1,0018)^2 = ?$

<u>Giải</u>

$f(1,0018) = (1 + 0,0018) \approx f(1) + f'(1).(0,0018) \approx 1 + 2.1.(0,0018) \approx 1,0036$ là giá trị gần đúng của $(1,0018)^2$. Ta biết rằng giá trị đúng của $(1,0018)^2 = 1,00360324$. So sánh giữa hai giá trị "đúng" và "gần đúng" của $(1,0018)^2$ chúng ta thấy khá gần nhau.

3) Cho $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ \Delta x = 0,0025$, Tính giá trị "gần đúng" của $\sqrt{1,0025}$.

Giải

$Vì: \sqrt{1,0025} \approx f(1) + f'(1).0,0025 \approx \sqrt{1} + \dfrac{1}{2.\sqrt{1}}.(0,0025) \approx 1 + \frac{1}{2}.(0,0025) \approx 1,001250.$ Nếu chúng ta so sánh giá trị "đúng" của $\sqrt{1,0025} = 1,001249...$ với giá trị "gần đúng" của $\sqrt{1,0025}$ ta thấy hai giá trị này rất gần nhau.

VẤN ĐỀ 4

TÍNH ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

◈ Ví dụ 13

a) Cho $y = x^2 e^x$. *Tính* $y^{(20)}(0)$.

b) $y = x\cos 2x$. *Tính* $d^{10}y$.

Giải

a) Theo công thức Lepnit ta có : $\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).\ g^{(n-k)}(x)$, ta có :

$$y^{(20)}(x) = \left(x^2.e^x\right)^{(20)} = C_{20}^{o}(x^2)^{(o)}(e^x)^{(20)} + C_{20}^{1}(x^2)'(e^x)^{(19)} + C_{20}^{2}(x^2)''(e^x)^{(18)} = C_{20}^{o}x^2e^x + C_{20}^{1}(2x)e^x$$

$$+ C_{20}^{2}.2.e^x \Rightarrow y^{(20)}(0) = C_{20}^{o}0^2e^0 + C_{20}^{1}(2.0)e^0 + C_{20}^{2}.2.e^0 = C_{20}^{2}.2 = \frac{20!}{2!18!}.2 = \frac{\cancel{18!}\,19.20.\cancel{2}}{\cancel{18!}.\cancel{2}} = 380.$$

b) Theo công thức tính vi phân cấp cao :

$$d^{10}y = \left(x\cos 2x\right)^{(10)}dx^{10} = \left(C_{10}^{o}x^{(o)}\left(\cos 2x\right)^{(10)} + C_{10}^{1}x'\left(\cos 2x\right)^{(9)} + C_{10}^{2}x''\left(\cos 2x\right)^{(8)}\right)dx^{10}$$

$$= \left(2^{10}x.\cos\left(2x + 10.\frac{\pi}{2}\right) + 2^9.C_{10}^{1}.\cos\left(2x + 9.\frac{\pi}{2}\right)\right)dx^{10} = \left(-2^{10}x.\cos 2x - 2^9.10.\sin 2x\right)dx^{10}$$

$$= \left(-2^{10}x.\cos 2x - 2^9.2.5.\sin 2x\right)dx^{10} = -2^{10}.\left(x.\cos 2x + 5.\sin 2x\right)dx^{10}.$$

VẤN ĐỀ 5 DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GIỚI HẠN (QUY TẮC L/Hospital)

♦ **Quy tắc L/Hospital 1** (Dùng để khử dạng vô định $\frac{0}{0}$)

Giả sử các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm ở lân cận x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ ở lân cận của điểm x_0 khi đó nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l hữu hạn hay $l = \pm\infty$) thì ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l.$

♦ **<u>Quy tắc L/Hospital 2</u>** (Dùng để khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Giả sử các hàm số $y=f(x), y=g(x)$ có đạo hàm ở lân cận x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ $=\infty$ và $g'(x)\neq 0$ ở lân cận của điểm x_0 khi đó nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l hữu hạn hay $l=\pm\infty$) thì ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l.$.

▼ **<u>Chú ý 4</u>**

a) Trường hợp $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn thuộc dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ *hay* $\dfrac{\infty}{\infty}$ mà tỷ số $\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ thoả mãn điều kiện của quy tắc L/Hospital, ta lại áp dụng được quy tắc lần nữa và có thể xét tiếp tục như thế (nếu thoả mãn) tức là :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = ... = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = l.$$

b) *Lấy đạo hàm tử số riêng, lấy đạo hàm mẫu số riêng , chứ không phải lấy đạo hàm của một thương.*

c) Trong 2 quy tắc L/Hospital chỉ phát biểu cho $x\to x_o$. Nhưng khi $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$ hay khi $x\to\pm\infty$ thì các quy tắc trên vẫn đúng.

◈ **<u>Ví dụ 14</u>** Tìm các giới hạn sau đây **:**

$$a)\ \ A = \lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(tgx-x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1+1}{1^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$b)\ \ B = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c)\ C = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(tgx)'}{(tg3x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 3x)'}{\left(\cos^2 x\right)'}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 6x}{-\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin 6x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x} = \frac{6.(-1)}{2.(-1)} = 3.$$

II) <u>DÙNG QUY TẮC L/HOSPITAL ĐỂ KHỬ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH KHÁC</u>

1) <u>Dùng quy tắc L/HOSPITAL để khử các dạng vô định</u> $0.\infty$

⁕ **<u>Phương pháp</u>:** Dạng vô định $0.\infty$ đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hay dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$ để áp dụng quy tắc Lôpitan.

Giả sử: $\begin{cases}\bullet \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0\\ \bullet \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty\end{cases} \Rightarrow I = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)\left(0.\infty\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\bullet I = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)\\ \bullet I = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\end{array}\right.$

◈ **Ví dụ 15** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln x\ (\alpha>0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = -\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$

2) Dùng quy tắc L/HOSPITAL để khử các dạng vô định : ∞ - ∞

⁎ **Phương pháp** Giả sử: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ & $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, khi đó chúng ta có:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\times\frac{1}{g(x)}} \ \text{(Dạng } \frac{0}{0}\text{)}$$

Trong thực tế bằng các biến đổi nhiều khi ta có thể đưa một dạng vô định nào đó về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ khá đơn giản.

◈ **Ví dụ 16**

$$\lim_{x\to 0}(cotgx-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x + x\cos x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\dfrac{x}{\sin x}\cos x} = -\frac{\lim\limits_{x\to 0} x}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\times\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = -\frac{0}{1+1\times 1} = -\frac{0}{2} = 0.$$

3) Dùng quy tắc L/HOSPITAL để khử khử các dạng vô định : $1^{\infty};\ 0^{o};\ \infty^{o}$

⁎ **Phương pháp**

Các dạng vô định $1^{\infty}; 0^{o}; \infty^{o}$ bao giờ cũng đưa về được dạng $0.\infty$ bằng cách lôgarit hoá biểu thức đã cho. Giả sử cần tìm $\lim\limits_{x\to a}\left[\,f(x)\,\right]^{g(x)}$ (dạng 1^{∞}). Ta làm như sau:

$$y=\left[\,f(x)\,\right]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a}(\ln y) = \ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

(Dạng $0.\infty$). Đến đây thì có thể dùng quy tắc L/Hospital để khử dạng vô định.

◈ **Ví du 17** Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+1}$, (Dạng 1^{∞})

Giải

Đặt: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+1} \Rightarrow \ln A = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln\dfrac{x+2}{x-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{x+2}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right).\dfrac{\big((x-1).1-(x+2).1\big)}{(x-1)^2}}{-\dfrac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\cancel{(x-1)}}{(x+2)}\times\dfrac{-3}{(x-1)^{\cancel{2}}}}{-\dfrac{1}{(x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{(x+2)(x-1)}:\frac{1}{(x+1)^2}\right) = 3.\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-1)} = 3.\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-2}$$

$$= 3.\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 3.\frac{1+0+0}{1+0-0} = 3 \Rightarrow \ln A = 3 \Rightarrow A = e^3.$$

▼ **Chú ý 5**

a) Theo quy tắc L'Hospital nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, tức là nếu tỷ số các đạo hàm có giới hạn là l thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, nhưng nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì không thể kết luận : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng không tồn tại.

◈ **Ví dụ 18** Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$)

Giải

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. *Khi* $x\to\infty \Rightarrow -1\le \cos x \le 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ không xác định. Nhưng nếu kết luận không tồn tại $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ là sai vì: nếu dùng phương pháp biến đổi ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$

$= \frac{1-0}{1+0} = 1.$

b) *i) Nhờ quy tắc L'Hospital ta có thêm phương pháp mới để tìm giới hạn các dạng vô định một cách khá hiệu nghiệm . Tuy nhiên áp dụng quy tắc L'Hospital đòi hỏi người giải toán phải lấy đạo hàm thành thạo, nếu đạo hàm sai và nhất là đạo hàm* ***"sót"*** *khi tính đạo hàm của hàm hợp thì kết quả sẽ ngược lại với điều ta mong muốn, vì kết quả sai thì nói gì đến phương pháp hiệu nghiệm (!)*

ii) Nhưng chúng ta cũng cần nhớ rằng quy tắc L'Hospital không phải là ***"chìa khoá vạn năng"*** *giúp cho chúng ta giải được mọi bài toán về giới hạn (bởi vì hàm số dưới dấu "lim" với biến số không liên tục thì không áp dụng được quy tắc L'Hospital). Trong một số trường hợp có khi càng áp dụng quy tắc L'Hospital lại càng phức tạp, không giải được bài toán, nhưng nếu dùng phương pháp khác lại rất gọn:*

◈ **Ví dụ 19** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

Giải

$Vì: e^{a\sqrt{x}}-1 \sim a\sqrt{x}\ (khi\ x\to0)$ & $\sqrt{\sin bx}\sim\sqrt{bx}\ khi\ (x\to0)$. Do đó chúng ta có: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin bx}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{a.\sqrt{x}}{\sqrt{bx}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{a.\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{b}.\cancel{\sqrt{x}}} = \frac{a}{\sqrt{b}}$. Nếu không dùng phương pháp thay thế tương đương mà áp dụng quy tắc Lôpitan để giải bài toán trên thì sẽ gặp không ít khó khăn, phức tạp.

TÓM LẠI

Kết hợp các phương pháp tìm giới hạn đã học trong các chương trước đây ta rút ra: Đến nay ta có ba phương pháp tìm giới hạn dạng vô định:

a) ***Phương pháp biến đổi.***

b) ***Phương pháp thay thế tương đương.***

c) ***Phương pháp áp dụng quy tắc L'Hospital.***

Như ta đã biết hai phương pháp b) và c) khá hiệu nghiệm cần vận dụng. Tuy nhiên mỗi phương pháp cũng có những hạn chế riêng và có vị trí riêng của nó. Vì thế chúng ta cần nắm vững cả 3 phương pháp để có thể tùy cơ mà vận dụng. Khi giải một bài toán "Giới hạn" có thể vận dụng một hay vài phương pháp vừa nêu ở trên miễn là làm sao tìm ra kết quả đúng và nhanh nhất.

⁂

BÀI TẬP

BÀI	**ĐỀ RA**	**ĐÁP SỐ HOẶC HƯỚNG DẪN**
2.1	Xác định một điểm trên đường cong $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ với $x \neq -1$ mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = \dfrac{x}{2}$.	
	Tính đạo hàm cấp 1 của các hàm số	
2.2	$Cho\ y_1 = x^x.\ Tính\ y_1'(x).$	$y_1'(x) = x^x\left(\ln x + 1\right)$
2.3	$Cho\ y = x^{x^{x^x}}.\ Tính\ y'(x).$ Đáp số : $y'(x) = x^{x^{x^x}}.x^{x^x}\left[x^x\left(\ln^3 x + \ln^2 x + \dfrac{\ln x}{x}\right) + \dfrac{1}{x}\right]$	
2.4	$Cho\ y = x^{\frac{1}{x}}.\ Tính\ y'(x).$	$y'(x) = x^{\frac{1}{x}}.\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$
2.5	$Cho\ y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}.\ Tính\ y'(x).$	$y'(x) = -\dfrac{4x}{3}.\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}.\dfrac{1}{(1-x^4)}$
2.6	$Cho\ y = \dfrac{\sqrt[5]{(x-4)^4}}{\sqrt[4]{(x-3)^3}.\sqrt[3]{(x-2)^7}}.Tính\ y'(x).$	$y'(x) = \dfrac{-137x^2 + 1010x - 1752}{60\sqrt[5]{x-4}.\sqrt[4]{(x-3)^7}.\sqrt[3]{(x-2)^{10}}}$
2.7	Cho hàm $y = x^4 - 2x^3$. Giải các phương trình $y' = 0,\ y'' = 0.$	
2.8	Cho hàm $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Giải các phương trình $y' = 0,\ y'' = 0.$	
2.9	Cho hàm $y = (5-x)\sqrt[3]{x^2}$. Giải các phương trình $y' = 0,\ y'' = 0.$	
2.10	Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 0 & khi\ x = 0 \end{cases}$ a) Tính $f'(x)$ tại mỗi điểm $x \in \mathbb{R}$. b) Chứng minh rằng: $f'(x)$ không liên tục tại $x = 0$.	$a)\ f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 0 & khi\ x = 0 \end{cases}$ b) Tự giải.

2.11	Cho $f(x)=\begin{cases} x.e^{-\frac{1}{x^2}} & khi\ x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$ Tính $f'(x)$.	$f'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}+\dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} & khi\ x\neq 0 \\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$
2.12	Cho $y=\dfrac{1}{15}\cos^2 x\left(3\cos^2 x-2\right)^2$. Tính $y'(x)$.	$y'=-\dfrac{1}{15}\sin 2x.\left(27\cos^4 x-24\cos^2 x+4\right)$
2.13	Cho $y=arc\cos\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)$. Tính $y'(x)$.	$y'(x)=\dfrac{-x^2+x.\sqrt{x^2-1}+2}{x.\sqrt{\left(x^4-2x^2+2x\sqrt{x^2-1}+1\right).\left(x^2-1\right)}}$
2.14	Cho $y=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. Tính $y'(x)$.	$y'=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$
2.15	Cho hàm số $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$. Tính $y'(x)$.	$y'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\sin^2 x}}$
2.16	Cho hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x-\sqrt{x}}$. Tính $y'(x)$.	$y'=\dfrac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$
2.17	Cho $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Tính $y'(x)$.	$y'=-\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{x}{8}$
2.18	Cho hàm số $y=\log_{2x}(3x+1)$. Tính $y'(x)$.	$y'=\dfrac{3x\ \ln(2x)-(3x+1)\ln(3x+1)}{x(3x+1)\ln^2(2x)}$
2.19	Cho $y=\log_{2x}(3x-1)$. Tính $y'(x)$.	$y'=\dfrac{3x\ \ln(2x)-(3x-1)\ln(3x-1)}{x(3x-1)\ln^2(2x)}$
2.20	Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Tính $y'(x)$. <u>Đáp số</u>: $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$	

2.21	Cho hàm số $y=\log_{(e^{\frac{1}{x}}-x)}(3\sin^2 x)$. Tính $y'(x)$. <u>Đáp số</u>: $y' = \dfrac{2.x^2(e^{\frac{1}{x}}-x)\cot gx\ln(e^{\frac{1}{x}}-x)+(e^{\frac{1}{x}}+x^2)\ln(3\sin^2 x)}{x^2\,(e^{\frac{1}{x}}-x)\ln^2(e^{\frac{1}{x}}-x)}$	
2.22	Cho hàm số $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}$. Tính $y'(x)$. <u>Đáp số</u>: $y'(x) = \dfrac{x^3}{6.\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}.\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{1+x^4}\right)^2}.\sqrt[4]{\left(1+x^4\right)^3}}$	
Tính đạo hàm cấp n của các hàm số		
2.23	*Cho* $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$. Tính $y^{(n)}(x)$.	$y^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$
2.24	*Cho* $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$. *Tính* $f^{(30)}(x);\ f^{(n)}(x)$.	$f^{(30)}(x) = 30!(1-x)^{-31}$
2.25	*Cho* $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. *Tính* $f^{(100)}(x)$.	$f^{(100)}(x)=\dfrac{3.5.7...197}{2^{100}}.\dfrac{(399-x)}{(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$
2.26	Cho hàm số $y=x^2e^{ax}$. Tính $y^{(n)}(x)$. <u>Đáp số</u> $y^{(n)}(x) = x^2a^ne^{ax}+C_n^1\,2x\,a^{n-1}e^{ax}+2C_n^2\,a^{n-2}\,e^{ax}$	
2.27	Cho hàm số $y=x^2\sin 2x$. Tính $y^{(n)}(x)$. <u>ĐS</u>: $y^{(n)}(x)=x^2.2^n\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2n\,x\,2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-(n-1)n\,2^{n-2}\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$	
Tính vi phân cấp 1 các hàm số		
2.28	*Cho* $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x$. Tính dx.	$dx = 2\,\dfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$
2.29	*Cho* $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Tính dx.	$dx=\dfrac{-4\,t}{(t^2-1)^2}\,dt$
2.30	Cho $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Tính dx.	$dx = \dfrac{-6\,t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$

2.31	Cho $t = tg\dfrac{x}{2}, (-\pi < x < \pi)$. Tính dx.	$dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$
Dùng quy tắc Lôpitan để tìm giới hạn		
2.32	$L_{32} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3}{x-\sin x}$	24
2.33	$L_{33} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - x}{x-\sin x}$	2
2.34	$L_{34} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)$	$-\dfrac{2}{\pi}$
2.35*	$L_{35} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$	$-\dfrac{1}{2}$
2.36	$L_{36} = \lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$	0
2.37*	$L_{37} = \lim\limits_{x\to 0} x^{(x^x - 1)}$	1
2.38	$L_{38} = \lim\limits_{x\to 1^+}\ln x.\ln(x-1)$	0
2.39*	$L_{39} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	$e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}$
2.40	$L_{40} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
2.41	$L_{41} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin ax - \cos ax}$	$\dfrac{1}{a}$
2.42	$L_{42} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$	$\dfrac{1}{2}$

---------------- Hết ----------------

CHƯƠNG 3: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

§1 NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

1.1 Nguyên hàm

♦ **Định nghĩa 1**

Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng I nếu với mọi $x \in I$, ta có: $F'(x) = f(x)$. Nếu khoảng I có chứa các đầu mút thì tại các đầu mút $F(x)$ chỉ cần có đạo hàm một phía.

1.2 Một số định lý

✡ **Định lý 1**

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng I thì :

1. *Với mọi hằng số $C \Rightarrow F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng I.*
2. *Ngược lại, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng I đều có thể viết dưới dạng $F(x)+C$*

Nói cách khác: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $I \Rightarrow \left\{ F(x)+C \middle| C \in \mathbb{R} \right\}$ là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng I.

✡ **Định lý 2** (Sự tồn tại nguyên hàm)

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.

1.3 Tích phân không xác định

♦ **Định nghĩa 2**

a) *Biểu thức $F(x)+C$ trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng I và C - là hằng số tuỳ ý, được gọi là tích phân không xác định (thường gọi tắt là tích phân) của hàm số $f(x)$ trên I và ký hiệu: $\int f(x)dx = F(x)+C$.*

b) *Dấu "$\int$ " đọc là "tích phân", $f(x)$ gọi là hàm dưới dấu tích phân, $f(x)dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân, x gọi là biến số dưới dấu tích phân.*

▼ **Chú ý 1**

a) Muốn tính một tích phân không xác định của hàm số $f(x)$ chỉ cần tính một nguyên hàm của nó.

b) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $f(x)dx = F'(x)dx = d(F(x))$. Do đó biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ không phải là một ký hiệu ngẫu nhiên, mà thực sự là một vi phân: vi phân của chính nguyên hàm $F(x)$.

c) Có một số hàm số nhìn vào ta thấy **rất đơn giản** nhưng lại không có nguyên hàm vì chúng không thể biểu diễn dưới dạng các hàm số sơ cấp:

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \text{(Tích phân Poatxông)}$$

$$\left.\begin{matrix} \int \cos x^2 dx \\ \int \sin x^2 dx \end{matrix}\right\} \quad \text{(Tích phân Fresnet)}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \qquad \text{(Tích phân logarit)}$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad \text{(Tích phân cosnus)}$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{(Tích phân sinus)}$$

1.3.1 <u>Bảng các nguyên hàm cơ bản</u>

a) Việc lấy tích phân một hàm nào đó thực chất là việc đưa dần từ một tích phân phức tạp về một tích phân đơn giản hơn. Cuối cùng ta đưa đến một tích phân đơn giản nhất được gọi là tích phân cơ bản. Dựa vào bảng các đạo hàm cơ bản và định nghĩa tích phân không xác định chúng ta có các tích phân cơ bản sau:

1) $\int 0dx = C$

2) $\int 1dx = \int dx = x + C$

3) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$

4) $\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln\left|x\right| + C$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$ (Đặc biệt: $\int e^x dx = e^x + C$)

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

8) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arc\cot x + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + C$

11) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

▼ **<u>Chú ý 2</u>**

1. Công thức 4) chỉ có nghĩa trên một khoảng (a,b) không chứa điểm $x = 0$:

- Nếu $(a,b) \subset (0,+\infty)$ tức là $x > 0$ thì $\left(\ln\left|x\right|\right)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
- Nếu $(a,b) \subset (-\infty,0)$ tức là $x < 0$ thì $\left(\ln\left|x\right|\right)' = [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

2. Một số tích phân tuy không thể rút trực tiếp từ các đạo hàm cơ bản nhưng thường được dùng nhiều khi giải bài tập:

12) $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln\left|x-a\right| + C$

13) $\int \sin mx dx = -\dfrac{1}{m}\cos mx + C,\ m \neq 0.$

14) $\int \cos mx dx = \dfrac{1}{m}\sin mx + C,\ m \neq 0$

15) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\, arctg\dfrac{x}{a} + C,\ (a \neq 0)$

16) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

17) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C,\ (a > 0)$

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

20) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

21) $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \dfrac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

Việc chứng minh các công thức trên không đến nỗi khó khăn xem đó là các bài tập.

1.3.2 <u>Các tính chất của tích phân không xác định</u>

¤ **<u>Tính chất 1</u>**

$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = d(F(x)) = F'(x)dx = f(x)dx$

(Hay $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x) = f(x)$)

¤ **<u>Tính chất 2</u>** $\int dF(x)dx = F(x) + C$

¤ **<u>Tính chất 3</u>** $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (Với k là một hằng số)

¤ **<u>Tính chất 4</u>** $\int \left[\, f(x) + g(x)\,\right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

1.4 <u>Các phương pháp lấy tích phân</u>

⋇ **<u>Phương pháp đổi biến số</u>**

1. Giả sử cần tính tích phân $\int f(x)dx\ (*)$ .Mặc dù biết rằng tích phân tồn tại nhưng trong nhiều trường hợp ta không thể tính trực tiếp tích phân đó. Khi đó ta có thể dùng *phương pháp đổi biến*. Nội dung của phương pháp đó như sau: Đưa vào biến mới t và $\Rightarrow$ Đặt : $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$ thay vào (*) ta được:

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt.$$

Bây giờ bài toán quy về việc tìm tích phân của hàm $g(t)$. Sau khi tìm được tích phân đó ta lại đưa biến mới t trở về biến cũ x .

2. Phương pháp đổi biến là một trong những phương pháp tích phân hiệu lực nhất. **Ngay cả những khi sử dụng các phương khác nhưng rất nhiều trường hợp trong các phép tính trung gian vẫn cần đến phương pháp đổi biến**. Tuy nhiên cần nói thêm rằng việc áp dụng **phương pháp đổi biến**, thành công đến mức nào là tuỳ thuộc vào sự khéo léo và kinh nghiệm của mỗi người khi chọn hàm số $x=\varphi(t)$, để việc tính toán được đơn giản và nhanh chóng cho ra kết quả. Sau đây chúng ta nêu một số cách khi áp dụng phương pháp đổi biến số:

i) **<u>Áp dụng công thức theo chiều thuận</u>**

◈ **<u>Ví dụ 1</u>** Tính tích phân $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$

<u>Giải</u>

Hàm số $\sqrt{a^2-x^2}$ có nghĩa khi và chỉ khi: $\left|x\right|\le a$.

Đặt: $x=a\sin t \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ dx = a\cos t\,dt;\ -\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2} \\ \bullet\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t;\ t=\arcsin\dfrac{x}{a} \\ \bullet\ \sin t=\dfrac{x}{a};\ \cos t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int\cos^2 t dt = a^2\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x.\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C$$ ▼

<u>Chú ý 3</u>

Khi gặp các tích phân: $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ hoặc $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ hoặc $\int\sqrt{x^2-a^2}dx \quad (a>0)$

Thông thường các tích phân đó sẽ dễ tính hơn khi khử căn thức. Lợi dụng các công thức lượng giác $\sin^2 x+\cos^2 x=1\ hay\ 1+tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ chúng ta có thể khử căn thức của các biểu thức trên bằng một phép đổi biến số tương ứng trong bảng sau đây:

Biểu thức	Phép đổi biến số	Biểu thức sau biến đổi	dx = …
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t,\ t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(hay\ x=a\cos t,\ t\in[0,\pi])$	$a\cos t$ $a\sin t$	$a\cos t$ $-a\sin tdt$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=atgt,\quad t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{a}{\cos t}$	$a\dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$\sqrt{x^2-a^2}$	∗Với x > a $x=\dfrac{a}{\cos t},\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$atgt$	$a\,\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$
	∗Với x <-a $x=-\dfrac{a}{\cos t},\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	$atgt$	$-a\,\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

ii) <u>Áp dụng công thức theo chiều ngược</u>

Để tính tích phân $I=\int f(x)\,dx$,ta phân tích biểu thức dưới dấu tích phân để đưa về dạng $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)d(\varphi(x))$.Đặt $t=\varphi(x) \Rightarrow I=\int g(t)\,dt.$

◈ **<u>Ví dụ 2</u>**

$a)\ I=\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)$.Đặt:$t=x^2 \Rightarrow I=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

$b)\ I=\int x^3\sqrt{x^4+9}\,dx=\frac{1}{4}\int (x^4+9)^{\frac{1}{2}}d(x^4+9)$. Đặt $t=x^4+9$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{2.\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}\sqrt{(x^4+9)^3}+C.$$

⋇ **<u>Phương pháp tích phân từng phần</u>**

1. <u>Nội dung phương pháp</u>

Giả sử $u(x)\,\&\,v(x)$ là hai hàm số của biến số x có đạo hàm liên tục. Theo quy tắc vi phân của một tích ta có: $d(uv)=udv+vdu \Rightarrow \int d(uv)=uv=\int udv+\int vdu$

$\Rightarrow \int udv=uv-\int vdu\,(1)$. Công thức (1) được gọi là công thức tích phân từng phần. Phương pháp tích phân từng phần được áp dụng trong trường hợp có thể phân tích biểu thức dưới dấu tích phân, thành tích hai thừa số. Một thừa số là một hàm $u(x)$ và thừa số thứ hai là vi phân của một hàm $v(x)$nào đó. Khi ấy việc tính tích phân $\int udv$ thay bằng việc tính tích phân $\int vdu$ nếu tích phân $\int vdu$ đơn giản hơn tích phân đã cho. Phương pháp tích phân từng phần có thể áp dụng nhiều lần liên tiếp khi tính một tích phân nào đó, cho đến khi tìm được kết quả thì thôi.

2. <u>Một số dạng tích phân có thể dùng phương pháp tích phân từng phần để tính</u>

i) Dạng $\int P(x)e^{ax}dx$ trong đó $P(x)$ là một đa thức.

⋇ **<u>Phương pháp</u>**

Ta đặt $u=P(x),\ dv=e^{ax}dx$. Khi đó dulà một đa thức $P'(x)$có bậc giảm đi một đơn vị so với bậc của $P(x),\ v=\frac{1}{a}e^{ax}$. Như vậy mỗi lần tích phân từng phần sẽ dẫn tới một tích phân dạng cũ, nhưng bậc của đa thức giảm đi một đơn vị . Qua nhiều lần tích phân từng phần có thể bậc của đa thức $P(x)$ giảm tới 0. Lúc đó ta dễ dàng tính được tích phân cuối cùng.

◈ **Ví dụ 3**

Tính tích phân $I = \int x^2 e^{3x} dx$

Giải

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}\int x^2 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3}\left[x^2 e^{3x} - \int 2x e^{3x} dx \right] = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}\int x\, d(e^{3x})$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}\left[x e^{3x} - \int e^{3x} dx\right] = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C = \frac{1}{3}\left[x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right] e^{3x} + C$$ **i**

i) Dạng $\int P(x) \sin ax dx$ **(hoặc** $\int P(x) \cos ax dx$ **).**

⁎ **Phương pháp** Đặt $u = P(x)$; $dv = \sin ax dx$ (hoặc $dv = \cos ax dx$). Khi đó du là đa thức có bậc giảm đi một đơn vị so với bậc của $P(x)$, còn v là hàm số $\cos ax$ (hoặc hàm số $\sin ax$). Như vậy tích phân dạng này sẽ chuyển thành tích phân dạng tương tự, còn bậc của đa thức giảm đi một đơn vị. Tích phân từng phần nhiều lần sẽ làm cho bậc của đa thức $P(x)$, giảm tới 0.

◈ **Ví dụ 4** Tính tích phân $I = \int x^2 \sin 3x dx$

Giải

$$I = \int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\int x^2 d(\cos 3x) = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{1}{3}\int 2x \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x +$$

$$+\frac{2}{9}\left[x \sin 3x - \int \sin 3x dx\right] = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

iii) Dạng $\int P(x) \ln x dx$ **,** $\int P(x) arctgx dx$ **,** $\int P(x) \arcsin x dx$ **.**

⁎ **Phương pháp**

Đặt $u = \ln x$ (hoặc $u = \arctan x \; hay \; u = \arcsin x, \ldots$) $dv = P(x)dx$ .Khi đó du sẽ chứa một biểu thức hữu tỷ hoặc vô tỷ đối với x, còn $v(x)$ là đa thức có bậc tăng lên một đơn vị so với bậc của $P(x)$. Tuy nhiên khi lấy tích phân từng phần thì sẽ dẫn đến tích phân hàm số hữu tỷ hoặc vô tỷ, chứ không còn tích phân các hàm số siêu việt nữa.

◈ **Ví dụ 5** Tính tích phân $I = \int x \arctan x dx$

Giải

$$I = \int x \arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x + \frac{1}{2} arctgx - \frac{1}{2} x + C.$$

iv) Dạng $\int P(x)\, e^{ax} \sin bx dx$ (hoặc $\int P(x)\, e^{ax} \cos bx dx$).

⁎ **Phương pháp**

Đặt: $u = P(x)$, $dv = e^{ax} \sin bx dx$ (hoặc $dv = e^{ax} \cos bx dx$)

Ta có: $du = P'(x)\, dx$ & $v = \int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} . \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}$ (+C) (hoặc $v = \int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}.\dfrac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\ (+C)$)

Như vậy mỗi lần tích phân từng phần ta đã chuyển được các tích phân trên về các tích phân cùng dạng, nhưng bậc của đa thức giảm đi một đơn vị. Thực hiện tích phân từng phần nhiều lần có thể giảm bậc của đa thức tới 0 và ta quay trở lại với các tích phân dạng: $\int e^{ax}\sin bxdx$ hoặc $\int e^{ax}\cos bxdx$ mà chúng ta đã biết cách giải.

v) Dùng tích phân từng phần để lập công thức quy nạp khi tính tích phân.

