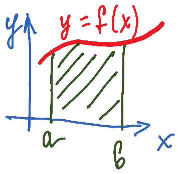
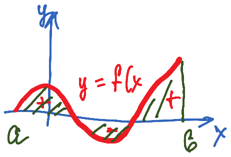
Практика 7. Определенный интеграл. Часть 2
Геометрические приложения определенного интеграла.

Площади плоских фигур

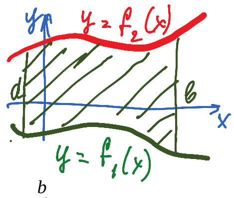
Прямоугольная система координат



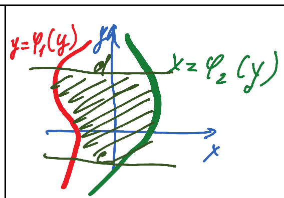
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

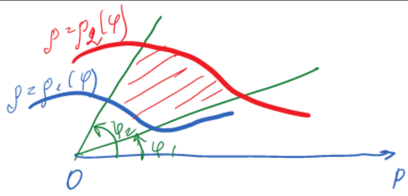


$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Параметрическое задание

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt \qquad a=x(t_1), b=x(t_2)$$

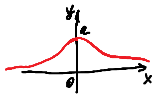
Полярная система координат

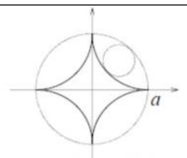


$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\rho_2^2(\varphi)-\rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi$$

Локон Аньези

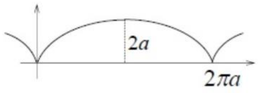
$$y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$$





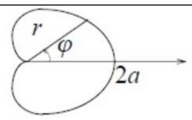
Астроида

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases} \text{ или } x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$



Циклоида

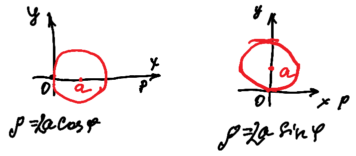
$$\begin{cases} x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$$



Кардиоида

$r=a(1+\cos\varphi)$

Окружность в полярной с.к.



Длина дуги кривой

В прямоугольной с.к.	Параметрическое задание	В полярных координатах
$y=f(x)$ $l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$	$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$ $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt.$	$\rho=\rho(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$ $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi$

Объемы тел

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Площадь поверхности вращения

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Моменты инерции. Координаты центра тяжести

Для плоской кривой λ статические моменты M_x, M_y относительно координатных осей ox, oy выражаются формулами:

$$M_x=\int_\lambda y\cdot d\ell; \qquad M_y=\int_\lambda x\cdot d\ell$$

Момент инерции относительно начала координат:

$$\Im_0=\int_\lambda (x^2+y^2)d\ell,$$

где $d\ell$ - дифференциал дуги.

Если кривая λ задана уравнением $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$, то $d\ell=\sqrt{1+y'^2}dx$.

Если кривая λ задана параметрически уравнениями: $x=x(t)$; $y=y(t)$, $(t_1\le t\le t_2)$, то $d\ell=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\cdot dt$.

2. Для плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, $y_1(x)\le y_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, $(a\le x\le b)$.

Статические моменты выражаются формулами:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx;\quad M_y=\int_a^b x\cdot(y_2-y_1)\cdot dx$$

Центр тяжести плоской кривой λ имеет координаты:

$$\begin{cases}\bar{x}=\frac{M_y}{\ell};\\ \bar{y}=\frac{M_x}{\ell};\end{cases}$$

где ℓ -длина кривой λ

Центр тяжести плоской фигуры имеет координаты:

$$\begin{cases}\bar{x}=\frac{M_y}{S};\\ \bar{y}=\frac{M_x}{S};\end{cases}$$

где S - площадь фигуры

1. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и локоном Аньези $y = \dfrac{8}{x^2+4}$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x+1$, $y = \cos x$ и осью Ox.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1-3y^2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\sin 2t \end{cases}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ и $\rho = 3a\sin\varphi$.

6. Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1+\cos\varphi$.

7. Вычислить длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, (a > 0)$.

8. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$.

9. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi), (a > 0)$.

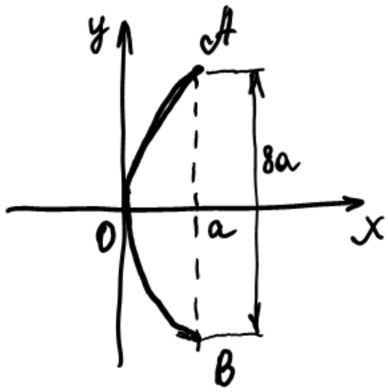
10. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями

а) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox;

б) $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$ вокруг оси Oy.

11. Вычислить объем тела, отсеченного от кругового цилиндра радиуса R, плоскостью, проходящей через диаметр основания, под углом α к основанию цилиндра.

12. Размеры параболического зеркала AOB указаны на чертеже (рис.). Найти поверхность этого зеркала.



13. Найти статистические моменты и моменты инерции дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, лежащей в первой четверти.

14. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $4x^2 + 9y^2 = 36$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$, расположенной в первой четверти.

Ответы. **1.** $2\pi - \frac{4}{3}$. **2.** 1,5. **3.** $1\frac{1}{3}$. **4.** $2\frac{2}{3}ab$. **5.** $2{,}25a^2\left(\pi - arctg\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$. **6.** $\frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$. **7.** $6a$. **8.** $8a$. **9.** $8a$. **10.** **а)** 12π. **б)** $58{,}5\pi$. **11.** $\frac{2}{3}R^3 tg\alpha$. **12.** $5\frac{1}{3}\pi a^2\left(5\sqrt{5} - 8\right)$. **13.** $\frac{3}{5}a^2; \frac{3}{5}a^2; \frac{3}{8}a^3; \frac{3}{8}a^3$. **14.** $\left(\frac{4}{\pi}; \frac{20}{3\pi}\right)$.