TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

Bùi Thị Thủy
Đặng Xuân Thọ

Support

- TS. Đặng Xuân Thọ
- Mobile: 091.2629.383
- Email: thodx@hnue.edu.vn
- Website: http://fit.hnue.edu.vn/~thodx/

NỘI DUNG

Chương 2. Lý thuyết tập hợp

- Thế nào là một tập hợp?
  - Biểu diễn tập hợp?
  - Tập con?
- Các phép toán của tập hợp?
  - Hợp, giao, trừ, tích đecac…
  - Biểu diễn trên máy tính?
- Quan hệ và ánh xạ?
- Lực lượng của một tập hợp?

Khái niệm tập hợp

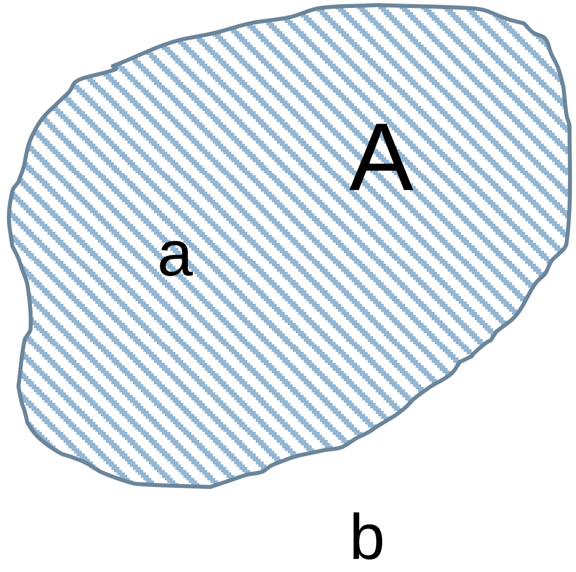
- Lý thuyết tập hợp được nhà toán học người Đức tên là **Cantor** xây dựng.
- **Tập hợp** là một tổng thể các đối tượng (được gọi là các phần tử của tập hợp) có cùng chung một tính chất chung nào đó.
- Ký hiệu:
  - Tập hợp ký hiệu bởi chữ in hoa A, Q, N, Z…
  - Phần tử ký hiệu bởi chữ in thường a, p, x...
  - $a \in A$; $p \notin A$;

Khái niệm tập hợp

- **Ví dụ:**
  - Tập hợp các học sinh trong một lớp học.
  - Tập hợp các cuốn sách trong thư viện.
  - N là tập hợp các số tự nhiên.
  - Z là tập hợp các số nguyên.
    - $1 \in Z$;
    - $\frac{1}{2} \notin Z$;

Các cách biểu diễn tập hợp

- Một tập hợp thường được biểu diễn như một phần mặt phẳng được giới hạn bởi một đường cong khép kín. Gọi là biểu đồ Venn.
- Biểu diễn tập hợp A
  - $a \in A$
  - $b \notin A$



Các cách biểu diễn tập hợp (1/3)

- Biểu diễn tập hợp bằng cách liệt kê tất cả các phần tử của nó.
  - Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp đã cho bằng cách mở đầu và kết thúc việc kê khai bởi dấu "{" và "}"
  - Tập A bao gồm 3 phần tử là các số tự nhiên 1,2,3
    - A = {1, 2, 3}
  - Tập B bao gồm 6 số nguyên dương đầu tiên?
    - B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Các cách biểu diễn tập hợp (2/3)

- Biểu diễn tập hợp thông qua quy luật đơn giản.
  - Liệt kê các phần tử đầu tiên của tập hợp, và sử dụng ba dấu chấm để thể hiện các phần tử khác mà có thể dễ dàng xác nhận được.
  - Tập hợp các số tự nhiên chẵn
    - A = {0, 2, 4, …}
  - Tập hợp các số nguyên?
    - Z = {0, 1, -1, 2, -2, …}