◈ **<u>Ví dụ 6</u>** Tính $I_n = \int \sin^n xdx\ (n \geq 2)$

<u>Giải</u>

$$I_n = \int \sin^n xdx = \int \sin^{n-1} x\, d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 xdx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int \sin^n xdx$$

$$I_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

Ta đã biết $I_0 = \int dx = x,\ I_1 = \int \sin xdx = -\cos x + (C_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ I_2 = \int \sin^2 xdx = -\dfrac{\sin x.\cos x}{2} + \dfrac{1}{2}x & (+C) \\ \bullet\ I_3 = \int \sin^3 xdx = -\dfrac{\sin^2 x.\cos x}{3} - \dfrac{2}{3}\cos x & (+C) \end{cases}$$

◈ **<u>Ví dụ 7</u>** Tính tích phân : $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} \bullet\ u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = -\dfrac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ \bullet\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases} \Rightarrow I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}$

$$+2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2n\,a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - 2n\,a^2\,I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n\,a^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{(2n-1)}{2n}.\frac{1}{a^2}.\ I_n$$

Theo hệ thức (2) thì I_{n+1} được biểu diễn qua I_n. Vì vậy áp dụng liên tiếp hệ thức truy toán, ta đi đến kết quả là I_{n+1} (và tất nhiên I_n) cuối cùng thì cũng được biểu diễn qua I_1. Từ (2) ta có: $I_1 = \int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}.arctg\frac{x}{a} + C$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2}.\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a} + C$$

1.5 Tích phân các hàm số hữu tỷ

1.5.1 Hàm hữu tỷ là gì?

• *Hàm số hữu tỷ* là thương của hai đa thức. Như vậy một hàm số hữu tỷ có dạng:

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m};\ \text{với}\quad m, n \in \mathbb{N}\ \&\ m \geq 1,\ n \geq 1$$

• Nếu bậc của tử số không nhỏ hơn bậc của mẫu số ($m \geq n$) thì bằng phép chia đa thức, ta phân tích được $f(x)$ thành tổng của một đa thức với một phân thức khác có bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số (gọi là *phân thức thật sự*).

Chẳng hạn: $\dfrac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = (x^2 - 3) + \dfrac{14x + 1}{x^3 + 5x}$

1.5.2 Tích phân các phân thức đơn giản

Trong việc tính tích phân các phân thức thực sự thì các tích phân sau đây gọi là tích phân các phân thức đơn giản:

$a)\quad \displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx$

$b)\quad \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$

$c)\quad \displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

$d)\quad \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$

▼ **Chú ý 4** Trong c) và d) tam thức bậc hai $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực.

a) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A\ln\left|x-a\right| + C$

b) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = -\frac{A}{k-1}.\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

c) $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$ và đặt $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

Tiếp tục đặt: $t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ x^2 + px + q = t^2 + a^2 \\ Mx + N = Mt + (N - \frac{Mp}{2}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)} + \frac{1}{a}(N - \frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{1}{a}(N - \frac{Mp}{2})\,arctg\,\frac{t}{a} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}.\ln(x^2+px+q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

d) Tương tự như trong bài c) ta có :

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{Mt+(N-\frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

$$= \quad \frac{M}{2}\int (t^2+a^2)^{-m}\, d(t^2+a^2) + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

$$= -\frac{M}{2(m-1)}.\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + (N-\frac{Mp}{2})\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}}_{I_m}$$,trong đó I_m tính theo I_{m+1}

như sau: $I_{m+1} = \dfrac{1}{2n\,a^2}.\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + \dfrac{(2n-1)}{2n}.\dfrac{1}{a^2}.\,I_m$

1.5.3 <u>Tích phân các phân thức thực sự</u>

• Việc tính tích phân thực sự cơ bản dựa vào định lí sau đây trong đại số:

Mỗi phân thức thực sự $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *đều có thể phân tích thành tổng một số hữu hạn các phân thức đơn giản.*

• Trong mục trên đã tính được tích phân của tất cả các phân thức đơn giản, nên chỉ còn lại vấn đề: làm thế nào để phân tích một phân thức thực sự thành tổng của những phân thức đơn giản?

Trước hết hãy chú ý tới đa thức $Q(x)$ ở mẫu số. Ta giả thiết bậc cao nhất của $Q(x)$ có hệ số bằng 1và theo định lý cơ bản của đại số học luôn luôn có thể phân tích :

$Q(x) = \ldots(x-a_i)^{k_i}\ldots(x^2+p_ix+q_i)^{n_i}\ldots$trong đó $a_i, p_i, q_i \in R$; $k_i, n_i \in N^*$; a_i là những nghiệm thực của các đa thức bậc nhất $x-a_i$ còn $x^2+p_ix+q_i$ là những *đa thức bậc hai không có nghiệm thực*.

• Nếu $k_i = 1$ hoặc $n_i = 1$ ta gọi các thừa số tương ứng là *thừa số đơn* còn nếu $k_i \geq 2$ hay $n_i \geq 2$ ta gọi các thừa số tương ứng là *thừa số bội*.

◈ **<u>Ví dụ 8</u>** Tính tích phân: $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$

<u>Giải</u>

Phân tích: $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$.

Quy đồng mẫu số rồi ước lược ta có:

$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (B\,x+C)(x-2)(x^2+1) + (D\,x+E)(x-2)$ (1)

Muốn tìm các hệ số : A, B, C, D chúng ta có hai cách sau đây:

¤ **<u>Cách 1</u>**

• Cho $x = 2$ ta có : 25A = 25 $\Rightarrow A = 1$.

• Cho $x = i$ (với $i-$ nghiệm phức của phương trình x^2+1 = 0) ta được:

$$-(D+2E)+(-2D+E)i = 11+2i \Leftrightarrow \begin{cases} D+2E=-11 \\ -2D+\quad E=\quad 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-3 \\ E=-4 \end{cases}$$

• Thay các giá trị A = 1, D = - 3 và E = - 4 vào (1) ta có:

$$2x^2+2x+13=(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)-(3x+4)(x-2), \quad (2)$$

• Từ (2), nếu ta cho $x=0$ và $x=1$ thì ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \quad -2C = \quad 4 \\ B \;+\; C=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$$

Tóm lại: $A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4$. Bây giờ ta tính tích phân:

$$I=\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{dx}{x-2}-\int \frac{x+2}{x^2+1}dx-\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \int \frac{d(x-2)}{x-2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \ln\left|x-2\right| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{3}{2}\int (x^2+1)^{-2}d(x^2+1) - 4\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}_{I_2}$$

$$= \ln\left|x-2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - 2arctgx + \frac{3}{2(x^2+1)} - 4\left(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}.arctg\,x\right)+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} + \frac{(3-4x)}{2(x^2+1)} - 4arctgx \quad + C$$

¤ **Cách 2**

Đẳng thức (1) tương đương với đẳng thức sau đây:

$$2x^2+2x+13=(A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2$$
$$+(-2B+C-2D+E)x+(A-2C-2E) \quad (3)$$

Từ (3) bằng cách đồng nhất các hệ số của các luỹ thừa tương ứng, chúng ta có hệ phương trình:

$$(*)\ \begin{cases} A+\ B = 0 \\ \quad -2B+\ C = 0 \\ 2A+\ B-2C+\ D = 2 \\ \quad -2B+\ C-2D+\ E = 2 \\ A \quad -2C \quad -2E = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\ 1 \\ B=-1 \\ C=-2 \\ D=-3 \\ E=-4 \end{cases}$$

(Giải hệ phương trình tuyến tính (*) có thể bằng *phương pháp Gauxơ* hoặc bằng *phương pháp thế*).

$$\Rightarrow I=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}+\frac{(3-4x)}{2(x^2+1)}-4arctgx+C.$$

1.6 Tích phân các hàm số vô tỷ và lượng giác

Phương pháp chủ yếu để tính tích phân các hàm số vô tỷ và lượng giác là dùng phép đổi biến số để đưa tích phân cần tính về tích phân các hàm số hữu tỷ. Phương pháp này gọi là *hữu tỷ hóa tích phân*.

1.6.1 Tích phân các hàm số vô tỷ

a) Tích phân dạng $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}\right)dx$**;** trong đó $p,q,r,s\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}$ và $m\geq 2$,

R biểu thị một hàm số hữu tỷ đối với các đối số trong ngoặc.

Dùng phép biến đổi: $t=w(x)=\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}\Rightarrow\begin{cases}x=\varphi(t)=\dfrac{st^m-q}{p-rt^m}\\ dx=\varphi'(t)dt\end{cases}$

$$\Rightarrow\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{px+q}{rx+s}}\right)dx=\int R\left[\varphi(t),t\right]\varphi'(t)\,dt,(1).$$

Tích phân (1) là tích phân của một hàm hữu tỷ mà chúng ta đã biết cách tìm.

◈ **Ví dụ 9** Tính tích phân $I=\int\frac{1}{(x-1)^2}.\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

Giải

Đặt: $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\Rightarrow t^3=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow 3t^2dt=-2\frac{dx}{(x-1)^2}\Rightarrow\frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{3}{2}t^2dt$

$$\Rightarrow I=-\frac{3}{2}\int t^3dt\Rightarrow I=-\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}\right)+C=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C$$

b) Tích phân dạng $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Trong đó $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, R là hàm hữu tỷ của các đối số trong ngoặc. Ta xét:

¤ **Trường hợp 1**:

Nếu $\Delta>0$ thì tam thức có 2 nghiệm thực phân biệt $x_1,\ x_2$ ta có thể biến đổi:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

và tích phân đưa về dạng ở mục **a)** ở trên.

¤ **Trường hợp 2:**

Nếu $\Delta<0$ tam thức ax^2+bx+c *không có nghiệm thực* và *luôn cùng dấu với* a, để căn bậc hai xác định buộc phải có *điều kiện* $a>0$, trường hợp này ta dùng phép thế Ơ – le, bằng cách đặt: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ *hay* $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$

$$\Rightarrow x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b};\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b};dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

Rõ ràng biểu thức dưới dấu tích phân đã được hữu tỷ hoá, chúng ta có thể tiến hành lấy tích phân.

◈ **<u>Ví dụ 10</u>** Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

<u>Giải</u>

Tích phân thuộc trường hợp 2 nên chúng ta dùng phép thế Ơ-le :

$$\sqrt{x^2-x+1}=t-x\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t-1}\Rightarrow x+\sqrt{x^2-x+1}=t,\ dx=2.\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow I=\int\frac{2t^2-2t+2}{t.(2t-1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt$$

$$=-\frac{3}{2}.\frac{1}{(2t-1)}+2\ln\left|t\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2t-1\right|+C$$

$$=-\frac{3}{2[2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1]}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1\right|+C$$

¤ **<u>Trường hợp 3</u>:**

Nếu $\Delta=0$ thì tam thức ax^2+bx+c có 2 *nghiệm trùng nhau*, lúc đó tích phân đã cho *không có dạng vô tỷ nữa* (mà là tích phân của một hàm hữu tỷ) do đó chúng ta tiến hành ngay việc lấy tích phân.

1.6.2 Tích phân các hàm số lượng giác dạng $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

Cũng tương tự như các dạng tích phân đã biết trước đây, muốn hữu tỷ hoá một tích phân dạng $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ ta phải tìm được một phép đổi biến sao cho biểu thức dưới dấu tích phân trở thành biểu thức hữu tỷ.

¤ **<u>Trường hợp 1</u>: (Phép thế vạn năng)**

Nếu hàm số dưới dấu tích phân là một hàm số lượng giác nào đó thì chúng ta đặt:

$$t=tg\frac{x}{2},\ (-\pi<x<\pi)\ \Rightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ tgx=\dfrac{2t}{1-t^2}\\ x=2arctgt,\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt\end{cases}$$

¤ **<u>Trường hợp 2</u>**

Nếu thay $\sin x$ bởi $-\sin x$ mà biểu thức: $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$ thì

đặt: $t=\cos x\Rightarrow x=\arccos t\ \&\ dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ \&\ \sin x=\sqrt{1-t^2}$

¤ **<u>Trường hợp 3</u>**

Nếu thay $\cos x$ bởi $-\cos x$ mà biểu thức: $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$ thì

đặt: $t=\sin x\Rightarrow x=\arcsin t\ \&\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ \&\ \cos x=\sqrt{1-t^2}$

¤ **Trường hợp 4**
Nếu thay $\sin x$ bởi $-\sin x$ và $\cos x$ bởi $-\cos x$ mà biểu thức $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$ thì chúng ta đặt:

$$t=tgx\text{, (với } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x=arcrtgt \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \bullet\ \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases})$$

◈ **Ví dụ 11** Tính $I=\int \frac{dx}{\sin x}$

Giải

¤ **Cách 1** Dùng phương pháp biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân:

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=-\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)}=-\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\right)d(\cos x)=-\frac{1}{2}\left(-\int \frac{d(1-\cos x)}{(1-\cos x)}+\int \frac{d(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-\cos x\right|-\ln\left|1+\cos x\right|\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2+C=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

¤ **Cách 2** Dùng phép thế "vạn năng":

Đặt: $t=tg\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}\bullet \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \bullet\ x=2arctgt;\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{cases}\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\left(\frac{2dt}{1+t^2}:\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$

$$=\int\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{(1+t^2)}}\times\frac{\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{2}t}\right)dt=\int\frac{dt}{t}=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

¤ **Cách 3** Khi ta thay $\sin x$ bởi $-\sin x$ vào biểu thức dưới dấu tích phân thì

$\frac{1}{(-\sin x)}=-\frac{1}{\sin x}$ nên chúng ta đặt: $t=\cos x\Rightarrow\begin{cases}\bullet\ x=\arccos t,\ dx=-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \bullet\ \sin x=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}:\sqrt{1-t^2}\right)=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}.\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^2}} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int \frac{d(1+t)}{(1+t)} - \int \frac{d(1-t)}{(1+t)}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+t\right| - \ln\left|1-t\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2 + C = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\ln\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right) + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

¤ **<u>Cách 4</u>** Biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân ta có:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$ Đặt: $u = tg\frac{x}{2} \Rightarrow I = \int \frac{du}{\sin u\cos u}$

Khi ta thay $\sin u$ bởi $-\sin u$ và thay $\cos u$ bởi $-\cos u$ vào biểu thức dưới dấu tích phân: $\frac{1}{(-\sin u)(-\cos u)} = \frac{1}{\sin u\cos u}$ nên chúng ta đặt:

$$t = tgu \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ u = arcrtgt \Rightarrow du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \bullet\ \sin u = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos u = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln\left|t\right| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

◈ **<u>Ví dụ 12</u>**

Tính tích phân $I = \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$

<u>Giải</u>

Hàm số dưới dấu tích phân không thoả mãn điều kiện nào trong ba trường hợp cuối . Do đó chúng ta có thể dùng *phép thế vạn năng*, bằng cách đặt :

$$t = tg\frac{x}{2}, (\text{với } -\pi < x < \pi) \Rightarrow \begin{cases} \bullet \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \bullet\ x = 2arctgt;\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(\dfrac{6t}{1+t^2} + \dfrac{4(1-t^2)}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{\cancel{(1+t^2)}\left(\dfrac{-4t^2+6t+4}{\cancel{(1+t^2)}}\right)}$$

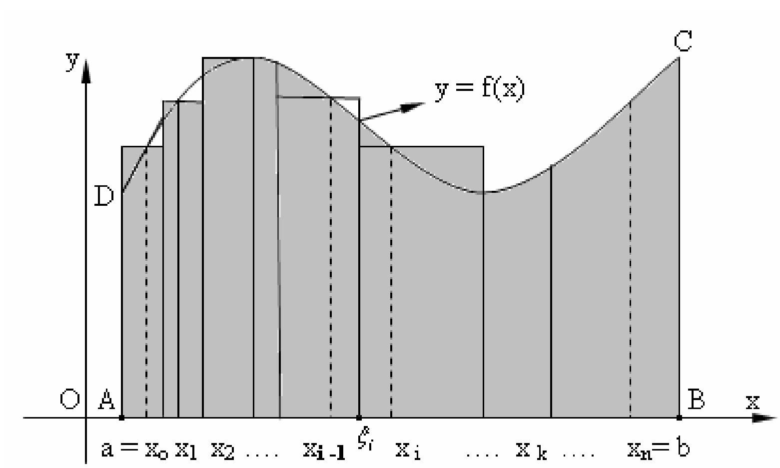
$$= -\cancel{2}\int \frac{dt}{\cancel{2}.(2t^2-3t-2)} = \int \frac{dt}{-2t^2+3t+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(2-t)\left(\dfrac{1}{2}+t\right)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}.\frac{\cancel{2}}{5}\int \left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{\dfrac{1}{2}+t}\right)dt = \frac{1}{5}\left(\int \frac{d\left(\dfrac{1}{2}+t\right)}{\left(\dfrac{1}{2}+t\right)} - \int \frac{d\left(2-t\right)}{\left(2-t\right)}\right) = \ln\left|\frac{\dfrac{1}{2}+t}{2-t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\dfrac{1}{2} + tg\dfrac{x}{2}}{2 - tg\dfrac{x}{2}}\right| + C.$$

§2 TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1 Bài toán diện tích hình thang cong



Hình 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[a, b]$, có đồ thị như hình 1. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), x = a,\ x = b$ và trục Ox gọi là *hình thang cong*. Ta hãy định nghĩa và tính *diện tích hình thang cong* đó. Trước hết chia tùy ý đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng các điểm chia : $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Tương ứng hình thang cong cũng được chia thành nhiều phần bởi các đường thẳng $x = x_i$. Ký hiệu Δx_i đồng thời vừa là đoạn thẳng $\left[x_{i-1}, x_i\right]$: $\Delta x_i = \left[x_{i-1}, x_i\right]$ ($i = \overline{1, n}$) vừa là độ dài của nó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (> 0)$. Trên Δx_i chọn điểm tùy ý ξ_i.

Nếu Δx_i khá bé có thể xem diện tích phần hình thang cong nằm trong dải giữa x_{i-1} và x_i gần đúng bằng diện tích hình chữ nhật có các cạnh là Δx_i và $f(\xi_i)$: $S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$.
Do đó diện tích hình thang cong ABCD có thể xem gần đúng bằng tổng diện tích của tất cả các hình chữ nhật tương ứng: $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (hợp các hình chữ nhật đó lập thành có diện tích gần bằng diên tích hình thang cong). Dễ thấy rằng sai số của đẳng thức gần đúng đó sẽ giảm vô hạn khi tất cả các đoạn Δx_i tiến tới 0. Do đó đương nhiên ta sẽ coi giới hạn của tổng trong vế phải (nếu có) là giá trị đúng của diện tích hình thang cong đang xét.
Trong thực tế có rất nhiều bài toán dẫn tới việc nghiên cứu giới hạn của tổng trên. Tùy theo ý nghĩa của hàm số $f(x)$ mà giới hạn đó biểu thị của một đại lượng cụ thể: diện tích, thể tích, khối lượng, … Vì thế sẽ không uổng công khi ta nghiên cứu thật kỹ giới hạn đó một cách tổng quát, tách hàm số $f(x)$ ra khỏi mọi ý nghĩa hình học, vật lý, cơ học,…của nó.

2.2 Định nghĩa tích phân xác định

2.2.1 Phân hoạch, tổng tích phân, đường kính của phân hoạch…

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a,b]$. Chia tùy ý đoạn này thành n phần bằng các điểm chia (gọi là phân hoạch): $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Ta ký hiệu $\Delta x_i\,(i = \overline{1,n})$ đồng thời vừa là đoạn $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ vừa là độ dài của đoạn thẳng đó. Trên mỗi đoạn Δx_i ta lấy một điểm tùy ý ξ_i rồi lập tổng (gọi là tổng tích phân): $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Rõ ràng tổng này phụ thuộc vào phép chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn các điểm ξ_i. Độ dài lớn nhất của các đoạn $\Delta x_i\,(i = 1, 2, 3,\ldots, n)$ (ký hiệu là λ) được gọi là *đường kính của phân hoạch*. Để cho độ dài của tất cả các đoạn Δx_i tiến tới 0 chỉ cần $\lambda \to 0$. Khi đó giới hạn của tổng tích phân khi $\lambda \to 0$: $I = \lim_{\lambda\to 0} \sigma$ có nghĩa là : Với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được $\delta > 0$ sao cho chỉ cần $\lambda < \delta$ (tức là mọi phân hoạch có đường kính nhỏ hơn δ), bất đẳng thức: $\left|\sigma - I\right| < \varepsilon$ được thỏa mãn với bất kỳ cách chọn các điểm ξ_i.

♦ **Định nghĩa 3**

Giới hạn I của tổng tích phân $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ khi $\lambda \to 0$ (nếu có), được gọi là tích phân xác định hoặc tích phân Rioman (Riemann) - của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và ký hiệu: $I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Khi đó, ta nói hàm số $f(x)$ khả tích (có tích phân) trên $[a,b]$, a và b gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Qua hai mục trên, ta rút ra ý nghĩa hình học của tích phân xác định là: *giá trị của tích phân chính là số đo diện tích của hình thang cong đã nói.*

▼ **<u>Chú ý 5</u>**

1) Có một sự khác biệt rất lớn giữa *tích phân xác định* và tích phân *không xác định*. Trước hết là vì hai khái niệm này được định nghĩa khác nhau. Sau đó ta nhận thấy: *<u>tích phân xác định là một</u>* <u>số</u>, trong khi *<u>tích phân không xác định là một họ hàm số.</u>*
2) Vì tích phân xác định là một số, nên không còn phụ thuộc biến số dưới dấu tích phân. Do đó ta có thể thay ký hiệu biến số dưới dấu tích phân bằng bất kỳ chữ nào:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \dots$$

3) Theo định nghĩa, giới hạn I không phụ thuộc cách chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn các điểm ξ_i. Do đó, nếu đã biết hàm số $f(x)$ khả tích (tức là có giới hạn I thì để tính tích phân bằng định nghĩa, ta có thể tùy ý lấy một cách chia và một cách chọn cụ thể nào đó cho thích hợp (dễ tính tổng tích phân). Thông thường là *chia đều đoạn* $[a,b]$. Cách chia đó gọi là *phân hoạch đều*, trong đó : $\Delta x = \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ với mọi i.

2.3 <u>Những tính chất cơ bản của tích phân xác định</u>

Định nghĩa tích phân đã nêu ra ở trên ứng với đoạn $[a,b]$ theo nghĩa thông thường : $a < b$. Để hoàn chỉnh, ta phải mở rộng định nghĩa tích phân cho các trường hợp $a \geq b$.

♦ **<u>Định nghĩa 4</u>**

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \ (b < a)$. (Với giả thiết $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ tồn tại)

Trong cả ba trường hợp, nếu tích phân tồn tại, ta đều nói hàm số khả tích. Các tính chất dưới đây là phát biểu cho cả ba trường hợp (khi đó ta phải hiểu đoạn $[a,b]$ theo nghĩa rộng, tức là có thể $a \geq b$), nếu không chỉ rõ quan hệ giữa a và b.

¤ **<u>Tính chất 1</u>** *Nếu c là một hằng số thì* $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

¤ **<u>Tính chất 2</u>** (Hệ thức Salơ cho tích phân)
Cho ba số a,b,c bất kỳ. Hàm số $f(x)$ khả tích trên đoạn lớn nhất trong ba đoạn $[a,b]$; $[a,c]$, $[b,c]$ thì khả tích trên hai đoạn kia và $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

¤ **<u>Tính chất 3</u>**
Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $Af(x)+Bg(x)$ cũng khả tích trên $[a,b]$,

và $\displaystyle\int_a^b \left[Af(x)+Bg(x)\right]dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$ *(với A và B là hai số bất kỳ)*

¤ **<u>Tính chất 4</u>**

Nếu trên đoạn $[a,b]$, trong đó $a \leq b$, hàm số $f(x)$ khả tích và không âm thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

.

Hệ quả 1

Nếu các hàm số $f(x)$ & $g(x)$ cùng khả tích trên [a, b], $a \le b$ và trên đó $f(x) \le g(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Hệ quả 2

Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,\, b]$, $a \le b$ và trên đó $m \le f(x) \le M$ thì

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

¤ **Tính chất 5** *Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$, $a \le b$ thì $\left|f(x)\right|$ cũng khả tích trên đoạn này*

và: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$

▼ **Chú ý 6** Với a, b bất kỳ, ta có: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b \left|f(x)\right|dx\right|$

¤ **Tính chất 6** (Định lý về giá trị trung bình)

Nếu trên $[a,\, b]$, hàm số $f(x)$ khả tích và $m \le f(x) \le M$ thì có một số μ, $m \le \mu \le M$

sao cho: $\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$

Hệ quả 3

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,\, b]$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

2.4 Mối liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm. Công thức Niutơn – Laibnit

Ta đã lưu ý rằng, định nghĩa của tích phân xác định và nguyên hàm có vẻ như không có gì liên quan với nhau. Nhưng định lý Niutơn – Laibnit dưới đây lại cho ta mối quan hệ chặt chẽ giữa tích phân xác định và nguyên hàm:

✡ **Định lý 3**

Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục và có một nguyên hàm $F(x)$ trên $[a,b]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2.5 Các phương pháp tính tích phân xác định

✡ **Định lý 4**:

Nếu $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to J\,(t \mapsto \varphi(t))$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha,\beta]$ và

$f : J \to \mathbb{R}\,(x \mapsto f(x))$ là một hàm số liên tục trên khoảng J trong $\mathbb{R}$, khi đó:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\Big[\,\varphi(t)\,\Big]\varphi'(t)\,dt$$

◈ **Ví dụ 13**

Tính tích phân: $I = \int\limits_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Giải

Đặt: $u = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x = u^2,\ dx = 2udu \\ \cos\sqrt{x} = \cos u, \frac{\pi}{3} \le u \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{u}\ \cos u}{\cancel{u}}\,du$

$$= 2\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 2\left(\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 2.\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

◈ **Ví dụ 14** Tính tích phân: $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Giải

Đặt: $x = \pi - t \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ dx = -dt;\ \ \sin x = \sin t \\ \bullet\ 1 + \cos^2 x = 1 + \cos^2 t \\ \bullet\ Khi\ x = 0 \Rightarrow t = \pi\ \&\ khi\ x = \pi \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

$$\Rightarrow I = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} d(\arctan(\cos t)) = -\frac{\pi}{2}\left(\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\big(\arctan(\cos\pi) - \arctan(\cos 0)\big) = -\frac{\pi}{2}\big(\arctan(-1) - \arctan(1)\big)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

※ **Phương pháp tích phân từng phần**

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ thì:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx\ \left(hay \int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\right)$$

◈ **Ví dụ 15** $I = \int_0^1 x^3 e^{2x}\, dx.$

Đặt : $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{1}{2} d\left(e^{2x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$I = \frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 x^2e^{2x}dx.$ Đặt: $\begin{cases} u_1 = x^2 \\ dv_1 = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = x^2 \\ dv_1 = \frac{1}{2} d\left(e^{2x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2xdx \\ v_1 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx\right)$. Đặt tiếp: $\begin{cases} u_2 = x \\ dv_2 = e^{2x}dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = x \\ dv_2 = \dfrac{d\left(e^{2x}\right)}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du_2 = dx \\ v_2 = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{4}\, x^2e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}d(2x)\right)$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{4}x^2e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{3}{4}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{8}\int_0^1 e^{2x}d(2x)$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{4}\, x^2e^{2x}\Big|_0^1 + \frac{3}{4}\, xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{3}{8}\left(e^{2x}\Big|_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \cancel{\frac{3}{4}e^2} + \cancel{\frac{3}{4}e^2} - \frac{3}{8}(e^2 - 1) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{8} = \frac{e^2+3}{8}.$$

§ 3 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

3.1 Tích phân suy rộng loại 1, loại 2

3.1.1 Đặt vấn đề

Định nghĩa tích phân xác định chỉ định nghĩa giới hạn trong phạm vi đoạn $[a, b]$ là *hữu hạn* và *hàm số* $f(x)$ *bị chặn trên đoạn đó*. Nhưng trong thực tế ta gặp rất nhiều bài toán mà các điều kiện trên không được thỏa mãn. Do đó cần mở rộng định nghĩa tích phân xác định ra ngoài phạm vi trên.

3.1.2 Tích phân suy rộng cho các cận vô hạn (Tích phân suy rộng ***loại 1***)

♦**Định nghĩa 5**

1) *Giả sử* $f(x)$ *xác định trên* $[a, +\infty)$ *và khả tích trên đoạn* $[a, n]$ *bất kỳ. Nếu* $\int_a^n f(x)dx$ *có giới hạn (hữu hạn) khi* $n \to +\infty$ *thì ta gọi giới hạn đó là tích phân suy rộng (loại1)*

và ký hiệu: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)\,dx$ *(1)*

• *Khi đó ta cũng nói tích phân trên hội tụ và* $f(x)$ *khả tích trên* $[a, +\infty)$. *Trong trường hợp giới hạn trên không tồn tại hoặc bằng* ∞ *thì ta nói tích phân*

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ - *phân kỳ.*

2) Tương tự , tích phân trên $(-\infty, b]$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{m\to-\infty} \int\limits_m^b f(x)\,dx$ (2)

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{m\to-\infty} \int\limits_m^a f(x)\,dx + \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^n f(x)\,dx$ (3)

▼ **<u>Chú ý 7</u>** Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$. Xuất phát từ đẳng thức :

$\int\limits_a^n f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^n = F(n) - F(a)$. Rõ ràng tích phân (1) hội tụ khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$ mà ta ký hiệu là: F(+∞) = $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$.

- Tích phân (1) có thể viết : $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$
- Tích phân (2) có thể viết: $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$
- Tích phân (3) có thể viết: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

◈ **<u>Ví dụ 16</u>** Tính các tích phân suy rộng sau:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(arctg\,x\Big|_0^n\right) = arctg(+\infty) - arctg(0) = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{m\to-\infty}\left(arctg\,x\Big|_m^0\right) = arctg(0) - arctg(-\infty) = 0 - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+x^2} + \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi.$

◈ **<u>Ví dụ 17</u>** Xét tính hội tụ của tích phân: $I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ $(a > 0, \lambda \in \mathbb{R})$.

<u>Giải</u>

$$I = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^n \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^n x^{-\lambda}dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_a^n\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} - \frac{n^{1-\lambda}}{\lambda-1}\right) = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-1}\lim_{n\to+\infty} n^{1-\lambda}.$$

Xét hai trường hợp:

- Nếu $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda - 1 > 0 \Rightarrow 1 - \lambda < 0 \Rightarrow I = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} - \dfrac{1}{\lambda - 1} \lim\limits_{n \to +\infty} n^{1-\lambda}$

$= \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} - \dfrac{1}{\lambda - 1} \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{\lambda - 1}} = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1}$ (hữu hạn) $\Rightarrow I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ - Hội tụ.

- Nếu $\lambda < 1 \Rightarrow \lambda - 1 < 0 \Rightarrow 1 - \lambda > 0 \Rightarrow I = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} - \dfrac{1}{\lambda - 1} \lim\limits_{n \to +\infty} n^{1-\lambda}$

$= \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} - \dfrac{+\infty}{\lambda - 1} = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} - \infty = -\infty \Rightarrow I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ - Phân kỳ.

- Nếu $\lambda = 1$ thì $I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^n \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\ln x \Big|_a^n \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\ln n - \ln a \right)$

$= (+\infty) - \ln a = +\infty \Rightarrow I = \int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda}$ - Phân kỳ.

