**Практика 10. Числовые ряды. Часть 1**

Числовые ряды. Признаки сходимости положительных рядов.

***Числовой ряд*:** $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

***n-ая частичная сумма ряда*:** $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Ряд называется ***сходящимся***, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, в противном случае ряд называется ***расходящимся***.

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – ***сумма ряда***.

$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ – ***остаток ряда*** (после $n$-го члена)

**Необходимый признак сходимости ряда:** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

**Признаки сходимости знакоположительных рядов**

| | |
|---|---|
| Признак сравнения | Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные числовые ряды,<br>$u_n \le v_n$, начиная с некоторого $n$.<br>Тогда 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;<br>2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится |
| Предельная форма признака сравнения | Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные числовые ряды,<br>существует конечный отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$.<br>Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно. |
| | Эталонные ряды:<br>1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \lvert q\rvert < 1$ сходящийся (геометрическая прогрессия) $S = \frac{a}{1-q}$<br>2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$: сходящийся, если $\alpha > 1$ (обобщенный гармонический); расходящийся, если $\alpha = 1$ (гармонический); расходящийся, если $\alpha < 1$ (обобщенный гармонический) |
| Признак Даламбера | Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный числовой ряд,<br>существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда<br>$l < 1 \Rightarrow$ ряд сходится<br>$l > 1 \Rightarrow$ ряд расходится<br>$l = 1 \Rightarrow$ вопрос о поведении ряда открыт |
| Признак Коши (радикальный) | Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный числовой ряд,<br>существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда<br>$l < 1 \Rightarrow$ ряд сходится<br>$l > 1 \Rightarrow$ ряд расходится<br>$l = 1 \Rightarrow$ вопрос о поведении ряда открыт |
| Интегральный признак Коши | Если $f(x)$ – непрерывная, положительная, невозрастающая функция для $x \ge a$,<br>и начиная с некоторого $n$, $u_n = f(n)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$<br>сходятся или расходятся одновременно. |

**Задания.**

**1.** Дан общий член ряда $a_n = \frac{n}{10^n+1}$. Написать первые четыре члена ряда.

**2.** Найти общий член ряда: а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\cdots$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$.

**3.** Найти пятую, двадцатую и $n$-ую частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$. Исследовать данный ряд на сходимость.

**4.** Известно, что а) $S_n = \operatorname{arctg} n$; б) $S_n = \frac{3n+1}{5n-2}$; в) $S_n = \frac{2n^2-1}{n+5}$. Найти сумму ряда.

**5.** Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25n^2-15n-4}$. Доказать сходимость ряда. Сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

**6.** Исследовать сходимость ряда, найти сумму ряда: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$

**7.** Установить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$.

**Исследовать ряд на сходимость (8-16)**

**8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^{15}}}$. **10.** $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$. **11.** $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$.

**12.** $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$. **13.** $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$. **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

**15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. **16.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

-------------------------------------------------------------

**17.** Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$. Доказать сходимость ряда. Сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

**Исследовать на сходимость ряд (18-20)**

**18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$. **19.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.