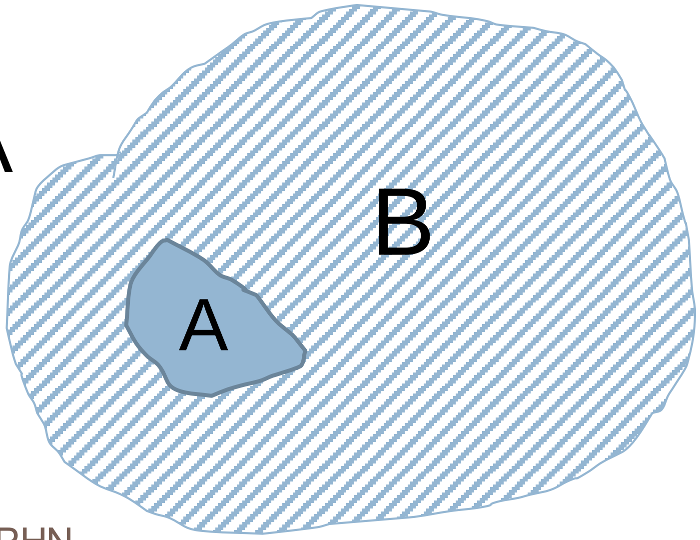
Các cách biểu diễn tập hợp (3/3)

- Biểu diễn tập hợp thông qua quy tắc nhận biết.
  - Đưa ra các quy tắc nhận biết các phần tử của tập hợp mà không cần biết việc kiểm tra tính chất nhận biết được đưa ra có dễ dàng hay không.
  - Tập hợp các số nguyên tố
    - P = {p | p là số nguyên tố}
  - Tập hợp các nghiệm của pt $x^2 - 2x + 1 = 0$?
    - $X = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$

Tập hợp con và bằng nhau

Tập hợp con

- **Định nghĩa:** Cho trước hai tập hợp A và B. Ta nói rằng tập hợp A là tập con của tập hợp B, nếu như mỗi phần tử của tập hợp A là phần tử của tập hợp B.
  - Ký hiệu: $A \subseteq B$
  - A là tập con của tập hợp B
  - Tập hợp B chứa tập hợp A



Tập hợp con

- **Ví dụ:**
  - Tập hợp các số tự nhiên N là tập hợp con thực sự của tập hợp các số nguyên Z.
  - Tập hợp ∅ được quy định là tập hợp con của tất cả các tập hợp.
  - Mỗi tập hợp bất kỳ cũng là tập hợp con của chính nó.

Tập hợp con

- Cho trước tập hợp A, ta ký hiệu tập hợp tất cả các tập hợp con của A là **P(A)**.
- **Ví dụ:** với A = {1, 2}
  - P(A) = {∅, {1}, {2}, {1, 2}}
- **Tính chất:** Quan hệ "chứa nhau" ($\subseteq$) của tập hợp là một quan hệ có tính chất phản xạ và bắc cầu:
  - Với mọi tập hợp A ta có $A \subseteq A$
  - Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$

Tập hợp bằng nhau

- **Định nghĩa:** cho trước hai tập hợp A và B là hai **tập hợp bằng nhau** khi và chỉ khi A là tập hợp con của tập hợp B và B là tập hợp con của tập hợp A.
  - Ký hiệu: A = B
  - Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì A = B
- **Ví dụ:**
  - $A = \{1, 2\}$
  - $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

Tập hợp bằng nhau

- **Tính chất:** quan hệ "bằng nhau" của tập hợp là quan hệ tương đương:
  - Với mọi tập hợp A ta có A = A (tính phản xạ)
  - Nếu A = B thì B = A (tính đối xứng)
  - Nếu A = B và B = C thì A = C (tính bắc cầu)

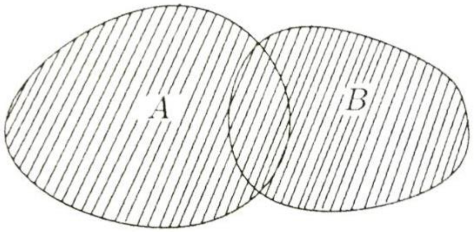
Luyện tập

- Cho trước tập hợp A = {1,2,3} và B = {1,3,5,7}. Hãy liệt kê tất cả các tập hợp vừa là tập con của A vừa là tập hợp con của B.
- Xác định mỗi quan hệ giữa các tập hợp sau:
  - A={1,2,3} và B={1,3,5,7}
  - A={1,2,3} và B={1,3,5,2,7}
- Xác định tập hợp P({1,2,3})?