3.1.3 Sự hội tụ của tích phân với hàm số dương

a) Đặt vấn đề

Nếu $f(x) \geq 0$ *thì* $\Phi(n) = \int\limits_a^n f(x)\,dx$ (4) là *hàm đơn điệu tăng* của n. Vấn đề hội tụ của tích phân $\int\limits_a^n f(x)\,dx$ quy về sự tồn tại giới hạn của hàm số tăng $\Phi(n)$ *khi* $n \to +\infty$.

b) Điều kiện hội tụ

Cho hàm số $f(x) \geq 0$. *Điều kiện cần và đủ để tích phân*

$\Phi(n) = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^n f(x)\,dx$ *hội tụ là* $\Phi(n)$ *bị chặn trên với mọi* n

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq L$ *(nếu không tích phân phân kỳ ra vô hạn).*

c) Các dấu hiệu so sánh

Dấu hiệu so sánh 1

✡ **Định lý 5** *Giả sử* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $(\forall x \in [a, +\infty))$. *Khi đó:*

a) *Nếu tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *- hội tụ* $\Rightarrow$ *tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *cũng hội tụ.*

b) *Nếu tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *- phân kỳ* $\Rightarrow$ *tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *cũng phân kỳ.*

◈ **Ví dụ 18**

Xét tính hội tụ của tích phân: $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+e^x)}$

Giải

$\forall x \in [1,+\infty)$ *thì* $\dfrac{1}{x^2(1+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$. Do tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ − hội tụ, nên tích phân

$\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2(1+e^x)}$ cũng hội tụ.

◈ **<u>Ví dụ 19</u>** Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$, (<u>Đáp số</u>: Hội tụ)

◈ **<u>Ví dụ 20</u>** Xét tính hội tụ của tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$

<u>Giải</u>

Ta thấy: $\forall x \in [1;+\infty)$ *thì* $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{x}$. Vì tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ - phân kỳ

nên tích phân cũng $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^3}}$ - phân kỳ.

<u>Dấu hiệu so sánh 2</u>

✡ **<u>Định lý 6</u>**

Giả sử $f(x)>0,\ g(x)>0, \forall x \in [a,+\infty)$ *và* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. *Khi đó:*

a) *Nếu* $k=0$ *và tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *− hội tụ* $\Rightarrow$ *tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *cũng hội tụ.*

b) *Nếu* $0<k<+\infty \Rightarrow$ *hai tích phân:* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *cùng HT hoặc cùng PK.*

c) *Nếu* $k=+\infty$ *và* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *− phân kỳ* $\Rightarrow$ *thì tích phân* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *cũng phân kỳ.*

◈ **<u>Ví dụ 21</u>**

Xét tính hội tụ của tích phân: $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

<u>Giải</u>

Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5} : \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\dfrac{5}{x}}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Vì $0 < \frac{1}{2} < +\infty \Rightarrow$ cả hai tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ và $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ cùng hội hoặc cùng phân kỳ. Nhưng tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ - phân kỳ $\Rightarrow$ tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$ cũng phân kỳ.

◈ **<u>Ví dụ 22</u>** Xét tính hội tụ của tích phân: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$.

<u>Giải</u>

$\forall x \in [1;+\infty)$ *thì* $\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} > 0$ và $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}} : \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+2x}} : \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+3x^2+2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3+3x^2+2x}{x^3}}}$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0+0}} = 1$ mà $0<1<+\infty \Rightarrow$ cả hai tích phân:

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ nhưng tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ (vì $\alpha = \frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow$ tích phân $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$ cũng hội tụ.

▼ **<u>Chú ý 8</u>**

Để nghiên cứu *tính hội tụ* của tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ta có thể so sánh nó với một tích phân mà ta *biết rõ tính hội tụ (hoặc phân kỳ)* của nó, chẳng hạn $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$. Lúc đó ta có:

- *Khi* $\lambda > 1$ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ - Hội tụ.
- *Khi* $\lambda \le 1$ thì tích phân $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ - Phân kỳ.

✡ **<u>Định lý 7</u>**

Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *hội tụ thì tích phân* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *hội tụ. (Trong trường hợp này ta nói tích phân* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *hội tụ tuyệt đối)*

◈**Ví dụ 23** Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$

Giải

Ở đây hàm dưới dấu tích phân có dấu thay đổi. Ta có : $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \frac{|\sin x|}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$.

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ - *hội tụ* $\Rightarrow$ tích phân $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ - *hội tụ tuyệt đối.*

3.2 Tích phân của hàm dưới dấu tích phân gián đoạn (tích phân suy rộng *loại* 2)

Cho hàm số xác định và liên tục với mọi $x \in [a,b)$ hàm này không xác định tại $x = b$, (tức là hàm bị gián đoạn tại b). Ta không thể phát biểu định nghĩa tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ như là giới hạn của tổng tích phân, vì $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a,b]$, giới hạn đó có thể không tồn tại. Ta đưa vào định nghĩa *tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)\,dx$ của hàm $f(x)$ gián đoạn tại điểm b như sau :

♦ **Định nghĩa 6**

a) *Nếu hàm số* $f(x)$ *không liên tục trái tại* $x = b$ *thì* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to b^-} \int_a^n f(x)\,dx$

Tích phân này được gọi là hội tụ khi giới hạn ở vế phải tồn tại. Nếu giới hạn đó không tồn tại hoặc bằng ∞ *thì tích phân* $\int_a^b f(x)\,dx$ *gọi là phân kỳ.*

b) *Nếu hàm số* $f(x)$ *không liên tục phải tại* $x = a$ *thì* $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to a^+} \int_m^b f(x)\,dx$.

c) *Nếu* $f(x)$ *bị gián đoạn tại điểm* $x = c$ *mà* $a < c < b$ *thì :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to c^-} \int_a^n f(x)\,dx + \lim_{m\to c^+} \int_m^b f(x)\,dx \quad (\otimes)$$

- *Tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)\,dx$ *(trong đó* $f(c) = \infty$, *với* $a < c < b$ *) được gọi là hội* *tụ nếu tồn tại hai giới hạn ở vế phải của đẳng thức ($\otimes$). Nếu không tồn tại dù chỉ một trong các giới hạn đó thì tích phân suy rộng* $\int_a^b f(x)\,dx$ *gọi là phân kỳ.*

◈ **Ví dụ 24** Tính tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

Giải

Hàm dưới dấu tích phân bị gián đoạn tại x = 0, ta tách tích phân làm hai:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{m\to 0^-} \int_{-1}^{m} \frac{dx}{x^2} + \lim_{n\to 0^+} \int_{n}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{m\to 0^-} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{m} - \lim_{n\to 0^+} \frac{1}{x}\Big|_{n}^{1}$$

$$= -\lim_{m\to 0^-}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{-1}\right) - \lim_{n\to 0^+}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n}\right) = -(-\infty + 1) - (1 - \infty) = +\infty$$

$\Rightarrow$ tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ - phân kỳ.

▼ **Chú ý 9**

Để xác định sự hội tụ hoặc phân kỳ của tích phân hàm gián đoạn, ta có các định lý và hệ quả tương tự như tích phân với các cận vô hạn.

✡ **Định lý 8**

Với mọi $x \in [a,b)$, $0 \le f(x) \le g(x)$ *nếu* $f(x)$ *và* $g(x)$ *gián đoạn tại điểm* b *và tích phân* $\int_a^b g(x)\,dx$ *hội tụ thì tích phân* $\int_a^b f(x)\,dx$ *cũng hội tụ.*

✡ **Định lý 9**

Với mọi $x \in [a,b)$, $0 \le f(x) \le g(x)$ *nếu* $f(x)$ *và* $g(x)$ *gián đoạn tại điểm* b *và tích phân* $\int_a^b f(x)\,dx$ *phân kỳ thì tích phân* $\int_a^b g(x)\,dx$ *cũng phân kỳ.*

✡ **Định lý 10**

Nếu hàm số $f(x)$ *có dấu thay đổi trong đoạn* $[a, b]$ *và gián đoạn tại điểm* $c \in [a, b]$, *nếu tích phân* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *hội tụ thì tích phân* $\int_a^b f(x)\,dx$ *cũng hội tụ.*

⁂

BÀI TẬP CHƯƠNG 3
PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

BÀI	**ĐỀ RA**	**ĐÁP SỐ**
Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số		
3.1	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x}+C$ $(hay\ \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}+C)$
3.2	$\int \frac{dx}{e^x+1}$	$-\ln(e^{-x}+1)+C$
3.3	$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}\right\rvert+C$
3.4	$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}$
3.5	$\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\frac{\arcsin^4 x}{4}+C$
3.6	$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}\,(e^x-2)+C$
3.7	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{2}(\arcsin x-x\sqrt{1-x^2})+C$
3.8	$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$ (Đặt $x=\tan t$)	$-\frac{1}{\sin t}+\ln\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}+C$
3.9	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2-x^2}}$	$\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-2\sqrt{2-x^2}+C$
3.10	$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$ (Đặt $x=a\tan t$)	$\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)+C$
Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau		
3.11	$\int (x^2-2x+5).e^{-x}dx$	$-e^{-x}(x^2+5)+C$
3.12	$\int (x^2+5x+6)\cos 2x dx$	$\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x+C$

3.13	$\int \ln^2 x\,dx$	$x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$
3.14	$\int (3x^2+6x+5)arctgx dx$	$(x^3+3x^2+5x+3)arctgx - \frac{1}{2}(x+3)^2 -$ $-2\ln(1+x^2)+C.$
3.15	$\int 3^x \cos x\,dx$	$\frac{3^x(\sin x + \cos x \ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$
3.16	$\int \sin(\ln x)\,dx$	$\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$
Tính tích phân các hàm số hữu tỷ		
3.17	$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{1}{12}\ln\left\|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right\| + C$
3.18	$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$	x + 3ln$\|x-3\|$ -3ln$\|x-2\|$ + C
3.19	$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$	$-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left\|\frac{x-1}{x+3}\right\| + C$
3.20	$\int \frac{x^2+2x+6}{x^3-7x^2+14x-8}dx$	$3\ln\|x-1\| - 7\ln\|x-2\| + 5\ln\|x-4\| + C$
3.21	$\int \frac{dx}{x^3+1}$	$\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$
3.22*	$\int \frac{dx}{x^4+1}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2} + C$ (biết: $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$)
Lập các công thức quy nạp để tính tích phân		
3.23	$I_n = \int x^n e^{-x}dx$. *Tính* I_{10}.	$I_n = -x^n e^{-x} + n\,I_{n-1}$ $I_{10} = -e^{-x}(x^{10} + 10x^9 + \ldots$ $+10.9.8\ldots 2x + 10.9\ldots 1) + C.$
3.24	$I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$. *Tính* I_3, I_4. $\left(I_n = \frac{1}{n-1}.\frac{tgx}{\cos^{n-2}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\right)(n>1)$ **Đs**: $I_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left\|tg\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right\| + C$ & $I_4 = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}tgx + C$	

3.25	$I_n = \int tg^n x\,dx$	$I_n = \dfrac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x\,dx\,(n>1)$
3.26	$I_n = \int \cos^n x\,dx$. *Tính* $I_4,\ I_5$; $\left(I_n = \dfrac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx\right)$ **<u>Đs</u>**: • $I_4 = \dfrac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \dfrac{3}{8}(x+\sin x\cos x) + C$ • $I_5 = \dfrac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \dfrac{4}{5}\sin x - \dfrac{4}{15}\sin^3 x + C$	
3.27	$I_n = \int \dfrac{u^n}{\sqrt{au+b}}\,du$.	$I_n = \dfrac{2}{a(2n+1)}\left(u^n.\sqrt{au+b} - nb\int \dfrac{u^{n-1}}{\sqrt{au+b}}\,du\right)$
Tính tích phân các hàm số vô tỉ		
3.28	$\int \dfrac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$	$\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C$
3.29	$\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$	$\ln\left\|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}\right\| + 2arctg\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + C$
3.30	$\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.\dfrac{dx}{x^2}$	$\ln\left\|\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right\| - \dfrac{1+x}{x} + C$
3.31*	$\int \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}\,dx$	$\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2t}{t^3-1} + C$
3.32	$\int \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$	$2.\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}} + C$
3.33	$\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$	$\dfrac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \dfrac{1}{2}\ln\left\|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right\| + C$
Tính các tích phân của các hàm số lượng giác		
3.34	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$	$\dfrac{tg^3 x}{3} + 2tgx - \cot gx + C$
3.35	$\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$	$\dfrac{1}{24}\cos 6x - \dfrac{1}{16}\cos 4x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$

3.36	$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert \frac{2+tg\,\frac{x}{2}}{2-tg\,\frac{x}{2}} \right\rvert + C$
3.37	$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$	$\ln(1+\sin^2 x)+C$
3.38	$\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\,dx$	$-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}+C$
3.39	$\int x^2\cos^2 3x\,dx$	$\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)+C$
3.40	$\int x\,e^x\cos x\,dx$	$\frac{e^x}{2}\left[\,x(\sin x+\cos x)-\sin x\,\right]+C$
3.41	$\int e^{2x}\sin(e^x)\,dx$	$\sin e^x - e^x\cos e^x + C$
Tính các tích phân xác định sau		
3.42	$\int_1^2 \frac{t+3t^2}{\sqrt{t^2+2t^3}}\,dt$	$\sqrt{20}-\sqrt{3}$
3.43	$\int_0^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{1+4x^2}\,dx$	$\frac{149}{60}$
3.44	$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}\,dx$	$8+\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$
3.45	$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$	$4-\pi$
3.46	$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{\pi a^4}{16}$
3.47	$\int_0^1 x^3e^{2x}\,dx$	$\frac{e^2+3}{8}$
3.48	$\int_0^\pi e^x\sin x\,dx$	$\frac{1}{2}(e^\pi+1)$
3.49	$\int_1^e \ln^3 x\,dx$	$6-2e$
3.50	$\int_1^4 arctg\sqrt{x-1}\,dx$	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

3.51	$\int_1^2 \sin(\ln x)\,dx$	$\sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{2}$
Tính các tích phân suy rộng sau		
3.52	$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} \quad (a > 1)$	$+\infty$ – Phân kỳ
3.53	$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} \quad (a > 1)$	$\frac{1}{\ln a}$ – Hội tụ
3.54	$\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x}$	$\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ - Hội tụ
3.55	$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}$ – Hội tụ
3.56	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$	$\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ – Hội tụ
3.57	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2\sin^2 x}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$ - Hội tụ
3.58	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\frac{1}{\ln 2}$ – Hội tụ
3.59	$\int_0^{5} \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$	$\frac{\pi}{2}$ – Hội tụ
3.60	$\int_0^{1} \ln x\,dx$	- 1 - Hội tụ
Dùng các dấu hiệu hội tụ để xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau		
3.61	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}$	Phân kỳ
3.62	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$	Hội tụ
3.63	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$	Hội tụ

3.64	$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$	Hội tụ
3.65	$\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt{x^2+1}}$	Hội tụ
3.66	$\displaystyle\int_{0}^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$	Hội tụ
3.67	$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$	Hội tụ
3.68	$\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x}$	Phân kỳ
3.69	$\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{1+x^4}}$	Hội tụ

---------------- Hết ----------------

CHƯƠNG 4
ĐẠO HÀM - VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

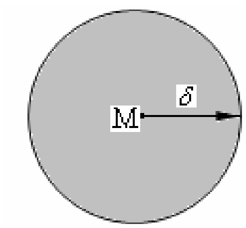
§ 1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

• *Ta gọi miền phẳng hay tập hợp phẳng là một bộ phận của mặt phẳng.*

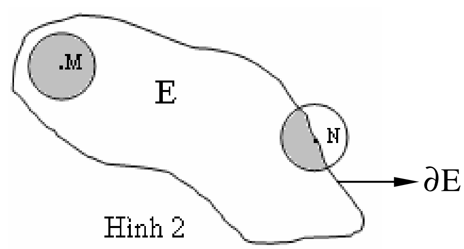
• *Khoảng cách giữa hai điểm* $M_1(x_1,\ y_1)$ *và* $M_2(x_2,\ y_2)$ *của mặt phẳng là số thực* $d(M_1,\ M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

• *Tập hợp* $S(M_0, \delta) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(M_0, M) \le \delta \right\}$ *gọi là mặt tròn trên mặt phẳng.*

• *Ta gọi* δ *- lân cận của điểm M là phần trong của mặt tròn tâm* M *bán kính* δ *(Hình 1).*



Hình 1



Hình 2

• *Điểm M được gọi là điểm trong của miền E, nếu tồn tại một* $\delta -$ *lân cận nào đó của điểm M nằm hoàn toàn trong E (*Hình 2)

• *Miền E được gọi là mở (hở) nếu mọi điểm của nó đều là điểm trong.*

• *Miền phẳng E gọi là bị chặn nếu tồn tại một mặt tròn chứa nó.*

• *Điểm N được gọi là điểm biên của miền E nếu mọi lân cận của nó vừa chứa những điểm thuộc E vừa chứa những điểm không thuộc E . Điểm biên của một miền có thể thuộc hoặc không thuộc miền ấy. Tập hợp tất cả những điểm biên của miền E được gọi là biên của E. Biên của E thường được ký hiệu* ∂E (Hình 2).

• *Một đường cong gọi là kín nếu điểm đầu và điểm cuối của nó trùng nhau.*

• *Miền E được gọi là miền đóng (kín) nếu nó chứa mọi điểm biên (nghĩa là biên của E là một bộ phận của miền đó) (Hình 2).*

• *Miền đóng E được gọi là miền đơn liên nếu biên của E là một đường cong kín đơn (đường cong kín đơn là đường cong không tự cắt).*

◈ **Ví dụ 1**

- Trên hình 1**,** phần mặt tròn không kể biên là một *tập hợp mở.*
- Còn tập hợp $S(M_o, \delta) = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(M_o, M) \le \delta \right\}$ là một *tập hợp đóng*.

§ 2 HÀM HAI BIẾN

2.1 Định nghĩa hàm hai biến

♦ **Định nghĩa 1**

• *Xét tập tích đề các* $\mathbb{R}^2$ *và tập hợp* $G \subset \mathbb{R}^2$*. Ta gọi ánh xạ* $f : G \to \mathbb{R}$ *là một hàm hai biến xác định trên* G, G *được gọi là miền xác định của hàm* f.

Vậy một hàm hai biến f *xác định trên* G *là một phép tương ứng cho ứng với mỗi cặp số thực có thứ tự* $(x,y) \in G$ *một số thực xác định mà ta ký hiệu* $f(x,y)$*. Ta viết :*

$f:(x,y)\to f(x,y)$ *(đọc: " f chuyển (x,y) thành f của $(x,\ y)$ ")*

• $f(x,y)$ *là ảnh của* (x,y) *qua ánh xạ* f. *Ta cũng gọi* $f(x,y)$ *là giá trị của* f *tại (x, y)*

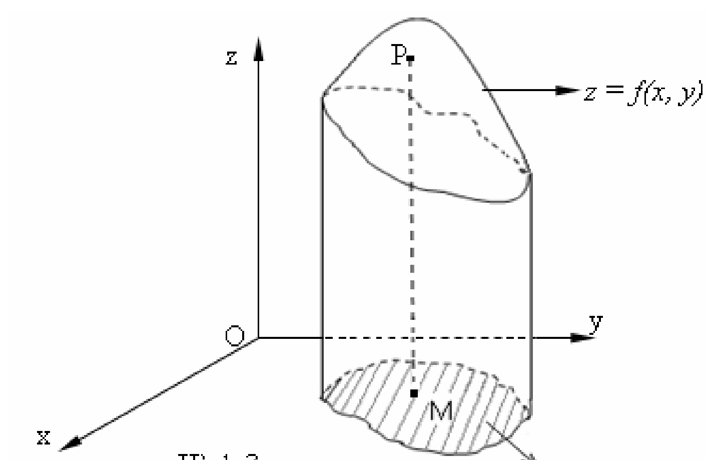
Nếu đặt $z=f(x,y)$ *thì chúng ta có thể biểu diễn hàm* f *như sau* $f:(x,y)\to z=f(x,y)$ *hay gọn hơn* $z=f(x,y)$ *trong đó* $x,\ y$ *là các biến độc lập và* z *là biến phụ thuộc.*

• *Để chỉ các hàm khác nhau, ta dùng các chữ khác nhau:* $z=f(x,y);\ z=g(x,y),...$

• *Ta quy ước rằng: Nếu hàm được xác định bởi một biểu thức nào đó và nếu không nói gì thêm thì miền xác định là tập hợp tất cả các cặp số thực có thứ tự mà ứng với nó biểu thức đã cho có nghĩa.*

2.2 Đồ thị hàm hai biến

• *Giả sử đã cho hàm hai biến* $f:(x,y)\to f(x,y)$. *Mỗi cặp* (x,y) *đều được biểu diễn bởi một điểm* $M(x,y)$ *trong mặt phẳng* Oxy, *nên ta cũng có thể xem là hàm hai biến* $f(x,y)$ *là hàm của điểm* $M(x,y), f:M\to f(M)$. *Có thể minh họa hình học một hàm hai biến như sau: Vẽ hệ trục tọa độ Đề các* $Oxyz$ *với mỗi điểm* $M(x,y)$ *trong mặt phẳng* Oxy, *cho ứng với một điểm* P *trong không gian có các tọa độ* $(x;\ y;\ z)$ *trong đó* $z=f(x,y)$ *Tập hợp các điểm* P *như thế khi* M *chạy trong miền* G *của mặt phẳng* Oxy *được gọi là đồ thị của hàm* $z=f(x,y)$ *xác định trên miền* G. *Đồ thị của hàm hai biến thường là một mặt cong trong không gian* (Hình 3)



Hình 3

• Bằng cách tương tự, chúng ta cũng có định nghĩa về hàm n – biến $(n\geq 3)$.

Hàm hợp của hàm hai biến cũng định nghĩa tương tự như hàm hợp của hàm 1 biến trước đây.

2.3 Giới hạn của hàm hai biến

2.3.1 Giới hạn của dãy điểm trên mặt phẳng

♦ **Định nghĩa 2** (Dãy điểm trong mặt phẳng)

Nếu với mỗi số tự nhiên n *lấy một điểm* $M_n(x_n,y_n)$ *của mặt phẳng thì ta có một dãy điểm trong mặt phẳng và ký hiệu* $\left\{M_n(x_n,\ y_n)\right\}$: $M_1,\ M_2,\ ...,M_n,\ ...$

♦ **Định nghĩa 3** (Giới hạn của dãy điểm)

Điểm $M_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *gọi là giới hạn của dãy điểm* $\left\{M_n(x_n,\ y_n)\right\}$ *khi* $n\to\infty$ *nếu*

$\lim\limits_{n\to\infty} d\left(M_n,\, M_0\right) = 0$. *Ký hiệu* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ *hay* $\left\{M_n\right\} \xrightarrow{n\to\infty} M_0$.

▼ **Chú ý 1**

Khái niệm giới hạn của dãy điểm $\left\{M_n\right\}$ được định nghĩa nhờ khái niệm giới hạn của dãy số $\left\{d\left(M_n,\, M_0\right)\right\}$.Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: d\left(M_n,\, M_0\right) < \varepsilon$

✡ **Định lý 1** *Nếu dãy điểm* $\left\{M_n\right\}$ *có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

✡ **Định lý 2** $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x_n,\, y_n) = M_0(x_0,\, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$.

2.3.2 Giới hạn bội của hàm hai biến

♦ **Định nghĩa 4** (Điểm tụ của một tập hợp)

Điểm M_0 được gọi là điểm tụ của tập hợp G nếu mọi mặt tròn tâm M_0, bán kính $\delta > 0$ đều chứa ít nhất một điểm thuộc G, khác điểm M_0.

Cần chú ý rằng:Điểm tụ của tập hợp G có thể là điểm trong hoặc là điểm biên của G.

♦ **Định nghĩa 5** (Theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$)

Cho hàm $f(M)$ xác định trên miền $G \subset \mathbb{R}^2$. Xét M_0 là điểm tụ của G. Số a được gọi là giới hạn (bội) của hàm $f(M)$ khi $M \to M_0$ nếu $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \forall M \in G, M \neq M_0$

$MM_0 < \delta \Rightarrow \left| f(M) - a \right| < \varepsilon$. Khi ấy viết: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = a$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,\, y) = a$.

Đinh nghĩa theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ nói trên tương đương với định nghĩa theo dãy sau:

♦ **Định nghĩa 6** (Vẫn xét M_0 là *điểm tụ* của miền xác định G của hàm $f(M)$).

Số a được gọi là giới hạn (bội) của hàm $f(M)$ khi $M \to M_0$ nếu với mọi dãy điểm $\left\{M_n\right\}: M_n \in G,\, M_n \neq M_0$ mà $M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_0$ thì $f(M_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Khi ấy chúng ta viết: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = a$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,\, y) = a$.

▼ **Chú ý 2**

Ở đây khi $M \to M_0$ tiến bằng mọi cách không có sự hạn chế nào về cách M tiến đến điểm M_0. Từ định nghĩa *giới hạn của hàm số theo dãy* chúng ta có hệ quả sau đây:

⊗ **Hệ quả:**

Nếu $\begin{cases} \bullet\, M_0 \neq M_n \xrightarrow{n\to\infty} M_0 \\ \bullet\, M_0 \neq K_n \xrightarrow{n\to\infty} M_0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(M_n) = a \neq b = \lim\limits_{n\to\infty} f(K_n)$ thì $\nexists \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$

◈ **Ví dụ 2**

Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$.

Giải

Chọn $M_n\left(\frac{1}{n},0\right)$; $K_n\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$. Ký hiệu: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$, $M_0(0,0)$, ta thấy:

$$\begin{cases} M_0 \neq M_n \xrightarrow{\quad n\to\infty\quad} M_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(M_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}.0}{\frac{1}{n}+0}=0 \\ M_0 \neq K_n \xrightarrow{\quad n\to\infty\quad} M_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(K_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}=-1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$$

d) <u>Các tính chất của giới hạn</u>

✡ **<u>Định lý 3</u>**

Giả sử: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=a$ & $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=b$, ($a,b-$ *hữu hạn*). Khi đó ta có:

$i_1)$ $\lim\limits_{M\to M_0}\left[f(M)\pm g(M)\right]=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)+\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=a\pm b$

$i_2)$ $\lim\limits_{M\to M_0}\left[f(M).g(M)\right]=\lim\limits_{M\to M_0} f(M).\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=ab.$

$i_3)$ $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}=\dfrac{a}{b}$ (nếu $b\neq 0$)

✡ **<u>Định lý 4</u>**

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=0 \Leftrightarrow \lim_{M\to M_0}\left|f(M)\right|=0$$

✡ **<u>Định lý 5</u>** (Nguyên lý kẹp)

Giả sử $f(M)\le g(M)\le h(M)$ *với mọi điểm* M *nằm trong lân cận nào đó của điểm* M_0 *và* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=\lim\limits_{M\to M_0} h(M)=a \Rightarrow \lim\limits_{M\to M_0} g(M)=a.$

◈ **<u>Ví dụ 3</u>**

$i_1)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1.2}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

$i_2)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}$. *Vì*: $0\le\left|\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right|\le\left|\dfrac{x\cancel{x^2}\cancel{y^2}}{2\cancel{x^2}\cancel{y^2}}\right|=\dfrac{|x|}{2}\xrightarrow{\quad x\to 0\quad}0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right|=0$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}=0$$

2.3.3 <u>Giới hạn lặp của hàm nhiều biến</u>

Ngoài giới hạn bội vừa nêu ở trên, đối với hàm nhiều biến ta còn có khái niệm *giới hạn lặp.* Ta trình bày khái niệm này cho hàm hai biến:

♦ **<u>Định nghĩa 7</u>**

• $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$. *Khi tìm giới hạn phía trong dấu ngoặc :* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ *ta coi* y *là hằng số.*

• $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$. *Khi tìm giới hạn phía trong dấu ngoặc :* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ *ta coi* x *là hằng số.*

◈ **Ví dụ 4**

1. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}0=0.$ Tương tự $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x+y}=0$

2. $Vì$: $0\le\left|x\cos\dfrac{1}{y}\right|\le|x|\left|\cos\dfrac{1}{y}\right|\le|x|.1=|x|\xrightarrow[y\to 0]{x\to 0}0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|x\cos\dfrac{1}{y}\right|=0.$ Ta đã biết rằng không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to 0}\cos\dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow$ không tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{y}\right)\right)$. Như vậy sự tồn tại của <u>giới hạn bội không suy ra được sự tồn tại của giới hạn lặp và ngược lại</u>. Tuy nhiên người ta đã chứng minh được :

✡ **Định lý 6**

Giả sử tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=a$. *Hơn nữa, nếu các giới hạn phía trong của giới hạn lặp khi ấy có nghĩa, thì:* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)=a.$

2.4 Sự liên tục của hàm nhiều biến

2.4.1 Khái niệm hàm liên tục

♦ **Định nghĩa 8**

Hàm số $f(M)$ *được gọi là liên tục tại điểm* M_0 *nếu* $f(M)$ *xác định tại* M_0 *và tồn tại giới hạn bội* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

♦ **Định nghĩa 9**

Hàm số $f(M)$ *được gọi là liên tục trên tập* D *nếu* $f(M)$ *liên tục tại mọi điểm* $M\in D$.

◈ **Ví dụ 5**

Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & khi\ (x,y)\ne(0,0)\\ a & khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Hãy tìm a để $f(x,y)$ liên tục tại $M_0(0,0)$.

Giải

+ Ta thấy $f(M_0)=f(0,0)=a$, (1). Mặt khác ta có:

+Vì $0\le\left|\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right|\le\left|\dfrac{x\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}}{2\cancel{x^2}\,\cancel{y^2}}\right|=\dfrac{|x|}{2}\xrightarrow{x\to 0}0\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}\right|=0$, (2). Từ (1) và (2) chúng ta suy ra: Để hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $M_0(0,0)$ khi và chỉ khi:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y^2}{x^4+y^4}=f(0,0)\Leftrightarrow a=0.$$

2.4.2 Các tính chất của hàm liên tục

✡ **Định lý 7**

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục tại M_0 *là một hàm liên tục tại* M_0 *(riêng trường hợp thương cần điều kiện mẫu số khác 0 tại* M_0*)*

✡ **Định lý 8** *Hợp của hai hàm liên tục là một hàm liên tục (tại điểm tương ứng).*

✡ **Định lý 9**

Cho D *là một tập con đóng và bị chặn trong* $\mathbb{R}^n$*;* $f(M)$ *là hàm liên tục trên* D*. Khi ấy* $f(D)$ *là tập đóng và bị chặn trên* $\mathbb{R}$*.*

§ 3 ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

3.1 Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

3.1.1 Đạo hàm riêng cấp 1

Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến là đạo hàm của hàm đó theo một biến nào đó khi coi các biến khác là hằng số. Ta trình bày cụ thể cho hàm hai biến số:

♦ **Định nghĩa 10**

Đạo hàm riêng theo biến x *của hàm số* $z=f(x,y)$ *tại điểm* $M_0(x_0,y_0)$ *ký hiệu:*

$f'_x(x_0,y_0)$ *hay* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *là giới hạn* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$*, khi đó chúng ta viết:* $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$*. Tương tự, chúng ta cũng có đạo hàm riêng theo* y *tại điểm* $M_0(x_0,y_0)$ *là* $f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

▼ **Chú ý 3**

Nếu đặt: $g(x)=f(x,y_0)$ thì ta có: $f'_x(x_0,y_0)=g'(x_0)$. Tương tự nếu đặt $g(y)=f(x_0,y)$ thì ta có: $f'_y(x_0,y_0)=g'(y_0)$.

