ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел 1
Множества и отношения

ITMO University

Практическое занятие 1

Операции над множествами

Литература:

- Кривцова И.Е., Лебедев И.С., Настека А.В. Основы дискретной математики. Часть 1. Университет ИТМО, СПб, 2016.
- Белоусов А.И. Дискретная математика. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2002.

Обозначения:

$\Rightarrow$ - следовательно

$\Leftrightarrow$ - тогда и только тогда, когда

$\exists$ - существует

$\forall$ - любой, каждый

$!$ - единственный

Георг Кантор

(1845-1918)

« Под многообразием или множеством я понимаю вообще все многое, которое возможно мыслить как единое, т. е. такую совокупность определенных элементов, которая посредством одного закона может быть соединена в одно целое».

Георг Кантор

Обозначение: $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Обозначение: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$

Символ $\in$ – символ *принадлежности* элемента a множеству A:

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ – элемент a не принадлежит множеству A.

Стандартные обозначения числовых множеств

$\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел,
$\boldsymbol{Z}$ – множество целых чисел,
$\boldsymbol{Q}$ – множество рациональных чисел,
$\boldsymbol{R}$ – множество действительных чисел,
$\boldsymbol{C}$ – множество комплексных чисел.

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Обозначение: $\varnothing$

Универсальным множеством или универсумом в теории множеств является совокупность всех множеств, рассматриваемых в данной задаче.

Обозначение: I или U.

Способы задания множеств

- Перечисление или рекурсия
- Описание

Графическое изображение множества – *диаграмма Эйлера-Венна*.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A=B$

Множество B называется подмножеством или частью множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Обозначение: $B \subseteq A$ (нестрогое включение)

Если $B \neq \varnothing$, $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то множество B называется истинным или собственным подмножеством множества A.

Обозначение: $B \subset A$ (строгое включение)

Множество всех подмножеств множества B называется **множеством-степенью** или **булеаном** множества B.

Обозначение: 2^B или $P(B)$.

$$P(B) = \{X:\ X \subseteq B\}$$

Операции над множествами

1. Объединение:

$$A \cup B = \{x:\ x \in A \text{ или } x \in B\};$$

2. Пересечение:

$$A \cap B = \{x:\ x \in A \text{ и } x \in B\};$$

3. Разность:

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A \text{ и } x \notin B\};$$

4. Симметрическая разность:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

5. Дополнение множества A до универсального:

$$\overline{A} = I \setminus A$$

Свойства

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативный закон,

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – ассоциативный закон,

3. $A \cup A = A$ – идемпотентность,

4. $A \cup \varnothing = ?$,

5. $A \cup \boldsymbol{I} = ?$, где $\boldsymbol{I}$ – универсальное множество.

Множества A и B называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Свойства

6. $A \cap B = B \cap A$;

7. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

8. $A \cap A = A$;

9. $A \cap \varnothing = ?$;

10. $A \cap \boldsymbol{I} = ?$.

Дистрибутивные законы:

11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Законы поглощения:

13. $A \cup (B \cap A) = A$;

14. $A \cap (B \cup A) = A$;

Свойства

15. $A \Delta B = B \Delta A$,

16. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,

17. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

18. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Свойства

Законы де Моргана:

19. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

20. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

21. $A \cup \overline{A} = ?$;

22. $A \cap \overline{A} = ?$;

23. $\overline{\overline{A}} = ?$ – закон двойного отрицания.

Каждое из равенств 1 – 23 верно для любых подмножеств A, B, C универсального множества $\boldsymbol{I}$.

Равенства 1 – 23 называются *основными тождествами алгебры множеств*.

Способы доказательства основных тождеств

- Метод двух включений
- Метод эквивалентных преобразований
- Метод характеристических функций

Метод двух включений

$$X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} X \subseteq Y \\ Y \subseteq X \end{cases}$$

Характеристической функцией

множества $X \subseteq \boldsymbol{I}$ называется функция

$$\forall x \in \boldsymbol{I} \qquad \chi_X(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in X \\ 0, \text{ если } x \notin X \end{cases}$$

Свойства

1. $\chi_{\overline{X}}(x) = 1 - \chi_X(x)$
2. $\chi_{X \cap Y}(x) = \chi_X(x) \cdot \chi_Y(x)$
3. $\chi_{X \cup Y}(x) = \chi_X(x) + \chi_Y(x) - \chi_X(x) \cdot \chi_Y(x)$

$$\forall x \in \boldsymbol{I} \quad \chi_X(x) = \chi_Y(x) \quad \Leftrightarrow \quad X = Y$$

