Mục lục

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ và TÍNH CHẤT

1.1 Ứng dụng thực tế của hàm số

1.1. Thực hiện các yêu cầu sau

a) Một hình chữ nhật có chu vi 20 m. Hãy biểu diễn diện tích của hình chữ nhật dưới dạng hàm số theo chiều dài của một cạnh bất kỳ.

b) Một hình chữ nhật có diện tích 16 m^2. Hãy biểu diễn chu vi của hình chữ nhật dưới dạng hàm số theo chiều dài của một cạnh bất kỳ.

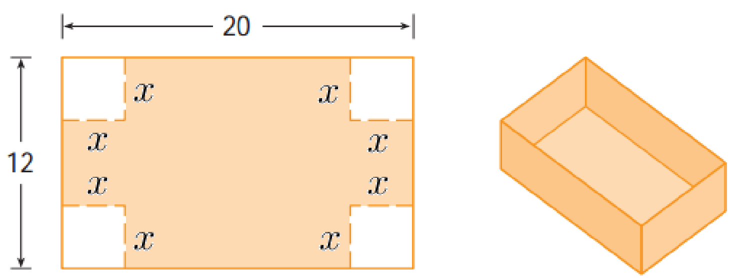
c) Một hình hộp chữ nhật có thể tích là 2 m^3, đáy là hình vuông. Hãy biểu diễn diện tích bề mặt (toàn phần) của hình hộp dưới dạng hàm số theo chiều dài cạnh đáy.

ĐS: a) $S = f(x) = x(10 - x)\ m^2$ với x là độ dài một cạnh.

b) $C = f(x) = 2(x + \dfrac{16}{x})\ m$ với x là độ dài một cạnh.

c) $S = f(x) = 2x^2 + \dfrac{8}{x}\ m^2$ với x là độ dài cạnh đáy.

1.2. Người ta ghép một chiếc hộp không có nắp từ một miếng bìa cứng hình chữ nhật với kích thước $12 \times 20\ cm^2$ bằng cách cắt bớt các hình vuông bằng nhau với cạnh x ở mỗi góc bìa, sau đó gập các cạnh lại như hình minh họa. Hãy biểu diễn thể tích V của hộp dưới dạng hàm số của x.



Hình 1.1: Ghép hộp từ bìa chữ nhật.

ĐS: $V = f(x) = x(20 - 2x)(12 - 2x)\ cm^3$.

1.3. Một hòn đá rơi xuống hồ nước, tạo ra gợn sóng hình tròn có bán kính r lan ra với vận tốc 60 cm/s. Biết rằng bán kính r là một hàm số theo thời gian t và diện tích của vòng tròn A là một hàm số theo bán kính r. Hãy tìm hàm hợp $A \circ r$ và cho biết ý nghĩa của nó.

ĐS: $f(t) = A \circ r(t) = 0,36\pi t^2\ m^2/s$.

Ý nghĩa: sự thay đổi diện tích vòng tròn theo thời gian.

1.4. Một quần thể vi khuẩn có số lượng 100 *con*. Quần thể này tăng theo thời gian và tăng gấp đôi cứ sau mỗi ba giờ.

a) Viết hàm số mô phỏng số lượng vi khuẩn theo thời gian. Khi nào vi khuẩn đạt 3 200 *con*.

b) Tìm hàm ngược của hàm số trên và cho biết ý nghĩa của nó.

ĐS: a) $N = f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Đạt 3 200 *con* sau 15 giờ.

b) $t = f^{-1}(N) = 3\log_2 \dfrac{N}{100}$ *giờ*. Ý nghĩa: tìm thời gian sinh sôi của quần thể tương ứng với kích thước của nó.

1.5. Số lượng vi khuẩn gây bệnh trong người bệnh nhân A được dự đoán có dạng như hàm số
$$f(t) = 11t - t^2 \qquad \text{với } 0 \le t \le 8$$
trong đó t là thời gian tính theo ngày và f là số lượng vi khuẩn tính theo 1000 con.

a) Vẽ đồ thị hàm số $f(t)$. Dựa vào đồ thị cho biết lượng vi khuẩn ít nhất khi nào và nhiều nhất khi nào

b) Biết khi số lượng vi khuẩn đạt 24 000 con, bệnh nhân sẽ phát sốt. Hỏi khi nào bệnh nhân phát sốt?

c) Tại thời điểm $t = 4$, người đó uống thuốc đặc trị, số lượng vi khuẩn ngay lập tức giảm một nửa và tiếp tục giảm 3 500 con mỗi ngày. Hãy xây dựng hàm số $g(t)$ biểu diễn số lượng vi khuẩn trong người bệnh nhân A trong trường hợp này (trường hợp uống thuốc) với $0 \le t \le 8$.

ĐS: a) ít nhất $f(0) = 0$, nhiều nhất $f(5,5) = 30\ 250$ con.

ĐS: b) sau 3 ngày phát sốt, sau 8 ngày thì khỏi.

c) $g(t) = \begin{cases} 11t - t^2, & t \le 4, \\ 14 - 3,5(t-4), & 4 < t \le 8. \end{cases}$

1.6. Lúc 7 giờ sáng, Xe I xuất phát từ thành phố A di chuyển đến thành phố B với vận tốc 25 km/h. Cùng lúc đó xe II xuất phát từ thành phố B di chuyển đến thành phố A với vận tốc 35 km/h. Biết quãng đường AB dài 100 km. Đặt hai xe trong hệ tọa độ Ox với gốc O là trung tâm thành phố A và chiều Ox từ A đến B .

a) Xác định phương trình chuyển động của hai xe. Khi nào hai xe gặp nhau?

b) Nếu xe II xuất phát lúc 8 giờ thì phương trình chuyển động của hai xe lúc này thế nào? Khi nào hai xe gặp nhau?

ĐS: a) 8 *giờ* 40 *phút*. b) 9 *giờ* 15 *phút*.

1.7. Một trường mẫu giáo có chi phí được liệt kê như sau

(i) Cứ 10 trẻ nhỏ cần 1 người quản lý với thù lao là 200 *ngàn đồng* mỗi ngày.

(ii) Thực phẩm dành cho các trẻ nhỏ trong ngày là 30 *ngàn đồng* mỗi em.

(iii) Các chi phí khác như điện, nước, bảo vệ là 300 *ngàn đồng* mỗi ngày.

(iv) Hao mòn vật chất (bàn ghế, đồ chơi) là 1 *triệu đồng* mỗi tháng.

a) Hãy viết chi phí như là hàm theo biến số là lượng trẻ nhỏ trong trường.

b) Nếu trường có 150 trẻ nhỏ thì nên thu học phí là bao nhiêu mỗi em một tháng?

ĐS: a) $f(x) = 6000 \cdot < \dfrac{x}{10} > +900 \cdot x + 10\ 000$ *ngàn đồng*

với $< r >$ là số nguyên làm tròn lên của r. b) $1,57$ *triệu đồng*.

1.8. Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là
$$P(x) = \frac{100}{1 + 49e^{-0,05x}}.$$
Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua sản phẩm đạt hơn 50%.

ĐS: 78 lần.

1.9. Một lon nước đang có nhiệt độ 35^oC được đưa vào ngăn lạnh ở 10^oC. Nhiệt độ của lon nước ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức
$$T(t) = 10 + 25 \cdot 0,9^t.$$
a) Sau 5 phút, lon nước được làm lạnh đến nhiệt độ bao nhiêu?

b) Hỏi sau bao lâu lon nước sẽ có nhiệt độ 20^oC.

ĐS: a) $24,7^oC$. b) Sau $8,7$ *phút*.

CHƯƠNG 2: GIỚI HẠN và LIÊN TỤC

2.1 Bài toán khảo sát sự tồn tại giới hạn

Theo Định lý 2.2, hàm số f có giới hạn tại c khi $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$. Vì vậy để khảo sát giới hạn của hàm số, ta cần tính các giới hạn một phía. Một số chú ý khi tính giới hạn một phía:

- Ta có $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$ nếu f có cùng công thức biểu diễn trên $(c-\epsilon, c]$.
  Ta có $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ nếu f có cùng công thức biểu diễn trên $[c, c+\epsilon)$.
- Nếu kết quả của phép tính giới hạn là ∞ ta nói rằng hàm số không có giới hạn.

Dạng toán 2.1 Khảo sát sự tồn tại giới hạn

Bước 1: Tính giới hạn một phía

Tính $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$. Chú ý rằng $x < c$.

Tính $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$. Chú ý rằng $x > c$.

Bước 2: So sánh và kết luận

Nếu $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ thì $f(x)$ có giới hạn tại c và $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

Nếu $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ thì $f(x)$ không có giới hạn tại c.

✎ Ví dụ 2.1 Tính giới hạn của $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ tại $x = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Do đó không tồn tại giới hạn của f tại $x = 3$. ■

Bước 1: Tìm giới hạn một phía

Khi $x < 3$ thì $x - 3$ âm.

Khi $x > 3$ thì $x - 3$ dương.

Bước 2: So sánh và kết luận.

✎ Ví dụ 2.2 Tính giới hạn của $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty.$$

Do đó không tồn tại giới hạn của f tại $x = 1$. ■

Bước 1: Tìm giới hạn một phía

Khi $x < 1$ thì $x - 1$ âm

Khi $x > 1$ thì $x - 1$ dương

Bước 2: So sánh và kết luận.

✎ Ví dụ 2.3 Tính giới hạn của $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ tại $x = 0$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm giới hạn một phía

Khi $x < 0$ thì $|x| = -x$.

Khi $x > 0$ thì $|x| = x$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

Bước 2: So sánh và kết luận.

Do $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ nên không tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại 0. ■

✎ Ví dụ 2.4 Tính giới hạn của $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ tại $x = 2$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm giới hạn một phía
Do $x \to 2^-$ hay $x \to 2^+$ thì biểu thức của $f(x)$ là như nhau nên ta có thể rút gon bài toán thành

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$$

Ta có

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

Bước 2: So sánh và kết luận.

Do $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{2}$. ■

✎ Ví dụ 2.5 Tính giới hạn tại $x = 2$ của

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & x \geq 2, \\ \sqrt{2x^2 + 1} & x < 2. \end{cases}$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm giới hạn một phía

Khi $x < 2$ thì $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$.

Khi $x > 2$ thì $f(x) = 2|x| - 1$.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} = 3.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2|x| - 1 = 2 \cdot |2| - 1 = 3.$$

Bước 2: So sánh và kết luận.

Do $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. ■

✎ Ví dụ 2.6 Tính giới hạn tại $x = -2$ của

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x > -2, \\ 2x + 3 & x \leq -2. \end{cases}$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm giới hạn một phía

Khi $x < -2$ thì $f(x) = 2x + 3$.

Khi $x > -2$ thì $f(x) = x^2 - 2$.

Ta có

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} 2x + 3 = 2(-2) + 3 = -1.$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} x^2 - 2 = (-2)^2 - 2 = 2.$$

Bước 2: So sánh và kết luận.

Do $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ nên f không có giới hạn tại -2. ■

❖ Bài tập tự giải

2.1. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to -2} x+2.$ ĐS: 0.

2.2. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}.$ ĐS: không tồn tại.

2.3. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}.$ ĐS: không tồn tại.

2.4. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+2}.$ ĐS: 0.

2.5. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{|x+1|}.$ ĐS: không tồn tại.

2.6. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}.$ ĐS: $\dfrac{1}{2}$.

2.7. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}.$ ĐS: $\dfrac{1}{6}$.

2.8. Tính giới hạn tại $x=-1$ của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq -1,\\ 1 & x=-1.\end{cases}$$
ĐS: 1.

2.9. Tính giới hạn tại $x=1$ của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & x<1,\\ x-\dfrac{1}{2} & x\geq 1.\end{cases}$$
ĐS: $\dfrac{1}{2}$.

2.10. Tính giới hạn tại $x=0$ và $x=\pi$ của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} 1+\sin x & x\leq 0,\\ \cos x & 0\leq x\leq \pi,\\ \sin x & x>\pi.\end{cases}$$
ĐS: $\lim\limits_{x\to 0}=1$, $\lim\limits_{x\to \pi}$ không tồn tại.

2.11. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$ ĐS: không tồn tại.

2.12. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$ ĐS: không tồn tại.

2.13. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}.$ ĐS: không tồn tại.

2.2 Bài toán khảo sát sự liên tục của hàm từng khúc

Người ta đã chứng minh được các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của nó. Vì vậy ta chỉ cần khảo sát sự liên tục của các hàm từng khúc tại các vị trí điểm nối của nó.

Dạng toán 2.2 Khảo sát sự liên tục của hàm từng khúc

Bước 1: Xác định miền liên tục trên các tập xác định của hàm con.
Hàm số liên tục trên miền trong các tập xác định con.

Bước 2: Khảo sát sự liên tục tại các điểm nối
Tính giới hạn của hàm số tại điểm nối qua giới hạn bên trái và bên phải.
So sánh giới hạn với giá trị hàm số tại điểm nối để đưa ra kết luận về sự liên tục của hàm số.

✎ Ví dụ 2.7 Khảo sát sự liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}3x-x^2 & x\geq 3,\\ x^2-7 & x<3.\end{cases}$$

Lời giải.

Bước 1: Hàm số liên tục bên trong tập xác định.

Do $3x-x^2$ và x^2-7 là các hàm sơ cấp nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty,3)$ và $(3,\infty)$. Ta chỉ cần xét sự liên tục của hàm số tại điểm nối $x=3$.

Bước 2: Kiểm tra sự liên tục tại điểm nối.
Khi $x<3$ thì $f(x)=x^2-7$
Khi $x>3$ thì $f(x)=3x-x^2$

Tại $x=3$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-7=3^2-7=2.$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} 3x-x^2=3\cdot 3-3^2=0.$

Hàm số không có giới hạn thì không liên tục.

Do $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại 3.
Hàm số không có giới hạn nên sẽ không liên tục tại 3.
Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. ■

✎ Ví dụ 2.8 Khảo sát sự liên tục tại $x=1$ của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x>1,\\ -\dfrac{x}{2} & x\leq 1.\end{cases}$$

Lời giải.

Bước 2: Kiểm tra sự liên tục tại điểm nối.
Khi $x<1$ thì $f(x)=-\dfrac{x}{2}$
Khi $x>1$ thì
$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$
Khi $x=1$ thì $f(x)=-\dfrac{x}{2}$

Tại $x=1$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{x}{2}=-\dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-2)}{(x+1)}=-\dfrac{1}{2}.$
- $f(1)=-\dfrac{1}{2}.$

Do $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$ nên f liên tục tại $x=1$. ■

✎ **Ví dụ 2.9** Khảo sát sự liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+e^{\frac{1}{x+2}}} & x\neq -2,\\ 0 & x=-2.\end{cases}$$

Lời giải.

Do $\dfrac{1}{x+2}$ có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ nên f liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Bước 1: Hàm số liên tục bên trong tập xác định.

Tại $x=-2$, ta có

Bước 2: Kiểm tra sự liên tục tại điểm nối.
Khi $x<-2$ thì $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+e^{\frac{1}{x+2}}}$
Khi $x>-2$ thì $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+e^{\frac{1}{x+2}}}$
Khi $x=-2$ thì $f(x)=0$

- $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x}{x^2+e^{\frac{1}{x+2}}}=\dfrac{2(-2)}{(-2)^2+e^{\frac{1}{-2^-+2}}}$
  $=\dfrac{-4}{4+e^{-\infty}}=-1.$
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x}{x^2+e^{\frac{1}{x+2}}}=\dfrac{2(-2)}{(-2)^2+e^{\frac{1}{-2^++2}}}$
  $=\dfrac{-4}{4+e^{\infty}}=0.$
- $f(-2)=0.$

Do $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ nên f không có giới hạn tại -2.

Hàm số không có giới hạn thì không liên tục.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. ■

✎ **Ví dụ 2.10** Tìm a và b để $f(x)$ liên tục tại trên $\mathbb{R}$ với

$$f(x)=\begin{cases}ax-3 & 2<x,\\ x^2+4x-7 & 0<x\leq 2,\\ b(x-3)-1 & x\leq 0.\end{cases}$$

Lời giải.

Do các hàm con đều là hàm sơ cấp nên f liên tục bên trong tập xác định của chúng, nghĩa là f liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.

Bước 1: Hàm số liên tục bên trong tập xác định.

Tại $x=2$, ta có

Bước 2: Kiểm tra sự liên tục tại điểm nối.
Khi $x<2$ thì $f(x)=x^2+4x-7$
Khi $x>2$ thì $f(x)=ax-3$
Khi $x=2$ thì $f(x)=x^2+4x-7$

- $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x^2+4x-7=5.$
- $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} ax-3=2a-3.$
- $f(2)=2^2+4\cdot2-7=5.$

Để $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2)$ thì $2a-3=5\Rightarrow a=4.$

Tại $x=0$, ta có

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} b(x-3)-1=-3b-1.$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4x-7=-7.$
- $f(0)=b(0-3)-1=-3b-1.$

Khi $x<0$ thì $f(x)=b(x-3)-1$
Khi $x>0$ thì $f(x)=x^2+4x-7$
Khi $x=0$ thì $f(x)=b(x-3)-1$

Để $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$ thì $-3b-1=-7\Rightarrow b=2.$

Vậy để f liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a=4$ và $b=2$. ■

❖ Bài tập tự giải

2.14. Khảo sát sự liên tục của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x\neq 1,\\ 1 & x=1.\end{cases}$$
ĐS: liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2.15. Khảo sát sự liên tục của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+1} & x\neq 2,\\ e^0 & x=2.\end{cases}$$
ĐS: liên tục trên $\mathbb{R}$.

2.16. Khảo sát sự liên tục của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{2+e^{\frac{1}{1-x}}} & x\neq 1,\\ 1 & x=1.\end{cases}$$
ĐS: liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2.17. Khảo sát sự liên tục của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x<-1,\\ -2x+2 & -1\leq x.\end{cases}$$
ĐS: liên tục trên $\mathbb{R}$.

2.18. Khảo sát sự liên tục của hàm số tại $x=1$
$$f(x)=\begin{cases} cos(x-1) & x\leq 1,\\ |x|+x-1 & x>1.\end{cases}$$
ĐS: liên tục tại 1.

2.19. Khảo sát sự liên tục của hàm số
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x+\ln(1+2x^4)}{e^x-1} & x<0,\\ 2x+1 & 0\leq x.\end{cases}$$
ĐS: liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2.20. Tìm a để hàm số f liên tục tại $x=0$
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{ax} & x>0,\\ x-1 & x\leq 0.\end{cases}$$
ĐS: $a=-1$.

2.21. Tìm a để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{|x|} & x<0,\\ ax & 0\leq x.\end{cases}$$
ĐS: $a=0$.

2.22. Tìm a để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$
$$f(x)=\begin{cases} x+a & x\leq 2,\\ \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & 2<x.\end{cases}$$
ĐS: $a=-\dfrac{4}{3}$.

2.23. Tìm a để hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sin x-2x^2}{x^2+\sin^2 x} & x<0,\\ ax+a & 0\leq x.\end{cases}$$
ĐS: $a=-\dfrac{1}{2}$.

2.3 Bài toán ứng dụng của sự liên tục

Định lý Giá trị trung gian cho phép ta khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với $f(x)$ là hàm liên tục.

Dạng toán 2.3 **Ứng dụng của hàm số liên tục**

Bước 1: Xác định hàm số liên tục
Đưa phương trình về dạng $f(x) = 0$.
Chứng minh $f(x)$ liên tục trên miền khảo sát D.

Bước 2: Khảo sát sự tồn tại nghiệm bằng cách chỉ ra hai số a và b thuộc D thỏa
Nếu $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.
Nếu $f(a) \cdot f(b) > 0$ thì không tìm được nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

✎ **Ví dụ 2.11** Khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình

$$x^5 - 3x + 7 = 2 \qquad (*)$$

trên khoảng $(-2, -1)$ và $(0, 1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^5 - 3x + 5$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x) = 0$. — Bước 1: Xác định hàm số.
Hàm số f liên tục trên $D = (-2, -1) \cup (0, 1)$.