◈ **Ví dụ 6**

1. Cho hàm số $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Hãy tính $f'_x(0,0)$ & $f'_y(0,0)$.

2. Cho hàm số $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$. Hãy tính f'_x & f'_y.

Giải

1. Đặt $g(x)=\sqrt[3]{x^3+0^3}=x\Rightarrow f'_x(0,0)=g'(0)\Leftrightarrow f'_x(0,0)=1$. Tương tự thì chúng ta cũng có: $f'_y(0,0)=1$.

2. $f'_x(x,y)=2xy+y\cos(xy);\ f'_y(x,y)=x^2+x\cos(xy)$.

3.1.2 Đạo hàm riêng cấp cao

♦ **Định nghĩa 11**

Cho $n\geq 2$. Đạo hàm riêng cấp n là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $n-1$.

Cụ thể ta có *các đạo hàm riêng cấp 2* của hàm $z=f(x,y)$ như sau:

$a)\ z''_{xx}=z''_{x^2}=f''_{x^2}=\left(f'_x\right)'_x$

$b)\ z''_{yy}=z''_{y^2}=f''_{y^2}=\left(f'_y\right)'_y$

c) $z''_{xy} = f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y$

d) $z''_{yx} = f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x$

+ Đạo hàm riêng cấp cao của hàm hai biến theo các biến khác nhau được gọi là các *đạo hàm riêng hỗn hợp. Nói chung, các đạo hàm riêng hỗn hợp phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm theo các biến.* Tuy nhiên, *nếu các đạo hàm riêng hỗn hợp đó liên tục* thì *chúng bằng nhau.* Cụ thể chúng ta có định lý sau đây:

✡ **Định lý 10 (Schwartz)**

Giả sử hàm số $f(x,y)$ *cùng các đạo hàm riêng* $f'_x;\ f'_y;\ f''_{xy};\ f''_{yx}$ *xác định trong một lân cận của điểm* (x_0, y_0) *và liên tục tại* (x_0, y_0)*. Khi ấy:* $f''_{xy}(x_0,\, y_0) = f''_{yx}(x_0,\, y_0)$.

◈ **Ví dụ 7**

1. Cho: $z = 2x^3y^2 + y^5$. Tính $z'_x;\ z'_y;\ z''_{x^2};\ z''_{y^2},\ z''_{xy},\ z''_{yx}$.

2. Cho $u = e^{x+y^2}\sin^2 z$ .Tính $u^{(4)}_{xy^2z}$.

3. Cho $f(x,y) = x^2y + \sin xy$. Tính $f'_x;\ f'_y;\ f''_{x^2};\ f''_{y^2};\ f''_{xy};\ f''_{yx}$.

Giải

1. $\begin{cases} z'_x = 6x^2y^2 \\ z'_y = 4x^3y + 5y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ z''_{xx} = 12xy^2;\ z''_{yy} = 4x^3 + 20y^3 \\ \bullet\ z''_{xy} = 12x^2y;\ z''_{yx} = 12x^2y \end{cases}$

2. Từ $u = e^{x+y^2}\sin^2 z \Rightarrow u'_x = e^{x+y^2}\sin^2 z \Rightarrow u''_{xy} = 2y.e^{x+y^2}.\sin^2 z$

$\Rightarrow u'''_{xy^2} = 2.e^{x+y^2}.\sin^2 z + 4\,y^2.e^{x+y^2}.\sin^2 z = 2(1+2y^2).e^{x+y^2}.\sin^2 z.$

$\Rightarrow u^{(4)}_{xy^2z} = 4e^{x+y^2}(1+2y^2).2\sin z\cos z = 2e^{x+y^2}(1+2y^2).\sin 2z.$

3. + Từ $f(x,y) = x^2y + \sin xy \Rightarrow f'_x = 2xy + y\cos xy \Rightarrow f''_{x^2} = 2y - y^2\cos xy$

và $f''_{xy} = \left(2xy + y\cos xy\right)'_y = 2x + \cos xy - xy\sin xy.$

+ Từ $f(x,y) = x^2y + \sin xy \Rightarrow f'_y = x^2 + x\cos xy \Rightarrow f''_{y^2} = -x^2\sin xy.$

và $f''_{yx} = \left(x^2 + x\cos xy\right)'_x = 2x + \cos xy - xy\sin xy$

◈ **Ví dụ 8** Chứng minh rằng hàm số $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & khi\ (x,\,y) \neq 0 \\ 0 & khi\ (x,\,y) = 0 \end{cases}$

có các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 tại điểm (0,0), nhưng các đạo hàm riêng hỗn hợp đó không bằng nhau.

Giải

+ $Khi\ (x,\,y) \neq 0$ thì $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, do đó chúng ta có:

$$f'_x = \frac{y\left(x^4 - y^4 + 4x^2y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \text{ và } f'_y = \frac{x\left(x^4 - y^4 - 4x^2y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Mặt khác, theo định nghĩa đạo hàm riêng thì:

- $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$
- $f'_y(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0-0}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{\Delta y} = 0$
- $f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{-\cancel{\left(\Delta y\right)^5}}{\cancel{\left(\Delta y\right)^5}} = -1, (1)$
- $f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f'_y(0, \Delta y) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cancel{\left(\Delta x\right)^5}}{\cancel{\left(\Delta x\right)^5}} = 1, (2)$

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow f''_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f''_{yx}(0,0)$, (đpcm)

3.2 Vi phân riêng và vi phân toàn phần của hàm hai biến

3.2.1 Vi phân riêng

♦ **Định nghĩa 12**

• *Người ta gọi vi phân riêng của hàm 2 biến $z = f(x,y)$ đối với x tại điểm (x_0, y_0) là phần chính của số gia riêng $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)$ tỉ lệ với số gia Δx của biến độc lập x ký hiệu $d_x z$.*

• *Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có đạo hàm riêng theo x tại (x_0, y_0) thì nó có vi phân riêng $d_x z$ tại điểm ấy và ngược lại. Khi ấy ta có:* $\boxed{d_x z = z'_x \Delta x = z'_x dx}$

• *Tương tự : Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có đạo hàm riêng theo y tại (x_0, y_0) thì nó có vi phân riêng $d_y z$ tại điểm ấy và ngược lại. Khi ấy ta có:* $\boxed{d_y z = z'_y \Delta y = z'_y dy}$

3.2.2 Vi phân toàn phần

✡ **Định nghĩa 13**

+ *Hàm số $z = f(x,y)$ được gọi là khả vi tại điểm (x_0, y_0) nếu số gia Δf được viết dưới dạng $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, $(\oplus)$ ở đây A, B là các hằng số, còn $\alpha \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$ và $\beta \xrightarrow{\Delta y \to 0} 0$. Khi ấy biểu thức: $A.\Delta x + B.\Delta y$ gọi là vi phân toàn phần của hàm $z = f(x,y)$ tại (x_0, y_0) và được ký hiệu $dz(x_0, y_0)$.*

+ *Nếu ta ký hiệu $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và chú ý $\Delta x, \Delta y \to 0 \Leftrightarrow \rho \to 0$. Ta thấy rằng $\alpha,\ \beta \to 0 \Rightarrow \alpha\Delta x + \beta\Delta y = \varepsilon(\rho)$ khi $\rho \to 0$. Vậy: dạng $(\oplus)$ tương đương với $\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon(\rho)$, trong đó $\varepsilon(p)$ là VCB khi $\rho \to 0$.*

b) <u>Công thức tính vi phân *toàn phần* của hàm 2 - biến</u> : $\boxed{\mathrm{dz} = z'_x dx + z'_y dy}$

3.2.3 <u>Tính chất của vi phân</u>

✡ **<u>Định lý 11</u>**

Nếu f, g là các hàm khả vi thì ta có:

- $d(f \pm g) = df \pm dg$.
- $d(fg) = g\,df + f\,dg$.
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$, (nếu $g \neq 0$)

◈ **<u>Ví dụ 9</u>** Cho $f(x,y) = x^2 y + \sin y$. Hãy tính $df(x,y)$

<u>Giải</u>

$df(x,y) = f'_x(\mathrm{x},y)dx + f'_y(\mathrm{x},y)\,dy = 2xy\,dx + (x^2 + \cos y)\,dy$

3.2.4 <u>Dùng vi phân để tính gần đúng</u>

Cho $f(x,y)$ khả vi tại (x_0,y_0). Xét Δ_x, Δ_y đủ bé. Khi ấy $0(\rho)$ có thể bỏ qua vì rất bé.

Lúc đó ta có công thức gần đúng :

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) \approx df(x,y) \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\, y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y}$$

Sai số $0(\rho)$ không đánh giá được, tuy nhiên ta biết rằng nó nhỏ khi Δx, Δy đủ nhỏ.

◈ **<u>Ví dụ 10</u>**

Dùng vi phân để tính gần đúng $a = \sqrt{(4,01)^2 + (3,05)^2}$.

<u>Giải</u>

$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,01$; $\Delta y = 0,05 \Rightarrow a = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$.

Vì: $f'_x(x_0,y_0) = \left.\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}} = \dfrac{4}{5}$; $f(x_0,y_0) = 5$; $f'_y(x_0,y_0) = \left.\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=4\\y=3}} = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow a \approx 5 + \dfrac{4}{5}.0,01 + \dfrac{2}{3}.0,05 = 5,038$.

3.2.5 <u>Các điều kiện khả vi</u>

Giữa *tính khả vi* và *sự liên tục* của hàm hai biến $z = f(x,y)$ có mối liên hệ được thể hiện qua các mệnh đề sau:

1) <u>Điều kiện cần để hàm khả vi</u>:

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0) thì tại điểm đó nó liên tục và có đạo hàm riêng theo mỗi biến. Khi đó:

$f'_x(x_0,y_0) = A$, $f'_y(x_0,\, y_0) = B \Rightarrow \Delta f\,(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\,(\rho)$

▼ **<u>Chú ý 4</u>**

Điều kiện cần để hàm khả vi tương đương với mệnh đề sau đây:

"*Nếu tại điểm (x_0, y_0) hàm số $z = f(x,y)$ không liên tục hoặc không có đạo hàm riêng theo từng biến thì nó không khả vi tại điểm (x_0, y_0)*.

2) <u>Điều kiện đủ để hàm khả vi</u>:

Nếu hàm số $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y ở lân cận của điểm (x_0, y_0) và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại điểm (x_0, y_0) thì $f(x,y)$ khả vi tại điểm (x_0, y_0) và $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

◈ **<u>Ví dụ 11</u>**

Cho $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & khi\ x+y \neq 0 \\ 0 & khi\ x+y = 0 \end{cases}$. Xét tính khả vi của hàm số $f(x,y)$ tại điểm $(0,0)$.

<u>Giải</u>

Ta biết rằng không tồn tại $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ $\Rightarrow$ hàm số $f(x,y)$ *không liên tục tại điểm* (0,0) và chúng ta cũng suy ra hàm số $f(x,y)$ cũng *không khả vi tại điểm* (0;0).

◈ **<u>Ví dụ 12</u>**

Chứng minh rằng: hàm số $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ không khả vi tại điểm O(0;0).

<u>Giải</u>

Theo định nghĩa đạo hàm riêng ta có:

$$f'_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x;0) - f(0;0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x.0} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0;\Delta y) - f(0;0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\sqrt[3]{0.\Delta y} - 0}{\Delta y} = 0$$

Để xét tính khả vi của hàm số $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ tại điểm O(0;0) chúng ta xét:

$$\Delta f(0;0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = \underbrace{f'_x(0;0)\Delta x}_{0} + \underbrace{f'_y(0;0)\Delta y}_{0} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, (*).$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Từ $(*)$ ta có: $\varepsilon(\Delta x; \Delta y) = \sqrt[3]{\Delta x.\Delta y} \times \dfrac{1}{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}$.

Xét dãy điểm: $\left\{\Delta x; \Delta y\right\} = \left\{(\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n})\right\}$ với $n = \overline{1,\infty}$ $\Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0\ khi\ n \to \infty$.

Khi đó dãy điểm $M_n(\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} O(0;0)$. Nhưng dãy các giá trị của hàm

$$\varepsilon(\Delta x;\Delta y):\ \varepsilon(\frac{1}{n};\frac{1}{n}) = \sqrt[3]{\frac{1}{n}.\frac{1}{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \times \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$= \dfrac{\sqrt[3]{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ nên hàm $\varepsilon(\Delta x; \Delta y)$ không phải là một VCB khi $\Delta x \to 0\ \&\ \Delta y \to 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ *không khả vi* tại điểm O$(0,0)$.

3.2.6 Vi phân cấp cao

•*Khi điểm* M *thay đổi thì vi phân* $df(x,y)$ *cũng thay đổi nên* $df(x,y)$ *cũng là một hàm của các biến* x, y. *Như vậy, ta có thể nói về vi phân của vi phân cấp 1, gọi là vi phân cấp 2:* $d^2f(x,y) = d(df(x,y))$.

•*Tương tự:* $d^n f(x,y) = d\left(d^{n-1}f(x,y)\right)$, $n \geq 2$. *Bây giờ ta giả sử* x, y *là các biến độc lập*

Chú ý rằng khi ấy dx, dy *là các hằng số nên* $d^2x^2 = d^2y^2 = 0$.

Do đó: $d^2f(x,y) = d\left(df(x,y)\right) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) = d(f'_x)dx + d(f'_y)dy$

$= \left(f''_{x^2}dx + f''_{xy}dy\right)dx + \left(f''_{yx}dx + f''_{y^2}dy\right)dy$

$\Rightarrow \boxed{d^2z = f''_{x^2}dx^2 + f''_{xy}dx\,dy + f''_{yx}dy\,dx + f''_{y^2}dy^2}$

3.3 Đạo hàm riêng và vi phân của hàm hợp

3.3.1 Đạo hàm riêng của hàm hợp

¤ **Trường hợp 1**

✡ **Định lý 12**

Giả sử $z = f(x,y)$ *là hàm khả vi trong miền mở* D. *Cho* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *là các hàm khả vi trong khoảng* (t_1, t_2) *và* $(x(t), y(t)) \in D$ *khi* $t \in (t_1, t_2)$. *Khi ấy hàm hợp* $z = f[x(t), y(t)]$ *cũng khả vi trong khoảng* (t_1, t_2) *và:* $\boxed{z'_t = z'_x.x'_t + z'_y.y'_t}$

◈ **Ví dụ 13**

Cho: $\begin{cases} z = x^y \\ x = \ln t \\ y = \cos t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = z'(t) = z'_x.x'(t) + z'_y.y'(t) = y.x^{y-1}.\dfrac{1}{t} - x^y.\sin t.\ln x$.

¤ **Trường hợp 2**

✡ **Định lý 13**

Cho $z = z(t)$ & $t = t(x,y)$ *khả vi tại các điểm tương ứng. Khi ấy hàm hợp* $z(x,y) = z(t(x,y))$ *cũng khả vi tại điểm tương ứng và:* $\boxed{z'_x = z'_t.t'_x \ \&\ z'_y = z'_t.t'_y}$

◈ **Ví dụ 14**

Cho $z = 2t^2$ nhưng $t = \cos(x-y)$. Tính z'_x, z'_y.

Giải

• $z'_x = 4t.\left(\cos(x-y)\right)'_x = -4t.(x-y)'_x.\sin(x-y) = -4\cos(x-y)\sin(x-y)$
$= -2\sin 2(x-y)$.

• $z'_y = 4t.\left(\cos(x-y)\right)'_y = -4t.(x-y)'_y.\sin(x-y) = 4\cos(x-y)\sin(x-y)$
$= 2\sin 2(x-y)$.

¤ **Trường hợp 3**

✡ **Định lý 14**

Cho $z=f(x,y);\ x=x(u,v);\ y=y(u,v)$ khả vi tại các điểm tương ứng. Lúc đó hàm

$z=f\Big(x(u,v);\ y(u,v)\Big)$ *cũng khả vi tương ứng và* $\begin{cases} z'_u &= z'_x.x'_u + z'_y.y'_u \\ z'_v &= z'_x.x'_u + z'_y.y'_y \end{cases}$

◈ **Ví dụ 15**

Cho: $\begin{cases} z=x^2y-xy^2 \\ x=u\sin v \\ y=v\cos u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_u = (2xy-y^2).\sin v-(x^2-2xy).v\sin u \\ z'_v = (2xy-y^2).u\cos v+(x^2-2xy)\cos u \end{cases}$

3.4 Đạo hàm của hàm ẩn

3.4.1 Khái niệm về hàm ẩn

Giả sử cho một hệ thức liên hệ giữa hai biến x,y dạng: $F(x,y)=0$ (1). Nếu với một giá trị $x=x_0$ ta có một giá trị xác định $y=y_0$ sao cho $F(x_0,y_0)=0$ thì ta nói rằng hệ thức (1) xác định cho ta một hàm ẩn y theo biến x. Nói cách khác: hàm số $y=\varphi(x)$ được xác định một cách ẩn bởi hệ thức (1). Nếu thay thế $y=\varphi(x)$ vào hệ thức (1) ta được một đồng nhất thức.

◈ **Ví dụ 16**

a) Từ hệ thức $x^3+y^3-1=0,(2)\Rightarrow y=\sqrt[3]{1-x^3}$ hay nói khác đi: hàm $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ được cho "ẩn" dưới hệ thức (2).

b) Tuy nhiên không phải bất kỳ một hệ thức dạng (1) nào cũng cho ta một hàm ẩn. Chẳng hạn hệ thức sau: $x^2+y^2+1=0$ không xác định một hàm ẩn nào. Vậy thì với điều kiện nào thì hệ thức (1) xác định cho ta một hàm ẩn? Điều này được trả lời trong định lý dưới đây:

3.4.2 Điều kiện tồn tại hàm ẩn của hệ thức dạng F(x, y) = 0

✡ **Định lý 15**

Giả sử $F(x_0,y_0)=0$. Nếu hàm $F(x,y)$ có ở lân cận điểm $M_0(x_0,y_0)$ các đạo hàm riêng liên tục và tại điểm ấy: $F'_y(M_0)\neq 0$ thì phương trình $F(x,y)=0$ xác định một hàm ẩn $y=\varphi(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm x_0 hàm ấy lấy giá trị y_0 khi $x=x_0$, nó liên tục và có đạo hàm liên tục trong lân cận của điểm x_0.

3.4.3 Đạo hàm của hàm ẩn của hệ thức dạng F(x, y) = 0

Giả sử hệ thức $F(x,y)=0$ xác định một hàm ẩn $y=\varphi(x)$ hơn nữa $F'_x,\ F'_y$ liên tục. Thế hàm ẩn $y=\varphi(x)$ vào biểu thức $F(x,y)=0$ ta được $F\Big(x,\varphi(x)\Big)=0$

$\Rightarrow \Big[F(x,\varphi(x)\Big]'_x=0 \Leftrightarrow F'_x+F'_y.y'_x=0.$ *Vì* $F'_y(M_o)\neq 0\Rightarrow \boxed{y'_x=\Big(-F'_x\Big):F'_y}$

▼ **Chú ý 6**

Ngoài cách tính $y'_x=\Big(-F'_x\Big):F'_y$, chúng ta có thể tính y'_x bằng cách lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức $F(x,y)=0$ theo x, từ đó suy ra y'_x.

◈ **Ví dụ 17**

Coi $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x + y = e^{x-y}$. Hãy tính y'_x.

Coi $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x + y = e^{x-y}$. Hãy tính y'_x.

Giải

¤ Cách 1 Từ : $x + y = e^{x-y}$. Đặt: $F(x,y) = x + y - e^{x-y} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = 1 - e^{x-y} \\ F'_y = e^{x-y} + 1 \end{cases} \Rightarrow y'_x = \left(-F'_x\right) : F'_y = \frac{-(1-e^{x-y})}{e^{x-y}+1} = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$$

¤ Cách 2

Lấy đạo hàm hai vế theo x của đẳng thức $x + y = e^{x-y}$, ta có $1 + y'_x = (1 - y'_x)e^{x-y}$

$$\Rightarrow (1 + e^{x-y}).y'_x = e^{x-y} - 1 \Rightarrow y'_x = \frac{e^{x-y}-1}{1+e^{x-y}}.$$

◈ **Ví dụ 18**

Coi $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^3 + y^3 + 3y = 3x$. Tính $y'_x(0)$.

Giải

¤ **Cách 1**

Từ $x^3 + y^3 + 3y = 3x$. Nếu cho $x = 0 \Rightarrow y^3 + 3y = 0 \Leftrightarrow y(y^2+3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (*)

Đặt: $F(x,y) = x^3 + y^3 + 3(y - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F'_x = 3x^2 - 3 \\ F'_y = 3y^2 + 3 \end{cases}$

$\Rightarrow y'_x = \left(-F'_x\right) : F'_y = \dfrac{-(3x^2-3)}{3y^2+3} = \dfrac{1-x^2}{1+y^2}$, (**). Vì (*) $x = 0 \Rightarrow y = 0$, vì vậy:

$$\Rightarrow y'_x(0) = \frac{1-0^2}{1+0^2} = 1.$$

¤ **Cách 2**

Lấy đạo hàm hai vế theo của đẳng thức: $x^3 + y^3 + 3y = 3x \Rightarrow 3x^2 + 3y^2.y'_x + 3y'_x = 3$

$\Rightarrow \cancel{3}(y^2+1).y'_x = \cancel{3}(1-x^2) \Rightarrow y'_x = \dfrac{1-x^2}{1+y^2}$ $(\odot)$, cũng do (*): khi $x = 0 \Rightarrow y = 0$ nên từ

$(\odot)$ chúng ta có: $y'_x(0) = \dfrac{1-0^2}{1+0^2} = 1.$

⁂

ĐỀ BÀI TẬP
CHƯƠNG 4: ĐẠO HÀM -VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

Tìm các giới hạn đồng thời theo các biến					
TT	**ĐỀ RA**	**ĐS**	**TT**	**ĐỀ RA**	**ĐS**
4.1	$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	0	4.2	$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to2}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$	e^2
4.3	$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$	0	4.4	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$	$+\infty$
4.5	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}} \left(1+xy^2\right)^{\frac{1}{x^7+xy}}$	e^3	4.6	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}} \dfrac{\sqrt{x^2+\left(y-2\right)^2+1}-1}{x^2+\left(y-2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2}$
4.7	$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \dfrac{x+2y}{x^2-xy+2y^2}$	0	4.8	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$	0
4.9	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$	0	4.10	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0
Tìm các giới hạn lặp sau					
4.11	$\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right)$	1	4.12	$\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)$	1
4.13	$\lim\limits_{y\to2}\left(\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+y-x^3+y^2}{x-y}\right)$	-5	4.14	$\lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x\,y)}{x}\right)$	0
Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn của các hàm 2 biến sau					
4.15	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$	$\nexists$ GH	4.16	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$	$\nexists$ *GH*
4.17	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$	$\nexists$ GH	4.18	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}} \dfrac{\ln\left(x+y\right)}{y}$	$\nexists$ *GH*
Tính liên tục của hàm số 2 biến số					

4.19	Xét tính liên tục của hàm số: $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & khi\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ tại điểm (0,0).
4.20	Chứng minh rằng hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & khi\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & khi\ x^2+y^2=0\end{cases}$ liên tục tại điểm (0,0) theo mỗi biến, nhưng không liên tục đồng thời theo cả hai biến đó.
4.21	Xét tính liên tục của hàm số: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy} & khi\ xy\neq 0\\ 1 & khi\ xy=0\end{cases}$ theo tập hợp hai biến và theo từng biền số tại điểm O(0,0).
4.22	Với giá trị nào của a thì hàm số: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & khi\ (x,y)\neq(0,0)\\ a & khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ liên tục tại (0,0)? (<u>Đáp số</u>: a = 0)
4.23	Với giá trị nào của a thì hàm số: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & khi\ (x,y)\neq(0,0)\\ a & khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ liên tục tại điểm (0,0)? (<u>Đáp số</u>: a = 0)
4.24	Với giá trị nào của a thì hàm số: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & khi\ x^2+y^2\neq 0\\ a & khi\ x^2+y^2=0\end{cases}$ $(a\in\mathbb{R})$ liên tục tại điểm O(0,0)? (<u>Đáp số</u>: a = 0)
4.25	Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} & khi\ (x,y)\neq(0,0)\\ a & khi\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ liên tục tại điểm (0,0)? (<u>Đáp số</u>: a = 1)

Tính các đạo hàm riêng cấp 1 (cấp 2) và tính dz (hoặc d^2z)

4.26	Cho $z=\operatorname{arct}g(xy)$. Tính $z'_x,\ z'_y,\ dz.$	$dz=\dfrac{y}{1+x^2y^2}dx+\dfrac{x}{1+x^2y^2}dy$

4.27	Cho $z = \dfrac{x}{y} - e^x \operatorname{arc}tgy$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \left(\dfrac{1}{y} - e^x \arctan y\right)dx - \left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{e^x}{1+y^2}\right)dy$
4.28	Cho $z = x^y$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = y\,x^{y-1}dx + x^y \ln x dy$
4.29	Cho $z = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \left(\dfrac{1}{\sqrt{y}}dx - \dfrac{(x+a)}{2y.\sqrt{y}}dy\right)\cot\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$
4.30	Cho hàm số: $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}dy$
4.31	Cho $z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \dfrac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}}dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}dy$
4.32	Cho $z = e^{xe^y}$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = e^y e^{xe^y}dx + xe^y e^{xe^y}dy$
4.33	Cho $z = e^{e^{xy}}$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = ye^{xy}e^{e^{xy}}dx + xe^{xy}e^{e^{xy}}dy$
4.34	Cho $z = \sin\left(x^2+y^2\right)$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \left[2x\cos(x^2+y^2)dx + 2y\cos(x^2+y^2)dy\right]$
4.35	Cho $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Tính z'_x, z'_y, dz.	$dz = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$
4.36	Cho $z = e^x\cos(xy)$. Tính dz, d^2z.	$dz = \left[e^x\left(\cos(xy) - y\sin(xy)\right)dx - ye^x\sin(xy)dy\right]$
4.37	Cho $z = \sin(xy^2)$. Tính dz, d^2z.	$dz = y^2\cos(xy^2)dx + 2xy\cos(xy^2)dy$
	Tính đạo hàm các hàm ẩn sau	
4.38	Cho $x^3 + y^3 - 1 = 0$. Tính $y'_x(1,2)$.	$y'_x = -\dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow y'_x(1,2) = -\dfrac{1}{4}$
4.39	Cho $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Tìm $y'_x(a;a)$.	$y'_x = \dfrac{-4x^3y - y^4 + 2axy^2}{4y^3x + x^4 - 2ayx^2}$; $y'_x(a;a) = -1$.
4.40	Cho hàm số: $f(x,y) = \begin{cases} 1 & khi\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & khi\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ Chứng minh rằng $f(x,y)$ không liên tục tại điểm (0,0) nhưng tồn tại các đạo hàm riêng: $f'_x(0,0)$; $f'_y(0,0)$.	

4.41	Chứng minh rằng hàm số: $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2} & khi\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & khi\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ có các đạo hàm riêng hỗn hợp cấp 2 tại điểm (0,0), nhưng các đạo hàm hỗn hợp đó không bằng nhau.
4.42	Chứng minh rằng hàm số: $f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & khi\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & khi\ x = y = 0 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm O(0,0), nhưng có đạo hàm riêng tại điểm O(0,0).
4.43	Cho hàm số: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & khi\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & khi\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Tính $f'_x(0,0)$; $f'_y(0,0)$. Hàm có khả vi tại (0,0) hay không? Vì sao?
4.44	Chứng minh rằng hàm số: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & khi\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & khi\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ Có đạo hàm riêng tại điểm O(0,0), nhưng không khả vi tại điểm O(0,0).

-------------- Hết --------------

CHƯƠNG 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1.

1.1 Khái niệm phương trình vi phân – Cấp của một phương trình vi phân

♦ **Định nghĩa 1**

• *Phương trình vi phân là phương trình chứa hàm số chưa biết, biến số độc lập và các đạo hàm (hoặc vi phân) của hàm số chưa biết.*

• *Nếu hàm số chưa biết phụ thuộc vào một biến số độc lập thì phương trình vi phân được gọi là phương trình vi phân thường. Nếu hàm số chưa biết phụ thuộc vào nhiều biến số gọi là phương trình đạo hàm riêng.*

• *Cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình được gọi là cấp của phương* trình vi phân.

◈ **Ví dụ 1**

1) $x^2y' + 5xy = y^2$ là phương trình vi phân thường cấp 1.

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4xy\dfrac{dy}{dx} = x^2$ là phương trình vi phân thường cấp 2.

3) $y'^2 + y''.y''' = x$ là phương trình vi phân thường cấp 3.

4) $F(x, y, y', y'') = 0$ là dạng tổng quát của phương trình vi phân thường cấp 2.

5) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 1. Trong **§1** chúng ta chỉ xét các phương trình vi phân thường cấp 1, tức là phương trình dạng $F(x, y, y') = 0$ hoặc dưới dạng giải được đối với $y' = f(x, y)$.

1.2 Nghiệm - Nghiệm tổng quát - Nghiệm riêng của phương trình vi phân cấp 1

• *Hàm khả vi $y = \varphi(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân: $y' = f(x, y)$, nếu khi thay nó vào hàm chưa biết (ẩn hàm) của phương trình sẽ được đồng nhất thức.*

• *Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 1: $y' = f(x, y)$ trong miền D là hàm $y = \varphi(x, C)$ có các tính chất sau:*

- ***i)*** *Nó là nghiệm của phương trình đã cho với mọi giá trị của hằng số C bất kỳ thuộc một tập hợp nào đó.*
- ***ii)*** *Với mọi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ sao cho $(x_0, y_0) \in D$ chỉ có một giá trị duy nhất $C = C_0$ làm cho nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho.*

• *Mọi nghiệm $y = \varphi(x, C)$ ứng với giá trị cụ thể $C = C_0$ gọi là nghiệm riêng.*

• *Bài toán tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện ban* đầu $y(x_0) = y_0$ gọi là *bài toán Côsi.*

▼ **Chú ý 1**

• Đồ thị mỗi nghiệm $y = \varphi(x)$ của phương trình vi phân đã cho vẽ trên mặt phẳng xOy gọi là đường cong tích phân của phương trình này. Như vậy nghiệm tổng quát

$y = \varphi(x, C)$ trên mặt phẳng xOy tương ứng với một họ các đường cong tích phân phụ thuộc vào một tham số là hằng số bất kỳ C. Còn nghiệm riêng thỏa mãn điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ tương ứng với một đường cong đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ cho trước của họ đó.

• Tuy nhiên ta còn gặp những phương trình vi phân có các nghiệm không thể nhận được từ nghiệm tổng quát với bất kỳ giá trị C nào (kể cả $C = \pm\infty$). Nghiệm như vậy gọi là *nghiệm kỳ dị*. Ví dụ: Có thể thử lại rằng phương trình $y' = \sqrt{1-y^2}$ có nghiệm tổng quát $y = \sin(x + C)$. Đồng thời $y = 1$ cũng là nghiệm của phương trình này. Nhưng nghiệm $y = 1$ không nhận được từ nghiệm tổng quát với bất kỳ giá trị C nào, tức là *nghiệm kỳ dị*.

