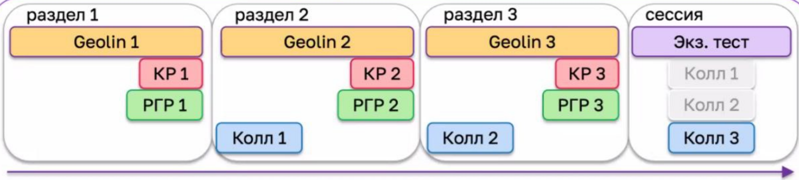
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Борель Лидия Викторовна

Лекция 1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

2023

План и баллы в семестре



В разделе	max	min	ключ
Geolin #	5	5	
КР #	5	3	ключ
РГР #	10	6	
Колл #	10	2 (6)	ключ
Всего в разделе:	30	20	

Сессия	max	min	ключ
Экз. тест	10	4	
Всего:	100	60	

Рекомендуемая литература

https://drive.google.com/drive/folders/1S2PaLoCrYWyNrd7HJq5rW6TeYcmg1I0A

1.1. Уравнение первого порядка и его решение

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные.
Обыкновенное дифференциальное уравнение – уравнение, в котором искомая функция зависит только от одной переменной.
Дифференциальное уравнение в частных производных – уравнение, в котором искомая функция зависит от нескольких переменных.
Порядок дифференциального уравнения – порядок старшей производной, входящей в уравнение.

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

(1.1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.
Решением уравнения (1.1) на интервале (a, b) называется функция ϕ, обладающая свойствами:

- ϕ непрерывно дифференцируема на (a, b);
- $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Задача 1

Пусть у нас есть простая модель, описывающая изменение численности биологической популяции. $y(t)$ – количество особей в момент времени t. Предположим, проведённый эксперимент показал, что прирост числа особей пропорционален их количеству в данный момент, то есть при малом изменении времени Δt

$$y(t+\Delta t) - y(t) = ky(t)\Delta t.$$

Найти функцию, описывающую численность популяции.

$$y' = ky.$$

$$\phi(x) = e^{kt} - \text{ решение.}$$

$$y = Ce^{kt} - \text{ все возможные решения.}$$

Задача 2

Пусть масса дрожжей, помещённых в раствор сахара, в начальный момент времени была 25 грамм. Через полчаса их масса стала равна 42 грамма. В какой момент времени масса дрожжей будет в два раза больше изначальной?

$$m' = km,$$

$$m(0) = 25 \Rightarrow m(t) = 25e^{kt},$$

$$m(30) = 42 \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{42}{25}\right)}{30} \approx 0,0173.$$

$$m(t) = 25e^{0,0173t},$$

$$m(t_2) = 2 \cdot 25 = 50 \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{0,0173} \approx 40.$$

Задача 3

Написать дифференциальное уравнение движения тела с массой m по оси Ox под действием силы $f(t, x, x')$, направленной по этой оси. Здесь $x = x(t)$ – абсцисса и $x' = x'(t)$ – скорость тела в момент времени t.

$$mx'' = f(t, x, x'),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x'(t_0) = x'_0.$$

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at,$$

где $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

График решения называют *интегральной кривой.*
Множество всех решений образует *общее решение* уравнения.

Пример

$$y' = x,$$

$$y = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C - \text{общее решение.}$$

При конкретном C – частное решение.

$$\Phi(x, y) = 0 - \text{ частный интеграл.}$$

$$\Phi(x, y, C) = 0 - \text{ общий интеграл.}$$

1.4. Формы записи уравнения первого порядка

$$y' = f(x,y) \text{ – уравнение в нормальной форме.} \tag{1.2}$$

$$f(x,y)dx - dy = 0 \text{ – уравнение в дифференциалах.}$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \text{ – уравнение в дифференциалах в общем виде.} \tag{1.3}$$

Решениями уравнения в дифференциалах являются как функции вида $y(x)$, так и функции вида $x(y)$, непрерывно дифференцируемые на некотором интервале и обращающие уравнение в тождество на этом интервале.
Если графики решения уравнения (1.3) образуют единую гладкую кривую, то такую кривую будем называть *интегральной кривой* уравнения (1.3).

$P(x)dx+Q(y)dy = 0$ – уравнение с разделёнными переменными.

$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$ – общий интеграл.