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая – множеству B :

$$A \times B = \{(x,y)\colon\ x \in A,\ y \in B\}.$$

m–й декартовой степенью множества A называется декартово произведение m сомножителей, каждый из которых равен A :

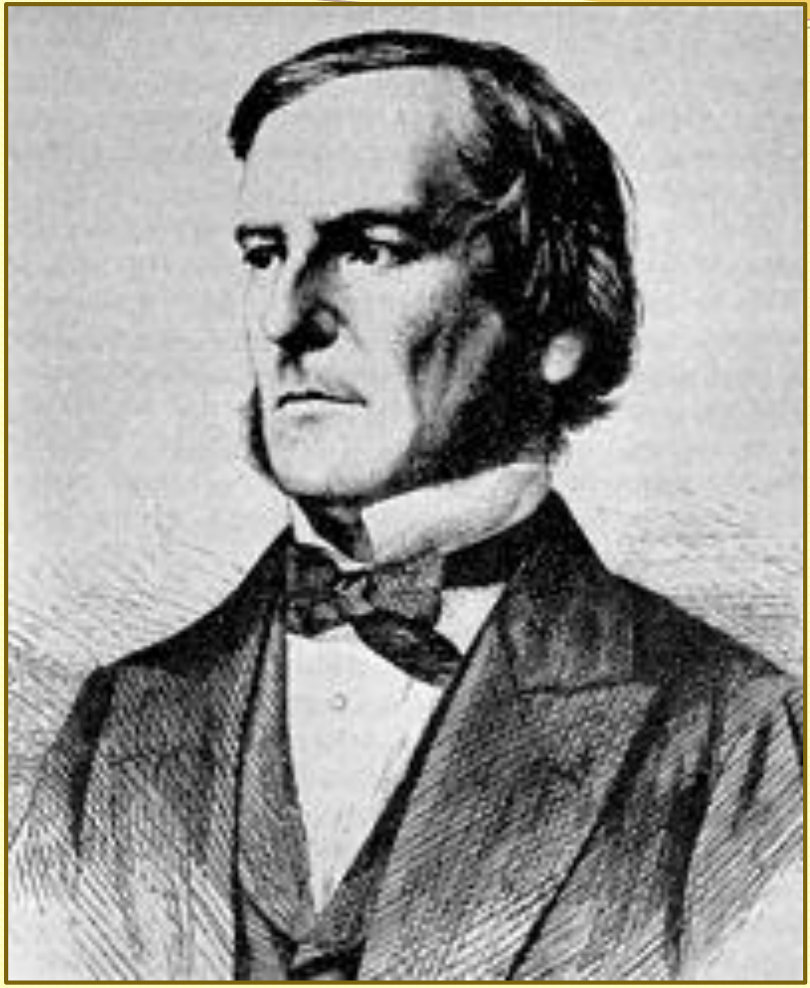
$$A^m = A \times A \times \ldots \times A.$$

При m=2 получаем A^2 – декартов квадрат;

при m=3 получаем A^3 – декартов куб.

Свойства

1. $A\times(B \cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$;
2. $A\times(B \cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$;
3. $A\times\varnothing = \varnothing\times A = ?$.



Джордж Буль
(1815-1864)

Булева алгебра множеств

Пусть S – некоторое множество, $P(S)$ – булеан множества S; на множестве $P(S)$ определены операции $\cup$ и $\cap$.

$\forall A, B, C \in P(S)$ выполняются следующие свойства:

1. коммутативность операций;
2. ассоциативность операций;
3. идемпотентность;
4. дистрибутивность;

5. $\exists$ элемент $\varnothing \in P(S)$ такой, что $\forall A \in P(S)$ $A \cup \varnothing = A$;

6. $\exists$ элемент $\boldsymbol{I} \in P(S)$ такой, что $\forall A \in P(S)$ $A \cap \boldsymbol{I} = A$;

7. $\forall A \in P(S)$ $\exists\ \overline{A} \in P(S)$ такое, что $A \cup \overline{A} = \boldsymbol{I}$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

$\boldsymbol{I}$ = **?**

Алгебраическая структура $< P(S), \cup, \cap >$ называется булевой алгеброй множеств.

Множество $\varnothing$ называется *нулем* алгебры;

множество $\boldsymbol{I}$ называется *единицей* алгебры.

Замечание:

множество $P(S)$ *замкнуто* относительно операций $\cup$ и $\cap$, т.е. $\forall A, B \in P(S)$ выполняется $A \cup B \in P(S)$, $A \cap B \in P(S)$.