• Đồ thị của nghiệm kỳ dị là đường cong tích phân mà tại mỗi điểm của nó có tiếp tuyến chung với một trong các đường cong tích phân xác định bởi nghiệm tổng quát. Đường cong như vậy gọi là *hình bao của họ đường cong tích phân*.

•Quá trình tìm nghiệm của phương trình vi phân gọi là tích phân phương trình vi phân.

Nói chung, không có một phương pháp vạn năng nào để giải mọi phương trình vi phân và không phải phương trình vi phân nào cũng giải được. Mỗi lớp phương trình vi phân có một phương pháp giải đặc thù. Trong chương này nhằm giúp cho anh chị em sinh viên làm quen với khái niệm phương trình vi phân và sử dụng nó trong các môn học khác, về mặt lý thuyết chúng tôi chỉ giới thiệu một số dạng phương trình vi phân tương đối đơn giản, mà tập trung nhiều hơn vào việc trình bày các ví dụ về giải phương trình vi phân.

1.3 Phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp 1

1.3.1 Phương trình vi phân với biến số phân ly

♦ **Định nghĩa 2**

Phương trình dạng: $f(x)dx + g(y)dy = 0, (1)$ *gọi là phương trình với biến số phân ly.*

⁕ **Phương pháp giải**

Muốn tìm nghiệm của phương trình (1) chúng ta tích phân hai vế của (1) ta được nghiệm tổng quát: $\int f(x)dx + \int g(y)\,dy = C \ (C \in \mathbb{R})$

▼ **Chú ý 2**

Phương trình dạng $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0, (2)$. Có thể đưa phương trình (2) về phương trình (1) bằng cách chia hai vế của (2) cho $f_2(x).\, g_1(y) \neq 0$, ta được:

$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \dfrac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0, (3)$. Từ (3) chúng ta sẽ tìm được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho. Ngoài ra, nếu phương trinh $g_1(y) = 0$ có nghiệm $y = b$ thì $y = b$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

◈ **Ví dụ 2** Giải phương trình: $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

Giải

Chia hai vế của phương trình trên cho $\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \ \& \ y \neq \pm 1$, chúng ta được: $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0\Rightarrow\displaystyle\int\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=C$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)-\frac{1}{2}\int\left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}d(1-y^2)=C'$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{1-y^2}}{\frac{1}{2}}=C'\Rightarrow\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C,\ (*)$$

Ngoài nghiệm tổng quát ở $(*)$ thì các hàm số $y=\pm1\ (-1<x<1)$ là các *nghiệm kỳ dị* của phương trình vi phân đã cho.

1.3.2 <u>Phương trình vi phân thuần nhất (đẳng cấp)</u>

♦ **<u>Định nghĩa 3</u>**

Phương trình dạng: $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\left(hay\ \dfrac{dy}{dx}-f(x,y)=0\right)$ (4); *với* $f(x,y)$ *thỏa mãn điều kiện* $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y),\ (\forall\lambda\in\mathbb{R})$, *gọi là phương trình vi phân thuần nhất.*

⁕ **<u>Phương pháp giải</u>**

Biến đổi biểu thức của $f(x,y)$ sao cho xuất hiện tỉ số $\dfrac{y}{x}$, tiếp theo chúng ta đặt $u=\dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow y=ux\Rightarrow\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=u+\dfrac{du}{dx}x$ (5). Thế $y=ux$ và $\dfrac{dy}{dx}$ từ (5) vào phương trình (4) và chúng ta sẽ được một phương trình biến số phân ly theo x và u. Giải phương trình biến số phân ly này ta sẽ tìm được công thức nghiệm theo x và u. Cuối cùng thay $u=\dfrac{y}{x}$ vào công thức nghiệm vừa tìm được, chúng ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình (4).

◈ **<u>Ví dụ 3</u>** Giải phương trình vi phân sau : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ (6)

<u>Giải</u>

Vì: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Đặt $u=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=ux\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}x+u.$

Khi đó: $(6)\Leftrightarrow\dfrac{du}{dx}x+u=\dfrac{2u}{1-u^2}\Leftrightarrow\dfrac{dx}{x}+\dfrac{u^2-1}{u^3+u}du=0\Leftrightarrow\displaystyle\int\dfrac{dx}{x}+\int\dfrac{u^2-1}{u(u^2+1)}du=C'$

$$\Leftrightarrow\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{2u}{(u^2+1)}-\frac{1}{u}\right)du=C'\Leftrightarrow\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d(u^2+1)}{(u^2+1)}-\int\frac{du}{u}=C'$$

$$\Leftrightarrow\ln|x|+\ln(u^2+1)-\ln|u|=\ln|C|\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x(u^2+1)}{u}\right|=\ln|C|\Leftrightarrow\frac{x(u^2+1)}{u}=C\ (7).$$

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ vào (7) ta có $x^2+y^2=Cy.$ Ngoài ra $y=0$ cũng là nghiệm của phương

Thay $u=\dfrac{y}{x}$ vào (7) ta có $x^2+y^2=Cy.$ Ngoài ra $y=0$ cũng là nghiệm của phương trình (6).

▼ **Chú ý 3**

1) Xét phương trình vi phân: $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),(8)$

• Nếu $c=c_1=0$ thì phương trình (8) là phương trình thuần nhất, mà ta đã biết cách giải.

• Nếu ít nhất một trong 2 số c hoặc c_1 khác 0 và nếu $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$, thì phương trình (8) có thể đưa về phương trình thuần nhất bằng cách:

đặt $\begin{cases} x=x_1+h \\ y=y_1+k \end{cases}$ thì phương trình (8) trở thành: $\dfrac{dy_1}{dx_1}=f\left(\dfrac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c}\right)$ (9)

Tiếp theo ta giải hệ phương trình $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$ để tìm $h,\ k.$ Khi đó phương trình (9) trở thành phương trình thuần nhất: $\dfrac{dy_1}{dx_1}=f\left(\dfrac{a\,x_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}\right)$ mà ta đã biết cách giải.

• Nếu: $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\lambda\Rightarrow\begin{cases} a=\lambda a_1 \\ b=\lambda b_1 \end{cases}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=y'=f\left(\dfrac{\lambda(a_1x+b_1y)+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

$=g(a_1x+b_1y)$ (10). Đến đây nếu đặt $z=a_1x+b_1y\ \Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=a_1+b_1y'$.Do (10) nên ta có: $y'=g(a_1x+b_1y)=g(z)\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=a_1+b_1g(z)$ (11). Phương trình (11) là phương trình biến số phân ly mà ta đã biết cách giải.

◈ **Ví dụ 4** Giải phương trình vi phân sau: $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0,(12)$

Giải

Từ phương trình (12) chúng ta có thể viết lại như sau:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-y+2}{x-y+4}\ (13)\Rightarrow\begin{cases} a=-1,\ b=-1,\ c=2 \\ a_1=1,\ b_1=-1, c_1=4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -h-k+2=0 \\ h-k+4=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} h=-1 \\ k=3 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} x=x_1-1 \\ y=y_1+3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} dx=dx_1,\ dy=dy_1 \\ x_1=x+1 \\ y_1=y-3 \end{cases}$ (14). Nếu thay (14) vào (13) ta được

$\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{-x_1-y_1}{x_1-y_1}$ (15). Đây là phương trình vi phân thuần nhất. Muốn giải phương trình (15) ta tiếp tục đặt: $y_1=u\,x_1\Rightarrow\dfrac{dy_1}{dx_1}=x_1\dfrac{du}{dx_1}+u,(16)$. Từ (15) và (16) ta có:

$$x_1\frac{du}{dx_1}+u=\frac{-x_1-u\,x_1}{x_1-u\,x_1}=\frac{-1-u}{1-u}\Rightarrow\frac{x_1}{dx_1}du=\frac{-u(1-u)-u-1}{1-u}=\frac{u^2-2u-1}{1-u}$$

$$\Rightarrow\frac{dx_1}{x_1}=\frac{(1-u)}{u^2-2u-1}du=-\frac{1}{2}.\frac{(2u-2)}{u^2-2u-1}du=-\frac{1}{2}.\frac{d(u^2-2u-1)}{u^2-2u-1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx_1}{x_1}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2-2u-1)}{u^2-2u-1}\Rightarrow\ln\left|x_1\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|u^2-2u-1\right|+\ln\left|C'\right|$$

$\Leftrightarrow \ln x_1^2+\ln\left|u^2-2u-1\right|=\ln\left|C_1\right|\Leftrightarrow x_1^2\left(\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2-2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-1\right)=C_1,(17).$ Do (14) nên

$$(17)\Leftrightarrow(x+1)^2\left(\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2-2\left(\frac{y-3}{x+1}\right)-1\right)=C_1$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2\left(\frac{(y-3)^2-2(y-3)(x+1)-(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)=C_1$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^2\left(\frac{(y-3)^2-2(y-3)(x+1)-(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)=C_1$$

$$\Leftrightarrow(y-3)^2-2(y-3)(x+1)-(x+1)^2=C_1$$

$$\Leftrightarrow y^2-6y+9-2(xy+y-3x-3)-(x^2+2x+1)=C_1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2xy-y^2-4x+8y=C_1+14$$

$\Leftrightarrow x^2+2xy-y^2-4x+8y=C,$ (Với $\mathrm{C}=\mathrm{C}_1+14$).

◈ **<u>Ví dụ 5</u>** Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x-y-1}{2x+2y-1}$

<u>Giải</u>

Vì hệ phương trình : $\begin{cases}h+k+1=0\\2h+2k-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h+k=-1\\h+k=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (*). Hệ (*) vô nghiệm,

nên từ phương trình $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x-y-1}{2x+2y-1}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-(x+y)-1}{2(x+y)-1}$, chúng ta có thể đặt biến mới như sau: $z=x+y\Rightarrow y=z-x\Rightarrow dy=dz-dx$. Phương trình đã cho có dạng:

$$\frac{dz-dx}{dx}=\frac{-z-1}{2z-1}\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}-1=\frac{-z-1}{2z-1}\Leftrightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{-z-1}{2z-1}+1=\frac{z-2}{2z-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2z-1)}{z-2}dz=\frac{z-2}{2z-1}\Leftrightarrow\frac{(2z-1)}{z-2}dz=dx\Leftrightarrow\left(2+\frac{3}{z-2}\right)dz=dx\Rightarrow\int\left(2+\frac{3}{z-2}\right)dz$$

$$=\int dx\Leftrightarrow 2z+3\ln\left|z-2\right|=x+C\Leftrightarrow 2(x+y)-3\ln\left|x+y-2\right|-x=C$$

$\Leftrightarrow x+2y+3\ln\left|x+y-2\right|=C.$Ngoài ra khi $z=2$ thì $x+y=2$ cũng là một tích phân của phương trình đã cho.

1.3.3 Phương trình vi phân hoàn chỉnh

♦ **Định nghĩa 4**

Phương trình $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, (18) *được gọi là phương trình vi phân hoàn chỉnh nếu vế trái của phương trình (18) là vi phân của một hàm* $U(x,y)$ *nào đó, nghĩa là:* $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=dU(x,y)$.

Nghiệm của phương trình (18) là $U(x,y)=C$.

✡ **Định lý 1**

Giả sử các hàm số $M(x,y);\ N(x,y)$ *có các đạo hàm riêng* M'_y & N'_x *liên tục trong một miền đơn liên* D. *Điều kiện cần và đủ để phương trình (18) là một phương trình vi phân hoàn chỉnh là* $M'_y=N'_x$ *khắp nơi trong* D.

⋇ **Phương pháp giải**

Tìm nghiệm của phương trình (18) bằng phương pháp tích phân bất định:

◈ **Ví dụ 6** Giải phương trình vi phân: $(4xy^2+y)dx+(4x^2y+x)dy=0$, (19)

Giải

Vì $\begin{cases}M(x,y)=4xy^2+y\\ N(x,y)=4x^2y+x\end{cases}\Rightarrow M'_y=8xy+1=N'_x\Rightarrow$ phương trình vi phân (19) là phương trình vi phân hoàn chỉnh.Theo bài ra thì ta phải tìm một hàm $U(x,y)$ sao cho:

$dU(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy\Leftrightarrow U'_xdx+U'_ydy=(4xy^2+y)dx+(4x^2y+x)dy$

$\Leftrightarrow\begin{cases}U'_x=4xy^2+y\ \ (20)\\ U'_y=4x^2y+x\ \ (21)\end{cases}$. Từ (20) muốn tìm hàm $U(x,y)$ chúng ta có thể lấy tích phân hai vế theo x:

$\int dU=\int(4xy^2+y)dx\Rightarrow U(x,y)=2x^2y^2+xy+\varphi(y)$

$\Rightarrow U'_y=4x^2y+x+\varphi'(y)$ (22). Từ 2 đẳng thức (21); (22) ta có:

$\cancel{4x^2y+x}+\varphi'(y)=\cancel{4x^2y+x}+\varphi'(y)\Rightarrow\varphi'(y)=0$

$\Rightarrow\varphi(y)=C\in\mathbb{R}$.Chọn $C=0\Rightarrow\varphi(y)=0\Rightarrow U(x,y)=2x^2y^2+xy$

$\Rightarrow 2x^2y^2+xy=C$ là nghiệm tổng quát của phương trình (19).

▼ **Chú ý 4**

Với cách làm tương tự chúng ta có thể xuất phát từ đẳng thức (21) cũng tìm được hàm $U(x,y)=2x^2y^2+xy$ như trên.

Ví dụ 7* Giải phương trình vi phân: $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xy)dy=0$

Đáp số: $x\sin xy=C,\forall C\in\mathbb{R}$.

◈ **Ví dụ 8** Giải phương trình vi phân: $(x^3+xy^2)dx+(y^3+yx^2)dy = 0.$

Đáp số: $x^4+2(xy)^2+y^4=C, \forall C\in\mathbb{R}.$

d) Thừa số tích phân

1) Đặt vấn đề

Trong một số trường hợp phương trình $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ không phải là phương trình vi phân hoàn chỉnh, nhưng ta có thể tìm được một hàm số hai biến $\mu(x,y)$ sao cho khi ta nhân hàm số này vào hai vế của phương trình:

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ thì ta lại được một phương trình vi phân hoàn chỉnh, tức là

$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)=0$, (23)

⁕ **Phương pháp tìm thừa số tích phân**

Phương trình (23) là một phương trình vi phân hoàn chỉnh khi và chỉ khi :

$$\left(\mu M\right)'_y=\left(\mu N\right)'_x \Leftrightarrow \left(M'_y-N'_x\right)\mu = N\mu'_x-M\mu'_y \Rightarrow M'_y-N'_x=\frac{N}{\mu}.\mu'_x-\frac{M}{\mu}.\mu'_y$$

$\Leftrightarrow M'_y-N'_x = N(\ln\mu)'_x-M(\ln\mu)'_y$ (24). Phương trình (24) là phương trình đạo hàm riêng, dựa vào phương trình này chúng ta có thể tìm được thừa số tích phân μ.

Sau đây chúng ta sẽ nêu lên một số trường hợp đặc biệt có thể tìm được thừa số tích phân một cách dễ dàng. Đó là trường hợp phương trình $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc và x hoặc chỉ phụ thuộc vào y:

• Nếu $\mu=\mu(x)\Rightarrow\left(\ln\mu\right)'_y=0$ phương trình (24) trở thành: $\left(\ln\mu\right)'_x=\dfrac{M'_y-N'_x}{N}$, (25)

Rõ ràng điều kiện cần và đủ để phương trình $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào x, là vế phải của (25) chỉ phụ thuộc x.

• Nếu $\mu=\mu(y)\Rightarrow\left(\ln\mu\right)'_x=0$ phương trình (24) trở thành: $\left(\ln\mu\right)'_y=\dfrac{N'_x-M'_y}{N}$, (26)

Rõ ràng điều kiện cần và đủ để phương trình $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ có thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào y là vế phải của (26) chỉ phụ thuộc y.

◈ **Ví dụ 9**

Giải phương trình vi phân: $(x+y^2)\,dx-2xy\,dy = 0,$(27)

Giải

$$Vì: \begin{cases} M(x,y) = x+y^2 \\ N(x,y) = -2xy \end{cases} \Rightarrow\left(\ln\mu\right)'_x=\frac{M'_y-N'_x}{N}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}\Rightarrow\frac{d(\ln\mu)}{dx}=-\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow d(\ln\mu)=-2\frac{dx}{x}\Rightarrow\int d(\ln\mu)=-2\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\ln\mu=-2\ln\left|x\right|=\ln\frac{1}{x^2}\Rightarrow\mu=\frac{1}{x^2}.$$

Nhân 2 vế của phương trình (27) với thừa số tích phân $\mu = \dfrac{1}{x^2}$,ta có

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-2\frac{xy}{x^2}dy=0\Leftrightarrow\frac{dx}{x}+\frac{y^2}{x^2}dx-2\frac{y}{x}dy=0\Leftrightarrow d\left(\ln\left|x\right|-\frac{y^2}{x}\right)=0$$

$\Rightarrow \int d\left(\ln\left|x\right| - \frac{y^2}{x}\right) = C'$. Chọn $C' = 0 \Rightarrow \ln\left|x\right| - \frac{y^2}{x} = 0 \Rightarrow \ln\left|x\right| = \frac{y^2}{x}$

$\Rightarrow x = C\,e^{\frac{y^2}{x}}, (\forall C \in \mathbb{R})$.

◈ **<u>Ví dụ 10</u>** Giải phương trình vi phân: $2xy\ln y\,dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$ (28)

<u>Giải</u>

$$\begin{cases} M = 2xy\ln y \\ N = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1} \end{cases} \Rightarrow \left(\ln\mu\right)'_y = \frac{N'_x - M'_y}{M} = \frac{2x - 2x(\ln x + 1)}{2xy\ln y} = -\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\ln\mu)}{dy} = -\frac{1}{y} \Rightarrow d(\ln\mu) = -\frac{dy}{x} \Rightarrow \int d(\ln\mu) = -\int\frac{dy}{y}$$

$\Leftrightarrow \ln\mu = -\ln\left|y\right| = \ln\frac{1}{y} \Rightarrow \mu = \frac{1}{y}$. Nhân 2 vế của phương trình (28) với thừa số tích phân $\mu = \frac{1}{y}$ ta được phương trình: $\frac{2xy\ln y}{y}dx + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2x\ln y dx + \frac{x^2}{y}dy\right) + y\sqrt{y^2+1}\,dy = 0$$

$$\Leftrightarrow d\left(x^2\ln y\right) + y\sqrt{y^2+1}\,dy = 0 \Rightarrow \int d\left(x^2\ln y\right) + \frac{1}{2}\int\left(y^2+1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(y^2+1\right) = C$$

Vậy: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (28) là: $x^2\ln y + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^{\frac{3}{2}} = C$.

1.3.4 <u>Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1</u>

♦ **<u>Định nghĩa 5</u>**

⊕ *Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất là phương trình vi phân có dạng:* $y' + p(x)y = q(x)$, (29) *trong đó* $p(x)$; $q(x)$ *là các hàm liên tục trong khoảng* (a,b).

• *Người ta chứng minh được nghiệm tổng quát của phương trình* $y' + p(x)y = q(x)$ *được tính theo công thức:* $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$, $C \in \mathbb{R}$

⊕ *Phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất là phương trình vi phân có dạng:* $y' + p(x)y = 0$

•*Người ta chứng minh được nghiệm tổng quát của phương trình* $y' + p(x)y = 0$ *được tính theo công thức:* $\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}, \forall C \in \mathbb{R}}$

⋇ **<u>Phương pháp giải phương trình vi phân tuyến tính cấp 1</u>**

⊕ **<u>Cách 1</u>** Tìm nghiệm của phương trình $y' + p(x)y = q(x)$ bằng cách dựa vào công thức:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right);\ \forall C \in \mathbb{R}$$

⊕ **Cách 2**

• Trước hết dùng công thức nghiệm $y = Ce^{-\int p(x)dx}, \forall C \in \mathbb{R}$, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất: $y' + p(x)y = 0$.

• Tiếp theo, chúng ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất: $y' + p(x)y = q(x)$. Muốn vậy, trong công thức $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ (*) ta coi $C = C(x)$ là hàm của x mà ta cần xác định. Tiếp theo từ (*) ta tính y'. Thay y và y' vừa tìm được vào phương trình $y' + p(x)y = q(x)$, tiếp tục biến đổi chúng ta sẽ tìm được C. Cuối cùng thay C vừa tìm được vào công thức (*) chúng ta sẽ được nghiệm tổng quát của phương trình $y' + p(x)y = q(x)$.

◈ **Ví dụ** Giải phương trình vi phân: $y = x(y' - x\cos x)$, (30)

Giải

⊕ **Cách 1**

Từ: $y = x(y' - x\cos x) \Rightarrow xy' - y = x^2\cos x \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$ (31)

Áp dụng công thức nghiệm: $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int x\cos x\, e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$

Ta có: $p(x) = -\frac{1}{x};\ q(x) = x\cos x \Rightarrow y = e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left(\int x\cos x\, e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx + C\right)$

$$y = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int x\cos x\, e^{-\int\frac{dx}{x}}dx + C\right) = e^{\ln|x|}\left(\int x\cos x\, e^{-\ln|x|}dx + C\right)$$

$$= e^{\ln|x|}\left(\int x\cos x\, e^{\ln\frac{1}{|x|}}dx + C\right) \Rightarrow y = |x|\left(\int x.\frac{1}{|x|}\cos x\,dx + C\right)$$

$$\Leftrightarrow y = x\int \cancel{x}.\frac{1}{\cancel{x}}\cos x\,dx + C|x| \Rightarrow y = x\int\cos x\,dx + Cx = x\sin x + Cx, \forall C \in \mathbb{R}.$$

⊕ **Cách 2** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 0$, bằng cách áp dụng công thức $y = C_1e^{-\int p(x)dx} = C_1e^{\int\frac{dx}{x}} = C_1e^{\ln|x|} = C_1x$, (+)

$\Rightarrow y' = C_1 + x\frac{dC_1}{dx}$. Thay y, y' vừa tìm được vào phương trình (31) ta có:

$$C_1 + x\frac{dC_1}{dx} - \frac{C_1.\cancel{x}}{\cancel{x}} = x\cos x \Leftrightarrow \frac{dC_1}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dC_1 = \cos x dx \Rightarrow \int dC_1 = \int\cos x dx$$

$\Rightarrow C_1 = \sin x + C$. Lại thay $C_1 = \sin x + C$ vào (+) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (30) là: $y = x(\sin x + C) = x\sin x + Cx$, $(\forall C \in \mathbb{R})$

1.3.5 Phương trình vi phân Bernoulli

♦ **Định nghĩa 6**

Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng: $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{\alpha}\,(31)$ *trong đó* $p(x)$ *và* $q(x)$ *là các hàm số liên tục trên khoảng* (a,b).

⁎ **Phương pháp giải**

- Khi $\alpha=0$ hoặc $\alpha=1$ thì phương trình (31) trở thành phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.
- Khi $\alpha\neq 0$ & $\alpha\neq 1$ thì ta chia 2 vế của phương trình (31) cho y^{α} $(y\neq 0)$ ta được:

$y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)$, (32). Chúng ta đặt $z=y^{1-\alpha}\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^{\alpha}}{(1-\alpha)}.\dfrac{dz}{dx}$, (33). Thay $\dfrac{dy}{dx}$ từ (33) vào (32) ta được:

$$\frac{y^{\alpha}.y^{-\alpha}}{(1-\alpha)}.\frac{dz}{dx}+p(x)y^{1-\alpha}=q(x)\Leftrightarrow \frac{dz}{dx}+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha).q(x)\ (34).$$

Phương trình (34) là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 theo z, mà chúng ta đã biết cách giải.

◈ **Ví dụ 12** Giải phương trình vi phân sau: $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^2.\sqrt{y}$, (35)

Giải

Phương trình (35) là phương trình Bernoulli. Chia cả 2 vế của phương trình (35) cho $xy^{\frac{1}{2}}\neq 0$ $(\Rightarrow x\neq 0$ & $y\neq 0)$ ta được $y^{-\frac{1}{2}}.\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}.y^{\frac{1}{2}}=x$ (36). Đặt ẩn mới $z=y^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=2y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dz}{dx}$ (37). Thay $\dfrac{dy}{dx}$ từ (37) vào (36) chúng ta được:

$$y^{-\frac{1}{2}}\left(2y^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{dx}\right)-\frac{4}{x}.z=x\Leftrightarrow 2\frac{dz}{dx}-\frac{4}{x}.z=x\Leftrightarrow \frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}.z=\frac{x}{2},\ (38).$$

Để giải phương trình (38) ta áp dụng công thức nghiệm đã biết:

$$z=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\Rightarrow z=e^{2\int\frac{dx}{x}}\left(\frac{1}{2}\int xe^{-2\int\frac{dx}{x}}dx+C\right)$$

$$\Rightarrow z=e^{\ln x^2}\left(\frac{1}{2}\int x\,e^{\ln\frac{1}{x^2}}dx+C\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\int x\frac{1}{x^2}dx+C\right)\Rightarrow z=x^2\left(\int\frac{dx}{x}+C\right)$$

$\Rightarrow z=x^2\left(\ln|x|+C\right)$. **Vì:** $z=y^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y=z^2\Rightarrow y=x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2, \forall C\in\mathbb{R}.$

§2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

2.1 Một số khái niệm mở đầu

♦ **Định nghĩa 8**

Phương trình vi phân cấp 2 là phương trình có dạng: $F(x,y,y',y'')=0$ (1)*(hoặc dưới dạng giải được đối với* y'' : $y''=f(x,y,y')$*)*

♦ **<u>Định nghĩa 9</u>** (Nghiệm của phương trình vi phân cấp 2)

• *Ta gọi <u>nghiệm tổng quát</u> của phương trình vi phân cấp 2:* $F(x,y,y',y'')=0$ *là hàm số:* $y=\varphi(x,C_1,C_2)$, *(* $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$ *) thỏa mãn phương trình vi phân ấy.*

• *Hàm số* $y=\varphi(x,\, C_1^0,\, C_2^0)$ *<u>có được từ nghiệm tổng quát</u> bằng cách cho những hằng số tùy ý các giá trị cụ thể* $C_1^0,\, C_2^0$ *được gọi là <u>nghiệm riêng</u> của phương trình vi phân* $F(x,y,y',y'')=0$.

• *Phương trình* $\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$ *cho ta <u>mối liên hệ giữa biến độc lập và nghiệm tổng quát</u> của phương trình vi phân cấp 2 gọi là <u>tích phân tổng quát</u> của nó.*

• *Nếu cho* $C_1=C_1^0,\, C_2=C_2^0$ *ta được phương trình* $\Phi(x,\, y, C_1^o,\, C_2^o)=0$ *gọi là tích phân riêng của phương trình vi phân nói trên.*

2.2 <u>Định lý sự tồn tại và duy nhất nghiệm</u>

✡ **<u>Định lý 2</u>**

Nếu trong phương trình $y''=f(x,y,y')$, *hàm* $f(x,y,y')$ *liên tục trong một miền nào đó chứa điểm* (x_o,y_o,y'_o) *thì tồn tại một nghiệm* $y=f(x)$ *của phương trình đó, nghiệm ấy và đạo hàm của nó lấy tại* $x=x_0$ *những giá trị cho trước* $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0$.

Ngoài ra nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial y'}$ *cũng liên tục thì <u>nghiệm ấy là duy nhất</u>.*

• *Điều kiện để* y *và* y' *lấy tại* $x=x_0$ *các giá trị cho trước* $y_0,\ y'_0$ *gọi là <u>điều kiện đầu</u> và người ta thường viết những điều kiện ấy như sau:* $y\Big|_{x=x_o}=y_o;\ y'\Big|_{x=x_o}=y'_o$.

2.3 <u>Phương trình cấp 2 giảm cấp được</u>.

2.3.1 <u>Vế phải của phương trình không phụ thuộc vào</u> y và y' : $y''=f(x)$ (2)

⁕ **<u>Phương pháp giải</u>**

Vì: $y''=\left(y'\right)'$ nên từ $y''=f(x)\Rightarrow(y')'=f(x)\Rightarrow y'=\int f(x)dx+C_1$

$\Rightarrow y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2,\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

◈ **<u>Ví dụ 15</u>**

Tìm nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình $y''=\sin x$ thỏa mãn các điều kiện đầu: $y\Big|_{x=0}=0;\ y'\Big|_{x=0}=1.$

<u>Giải</u>

Theo cách giải ở trên ta có: $y'=\int\sin x\,dx+C_1\Rightarrow y=\int\left(-\cos x\right)dx+C_1x+C_2$ $=-\sin x+C_1x+C_2$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình $y''=\sin x$ là:

$y = -\sin x + C_1 x + C_2$. Vì $y\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow -\sin 0 + C_1 0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$. Mặt khác

Từ $y = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow y' = -\cos x + C_1$. Vì $y'\Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow -\cos 0 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = 2$

Vậy nghiệm riêng cần tìm là: $y = -\sin x + 2x$.

2.3.2 Vế phải của phương trình không chứa y: $y'' = f(x, y')$ (3)

⁕ **Phương pháp giải**

Đặt: $y' = p \Rightarrow y'' = p'$, khi đó phương trình (3) có dạng $p' = f(x, p)$(4).Phương trình (4) là một phương trình vi phân cấp 1. Giả sử phương trình (4) có nghiệm tổng quát là $p = \varphi(x, C_1)$. Vì $y' = p \Rightarrow y' = \varphi(x, C_1) \Rightarrow y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$.

◈ **Ví dụ 16** $y'' = x - \dfrac{y'}{x}$ (5)

Giải

Đặt: $y' = p \Rightarrow y'' = p' \Rightarrow$ phương trình đã cho có dạng $p' = x - \dfrac{p}{x} \Leftrightarrow p' + \dfrac{p}{x} = x$, (6)

Để giải phương trình $p' + \dfrac{p}{x} = x$, chúng ta có thể áp dụng công thức:

$$p = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left(\int x e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C_1\right) = e^{-\ln|x|}\left(\int x e^{\ln|x|} dx + C_1\right) = e^{\ln\frac{1}{|x|}}\left(\int x e^{\ln|x|} dx + C_1\right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{|x|}\left(\int x|x|\,dx + C_1\right) = \frac{1}{|x|}\int x|x|\,dx + \frac{C_1}{|x|} \Leftrightarrow p = \frac{1}{x}\int x^2 dx + \frac{C_1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

Vì: $y' = p \Rightarrow y' = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C_1}{x} \Rightarrow y = \dfrac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$.

2.3.3 Vế phải của phương trình không chứa x : $y'' = f(y, y')$, (7)

⁕ **Phương pháp giải**

Đặt $y' = p$ xem p là hàm của y và y là hàm của x, ta có: $y'' = \dfrac{dp}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$. Khi đó phương trình(7) có dạng $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$ (8), đây là phương trình tuyến tính cấp 1 theo p mà chúng ta đã biết cách giải. Nếu phương trình (8) có nghiệm $p = \varphi(y, C_1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1) \Leftrightarrow \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình (7).

