

Практическое занятие 5

Построение отношений порядка. Диаграммы Хассе

Литература:

- Кривцова И.Е., Лебедев И.С., Настека А.В. Основы дискретной математики. Часть 1. Университет ИТМО, 2016.
- Белоусов А.И. Дискретная математика. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

Бинарное отношение Q на X называется **отношением частичного порядка**, если оно является:

- ✓ рефлексивным,
- ✓ антисимметричным,
- ✓ транзитивным.

Обозначение: $x \preceq y$.

Говорят, что элемент x не больше элемента y .

Множество X , на котором зафиксирован некоторый частичный порядок \preceq , называется **частично упорядоченным множеством (ч.у.м.)**.

Обозначение: $\langle X, \preceq \rangle$.

Элементы x и y частично
упорядоченного множества $\langle X, \preceq \rangle$
называются:

- **сравнимыми по отношению частичного порядка**, если $x \preceq y$ или $y \preceq x$;
- **несравнимыми** в противном случае.

Отношение частичного порядка на X , для которого любые два элемента сравнимы, называется **отношением линейного порядка**.

Множество X , на котором зафиксирован некоторый линейный порядок, называется **линейно упорядоченным множеством (л.у.м.)**.

Бинарное отношение Q на X называется **отношением строгого порядка**, если оно является:

- ✓ антирефлексивным,
- ✓ антисимметричным,
- ✓ транзитивным.

Обозначение: $x \prec y$.

Говорят, что элемент x строго меньше элемента y (элемент x предшествует элементу y).

Пусть $X \neq \emptyset$ – конечное множество.

Бинарное отношение Q на X называется **отношением доминирования**, если для двух элементов $x, y \in X$ элемент x находится в отношении Q с y тогда и только тогда, когда $x \prec y$ и не существует $z \in X$ такого, что $x \prec z \prec y$.

Обозначение: $x \triangleleft y$.

Говорят, что элемент x
доминирует над элементом y или
элемент x *покрывает* элемент y .

Отношение \triangleleft называют также
доминированием, ассоциированным с
отношением порядка \preceq .

Конечное ч.у.м. $\langle X, \preceq \rangle$ имеет **диаграмму Хассе**, если в нем строгий порядок определяется отношением доминирования:

$$\forall x, y \in X \quad x \prec y \Leftrightarrow \exists x_0, x_1, x_2 \dots, x_n$$

такая, что $x = x_0 \triangleleft x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft \dots \triangleleft x_n = y$.

В диаграмме Хассе:

- любой элемент $x_i \in X$ изображают точкой на плоскости,
- если x_{i+1} доминирует над x_i , то точку x_{i+1} располагают выше точки x_i и соединяют их отрезком (дугой).

Два ч.у.м. $X = \langle X, \preceq_X \rangle$ и $Y = \langle Y, \preceq_Y \rangle$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi: X \rightarrow Y$, сохраняющая отношения частичного порядка:

$$x, y \in X \quad x \preceq_X y \Leftrightarrow \varphi(x) \preceq_Y \varphi(y)$$

Обозначение: $X \cong Y$.

Изоморфные ч.у.м. *неотличимы* как частично упорядоченные множества.

Бинарное отношение \supseteq на X
называется **отношением, двойственным**
к отношению частичного порядка \subseteq ,
если:

$$\forall x, y \in X \quad x \supseteq y \Leftrightarrow y \subseteq x$$

Отношение $Q: x \succ y$,
ассоциированное с двойственным
отношением, определяется так:

$$\forall x, y \in X \quad x \succ y \Leftrightarrow x \succeq y \text{ и } x \neq y$$

Домашнее задание №3

Определение свойств бинарных отношений