ЛЕКЦИЯ 1

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. Будем называть множество X метрическим пространством если каждой паре элементов x и y из этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием между x и y, такое что выполнены следующие аксиомы:

- $\rho(x,y) \geq 0$
- $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Пример

Метрическое пространство $\mathbb{R}$. α, β – вещественные числа, $\rho(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|$

Метрическое пространство $\mathbb{R}^2$. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Для доказательства можно обратиться к геометрической интерпретации

Замечание. Для одного и того же множества расстояние можно определять по-разному.

Пример

Метрическое пространство $\mathbb{R}^2$. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\rho(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}^n$

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$, которое состоит их точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определим расстояние как $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Определение. Расстояние, определяемое формулой $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, называют <u>*евклидовым*</u>

Сходимость последовательности точек в метрическом пространстве

Пусть $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ – множество точек $\mathbb{R}^n$.

Определение. Если каждому натуральному числу k поставлена в соответствие точка $x^{(k)}\in\mathbb{R}^n$, то говорят, что задана последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Говорят, что точка $A\in\mathbb{R}^n$ называется <u>*пределом последовательности*</u> $\{x^{(k)}\}$ (последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ <u>*сходится к*</u> A), и пишут $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=A$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\rho\left(x^{(k)},A\right)=0$

Определение. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ называется <u>*ограниченной*</u>, если $\exists C\in\mathbb{R},\exists a\in\mathbb{R}^n:\forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow\rho\left(x^{(k)},a\right)\le C$

Лемма. Если последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ имеет предел, то она ограничена

Лемма. Если последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ имеет предел, то он единственный

Лемма. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}\in\mathbb{R}^n$, где $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)$ сходится к пределу $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_1^{(k)}\},\{x_2^{(k)}\},\ldots,\{x_n^{(k)}\}$ сходятся к соответствующим $a_1,a_2,\ldots,a_n$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i, i=1,\ldots,n$

Определение. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}\subset X$ называется <u>*фундаментальной*</u>, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall k,m\ge N\Rightarrow\rho\left(x^{(k)},x^{(m)}\right)<\varepsilon$.

Замечание. Это означает, что начиная с некоторого номера все точки последовательности достаточно близки друг к другу

Лемма. Если последовательность точек $\{x^{(k)}\}\subset X$ сходится, то она фундаментальная

Замечание. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно

ОТКРЫТЫЕ И ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Шаром радиуса r с центром в точке $a \in X$ будем называть множество точек метрического пространства: $S_r(a) = \{x : x \in X, \rho(x,a) < r\}$.

Замечание. Шар в $\mathbb{R}$ это интервал $(a-r;a+r)$

Шар в $\mathbb{R}^2$ это круг $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2$

Шар в $\mathbb{R}^n$ это множество

$$S_r(a)=\left\{x : x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2\right\}$$

Определение. Пусть M множество точек в метрическом пространстве X. Точка $x^0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если $\exists S_\varepsilon(x^0)\subset M$.

Замечание. Внутренняя точка содержится в M вместе с некоторым шаром с центром в ней

Определение. Совокупность всех внутренних точек множества M образуют *внутренность* M $-$ $\operatorname{int} M$. Очевидно, что $\operatorname{int} M \subset M$.

Определение. Если $\operatorname{int} M = M$, то множество называется *открытым* в метрическом пространстве X. Пустое множество считается открытым по определению.

Определение. *Окрестностью* точки $x^0 \in X$ будем называть любое множество $O(x^0)$, для которого точка x^0 является внутренней. Например, шар $S_\varepsilon(x^0)$ $-\varepsilon$ -окрестность точки x^0.

Определение. Точка x^0 называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если в любой ее окрестности есть точки множества M отличные от x^0.

Замечание. Предельная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Пример

Интервал, фигура на плоскости без границы

Определение. Точка множества M, не являющаяся предельной, называется *изолированной*.

Замечание. Если точка является изолированной, то существует ее окрестность, в которой нет точек множества M

Определение. Множество $M \subset X$ называется *замкнутым*, если содержит все свои предельные точки.

Пример

Отрезок, фигура на плоскости с границей

ПРЯМЫЕ, ЛУЧИ И ОТРЕЗКИ В $\mathbb{R}^n$

Пока рассматривали объекты, которые использовали лишь понятие расстояния. Введем не связанные с метрикой объекты

Определение. *Прямой* в $\mathbb{R}^n$, проходящей через точки $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ будем называть следующее множество точек

$\left\{x : x\in\mathbb{R}^n, x_i = a_i t + b_i(1-t), t\in\mathbb{R}, i=1,\dots,n\right\}$

Пример

Для $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = a_1 t + b_1(1-t) \\ y = a_2 t + b_2(1-t) \end{cases}$

Определение. *Лучом* в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ в направлении $l=(l_1,l_2,\dots,l_n)$, где $l_1^2+l_2^2+\dots+l_n^2=1$ назовем множество

$\left\{x : x\in\mathbb{R}^n, x_i = a_i + l_i t, 0\le t<+\infty, i=1,\dots,n\right\}$

Пример

Для $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, 0\le t<+\infty \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

Определение. *Отрезком* в $\mathbb{R}^n$, соединяющим точки $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ будем называть следующее множество

$\left\{x : x\in\mathbb{R}^n, x_i = a_i t + b_i(1-t), 0\le t\le 1, i=1,\dots,n\right\}$

Определение. Множество $M\subset\mathbb{R}^n$ будем называть *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит отрезок, который эти точки соединяет.

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$ задается параметрически $x_i=\varphi_i(t), \alpha\le t\le\beta, i=1,\dots,n$, где $\varphi_i(t)$ непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$

Определение. Множество $M\subset\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить кривой $\Gamma\subset M$.

Определение. Открытое и связное множество в $\mathbb{R}^n$ называют *областью*. Замыкание области называют *замкнутой областью*

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$, являющаяся объединением конечного числа отрезков, называется *ломаной* в $\mathbb{R}^n$

ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функцию $f : M\to\mathbb{R}$, где $M\subset\mathbb{R}^n$ которую называют *функцией многих переменных* и обозначают

$f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n), x\in M$

Для функции может быть найдена естественная область определения.

Пример

Найти ООФ $z=\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$