Ta có $f(-2) = -21, f(-1) = 7 \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0$. — Bước 2: Khảo sát sự tồn tại nghiệm
Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trong $(-2, -1)$.
Ta có $f(0) = 5, f(1) = 3 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) > 0$.
Không tìm được nghiệm của $f(x) = 0$ trong $(0, 1)$.
Vậy $x^5 - 3x + 7 = 2$ có ít nhất một nghiệm trên D. ■

✎ **Ví dụ 2.12** Giải phương trình

$$x + 3\sin x = \frac{1}{2} \qquad (*)$$

trên khoảng $(-1, 1)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x + 3\sin x - 1/2$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x) = 0$. — Bước 1: Xác định hàm số.
Hàm số này liên tục trên $D = (-1, 1)$.

Ta có $f(-1) = -4,024; f(1) = 3,024 \Rightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$. — Bước 2: Khảo sát sự tồn tại nghiệm
Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(-1, 1)$.
Ta có $f(0) = -0,5 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$.
Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0, 1)$.
Ta có $f(0,5) = 1,438 \Rightarrow f(0) \cdot f(0,5) < 0$.
Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0; 0,5)$.
Ta có $f(0,25) = 0,4922 \Rightarrow f(0) \cdot f(0,25) < 0$.
Do đó $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(0; 0,25)$.
Ta có $f(0,125) = -0,001 \simeq 0$.
Vậy $x + 3\sin x = \dfrac{1}{2}$ có nghiệm gần đúng là $x = 0,125$. ■

❖ Bài tập tự giải

2.24. Chứng minh các phương trình sau có ít nhất 1 nghiệm.

a) $x^3 - x - 1 = 0$.

b) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

2.25. Chứng minh các phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm.

a) $x^5 - 6x + 3 = 0$.

b) $|x + 4| = 2\sin x$.

2.26. Giải phương trình

$x^4 - 4x - 1 = 0$ với $x \in [0, 2]$. ĐS: $x \simeq 1,663$.

2.27. Giải phương trình

$\dfrac{1}{x^2+2} + \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{5}$ với $x \in [1, 3]$. ĐS: $x \simeq 2,920$.

2.28. Giải phương trình

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 2x$ với $x \in [0, 1]$. ĐS: $x \simeq 1,816$.

2.29. Giải phương trình

$2^x - x - 4 = 0$ với $x \in [2, 4]$. ĐS: $x \simeq 2,756$.

2.30. Giải phương trình

$e^x - 3x^2 = 0$ với $x \in [3, 5]$. ĐS: $x \simeq 3,733$.

2.31. Giải phương trình

$x - \ln(x + 1) = 4$ với $x \in [5, 7]$. ĐS: $x \simeq 5,937$.

2.32. Giải phương trình

$x - \sin x = 0,25$ với $x \in [1, 2]$. ĐS: $x \simeq 1,171$.

2.33. Giải phương trình

$\cos 2x + x - 5 = 0$ với $x \in [5, 7]$. ĐS: $x \simeq 5,330$.

2.34. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm với mọi m.

a) $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$.

b) $(m^2 - 1)x^3 + 3x - 1 = 0$.

2.35. Cho hàm $f : [a, b] \to [a, b]$ liên tục.
Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong $[a, b]$.

CHƯƠNG 3: ĐẠO HÀM và VI PHÂN

3.1 Bài toán tìm đạo hàm hàm ngược, hàm ẩn

Dạng toán 3.1 **Tìm đạo hàm hàm ngược, hàm ẩn, phương trình tham số**

Tìm đạo hàm hàm ngược của hàm số f.
Bước 1: Tìm đạo hàm f' của hàm thuận.
Bước 2: Tìm đạo hàm hàm ngược bằng cách lấy nghịch đảo f'.
Tìm đạo hàm của hàm ẩn $F(x, y) = 0$.
Bước 1: Lấy đạo hàm $\frac{dF}{dx}$ và chú ý rằng $\frac{dx}{dx} = 1$ và $\frac{dy}{dx} = y'(x)$.
Bước 2: Biến đổi phương trình $dF = 0$ để tìm biểu diễn của $y'(x)$ theo x và y.
Tìm đạo hàm của phương trình tham số $y(t), x(t)$.
Bước 1: Tìm các đạo hàm của hàm y và x theo biến t: $y'_t(t), x'_t(t)$.
Bước 2: Tìm đạo hàm của y theo x theo công thức $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$.

✎ Ví dụ 3.1 Tìm đạo hàm hàm ngược của
$$f(x) = \cos x \qquad \text{với } x \in (0, \pi/2).$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm thuận.

Ta có $y = f(x) = \cos x$ nên $f'(x) = -\sin x$.

Bước 2: Tìm đạo hàm hàm ngược. Hàm g là hàm phụ thuộc biến y nhưng được tính theo trị số của x.

Đạo hàm của hàm ngược $x = g(y)$ được tính bởi
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x}$$
Do $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}$ nên $g'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Đạo hàm hàm ngược được tính theo biến x bởi $(f^{-1})'(x) = g' \circ f(x)$.

Vậy $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ■

✎ Ví dụ 3.2 Tính $g'(2)$ với g là hàm ngược của hàm số
$$f(x) = 2x + \ln x.$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm thuận.

Ta có $y = f(x) = 2x + \ln x$ nên $y'(x) = 2 + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$.

Bước 2: Tìm đạo hàm hàm ngược. Hàm g là hàm phụ thuộc biến y nhưng được tính theo trị số của x.

Đạo hàm của hàm ngược $x = g(y)$ được tính bởi
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{x}{2x+1}$$
Dễ thấy khi $y = 2$ thì $x = 1$ nên
$$g'(2) = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$
Vậy $g'(2) = \frac{1}{3}$. ■

✎ Ví dụ 3.3 Tìm đạo hàm của hàm ẩn $y(x)$ thỏa
$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Lời giải.

Đặt $F = x^3 + y^3 - 3xy$. Ta có $F(x, y) = 0$. — Bước 1: Đạo hàm của hàm $F(x, y)$.

Lấy vi phân $\dfrac{dF}{dx}$ ta thu được
$$3x^2\frac{dx}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3\left(\frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (3y^2 - 3x)y' = 3y - 3x^2$$
Bước 2: Đạo hàm hàm ẩn $y(x)$.

Vậy $y' = \dfrac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$. ■

✎ Ví dụ 3.4 Tính đạo hàm tại $x = 0$ của hàm ẩn $y(x)$ thỏa
$$e^y + xy - 2 = 0.$$

Lời giải.

Đặt $F = e^y + xy - 2$. Ta có $F(x, y) = 0$. — Bước 1: Đạo hàm của hàm $F(x, y)$.

Lấy đạo hàm $\dfrac{dF}{dx}$ ta thu được
$$\frac{dy}{dx}e^y + \frac{dx}{dx}y + x\frac{dy}{dx} = 0.$$
$$\Leftrightarrow y'e^y + y + xy' = 0$$
$$\Leftrightarrow (e^y + x)y' = -y$$
$$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$
Bước 2: Đạo hàm hàm ẩn $y(x)$.

Thay $x = 0$ vào $F(x, y) = 0$ ta được $e^y + 0 \cdot y = 2$ nên $y = \ln 2$.

Vậy $y'(0) = -\dfrac{\ln 2}{e^{\ln 2} + 0} = -\dfrac{\ln 2}{2}$. ■

✎ Ví dụ 3.5 Tìm đạo hàm cấp hai của hàm ẩn $y(x)$ thỏa
$$y = x^2 - y^2.$$

Lời giải.

Đặt $F = y - x^2 + y^2$. Ta có $F(x, y) = 0$. — Bước 1: Đạo hàm của hàm $F(x, y)$.

Lấy đạo hàm $\dfrac{dF}{dx}$ ta thu được
$$\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$
$$\Leftrightarrow \quad y' - 2x + 2yy' = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{2x}{1 + 2y}.$$
Bước 2: Đạo hàm hàm ẩn $y(x)$.

Tiếp tục lấy đạo hàm của y' theo x ta thu được
$$y'' = \frac{2(1 + 2y) - 2y'2x}{(1 + 2y)^2} = \frac{2}{1 + 2y} - \frac{4x}{(1 + 2y)^2}\frac{2x}{(1 + 2y)}.$$
Thay $y' = \dfrac{2x}{1 + 2y}$ vào biểu thức của y''.

Vậy $y''(x) = \dfrac{2(1 + 2y)^2 - 8x^2}{(1 + 2y)^3}$. ■

✎ Ví dụ 3.6 Tìm đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$ của phương trình tham số
$$\begin{cases} y = \sin t \\ x = \cos t \end{cases} \quad \text{với } 0 < t < \pi.$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm theo biến t — Ta có $y'(t) = \cos t$, $x'(t) = -\sin t$.

Bước 2: Đạo hàm hàm tham số. — Do đó $\dfrac{dy}{dx}(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\cos t}{-\sin t}$.

Với $0 < t < \pi$ ta có $x = \cos t \quad \Rightarrow \sin t = \sqrt{1-x^2}$.

Vậy $\dfrac{dy}{dx}(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ■

✎ Ví dụ 3.7 Tính đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$ tại $t = \dfrac{\pi}{2}$ của phương trình tham số
$$\begin{cases} y = t\sin t \\ x = t\cos t \end{cases} \quad \text{với } 0 < t < \pi.$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm theo biến t — Ta có $y'(t) = \sin t + t\cos t$, $x'(t) = \cos t - t\sin t$.

Bước 2: Đạo hàm hàm tham số. — Do đó $\dfrac{dy}{dx}(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$.

Vậy $\dfrac{dy}{dx}\left(t = \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin(\pi/2) + (\pi/2)\cos(\pi/2)}{\cos(\pi/2) - (\pi/2)\sin(\pi/2)} = -\dfrac{2}{\pi}$. ■

✎ Ví dụ 3.8 Tìm đạo hàm bậc ba $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ của phương trình tham số:
$$\begin{cases} y = t^2 + t \\ x = \ln t - 1 \end{cases} \quad \text{với } 0 < t < \pi.$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm theo biến t — Ta có $y'(t) = 2t + 1$, $x'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Bước 2: Đạo hàm hàm tham số. — Do đó $\dfrac{dy}{dx}(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2t+1}{1/t} = 2t^2 + t$.

Bước 1: Tìm đạo hàm theo biến t — Đặt $g(t) = \dfrac{dy}{dx}(t)$. Khi đó $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg/dt}{dx/dt} = \dfrac{g'(t)}{x'(t)}$.

Ta có $g'(t) = 4t + 1$, $x'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Bước 2: Đạo hàm hàm tham số. — Do đó $\dfrac{d^2y}{dx^2}(t) = \dfrac{4t+1}{1/t} = 4t^2 + t$.

Bước 1: Tìm đạo hàm theo biến t — Đặt $h(t) = \dfrac{d^2y}{dx^2}(t)$. Khi đó $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dh}{dx} = \dfrac{dh/dt}{dx/dt} = \dfrac{h'(t)}{x'(t)}$.

Ta có $h'(t) = 8t + 1$, $x'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Bước 2: Đạo hàm hàm tham số. — Do đó $\dfrac{d^3y}{dx^3}(t) = \dfrac{8t+1}{1/t} = 8t^2 + t$. ■

❖ Bài tập tự giải

3.1. Tìm đạo hàm hàm ngược của

a) $f(x) = \sin x$. ĐS: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $f(x) = \tan x$. $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3.2. Tính giá trị đạo hàm hàm ngược tại $x = 1$ của
$f(x) = x^3 - 2x$. ĐS: $(f^{-1})'(y(1)) = 1$.

3.3. Tính giá trị đạo hàm hàm ngược tại $x = 0$ của
$f(x) = 2x - \sin x$. ĐS: $(f^{-1})'(y(0)) = -1$.

3.4. Tìm đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa
$y\cos x + xe^y = 3$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(x,y) = \dfrac{y\sin x - e^y}{xe^y + \cos x}$.

3.5. Tìm đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa
$\dfrac{y}{x} = \ln(xy)$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(x,y) = \dfrac{y}{x}\dfrac{x+y}{y-x}$.

3.6. Tính đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa
$x^2 + xy + y^2 - 2y^3 = x^3 \quad$ tại $x = 0, y > 0$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(x = 0, y = \dfrac{1}{2}) = 1$.

3.7. Tính đạo hàm của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa
$\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 3 \quad$ tại $x = 1, y = 0$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(x = 1, y = 0) = 3$.

3.8. Tìm đạo hàm của phương trình tham số

a) $x = \sqrt{t^2+1}$, $y = e^{-2t}$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(t) = -2\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{e^{2t}}$.

b) $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. $\dfrac{dy}{dx}(t) = -\dfrac{2t}{t^2-1}$.

3.9. Tính đạo hàm của phương trình tham số
$x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{t}{t+1} \quad$ tại $t = 0$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(t = 0) = 1$.

3.10. Tính đạo hàm của phương trình tham số
$x = te^t$, $y = (t+1)\ln t \quad$ tại $t = 1$. ĐS: $\dfrac{dy}{dx}(t = 1) = \dfrac{1}{e}$.

3.11. Giả sử f^{-1} là hàm ngược của hàm số f.
Biết $f(4) = 5$ và $f^{-1\prime}(4) = \dfrac{2}{3}$. Tính $(f^{-1})'(5)$. ĐS: $(f^{-1})'(5) = \dfrac{3}{2}$.

3.12. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa $y^2 = xy + 2$. ĐS: $\dfrac{d^2y}{dx^2}(x,y) = \dfrac{2y^2}{(2y-x)^2}$.

3.13. Chứng minh rằng phương trình tham số $x = e^t\sin t, y = e^t\cos t$
thỏa mãn biểu thức $\dfrac{d^2y}{dx^2}(x+y)^2 = 2(x\dfrac{dy}{dx} - y)$.

3.2 Bài toán tìm cực trị của hàm số

Bài toán tìm cực trị địa phương, cực trị toàn cục của hàm số là bài toán được ứng dụng rộng rãi trong rất nhiều lĩnh vực.

Dạng toán 3.2 **Tìm cực trị địa phương của hàm số**

Bước 1: Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số.
- Tìm đạo hàm f' của hàm số.
- Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm điểm cực trị x_0 của hàm số.

Bước 2: Khảo sát cực trị địa phương
- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.
- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Bước 3: Khảo sát trên biên đóng (không trùng với điểm cực trị)
Cho a là biên trái và b là biên phải, khi đó:
- Nếu $f'(a) > 0$ thì a là điểm cực tiểu, ngược lại thì a là điểm cực đại.
- Nếu $f'(b) > 0$ thì b là điểm cực đại, ngược lại thì b là điểm cực tiểu.

Tập xác định $\mathbb{R}$ nên không có biên.

✎ **Ví dụ 3.9** Tìm cực trị của $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Bước 2: Tìm cực trị hàm số

Ta có $f''(x) = 6x - 3$.
- Tại $x = -1$: $f''(-1) = -9 < 0$ nên $x = -1$ là điểm cực đại.
- Tại $x = 2$: $f''(2) = 9 > 0$ nên $x = 2$ là điểm cực tiểu.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ với $f(2) = -10$
và đạt cực đại tại $x = -1$ với $f(-1) = 7$. ■

Tập xác định [3,7) chứa biên trái.

✎ **Ví dụ 3.10** Tìm cực trị của $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 2$ trên tập xác định là $[3, 7)$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2 & \text{(loại)} \\ x = 4 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Bước 2: Tìm cực trị hàm số

Ta có $f''(x) = 6x - 18$.
- Tại $x = 4$: $f''(4) = 6 > 0$ nên $x = 4$ là điểm cực tiểu.

Bước 3: Tìm cực trị trên biên
Biên phải 7 không thuộc tập xác định nên không được khảo sát. Thực tế thì giá trị của f tại các điểm lân cận 7 rất lớn (gần 68).

Tại điểm biên trái $x = 3$ ta có $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$.
$\Rightarrow x = 3$ là điểm cực đại

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$ với $f(4) = 14$
và đạt cực đại tại $x = 3$ với $f(3) = 16$. ■

❖ Bài tập tự giải

3.14. Tìm cực trị của hàm số
$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. ĐS: CĐ $(-1, 10)$, CT $(3, -22)$.

3.15. Tìm cực trị của hàm số
$y = -x^4 + 2x^2 + 1$. ĐS: CĐ $(-1, 2)$, CT $(0, 1)$, CĐ $(1, 2)$.

3.16. Tìm cực trị của hàm số
$y = \dfrac{x-2}{x+1}$. ĐS: không có cực trị.

3.17. Tìm cực trị của hàm số
$y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. ĐS: CĐ $(0, -1)$, CT $(2, 3)$.

3.18. Tìm cực trị của hàm số
$y = \sqrt{x^2 - x + 1}$. ĐS: CT $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3.19. Tìm cực trị của hàm số
$y = |x|(x + 2)$. ĐS: CT $(0, 0)$, CĐ $(-1, 1)$.

3.20. Tìm cực trị của hàm số
$y = x - \sin 2x + \dfrac{\pi}{6}$ với $x \in (0, \pi)$. ĐS: CT $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, CĐ $(\frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3.21. Tìm cực trị của hàm số
$y = 3 - 2\cos x - \cos(2x)$ với $x \in (-\pi, \pi)$. ĐS: CĐ $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{9}{2})$, CT $(0, 0)$, CĐ $(\frac{2\pi}{3}, \frac{9}{2})$.

3.22. Tìm cực trị của hàm số
$y = \dfrac{1 + \ln x}{x}$. ĐS: CĐ $(1, 1)$.

3.23. Tìm cực trị của hàm số
$y = xe^{-x^2/2}$. ĐS: CT $(-1, -e^{-1/2})$, CĐ $(1, e^{-1/2})$.

3.24. Tìm cực trị của hàm số
$y = |x + 3| + \dfrac{1}{x+1}$. ĐS: CT $(-3, -\frac{1}{2})$, CĐ $(-2, 0)$, CT $(0, 4)$.

3.25. Biện luận số cực trị của hàm số sau theo tham số m.
$y = \dfrac{1}{2}x^4 - mx^2 + \dfrac{3}{2}$.

3.26. Biện luận số cực trị của hàm số sau theo tham số m.
$y = (m + 2)x^3 + 3x^2 + mx + m$.

3.27. Biện luận số cực trị của hàm số sau theo tham số m.
$y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$.

Việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng mở hoặc khoảng nửa mở là khá phức tạp cả về mặt thực hành lẫn lý luận. Vì vậy người ta thường chỉ đặt ra yêu cầu trên với hàm số có tập xác định là khoảng đóng.

Dạng toán 3.3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

Bước 1: Tìm điểm cực trị x_0 của hàm số.
Tìm đạo hàm f' của hàm số.
Giải phương trình $f'(x) = 0$ để tìm điểm cực trị x_0 của hàm số.

Bước 2: So sánh giá trị của hàm số tại các điểm cực trị và các điểm biên
Giá trị tại điểm nào lớn nhất thì điểm đó là cực đại toàn cục.
Giá trị tại điểm nào thấp nhất thì điểm đó là cực tiểu toàn cục.

✎ Ví dụ 3.11 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x \qquad \text{với } x \in [-2, 4].$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Khi đó:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \text{(nhận)} \\ x = 2 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Bước 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Các giá trị tại cực trị là: $f(-1) = 7$, $f(2) = -10$.
Các giá trị tại biên là: $f(-2) = -\frac{7}{2}$, $f(4) = 16$.

Vậy hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ với $f(2) = -10$
và có giá trị lớn nhất tại $x = 4$ với $f(4) = 16$. ■

✎ Ví dụ 3.12 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} \qquad \text{với } x \in [-3, -1) \cup [2, \infty).$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Ta có $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$. Khi đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 - \sqrt{2} & \text{(loại)} \\ x = 1 + \sqrt{2} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Bước 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Các giá trị tại cực trị là: $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$.
Các giá trị tại biên là: $f(-3) = -\frac{9}{2}$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$,
$f(2) = 3$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Vậy hàm số có giá trị nhỏ nhất tại $x = -3$ với $f(-3) = -\frac{9}{2}$
và không có giá trị lớn nhất. ■

❖ Bài tập tự giải

3.28. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3\dfrac{x^2}{2} + 2x$ với $x \in [-3, 0]$. ĐS: Min $(-3, -\dfrac{3}{2})$, Max $0, 0)$.

3.29. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$ với $x \in [-3, 2]$. ĐS: Max $(-3, 57)$, Min $(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{3}{4})$.

3.30. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ với $x \in [-3, 2) \cup (3, 5]$. ĐS: Min $(2, -4)$, Max không tồn tại.

