ЛЕКЦИЯ 2

Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{O}(x^0)$ предельной точки x^0 метрического пространства X.

Определение. (По Коши) Говорят, что число A есть <u>*предел функции*</u> $f(x)$ при $x \to x^0$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in O(x^0) : 0 < \rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$,

Обозначается $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$.

Определение. (По Гейне) Говорят, что число A есть <u>*предел функции*</u> в точке x^0, если $\forall \left\{x^{(k)}\right\} \in O(x^0), x^{(k)} \neq x^0 : \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = A$

Теорема. Определения эквивалентны. (Доказывается, как и для функции одной переменной)

Для функции двух переменных $f(x, y)$, определенной в $O((a,b))$ пишут $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A$ (двойной предел)

Лемма. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в $O(x^0)$ и $|f(x)| \le \varphi(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$, то и $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$

Доказательство:

Т. к. $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$, то для $\forall \varepsilon > 0\ \exists S_\delta(x^0) : \forall x \in S_\delta(x^0) \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon$. Тем более $\forall x \in S_\delta(x^0) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$

Пример

Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела.

Рассмотрим последовательность точек $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$. Тогда $f(x_n, y_n) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = 1$

Рассмотрим последовательность точек $\left(x_n', y_n'\right)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$.

Тогда $f\left(x_n', y_n'\right)=-1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n', y_n'\right)=-1$

Бесконечные пределы

Определение.

$\forall C>0\ \exists\delta>0:\forall x\in \overset{o}{O}_\delta\left(x^0\right)\Rightarrow f\left(x\right)>C \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^0} f\left(x\right)=+\infty$

Определение.

$\forall\varepsilon>0\ \exists R>0:\forall x:\rho\left(x,O\right)>R\Rightarrow\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=A$

Пример

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to\infty}\frac{r\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)}{r^2}=0$$

Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $f\left(x\right)$ определена в окрестности $O\left(x^0\right)$ точки x^0 метрического пространства

Определение. Говорят, что функция $f\left(x\right)$ *непрерывна* в точке x^0, если $\lim\limits_{x\to x^0} f\left(x\right)=f\left(x^0\right)$

Определение. Говорят, что функция $f\left(x\right)$ *непрерывна* в точке x^0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists S_\delta\left(x^0\right):\forall x\in S_\delta\left(x^0\right)\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(x^0\right)\right|<\varepsilon$

Замечание. Основные теоремы о непрерывных в некоторой точке функциях доказываются аналогично теоремам о функции одной переменной

Теорема. (Непрерывность сложной функции) Пусть функции $\varphi_1\left(x\right),\ldots,\varphi_n\left(x\right)$ определены в некоторой окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, а функция $f\left(y\right)=f\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ определена в окрестности точки $y^0=\left(\varphi_1\left(x^0\right),\ldots,\varphi_n\left(x^0\right)\right)$ и непрерывна в точке y^0. Тогда в некоторой окрестности x^0 определена сложная функция $\Phi\left(x\right)=f\left(\varphi_1\left(x\right),\ldots,\varphi_n\left(x\right)\right)$, причем $\Phi\left(x\right)$ непрерывна в x^0

$$f\left(x\right)-f\left(x^0\right)=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2,\ldots,x_n\right)+$$
$$+f\left(x_1^0,x_2,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n\right)+\ldots$$
$$\ldots+f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{n-1}^0,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\right)$$

Пусть $x_1^0<x_1$. Рассмотрим функцию одной переменной $\psi\left(t\right)=f\left(t,x_2,\ldots,x_n\right),t\in\left[x_1^0,x_1\right]$. Она имеет производную $\psi'\left(t\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(t,x_2,\ldots,x_n\right)$

Воспользуемся формулой приращений Лагранжа для функции одной переменной на $\left[x_1^0,x_1\right]$

$\psi\left(x_1\right)-\psi\left(x_1^0\right)=\psi'\left(x_1^0+\theta\left(x_1-x_1^0\right)\right)\left(x_1-x_1^0\right),0<\theta<1$. Или

$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1^0,x_2,\ldots,x_n\right)=f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\left(x_1-x_1^0\right)$,

$f_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0+\theta\left(x_1-x_1^0\right)\right)$

Т. к. $\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ непрерывна в x_1^0, то существует

$\lim\limits_{x_1\to x_1^0} f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0\right)$. Аналогично с остальными переменными.

Функции $f_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right),i=1,\ldots,n$ имеют пределы при $x\to x^0$. Доопределяя их предельными значениями, получим непрерывные функции

Подставим в

$$f\left(x\right)-f\left(x^0\right)=f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)\left(x_1-x_1^0\right)+f_2\left(x_1,\ldots,x_n\right)\left(x_2-x_2^0\right)+\ldots$$
$$\ldots+f_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)\left(x_n-x_n^0\right)$$

По критерию дифференцируемости получили требуемое.