Các phép toán của tập hợp

Phép hợp

- **Định nghĩa:** cho trước tập hợp A và tập hợp B. Hợp của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B, và chỉ những phần tử đó mà thôi.



- Hợp của tập hợp A và tập hợp B được ký hiệu bởi $A \cup B$.
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

Phép hợp

- **Tính chất:**
  - Luật đồng nhất: $A \cup \varnothing = A$ với mọi tập hợp A
  - Luật nuốt: $A \cup U = U$ với mọi tập hợp $A \subseteq U$
  - Luật lũy đẳng: $A \cup A = A$ với mọi tập hợp A
  - Luật giao hoán: $A \cup B = B \cup A$ với mọi tập hợp A,B
  - Luật kết hợp: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ với mọi tập hợp A, B, C

Phép hợp

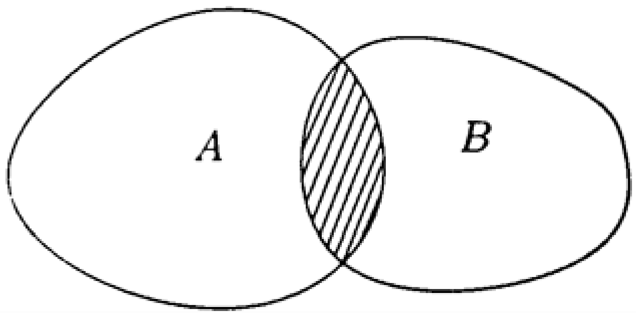
- **Bảng thuộc tính**
  - Để chỉ một phần tử thuộc một tập hợp, dùng số 1
  - Để chỉ phần tử không thuộc một tập hợp, dùng 0

A	B	$A \cup B$	$B \cup A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

A	B	C	$(A \cup B) \cup C$	$A \cup (B \cup C)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Phép giao

- **Định nghĩa:** cho trước tập hợp A và tập hợp B. Giao của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp chứa tất cả các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, và chỉ những phần tử đó mà thôi.



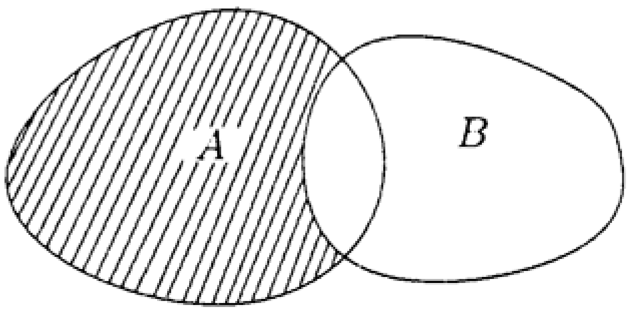
- Ký hiệu: $A \cap B$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

Phép giao

- **Tính chất:**
  - Luật nuốt: $A \cap \varnothing = \varnothing$ với mọi tập hợp A
  - Luật đồng nhất: $A \cap U = A$ với mọi tập hợp $A \subseteq U$
  - Luật lũy đẳng: $A \cap A = A$ với mọi tập hợp A
  - Luật giao hoán: $A \cap B = B \cap A$ với mọi tập hợp A,B
  - Luật kết hợp: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ với mọi tập hợp A, B, C
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Lập bảng thuộc tính?

Phép trừ

- **Định nghĩa:** cho trước tập hợp A và B. Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B, và chỉ những phần tử đó mà thôi.