3.31. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x + 5}{2x + 1}$ với $x \in [-3, -1] \cup [0, 1]$. ĐS: Min $(-1, -5)$, Max $(0, 5)$.

3.32. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \sqrt{2 - x^2 - x}$ với $x \in [-1, 0]$. ĐS: Max $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2})$, Min $(0, 0)$.

3.33. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{1-x}$ với $x \in [1, 10]$. ĐS: Min không tồn tại, Max $(10, -\dfrac{2}{15})$.

3.34. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ với $x \in [-1, 2]$. ĐS: Min $(-1, -\sqrt{3})$, Max $(\sqrt{2}, 2)$.

3.35. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = 2\cos x - \sin(2x)$ với $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. ĐS: Min $(\dfrac{\pi}{2}, 0)$, Max $(0, 2)$.

3.36. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$ với $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. ĐS: Min không tồn tại, Max $(\dfrac{\pi}{4}, 1)$.

3.37. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = x + \cos(x)$ với $x \in [\dfrac{\pi}{4}, 2\pi]$. ĐS: Min $(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$, Max $(2\pi, 2\pi + 1)$.

3.38. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$ với $x \in [0, 2\pi]$. ĐS: Min $(\dfrac{3\pi}{2}, -3)$, Max $(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{3})$.

3.39. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ với $x \in [-2, 2]$. ĐS: Min $(-1, \dfrac{1}{3})$, Max $(1, 1)$.

3.40. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ với $x \in [0, 2]$. ĐS: Max $(0, 1)$, Min $(1, -\dfrac{1}{3})$.

3.41. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & -2 \le x < 0, \\ 2x - 1 & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$
ĐS: Min $(0, -1)$, Max không tồn tại.

3.3 Bài toán tính giới hạn bằng quy tắc L'Hospital

Quy tắc L'Hospital là một công cụ rất mạnh để tính giới hạn của các hàm số có dạng vô định 0/0 hoặc ∞/∞. Đối với các dạng vô định khác như $\infty - \infty$, ∞^0, ... người ta biến đổi hàm số về dạng 0/0 hoặc ∞/∞ sau đó áp dụng quy tắc L'Hospital.

Dạng toán 3.4 Tính giới hạn bằng quy tắc L'Hospital

Bước 1: Biến đổi hàm số về dạng vô định 0/0 hoặc ∞/∞.

• Nếu hàm số có dạng $\infty - \infty$ hoặc $0 \cdot \infty$ ta biến đổi tương đương (quy đồng mẫu, thay phép nhân bằng chia nghịch đảo...)

• Nếu hàm số có dạng 1^∞, 0^0, ∞^0 Ta thực hiện biến đổi $\lim\limits_{x\to c} u^v = e^{\lim\limits_{x\to c} v \ln u}$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc L'Hospital để tính giới hạn của hàm số sau biến đổi.

Dạng $\frac{0}{0}$.

✎ Ví dụ 3.13 Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

Lời giải.

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x} = \dfrac{2}{3}$. ■

Dạng $\frac{0}{0}$.

✎ Ví dụ 3.14 Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Lời giải.

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$. ■

Dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

✎ Ví dụ 3.15 Tính $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Lời giải.

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$. ■

✎ Ví dụ 3.16 Tính $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$.

Dạng $0\cdot\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.

Bước 1: Biến đổi về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2} = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$. ■

✎ Ví dụ 3.17 Tính $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

Dạng $\infty - \infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$.

Bước 1: Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-1/x}{\ln x + (x-1)/x}\\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$. ■

✎ Ví dụ 3.18 Tính $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Dạng 1^∞.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}}$.

Bước 1: Biến đổi về dạng $\frac{0}{0}$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

$$e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{1/x}{-1}} = e^{-1}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$. ■

✎ Ví dụ 3.19 Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Dạng 0^0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}}$.

Bước 1: Biến đổi về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta thu được

Bước 2: Dùng quy tắc L'Hospital.

$$e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x} = e^0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$. ■

❖ Bài tập tự giải

3.42. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4}.$$ ĐS: 0.

3.43. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x+3}-2}.$$ ĐS: 20.

3.44. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}.$$ ĐS: $\frac{1}{4}$.

3.45. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+x^2-1}{\sin^2 x+x^2}.$$ ĐS: $-\frac{1}{2}$.

3.46. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x-x}.$$ ĐS: -3.

3.47. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(1+\ln x)}{\ln x}.$$ ĐS: 1.

3.48. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{\sin x}.$$ ĐS: 0.

3.49. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{x\sin x}.$$ ĐS: không tồn tại.

3.50. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$ ĐS: 2.

3.51. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{\sin\left[\pi(x-1)\right]}.$$ ĐS: $\frac{1}{\pi}$.

3.52. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln\sin 3x}.$$ ĐS: 1.

3.53. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x\tan x}.$$ ĐS: $-\frac{1}{2}$.

3.54. Tính giới hạn sau:
$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(\sin x)}{\ln x^2}+\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\right].$$ ĐS: $\frac{3}{4}$.

3.55. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot^2 x.$ ĐS: $\frac{1}{2}$.

3.56. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2(x)$. ĐS: 0.

3.57. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x-1)\ln x$. ĐS: 0.

3.58. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x\ln(x-1).$ ĐS: 0.

3.59. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}.$ ĐS: $\frac{4}{\pi}$.

3.60. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{1}{\sqrt{x}}.$ ĐS: 0.

3.61. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{10}e^x.$ ĐS: 0.

3.62. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x}\right).$ ĐS: 0.

3.63. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{1-\cos x}\right).$ ĐS: $-\frac{1}{6}$.

3.64. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right).$ ĐS: 0.

3.65. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$ ĐS: $\frac{1}{2}$.

3.66. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right].$ ĐS: $\frac{1}{2}$.

3.67. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x}\right].$ ĐS: $-\frac{1}{2}$.

3.68. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(x^2+1)-\ln(2x^2-e^{-x})\right].$ ĐS: $-\ln 2$.

3.69. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right).$ ĐS: $\frac{2}{3}$.

3.70. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)^{x-2}$. ĐS: 1.

3.71. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2}{x-1}}$. ĐS: e^4.

3.72. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}2x^{\frac{3}{\ln x-1}}$. ĐS: $2e^3$.

3.73. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)^x$. ĐS: e^2.

3.74. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. ĐS: $e^{-\frac{1}{2}}$.

3.75. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$. ĐS: e^4.

3.76. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x)^{\frac{2}{\ln x}}$. ĐS: e^2.

3.77. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x^4)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$. ĐS: 1.

3.78. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$. ĐS: 1.

3.79. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$. ĐS: 1.

3.80. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{\frac{3x}{2}}$. ĐS: e^6.

3.81. Tính giới hạn sau:
$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$. ĐS: e^2.

3.4 Bài toán ứng dụng của vi phân hàm số

Vi phân của hàm số được sử dụng trong nhiều vấn đề của toán học lẫn thực tiễn.

Dạng toán 3.5 **Ứng dụng của vi phân hàm số**

Bước 1: Tính giá trị đạo hàm $f'(x_0)$ của hàm số tại điểm khảo sát.
Bước 2: Tìm vi phân: $df = f'(x_0)dx$ và các yêu cầu của bài toán.

- Tính sai số: $\Delta y = |f'(x_0)|\Delta x$.
- Tính gần đúng: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Viết phương trình tiếp tuyến: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

✎ **Ví dụ 3.20** Tìm vi phân của $f(x) = x\ln x - x$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \ln x + 1 - 1$. Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Vi phân của f là $df = \ln x\ dx$. ■ Bước 2: Vi phân của hàm số

✎ **Ví dụ 3.21** Tính vi phân tại $x = 1$ của $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2$, $f'(1) = 5$. Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Vi phân của f tại $x = 1$ là: $df = 5\ dx$. ■ Bước 2: Vi phân của hàm số

✎ **Ví dụ 3.22** Tìm vi phân của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7.$$

Lời giải.

Lấy đạo hàm theo biến x ta được Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x}.$$

Vi phân của hàm ẩn cần tìm là $dy = \dfrac{x+y}{y-x}\ dx$. ■ Bước 2: Vi phân của hàm số

✎ **Ví dụ 3.23** Tính sai số Δy của hàm $y = f(x) = 5x + x^2$ khi $x = 2$ nếu biết sai số $\Delta x = 0,01$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 5 + 2x$, $f'(2) = 9$. Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Sai số Δy tại $x = 2$ và $\Delta x = 0,01$ là Bước 2: Tính sai số của hàm số

$$\Delta y = |f'(2)|\Delta x = 9 \cdot 0,01 = 0,09. \quad ■$$

✎ **Ví dụ 3.24** Tính gần đúng giá trị của $\sqrt{3,98}$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số.

Đặt $f(x) = \sqrt{x+3}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

Chọn $x_0 = 1$ thì $f(1) = 2, f'(1) = \dfrac{1}{4}$.

Bước 2: Tính giá trị gần đúng.

Tại $x = 0,98$ ta có

$$f(0,98) \simeq f(1) + f'(1)(0,98 - 2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3,98} \simeq \sqrt{1+3} + \frac{1}{4} \cdot (-0,02) = 2 - 0,005 = 1,995.$$

Vậy $\sqrt{3,98} \simeq 1,995$. ■

✎ **Ví dụ 3.25** Tính gần đúng xấp xỉ giá trị của $\ln(1,01)$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số.

Đặt $f(x) = \ln x$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Chọn $x_0 = 1$ thì $f(1) = \ln 1 = 0, f'(1) = 1$.

Bước 2: Tính giá trị gần đúng.

Tại $x = 1,01$ ta có

$$f(1,01) \simeq f(1) + f'(1)(1,01 - 1)$$

$$\Rightarrow \ln(1,01) \simeq \ln 1 + 1 \cdot (0,01) = 0 + 0,01 = 0,01.$$

Vậy $\ln(1,01) \simeq 0,01$. ■

✎ **Ví dụ 3.26** Viết phương trình tiếp tuyến tại $x = 3$ của

$$y = x^3 - 2x^2 - 1.$$

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 4x,\ f'(3) = 15$.

Bước 2: Viết phương trình tiếp tuyến.

Tại $x = 3$ ta có

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \qquad \Rightarrow y - 8 = 15 \cdot (x-3)$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 15x - 37$. ■

✎ **Ví dụ 3.27** Viết phương trình tiếp tuyến tại $x = 0, y = 1$ của hàm ẩn $y = f(x)$ thỏa $xy^2 + y + (x-1)^2 = 2$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm đạo hàm hàm số

Lấy đạo hàm hai vế phương trình trên ta được

$$y^2 + 2xyy' + y' + 2(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow y' = \frac{2(1-x) - y^2}{2xy + 1}$$

Vậy $y'(0) = \dfrac{2(1-0) - 1^2}{2.0.1 + 1} = 1$.

Bước 2: Viết phương trình tiếp tuyến.

Tại $x = 0, y = 1$ ta có

$$y - y(0) = f'(0)(x-0) \qquad \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x-0)$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = x + 1$. ■

❖ Bài tập tự giải

3.82. Tìm vi phân của hàm số
$y = f(x) = (\sqrt{x}+1)^2.$ ĐS: $dy = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx.$

3.83. Tính vi phân của hàm số
$y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ tại $x = 1.$ ĐS: $dy = -dx.$

3.84. Tính sai số Δy của hàm số
$y = 2x + e^x \sin x$ tại $x = 0$ và $\Delta x = 0,02.$ ĐS: $\Delta y = 0,06.$

3.85. Tính sai số Δy của hàm số
$y = \ln x - x^2 - 2$ tại $x = 2$ và $\Delta x = 0,01.$ ĐS: $\Delta y = 0,035.$

3.86. Tính gần đúng giá trị của hàm số
$f(x) = \sqrt[3]{2+3x}$ tại $x = 2,04.$ ĐS: $f(2,04) \simeq 2,01.$

3.87. Tính gần đúng giá trị của hàm số
$f(x) = \sqrt{x+4}\cos x$ tại $x = -0,02.$ ĐS: $f(-0,02) \simeq 1,995.$

3.88. Tính gần đúng giá trị của hàm số
$f(x) = x\sqrt{x+2}$ tại $x = 0,04.$ ĐS: $f(0,04) \simeq 0,057.$

3.89. Tìm tiếp tuyến của đồ thị của hàm số
$y = e^x - \ln(3x+1)$ tại $x = 0.$ ĐS: $y = 1 - 2x.$

3.90. Tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số
$y^2 - 3xy + 2ye^x = 3$ tại $x = 0, y > 0.$ ĐS: $y = 1 + \dfrac{x}{4}.$

3.91. Tìm tiếp tuyến của đồ thị của hàm số
$x = 2t+1, y = t^2 - 2$ tại $t = 2.$ ĐS: $y = 2x - 8.$

3.92. Tính gần đúng giá trị của hàm số
$f(x) = \ln 3x + \sqrt{3x}$ tại $x = 0,33.$ ĐS: $\Delta y = 0,985.$

3.93. Tìm tiếp tuyến của đồ thị của hàm số
$3(x^2+y^2)^2 = 100xy$ tại điểm $(3,1).$ ĐS: $y = \dfrac{13}{9}x - \dfrac{10}{3}.$

3.94. Chứng minh rằng
a) Hai đường cong $2x^2 + y^2 = 24$ và $y^2 = 8x$ vuông góc với nhau tại giao điểm $(2,4)$.
b) Hai đường cong $y^2 - x^2 = 3$ và $xy = 5$ vuông góc với nhau tại mọi giao điểm của chúng.

3.5 Bài toán khai triển Taylor của hàm số

Khai triển Taylor giúp ta thành lập một xấp xỉ của hàm số bằng đa thức. Đối với các hàm phức tạp, việc thực hiện các phép toán giải tích (giới hạn, đạo hàm, tích phân ...) là rất khó. Nhưng ta có thể dễ dàng thực hiện các phép toán đó trên đa thức xấp xỉ của nó. Đây chính là lý do mà Khai triển Taylor đóng vai trò quan trọng trong giải tích.

Dạng toán 3.6 Khai triển Taylor của hàm số

Bước 1: Tìm giá trị các đạo hàm cấp cao của hàm số tại điểm khai triển x_0.
Tìm $f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$.
Tính giá trị $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$.

Bước 2: Viết khai triển Taylor của hàm số tại điểm khai triển x_0.

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+...+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$$

✎ Ví dụ 3.28 Khai triển Maclaurin tới cấp bốn cho $f(x) = \sin x$.

Khai triển Maclaurin là Khai triển Taylor tại $x = 0$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

Ta có $f(x) = \sin x, f(0) = 0;$
$f'(x) = \cos x, f'(0) = 1;$
$f''(x) = -\sin x, f''(0) = 0;$
$f'''(x) = -\cos x, f'''(0) = -1;$
$f^{(4)}(x) = \sin x, f^{(4)}(0) = 0.$

Bước 2: Khai triển Maclaurin

Khai triển Maclaurin cho hàm $\sin x$

$$f(x) \simeq 0 + 1(x-0) + 0\frac{(x-0)^2}{2} - 1\frac{(x-0)^3}{6} + 0\frac{(x-0)^4}{24}$$
$$\simeq x - \frac{x^3}{6}.$$

■

✎ Ví dụ 3.29 Khai triển Maclaurin tới cấp bốn cho $f(x) = \ln(1+x)$.

Khai triển Maclaurin là Khai triển Taylor tại $x = 0$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

Ta có $f(x) = \ln(1+x), f(0) = 0;$
$f'(x) = (1+x)^{-1}, f'(0) = 1,$
$f''(x) = -(1+x)^{-2}, f''(0) = -1;$
$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, f'''(0) = 2;$
$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, f^{(4)}(0) = -6.$

Bước 2: Khai triển Maclaurin

Khai triển Maclaurin cho hàm $\ln(1+x)$

$$f(x) \simeq 0 + 1(x-0) - 1\frac{(x-0)^2}{2} + 2\frac{(x-0)^3}{6} - 6\frac{(x-0)^4}{24}$$
$$\simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

■

✎ Ví dụ 3.30 Khai triển Taylor tới cấp ba cho
$$f(x) = \cos x \qquad \text{tại } x = \pi/2.$$

Lời giải.

Ta có $f(x) = \cos x, f(\pi/2) = 0;$ Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

$f'(x) = -\sin x, f'(\pi/2) = -1;$

$f''(x) = -\cos x, f''(\pi/2) = 0;$

$f'''(x) = \sin x, f'''(\pi/2) = 1.$

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ Bước 2: Khai triển Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq 0 - 1(x-\pi/2) + 0\frac{(x-\pi/2)^2}{2} + 1\frac{(x-\pi/2)^3}{6} \\ &\simeq \frac{\pi}{2} - x + \frac{(x-\pi/2)^3}{6}. \end{aligned}$$ ■

✎ Ví dụ 3.31 Khai triển Taylor tới cấp ba cho
$$f(x) = x^2 \ln x \qquad \text{tại } x = 1.$$

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2\ln x, f(1) = 0;$ Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

$f'(x) = x + 2x\ln x, f'(1) = 1;$

$f''(x) = 2\ln x + 3, f''(1) = 3;$

$f'''(x) = 2/x, f'''(1) = 2.$

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = 1$ Bước 2: Khai triển Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq 0 + 1(x-1) + 3\frac{(x-1)^2}{2} + 2\frac{(x-1)^3}{6} \\ &\simeq x - 1 + 3\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}. \end{aligned}$$ ■

✎ Ví dụ 3.32 Khai triển Taylor tới cấp bốn cho
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad \text{tại } x = 2.$$

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, f(2) = 3;$ Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}, f'(2) = -2;$

$f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}, f''(2) = 4;$

$f'''(x) = \dfrac{-12}{(x-1)^4}, f'''(2) = -12.$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{48}{(x-1)^5}, f^{(4)}(2) = 48.$

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = 2$ Bước 2: Khai triển Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq 3 - 2(x-2) + 4\frac{(x-2)^2}{2} - 12\frac{(x-2)^3}{6} + 48\frac{(x-2)^4}{24} \\ &\simeq 7 - 2x + 2(x-2)^2 - 2(x-2)^3 + 2(x-2)^4. \end{aligned}$$ ■

✎ **Ví dụ 3.33** Phân tích hàm $f(x) = x^3 - 2x + 1$ thành tổng lũy thừa của $(x+1)$ đến bậc ba.

Lời giải.

Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

Ta có $f(x) = x^3 - 2x + 1, f(-1) = 2;$
$f'(x) = 3x^2 - 2, f'(-1) = 1$
$f''(x) = 6x, f''(-1) = -6;$
$f'''(x) = 6, f'''(-1) = 6$

Bước 2: Khai triển Taylor.

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = -1$

$$f(x) \simeq 2 + 1(x+1) - 6\frac{(x+1)^2}{2} + 6\frac{(x+1)^3}{6}$$
$$\simeq 2 + (x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \qquad \blacksquare$$

✎ **Ví dụ 3.34** Phân tích hàm $f(x) = x\sqrt{x+1}$ thành tổng lũy thừa của $(x-2)$ đến bậc ba.

Lời giải.

Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

Ta có $f(x) = x\sqrt{x+1}, f(2) = 2\sqrt{3}$

$$f'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}, f'(2) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$f''(x) = \frac{3x+4}{4\sqrt{(x+1)^3}}, f''(2) = \frac{5\sqrt{3}}{18}$$
$$f'''(x) = -\frac{3x+6}{8\sqrt{(x+1)^5}}, f'''(2) = \frac{-\sqrt{3}}{18}.$$

Bước 2: Khai triển Taylor

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = 2$

$$f(x) \simeq 2\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x+2) + \frac{5\sqrt{3}}{18}\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}\frac{(x+2)^3}{6}$$
$$\simeq 2\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x+2) + \frac{5\sqrt{3}}{36}(x+2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{108}(x+2)^3. \qquad \blacksquare$$

✎ **Ví dụ 3.35** Tính gần đúng $\sin 31^o$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm các đạo hàm cấp cao

Đặt $f(x) = \sin x, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}; \quad f'(x) = \cos x, f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$f''(x) = -\sin x, f''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2};$$
$$f'''(x) = -\cos x, f'''(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bước 2: Khai triển Taylor

Khai triển Taylor cho hàm f tại $x_0 = \pi/6$

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{6})^3.$$

Chọn $x = \pi/6 + \pi/180$, khi đó $\sin 31^o$ được tính bởi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3.$$

Vậy $\sin 31^o \simeq 0,5150$. $\blacksquare$

❖ Bài tập tự giải

3.95. Khai triển Maclaurin tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = (x+1)\ln(1+x)$. ĐS: $f(x) \simeq x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$.