◈ **Ví dụ 17** Giải phương trình vi phân sau: $2yy'' + y'^2 = 0$ (9)

Giải

Đặt: $y' = p$, xem p là một hàm của y ta có: $y'' = p\dfrac{dp}{dy} \Rightarrow$ phương trình (9) có dạng:

$$2py\frac{dp}{dy}+p^2=0\Rightarrow p\left(2y\frac{dp}{dy}+p\right)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=0 \\ 2y\dfrac{dp}{dy}+p=0\end{array}\right.$$

• Nếu $y'=0\Rightarrow y=C$ (+)

• Nếu $2y\dfrac{dp}{dy}+p=0\Rightarrow\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dy}{2y}\Rightarrow\displaystyle\int\frac{dp}{p}=-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\ln|p|=-\frac{1}{2}\ln|y|+\ln C_0$

$$\Rightarrow p=\frac{C_0}{\sqrt{y}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{C_0}{\sqrt{y}}\Rightarrow\sqrt{y}\,dy=C_0\,dx\Rightarrow\int\sqrt{y}\,dy=\int C_0\,dx\Rightarrow y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2$$

(với $C_1=\dfrac{3}{2}C_0$). Nếu chọn $C_1=0$ ta được họ nghiệm (+). Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (9) là: $y^{\frac{3}{2}}=C_1x+C_2$.

2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số.

2.4.1 Một số khái niệm

♦ **Định nghĩa 10**

• *Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số (hằng) không thuần nhất là phương trình có dạng:* $y''+py'+qy=f(x)$ (10), *trong đó* p, q *là các hằng số, còn* $f(x)$ *là một hàm số của biến độc lập* x.

• *Phương trình* $y''+py'+qy=0$ (11) *gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (10).*

• *Hai nghiệm* y_1, y_2 *của phương trình (11) gọi là độc lập tuyến tính nếu* $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const$

Trong trường hợp $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=const$ *thì 2 nghiệm* y_1, y_2 *gọi là phụ thuộc tuyến tính.*

◈ **Ví dụ 18**

a) $y''+5y'+7y=3x+2$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng không thuần nhất

b) $y''+2y'+15y=0$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng thuần nhất.

c) Giả sử $y_1=e^{2x}$, $y_1=e^{3x}$ là các nghiệm của một phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng nào đó. Ta thấy $\Rightarrow\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}=e^{-x}\neq const\Rightarrow y_1, y_2$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính (đltt).

• Giả sử $y_1'=e^x$, $y_2'=3e^x$ là các nghiệm của một phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng nào đó. Ta thấy $\Rightarrow\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^x}{3e^x}=\dfrac{1}{3}=const\Rightarrow y_1, y_2$ là hai nghiệm phụ thuộc tuyến tính (pttt).

✡ **<u>Định lý 3</u>**

Nếu $y_1,\ y_2$ *là hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất:* $y'' + p\,y' + q\,y = 0,$ *thì* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất đã cho.*

▼ **<u>Chú ý 7</u>**

Nếu $y_1,\ y_2$ là hai nghiệm (pttt) của phương trình $y'' + p\,y' + qy = 0$ thì ta có $y_1 = ky_2$ (trong đó $k \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = \underbrace{(C_1 k + C_2)}_{C} y_2 = C\,y_2 \Rightarrow y$ chỉ phụ thuộc một hằng số C tùy ý $\Rightarrow y = Cy_2$ không thể là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất (11). Vì vậy: Trong định lý 3 điều kiện y_1, y_2 là hai nghiệm (*đltt*) là rất quan trọng.

✡ **<u>Định lý 4</u>**

Nếu y_0 *là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất:* $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ *và* $\overline{y}$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất* $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ *thì* $y = y_0 + \overline{y}$ *là nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất*:

$y'' + p\,y' + q\,y = f(x).$

✡ **<u>Định lý 5</u>** (***Nguyên lý chồng chất nghiệm***)

Cho phương trình vi phân không thuần nhất $y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x)$. *Nếu* y_1 *là nghiệm riêng của phương trình* $y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x)$ *và* y_2 *là nghiệm riêng của phương trình* $y'' + p\,y' + q\,y = f_2(x)$ *thì* $y_1 + y_2$ *là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất* $y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x)$.

▼ **<u>Chú ý 8</u>**

Nếu $p,\ q$ trong phương trình (10) là các hàm của x thì các định lý trên vẫn đúng.

2.4.2 <u>Phương pháp giải phương trình tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng thuần nhất</u>

⁕ **<u>Phương pháp giải</u>**

- Theo **<u>Định lý 3</u>** ở trên muốn tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (11) Ta chỉ cần tìm hai nghiệm (đltt) của nó. Chúng ta sẽ tìm nghiệm riêng của (11) dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là một hằng số nào đó cần xác định. Từ $y = e^{kx} \Rightarrow y' = ke^{kx}$ $y'' = k^2 e^{kx}$. Thay $y,\ y',\ y''$ vào (11) chúng ta được $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$.

Vì $e^{kx} \neq 0$, nên từ phương trình $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$ chúng ta có:

$k^2 + pk + q = 0, (12)$. Vậy nếu k thỏa mãn phương trình (12) thì $y = e^{kx}$ là nghiệm riêng của phương trình thuần nhất $y'' + p\,y' + q\,y = 0$.

- Phương trình $k^2 + pk + q = 0$ được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$. Như vậy nghiệm riêng của phương trình (11)phụ thuộc vào nghiệm của phương trình (12). Nhưng phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ là *một phương trình đại số bậc hai* có hai nghiệm k_1, k_2 trong các trường hợp sau đây:

1) *Nếu phương trình (12) có hai nghiệm $k_1 \neq k_2$ thì phương trình thuần nhất (11) có nghiệm tổng quát:* $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ $\left(\forall\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right)$

◈ **<u>Ví dụ 19</u>**

Giải phương trình vi phân : $y'' - 6y' + 8y = 0$

<u>Giải</u>

Phương trình đặc trưng $k^2 - 6k + 8 = 0$ có hai nghiệm $k_1 = 2, k_2 = 4$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - 6y' + 8y = 0$ là $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$, $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

2) *Nếu phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ có hai nghiệm trùng nhau $k_1 = k_2$ thì phương trình thuần nhất (11) là* $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$, $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

◈ **<u>Ví dụ 20</u>**

Giải phương trình sau: $y'' + 4y' + 4y = 0$, (<u>Đs</u>: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$)

3) *Nếu phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp: $k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$ thì phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$ có nghiệm tổng quát:* $y = C_1 e^{\alpha x} c\text{os}\, \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$, $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

◈ **<u>Ví dụ 21</u>**

Cho phương trình $y'' + 2y' + 4y = 0$, (13). Tìm một nghiệm riêng của phương trình đã cho thỏa mãn các điều kiện đầu $y\Big|_{x=0} = 1,\ y'\Big|_{x=0} = 1$.

<u>Giải</u>

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 2k + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1 + \sqrt{3}i \vee k_2 = -1 - \sqrt{3}i$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + 2y' + 4y = 0$ có dạng sau:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) \Rightarrow y' = e^{-x}\left[(-C_1 + \sqrt{3}\,C_2)\cos\sqrt{3}x - (\sqrt{3}C_1 + C_2)\sin\sqrt{3}x\right]$$

Vì: $y\Big|_{x=0} = 1,\ y'\Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 + \sqrt{3}\,C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$ nghiệm riêng của (13) là: $y = \dfrac{1}{3}(3\cos\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$.

2.4.2 <u>Các phương pháp giải phương trình tuyến tính cấp 2 có hệ số hằng không thuần nhất</u>.

※ **<u>Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange</u>**

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange để giải phương trình vi phân không thuần nhất $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$, *trong đó* $p, q \in \mathbb{R}$ *là phương pháp dựa trên định lý sau:*

✡ **Định lý 6**

Nếu $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:* $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ *thì nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ *là* $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, *trong đó* $C_1(x)$ & $C_2(x)$ *là nghiệm của hệ:* $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$.

▼ **Chú ý 9**

Nếu p, q trong phương trình $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ là các hàm của x thì Định lý 6 vẫn đúng.

◈ **Ví dụ 22** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Giải

Trước hết ta hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow d\left(\ln|y'|\right) = d\left(\ln|x|\right) \Rightarrow \int d\left(\ln|y'|\right) = \int d\left(\ln|x|\right) \Rightarrow \ln|y'| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$= \ln|Cx| \Rightarrow y' = Cx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = Cx \Rightarrow dy = Cx\,dx \Rightarrow \int dy = \int Cx\,dx$$

$y = \dfrac{C}{2}x^2 + C_2 = C_1 x^2 + C_2$. Biểu thức $y = C_1 x^2 + C_2$ là nghiệm của phương trình $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$, nếu các số C_1, C_2 thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} C_1' x^2 + C_2'.1 = 0 \\ 2C_1' x + C_2'.0 = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_2' = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{x}{2} + \mathsf{C}_1 \\ C_2 = -\dfrac{x^3}{6} + \mathsf{C}_2 \end{cases}, \ (\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2 \in \mathbb{R}).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là: $y = \left(\dfrac{x}{2} + \mathsf{C}_1\right)x^2 + \left(-\dfrac{x^3}{6} + \mathsf{C}_2\right)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^3}{3} + \mathsf{C}_1 x^2 + \mathsf{C}_2, \ \left(\forall\, \mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2 \in \mathbb{R}\right).$$

⋇ **Phương pháp hệ số bất định**

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất : $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ *có dạng* $y = \overline{y} + y_o$, *trong đó* $\overline{y}$ *là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất* $y'' + p\,y' + q\,y = 0$, *còn* y_0 *là một nghiệm riêng của* *phương trình vi phân không thuần nhất* $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ *sẽ được tìm bằng cách dựa vào đặc điểm của* $f(x)$ *trong các trường hợp sau:*

Trường hợp thứ nhất

$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ *trong đó* $P_n(x)$ *là một đa thức bậc* n *của* x *và* α *là một hằng số*

Người ta chứng minh được rằng :

- *Nếu* α ***không phải là nghiệm*** *của phương trình đặc trưng* $k^2 + pk + q = 0$ *thì một nghiệm riêng của phương trình* $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x)$ *có dạng* $y_0 = e^{\alpha x}Q_n(x)$ *trong đó* $Q_n(x)$ *là đa thức cùng bậc với* $P_n(x)$ *và có* $(n+1)$ *hệ số chưa biết mà chúng ta có thể tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.*
- *Nếu* α ***là nghiệm đơn*** *của phương trình đặc trưng* $k^2 + pk + q = 0$ *thì một nghiệm riêng của phương trình* $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x)$ *sẽ có dạng* $y_0 = xe^{\alpha x}Q_n(x)$ *trong đó* $Q_n(x)$ *là đa thức cùng bậc với* $P_n(x)$ *và có* $(n+1)$ *hệ số chưa biết mà chúng ta có thể tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.*
- *Nếu* α ***là nghiệm kép*** *của phương trình đặc trưng* $k^2 + pk + q = 0$ *thì một nghiệm riêng của phương trình* $y'' + py' + qy = e^{\alpha x}P_n(x)$ *sẽ có dạng* $y_0 = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$ *trong đó* $Q_n(x)$ *là đa thức cùng bậc với* $P_n(x)$ *và có* $(n+1)$ *hệ số chưa biết mà chúng ta có thể tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.*

◈ **Ví dụ 23**

Giải phương trình vi phân: $y'' - 2y' + y = x + 1$ (14)

Giải

Vì phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y'' - 2y' + y = 0$ là $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^x, (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ (15)

Phương trình (14) có thể viết lại như sau: $y'' - 2y' + y = e^{0x}(1+x) \Rightarrow \alpha = 0$ *không phải là nghiệm đơn* của phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 1 = 0$ nên một nghiệm riêng của phương trình (14) có dạng $y_0 = (ax+b) \Rightarrow y_0' = a$ & $y_0'' = 0$. *Thay* y_0, y_0', y_0'' vào phương trình (14) chúng ta được: $ax + (-2a + b) = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a = 1$ & $b = 3 \Rightarrow y_0 = x + 3$, (16). Từ (15) và (16) chúng ta suy nghiệm tổng quát của phương trình (14) là: $y = \bar{y} + y_0 = (C_1 + C_2x)e^x + (x+3), (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

◈ **Ví dụ 24** Giải phương trình vi phân: $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$ (17)

Giải

Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1 \vee k = 2 \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y'' - 3y' + 2y = 0$ có nghiệm tổng quát là : $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$, (18)

Từ $f(x) = e^x(3 - 4x) \Rightarrow \alpha = 1$ & $p_1(x) = 3 - 4x$ và $\alpha = 1$ *là nghiệm đơn* của phương trình đặc trưng, nên một nghiệm riêng của (1) có dạng:

$$y_o = x e^x(ax + b) = e^x(a x^2 + bx) \Rightarrow \begin{cases} y_o' = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ y_o'' = (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{cases}$$

Thay y_o, y_o', y_o'' vào (17) ta được:

$$(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x - 3(ax^2 + (2a + b)x + b)e^x + 2e^x(ax^2 + bx) = e^x(3 - 4x)$$

$$\Leftrightarrow (-2ax + 2a - b)e^x = (3 - 4x)e^x \Leftrightarrow -2ax + 2a - b = 3 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -4 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow y_o = (2x + 1)e^x\ (19)$. Từ (18) và (19) $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình (17) là: $y = \overline{y} + y_o = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (2x^2 + x)e^x$.

◈ **<u>Ví dụ 25</u>** Giải phương trình vi phân: $y'' - 6y' + 5y = 3e^x + 5x^2$, (20).

<u>Giải</u>

- Vì phương trình đặc trưng: $k^2 - 6k + 5 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 5 \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y'' - 6y' + 5y = 0$ có nghiệm tổng quát là: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{5x}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, (21)
- Trước hết ta tìm nghiệm riêng của phương trình: $y'' - 6y' + 5y = 3e^x = f_1(x)$, (22)

Từ $f_1(x) = 3e^x \Rightarrow \alpha = 1$ *là nghiệm đơn* của phương trình đặc trưng , nên một nghiệm riêng của phương trình (22) có dạng:

$y_0 = Axe^x \Rightarrow y_0' = Ae^x + Axe^x \Rightarrow y_0'' = 2Ae^x + Axe^x$. Thay y_0, y_0', y_0'' vào (22) ta được: $(2A + Ax)e^x - 6(A + Ax)e^x + 5Axe^x = 3e^x \Rightarrow -4A = 3 \Rightarrow A = -\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow y_0 = -\dfrac{3}{4} x e^x$, (23)

- Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 = f_2(x)$, (24)

$f_2(x) = 5x^2 = e^{0x}(5x^2) \Rightarrow \alpha = 0$ & $P_2 = 5x^2 \Rightarrow$ một nghiệm riêng của phương trình (24) có dạng: $y_1 = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_1' = 2ax + b,\ y_1'' = 2a$. Thay y_1, y_1', y_1'' vào (24) chúng ta có: $2a - 6(2ax + b) + 5(ax^2 + bx + c) = 5x^2$

$$\Leftrightarrow 5ax^2 + (-12a + 5b)x + (2a - 6b + 5c) = 5x^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5a = 5\\ -12a+5b = 0\\ 2a-6b+5c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a = 1\\ b=\frac{12}{5}\\ c=\frac{62}{25}\end{cases}\Rightarrow y_1 = x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{25}\ (25).$$ Từ: (21), (23) & (25)

$\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của phương trình (20) là:

$$y=\bar{y}+y_0+y_1 = C_1e^x+C_2e^{5x}-\frac{3}{4}xe^x+x^2+\frac{12}{5}x+\frac{62}{25},\ (\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}).$$

◈ **Ví dụ 26**

Giải phương trình vi phân: $y''-2y'+5y = 4e^x+5x^3-6x^2+6x,\ (26)$

Giải

⊕ **Cách 1** ***Phương pháp nhẩm nghiệm:***

• Phương trình đặc trưng $k^2-2k+5=0 \Leftrightarrow k_1=1+2i$ & $k_2=1-2i \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y''-2y'+5y=0$ có nghiệm tổng quát:

$\bar{y} = e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x),\ \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}\ (*)$

• Phương trình $y''-2y'+5y = 4e^x$ (27) có nghiệm riêng $y_1=e^x$ (**) vì nếu thay $y_1=e^x$ vào 2 vế của phương trình (27) thì làm cho hai vế bằng nhau.

• Mặt khác $y_2=x^3$ (***) là nghiệm của phương trình: $y''-2y'+5y = 5x^3-6x^2+6x,(28)$ vì nếu thay $y_1=x^3$ vào 2 vế của phương trình (28) thì làm cho hai vế bằng nhau.

Từ : (*), (**), (***) ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (26) là:

$y = \bar{y}+y_1+y_2 = e^x(1+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+x^3,\ (\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}).$

∇ **Nhận xét**

Cách 1 giải tuy ngắn gọn hơn nhưng đòi hỏi người giải toán phải nhạy bén mới nhanh chóng tìm ra được các nghiệm $y=e^x,\ y=x^3$.

⊕ **Cách 2** ***Phương pháp hệ số bất định***

• Phương trình đặc trưng $k^2-2k+5=0 \Leftrightarrow k_1=1+2i$ & $k_2=1-2i \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y''-2y'+5y=0$ có nghiệm tổng quát:

$\bar{y} = e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x),\ \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}\ (+)$

• Tìm nghiệm riêng của phương trình: $y''-2y'+5y = 4e^x = f_1(x),\ (\circ)$

$f_1(x) = 4e^x \Rightarrow \alpha=1$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên một nghiệm riêng của phương trình $(\circ)$ có dạng $y_1=ae^x \Rightarrow y_1'=y_1''=ae^x$ thay $y_1,\ y_1',\ y_1''$ vào phương trình $(\circ)$ ta được: $a\cancel{e^x}-2a\cancel{e^x}+5a\cancel{e^x} = 4\cancel{e^x} \Leftrightarrow a-2a+5a = 4$

$\Leftrightarrow 4a = 4 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y_1 = e^x,(++)$

• Tiếp theo ta tìm nghiệm riêng của phương trình: $y''-2y'+5y = \underbrace{5x^3-6x^2+6x}_{f_2(x)},(\circ\circ)$

Từ $f_2(x) = 5x^3 - 6x^2 + 6x \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ nghiệm riêng của phương trình $(\circ\circ)$ có dạng

$y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow \begin{cases} y_2' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y_2'' = 6ax + 2b \end{cases}$. *Thay* $y_2,\ y_2',\ y_2''$ vào phương trình $(\circ\circ)$ ta được:

$6ax + 2b - 2(3ax^2 + 2bx + c) + 5(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 5x^3 - 6x^2 + 6x$

$\Leftrightarrow 5ax^3 + (-6a + 5b)x^2 + (6a - 4b + 5c)x + (2b - 2c + 5d) = 5x^3 - 6x^2 + 6x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ -6a + 5b = -6 \\ 6a - 4b + 5c = 6 \\ 2b - 2c + 5d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = x^3, (+++)$$

Từ $(+), (++), (+++)$ ta có *nghiệm tổng quát* của phương trình (26) là:

$y = \overline{y} + y_1 + y_2 = e^x\left(1 + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + x^3,\ (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

$\oplus$ **Cách 3** ***Tìm nghiệm riêng mỗi số hạng của vế phải phương trình đã cho.***

- Gọi $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của phương trình: $y'' - 2y' + 5y = 0$

$\Rightarrow \overline{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x),\ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (1)$

- Gọi y_1 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' + 5y = 4e^x$

$\Rightarrow y_1 = e^x. \quad (2)$

- Gọi y_2 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - 2y' + 5y = 5x^3$

$\Rightarrow y_2 = x^3 + \dfrac{6}{5}x^2 - \dfrac{6}{25}x - \dfrac{72}{125}, \quad (3)$

- Gọi y_3 là nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = -6x^2$

$\Rightarrow y_3 = -\dfrac{6}{5}x^2 - \dfrac{24}{25}x + \dfrac{12}{125}, \quad (4)$

- Gọi y_4 là nghiệm riêng của phương trình vi phân $y'' - 2y' + 5y = 6x$

$\Rightarrow y_4 = \dfrac{6}{5}x + \dfrac{12}{25}, \quad (5)$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (26) là:

$y = \overline{y} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = e^x\left(1 + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right) + x^3, (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

∇ **Nhận xét**

Tìm nghiệm của bài toán theo Cách 3 dài dòng và tính toán phức tạp so với Cách 1 hoặc Cách 2 , do đó chúng ta không nên tìm nghiệm theo cách này.

<u>Trường hợp thứ hai</u>

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ *trong đó* $P_n(x)$, $Q_m(x)$ *là các đa thức bậc* n *và* m *của* x *và* α, β *là những hằng số.*

Người ta chứng minh được rằng :

1) *Nếu* $\alpha + i\beta$ *không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng* $k^2 + pk + q = 0$ *thì một nghiệm riêng của phương trình vi phân* $y'' + py' + qy = f(x)$ *có dạng:*

$y_0 = e^{\alpha x}\left(Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right)$. *Trong đó* $Q_l(x)$ *và* $R_l(x)$ *là các đa thức bậc* l *đầy đủ (với* $l = \max(m,n)$*) có* $l+1$ *hệ số chưa biết mà chúng ta sẽ tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.*

2) *Nếu* $\alpha + i\beta$ *là nghiệm của phương trình đặc trưng* $k^2 + pk + q = 0$ *thì một nghiệm riêng của phương trình vi phân* $y'' + py' + qy = f(x)$ *có dạng:*

$y_0 = xe^{\alpha x}(Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x)$. *Trong đó* $Q_l(x)$ *và* $R_l(x)$ *là các đa thức bậc* l *đầy đủ (với* $l = \max(m,n)$*) có* $l+1$ *hệ số chưa biết mà chúng ta sẽ tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.*

◈ **<u>Ví dụ 27</u>** Giải phương trình vi phân $y'' + y = 4x\sin x$, (29)

<u>Giải</u>

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = i, k_2 = -i \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$, (30)

Mặt khác $\alpha + i\beta = 0 + 1i = i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên một *nghiệm riêng* của phương trình (29) có dạng: $y_0 = (ax^2 + bx)\cos x + (a_1x^2 + b_1x)\sin x$

Ta có:

- $y_0' = (a_1x^2 + (2a + b_1)x + b)\cos x + (-ax^2 + (2a_1 - b)x + b_1)\sin x$
- $y_0'' = (-ax^2 + (4a_1 - b)x + (2a + 2b_1))\cos x + (-a_1x^2 - (4a + b_1)x + (2a_1 - 2b))\sin x$ Tha

y y_0, y_0'' vào phương trình (29) và rút gọn ta được:

$(4a_1x + 2(a + b_1))\cos x + (-4ax + 2(a_1 - b))\sin x = 4x\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ a + b_1 = 0 \\ -2a = 2 \\ -b + a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0 = -x^2\cos x + x\sin x, \ (31)$$

Từ (30) và (31) ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (29) là:

$y = -x^2\cos x + x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$, $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

◈ **<u>Ví dụ 28</u>** Giải phương trình vi phân: $y'' + y = \sin x + \cos 2x$, (32)

<u>Giải</u>

• Phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = i \vee k = -i \Rightarrow$ phương trình thuần nhất $y'' + y = 0$ có nghiệm tổng quát là $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$, (33)

• Trước tiên ta tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = \sin x$, (34)

• Đặt: $f_1(x) = \sin x = e^{0x} \sin x \Rightarrow \alpha = 0$ & $\beta = 1 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i = i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên một nghiệm riêng của phương trình (32) có dạng:

$$y_1 = x(a\cos x + b\sin x) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = (a+bx)\cos x + (-ax+b)\sin x \\ y_1'' = (-ax+2b)\cos x - (2a+bx)\sin x \end{cases}$$

Thế y_1, y_1'' vào phương trình (34) chúng ta có:

$(-ax+2b)\cos x + (-2a-bx)\sin x + ax\cos x + bx\sin x = \sin x.$

$$\Leftrightarrow 2b\cos x - 2a\sin x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}x\cos x, (35)$$

• Tiếp theo chúng ta tìm nghiệm riêng của phương trình: $y'' + y = \cos 2x$, (36)

Đặt $f_2(x) = \cos 2x = e^{0x}\cos 2x \Rightarrow \alpha = 0$ & $\beta = 2 \Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$, không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên một nghiệm riêng của phương trình (36) có dạng: $y_2 = a\cos 2x + b\sin 2x \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ y_2' = 2b\cos 2x - 2a\sin 2x \\ \bullet\ y_2'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x \end{cases}$. *Thay* y_2, y_2'' vào phương trình (36) ta được:

$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x + a\cos 2x + b\sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow -3a\cos 2x - 3b\sin 2x = \cos 2x$

$\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{3}\cos 2x$ (37). Từ (33), (35), (37) ta suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (32) là:

$$y = \overline{y} + y_1 + y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x, (\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

⁂

BÀI TẬP CHƯƠNG 5
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

A) PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

T T	**Đề bài**	**Đáp số**
	Giải các phương trình vi phân biến số phân li sau	
5.1	$x\left(1+y^2\right)^2 dx + y\left(1+x^2\right)^2 dy = 0$	$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = C$
5.2	$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$	$\ln\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert - \frac{x+y}{xy} = C$
5.3	$y'\cos 2y - \sin y = 0$	$\cdot\ x = \ln\left\lvert\tan\frac{y}{2}\right\rvert + 2\cos y = x + C,$ $(y \neq k\pi).$ $\cdot\ \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
5.4	$y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$	$\cdot\ \ln\left\lvert\tan\frac{y}{2}\right\rvert + 2\sin x = C\ \&\ (y \neq k\pi)$ $\cdot\ \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$
5.5	$\frac{e^y - 1}{e^y - 2}y' = \frac{1}{x}$	$\ln\left\lvert e^y - 2\right\rvert + y - 2\ln\lvert x\rvert = C$
5.6	$y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$	$\cdot\ \tan\frac{y}{2} = C(1+\tan\frac{y}{2})(1-\tan\frac{x}{2})$ $\cdot\ y = 2k\pi\ hay\ y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
5.7	$y' = \frac{1}{x-y} + 1.$	$(x-y)^2 + 2x = C$
5.8	$y' = \cos(x-y)$	$x + \cos\frac{x-y}{2} = C$
5.9	$y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$	$\cdot\ x + \frac{1}{x+y} + C = 0$ $\cdot\ y = -x$ cũng là nghiệm.
5.10	$y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$	$x\ln x = y\ln y + C$

Tìm nghiệm riêng các phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện đầu		
5.11	$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$, $y\Big\|_{x=0} = 1$.	· $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$ · $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 1+\sqrt{2}$
5.12	$\sin x\, dy - y\ln y\, dx = 0,\ y\Big\|_{x=0} = 1$	· $\ln\|y\| = C\tan\frac{x}{2}$ · Không có nghiệm riêng với $y\Big\|_{x=0} = 1$
5.13	$(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx,\ y\Big\|_{x=0} = 0$	· $y^3 = 3\arctan\left(e^x\right) + C$ · $y^3 = 3\arctan\left(e^x\right) - \frac{3\pi}{4}$.
5.14	$(x^2+1)y' = y^2 + 4;\ y\Big\|_{x=1} = 2.$	· $\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2} = \arctan x + C$ · $\arctan\frac{y}{2} = 2\arctan x + \frac{\pi}{4}$.
5.15	$y'\sin x\cos y + \cos x\sin y = 0$, $y\Big\|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$	· $\sin y\sin x = C$ · $\sin y\sin x = \frac{1}{2}$
Giải các phương trình vi phân thuần nhất (đẳng cấp) sau		
5.16	$(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0.$	$y^2 + 2xy - x^2 = C$
5.17	$xdy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx.$	$x = C\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)$
5.18	$xyy' + x^2 - 2y^2 = 0.$	· $Cx^4 = y^2 - x^2$ · Ngoài ra $y = \pm x$ cũng là nghiệm.
5.19	$(3x^2+y^2)y + (y^2-x^2)xy' = 0.$	$y = Cx\left(x^2+y^2\right)$
5.20	$x\cos\frac{y}{x}\left(ydx + xdy\right) = y\sin\frac{y}{x}\left(xdy - ydx\right)$	$xy\cos\frac{y}{x} = C$
5.21	$x^2y' + y^2 + xy(y'-1) = 0.$	$\ln Cxy = \frac{x}{y}$
5.22	$y' = \frac{x-y+1}{x+y+3}$	$(y+1)^2 + 2(x+2)(y+1) - (x+2)^2 = C$

5.23	$y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$	$y+2 = Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}}$
Giải các phương trình vi phân hoàn chỉnh (Toàn phần) sau		
5.24	$(3y^2+2xy+2x)\,dx+(6xy+x^2+3)dy=0$	$3y^2x + x^2y + x^2 + 3y = C$
5.25	$(x^3+xy^2)dx+(y^3+yx^2)dy=0$	$x^4+2(xy)^2+y^4 = C$
5.26	$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$	$3x^2+6xy+6x-2y^2+18y = C$
Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một		
5.27	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$y = \left(\dfrac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$
5.28	$y' + xy = x^3$	$y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$
5.29	$(1+x^2)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$	$y = (1+x^2)\left(x + C\right)$
5.30	$y' - \dfrac{2}{x+1}y = \left(x+1\right)^3$, $y\Big\|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$	• $y = (x+1)^2\left(\dfrac{(x+1)^2}{2} + C\right)$ • $y = \dfrac{(x+1)^4}{2}$
5.31	$(1+x^2)y' + xy = 1,\ y\Big\|_{x=0} = 0$	• $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\left\|x+\sqrt{1+x^2}\right\| + C\right)$ • $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left\|x+\sqrt{1+x^2}\right\|$
5.32	$2ydx + (y^2-6x)dy = 0$	$x = \dfrac{1}{2}y^2 + C\,y^3$
5.33	$(x^3+x)y' + 3x^2y = \sqrt{x^2+1}$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\left(\ln\left\|x\right\| + \dfrac{x^2}{2} + C\right)$
5.34	$x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$	$y = \dfrac{1}{x} + C\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$
5.35	$(x^2-4)\,y' + xy = 4$	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\left(4\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\| + C\right)$

B) PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2 VỚI HỆ SỐ HẰNG

5.36	$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} e^{4x}$
5.37	$y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right) e^{x}$
5.38	$y'' - 3y' + 2y = \sin x$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$
5.39	$y'' + y = 4\sin x$	$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x$
5.40	$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} - (2x^2 - 2x + 3) e^{2x}$
5.41	$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + x e^{-x}$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) e^{-x}$
5.42	$y'' - 3y' + 2y = x\cos x$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(0,1x - 0,12\right)\cos x$ $-\left(0,3x + 0,34\right)\sin x$
5.43	$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$	$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + 0,25e^{2x} + 0,1\cos 2x$ $+0,05\sin 2x$
5.44	$y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$	$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x,$ $(\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

--------------- Hết ---------------

CHƯƠNG 6: CHUỖI SỐ

§ 1 CÁC KHÁI NIỆM CHUNG VỀ CHUỖI

1.1 Định nghĩa và ví dụ

♦ **Định nghĩa 1**

• *Cho dãy số* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *Biểu thức* $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *(1) được gọi là một chuỗi số (nhiều khi gọi tắt là "chuỗi")*

• *Các số* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *được gọi là các số hạng của chuỗi số, số* u_n *được gọi là số hạng thứ* n *của chuỗi.*

• *Tổng hữu hạn của* $n -$ *số hạng đầu tiên của chuỗi (1) là:*

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum\limits_{n=1}^{n} u_n$ *gọi là tổng riêng thứ* n *của chuỗi đã cho.*

• *Nếu dãy số:* $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ *có giới hạn hữu hạn* S *khi* $n \to \infty$, *tức là* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *thì* S *được gọi là tổng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và lúc đó ta nói rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *là chuỗi hội tụ (HT). Chuỗi không hội tụ được gọi là chuỗi phân kỳ (PK).*

(Như vậy chuỗi (1) là chuỗi phân kỳ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *không tồn tại hoặc bằng* ∞*)*

• *Trong trường hợp chuỗi* $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và có tổng là* S *thì hiệu* $S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *được gọi là* ***chuỗi dư của chuỗi đã cho.***

1.2 Một số ví dụ

◈**Ví dụ 1** Tìm số hạng tổng quát của chuỗi: $\frac{1}{5} + \frac{4}{9} + \frac{7}{13} + \frac{10}{17} + \dots$ (*)

(Hướng dẫn: $u_n = \frac{3n-2}{4n+1}$ và chuỗi (*) có thể viết lại như sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{4n+1}$)

◈**Ví dụ 2** Tìm tổng riêng và tổng (nếu có) của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Giải

Tổng riêng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{4.4-1} + \frac{1}{4.9-1} + \dots + \frac{1}{4.n^2-1}$. Ta viết số hạng tổng quát $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\Rightarrow$ Tổng n – số hạng đầu tiên của chuỗi đã cho là:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow$$

Tổng của chuỗi đã cho là $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, nên chuỗi đã cho HT.