- Ký hiệu: A \ B hoặc A – B
- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

Phép trừ

- **Định nghĩa:** cho trước tập hợp A và tập hợp U chứa tập hợp A. Khi đó ta nói hiệu U – A là phần bù của tập hợp A trong tập hợp U và ký hiệu U – A bởi $C_A(U)$ hoặc $\overline{A_U}$ và nếu không xảy ra hiểu lầm thì có thể viết ngắn gọn $\bar{A}$
- **Ví dụ:**
  - A = {0, 1, 2, 3}; U = N
  - $\bar{A}$ = {4, 5, …}

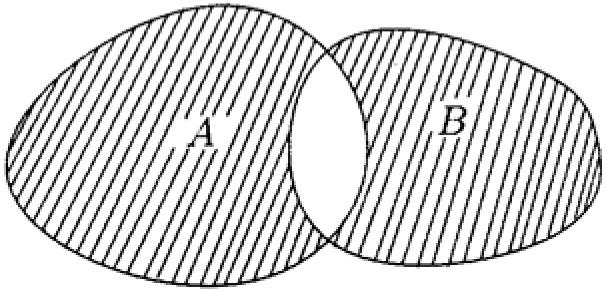
Phép trừ

- **Tính chất:**
  - Luật bù: $\bar{\bar{A}} = A$
  - Luật De Morgan cho giao: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
  - Luật De morgan cho hợp: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

- Lập bảng thuộc tính?

Phép trừ

- **Định nghĩa:** Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B là tập hợp chứa các phần tử chỉ thuộc đúng một trong hai tập hợp A và B (hoặc thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B), và chỉ chứa đúng các phần tử này mà thôi.



- Ký hiệu: $A \Delta B$ hoặc $A \oplus B$
- $A \oplus B = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (B - A)$

Hằng đẳng thức đáng nhớ

$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	Luật đồng nhất	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Luật phân phối
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Luật nuốt	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Luật kết hợp
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Luật lũy đẳng	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	Luật De Morgan
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Luật giao hoán	$\bar{\bar{A}} = A$	Luật bù

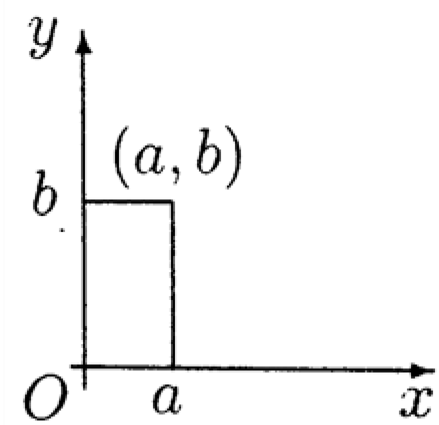
Chứng minh đẳng thức của tập hợp

- **Ví dụ:** chứng minh luật De Morgan $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin (A \cap B\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B)\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$$
$$= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$$
$$= \{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\}$$
$$= \{x \mid (x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\}$$
$$= \{x \mid (x \in \bar{A} \cup \bar{B}\}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

Tích Đêcac (Descartes)

- **Định nghĩa:** Cho A và B là hai tập hợp. Tích Đêcac của A và B là tập hợp tất cả các cặp (a,b) với $a \in A$ và $b \in B$.



- $A \times B = \{(a, b) \mid \text{a} \in A, b \in B\}$
- A = ∅ hoặc B = ∅ thì A x B = ∅
- **Lưu ý:** tích Đêcác không có tính chất giao hoán như nhiều phép toán khác của tập hợp.

Biểu diễn tập hợp trên máy tính

- Xét 1 tập U đủ lớn để chứa các tập hợp đã cho, ví dụ là hợp của các tập hợp cho trước.
- Biểu diễn tập hợp A ứng với xâu $a_1a_2..a_n$ với:
  - n là số phần tử của U
  - a_i = 0 nếu phần tử thứ i không thuộc A
  - a_i = 1 nếu phần tử thứ i thuộc A
- Dễ thấy ∅ là xâu gồm toàn các bit 0
- và U là xâu gồm toàn các bit 1

Biểu diễn tập hợp trên máy tính

- **Ví dụ:**
  - A = {1,2,4} và B = {1,3,5}
  - U = {1,2,3,4,5} → n = 5
  - Biểu diễn xâu A: $a_1a_2a_3a_4a_5$?
- Cách biểu diễn tập hợp bằng các xâu bit chúng ta dễ dàng thực hiện được các phép toán hợp, giao, và trừ của tập hợp.

Luyện tập

- Bằng bảng thuộc tính hãy chứng minh:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Cho A={+,-}; B={a,b,c}; C={1,2,3}. Hãy xác định:
  - A x B x C
  - A x C x B
  - B x C x A

THANK YOU!