3.96. Khai triển Maclaurin tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = (2x+1)e^{x^2}$. ĐS: $f(x) \simeq 1 + 2x + x^2 + 2x^3$.

3.97. Khai triển Maclaurin tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = \dfrac{1+\ln(x+1)}{x+2}$. ĐS: $f(x) \simeq \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{17x^3}{48}$.

3.98. Khai triển Maclaurin tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = \dfrac{1}{3 - 2\sin x}$. ĐS: $f(x) \simeq \dfrac{1}{3} + \dfrac{2x}{9} - \dfrac{4x^2}{27} + \dfrac{5x^3}{81}$.

3.99. Khai triển Taylor tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = x\sqrt{2x+2}$ tại $x = 1$. ĐS: $f(x) \simeq 2 + \dfrac{5(x-1)}{2} + \dfrac{7(x-1)^2}{16} - \dfrac{3(x-1)^3}{64}$.

3.100. Khai triển Taylor tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại $x = 2$. ĐS: $f(x) \simeq \dfrac{1}{3} + \dfrac{2(x-2)}{9} - \dfrac{2(x-2)^2}{27} + \dfrac{2(x-2)^3}{81}$.

3.101. Khai triển Taylor tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = \dfrac{e^{2-x}}{x}$ tại $x = 2$. ĐS: $f(x) \simeq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3(x-2)}{4} + \dfrac{5(x-2)^2}{8} - \dfrac{19(x-2)^3}{48}$.

3.102. Khai triển Taylor tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = x^3 \ln x$ tại $x = 1$. ĐS: $f(x) \simeq (x-1) + \dfrac{5(x-1)^2}{2} + \dfrac{11(x-1)^3}{6}$.

3.103. Khai triển Taylor tới cấp 3 cho hàm số

$f(x) = \sin x \cos 2x$ tại $x = \dfrac{\pi}{2}$. ĐS: $f(x) \simeq -1 + \dfrac{5(x-\pi/2)^2}{2}$.

3.104. Tính gần đúng giá trị của

a) $A = \cos 46^o$. ĐS: $0,695$.

b) $B = \ln 1,05$. $0,049$.

c) $C = e^{-0,98}$. $0,386$.

d) $D = \sqrt[3]{7,93}$. $1,994$.

3.105. Phân tích hàm số sau thành lũy thừa tới cấp 3 của $x+2$:

$f(x) = x\sqrt{x+3}$. ĐS: $f(x) \simeq -2 + \dfrac{3(x+2)^2}{4} - \dfrac{(x+2)^3}{4}$.

3.106. Phân tích hàm số sau thành lũy thừa tới cấp 3 của $x-1$:

$f(x) = x^2 + \ln x$. ĐS: $f(x) \simeq 1 + 3(x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3}$.

3.107. Phân tích hàm số sau thành lũy thừa tới cấp 3 của $x-2$:

$f(x) = x^3 - \sqrt{2x}$. ĐS: $f(x) \simeq 6 + \dfrac{23(x-2)}{2} + \dfrac{97(x-2)^2}{16} + \dfrac{63(x-2)^3}{64}$.

3.6 Bài toán về các định lý giá trị trung bình

Các định lý giá trị trung bình có nhiều ứng dụng, nhưng quan trọng và cơ bản nhất là ứng dụng trong việc khảo sát nghiệm của phương trình hoặc bất phương trình.

Dạng toán 3.7 **Ứng dụng của các định lý giá trị trung bình**

Bước 1: Kiểm tra các giả thiết của các định lý giá trị trung bình.

Bước 2: Áp dụng các định lý để giải quyết bài toán.

✎ Ví dụ 3.36 Chứng minh phương trình sau luôn có nghiệm
$$a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0, \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

Bước 1: Kiểm tra các giả thiết

Đặt $f(x) = a\sin x + \dfrac{b}{2}\sin 2x + \dfrac{c}{3}\sin 3x$.

Hàm số này liên tục trên $[0, \pi]$ và khả vi trên $(0, \pi)$.

Bước 2: Áp dụng Định lý Rolle.

Ta có $f(0) = f(\pi) = 0$, do đó tồn tại $x_0 \in (0, \pi)$ sao cho
$$f'(x_0) = a\cos x_0 + b\cos 2x_0 + c\cos 3x_0 = 0 \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}.$$
Vậy $a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0$ luôn có nghiệm. ■

✎ Ví dụ 3.37 Chứng minh $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bước 1: Kiểm tra các giả thiết

Đặt $f(x) = \sin x$. Chọn hai số a, b bất kỳ.

Hàm số này liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b)

Bước 2: Dùng Định lý Lagrange.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho
$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\sin a - \sin b}{a - b}.$$
Mặt khác $f'(c) = \cos c$ và $|\cos c| \leq 1$ nên
$$\left|\frac{\sin a - \sin b}{a - b}\right| \leq 1 \text{ hay } |\sin a - \sin b| \leq |a - b|.$$
■

✎ Ví dụ 3.38 Giải phương trình $5^x - 3^x = 2x$.

Lời giải.

Bước 1: Kiểm tra các giả thiết

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình, ta có $5^{x_0} - 5x_0 = 3^{x_0} - 3x_0$.
Đặt $f(t) = t^{x_0} - tx_0$.

Hàm số này liên tục trên $[3, 5]$ và khả vi trên $(3, 5)$.

Bước 2: Dùng Định lý Lagrange.

Ta có $f(5) = f(3)$, do đó tồn tại $c \in (3, 5)$ sao cho
$$0 = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = f'(c) \text{ nên} f'(c) = x_0(c^{x_0 - 1} - 1) = 0.$$
Giải $f'(c) = 0$ theo x_0 ta thu được $x_0 = 0$ hay $x_0 = 1$.

Vậy nghiệm của $5^x - 3^x = 2x$ là $\{0, 1\}$. ■

❖ Bài tập tự giải

3.108. Kiểm tra f có thỏa định lý Rolle, sau đó tìm số c sao cho $f'(c) = 0$
$f(x) = 5 - 12x + 3x^2$ với $x \in [1, 3]$. ĐS: $c = 2$.

3.109. Kiểm tra f có thỏa định lý Rolle, sau đó tìm số c sao cho $f'(c) = 0$
$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$ với $x \in [0, 3]$. ĐS: $c = \dfrac{1+\sqrt{19}}{3}$.

3.110. Kiểm tra f có thỏa định lý Rolle, sau đó tìm số c sao cho $f'(c) = 0$
$f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$ với $x \in [0, 9]$. ĐS: f không thỏa.

3.111. Kiểm tra f có thỏa định lý Rolle, sau đó tìm số c sao cho $f'(c) = 0$
$f(x) = \cos 2x$ với $x \in [\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$. ĐS: $c = \dfrac{\pi}{2}$.

3.112. Kiểm tra f có thỏa định lý Lagrange, sau đó tìm số c thỏa mãn định lý
$f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ với $x \in [-1, 1]$. ĐS: $c = 0$.

3.113. Kiểm tra f có thỏa định lý Lagrange, sau đó tìm số c thỏa mãn định lý
$f(x) = x^3 + x - 1$ với $x \in [0, 2]$. ĐS: $c = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3.114. Kiểm tra f có thỏa định lý Lagrange, sau đó tìm số c thỏa mãn định lý
$f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ với $x \in [1, 4]$. ĐS: f không thỏa.

3.115. Kiểm tra f có thỏa định lý Lagrange, sau đó tìm số c thỏa mãn định lý
$f(x) = e^{-2x}$ với $x \in [0, 3]$. ĐS: f không thỏa.

3.116. Chứng minh bất đẳng thức sau
$\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ với mọi số $a < b$.

3.117. Chứng minh bất đẳng thức sau
$|\cos a - \cos b| < |a - b|$ với mọi số $a < b$.

3.118. Chứng minh rằng
a) $(1+x)^n > 1 + nx$ với mọi $x > 1$.
b) $a^b + b^a > 1$ với mọi $a, b > 0$.

3.119. Chứng minh rằng
a) $2x + \cos x = 0$ có duy nhất một nghiệm.
b) $2x - 1 - \sin x = 0$ có duy nhất một nghiệm.

3.120. Chứng minh rằng
a) $x^3 - 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $[-2, 2]$.
b) $x^4 + x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

3.121. Chứng minh rằng một đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm.

3.7 Ứng dụng thực tế của đạo hàm

3.122. Vị trí một chất điểm được cho bởi phương trình

$$x = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

trong đó t được tính bằng giây (s) và x được tính bằng mét (m).

a) Tìm vận tốc tại thời gian t. Độ lớn vận tốc sau 2 giây? sau 4 giây?

b) Khi nào chất điểm đứng yên? Khi nào hạt chuyển động ngược chiều?

c) Tìm gia tốc tại thời gian t. Độ lớn gia tốc sau 2 giây? sau 4 giây?

d) Khi nào chất điểm tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

ĐS: a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $v(2) = -3\ m/s$, $v(4) = 9\ m/s$.
b) Đứng yên: $t = 1$, $t = 3$, ngược chiều: $t \in (1, 3)$.
c) $a(t) = 6t - 12$, $a(2) = 0\ m/s^2$, $a(4) = 12\ m/s^2$.
d) Tăng tốc: $t \geq 2$, giảm tốc: $0 \leq t < 2$.

3.123. Một bình trụ chứa 30 m^3 nước. Khi tháo nước từ đáy thùng, thể tích V của nước còn lại trong thùng sau t *phút* là

$$V(t) = 30\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$$

a) Hãy tìm lưu lượng nước chảy (tốc độ nước chảy) ra khỏi thùng như là hàm số theo thời gian t. Đơn vị của nó là gì?

b) Tại thời điểm $t = 30$ *phút*, hãy tìm tốc độ nước chảy và lượng nước còn lại trong thùng.

ĐS: a) $q(t) = \left(1 - \dfrac{t}{60}\right)\ m^3\ /phút$.
b) $q(30) = 0,5\ m^3/phút$, $V(30) = 7,5\ m^3$.

3.124. Một đèn từ mặt đất chiếu lên một bức tường cách đó 12 m. Nếu một người cao 2 m đi từ đèn đến bức tường với tốc độ $1,6\ m/s$, chiều dài của cái bóng trên bức tường giảm nhanh như thế nào khi anh ta cách tường 4 m?

ĐS: $h'(4) = -0,15\ m/s$.

3.125. Bệnh nhân A bị đau dạ dày và đang được điều trị. Lượng vi khuẩn HP (Helicobacter pylori) gây đau dạ dày tại ngày thứ m là

$$F(m) = 500 \ln(2t + 1) + 2\ 000.$$

Tìm công thức tính tốc độ phát triển của vi khuẩn HP. Sau 2 ngày thì nhóm vi khuẩn này có tốc độ phát triển bằng bao nhiêu?

ĐS: $F'(m) = \dfrac{1\ 000}{2t + 1}$, $F'(2) = 200$ *con/ngày*.

3.126. Mô hình phát triển dân số được cho bởi bài toán sau

$$\frac{dP}{dt} = kP - mt, \qquad P(0) = P_0.$$

trong đó t là thời gian (tính theo năm), P là số dân (tính theo triệu), m là hệ số di cư và k là hệ số phát triển dân số. Cho $k = 0,01$. Biết rằng tại thời điểm $t = 0$ số dân là 82 triệu.

a) Cho $m = 0$. Chứng minh rằng $P(t) = 82e^{0,01t}$. Sau 20 năm, dân số $P(20)$ là bao nhiêu?

b) Nếu $m \neq 0$. Giá trị $P(20)$ tăng hay giảm so với kết quả ở câu (a)?

ĐS: a) $P(20) = 100,155$ *triệu người*. b) $m > 0$: $P(20)$ giảm; $m < 0$: $P(20)$ tăng.

3.127. Trong một môi trường dinh dưỡng có 1 000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi quy luật:

$$p(t) = 1\ 000 + \frac{100t}{100 + t^2}$$

trong đó t là thời gian tính theo giờ. Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên là lớn nhất?

ĐS: 10 *giờ*.

3.128. Một hồ bị nhiễm khuẩn và được xử lý bằng một hóa chất kháng khuẩn. Sau t ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hóa bởi hàm

$$N(t) = 32\left(\frac{t}{4} - 2\ln\frac{t}{5}\right) \qquad \text{với } 1 \leq t \leq 15.$$

Trong khoảng thời gian này, cho biết số vi khuẩn cao nhất và thấp nhất là bao nhiêu và xảy ra khi nào?

ĐS: $N(1) = 111$, $N(8) = 34$ *con/ml*.

3.129. Một quần thể động vật bị nhiễm bệnh. Sau t ngày, tỉ lệ phần trăm động vật bị nhiễm bệnh được mô hình hóa bởi hàm

$$P(t) = 8te^{-t/12} \qquad \text{với } 0 \leq t \leq 60.$$

Cho biết tỉ lệ phần trăm động vật bị nhiễm bệnh cao nhất là bao nhiêu và xảy ra khi nào?

ĐS: $P(12) = 35,12\%$.

3.130. Giữa 0^oC và 30^oC, thể tích V (cm^3) của 1 kg nước ở nhiệt độ T được cho gần đúng bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Tìm nhiệt độ mà tại đó nước có mật độ lớn nhất.

ĐS: $T = 3,967^oC$.

3.131. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong 8 tháng vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

ĐS: ngày thứ 15.

3.132. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x (mg) là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

ĐS: 20 *mg*.

3.133. Năng lượng để một con cá bơi với vận tốc v ngược dòng nước (nước chảy với vận tốc u) được tính bởi công thức

$$E(v) = kv^3\frac{L}{v - u}$$

trong đó L là cự ly bơi và k là hằng số tỉ lệ. Xác định giá trị v để tối thiểu hóa E.

ĐS: $v = 3u/2$.

CHƯƠNG 4: NGUYÊN HÀM và TÍCH PHÂN

4.1 Bài toán tìm nguyên hàm và tính tích phân xác định

Ta dễ dàng tìm được nguyên hàm và tính tích phân xác định của các hàm cơ bản (Phụ lục E). Đối với hàm số phức tạp hơn ta phân tích nó thành tổ hợp của các hàm cơ bản rồi tìm nguyên hàm của chúng, sau đó tổng hợp lại để thu được nguyên hàm của hàm số ban đầu.

Dạng toán 4.1 Tìm nguyên hàm của hàm số

Bước 1: Phân tích hàm số thành dạng đơn giản
- Hàm số là tổng/hiệu của các hàm khác.
- Thêm bớt hạng tử để phân tích hàm số.

Bước 2: Tìm nguyên hàm của hàm số
- Tìm nguyên hàm của các hàm cơ bản bằng phụ lục E.
- Tổng hợp để tìm nguyên hàm của hàm ban đầu.

✎ Ví dụ 4.1 Tìm $F(x) = \int (x+1)^2 \, dx$.

Lời giải.

Ta có: $\int (x+1)^2 \, dx = \int x^2 + 2x + 1 \, dx$ — Bước 1: Phân tích thành tổng.

$= \int x^2 \, dx + \int 2x \, dx + \int 1 \, dx.$

Vậy $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + x + C$. ■ — Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

✎ Ví dụ 4.2 Tìm $F(x) = \int \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ — Bước 1: Phân tích thành tổng. Chú ý: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

$= \int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx - \int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \, dx = \int x^{-1/3} \, dx - \int x^{1/6} \, dx.$

Vậy $F(x) = \dfrac{x^{2/3}}{2/3} - \dfrac{x^{7/6}}{7/6} + C = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$. ■ — Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

✎ Ví dụ 4.3 Tìm $F(x) = \int (\ln x + \dfrac{1}{x} - e^x) \, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int (\ln x + \dfrac{1}{x} - e^x) \, dx = \int \ln x \, dx + \int \dfrac{1}{x} \, dx - \int e^x \, dx$. — Bước 1: Phân tích thành tổng.

Vậy $F(x) = x(\ln x - 1) + \ln x - e^x + C$. ■ — Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

✎ Ví dụ 4.4 Tìm $F(x)=\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Thêm bớt hạng tử.

Ta có $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx=\int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}\,dx=\int 1\,dx-\int \frac{4}{x^2+4}\,dx.$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x)=x-2\arctan\dfrac{x}{2}+C.$ ■

✎ Ví dụ 4.5 Tìm $F(x)=\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích thành hiệu.
$\sqrt{x^4-16}=\sqrt{x^2-4}\sqrt{x^2+4}$

Ta có
$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}\,dx=\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$$
$$=\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx-\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-4})-\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$

hay $F(x)=\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)+C.$ ■

✎ Ví dụ 4.6 Tìm $F(x)=\displaystyle\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đơn giản biểu thức.
Chú ý: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Ta có
$$\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x}\,dx=\int \frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{\sin x}\,dx$$
$$=\int \frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x}\,dx=\int \frac{1}{\sin x}\,dx+2\int \cos x\,dx.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x)=\ln(\tan\dfrac{x}{2})+2\sin x+C.$ ■

✎ Ví dụ 4.7 Tìm $F(x)=\displaystyle\int (\sin x+\frac{1}{\cos x})^2\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích thành tổng.
Chú ý: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

Ta có
$$\int (\sin x+\frac{1}{\cos x})^2\,dx=\int (\sin^2 x+2\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2 x})\,dx$$
$$=\int \sin^2 x\,dx+2\int \tan x\,dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx+2\int \tan x\,dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{2}\,dx-\int \frac{\cos 2x}{2}\,dx+2\int \tan x\,dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}-2\ln(\cos x)+\tan x+C.$ ■

✎ Ví dụ 4.8 Tính $I = \int_1^2 (x - \frac{1}{x})^2\, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int_1^2 (x - \frac{1}{x})^2\, dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right)\, dx$. Bước 1: Phân tích thành tổng.

Do đó $\int_1^2 (x - \frac{1}{x})^2\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2$ Bước 2: Tính toán tích phân.

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1 - \frac{1}{1}\right).$$

Vậy $I = \frac{5}{6}$. ■

✎ Ví dụ 4.9 Tính $I = \int_1^e \frac{x^2 - 3}{x^3}\, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int_1^e \frac{x^2 - 3}{x^3}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx - 3\int_1^e \frac{1}{x^3}\, dx$. Bước 1: Phân tích thành tổng.

Do đó $\int_1^e \frac{x^2 - 3}{x^3}\, dx = \left(\ln x + \frac{3}{2x^2}\right)\Big|_1^e$ Bước 2: Tính toán tích phân.

$$= \left(\ln e + \frac{3}{2e^2}\right) - \left(\ln 1 + \frac{3}{2\cdot 1^2}\right).$$

Vậy $I = \frac{1}{2}(\frac{3}{e^2} - 1)$. ■

✎ Ví dụ 4.10 Tính $I = \int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(x - 1)\, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(x - 1)\, dx = \int_0^4 (x^{3/2} + x - x^{1/2} - 1)\, dx$ Bước 1: Phân tích thành tổng.

$$= \int_0^4 x^{3/2}\, dx + \int_0^4 x\, dx - \int_0^4 x^{1/2}\, dx - \int_0^4 1\, dx.$$

Do đó $\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(x - 1)\, dx = \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} - x\right)\Big|_0^4$ Bước 2: Tính toán tích phân.

$$= \left(\frac{4^{5/2}}{5/2} + \frac{4^2}{2} - \frac{4^{3/2}}{3/2} - 4\right) - \left(\frac{0^{5/2}}{5/2} + \frac{0^2}{2} - \frac{0^{3/2}}{3/2} - 0\right).$$

Vậy $I = \frac{172}{15}$. ■

✎ Ví dụ 4.11 Tính $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin x - \cos x)\, dx$.

Lời giải.

Ta có $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin x - \cos x)\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x\, dx - \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos x\, dx$. Bước 1: Phân tích thành tổng.

Do đó $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin x - \cos x)\, dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$ Bước 2: Tính toán tích phân.

$$= (-\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) - (-\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}).$$

Vậy $I = 0$. ■

✎ Ví dụ 4.12 Tính $I = \displaystyle\int_{-2}^{1} (|x| + x)\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Xét dấu biểu thức.