◈ **<u>Ví dụ 3</u>**

Xét tính hội tụ của chuỗi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots (2)$

<u>Giải</u>

Ta có $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$. Đây là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với công bội là q nên xét các trường hợp sau :

⊕ $q \neq 1$: $S_n = a\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ta sẽ tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a.\dfrac{1}{1-q} < \infty \Rightarrow$ chuỗi (2) hội tụ.
- Nếu $|q| > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ chuỗi (2) phân kỳ.

⊕ Nếu $q = 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a$ đây là chuỗi PK, vì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (na) = \infty$.

⊕ Nếu $q = -1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1}$ & $S_n = a\dfrac{1-(-1)^n}{2} \Rightarrow$ chuỗi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1}$ - phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-(-1)^n}{2}$, không tồn tại.

Vậy: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\,q^{n-1}$ - hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

1.3 <u>Điều kiện cần của chuỗi hội tụ</u>

✡ **<u>Định lý 1</u>**

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

▼ **<u>Chú ý 1</u>**

a) Định lý trên chỉ là *điều kiện cần* chứ không phải là *điều kiện đủ* để một chuỗi HT tức là nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chưa thể khẳng định được chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ HT hay PK.

◈ **<u>Ví dụ 4</u>**

Mặc dù $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, nhưng người ta đã chứng minh được rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ là *chuỗi phân kỳ*.

b) Từ định lý trên ta suy ra nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = p \neq 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ là chuỗi *phân kỳ*.

1.4 <u>Các tính chất cơ bản của chuỗi hội tụ</u>

¤ **<u>Tính chất 1</u>**

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ thì chuỗi dư* $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$ *cũng hội tụ và ngược lại nếu chuỗi dư hội tụ thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *cũng hội tụ.*

▼ **<u>Chú ý 2</u>**

Từ tính chất 1 ta thấy : *Việc bỏ đi một số hữu hạn* các số hạng đầu tiên của một chuỗi nào đó không ảnh hưởng đến *tính hội tụ hay phân kỳ* của nó.

¤ **<u>Tính chất 2</u>**

Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và có tổng là* S *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k u_n (k = const)$ *cũng hội tụ và có tổng là* kS.

¤ **<u>Tính chất 3</u>**

Nếu hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ & $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *cùng hội tụ và có tổng lần lượt là* S_1 *và* S_2 *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *cũng hội tụ và có tổng* $S_1 + S_2$.

§ 2 <u>CHUỖI SỐ DƯƠNG</u>

2.1 <u>Định nghĩa và ví dụ</u>

♦ **<u>Định nghĩa 2</u>**

• *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *được gọi là chuỗi số dương nếu tất cả các số hạng* $u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *thì chuỗi được gọi là* ***chuỗi dương thật sự****.*

• *Trong trường hợp* $u_n < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *là chuỗi số âm. Khi đó theo <u>Tính chất 2</u> ta có thể dễ dàng suy ra tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số âm nhờ vào sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số dương.*

✡ **<u>Định lý 2</u>**

Tổng của chuỗi số dương là một số hữu hạn (chuỗi hội tụ) nếu dãy các tổng riêng bị chặn trên và bằng ∞ *(chuỗi phân kỳ) nếu dãy các tổng riêng không bị chặn.*

◈ **<u>Ví dụ 5</u>**

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots (3)$ (đây là chuỗi điều hòa).

Giải

Ta có $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ (4). Nếu ta bỏ đi hai số hạng đầu của chuỗi (3) và gộp các số hạng còn lại theo các nhóm $2,\ 4,\ 8,\ldots,2^{k-1}$ số hạng:

$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2-\text{số hạng}}$, $\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4-\text{số hạng}}$, ..., $\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{2k}}}_{2^{k-1}-\text{số hạng}}$,...dựa vào (4) chúng ta có thấy t

hấy rằng mỗi nhóm của tổng trên đều lớn hơn $\frac{1}{2}$. Vậy: tổng riêng không bị chặn và (3) là chuỗi phân kỳ.

2.2 Dấu hiệu hội tụ của chuỗi số dương

2.2.1 Các định lý so sánh

✡ **Định lý 3** ***(Định lý so sánh 1)***

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \&\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n$. *Nếu với* n *đủ lớn* $(n\geq N>0)$ *mà* $u_n\leq v_n$

thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ \Rightarrow$ *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *cũng hội tụ và nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

phân kỳ $\Rightarrow$ *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *cũng phân kỳ.*

▼ **Chú ý 3**

Để nghiên cứu tính hội tụ của một chuỗi số nào đó ta thường so sánh nó với một chuỗi mà ta đã biết được tính phân kỳ hay hội tụ. Các chuỗi thường được dùng để so sánh là:

1) Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{\infty}a\,q^n,\ a\neq 0$ hội tụ khi $0\leq q<1$, phân kỳ khi $q\geq 1$.

2) Chuỗi "điều hòa" $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ.

3) Chuỗi Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ hội tụ khi $s>1$ và phân kỳ khi $s\leq 1$.

◈ **Ví dụ 6** Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ - là một chuỗi hội tụ.

Giải

Ta thấy: $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{\sqrt{n.n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}-HT,\ do\ s=\frac{3}{2}>1\Rightarrow$

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ – cũng hội tụ.

✡ **<u>Định lý 4</u>** ***(Định lý so sánh 2)***

Cho 2 chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ & $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. *Giả sử tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = k$

a) *Nếu* $0 < k < +\infty$ $\Rightarrow$ *cả hai chuỗi đã cho cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

b) *Nếu* $k = 0$ *mà chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *- hội tụ* $\Rightarrow$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – *cũng hội tụ.*

c) *Nếu* $k = +\infty$ *mà chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *phân kỳ* $\Rightarrow$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – *cũng phân kỳ.*

<u>Chứng minh</u>:

a) Nếu $0 < k < \infty$, theo định nghĩa giới hạn ta có: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall n > N: \left|\dfrac{u_n}{v_n} - k\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} - k < \varepsilon \ \Rightarrow u_n < (k+\varepsilon)v_n$ (1). Từ (1) ta suy ra :

- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k+\varepsilon)v_n$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - PK \Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (k+\varepsilon)v_n - PK \ \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ -cũng phân kỳ.

b) Nếu $k = 0$, theo định nghĩa giới hạn ta có: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall n > N: \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} < \varepsilon$

$\Rightarrow u_n < \varepsilon v_n$, do đó nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n - HT \Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon v_n - HT \Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - HT.

c) Nếu $k = +\infty$, theo định nghĩa giới hạn vô tận ta có: $\forall M > 0,\ \exists N: \forall n > N: \dfrac{u_n}{v_n} > M$

$\Rightarrow u_n > Mv_n$. Ta thấy: nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n - PK \Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mv_n - PK$ và theo định lý so sánh 1 thì : nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mv_n - PK \Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

◈ **<u>Ví dụ 7</u>** Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ - là một chuỗi hội tụ.

<u>Giải</u>

Ta biết rằng: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} : \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{n(n^2+1)}{\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^2}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{-3}.(n^3+n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \Rightarrow \text{cả 2 chuỗi}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ & $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - HT \Rightarrow$ chuỗi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ – cũng *HT*.

2.2.2 <u>Dấu hiệu Cô – si (Cauchy)</u>

✡ **<u>Định lý 5</u>**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$*.Đặt* $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$*, khi đó:*

a) *Nếu* $C < 1 \Rightarrow$ *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *- hội tụ.*

b) *Nếu* $C > 1 \Rightarrow$ *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *- phân kỳ.*

c) *Nếu* $C = 1$ *thì chưa khẳng định được chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ hay phân kỳ.*

◈ **<u>Ví dụ 8</u>**

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

<u>Giải</u>

Ta có $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n}$

$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ – phân kỳ.

◈ **<u>Ví dụ 9</u>** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

<u>Giải</u>

Xét $C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} (2n-1)^{\frac{1}{n}}}_{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}.H$ (*)

Từ $H = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-1\right)^{\frac{1}{n}}$ (dạng ∞^0) $\Rightarrow \ln H = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n-1\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\left(2n-1\right)^{\frac{1}{n}}\right)$

Dùng Lô-pi-tan ta có: $\Rightarrow \ln H = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2n-1\right)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{2n-1}}{1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2n-1} = \dfrac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \ln H = 0 \Rightarrow H = e^o = 1$ (**).

Thay H = 1 từ (**) vào (*) ta được: $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$.Theo dấu hiệu Cô-si

chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ – hội tụ

2.2.3 <u>Dấu hiệu Đalămbe</u> (D'alembert)

✡ **<u>Định lý 6</u>**

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. *Đặt:* $D = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. *Khi đó:*

a) *Nếu* $D < 1 \Rightarrow$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *- hội tụ.*

b) *Nếu* $D > 1 \Rightarrow$ *chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *- phân kỳ.*

c) *Nếu* $D = 1$ *thì chưa khẳng định được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *hội tụ hay phân kỳ.*

◈ **<u>Ví dụ 10</u>**

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2n+1}}{n!}$.

<u>Giải</u>

Đặt $D = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{e^{2n+3}}{(n+1)!}}{\dfrac{e^{2n+1}}{(n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n)!e^{2n+3}}{(n+1)!e^{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{n+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow$ chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2n+1}}{n!}$ - hội tụ.

◈ **<u>Ví dụ 11</u>** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

Giải

$$D=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}:\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cancel{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}{\cancel{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}\left(\sqrt{2}\right)(2n-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}$$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$ Theo Đa-lăm-be thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}$ hội tụ

◈ **Ví dụ 12**

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$

Giải

Ta có $D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1$

$\Rightarrow$ không thể kết luận chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *hội tụ* hay *phân kỳ*.

▼ **Chú ý 4**

Qua các ví dụ trên ta thấy khi xét sự hội tụ của các chuỗi dương, nếu số hạng tổng quát u_n của chuỗi có *dạng tích, thương hoặc* "*giai thừa*" thì ta có thể áp dụng dấu hiệu D'alembert, nếu u_n có dạng "*mũ*" thì ta nên áp tiêu chuẩn Cauchy.

2.2.4 Dấu hiệu tích phân Cô-si

✡ **Định lý 7**

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *có các số hạng giảm dần. Giả sử* $f(x)$ *là hàm liên tục, giảm dần trên* $[1,+\infty)$ *và* $f(n)=u_n$. *Khi đó chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ với tích phân suy rộng* $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$.

◈ **Ví dụ 13** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Giải

Ta có $u_n=\frac{1}{n^s}=f(n)$. Trong biểu thức của số hạng tổng quát $u_n=\frac{1}{n^s}$ của chuỗi ta thay n bởi biến x và ta nhận thấy hàm số $f(x)=\frac{1}{x^s}$ là hàm dương , đơn điệu giảm và liên tục trên $[1,+\infty)$, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ và tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

• Vì $s\neq 1\Rightarrow I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^{+\infty}=\frac{(+\infty)^{1-s}}{1-s}-\frac{1}{1-s}=\left[\begin{array}{l}\bullet\frac{0}{1-s}-\frac{1}{1-s}=\frac{1}{s-1}\ \ khi\ s>1\\ \bullet\frac{+\infty}{1-s}-\frac{1}{1-s}=+\infty\ \ khi\ s<1\end{array}\right.$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\bullet\ s>1\ \Rightarrow\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}\ -HT\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ -\ HT\\ \bullet\ s<1\ \Rightarrow\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^s}\ -PK\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ -\ PK.\end{array}\right.$$

• Khi $s=1$ ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ đây là chuỗi điều hòa nên nó phân kỳ.

◈ **Ví dụ 14** Xét tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$.

Giải

Ta có $u_n=\frac{2n}{n^2+1}=f(n)$. Trong biểu thức của số hạng tổng quát $u_n=\frac{2n}{n^2+1}$ của chuỗi nêu ta thay n bởi biến x và ta nhận thấy hàm số $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ là hàm dương , đơn điệu giảm và liên tục trên $[1,+\infty)$, do đó chuỗi : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ và tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$ - cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Vì $I=\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{m\to\infty}\int_1^{m}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{m\to\infty}\int_1^{m}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\lim_{m\to\infty}\left(\ln(x^2+1)\Big|_1^m\right)$

$=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty\Rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}-PK\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ cũng phân kỳ.

§ 3 CHUỖI VỚI SỐ HẠNG CÓ DẤU TÙY Ý

3.1 Chuỗi đan dấu *(Chuỗi đan dấu là một trường hợp đặc biệt của chuỗi có dấu tùy ý)*

♦ **Định nghĩa 3**

Ta gọi chuỗi số sau đây là chuỗi đan dấu: $\pm\left(u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots\right)$ với $u_n>0\ \forall n$

◈ **Ví dụ 15**

$a)\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$

3.1.2 Dấu hiệu Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, $(u_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N})$. *Nếu dãy* u_n *giảm (tức là* $u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in \mathbb{N}$*) và* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ *thì chuỗi đan dấu đã cho hội tụ.*

◈ **Ví dụ 16** Xét tính hội tụ của chuỗi đan dấu điều hòa: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Giải

Vì : $\begin{cases} \bullet\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = u_n \\ \bullet\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} - HT$

3.2 Chuỗi có dấu tùy ý

Trong 3.2 chúng ta sẽ nghiên cứu những chuỗi mà các số hạng của nó là những số thực có dấu bất kỳ. Chẳng hạn: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n} = -\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}-...+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}+...$

là một chuỗi có dấu tùy ý.

3.2.1 Hội tụ tuyệt đối (HTTĐ) và bán hội tụ (BHT)

♦ **Định nghĩa 4**

• *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *và chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *cùng hội tụ thì ta nói chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *hội tụ tuyệt đối.*

• *Nếu chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *hội tụ mà chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *phân kỳ thì ta nói chuỗi số* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *bán hội tụ.*

3.2.2 Dấu hiệu hội tụ tuyệt đối

✡ **Định lý 8** *Nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *cũng hội tụ.*

▼ **Chú ý 5** Điều ngược lại của Định lý 8 không đúng, nghĩa là:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì chưa chắc chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ đã hội tụ.

◈ **Ví dụ 17**

Theo **Ví dụ 16** ở trên thì chuỗi điều hòa đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ là chuỗi hội tụ.

Nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ chính là chuỗi điều hòa lại là chuỗi phân kỳ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - bán hội tụ.

◈ **Ví dụ 18**

Cho chuỗi có dấu tùy ý $\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.\frac{n}{2^n}$ $\Rightarrow$ chuỗi giá trị tuyệt đối

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. Xét $D = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$

$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$-hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.\frac{n}{2^n}$ cũng hội tụ.

⁂

BÀI TẬP
CHƯƠNG 6: CHUỖI SỐ DƯƠNG

Dùng các dấu hiệu so sánh, xét tính hội tụ của các chuỗi số					
TT	**Đề ra**	**ĐS**	**TT**	**Đề ra**	**ĐS**
6.1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$	HT	**6.**2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	PK
6.3	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$	HT	**6.**4	$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}$	HT
6.5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n+1]{5}\right)$	HT	**6.**6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 n}$	PK
6.7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$	HT	**6.**8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$	PK
Dùng dấu hiệu Cô - si hoặc Đalămbe hoặc dấu hiệu tích phân Cô – si để xét tính hội tụ của các chuỗi.					
6.9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$	HT	**6.**10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.5.8...(3n-1)}{1.5.9...(4n-3)}$	HT
6.11	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$	HT	**6.**12	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$	HT
6.13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$	PK	**6.**14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$	HT
6.15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$	PK	**6.**16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n.n!}{n^n}$	PK
6.17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	PK	**6.**18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5....(2n-1)}{4.8.12...(4n)}$	HT
6.19	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$	HT	**6.**20	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$	HT

6.21	$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$	HT	**6.**22	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^3+1}$	HT
6.23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n.n!}{n^n}$	PK	**6.**24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\sin\frac{\pi}{2^n}}{n!}$	PK
6.25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+2)!}{(2n)!}$	HT	**6.**26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^{n^2}}{2^{3n}.n^{n^2}}$	HT
6.27	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}$	HT	**6.**28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{3^n.n!}$	HT
6.29	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$	PK	**6.**30	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$	HT
6.31	$\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$	HT	**6.**32	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$	HT
6.33	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n!}{n^n}$	HT	**6.**34	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n.(n!)^2}{n^{2n}}$	HT
6.35	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+n^2}$	HT	**6.**36	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	HT
6.37	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^3+3n^2+1}{2n^3+5n^2-4n+5}\right)^{2n}$	HT	**6.**38	$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+...$	HT
Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi đan dấu (hoặc chuỗi có dấu bất kỳ) sau					
6.39	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$	BHT	**6.**40	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$	BHT
6.41	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	HTTĐ	**6.**42	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$	HTTĐ
6.43	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$	BHT	**6.**44	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$	HTTĐ
6.45	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$	BHT	**6.**46	$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.\frac{n}{2^n}$	HTTĐ

---------------- Hết ----------------

CHƯƠNG 7
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

§1. MA TRẬN
1.1 Khái niệm về ma trận
♦ Định nghĩa 1

• Ma trận cấp $m \times n$ (hay là ma trận kiểu (m,n)) là một bảng số gồm m – dòng, n - cột, được ký hiệu như sau **:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad hay \;\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ hay có lúc còn viết tắt: $A = (a_{ij})_{m\times n}$

Trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ gọi là **"Phần tử"** (hay là "Thành phần") của ma trận A.

• Nếu $m = n$ khi đó người ta gọi A là ma trận vuông cấp n và ký hiệu $A = (a_{ij})_n$.

1.2 Một số dạng ma trận:

1. Ma trận không $O = (0)_{m\times n}$ (các phần tử của nó đều bằng 0)

2. Ma trận đơn vị cấp n : I $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

(Có lúc người ta còn dùng ký hiệu I_n để chỉ ma trận đơn vị cấp n)

3. Ma trận chuyển vị : $A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{n\times m}$

4. Hai ma trận bằng nhau : $(a_{ij})_{m\times n} = (b_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$

5. Ma trận bậc thang

♦ Định nghĩa 2

• Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là *ma trận bậc thang* nếu số các phần tử bằng 0 đứng trước phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi hàng (kể từ bên trái qua) tăng dần theo từng hàng cho đến hàng chỉ toàn số 0.

◈ Ví dụ 1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận bậc thang rút gọn.}} \; ; \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận bậc thang cấp 4}} \; ; \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 9 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận bậc thang cấp } 4\times 6}$$

▼ **<u>Chú ý 1</u>**

Nếu $A = (\alpha_{ij})_n$ là ma trận cấp vuông cấp n và <u>các phần tử phân biệt được</u> là các phần tử trên đường chéo α_{11}; α_{22}; α_{33}; ... ; α_{nn} thì người ta gọi A là <u>ma trận tam giác</u> . Ngoài ra nếu <u>mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 tức là</u> $\alpha_{ij} \neq 0$ nếu $i \neq j$ thì A được gọi là <u>ma trận chéo hay ma trận đường chéo</u>.

◈ **<u>Ví dụ 2</u>** $$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận tam giác.}} \quad ; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận chéo.}}$$

1.3 <u>Các phép toán của ma trận</u>

1. <u>Cộng (trừ) hai ma trận</u>

Muốn cộng (trừ) hai ma trận ta chỉ việc cộng (trừ) các thành phần tương ứng (cùng dòng, cùng cột) của chúng $(a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$.

2. <u>Nhân ma trận với một số</u>

Muốn nhân một ma trận A với một số k ta chỉ việc nhân số k với mọi phần tử của A :
$k.A = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$

3. <u>Nhân hai ma trận</u>

Muốn tìm phần tử c_{ik} của ma trận tích AB ta phải lấy mỗi phần tử a_{ij} của dòng thứ i của ma trận A nhân với phần tử b_{jk} của cột thứ k của ma trận B rồi cộng lại.

◈ **<u>Ví dụ 3</u>**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} -7 & 32 & -6 \\ -9 & 12 & 19 \\ 7 & 28 & -49 \end{pmatrix} \\ \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{B} . \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} -50 & 21 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \neq BA \Rightarrow \text{tích 2 ma trận không có tính giao hoán.}$$

▼ **<u>Chú ý 2</u>** Tích của hai ma trận chỉ xác định khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai.

⁕ **<u>Phương pháp dùng máy tính bỏ túi hiện phép nhân hai ma trận.</u>**

◈ **<u>Ví dụ 4</u>** Cho hai ma trận: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 10 & 4 & -6 \\ 9 & 11 & 5 \end{pmatrix}$. Tính AB.

a) Máy tính CASIO – fx – 570 MS

- $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\underbrace{2}_{\text{số dòng}}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\underbrace{3}_{\text{số cột}}}$

  $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ = $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{AC}$

- $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\underbrace{3}_{\text{số dòng}}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\underbrace{3}_{\text{số cột}}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

$\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$.

- $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

- Màn hình xuất hiện 146. Đó là thành phần c_{11} của ma trận tích . Nháy con trỏ sang phải mỗi lần ta được một thành phần tiếp theo của ma trận tích.

Kết quả: $AB = \begin{pmatrix} 146 & 133 & 46 \\ 85 & 83 & 17 \end{pmatrix}$

b) Máy tính CASIO – fx – 570 ES

- $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ = $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$

  $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$

  $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$.

- $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$

Màn hình xuất hiện quả : $\begin{pmatrix} 146 & 133 & 46 \\ 85 & 83 & 17 \end{pmatrix}$

1.4 Phép biến đổi sơ cấp trên ma trận :

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ có m – dòng, n - cột ; các phần tử $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Người ta gọi mỗi phép biến đổi sau đây là một phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận A :

1. Đổi hai dòng thứ i và dòng thứ k cho nhau, ký hiệu : $d_i \longleftrightarrow d_k$.
2. Nhân dòng thứ i với một số thực $\lambda \neq 0$, ký hiệu $d_i \longleftrightarrow \lambda\, d_i$.
3. Thay dòng thứ i bằng tổng của dòng i với λ lần dòng k, ký hiệu: $d_i \longleftrightarrow d_i + \lambda d_k$.

▼ **Chú ý 3**

a) Trong thực hành, nhiều khi người ta áp dụng đồng thời cả hai bước: 2) và 3) nghĩa là $d_i \longleftrightarrow \alpha\, d_i + \lambda\, d_k,\ (\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \lambda \in \mathbb{R}^*)$.

b) Người ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để chuyển một ma trận về dạng bậc thang.

1.5 Ma trận tương đương dòng

♦ **Định nghĩa 3**

Một ma trận A được gọi là tương đương dòng với một ma trận B, ký hiệu $A \sim B$, nếu B là ma trận có được từ A sau một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

◈ **Ví dụ 5**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận A}} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận } B_1} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận B}} \Rightarrow (A \sim B_1 \sim B) \Rightarrow A \sim B.$$

§2 PHÉP THẾ

2.1 Khái niệm về phép thế

♦ **Định nghĩa 4**

a) Giả sử tập hợp $X_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ Một song ánh $\sigma : X_n \to X_n$ được gọi là một phép thế trên tập X_n. (Nói riêng, song ánh đồng nhất được gọi là phép thế đồng nhất).

b) Một phép thế τ trên tập hợp X_n được gọi là một chuyển trí hai phần tử i, j thuộc X_n nếu $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ và $\tau(k) = k,\ \forall k \in X_n,\ k \neq j$. Nó được ký hiệu (i, j).

Nói một cách đơn giản: "chuyển trí" chỉ hoán vị hai phần tử nào đó của X_n còn giữ nguyên các phần tử khác.

- Tập hợp các phép thế trên tập hợp X_n được ký hiệu S_n. Phép thế $\sigma : X_n \to X_n$ được biểu diễn như sau: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Trong đó $\sigma(i)$ là ảnh của phần tử $i \in X_n$ được viết dòng dưới, trong cùng một cột với i.

◈ **Ví dụ 6**

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ là một phép thế trên tập $X_4 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 2,$ $\sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$..

b) Phép thế $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ là một chuyển trí của hai số 2 và 4. Chuyển trí đó được viết gọn $\tau = (2, 4)$.

▼ **Chú ý 4**

Ảnh của các phần tử của tập X_n qua mỗi phép thế cho ta một hoán vị trên tập X_n.

Ngược lại, mỗi hoán vị lại xác định cho ta một phép thế (chẳng hạn hoán vị (3, 4, 1, 2) xác định cho ta phép thế $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ trên tập X_4. Vì thế, số các phép thế trên tập X_n bằng số các hoán vị trên tập ấy, nghĩa là bằng $n!$. Như vậy tập S_n có $n!$ phần tử.

◈ **Ví dụ 7**

S_3 có $3! = 6$ phần tử. Đó là những phép thế sau:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}.$$

2.2 Nghịch thế:

♦ **Định nghĩa 5**

Giả sử σ là một phép thế trên tập X_n. Với $i, j \in X_n$, $i \neq j$ ta nói cặp $(\sigma(i), \sigma(j))$ là một nghịch thế của σ nếu $i < j$ nhưng $\sigma(\mathrm{i}) > \sigma(\mathrm{j})$.

◈ **Ví dụ 8**

Trong phép thế: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ có 2 nghịch thế là: (2, 1), (3, 1).

◈ **Ví dụ 9**

Trong phép thế: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ có 3 nghịch thế là: (3, 2), (3, 1), (2, 1).

2. 3 Dấu của phép thế

♦ **Định nghĩa 6**

- Phép thế σ được gọi là một phép thế chẵn (hay lẻ) nếu nó có một số chẵn (hay lẻ) các nghịch thế.
- Ta gán cho mỗi phép thế chẵn một giá trị bằng +1, mỗi phép thế lẻ một giá trị bằng -1. Giá trị này của phép thế σ được gọi là dấu của σ và được ký hiệu bởi $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Như vậy, theo định nghĩa thì : $\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \sigma \text{ chẵn} \\ -1 \text{ nếu } \sigma \text{ lẻ} \end{cases}}$

◈ **Ví dụ 10**

Trong Ví dụ 8 phép thế: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ là *phép thế chẵn vì có 2 nghịch thế* : (2,1) và (3,1) suy ra $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$. Trong Ví dụ 9 phép thế: $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ có **3 nghịch thế** : (3,2), (3,1), (2,1) nên nó là một phép thế lẻ. Do đó : $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

§ 3 ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

3.1 Khái niệm về định thức

♦ **<u>Định nghĩa 7</u>** Cho ma trận vuông: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, người ta gọi tổng:

$D = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}.a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ (tức là tổng của tất cả các tích của các phần tử nằm ở trên các dòng và các cột khác nhau ; mỗi số hạng của tổng mang dấu "+" hoặc dấu "-" *tùy thuộc vào phép thế σ chẵn hay lẻ*) là định thức của ma trận A và ký hiệu bởi

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \; hay \; \left|A\right| \; hay \; \det A.$$

- Trong cách ký hiệu trên ta gọi mỗi số a_{ij} là *một phần tử* của định thức.Các phần tử $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ tạo thành *dòng thứ* i, các phần tử $a_{1j}, a_{1j}, \dots, a_{nj}$ tạo thành *cột thứ* j của định thức D.
- Khi A là ma trận cấp n thì ta cũng nói $\left|\mathrm{A}\right|$ là một định thức cấp n.

◈ **<u>Ví dụ 11</u>**

Ở phổ thông ta đã biết khái niệm định thức cấp 2: $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, D_2 là tổng của $2! = 2$ hạng tử; các hạng tử đó là: $a_{11}a_{22}$ & $a_{21}a_{12}$.Vì phép thế $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ không có nghịch thế nào, nên nó là một phép thế chẵn $\Rightarrow$ tích $a_{11}a_{22}$ mang dấu "+".Còn phép thế $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ có một nghịch thế: (2,1) nên $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ là một phép thế lẻ $\Rightarrow$ tích $a_{21}a_{12}$ mang dấu "-".

Tóm lại ta có: $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

◈ **<u>Ví dụ 12</u>** Định thức cấp 3: $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Ta thấy có $3! = 6$ hạng tử, trong đó có 3 hạng tử mang dấu "+" và 3 hạng tử mang dấu "-" nên:

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

◈ **Ví dụ 13** Định thức $D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ có $5! = 120$ hạng tử, nhưng chỉ có 1 hạng tử khác 0 đó là: $a_{12}.a_{24}.a_{31}.a_{43}.a_{55} = 1.1.1.1.1 = 1$. Mặt khác phép thế: $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 4\ 1\ 3\ 5 \end{pmatrix}$ là phép thế lẻ vì có 3 nghịch thế: $(2,1)$; $(4,1)$; $(4,3)$ $\Rightarrow$ hạng tử $a_{12}.a_{24}.a_{31}.a_{43}.a_{55}$ mang dấu "-" $\Rightarrow D_5 = -1$.

3.2 Tính chất của định thức

Chúng ta nêu lên một số tính chất cơ bản của định thức mà chúng ta không chứng minh. Nhưng yêu cầu người học phải biết vận dụng các tính chất này khi giải bài tập.

¤ **Tính chất 1**

Nếu đối với một dòng thứ i nào đó của định thức : $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Ta có: $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $(i, j = \overline{1,n}) \Rightarrow D_n = D'_n + D''_n$, trong đó:

$$D'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad D''_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

¤ **Tính chất 2**

Nếu mọi phần tử ở dòng thứ i của định thức D có thừa số chung c thì có thể đặt c ra ngoài dấu của định thức; tức là:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

¤ **Tính chất 3**

Trong định thức nếu đổi chỗ hai dòng cho nhau thì định thức đổi dấu.

¤ **Tính chất 4**

Nếu định thức có hai dòng giống nhau thì định thức đó bằng 0.

¤ **Tính chất 5**

Nếu định thức có hai dòng mà các phần tử (cùng cột), tương ứng tỉ lệ thì định thức đó bằng 0

¤ **Tính chất 6**

Nếu nhân mỗi phần tử ở dòng thứ i với cùng một số c rồi cộng vào các phần tử cùng cột ở dòng thứ k thì được một định thức mới bằng định thức đã cho.

¤ **Tính chất 7**

Với A^t là ma trận chuyển vị của ma trận A thì ta có: $\left|A^t\right| = \left|A\right|$ tức là, hai ma trận chuyển vị của nhau thì có định thức bằng nhau.