Замечание. Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0$$

Пусть $x_1\neq x_1^0, x_2=x_2^0,\dots,x_n=x_n^0$. Тогда

$$f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=A_1(x_1-x_1^0)+o(|\Delta x_1|),\Delta x_1\to 0$$

Тогда существует предел, имеем $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{f(x_1,x_2^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)}{\Delta x_1}=A_1=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Аналогично для остальных переменных.

Замечание. Обратное утверждение не верно. Из существования частных производных не следует дифференцируемость.

Пример

Покажем, что $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$

Допустим, дифференцируема

$f(x,y)-f(0,0)=Ax+By+o(\rho),\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. При этом $f(0,0)=0$.

Поэтому

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=1,B=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$$

Пусть теперь $x=y>0$, $\sqrt[3]{2}x=2x+o(x)\Rightarrow(\sqrt[3]{2}-2)x=o(x),x\to 0$, что противоречит определению $o(x)$. Функция не дифференцируема.

Теорема. (Достаточное условие дифференцируемости функции). Если все частные производные определены в некоторой окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в ней, то функция дифференцируема в точке x^0.

Доказательство:

Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial x_k},k=1,\dots,n$ определены в некотором шаре $S_\varepsilon(x^0)$ и непрерывны в x^0

Запишем приращение функции в следующем виде

Свойства функций непрерывных на компакте

Определение. Множество $M\subset X$ называется <u>компактом</u> в X, если из любой последовательности точек $x_n\in M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей M

Пример

$[a,b]$ – компакт в $\mathbb{R}$, а $[a,b)$ – не компакт в $\mathbb{R}$

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>непрерывной на множестве</u> M, если она непрерывна в каждой точке этого множества по этому множеству, т. е. в каждой предельной точке x^0 выполнено $\lim\limits_{x\to x^0,x\in M}f(x)=f(x^0)$

Теорема. (первая Вейерштрасса) Функции $f(x)$, непрерывна на компакте метрического пространства, ограничена на этом компакте.

Теорема. (вторая Вейерштрасса) Функции $f(x)$, непрерывна на компакте метрического пространства, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.

Равномерная непрерывность

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ называется <u>*равномерно непрерывной*</u> на множестве $G\subset X$, если

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\forall x,x'\in G:\rho(x,x')<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

Теорема. (Кантора) Функции $f(x)$, непрерывная на компакте метрического пространства, равномерно непрерывна на этом компакте.

Промежуточные значения непрерывной функции

Теорема. Пусть функции $f(x)$ непрерывна в области $G\subset\mathbb{R}^n$ и принимает в этой области значения A и B. Тогда функция $f(x)$ принимает в этой области все значения, заключенные между A и B

Частные производные

Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определена в окрестности точки $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_1)=f(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)$. Она может иметь в точке x_1^0 производную. По определению ее называют частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Аналогично определяются другие частные производные

Определение. <u>*Частной производной*</u> от функции $f(x)$ по переменной x_k в точке x^0 называют

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1^0,\ldots,x_k,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\Delta x_k}, i=1,\ldots,n,$$ где

$\Delta x_k=x_k-x_k^0$ Обозначается $f'_{x_k}(x^0),\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$.

Из определения следует, что для вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и производных функции одной переменной.

При этом все переменные кроме одной фиксируются

Пример

$$f(x,y)=x\ln y+\frac{y}{x}.$$

$$f'_x=\ln y-\frac{y}{x^2},\ f'_y=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}.$$

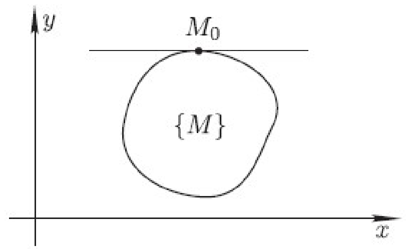
Пример

$$f(x,y)=\begin{cases}1 \text{ на осях координат}\\ 0 \text{ в остальных точках}\end{cases}.$$

$f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$.

При этом в точке $(0,0)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$ не существует, т. е. функция не непрерывна, но имеет частные производные. Это невозможно для функции одной переменной.

Замечание. Если x^0 граничная точка ООФ, то для нее определение частной производной может быть непригодным.



Не существует частное приращение по x.

Дифференцируемость функции многих переменных

Определение. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется <u>*дифференцируемой*</u> в точке $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0,$$ где $A_1,A_2,\ldots,A_n$ числа

Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции в точке

Теорема. (Необходимое условие дифференцируемости) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0\in\mathbb{R}^n$, то она имеет в ней частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0),i=1,\ldots,n$ и

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0$$

Доказательство:

Из дифференцируемости в точке имеем