Ta có
$$\int_{-2}^{1} (|x| + x)\, dx = \int_{-2}^{0} (|x| + x)\, dx + \int_{0}^{1} (|x| + x)\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (-x + x)\, dx + \int_{0}^{1} (x + x)\, dx = \int_{0}^{1} 2x\, dx.$$

Bước 2: Tính toán tích phân

Do đó $\displaystyle\int_{-2}^{1} (|x| + x)\, dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 2\Big(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big)$.

Vậy $I = 1$. ■

✎ Ví dụ 4.13 Tính $I = \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Xét dấu biểu thức

Ta có
$$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx = \sqrt{2}\int_{0}^{2\pi} |\sin x|\, dx$$
$$= \sqrt{2}\int_{0}^{\pi} |\sin x|\, dx + \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\, dx$$
$$= \sqrt{2}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx.$$

Bước 2: Tính toán tích phân

Do đó
$$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi} + \sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -\sqrt{2}(\cos\pi - \cos 0) + \sqrt{2}(\cos 2\pi - \cos\pi).$$

Vậy $I = 4\sqrt{2}$. ■

✎ Ví dụ 4.14 Tính $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích thành tổng.

Ta có
$$\int_{-2}^{2} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx = \int_{-2}^{2} x^2\, dx - \int_{-2}^{2} \sqrt[3]{x^3 + x}\, dx$$

Bước 2: Tính toán tích phân.
Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$
Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Do $\sqrt[3]{x^3 + x}$ là hàm lẻ nên $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt[3]{x^3 + x}\, dx = 0$.

Do x^2 là hàm chẵn nên
$$\int_{-2}^{2} x^2\, dx = 2\int_{0}^{2} x^2\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$
$$= \frac{2\cdot 2^3}{3} - \frac{2\cdot 0^4}{3}.$$

Vậy $I = \dfrac{16}{3}$. ■

Trường hợp bài toán yêu cầu tính $\displaystyle\int_{-2}^{3} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx$, ta có thể tách thành hai bài toán
$$\int_{-2}^{3} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx = \int_{-2}^{2} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx + \int_{2}^{3} (x^2 - \sqrt[3]{x^3 + x})\, dx.$$
Tích phân đầu có thể tính như trên, tích phân sau không thể áp dụng tính chất hàm chẵn hàm lẻ. Do đó ta phải làm theo phương pháp cũ là tìm nguyên hàm sau đó thay cận.

❖ Bài tập tự giải

4.1. Tìm nguyên hàm
$$\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx.$$
ĐS: $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \ln x + C.$

4.2. Tính tích phân
$$\int_1^2 \frac{2x^4+3}{x^2}\, dx.$$
ĐS: $\dfrac{37}{6}.$

4.3. Tìm nguyên hàm
$$\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}\right) dx.$$
ĐS: $\dfrac{2x^{3/2}}{3} + \dfrac{3x^{4/3}}{4} - \dfrac{4x^{5/4}}{5} + C.$

4.4. Tính tích phân
$$\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$$
ĐS: $4\sqrt{2} - \dfrac{196}{5}.$

4.5. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{x^2+1}{2x^2+4}\, dx.$$
ĐS: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2})}{4} + C.$

4.6. Tính tích phân
$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1}\, dx.$$
ĐS: $1 + \ln\dfrac{3}{2}.$

4.7. Tìm nguyên hàm
$$\int \left(2\sin^2 x - \cos x\right) dx.$$
ĐS: $x - \sin x - \dfrac{\sin 2x}{2} + C.$

4.8. Tính tích phân
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\tan^2 x + \cot^2 x + 1\right) dx.$$
ĐS: $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\pi}{6}.$

4.9. Tìm nguyên hàm
$$\int \left[\frac{(e^x-1)^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right] dx.$$
ĐS: $e^x - 2x + C.$

4.10. Tính tích phân
$$\int_0^{\pi/6} e^x\left(2 - \frac{e^{-x}}{\cos x}\right) dx.$$
ĐS: $2e^{\pi/6} - \dfrac{\ln 3}{2} - 2.$

4.11. Tính tích phân
$$\int_0^2 |x^2 - x|\, dx.$$
ĐS: 1.

4.12. Tính tích phân
$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 dx.$$
ĐS: $-x - \dfrac{1}{x} - 2\arcsin x + \arctan x + C.$

4.13. Tính tích phân
$$\int_{-2}^2 \frac{x^3+x}{x^4+x^2+2}\, dx.$$
ĐS: 0.

4.2 Bài toán tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Ta có thể biến đổi hàm số dưới dấu tích phân thành hàm số mới phụ thuộc vào biến mới.

Dạng toán 4.2 Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

Bước 1: Đổi biến tích phân.
Đặt $t = t(x)$ hoặc $x = x(t)$. Tìm quan hệ giữa dx và dt.
Tìm cận tích phân của biến mới t nếu cần thiết.
Thay thế $\int f(x)\, dx$ bởi $\int g(t)\, dt$ hoặc thay $\int_a^b f(x)\, dx$ bởi $\int_{t_a}^{t_b} g(t)\, dt$.

Bước 2: Tìm nguyên hàm hoặc tích phân xác định.

- Tìm nguyên hàm $G(t) = \int g(t)\, dt$. Kết quả là $G[t(x)]$.
- Tính giá trị $\int_{t_a}^{t_b} g(t)\, dt$.

✎ Ví dụ 4.15 Tìm $F(x) = \int \sqrt{x+3}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là căn thức.

Đặt $t = \sqrt{x+3} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}\, dx$. Do đó

$$\int \sqrt{x+3}\, dx = \int \frac{2}{2}\frac{x+3}{\sqrt{x+3}} dx = \int 2t^2\, dt.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x) = 2\dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + C$. ■

✎ Ví dụ 4.16 Tìm $F(x) = \int x(5x^2-3)^7\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là biểu thức trong lũy thừa.

Đặt $t = 5x^2 - 3 \Rightarrow dt = 10x\, dx$. Do đó

$$\int x(5x^2-3)^7\, dx = \int \frac{t^7}{10} dt.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x) = \dfrac{t^8}{80} + C = \dfrac{(5x^2-3)^8}{80} + C$. ■

✎ Ví dụ 4.17 Tính $I = \int_0^1 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là căn thức.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 1 \Rightarrow t = 1$. Do đó

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{2t}{1+t}\, dt = 2\int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t}\, dt.$$

Bước 2: Tính toán tích phân.

Vậy $I = 2[t - \ln(t+1)]\Big|_0^1 = 2 - \ln 4$. ■

✎ Ví dụ 4.18 Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x}\, dx$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1^2$.

Bước 1: Đưa về dạng $\dfrac{1}{t^2 - a^2}$.

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow dt = dx$. Do đó

$$\int \frac{1}{(x+1)^2 - 1^2}\, dx = \int \frac{1}{t^2 - 1^2}\, dt.$$

Vậy $F(x) = -\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|1+t|}{|1-t|} + C = \ln\dfrac{x}{x+2} + C$. ■

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Chú ý: $-\ln\dfrac{a}{b} = \ln\dfrac{b}{a}$.

✎ Ví dụ 4.19 Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+3}\, dx$.

Lời giải.

Ta có: $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\, dx - \int \frac{2}{x^2+2x+3}\, dx$.

Bước 1: Đưa về dạng $\dfrac{1}{t^2 + a^2}$.

Đặt $t = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow dt = (2x+2)\, dx$. Do đó

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt.$$

Đặt $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$. Do đó

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2+2x+3}\, dx &= 2\int \frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2}\, dx\\ &= 2\int \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + u^2}\, du.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } F(x) &= \ln t - 2\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C\\ &= \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$ ■

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

✎ Ví dụ 4.20 Tính $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{4}{\sqrt{4-x^2}}$. Do đó

$$I = -\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\, dx.$$

Bước 1: Thêm bớt hạng tử để đưa về dạng $\dfrac{1}{a^2 - x^2}$.

Chú ý: $2\cos^2 t = \cos(2t) + 1$.

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 1 \Rightarrow t = \pi/6$. Do đó

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t\, dt\\ &= \int_0^{\pi/6} 4\cos^2 t\, dt = 2\int_0^{\pi/6} \Big[\cos(2t) + 1\Big]\, dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } I &= 2\left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]\Bigg|_0^{\pi/6} + 4\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_0^1\\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$ ■

Bước 2: Tính toán tích phân.

✎ Ví dụ 4.21 Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là mẫu thức.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x\, dx$. Do đó
$$\int \frac{1}{e^x+1}\, dx = \int \frac{dt}{t}.$$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Vậy $F(x) = \ln t + C = \ln(e^x+1) + C$. ■

✎ Ví dụ 4.22 Tính $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là biểu thức trên mũ.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 4 \Rightarrow t = 2$. Do đó
$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^2 2e^t\, dt.$$

Bước 2: Tính toán tích phân.

Vậy $I = 2e^t\Big|_1^2 = 2(e^2 - e)$. ■

✎ Ví dụ 4.23 Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là hàm phức tạp $\ln x$.

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}\, dx$. Do đó
$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\, dx = \int t^2\, dt.$$

Bước 2: Tính toán tích phân.

Vậy $F(x) = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{1}{3}\ln^3 x + C$. ■

✎ Ví dụ 4.24 Tính $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Đặt biến mới là biểu thức trong căn.

Đặt $t = 2 + \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}\, dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$ và $x = e \Rightarrow t = 3$. Do đó
$$\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{2x}\, dx = \int_2^3 \frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt.$$

Bước 2: Tính toán tích phân.

Vậy $I = \dfrac{1}{2}\dfrac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_2^3 = \dfrac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_2^3$
$$= \frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3}).$$ ■

✎ Ví dụ 4.25 Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$

Lời giải.

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow dt = (\cos x - \sin x)\ dx$.

Bước 1: Đặt biến mới là mẫu thức.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \pi/4 \Rightarrow t = \sqrt{2}$. Do đó

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = -\int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{u}.$$

Vậy $I = -\ln u\Big|_1^{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}\ln 2.$ ■

Bước 2: Tính toán tích phân.

✎ Ví dụ 4.26 Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\ dx.$

Lời giải.

Ta có:

Bước 1: Đổi biến tích phân.

$$\sin^4 x = \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{[1+\cos(4x)]}{8}.$$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2\ dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \pi/2 \Rightarrow t = \pi$.

Đặt $u = 4x \Rightarrow du = 4\ dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$ và $x = \pi/2 \Rightarrow u = 2\pi$. Do đó

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2x)}{2}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(4x)}{8}\, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{3}{8}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{4}\, dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{32}\, du.$$

Vậy $I = \dfrac{3x}{8}\Big|_0^{\pi/2} - \dfrac{\sin t}{4}\Big|_0^{\pi} + \dfrac{\sin u}{32}\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{3\pi}{16}.$ ■

Bước 2: Tính toán tích phân.

✎ Ví dụ 4.27 Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin 2x}{2\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$

Lời giải.

Ta có $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Bước 1: Đổi biến tích phân.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\ dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \pi/6 \Rightarrow t = 1/2$. Do đó

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x + 1}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{2t}{1+t^2}\, dt.$$

Đặt $u = 1 + t^2 \Rightarrow du = 2t\ dt$.

Đổi cận: $t = 0 \Rightarrow u = 1$ và $t = 1/2 \Rightarrow u = 5/4$. Do đó

$$I = \int_1^{5/4} \frac{1}{u}\, du$$

Vậy $I = \ln u\Big|_1^{5/4} = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right).$ ■

Bước 2: Tính toán tích phân.

❖ Bài tập tự giải

4.14. Tính tích phân
$$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{52}{9}$.

4.15. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{-1}{2(x^2+1)}+C$.

4.16. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx.$$
ĐS: $2\sqrt{\ln x}+C$.

4.17. Tính tích phân
$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{1}{3}$.

4.18. Tính tích phân
$$\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$
ĐS: 0.

4.19. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$
ĐS: $x-\ln(e^x+1)+C$.

4.20. Tìm nguyên hàm
$$\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x^3}\,dx.$$
ĐS: $-\dfrac{2\cos x^{3/2}}{3}$ +C.

4.21. Tính tích phân
$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{16}{15}$.

4.22. Tính tích phân
$$\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}\,dx.$$
ĐS: $\ln\dfrac{9}{2}$.

4.23. Tính tích phân
$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{1-e^{-1}}{2}$.

4.24. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx.$$
ĐS: $\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+C$.

4.25. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx.$$
ĐS: $e^x-\ln(e^x+1)+C$.

4.26. Tính tích phân
$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$
ĐS: $\arctan e-\dfrac{\pi}{4}$.

4.3 Bài toán tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Một phương pháp quan trọng khác để tính tích phân đó là phương pháp tích phân từng phần.

Dạng toán 4.3 Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Bước 1: Phân tích hàm số thành tích hai hàm số.
Thêm bớt, phân tích hàm số ban đầu thành tích hai hàm số.
Lựa chọn để đặt hàm u và dv.

Bước 2: Áp dụng phương pháp tích phân từng phần.
Đưa tích phân cũ về tích phân mới đơn giản hơn.
Tính toán tích phân mới.

✎ Ví dụ 4.28 Tìm $F(x) = \int x\sin(2x)\, dx$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x)\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{\cos(2x)}{2} \end{cases}$ Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta thu được Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2}\, dx \\ &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C. \end{aligned}$$ ■

✎ Ví dụ 4.29 Tính $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2\cos x\, dx$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\, dx \\ v = \sin x \end{cases}$ Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta thu được Bước 2: Tính toán tích phân.

$$I = x^2\sin x\Big|_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} x\sin x\, dx.$$

Xét $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} x\sin x\, dx$. Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Ta thu được Bước 2: Tính toán tích phân.

$$\begin{aligned} J &= -x\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x\, dx \\ &= -x\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \sin x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Vậy $$\begin{aligned} I &= x^2\sin x\Big|_0^{\pi/4} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right). \end{aligned}$$ ■

✎ Ví dụ 4.30 Tìm $F(x) = \int xe^{-x}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$\begin{aligned} F(x) &= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C. \end{aligned}$$

■

✎ Ví dụ 4.31 Tính $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{x^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = \dfrac{e^{x^2}}{2} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán tích phân.

Ta thu được

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2}\,dx \\ &= \frac{x^2e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 - \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

✎ Ví dụ 4.32 Tìm $F(x) = \int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta có $F(x) = \int 2x\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^{\sqrt{x}} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$F(x) = 2xe^{\sqrt{x}} - \int 2e^{\sqrt{x}}\,dx$$

Bước 1: Phân tích hàm số.

Xét $G(x) = \int 2e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 4\sqrt{x}\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 4\sqrt{x} \\ dv = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,dx \\ v = e^{\sqrt{x}} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$\begin{aligned} G(x) &= 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - \int \frac{2}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx \\ &= 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 4e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

Vậy $F(x) = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$.

■

✎ **Ví dụ 4.33** Tìm $F(x) = \int x \ln^2 x \, dx$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ dv = x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2}{x} \ln x \, dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta thu được Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

$F(x) = \dfrac{x^2 \ln^2 x}{2} - \int x \ln x \, dx.$

Xét $G(x) = \int x \ln x \, dx$. Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} \, dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Ta thu được Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

$G(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \int \dfrac{x^2}{2x} \, dx = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{1}{4} x^2.$

Vậy $F(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$. ■

✎ **Ví dụ 4.34** Tìm $F(x) = \int \ln(x^2+1) \, dx$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \\ dv = 1 \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x}{x^2+1} \, dx \\ v = x \end{cases}$ Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta thu được Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

$$\begin{aligned} F(x) &= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2-2}{x^2+1} \, dx - \int \frac{2}{x^2+1} \, dx \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x - 2\arctan x + C. \end{aligned}$$ ■

✎ **Ví dụ 4.35** Tìm $F(x) = \int \dfrac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(\ln x) \\ dv = \dfrac{1}{x} \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x \ln x} \, dx \\ v = \ln x \end{cases}$ Bước 1: Phân tích hàm số.

Ta thu được Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln x \ln(\ln x) - \int \frac{1}{x} \, dx \\ &= \ln x \ln(\ln x) - \ln x + C. \end{aligned}$$ ■

✎ Ví dụ 4.36 Tìm $F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(cosx) \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{\sin x}{\cos x}\, dx \\ v = \tan x \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Thêm bớt: $\tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$

Ta thu được

$$\begin{aligned} F(x) &= \tan x \ln(\cos x) - \int \tan^2 x\, dx \\ &= \tan x \ln(\cos x) - \int (\tan^2 x + 1)\, dx + \int 1\, dx \\ &= \tan x \ln(\cos x) - \tan x + x + C. \end{aligned}$$

■

Chú ý: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

✎ Ví dụ 4.37 Tìm $F(x) = \displaystyle\int e^{\cos x} \sin(2x)\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = 2\cos x \\ dv = \sin x e^{\cos x}\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2\sin x\, dx \\ v = -e^{\cos x} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$\begin{aligned} F(x) &= -2\cos x e^{\cos x} - 2\int \sin x e^{\cos x}\, dx \\ &= -2\cos x e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + C. \end{aligned}$$

■

✎ Ví dụ 4.38 Tìm $F(x) = \displaystyle\int e^x \cos(2x)\, dx$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích hàm số.

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos(2x)\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\, dx \\ v = \dfrac{\sin(2x)}{2} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$F(x) = \frac{e^x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\int e^x \sin(2x)\, dx$$

Bước 1: Phân tích hàm số.

Xét $G(x) = \displaystyle\int e^x \sin(2x)\, dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin(2x)\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x\, dx \\ v = -\dfrac{\cos(2x)}{2} \end{cases}$

Bước 2: Tính toán nguyên hàm.

Ta thu được

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\, dx. \\ &= -\frac{e^x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}F(x). \end{aligned}$$

Do đó: $F(x) = \dfrac{e^x \sin(2x)}{2} + \dfrac{e^x \cos(2x)}{4} - \dfrac{1}{4}F(x)$.

Vậy $F(x) = \dfrac{1}{5}e^x\Big(2\sin(2x) + \cos(2x)\Big) + C$.

■

❖ Bài tập tự giải

4.27. Tính tích phân
$$\int_0^1 \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$
ĐS: $2-\sqrt{2}$.

4.28. Tìm nguyên hàm
$$\int x\ln x\,dx.$$
ĐS: $\frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$.

4.29. Tính tích phân
$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$
ĐS: 1.

4.30. Tìm nguyên hàm
$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$$
ĐS: $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C$.

4.31. Tính tích phân
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: $2(e^2+1)$.

4.32. Tính tích phân
$$\int_0^\pi e^{\cos x}(\sin 2x)\,dx.$$
ĐS: $\frac{4}{e}$.

4.33. Tính tích phân
$$\int_0^\pi e^{-x}\cos 2x\,dx.$$
ĐS: $\frac{1-e^{-\pi}}{5}$.

4.34. Tìm nguyên hàm
$$\int \sin(\ln x)\,dx.$$
ĐS: $-\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos(\ln x + \frac{\pi}{4}) + C$.

4.35. Tìm nguyên hàm
$$\int \cos x\ln(\sin x)\,dx.$$
ĐS: $\sin x\Big[\ln(\sin x) - 1\Big] + C$.

4.36. Tính tích phân
$$\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx.$$
ĐS: -4.

4.37. Tìm nguyên hàm
$$\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$$
ĐS: $-\ln(\frac{1}{x}+1) - \frac{\ln(x+1)}{x} + C$.

4.38. Tìm nguyên hàm
$$\int \ln^2 x\,dx.$$
ĐS: $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$.

4.39. Tính tích phân
$$\int_4^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: $6\ln 9 - 4\ln 4 - 4$.

4.4 Bài toán về tính tích phân suy rộng

Dạng toán 4.4 Tính giá trị tích phân suy rộng

Bước 1: Nhận dạng tích phân suy rộng.
Nếu cận là vô cùng thì đó là tích phân suy rộng loại I.
Nếu cận là điểm làm hàm số vô nghĩa hoặc gián đoạn thì đó là tích phân suy rộng loại II.

Bước 2: Tách làm hai bài toán tích phân và giới hạn.
Thay cận vô cùng (loại I) hoặc cận vô nghĩa, gián đoạn (loại II) bởi tham số t.
Xây dựng bài toán giới hạn khi t tiến đến cận ban đầu.

Bước 3: Tính giá trị tích phân có cận là tham số. Kết quả thường là một biểu thức chứa t.

Bước 4: Tính giới hạn của giá trị tích phân mới tìm được.