▼ **Chú ý 5**

Nhờ tính chất 7, nếu ta thay từ "dòng" bởi từ "cột" trong các tính chất 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì ta lại được những tính chất của định thức phát biểu với cột ; chẳng hạn "Nếu đổi chỗ hai cột cho nhau thì định thức đổi dấu" ; …

§ 4 KHAI TRIỂN ĐỊNH THỨC

4.1 Định thức con - Phần bù đại số

♦ **Định nghĩa 8**

Cho định thức D cấp n :

1) Nếu chọn $r-$dòng $i_1, i_2, \dots, i_r\ (r < n)$ và $r-$ cột $j_1, j_2, \dots, j_r\ (r < n)$, thì các phần tử nằm ở giao của $r-$dòng và $r-$cột ấy lập thành một định thức ký hiệu bởi $M_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ và gọi là *một định thức con cấp r của D.*

- Đặc biệt định thức con cấp n duy nhất của định thức D chính là D, còn định thức con cấp 1 trong định thức D chính là một phần tử tùy ý của D.

2) Nếu xóa đi $r-$*dòng và* $r-$*cột* ấy thì các phần tử còn lại lập thành một định thức ký hiệu bởi $\widetilde{M}_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ và gọi là *định thức con bù* của định thức $M_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$.

3) Giả sử định thức con $M_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ lập nên từ các phần tử nằm ở giao điểm của $r-$ dòng $i_1, i_2, \dots, i_r$ *và* $r-$ *cột* $j_1, j_2, \dots, j_r$ và giả sử $\widetilde{M}_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ là *định thức con bù* của định thức con $M_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ trong định thức D. Ta định nghĩa *phần bù đại số* của $M_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$ trong D là: $(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_r+j_1+j_2+\dots+j_r}.\widetilde{M}_{i_1, i_2, \dots, i_r}^{j_1, j_2, \dots, j_r}$

- Đặc biệt phần bù đại số A_{ij} của phần tử a_{ij} trong định thức D là: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ trong đó M_{ij} là *định thức con bù* của phần tử a_{ij} trong D.

4.2 Khai triển định thức theo r - dòng hoặc r – cột

✡ **Định lý** ***(Định lý Laplace)***

Nếu trong định thức D cấp n ta đã chọn $r-$dòng (hoặc $r-$cột) tùy ý $(1 \le r \le n-1)$. Thế thì định thức D bằng tổng của các tích của tất cả các định thức con cấp r lập được trên $r-$dòng dòng (hoặc $r-$cột) đó với phần bù đại số của chúng.
(Người ta cũng nói đây là định lý khai triển theo $r-$dòng (hoặc $r-$cột)).

◈ **Ví dụ 13** Tính định thức: $D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Trên 2 dòng đầu có thể lập được 6 định thức con cấp 2 nhưng chỉ có một định thức con cấp 2 khác 0. Vì vậy theo định lý Laplace, nếu khai triển theo 2 dòng đầu ta có :

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-2).(-2) = 4.$$

4.3. Khai triển một định thức theo các phần tử của một dòng hay một cột.

Áp dụng định lý Laplace cho một dòng ta có công thức khai triển định thức theo các phần tử của dòng thứ i là: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ (trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}). Tương tự**:** Công thức khai triển định thức theo các phần tử của cột thứ j là:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

◈ **Ví dụ 14** Tính định thức: $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Nếu khai triển theo dòng thứ nhất ta được: $D_4 = 4.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -4\left(1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -4\big(1.1.4 + 2.(-1).(-7) - 1.1.(-13)\big) = -4(4 + 14 + 13) = (-4)(-23) = -124.$$

§ 5 CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

⋇ **Tính định thức cấp 3 :**

$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ bằng cách viết thêm *cột thứ nhất* và cột thứ hai vào bên phải của cột thứ ba của định thức ta có: $\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$

$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$

$\Rightarrow D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}.$

※ **<u>Phương pháp Laplace</u>**

Nếu trong định thức có nhiều dòng, nhiều cột chứa phần tử 0 thì ta có thể dùng định lý Laplace khai triển trên các dòng và cột đó.

※ **<u>Phương pháp đưa về dạng tam giác</u>**

Phương pháp đưa về dạng tam giác là dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của định thức cần tính, để đưa tất cả các phần tử nằm trên (hoặc dưới) đường chéo chính của định thức đó đều bằng 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad hay \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$(a_{ij} = 0\, khi\;\; i > j) \qquad\qquad (a_{ij} = 0\, khi\;\; i < j)$

Lúc đó giá trị của định thức bằng tích của các phần tử trên đường chéo chính.

• Có khi trong quá trình làm triệt tiêu các phần tử nằm trên (hoặc dưới) đường chéo chính, nếu đã thấy xuất hiện nhiều số 0, ta có thể áp dụng ngay định lý Laplace.

◈ **<u>Ví dụ 15</u>**

Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

<u>Giải</u>

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & -7 & 2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -2 & -61 \\ 0 & 0 & -5 & -80 \end{vmatrix}^{(*)} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{61}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{145}{2} \end{vmatrix}$$

$= -2.(-1).1.\frac{145}{2} = 145.$

▼ **Chú ý 6** Từ định thức $(*)$ nếu dùng định lý Laplace, khai triển theo hai cột đầu, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \left(-1\right)^{1+2+1+2} . \begin{vmatrix} -2 & -61 \\ -5 & -80 \end{vmatrix} = (-1).1.(-145) = 145.$$

⁎ **Phương pháp dùng máy tính bỏ túi**

◈ **Ví dụ 16** Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

a) **Đối với máy : "CASIO f x – 570MS "**

• $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$

$\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{1}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{\triangleright}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ 73 $\Rightarrow$ D = 73.

b) **Đối với máy : "CASIO f x – 570ES "**

• $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ 73 $\Rightarrow$ D = 73.

◈ **Ví dụ 17** Tính định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 5 & 11 & 15 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow$ Đ.S: $-\dfrac{25}{2}$

▼ **Chú ý 7**

Hai loại máy tính bỏ túi "CASIO f x – 570MS" và "CASIO f x – 570ES" chỉ tính được định thức cấp ≤ 3.

§ 6 HẠNG CỦA MA TRẬN

6.1 Hạng của ma trận :

♦ **Định nghĩa 9**

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. *Ta gọi hạng của ma trận A là một số nguyên dương* r *nếu:*

a) *Trong A tồn tại một định thức con cấp* r *khác 0.*
b) *Mọi định thức con cấp lớn hơn r trong ma trận A đều bằng 0.*
c) *Ta ký hiệu hạng của ma trận A là* ***rankA***. *Nếu A là ma trận 0, thì ta quy ước gọi hạng của nó bằng 0.*

◈ **Ví dụ 18**

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ có hạng bằng 2 vì có định tức cấp 2: $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$.

còn mọi định thức cấp > 2 đều bằng 0.

6.2 Các phương pháp tính hạng ma trận

Để tìm hạng của ma trận: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ chúng ta có 2 phương pháp sau đây :

⁕ **Phương pháp 1:** *Tìm hạng của ma trận bằng phương pháp định thức bao quanh*

Giả sử ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ có ít nhất một định thức con $D_s \neq 0$. Nếu mọi định thức con D_{s+1} có bao quanh định thức con D_s đều bằng 0 $\Rightarrow rankA = s$. Nhưng nếu có một định thức con $D_{s+1} \neq 0$ (mà D_{s+1} chứa D_s ở trên) ta tiếp tục xét các định thức con D_{s+2} chứa D_{s+1} như ta đã xét các định thức con D_{s+1} chứa D_s… Vì số dòng và số cột của ma trận A là hữu hạn, nên qua một số hữu hạn bước thì chúng ta sẽ tìm được một định thức $D_r \neq 0$ mà mọi định thức D_{r+1} bao quanh D_r đều bằng 0 $\Rightarrow rankA = s$.

◈ **Ví dụ 19**

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ có hạng bằng 2 vì có định tức cấp 2: $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$

và mọi thức cấp 3 bao quanh D_2 đều bằng 0, nên rankA = 2.

⁕ **Phương pháp 2** *Dùng phép biến đổi sơ cấp để tính hạng ma trận*

Để tìm hạng của ma trận A khác không, ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận A tương đương với một ma trận B có dạng bậc thang. Lúc đó <u>hạng của ma trận A bằng số dòng khác 0 của ma trận B</u>.

◈ **Ví dụ 20** Tìm hạng của ma trận; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 15 & -5 \\ 4 & 7 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ma trận B}}$$

rankA = 3 (vì trong ma trận B ở trên có 3 – dòng khác 0)

§ 7 MA TRẬN NGHICH ĐẢO

7.1 Khái niệm ma trận nghịch đảo

♦ **Định nghĩa 10**

Ma trận vuông A cấp n được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại một ma trận vuông B cấp n sao cho: $AB = I_n = BA$ (Ở đây I_n là ma trận đơn vị cấp n). Khi đó B được gọi là ma trận nghịch đảo (hay ma trận đảo) của A.

◈ **Ví dụ 21**

a) $Vì$: $I_n.I_n = I_n \Rightarrow I_n$ là ma trận nghịch đảo của chính nó.

b) Vì : $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ là nghịch đảo của nhau.

◈ **Vấn đề đặt ra là** :

Có phải mọi ma trận vuông cấp n đều có nghịch đảo không? Nếu có thì tìm ma trận nghịch đảo đó như thế nào? Định lý sau đây sẽ trả lời cho những câu hỏi đó:

✡ **Định lý** *Ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi* $|A| \neq 0$

• Người ta gọi : Ma trận mà định thức của nó khác 0 được gọi là ma trận không suy biến. Với khái niệm ma trận không suy biến chúng ta có thể phát biểu định lý trên như sau : Ma trận vuông A là ma trận khả nghịch khi và chỉ khi nó không suy biến.

7.2 Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

⁕ **Phương pháp1**

Tìm ma trận nghịch đảo bằng định thức.

Cho ma trận không suy biến $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ma trận $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ có được bằng cách *tìm phần bù đại số* của các phần tử a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1;n})$ của ma trận A. Lúc đó ma trận nghịch đảo của ma trận A là: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ trong đó $|A|$ là định thức của ma trận A.

◈ **Ví dụ 22**

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Giải

Ta có: $\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.2.1 = 2$

$A_{11} = 11;\ \ A_{21} = -15;\ \ A_{31} = -3,\ A_{12} = -3;\ \ A_{22} = 5;\ \ A_{32} = 1; A_{13} = -6;\ \ A_{23} = 8;\ \ A_{33} = 2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -15 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ -6 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

⁕ **<u>Phương pháp 2</u>** *Tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp*.

Giả sử A là ma trận không suy biến cấp n. Ta viết ma trận A "cạnh" ma trận đơn vị cùng cấp I_n, ta được $\left(A\middle|I_n\right)$, và dựa vào :

✡ **<u>Định lý</u>**

Nếu thực hiện những phép biến đổi sơ cấp như nhau trên ma trận không suy biến A và ma trận đơn vị I_n mà ma trận A biến thành I_n thì I_n biến thành A^{-1} Quá trình trên có thể diễn tả theo sơ đồ sau : $\left(A\middle|I_n\right) \xrightarrow{\text{Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng}} \left(I_n\middle|A^{-1}\right)$

◈ **<u>Ví dụ 23</u>**

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Giải</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

⁕ **<u>Phương pháp 3</u>**

Dùng máy tính bỏ túi để tìm ma trận nghịch đảo (Cấp 2 và cấp 3)

◈ **<u>Ví dụ 24</u>**

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

A) **<u>Máy tính CASIO – fx – 570MS</u>**

- $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

$\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

- Màn hình xuất hiện thành phần b_{11} của ma trận nghịch đảo. Nháy con trỏ sang phải mỗi lần ta được một thành phần tiếp theo b_{12}; b_{12}; b_{21}; b_{22}; ... $\Rightarrow$ Kết quả :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{88} & -\frac{21}{44} & \frac{35}{88} \\ \frac{3}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{9}{44} \end{pmatrix}$$

b) **<u>Máy tính CASIO – fx – 570ES</u>**

- $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$

  $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{6}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

- Màn hình xuất hiện kết quả: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{88} & -\frac{21}{44} & \frac{35}{88} \\ \frac{3}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{5}{22} \\ -\frac{1}{44} & -\frac{1}{22} & \frac{9}{44} \end{pmatrix}$

⁂

BÀI TẬP

Các phép toán về ma trận		
TT	**ĐỀ BÀI**	**ĐÁP SỐ**
1	Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $A^3 - 3A$.	
2	Cho các ma trận: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Tính: $a)$ $B^tA - 3B^t$; $b)$ $A(B + C)$; $c)$ $A - BC^t$.	
3	Tính A^n nếu: $a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b)$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
4	Tính B^n nếu: $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.	
Tính các định thức sau:		
5	$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$	$\det A = -238$ $\det B = 567$ $\det C = -9$
6	$D = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 12 \\ 18 & 15 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; $E = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\det D = 867$ $\det E = -10$
7	Không tính, hãy chứng minh: $A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 7 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $B = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & -3 \\ 2 & 0 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & 8 & -7 \\ -1 & 2 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 0$	Áp dụng <ins>Tính chất 5</ins>, <ins>Tính chất 6</ins> .
8	Chứng minh rằng: $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.	Khai triển theo <ins>Tính chất 1</ins> .

9	Cho định thức $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.Chứng minh rằng: $D \vdots (x-y) \vee D \vdots (y-z) \vee D \vdots (z-x)$	Khai triển định thức và phân tích thành nhân tử
	Giải phương trình, bất phương trình định thức	
10	a) Tìm x biết rằng: $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ b) Tìm x biết rằng: $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$	a) $\left[\begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.$ b) $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$
11	Tìm x biết rằng: $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ (x+10) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$	$\left[\begin{array}{l} x_1 = -4 + \sqrt{22} \\ x_2 = -4 - \sqrt{22} \end{array}\right.$
12	Tìm x biết rằng: $\begin{vmatrix} 2 & (x+2) & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$	$-6 < x < -4$
	Hạng của ma trận	
13	Hãy tìm hạng của các ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 10 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	• rank$A = 3$ • rank$B = 4$ • rank$C = 3$
14	Tùy theo giá trị của a, hãy tìm hạng của ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.	• Nếu $a \neq 0$ thì rank$A = 3$ • Nếu $a = 0$ thì rank$A = 2$
	Ma trận nghịch đảo	
15	Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng cả hai phương pháp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	

16	Cho ma trận: $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$. Tìm B^{-1} bằng cả 2 phương pháp.	
17	Cho ma trận: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\2&-2&a\end{pmatrix}$ với $a\in\mathbb{R}$. a) Tìm a để A khả nghịch. b) Tìm A^{-1} bằng cả 2 phương pháp.	
Giải phương trình ma trận		
18	a) Tìm ma trận X biết: $\begin{pmatrix}1&2&5\\1&-1&3\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}-3&-2&1\\4&2&0\end{pmatrix}$ b) Tìm ma trận Y biết: $\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&-1&3\end{pmatrix}$	
	a) Tìm ma trận Z biết: $\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\left(Z+\begin{pmatrix}-3&-2&1\\4&2&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&-1&3\end{pmatrix}$ b) Tìm ma trận M biết: $M\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\4&2\end{pmatrix}$	
19	a) Tìm ma trận X biết: $\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$ b) Tìm ma trận Y biết: $Y\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{pmatrix}$	
20	Dùng ma trận để giải các hệ phương trình sau: $a)\begin{cases}7x+2y+3z=15\\5x-3y+2z=15\\10x-11y+5z=36\end{cases};\ b)\begin{cases}x+y-2z=6\\2x+3y-7z=16\\5x+2y+z=16\end{cases}$	

--------------- Hết ---------------

CHƯƠNG 8 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1 MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1.1 *Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính(hptt)*

Hệ phương trình tuyến tính m *- phương trình* n *- ẩn là hệ có dạng:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \cdots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \cdots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ với $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$; a_{ij} *được gọi là các hệ số của các ẩn* x_j *còn* b_i $(i = \overline{1,m})$ *được gọi là các hạng tử tự do.*

1.2 Nghiệm của (hpttt)

Một nghiệm của hệ (1) *là một bộ n - số* $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ *sao cho khi thay* $x_j = c_j$ *thì mọi đẳng thức trong hệ* (1) *đều là những đẳng thức số đúng.*

1.3 Ma trận các hệ số - Ma trận bổ sung của một hệ phương trình tuyến tính.

✡ *Ma trận :* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *được gọi là ma trận các hệ số của hệ* (1)

✡ *Ma trận:* $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ *được gọi là ma trận bổ sung của hệ* (1)

1.4 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính Crame

Nếu hệ (1) *có* $m = n$ *và định thức* $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ *thì nó được gọi là hệ phương trình tuyến tính Crame (vắn tắt là hệ Crame). Định thức* D *được gọi là định thức của hệ phương trình.*

1.5 Hệ phương trình tuyến tính tương đương.

Hai hệ phương trình tuyến tính được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm.

§ 2 <u>ĐIỀU KIỆN ĐỂ HỆ CÓ NGHIỆM VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.</u>

Hai nhà toán học ***Crônecke - Capêni*** đã chứng minh được định lý *về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.*

2.1 <u>Định lý Crônecke - Capêni</u>

Hệ phương trình tuyến tính* (1) *có nghiệm khi và chỉ khi rankA = rank $\overline{A}$

◈ **<u>Ví dụ 1</u>**

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$:\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases} \quad (¤)$$

Xét xem hệ phương trình trên có nghiệm hay không ? Vì sao ?

<u>Giải</u>

Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận $\overline{A}$ ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & 10 & 14 \\ 0 & -4 & -10 & 20 & 28 \\ 0 & -14 & -35 & 70 & 118 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & -5 & 10 & 14 \\ 0\;0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0\;0\;0 & & 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \Rightarrow rankA = 2 \neq 3 = rank\overline{A} \Rightarrow \text{hệ } (¤) \text{ vô nghiệm.}$$

§ 3 <u>CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH</u>

3.1 <u>*Phương pháp Crame*</u>.

✡ **<u>Định lý</u>**

Hệ Crame có nghiệm duy nhất tính bằng công thức $x_j = \dfrac{D_j}{D}$ với $j = \overline{1,n}$ *trong đó D là định thức của của hệ phương trình, còn* D_j *là định thức thu được từ định thức D bằng cách thay cột thứ* j *của D bằng cột các số hạng tử tự do.*

3.2 <u>*Phương pháp Gauss*</u>

♦ *Đối với những hệ phương trình tuyến tính mà số phương trình khác với số ẩn, hoặc số phương trình bằng số ẩn nhưng định thức của ma trận các hệ số bằng 0 thì ta không áp dụng được phương pháp* ***Crame*** *để giải.*

♦ *Lúc đó ta dùng phương pháp* ***Gauss*** *(phương pháp khử dần ẩn số). Nội dung của phương pháp này là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận :*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{l|l} a_{11} \quad a_{12} \cdots \ a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \quad a_{22} \cdots \ a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1} \ a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{l|l} c_{11} \ c_{12} \cdots c_{1k} \cdots c_{1n} & d_1 \\ 0 \quad c_{22} \cdots c_{2k} \cdots c_{1n} & d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 \quad 0 \ \ldots \ c_{kk} \ldots \ c_{kn} & d_k \end{array}\right)}_{\text{Ma trăn C}}$$

♦*Dựa vào ma trận* C *ta có thể thấy được hệ phương trình có nghiệm hay không có nghiệm và nếu có nghiệm thì có duy nhất hay có vô số nghiệm !*

✡ *Khi đó hệ phương trình có dạng* **"bậc thang"**:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \cdots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \cdots \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \ c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \cdots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

thì việc giải hệ phương trình được tiến hành như sau :

♦ *Nếu k = n thì bắt đầu từ việc giải ra* $x_n \to x_{n-1} \to x_{n-2} \to \ldots \to x_1 \Rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

♦ *Nếu k < n thì từ cột thứ k+1 đến cột thứ n được chuyển sang phía* ***bên phải của dấu*** **" = "** *và quá trình lại* ***được giải từ dưới lên*** *để tính* $x_k \to x_{k-1} \to \ldots \to x_1$.

◈ **Ví dụ 2** Giải hệ phương trình tuyến tính sau : $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -7 \\ 2x_1 - 9x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 11x_2 - 7x_3 = 17 \end{cases}$, (*)

Giải

♦ ***Phương pháp Crame***

Vì: $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 2 & -9 & -1 \\ 3 & -11 & -7 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \Rightarrow$ hệ phương trình $(*)$ là hệ Crame.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -7 & -5 & 4 \\ 4 & -9 & -1 \\ 17 & -11 & -7 \end{vmatrix} = 17;\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 17 & -7 \end{vmatrix} = 0;\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -7 \\ 2 & -9 & 4 \\ 3 & -11 & 17 \end{vmatrix} = -34$$

Hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{D_1}{D}; \frac{D_2}{D}; \frac{D_3}{D}\right) = \left(\frac{17}{17}; \frac{0}{17}; \frac{-34}{17}\right) = (1;\ 0; -2)$.

♦ ***Phương pháp Gauss***

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 2 & -9 & -1 & 4 \\ 3 & -11 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 4 & -19 & 38 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & -34 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

♦ ***Phương pháp ma trận***

Đặt: $A=\begin{pmatrix}1&-5&4\\2&-9&-1\\3&-11&-7\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7\\4\\17\end{pmatrix}\Rightarrow$ Phương trình $(*)\Leftrightarrow AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$

Nhưng từ: $A=\begin{pmatrix}1&-5&4\\2&-9&-1\\3&-11&-7\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{52}{17}&-\frac{79}{17}&\frac{41}{17}\\\frac{11}{17}&-\frac{19}{17}&\frac{9}{17}\\\frac{5}{17}&-\frac{4}{17}&\frac{1}{17}\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{52}{17}&-\frac{79}{17}&\frac{41}{17}\\\frac{11}{17}&-\frac{19}{17}&\frac{9}{17}\\\frac{5}{17}&-\frac{4}{17}&\frac{1}{17}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5&4\\2&-9&-1\\3&-11&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

◈ **<u>Ví dụ 3</u>** Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3-x_4=2\\4x_1+x_2+3x_3-2x_4=1\\2x_1+7x_2-x_3=-1\end{cases}$

<u>Giải</u>

Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận bổ sung:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-1&2\\4&1&3&-2&1\\2&7&-1&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-1&2\\0&13&-5&2&-7\\0&13&-5&2&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-3&2&-1&2\\0&13&-5&2&-7\\0&0&0&0&2\end{array}\right)\Rightarrow$$

Trong *bảng cuối cùng* và *phương trình thứ ba* có dạng: $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2\,(**)$

Rõ ràng phương trình (**) *vô nghiệm* $\Rightarrow$ *hệ đã cho cũng vô nghiệm.*

◈ **<u>Ví dụ 4</u>**

Giải hệ phương trình tuyến tính sau: $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=28\\3x_1-3x_2-x_3+2x_4=\frac{19}{2}\\5x_1+x_2+2x_3+5x_4=\frac{69}{2}\\8x_1+7x_2+2x_3-3x_4=\frac{1}{2}\end{cases}$

<u>Giải</u>

• **<u>Cách 1</u>**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&28\\3&-3&-1&2&\frac{19}{2}\\5&1&2&5&\frac{69}{2}\\8&7&2&-3&\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&28\\0&-9&-10&-10&-\frac{149}{2}\\0&-9&-13&-15&-\frac{211}{2}\\0&-9&-22&-35&-\frac{447}{2}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&28\\0&-9&-10&-10&-\frac{149}{2}\\0&0&-3&-5&-31\\0&0&-12&-25&-149\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&28\\0&-9&-10&-10&-\frac{149}{2}\\0&0&-3&-5&-31\\0&0&0&-5&-25\end{array}\right)\Rightarrow\left(1;\frac{1}{2};\,2;\,5\right).$$

• **Cách 2**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 28 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & \frac{19}{2} \\ 5 & 1 & 2 & 5 & \frac{69}{2} \\ 8 & 7 & 2 & -3 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 28 \\ 0 & -9 & -10 & -10 & -\frac{149}{2} \\ 0 & -9 & -13 & -15 & -\frac{211}{2} \\ 0 & -9 & -22 & -35 & -\frac{447}{2} \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 = 28 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ (+)\begin{cases} 9x_2 + 10x_3 + 10x_4 = \frac{149}{2} \\ 9x_2 + 13x_3 + 15x_4 = \frac{211}{2} \\ 9x_2 + 22x_3 + 35x_4 = \frac{447}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Dùng máy tính bấm tay giải hệ (+) ta được: $\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 28 - 2.\dfrac{1}{2} - 3.2 - 4.5 = 1$

$\Rightarrow \left(1; \dfrac{1}{2}; 2; 5\right)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

◈ **Ví dụ 5** Giải hệ phương trình tuyến tính: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}, (\otimes)$

Giải

Để biến đổi ma trận bổ sung, trước hết ta đổi dòng thứ hai cho dòng thứ nhất, sau đó khử dần các hệ số **:**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -6 & -9 \\ 12 & -2 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 10 & 25 & -50 & -70 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_2 + 5x_3 - 10x_4 = -14 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 + 2x_3 - 4x_4 \\ 2x_2 = -14 - 5x_3 + 10x_4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_1 = -2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \\ x_2 = -7 - \frac{5}{2}x_3 + 5x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \frac{1}{2}a + b \\ x_2 = -7 - \frac{5}{2}a + 5b \\ x_3 = a \in \mathbb{R} \\ x_4 = b \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ Hệ $(\otimes)$ có vô số nghiệm phụ thuôc hai tham số.

◈ **Ví dụ 6** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}, (\lambda \in \mathbb{R}), (\bullet)$$

Giải

◈ **Cách 1** : ***Dùng định thức***:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2); \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2; \qquad D_z = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

♦ Nếu D $\neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2 \Rightarrow$ hệ có *một nghiêm duy nhất* :

$$\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)$$

♦ Nếu $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -2$:

• Khi $\lambda = 1$ ta có hệ phương trình **:**

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x = 1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x = 1-a-b \\ y = a \in \mathbb{R} \\ z = b \in \mathbb{R} \end{cases}$$ ⇒ Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số.

• Khi $\lambda = -2$, ta có hệ phương trình:

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$ ⇒ phương trình: $0x + 0y + 0z = 3$ *vô nghiệm* nên hệ $(\otimes)$ *cũng vô nghiệm.*

◈ **Cách 2**: ***Dùng phương pháp Gauss***:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{array}\right), (\circ).$$

♦ Nếu $\lambda \neq 1 \wedge \lambda \neq -2 \Rightarrow$ hệ $(\bullet)$ có *một nghiêm duy nhất* : $\left(-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}; \dfrac{1}{\lambda+2}; \dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2}\right)$

♦ Nếu $\lambda = 1$**,** thay $\lambda = 1$ vào ma trận $(\circ)$ ta được phương trình sau:

$x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-a-b \\ y=a\in\mathbb{R} \\ z=b\in\mathbb{R} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số.

♦ Nếu $\lambda=-2$, ta cũng thay $\lambda=-2$ vào $(\circ)$ ta được hệ phương trình tuyến tính sau:

$(\times)\begin{cases} x+\ y-2z= \ \ 4\ (1) \\ \quad -3y+3z=-6\ (2) \\ 0x+0y+0z=\ \ 3\ (3) \end{cases}$. Trong hệ $(\times)$, thì phương trình (3) vô nghiêm $\Rightarrow$ hệ phương trình $(\times)$ cũng vô nghiệm.

◈ **<u>Ví dụ 7</u>**

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3; \ (a;b\in\mathbb{R}) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

<u>Giải</u>

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)(2-b)$, $D_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)$, $D_{x_3} = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4ab-6a-4b+7$

+ Nếu $D=(1-a)(2-b)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1 \,\&\, b\neq 2$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất : $\left(\dfrac{-1}{(1-a)(2-b)}; \dfrac{1}{2-b}; \dfrac{4ab-6a-4b+7}{(1-a)(2-b)}\right)$

+ Nếu $a=1$, *thay* $a=1$ vào hệ phương trình đã cho chúng ta được hệ phương trình:

$(*)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3; \ (b\in\mathbb{R}) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

• *Khi* $b=1$, *thay* $b=1$ vào phương trình (2) ta có: $0x_1+0x_2+0x_3=-1$ (4) phương trình (4) vô nhiệm, nên hệ phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

- $Khi\ b \neq 1,$ từ (2) và (3) ta suy ra: $\begin{cases} y = \frac{-1}{b-1} \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (vô lý) $\Rightarrow$ Hệ phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Như vậy: Nếu $a = 1$ thì hệ phương trình $(*)$ vô nghiệm $\forall b \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $b = 2,\ thay\ b = 2$ vào hệ phương trình đã cho chúng ta được hệ phương trình:

$$(**)\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 & (1') \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 & (2');\ (a \in \mathbb{R}) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 & (3') \end{cases}$$

Hai phương trình $(2')$ & $(3')$ của hệ $(**)$ có vế trái giống nhau nhưng vế phải khác nhau nên hệ phương trình $(**)$ vô nghiệm, $\forall a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Nếu $b = 2$ thì hệ phương trình $(*)$ vô nghiệm $\forall a \in \mathbb{R}$.

⁂

BÀI TẬP

T.T	ĐỀ RA	Đ. SỐ
Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Crame:		
8.1	$\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$	$(2;\ 4;\ -3)$
8.2	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	$(7;\ -3;\ -9)$
8.3	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$	$(3;\ 1;\ 1)$
8.4	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	$(2;\ -2;\ 3)$
Giải các hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp Gauss		

8.5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$	$(1;\ 2;\ -1;-2)$
8.6	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 9x_4 = 3 \\ 4x_1 + 13x_2 + 13x_3 - 4x_4 = 11 \end{cases}$	$(58;\ -15;\ -2;\ 0)$
8.7	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$	$(-18;\ \frac{88}{3};\ -8;\ -\frac{11}{3})$
8.8	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -9 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = -2 - \frac{1}{2}a + b \\ x_2 = -7 - \frac{5}{2}a + 5b \\ x_3 = a \in \mathbb{R} \\ x_4 = b \in \mathbb{R} \end{cases}$
8.9	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$	$(1;\ 2;\ 0;\ 0)$
Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau :		
8.10	$\begin{cases} (a+1)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 1 \end{cases}$ $\forall a \in \mathbb{R}$	• Nếu $a \neq 0$ & $a \neq -3$ hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\dfrac{1}{a+3};\dfrac{1}{a+3};\dfrac{1}{a+3}\right)$. • Nếu $a = 0$ hệ vô số nghiệm. • Nếu $a = -3$ hệ vô nghiệm.
8.11	$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1; (m \in \mathbb{R}) \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$	• Nếu $m \neq 1$ & $m \neq -2$ hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\dfrac{1}{m+2};\dfrac{1}{m+2};\dfrac{1}{m+2}\right)$. • Nếu $m = 1$ hệ vô số nghiệm. • Nếu $m = -2$ hệ vô nghiệm.

8.12	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3; (a \in \mathbb{R}) \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = a \end{cases}$	• Nếu $a \neq 5$ hệ vô nghiệm. • Nếu $a = 5$ hệ vô số nghiệm.
8.13	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3; (a \in \mathbb{R}) \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$	• Nếu $a \neq -3$ & $a \neq 2$ hệ có nghiệm duy nhất: $\left(1; \dfrac{1}{a+3}; \dfrac{1}{a+3}\right)$. • Nếu $a = -3$ hệ vô nghiệm. • Nếu $a = 2$ hệ vô số nghiệm.

--------------- Hết ---------------