✎ Ví dụ 4.39 Tính $\displaystyle\int_0^{\infty} e^x\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Nhận dạng tích phân. — Tích phân có cận là ∞ nên đây là tích phân suy rộng loại I.

Bước 2: Tách làm hai bài toán. — Do đó $\displaystyle\int_0^{\infty} e^x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^x\,dx$.

Bước 3: Tính tích phân tham số. — Đặt $I = \displaystyle\int_0^t e^x\,dx$. Khi đó $I = e^x\Big|_0^t = e^t - e^0$.

Bước 4: Tính giới hạn tích phân. — Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I = \lim_{t\to\infty}(e^t - e^0) = \infty - 1 = \infty$.

Vậy $\displaystyle\int_0^{\infty} e^x\,dx$ phân kỳ. ■

✎ Ví dụ 4.40 Tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2} \sin x\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Nhận dạng tích phân. — Tích phân có cận là $-\infty$ nên đây là tích phân suy rộng loại I.

Bước 2: Tách làm hai bài toán. — Do đó $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2} \sin x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{\pi/2} \sin x\,dx$.

Bước 3: Tính tích phân tham số. — Đặt $I = \displaystyle\int_t^{\pi/2} \sin x\,dx$. Khi đó $I = -\cos x\Big|_t^{\pi/2} = \cos t - \cos\frac{\pi}{2}$.

Bước 4: Tính giới hạn tích phân. — Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} I = \lim_{t\to-\infty}(\cos t - \cos\frac{\pi}{2})$.
Mà $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\cos t$ không tồn tại nên $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} I$ không tồn tại.

Vậy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/2} \sin x\,dx$ phân kỳ. ■

✎ Ví dụ 4.41 Tính $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Lời giải.

Tích phân có cận là ∞ nên đây là tích phân suy rộng loại I.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Do đó $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Đặt $\displaystyle I = \int_1^{t} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $u = \ln x$ và $dv = 1/x^2\ d \Rightarrow du = 1/x\ dx$ và $v = -1/x$. Sử dụng tích phân từng phần ta thu được

$$I = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^t - \frac{1}{x}\Big|_1^t$$
$$= \frac{\ln 1 + 1}{1} - \frac{\ln t + 1}{t}.$$

Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1+\ln t}{t} = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{1} = 1.$

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.
Dùng quy tắc L'Hospital tính $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1+\ln t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{(1+\ln t)'}{t'}$

Vậy $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = 1$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 4.42 Tính $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$.

Lời giải.

Tích phân có cận là $\pm\infty$ nên đây là tích phân suy rộng loại I.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Do đó
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx.$$

Bước 2: Tách làm hai bài toán.
Có thể thay cận 0 bằng bất kỳ số khác. Tuy nhiên trong bài toán này, cận 0 giúp tính toán nhanh hơn.

Đặt $\displaystyle I = \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{e^x + 1/e^x}\, dx.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = du/u$. Khi đó

$$I = \int \frac{1}{u+1/u}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C.$$

Mà $\displaystyle\int_t^0 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \int_{e^t}^{e^0} \frac{du}{u^2+1} = \arctan u\Big|_{e^t}^1$

và $\displaystyle\int_0^s \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \int_{e^0}^{e^s} \frac{du}{u^2+1} = \arctan u\Big|_1^{e^s}.$

Kết quả là

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \arctan 1 - \arctan e^t = \frac{\pi}{4} - 0,$$
$$\lim_{s\to\infty}\int_0^s \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \lim_{s\to\infty} \arctan e^s - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.
Chú ý:
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \lim_{x\to 0}\arctan x = 0$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}.$

Vậy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 4.43 Tính $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{3-x}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Đây là tích phân suy rộng loại II vì hàm số không xác định tại 3.

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Do đó $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{3-x}\,dx = \lim_{t\to 3^-}\int_1^t \frac{1}{3-x}\,dx.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $\displaystyle I = \int_1^t \frac{1}{3-x}\,dx \Rightarrow I = -\ln(3-x)\Big|_1^t = \ln 2 - \ln(3-t)$

Bước 4: Tính tích phân.
Chú ý: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$.

Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to 3^-} I = \ln 2 - \lim_{t\to 3^-}\ln(3-t) = \infty.$

Vậy $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{3-x}\,dx$ phân kỳ. ■

✎ Ví dụ 4.44 Tính $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Đây là tích phân suy rộng loại II vì hàm số không xác định tại 2.

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Do đó $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \lim_{t\to 2^+}\int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $\displaystyle I = \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx \Rightarrow I = \ln(x+\sqrt{x^2-4})\Big|_t^4$

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.
Chú ý: $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$.

Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to 2^+} I = \ln(4+2\sqrt{3}) - \lim_{t\to 2^+}\ln(t+\sqrt{t^2-4})$

$= \ln(4+2\sqrt{3}) - \ln 2 = \ln(2+\sqrt{3}).$

Vậy $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \ln(2+\sqrt{3})$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 4.45 Tính $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Đây là tích phân suy rộng loại II vì $\ln x$ không xác định tại 0.

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\ln x\,dx.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $\displaystyle I = \int_t^1 x\ln x\,dx.$

Đặt $u = \ln x$ và $dv = x\,dx \Rightarrow du = 1/x\,dx$ và $v = x^2/2$.

Sử dụng tích phân từng phần ta thu được

$$I = \frac{x^2\ln x}{2}\Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2})\Big|_t^1$$

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.
Dùng quy tắc L'Hospital tính

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t - 1/2}{1/t^2} = \lim_{t\to 0^+}\frac{(\ln t - 1/2)'}{(1/t^2)'}.$$

Kết quả là $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} I = -\frac{1}{4} - \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{2}\frac{\ln t - 1/2}{1/t^2}$

$\displaystyle= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-2/t^3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{4}.$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx = -\frac{1}{4}$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 4.46 Tính $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Lời giải.

Đây là tích phân suy rộng loại II vì hàm số không liên tục tại 0.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Do đó $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{s\to 0^+} \int_{s}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx.$

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Ta có $\int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{t} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{1},$

và $\int_{s}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{s}^{1} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{s}.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Kết quả là

$\lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^-} (-\frac{1}{t} - 1) = \infty,$

$\lim_{s\to 0^+} \int_{s}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{s\to 0^+} (-1 + \frac{1}{s}) = \infty.$

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.
Chú ý:
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$

Vậy $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ phân kỳ. ■

✎ Ví dụ 4.47 Tính $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$.

Lời giải.

Đây là tích phân suy rộng loại I do có cận ∞ đồng thời đây cũng là tích phân suy rộng loại II vì hàm số không xác định tại 0.

Bước 1: Nhận dạng tích phân.

Do đó $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{e^x - 1}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$

$= \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{e^x - 1}\,dx + \lim_{s\to \infty} \int_{1}^{s} \frac{1}{e^x - 1}\,dx\ .$

Bước 2: Tách làm hai bài toán.

Đặt $I = \int \frac{1}{e^x - 1}\,dx.$

Bước 3: Tính tích phân tham số.

Đặt $u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = du/u$. Khi đó

$I = \int \frac{1}{u-1}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u} = \ln(u-1) - \ln u + C.$

Mà $\int_{t}^{1} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \ln\frac{u-1}{u}\Big|_{e^t}^{e} = \ln\frac{e-1}{e} - \ln\frac{e^t - 1}{e^t},$

và $\int_{1}^{s} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \frac{u-1}{u}\Big|_{e}^{e^s} = \ln\frac{e^s - 1}{e^s} - \ln\frac{e-1}{e}.$

Kết quả là

Bước 4: Tính giới hạn tích phân.

$\lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \ln\frac{e-1}{e} - \ln\frac{e^t - 1}{e^t} = \ln(e+1) - 1,$

$\lim_{s\to \infty} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \lim_{s\to \infty} \ln\frac{e^s - 1}{e^s} - \ln\frac{e-1}{e} = -\ln\frac{e-1}{e}.$

Sử dụng vô cùng lớn
$\lim_{x\to\infty} \ln\frac{e^x - 1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{e^x}{e^x} = \ln 1$

Vậy $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = 1 - \ln(e-1)$ (hội tụ). ■

❖ Bài tập tự giải

4.40. Tính tích phân
$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6}\, dx.$$
ĐS: $\ln 2$.

4.41. Tính tích phân
$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx.$$
ĐS: ∞.

4.42. Tính tích phân
$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\, dx.$$
ĐS: 1.

4.43. Tính tích phân
$$\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$
ĐS: $\frac{2}{e}$.

4.44. Tính tích phân
$$\int_{0}^{\infty} 2e^{-x}\sin x\, dx.$$
ĐS: 1.

4.45. Tính tích phân
$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\, dx.$$
ĐS: $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

4.46. Tính tích phân
$$\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx.$$
ĐS: ∞.

4.47. Tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx.$$
ĐS: $\frac{1}{2}$.

4.48. Tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+2}\, dx.$$
ĐS: ∞.

4.49. Tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx.$$
ĐS: 0.

4.50. Tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx.$$
ĐS: $2e^{-1}-1$.

4.51. Tính tích phân
$$\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\, dx.$$
ĐS: ∞.

4.52. Tính tích phân
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$
ĐS: π.

4.53. Tính tích phân
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: 2.

4.54. Tính tích phân
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$
ĐS: $\frac{\pi}{2}$.

4.55. Tính tích phân
$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$
ĐS: $\frac{\pi}{3}$.

4.56. Tính tích phân
$$\int_0^2 \frac{x}{x^2-4}\,dx.$$
ĐS: $-\infty$.

4.57. Tính tích phân
$$\int_0^2 |\ln x|\,dx.$$
ĐS: $\ln 4$.

4.58. Tính tích phân
$$\int_0^1 x\ln^2 x\,dx.$$
ĐS: $\frac{1}{4}$.

4.59. Tính tích phân
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx.$$
ĐS: ∞.

4.60. Tính tích phân
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx.$$
ĐS: ∞.

4.61. Tính tích phân
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\sin x}\,dx.$$
ĐS: ∞.

4.62. Tính tích phân
$$\int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$
ĐS: $\frac{9\pi}{2}$.

4.63. Tính tích phân
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$
ĐS: π.

4.64. Tính tích phân
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{x-1}-1}\,dx.$$
ĐS: ∞.

4.65. Tính tích phân
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: ∞.

4.5 Bài toán khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng

Dạng toán 4.5 **Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng**

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh để khảo sát tích phân suy rộng của $f(x)$.
Bước 1: Chọn hàm $g(x)$ sao cho giới hạn của $f(x)/g(x)$ (khi x tiến đến vô cùng hoặc điểm gián đoạn) là hữu hạn.
Bước 2: Kết luận tích phân suy rộng cùng cận của $f(x)$ và $g(x)$ có cùng tính chất.

Sử dụng tiêu chuẩn bất đẳng thức để khảo sát tích phân suy rộng của $f(x)$.
Bước 1: Chọn hàm $g(x)$ để so sánh với $f(x)$.
Bước 2: Nếu $f(x) < g(x)$ và tích phân suy rộng cùng cận của $g(x)$ hội tụ thì tích phân suy rộng của $f(x)$ hội tụ.
Nếu $f(x) > g(x)$ và tích phân suy rộng cùng cận của $g(x)$ phân kỳ thì tích phân suy rộng của $f(x)$ phân kỳ.

✎ **Ví dụ 4.48** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh.

Đặt $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Khi đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}} = 1 \text{ (hữu hạn).}$$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Mà $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^t = \infty$ (phân kỳ)

nên $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx$ phân kỳ (tiêu chuẩn so sánh). ■

✎ **Ví dụ 4.49** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{\ln(x-2)}{x^2+1}\,dx$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh.

Đặt $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x^2+1}$ và chọn $g(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Khi đó

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x-2)}{\ln x}\,\frac{x^2}{x^2+1} = 1 \text{ (hữu hạn).}$$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{1}{x^2}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\text{Do đó } \int_3^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\Big|_3^t + \int_3^t \frac{1}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{\ln 3+1}{3} - \lim_{t\to\infty}\frac{\ln t+1}{t} = \frac{\ln 3+1}{3} \text{ (hội tụ)}$$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t+1}{t} = \frac{1/t+0}{1} = 0.$

nên $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{\ln(x-2)}{x^2+1}\,dx$ hội tụ (tiêu chuẩn so sánh). ■

✎ **Ví dụ 4.50** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{\sin^2 x}\, dx$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{\sin^2 x}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Khi đó — Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x\sin x}{\sin^2 x} = 2 \text{ (hữu hạn)}$$

Mà $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \ln x\Big|_t^2 = -\infty$ (phân kỳ) — Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{\sin^2 x}\, dx$ phân kỳ (tiêu chuẩn so sánh). ■

✎ **Ví dụ 4.51** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Dễ thấy — Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

$\dfrac{1}{\ln x} > \dfrac{1}{x}$.

Mà $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \ln x\Big|_1^t = \infty$ (phân kỳ) — Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$ phân kỳ (tiêu chuẩn bất đẳng thức). ■

✎ **Ví dụ 4.52** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}\, dx$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x^2(1+e^x)}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Dễ thấy — Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

$\dfrac{1}{x^2(1+e^x)} < \dfrac{1}{x^2}$.

Mà $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{2}$ (hội tụ) — Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2(1+e^x)}\, dx$ hội tụ (tiêu chuẩn bất đẳng thức). ■

✎ **Ví dụ 4.53** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\, dx$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+4x^3}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dễ thấy — Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Mà $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = -\lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2$ (hội tụ) — Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}\, dx$ hội tụ (tiêu chuẩn bất đẳng thức). ■

❖ Bài tập tự giải

4.66. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3+1}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.67. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_4^{\infty} \frac{x}{(\sqrt{x}-1)(1-x)}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.68. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \frac{2x^2+2x+1}{3x^3+3x+\ln x}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.69. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_2^{\infty} \frac{x+\cos x}{x^2(x-\sin x)}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.70. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \frac{e^x-x^2}{x^3+x}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.71. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \frac{\cos^2(1+e^x)}{x^2+1}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.72. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.73. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_0^{1} \frac{1}{x\sin x}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.74. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_0^{2} \frac{1}{x+1-e^x}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.75. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_0^{1} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.76. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \frac{(1+\cos^2 x)\ln x}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.77. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_1^{\infty} \left(\ln\frac{x+1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)dx.$$
ĐS: phân kỳ.

4.78. Khảo sát sự hội tụ của tích phân sau:
$$\int_0^{1} \frac{1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}\,dx.$$
ĐS: hội tụ.

4.6 Ứng dụng thực tế của tích phân

4.79. Nước bắt đầu chảy từ bể chứa qua một vòi với tốc độ $r(t) = 200 - 4t$ *(lít/phút)*, trong đó $0 \leq t \leq 50$. Tìm lượng nước chảy từ bể suốt 10 phút đầu tiên.

ĐS: 1 800 *lít*.

4.80. Một thùng chứa dầu thủng vào thời điểm $t = 0$ và dầu bắt đầu rò rỉ khỏi thùng với tốc độ $r(t) = e^{-0{,}01t}$ *(lít/phút)*. Bao nhiêu dầu rò rỉ ra ngoài sau một giờ đầu tiên?

ĐS: $45{,}119$ *lít*.

4.81. Một quần thể vi khuẩn bắt đầu với 400 *con* vi khuẩn và tăng trưởng với tốc độ $v(t) = 450e^{1{,}125t}$ *con/giờ*. Sẽ có bao nhiêu vi khuẩn sau ba giờ?

ĐS: 11 690 *con*.

4.82. Một tách cà phê nóng có nhiệt độ 95^oC để trong phòng có nhiệt độ môi trường là 20^oC. Biết quá trình nguội của tách cà phê tuân theo quy luật $T(t) = 20 + 75e^{-0{,}02t}$ với t là thời gian tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ tách cà phê sau 30 phút.
b) Tìm nhiệt độ trung bình tách cà phê trong 30 phút đầu.

ĐS: a) $61{,}16^oC$. b) $76{,}4^oC$.

4.83. Một trang trại gà tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$. Biết tốc độ sinh trưởng $N'(t) = \dfrac{19}{t+2}$ và lúc đầu trang trại gà có 300 con. Sau 10 ngày, trang trại gà có khoảng bao nhiêu con?

ĐS: 334 *con*.

4.84. Một bể nước hình hộp chữ nhật ban đầu không chứa nước. Người ta bơm nước vào bể. Biết sau khi bơm được t phút thì tốc độ thay đổi chiều cao mực nước là $h'(t) = \dfrac{1}{24}\sqrt[3]{t+27}$.

a) Tính mực nước ở bể sau khi bơm được 37 phút.
b) Sao bao lâu thì bể đầy nước? Biết bể sâu 10 m.

ĐS: a) $5{,}47$ m. b) $48{,}60$ *phút*.

4.85. Nếu tỉ lệ sinh của một khu vực dân cư là $b(t) = 2\ 200 + 52{,}3t + 0{,}74t^2$ *(người/năm)* và tỉ lệ tử là $d(t) = 1\ 400 + 28{,}8t$ *(người/năm)*, hãy tìm diện tích miền nằm giữa các đường cong này trong khoảng $0 \leq t \leq 10$. Diện tích này biểu thị cho điều gì?

ĐS: $S = 9\ 422$: lượng dân số tăng trong 10 năm.

4.86. Cho mật độ của một thanh kim loại dài 4 m là $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ kg/m, trong đó x là khoảng cách được tính từ một đầu thanh. Tìm tổng khối lượng của thanh.

ĐS: $46{,}667$ kg.

4.87. Một con bò được cột vào một góc của khu vườn hình chữ nhật có kích thức 10×15 m^2.

a) Biết chiều dài sợi dây là 5 m. Tìm diện tích phần khu vườn mà con bò có thể ăn cỏ.
b) Tìm chiều dài sợi dây để con bò chỉ ăn được tối đa 1/3 lượng cỏ mọc trong khu vườn.
c) Tìm chiều dài sợi dây để con bò chỉ ăn được tối đa 2/3 lượng cỏ mọc trong khu vườn.

ĐS: a) $19{,}635$ m^2. b) $7{,}979$ m. c) $11{,}656$ m.

4.88. Một trang trại cà phê đang đến mùa thu hoạch. Vào một ngày mùa hè, lượng công nhân tham gia thu hoạch cà phê được xấp xỉ bởi hàm số sau

$$f(t) = \begin{cases} -4t^2 + 76t - 240 & 7 \leq t \leq 11, \\ -t^2 + 24t - 52 & 13 \leq t \leq 17, \end{cases}$$

trong đó t là thời gian (tính theo giờ), $f(t)$ là lượng công nhân (tính theo người). Mỗi công nhân được trả tiền theo giờ làm việc. Mỗi giờ làm buổi sáng được trả 30 000 đồng và mỗi giờ làm buổi chiều được trả 36 000 đồng. Về mặt tính toán, tổng chi phí là tích phân của lượng công nhân $f(t)$ nhân cho giá thuê trong một giờ. Hãy cho biết trang trại phải chi bao nhiêu tiền:

a) cho việc thuê nhân công vào buổi sáng?

b) cho việc thuê nhân công vào buổi chiều?

c) Để cho chi phí hai buổi bằng nhau, phải thay đổi số tiền trả theo giờ làm buổi chiều bao nhiêu?

ĐS: a) $13,76$ triệu đồng.
b) $11,76$ triệu đồng.
c) tăng hơn 6 ngàn đồng.

4.89. Vận tốc trung bình của phân tử trong môi trường khí lý tưởng là

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv$$

trong đó M là khối lượng phân tử của chất khí, R là hằng số chất khí, T là nhiệt độ của chất khí, và v là vận tốc của phân tử. Tìm công thức tường minh của $\bar{v}$.

ĐS: $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.

4.90. Công ty X khai thác đá quý từ mỏ A. Công suất thu hoạch trong ba tháng đầu được thống kê xấp xỉ bởi hàm số

$$f(t) = 300\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

trong đó t là thời gian tính theo tháng và $f(t)$ là công suất thu hoạch tính theo kg/tháng.

a) Tìm tổng sản lượng thu được trong ba tháng đầu (với $0 \leq t \leq 3$). (Tổng sản lượng bằng tích phân của hàm công suất trong khoảng thời gian khảo sát).

b) Nếu công suất luôn tuân theo hàm $f(t)$ với mọi $t \geq 0$ thì tổng sản lượng thu được từ mỏ A là bao nhiêu.

ĐS: a) $121,028$ kg. b) 300 kg.

4.91. Một chất phóng xạ phân rã theo hàm mũ: khối lượng tại thời điểm t là $m(t) = m_0 e^{kt}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ và k là một hằng số âm. Dựa vào tính chất này, người ta thường dùng đồng vị cacbon phóng xạ C_{14} để xác định tuổi của cổ vật. Tuổi thọ trung bình M của một nguyên tử trong chất phóng xạ C_{14} là

$$M = -k\int_0^\infty te^{kt}\, dt$$

với k là $-1,21 \cdot 10^{-4}$. Tìm tuổi thọ trung bình của một nguyên tử C_{14}.

ĐS: 8 265 *năm*.

CHƯƠNG 5: DÃY SỐ và CHUỖI SỐ

5.1 Bài toán tính giới hạn của dãy số

Cách đơn giản nhất để tính giới hạn của dãy số là biến đổi dãy số thành tổ hợp các dãy số đơn giản đã biết giới hạn. Dựa vào các kết quả đã biết, ta rút ra kết luận về sự hội tụ của dãy số ban đầu. Một số giới hạn đơn giản thường gặp là

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\alpha^n}=0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n=\infty$ (với $\alpha>1$)
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$

Một phương pháp khác cũng được dùng để tính giới hạn dãy số là sử dụng quy tắc kẹp. Người ta đưa ra hai dãy số mới có cùng giới hạn sao cho dãy số cũ luôn nằm giữa chúng. Khi đó dãy đang xét sẽ có giới hạn bằng với hai dãy số nói trên.

Dạng toán 5.1 Tính giới hạn của dãy số

Tính giới hạn dãy số bằng phương pháp tính.

Bước 1: Phân tích dãy số.

Phân tích số hạng tổng quát thành tổng/hiệu/tích/thương/mũ của các biểu thức đơn giản.

Bước 2: Tính giới hạn dãy số ban đầu.

Tính giới hạn các dãy số vừa được phân tích.

Tổng hợp các kết quả để tính giới hạn dãy ban đầu.

Tính giới hạn dãy số bằng quy tắc kẹp

Bước 1: Chọn dãy biên v_n và w_n.

Dự đoán giới hạn của dãy.

Đưa ra hai dãy v_n và w_n cùng giới hạn và thỏa $v_n\le u_n\le w_n$ với $n\ge N$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp để tính toán giới hạn.

Ví dụ 5.1 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}\right)$.

Lời giải.

Bước 1: Phân tích dãy số.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$.

Bước 2: Tính toán giới hạn.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}\right)=2\cdot 0-\dfrac{1}{1+0}=-1$. ■

✎ Ví dụ 5.2 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^n+(-1)^n\right)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^n+(-1)^n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1^n+\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$. — Bước 1: Phân tích dãy số.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ không xác định — Bước 2: Tính toán giới hạn.

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1^n+(-1)^n\right)$ không xác định. ■

✎ Ví dụ 5.3 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2+\dfrac{1}{n^2}\right)$. — Bước 1: Phân tích dãy số.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}2=2$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ — Bước 2: Tính toán giới hạn. Giới hạn tiến tới ∞ được xem là không xác định.

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2$ không xác định. ■

✎ Ví dụ 5.4 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{n^2-4n+2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có }\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2-4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2/n^2+3n/n^2-1/n^2}{n^2/n^2-4n/n^2+2/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3/n-1/n^2}{1-4/n+2/n^2}.$$

Bước 1: Rút gọn tử và mẫu.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n-1}{n^2-4n+2}=2$. ■ — Bước 2: Tính toán giới hạn.

✎ Ví dụ 5.5 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{5^n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{5^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{5^n}$. — Bước 1: Phân tích dãy số.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{5^n}=0$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{5^n}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{5^n}=0$. ■ — Bước 2: Tính toán giới hạn.

✎ Ví dụ 5.6 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3\ln^4 n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3\ln^4 n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}\right)^4$. — Bước 1:Phân tích dãy số.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$ — Bước 2: Tính toán giới hạn.

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^3\ln^4 n}=1\cdot 1^3\cdot 1^4=1$. ■

✎ Ví dụ 5.7 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$.

Lời giải.

Bước 1: Nhân lượng liên hiệp.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1}}$$

Bước 2: Tính toán giới hạn.

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{2n}}=1$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$

nên $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$. ■

✎ Ví dụ 5.8 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$.

Lời giải.

Bước 1: Đưa về công thức số e.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n/3}\right)^{(n/3)\cdot 3}$.

Bước 2: Tính toán giới hạn.

Đặt $m=n/3$. Dễ thấy khi $n\to\infty$ thì $m\to\infty$.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n/3}\right)^{(n/3)\cdot 3}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right]^3=e^{-3}$$

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n=e^{-3}$. ■

✎ Ví dụ 5.9 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.

Lời giải.

Bước 1: Đưa về công thức số e.

Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{2n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}.$$

Bước 2: Tính toán giới hạn.

Đặt $m=\dfrac{2n+1}{2}$. Dễ thấy khi $n\to\infty$ thì $m\to\infty$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m=e^{-1}.$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)=1$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^n=(e^{-1})^1=e^{-1}$. ■

✎ **Ví dụ 5.10** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}$.

Dự đoán dãy hội tụ về 0.

Lời giải.

Chọn $v_n=-\dfrac{n}{n^2+1}$ và $w_n=\dfrac{n}{n^2+1}$. Dễ thấy

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$$

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Do $v_n\le(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}\le w_n,\ \forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=0$,

nên $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n^2+1}=0$ (theo quy tắc kẹp). ■

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

✎ **Ví dụ 5.11** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$.

Dự đoán dãy hội tụ về 0 do $|\sin n|\le 1$.

Lời giải.

Chọn $v_n=\dfrac{-1}{n}$ và $w_n=\dfrac{1}{n}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

Ta có $-1\le\sin n\le 1$ nên $\dfrac{-1}{n}\le\dfrac{\sin n}{n}\le\dfrac{1}{n},\ \forall n.$

Bước 1: Chọn hai dãy biên. Khi gặp hàm sin hoặc cos, hai dãy biên được chọn tương ứng với -1 và 1.

Do $v_n\le\dfrac{\sin n}{n}\le w_n,\ \forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=0$,

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ (theo quy tắc kẹp). ■

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

✎ **Ví dụ 5.12** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right)^n$.

Dự đoán dãy hội tụ về 0.

Lời giải.

Chọn $v_n=0$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

Ta có $\forall n: 0\le\dfrac{3}{n}\Leftrightarrow 0^n\le\left(\dfrac{3}{n}\right)^n$ nên $v_n\le\left(\dfrac{3}{n}\right)^n$.

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Chọn $w_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$.

Ta có $\forall n\ge 6:\dfrac{3}{n}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{n}\right)^n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{n}\right)^n\le w_n$.

Do $v_n\le\left(\dfrac{3}{n}\right)^n\le w_n,\ \forall n\ge 6$ và $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=0$,

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right)^n=0$ (theo quy tắc kẹp). ■

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

✎ **Ví dụ 5.13** Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n-2)}$.

Dự đoán dãy hội tụ về 1 do có dạng giống $\sqrt[n]{n^2}$.

Lời giải.

Chọn $v_n=1$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ và $1\le\sqrt[n]{n(n-2)}$.

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Chọn $w_n=\sqrt[n]{n^2}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$ và

$$n^2-2n\le n^2\Rightarrow\sqrt[n]{n(n-2)}\le\sqrt[n]{n^2},\ \forall n.$$

Do $v_n\le\sqrt[n]{n(n-2)}\le w_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\lim\limits_{n\to\infty}w_n=1$,

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n-2)}=1$ (theo quy tắc kẹp). ■

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

Dự đoán dãy hội tụ về 1 do có dạng giống $\sqrt[n]{n}$.

✎ Ví dụ 5.14 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n}$.

Lời giải.

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Chọn v_n=1. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Ta có $1 \le n \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{1} \le \sqrt[n+1]{n}$ nên $v_n \le \sqrt[n+1]{n}, \forall n$.

Chọn $w_n = \sqrt[n]{n}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$\text{Ta có } n \le n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ge \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}} \ge n^{\frac{1}{n+1}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{n} \ge \sqrt[n+1]{n} \Leftrightarrow w_n \ge \sqrt[n+1]{n}, \forall n.$$

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

Do $v_n \le \sqrt[n+1]{n} \le w_n, \forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n} = 1$ (theo quy tắc kẹp). ■

Dự đoán dãy hội tụ về 0.

✎ Ví dụ 5.15 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Chọn $v_n = 0$ và $w_n = \dfrac{1}{n}$. Dễ thấy $0 \le \dfrac{n!}{n^n}$ và

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1.2.3....n}{n.n.n....n} = \frac{1}{n}\frac{2.3....n}{n.n....n} \le \frac{1}{n} \text{ nên } \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}, \forall n.$$

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

Do $v_n \le \dfrac{n!}{n^n} \le w_n, \forall n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ (theo quy tắc kẹp). ■

Dự đoán dãy hội tụ về 0.

✎ Ví dụ 5.16 Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Lời giải.

Bước 1: Chọn hai dãy biên.

Chọn $v_n = 0$. Dễ thấy $0 \le \dfrac{10^n}{n!}$.

Chọn $w_n = \dfrac{10}{n}$. Ta có

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10.10.10....10}{1.2.3....10}\frac{10.10....10.}{11.12....n}$$
$$= A\,\frac{10}{11}\frac{10}{12}....\frac{10}{n} \le \frac{10}{11}\frac{10}{12}....\frac{10}{n} \le \frac{10}{n}$$
$$\left(\text{Với } A = \frac{10.10.10....10}{1.2.3....10} < 1\right)$$

nên $0 \le \dfrac{10^n}{n!} \le \dfrac{10}{n}, \forall n > 10$.

Bước 2: Áp dụng quy tắc kẹp.

Do $v_n \le \dfrac{10^n}{n!} \le w_n, \forall n > 10$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} = 0$ (theo quy tắc kẹp). ■

❖ Bài tập tự giải

5.1. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}.$$
ĐS: -5.

5.2. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = 2 + \frac{1}{10^n}.$$
ĐS: 2.

5.3. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \left(\frac{n-1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$$
ĐS: $\frac{1}{2}$.

5.4. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sqrt{2^n}.$$
ĐS: ∞.

5.5. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \sqrt{3n+10} - \sqrt{3n}.$$
ĐS: 0.

5.6. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \sqrt[n]{\frac{3}{n}}.$$
ĐS: 1.

5.7. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \frac{\ln n}{\sqrt[n]{n}}.$$
ĐS: ∞.

5.8. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n.$$
ĐS: e^3.

5.9. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = (-1)^n\frac{n^2+6n+2}{n^3+7}.$$
ĐS: 0.

5.10. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$
ĐS: không tồn tại.

5.11. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$$
ĐS: 3.

5.12. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}.$$
ĐS: 0.

5.13. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \sqrt[n]{\ln(n)\ln(n+2)}.$$
ĐS: 1.

5.14. Tính giới hạn của dãy số với
$$u_n = \frac{n(n+\sin n)}{2n^2+1}.$$
ĐS: $\frac{1}{2}$.

5.2 Bài toán tính tổng chuỗi dương

Không phải chuỗi số hội tụ nào cũng có thể dễ dàng tìm được tổng của chúng. Người ta đưa ra hai dạng thường gặp của bài toán tìm giá trị của chuỗi như sau.

Dạng toán 5.2 Tính giá trị chuỗi số

Tính giá trị chuỗi hình học $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 r^{n-1}$.

Bước 1: Xác định số hạng đầu tiên u_1 và công bội r của chuỗi.

Bước 2: Nếu $0 < |r| < 1$ thì chuỗi số hội tụ và có giá trị $S = u_1 \dfrac{1}{1-r}$.

Tính giá trị chuỗi số bằng phương pháp phân tích số hạng.

Bước 1: Phân tích phần tử tổng quát thành hiệu của hai số hạng.

Bước 2: Tổng hợp các số hạng và tính giới hạn.

Chuỗi hình học.

Ví dụ 5.17 Tính giá trị của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định số hạng đầu tiên và công bội.

Chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n}$ có số hạng đầu là $u_0 = 1$ và công bội $r = \dfrac{2}{3} < 1$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = u_0 \dfrac{1}{1-r} = 1 \dfrac{1}{1-2/3} = 3$ (hội tụ). ■

Chuỗi hình học.

Ví dụ 5.18 Tính giá trị của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định số hạng đầu tiên và công bội.

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{4^n}$ có số hạng đầu là $u_1 = 3$ và công bội $r = \dfrac{5}{4} > 1$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$ không hội tụ. ■

Chuỗi hình học.

Ví dụ 5.19 Tính giá trị của $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(-10)^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định số hạng đầu tiên và công bội.

Chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{10^n}$ có số hạng đầu là $u_2 = \dfrac{1}{100}$ và công bội $r = -\dfrac{1}{10}$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ

Vậy $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(-10)^n} = u_2 \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{100} \dfrac{1}{1+1/10} = \dfrac{1}{110}$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 5.20 Tính giá trị của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Phân tích số hạng

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$

Bước 1:Phân tích thành hiệu.

$$\text{nên } S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Do $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 5.21 Tính giá trị của $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$.

Phân tích số hạng

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{n^2 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

Bước 1: Phân tích thành hiệu.

$$\text{nên } S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2 - i} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

Do $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ

nên $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = 1$ (hội tụ). ■

✎ Ví dụ 5.22 Tính giá trị của $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$.

Phân tích số hạng

Lời giải.

Ta có $\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

Bước 1: Phân tích thành hiệu.

$$\text{nên } S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{2}{i^2 - 1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Do $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{3}{2}$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}$ (hội tụ). ■

❖ Bài tập tự giải

5.15. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}.$$
ĐS: ∞.

5.16. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$
ĐS: 8.

5.17. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{2}{3^n}\right].$$
ĐS: $-\frac{4}{3}$.

5.18. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n - 3^{n-1} + 2 \cdot 2^n}{9^n}.$$
ĐS: $\frac{121}{28}$.

5.19. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3\frac{2^{n-1}}{5^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$
ĐS: $\frac{1}{2}$.

5.20. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$
ĐS: 1.

5.21. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$
ĐS: $\frac{1}{2}$.

5.22. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{6}{9n^2 + 3n - 2}.$$
ĐS: -1.

5.23. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}.$$
ĐS: 1.

5.24. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}.$$
ĐS: ∞.

5.25. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n^2 - 1}.$$
ĐS: ∞.

5.26. Tính giá trị chuỗi số
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2} - 1)^n}{(\sqrt{2} + 1)^n}.$$
ĐS: $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

5.3 Bài toán về sự hội tụ của chuỗi dương

Dạng toán 5.3 Khảo sát trực tiếp sự hội tụ của chuỗi dương

Sử dụng điều kiện hội tụ. (Sử dụng được cho chuỗi có dấu bất kỳ)

Bước 1: Tính giá trị $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Nếu $L \neq 0$ thì chuỗi phân kỳ.

Bước 2: So sánh L với 0 và kết luận. Nếu $L = 0$ thì không kết luận được gì.

Sử dụng tiêu chuẩn d'Alembert (tỉ số).

Bước 1: Tính giá trị $K = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Bước 2: So sánh K với 1 và kết luận.

Nếu $K < 1$ thì chuỗi số hội tụ.
Nếu $K = 1$ thì không kết luận được gì.
Nếu $K > 1$ thì chuỗi số phân kỳ.

Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy (căn thức).

Bước 1: Tính giá trị $K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Bước 2: So sánh K với 1 và kết luận.

Nếu $K < 1$ thì chuỗi số hội tụ.
Nếu $K = 1$ thì không kết luận được gì.
Nếu $K > 1$ thì chuỗi số phân kỳ.

Sử dụng tiêu chuẩn tích phân. Đặt f là hàm dương thỏa $f(n) = a_n$.

Bước 1: Tính giá trị $L = \displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$. Nếu L hội tụ thì chuỗi số hội tụ.

Bước 2: Khảo sát L và kết luận. Nếu L phân kỳ thì chuỗi số phân kỳ.

✎ **Ví dụ 5.23** Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+1}$.

Dự đoán giới hạn dãy số khác 0.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n/n - 1/n}{4n/n + 1/n} = \dfrac{3}{4}$.

Bước 1: Điều kiện hội tụ.

Do $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ nên

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n+1}$ phân kỳ theo Điều kiện hội tụ. ■

✎ **Ví dụ 5.24** Sử dụng Điều kiện hội tụ để khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Dự đoán giới hạn dãy số bằng 0.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{n}$. Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Bước 1: Điều kiện hội tụ.

Do $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ nên

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

ta không có kết luận gì về sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Để khảo sát sự hội tụ, ta phải sử dụng các tiêu chuẩn khác. ■

Công thức tổng quát có dạng tích/thương.

✎ Ví dụ 5.25 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn tỉ số.

Đặt $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{2n+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2})^n}$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2})^n} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Do $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert. ■

Công thức tổng quát có dạng tích/thương.

✎ Ví dụ 5.26 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn tỉ số.

Đặt $u_n = \frac{3^n n!}{n^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+1/n)^n} = \frac{3}{e}.$$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Do $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1$

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert. ■

Công thức tổng quát có lũy thừa bậc n.

✎ Ví dụ 5.27 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \ln n$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn căn thức.

Đặt $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \ln n$. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} \sqrt[n]{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \frac{1}{2}.$$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Do $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy. ■

✎ Ví dụ 5.28 Khảo sát sự hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^{n-1}}$.

Công thức tổng quát có lũy thừa bậc n.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{n^n}{2^{n-1}} = \dfrac{2n^n}{2^n}$. Khi đó

Bước 1: Tiêu chuẩn căn thức.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}n}{2} = \infty.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty > 1$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^{n-1}}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn Cauchy. ■

✎ Ví dụ 5.29 Khảo sát sự hội tụ của $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$.

Dễ dàng tìm được nguyên hàm.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ và đặt $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. Khi đó

Bước 1: Tiêu chuẩn tích phân.

$$\int_2^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x\ln x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b = \infty.$$

Do $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ phân kỳ

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân. ■

✎ Ví dụ 5.30 Khảo sát sự hội tụ của $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-n}$.

Dễ dàng tìm được nguyên hàm.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{n^2-n}$ và đặt $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x}$. Khi đó

Bước 1: Tiêu chuẩn tích phân.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(x-1)}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x-1) - \ln x\Big]\Big|_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{x-1}{x}\Big|_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{b-1}{b} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.
\end{aligned}$$

Do $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\, dx$ hội tụ

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn tích phân. ■

❖ Bài tập tự giải

5.27. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.28. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3^n}{2^n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.29. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\cos^2 n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.30. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}+\ldots$$
ĐS: hội tụ.

5.31. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n} n!$$
ĐS: phân kỳ.

5.32. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{n-1}}{(n-1)!}.$$
ĐS: hội tụ.

5.33. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{(n+1)2^{2n}}.$$
ĐS: hội tụ.

5.34. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \frac{n+2}{n+1}.$$
ĐS: hội tụ.

5.35. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2+n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.36. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 2^n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.37. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.38. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 5^n.$$
ĐS: phân kỳ.

5.39. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5n^2-1}\right)^n.$ ĐS: hội tụ.

5.40. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{9}\right)^4+\ldots$ ĐS: hội tụ.

5.41. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{n}{4n-3})^{2n}.$ ĐS: hội tụ.

5.42. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1-n}}{n^2}3^{n+1}.$ ĐS: phân kỳ.

5.43. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n10^n}{4^{2n+1}}.$ ĐS: hội tụ.

5.44. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$ ĐS: hội tụ.

5.45. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n^2}.$ ĐS: phân kỳ.

5.46. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}.$ ĐS: phân kỳ.

5.47. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$ ĐS: phân kỳ.

5.48. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}.$ ĐS: hội tụ.

5.49. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n.$ ĐS: phân kỳ.

5.50. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}.$ ĐS: hội tụ.

5.51. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$ ĐS: phân kỳ.

Ta có thể khảo sát sự hội tụ của chuỗi số qua việc so sánh nó với chuỗi số khác.

Dạng toán 5.4 Khảo sát gián tiếp sự hội tụ của chuỗi dương

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh để khảo sát $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Bước 1: Chọn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ là hữu hạn.

Bước 2: Kết luận chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ có cùng tính chất.

Sử dụng tiêu chuẩn dạng bất đẳng thức để khảo sát $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Bước 1: Chọn chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và so sánh u_n với v_n.

Bước 2: Nếu $u_n < v_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Nếu $u_n > v_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Chú ý:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$.

phân kỳ nếu $0 < r \leq 1$,

và hội tụ nếu $1 < r$.

✎ Ví dụ 5.31 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{4^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh.
Chọn v_n theo $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

Đặt $u_n = 2^n \sin \frac{1}{4^n}$ và chọn $v_n = \frac{1}{2^n}$.

Khi đó $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sin 1/4^n}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/4^n}{1/4^n} = 1.$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ (do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$ hội tụ với $r = 2 > 1$)

nên $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{4^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. ∎

✎ Ví dụ 5.32 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2+1}$.

Lời giải.

Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh.
Chọn v_n theo tỉ lệ số mũ cao nhất của tử thức và mẫu thức.

Đặt $u_n = \frac{2n}{3n^2+1}$ và chọn $v_n = \frac{1}{n}$.

Khi đó $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1} = \frac{2}{3}.$

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ phân kỳ với $r = 1 \leq 1$)

nên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2+1}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh. ∎

✎ Ví dụ 5.33 Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ và chọn $v_n = \dfrac{4^n}{5^n}$.

Bước 1: Tiêu chuẩn so sánh. Chọn v_n theo số hạng lớn nhất của tử thức và mẫu thức.

Khi đó $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3/4)^n + 1}{(2/5)^n + 1} = 1$.

Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ hội tụ (do $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$ hội tụ với $r = \dfrac{5}{4} > 1$)

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. ■

✎ Ví dụ 5.34 Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n + 1}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{n2^n + 1}$ và chọn $v_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

Dễ thấy $\dfrac{1}{n2^n + 1} \le \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow u_n \le v_n, \forall n$.

Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ (do $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$ hội tụ với $r = 2 > 1$)

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n + 1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn bất đẳng thức. ■

✎ Ví dụ 5.35 Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{2^n}{5^n + n}$ và chọn $v_n = \dfrac{2^n}{5^n}$.

Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

Dễ thấy $\dfrac{2^n}{5^n + n} \le \dfrac{2^n}{5^n} \Rightarrow u_n \le v_n, \forall n$.

Mà $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}$ hội tụ (do $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$ hội tụ với $r = \dfrac{5}{2} > 1$)

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn bất đẳng thức. ■

✎ Ví dụ 5.36 Khảo sát sự hội tụ của $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{1 + \ln n}$ và chọn $v_n = \dfrac{1}{n}$. Dễ thấy

Bước 1: Tiêu chuẩn bất đẳng thức.

$\dfrac{1}{1 + \ln n} \ge \dfrac{1}{n}$ (do $n \ge 1 + \ln n$) $\Rightarrow u_n \ge v_n, \forall n > 1$.

Mà $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ (do $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ phân kỳ với $r = 1 \le 1$)

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

nên $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + \ln n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn bất đẳng thức. ■

❖ Bài tập tự giải

5.52. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}.$$
ĐS: hội tụ.

5.53. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \cos^2 n}{n\sqrt{n}}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.54. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{n+n^2}\right)^2.$$
ĐS: hội tụ.

5.55. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n} + n^2\sqrt{n}}{n^3 + n\sqrt{n}}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.56. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos \frac{n\pi}{2})}{\sqrt[5]{n^7} + 5}\sqrt{n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.57. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{(e^n + 1)^2}.$$
ĐS: hội tụ.

5.58. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.59. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.60. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3n}{2n + 3^n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.61. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)\ln^2 n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.62. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$
ĐS: hội tụ.

5.63. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$
ĐS: hội tụ.

5.4 Bài toán khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu và chuỗi bất kì

Phương pháp phổ biến khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu là sử dụng tiêu chuẩn Leibniz.

Dạng toán 5.5 Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu

Bước 1: Viết chuỗi đan dấu dưới dạng $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$ với u_n dương.

Bước 2: Kiểm tra dãy dương $\{u_n\}$ là giảm và tiến về 0.

Kiểm tra dãy dương giảm: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ hoặc $f'(x) < 0$ với $f(n) = u_n$.

Kiểm tra tiến về 0: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Nếu cả hai điều kiện trên đều đúng thì chuỗi đan dấu hội tụ.

✎ Ví dụ 5.37 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$. Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$. Bước 1: Tìm công thức biểu diễn.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, ta có Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} : \dfrac{1}{n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$. Vậy dãy u_n giảm.
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$. Vậy dãy u_n tiến về 0.

Vậy chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ hội tụ. ■

✎ Ví dụ 5.38 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n^2+2}$.

Lời giải.

Đặt $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2+2} > 0$. Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$. Bước 1: Tìm công thức biểu diễn.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

- $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)^2+2} : \frac{2n-1}{n^2+2} = \frac{2n+1}{n^2+2n+3}\,\frac{n^2+2}{2n-1} = \frac{2n^3+n^2+4n+2}{2n^3+3n^2+4n-3}$$

  Do $n^2+2 < 3n^2-3,\ \forall n > 1$ nên $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1,\ \forall n > 1$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n^2+2} = 0$.

Vậy chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n-1}{n^2+2}$ hội tụ. ■

✎ Ví dụ 5.39 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm công thức biểu diễn.

Đặt $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} : \frac{\sqrt{2n-1}}{1} = \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} < 1, \forall n.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0.$

Vậy chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ hội tụ. ■

✎ Ví dụ 5.40 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm công thức biểu diễn.

Đặt $u_n = \frac{\ln n}{n}$. Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có

- Đặt $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \forall x > 3.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Vậy chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ hội tụ. ■

✎ Ví dụ 5.41 Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\sqrt[n]{2}$.

Lời giải.

Bước 1: Tìm công thức biểu diễn.
Chú ý $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Đặt $u_n = \sqrt[n]{2}$. Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, ta có

- Đặt $f(x) = \sqrt[x]{2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\sqrt[x]{2}\ln 2}{x^2} < 0, \forall x > 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \neq 0.$

Vậy chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\sqrt[n]{2}$ phân kỳ. ■

❖ Bài tập tự giải

5.64. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$
ĐS: hội tụ.

5.65. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-1}{2n+1}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.66. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}.$$
ĐS: hội tụ.

5.67. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{2n+3}.$$
ĐS: hội tụ.

5.68. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$
ĐS: hội tụ.

5.69. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(\sqrt{n}+1)}.$$
ĐS: hội tụ.

5.70. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}ne^{-n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.71. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{1/n}.$$
ĐS: phân kỳ.

5.72. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{\pi}{n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.73. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos n\pi.$$
ĐS: hội tụ.

5.74. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n-\ln n}.$$
ĐS: hội tụ.

5.75. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}.$$
ĐS: hội tụ.

Đối với các chuỗi có số hạng mang bất kì, người ta còn khảo sát sự hội tụ tuyệt đối.

Dạng toán 5.6 Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số

Bước 1: Chứng minh sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Bước 2: Khảo sát sự hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Nếu chuỗi này hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là hội tụ tuyệt đối. Ngược lại thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là nửa hội tụ.

✎ Ví dụ 5.42 Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

Lời giải.

Bước 1: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi thường.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Chuỗi này hội tụ (Ví dụ **??**).

Bước 2: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi tuyệt đối.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Chuỗi này phân kỳ (Ví dụ **??**).

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ nửa hội tụ. ■

✎ Ví dụ 5.43 Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

Lời giải.

Bước 1: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi thường.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. Đặt $u_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n > 0$.

Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^n\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{6n^2+11n+3}{6n^2+11n+4}\right)^n < 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n = 0^\infty = 0.$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ hội tụ.

Bước 2: Kết luận về sự hội tụ.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Tiêu chuẩn căn thức.

Chuỗi này hội tụ vì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$.

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ hội tụ tuyệt đối. ■

✎ **Ví dụ 5.44** Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$.

Lời giải.

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$. Đặt $u_n = \dfrac{1}{n^2} > 0$.

Bước 1: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi thường.

Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có:

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} : \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} < 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0.$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ.

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Bước 2: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi tuyệt đối.

Chuỗi này hội tụ do $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ hội tụ với $r = 2 > 1$.

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối. ■

✎ **Ví dụ 5.45** Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Lời giải.

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. Đặt $u_n = \dfrac{2n+1}{n(n+1)} > 0$.

Bước 1: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi thường.

Xét chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, ta có

- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\,\dfrac{n(n+1)}{2n+1} = \dfrac{2n^2+3n}{2n^2+5n+2} < 1.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)} = 0.$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$ hội tụ.

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

Bước 2: Khảo sát sự hội tụ của chuỗi tuyệt đối.

Chuỗi này phân kỳ vì khi so sánh với $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} : \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2 \text{ (hữu hạn)}.$$

Tiêu chuẩn so sánh tỉ lệ.

Vậy chuỗi ban đầu nửa hội tụ. ■

❖ Bài tập tự giải

5.76. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$
ĐS: hội tụ tuyệt đối.

5.77. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.78. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 2^n}{n!}.$$
ĐS: hội tụ tuyệt đối.

5.79. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^n.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.80. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.81. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.82. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.83. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.84. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{2^n}.$$
ĐS: hội tụ tuyệt đối.

5.85. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left[(-1)^n n\right]}{e^n}.$$
ĐS: hội tụ tuyệt đối.

5.86. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{n+1}.$$
ĐS: nửa hội tụ.

5.87. Khảo sát sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}.$$
ĐS: hội tụ tuyệt đối.

5.5 Bài toán tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

Người ta dùng các tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi dương để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.

Dạng toán 5.7 Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

Bước 1: Xác định số hạng tổng quát $u_n(x)$ của nó.

Bước 2: Sử dụng các tiêu chuẩn hội tụ cho chuỗi dương để tìm miền hội tụ của chuỗi hàm dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Bước 3: Khảo sát sự hội tụ tại các điểm biên và đưa ra miền hội tụ.

✎ **Ví dụ 5.46** Tìm miền hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ln x}}$.

Lời giải.

Đặt $u_n(x) = \dfrac{1}{n^{\ln x}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Bước 1: Xác định chuỗi hàm.

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^r}$ sẽ hội tụ khi $r > 1$ Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

nên chuỗi hội tụ khi $\ln x > 1 \Rightarrow x > e$.

Xét tại điểm $x = e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(e) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Bước 3: Khảo sát tại điểm biên.

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ phân kỳ nên $x = e$ không thuộc miền hội tụ.

Vậy miền hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ln x}}$ là $D = (e, \infty)$. ■

✎ **Ví dụ 5.47** Tìm miền hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Lời giải.

Đặt $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ xác định với mọi $x \neq -1$. Bước 1: Xác định chuỗi hàm.

Xét $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$. Khi đó Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right| : \left|\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Để chuỗi hội tụ thì $L < 1$ nghĩa là $\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Xét tại $x = 0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(0) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Bước 3: Khảo sát tại điểm biên.

Mà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. Xem Bài toán khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $D = [0, \infty)$. ■

✎ **Ví dụ 5.48** Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định chuỗi hàm.

Đặt $u_n(x) = \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

Xét $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$. Khi đó

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right| : \left|\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = |x-1|.$$

Để chuỗi hội tụ thì $L < 1$ nghĩa là $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Bước 3: Khảo sát tại điểm biên.

Xét tại $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Xem Bài toán khảo sát sự hội tụ của chuỗi đan dấu.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Xét tại $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Tiêu chuẩn bất đẳng thức

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ phân kỳ do lớn hơn chuỗi phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $D = [0, 2)$. ■

✎ **Ví dụ 5.49** Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n\left(x + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định chuỗi hàm.

Đặt $u_n(x) = \frac{\ln^n\left(x + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{x-e}}$ xác định với mọi $x > e$.

Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

Xét $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |\ln x|$

Để chuỗi hội tụ thì $L < 1 \Leftrightarrow |\ln x| < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e$.

Vậy không có giá trị x nào để chuỗi hội tụ. ■

✎ **Ví dụ 5.50** Tìm miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định chuỗi hàm.

Đặt $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

Ta có $|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$.

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ do $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ hội tụ với $r = \frac{3}{2} > 1$.

Vậy miền hội tụ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ là $D = \mathbb{R}$. ■

❖ Bài tập tự giải

5.88. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2x)^n}{n}.$$ ĐS: $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

5.89. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3n-1}.$$ ĐS: $[-2, 0)$.

5.90. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n+5}.$$ ĐS: $(2, 4)$.

5.91. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}.$$ ĐS: $(-1, 3)$.

5.92. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n.$$ ĐS: $(-\infty, 0)$.

5.93. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^{nx}+1}.$$ ĐS: $[0, \infty)$.

5.94. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$$ ĐS: $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

5.95. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$ ĐS: $(-1, 1)$.

5.96. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}.$$ ĐS: $(0, \infty)$.

5.97. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}.$$ ĐS: $(0, 1/e] \cup (e, \infty)$.

5.98. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})9^n x^{2n}.$$ ĐS: $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

5.99. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^{nx}}.$$ ĐS: $(0, \infty)$.

Đối với chuỗi lũy thừa, người ta dùng tiêu chuẩn tỉ số và căn thức để tìm miền hội tụ của nó.

Dạng toán 5.8 **Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa**

Bước 1: Xác định chuỗi lũy thừa với hệ số a_n của nó.
Bước 2: Sử dụng các tiêu chuẩn để tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Tiêu chuẩn tỉ số: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Tiêu chuẩn căn thức: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$.

Bước 3: Khảo sát sự hội tụ tại các điểm biên và đưa ra miền hội tụ.

✎ Ví dụ 5.51 Tìm miền hội tụ của $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2}x^n$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định chuỗi lũy thừa.

Dễ thấy $S(x)$ là chuỗi lũy thừa với hệ số tổng quát là $a_n = \dfrac{n}{2}$.

Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

Bán kính hội tụ của $S(x)$ theo tiêu chuẩn tỉ số là

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2}\,\frac{2}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Bước 3: Kết luận về sự hội tụ.

Xét tại biên

Ta có $S(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2} \neq 0$.

Ta có $S(-1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2}$ phân kỳ vì $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2} \neq 0$.

Vậy miền hội tụ của $S(x)$ là $D = (-1, 1)$. ■

✎ Ví dụ 5.52 Tìm miền hội tụ của $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n2^n}$.

Lời giải.

Bước 1: Xác định chuỗi lũy thừa.

Dễ thấy $S(x)$ là chuỗi lũy thừa với hệ số tổng quát là $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$.

Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

Bán kính hội tụ của $S(x)$ theo tiêu chuẩn căn thức là

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{n2^n}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Bước 3: Kết luận về sự hội tụ.

Xét tại biên

Xem Ví dụ ??

Ta có $S(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ phân kỳ.

Xem Ví dụ ??

Ta có $S(-2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ hội tụ.

Vậy miền hội tụ của $S(x)$ là $D = [-2, 2)$. ■

✎ Ví dụ 5.53 Tìm miền hội tụ của $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{x^2}$, ta có $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n t^n = T(t)$. Bước 1: Xác định chuỗi lũy thừa.

Dễ thấy $T(t)$ là chuỗi lũy thừa với hệ số tổng quát là $a_n = 4^n$.

Bán kính hội tụ của $T(t)$ theo tiêu chuẩn căn thức là Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4^n}} = \frac{1}{4}.$$

Xét tại biên Bước 3: Kết luận về sự hội tụ.

Ta có $T(\frac{1}{4}) = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty$ phân kỳ.

Ta có $T(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ hội tụ.

Do đó miền hội tụ của $T(t)$ là $D_t = [0, 1)$.

Ta có $0 \le t < 1 \Rightarrow 0 \le \frac{1}{x^2} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/x^2 \ge 0 \\ 1/x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{đúng với mọi } x \ne 0, \\ x < -1 \text{ hay } 1 < x. \end{cases}$$

Vậy miền hội tụ của $S(x)$ là $D_x = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. ■

✎ Ví dụ 5.54 Tìm miền hội tụ của

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} \left(2x - 1\right)^n.$$

Lời giải.

Đặt $t = 2x - 1$, ta có Bước 1: Xác định chuỗi lũy thừa.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} \left(2x - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)} t^n = T(t).$$

Dễ thấy $T(t)$ là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{n+1}{n(n-1)}$.

Bán kính hội tụ của $T(t)$ theo tiêu chuẩn tỉ số là Bước 2: Tìm bán kính hội tụ.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n(n-1)} \frac{(n+1)n}{n+2}\right| = 1.$$

Xét tại biên Bước 3: Kết luận về sự hội tụ.

Ta có $T(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n-1)}$ phân kỳ. So sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ta có $T(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n-1)}$ hội tụ. So sánh với $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Do đó miền hội tụ của $T(t)$ là $D_t = [-1, 1)$.

Ta có $-1 \le t < 1 \Rightarrow -1 \le 2x - 1 < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 \ge -1 \\ 2x - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x < 1. \end{cases}$$

Vậy miền hội tụ của $S(x)$ là $D_x = [0, 1)$. ■

❖ Bài tập tự giải

5.100. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

ĐS: $[-1, 1)$.

5.101. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}.$$

ĐS: $[-2, 0]$.

5.102. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 x^n.$$

ĐS: $(-1, 1)$.

5.103. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

ĐS: $[-2, 2)$.

5.104. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} x^n.$$

ĐS: $(-1, 1)$.

5.105. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n + 3^n}.$$

ĐS: $(-2, 4)$.

5.106. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^n}.$$

ĐS: $\mathbb{R}$.

5.107. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

ĐS: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

5.108. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}.$$

ĐS: $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$.

5.109. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2(x-3)^n}.$$

ĐS: $[0, 6]$.

5.110. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2x+1)^n}.$$

ĐS: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5.111. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 1)\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^n.$$

ĐS: $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$.

Các công thức thường gặp

A. Công thức lũy thừa và mũ

Cho a, b là các số thực dương và m, n là các số tự nhiên. Khi đó ta có:

- $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n số a)
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n + a^{n-1}(-b) + \ldots + a(-b)^{n-1} + (-b)^n = \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a+b}$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + \ldots + C_n^{n-1} a(-b)^{n-1} + C_n^n (-b)^n.$

B. Công thức logarit

Cho a, b, c, α, β là các số thực dương. Khi đó ta có:

- $a = \log_b c \Leftrightarrow c = b^a$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^\beta = \beta$
- $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\alpha}$
- $\log_{a^\alpha} a^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha}$
- $\log_a b^\beta = \beta \log_a b$
- $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$
- $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha} \log_a b$
- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = -\log_a \dfrac{c}{b}$
- $\log_a b \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
- $a^{\log_a b} = b$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

C. Công thức lượng giác

Cho α, β là các số thực dương. Khi đó ta có:

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\tan\alpha\cot\alpha = 1$
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$
- $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
- $\tan^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
- $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

D. Công thức đạo hàm cơ bản

Cho k là một hằng số, u và v là hai hàm số theo biến x. Khi đó ta có:

- $k' = 0$
- $x' = 1$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(kx)' = c$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\cos x)' = -\sin x.$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
- $(ku)' = ku'$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(\sin u)' = u'\cos u$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
- $(\cos u)' = -u'\sin u$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(a^u)' = u'a^u\ln a$
- $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
- $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
- $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
- $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
- $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

E. Công thức nguyên hàm cơ bản

Cho a, b, C là một hằng số, u là một hàm số theo biến x. Khi đó ta có:

- $\displaystyle\int 0\ dx = C.$
- $\displaystyle\int\ dx = x + C$
- $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \ln x\ dx = x(\ln x - 1) + C$
- $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int \tan x\ dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\displaystyle\int \cot x\ dx = \ln|\sin x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\ dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = -\cot x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|} + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
- $\displaystyle\int (ax+b)^n\ dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\ dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\displaystyle\int e^{ax+b}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
- $\displaystyle\int \tan(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + C$
- $\displaystyle\int \sin(ax+b)\ dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
- $\displaystyle\int \cos(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
- $\displaystyle\int u'u^n\ dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\ dx = \ln|u| + C$
- $\displaystyle\int u'e^u\ dx = e^u + C$
- $\displaystyle\int u'a^u\ dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
- $\displaystyle\int u'\sin u\ dx = -\cos u + C$
- $\displaystyle\int u'\cos u\ dx = \sin u + C$
- $\displaystyle\int u'\tan u\ dx = -\ln|\cos u| + C$
- $\displaystyle\int u'\cot u\ dx = \ln|\sin u| + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'dx}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'dx}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+u|}{|a-u|} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
- $\displaystyle\int \frac{u'dx}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$