Контрольная работа №1

Нгуен Хыу Тхань – N3145

Вариант 5

$$C = \{ a+bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

Задание 1: $\langle C, + \rangle$-алгебра

1) $\forall c_1, c_2, c_3 \in C$ $\quad c_1 = x_1 + iy_1$

$c_2 = x_2 + iy_2$

$c_3 = x_3 + iy_3$

$$\Rightarrow (c_1 + c_2) + c_3 = (x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) + x_3 + iy_3$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) + x_3 + iy_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3) + i(y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= x_1 + (x_2 + x_3) + iy_1 + i(y_2 + y_3)$$
$$= x_1 + iy_1 + (x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)$$
$$= c_1 + (c_2 + c_3)$$

$\Rightarrow$ (+) ассоциативная

2) $\exists!\ 0 = 0 + i0 \in C$, $\forall c = a + bi \in C$

+) $c + 0 = a + bi + 0 + 0i = (a+0) + (b+0)i$
$= a + bi = c$

+) $0 + c = 0 + 0i + a + bi = (0+a) + (0+b)i$
$= a + bi = c$

$\Rightarrow c + 0 = 0 + c$
$\Rightarrow 0$ - нейтральный элемент по (+)

3) $\forall c \in C \ \exists! (-c)$, $c = a+bi$
$(-c) = (-a) + (-b)i$

+) $c + (-c) = a+bi + (-a) + (-b)i$
$= (a+(-a)) + (b+(-b))i$
$= 0 + 0i = \theta$

+) $-c + c = -a + (-b)i + a + bi$
$= (-a+a) + (-b+b)i$
$= 0 + 0i = \theta$

$\Rightarrow$ $(-c)$ обратный к c по операции $(+)$

4) $c_1 + c_2 = a + bi + c + di = (a+c) + (b+d)i$
$= (c+a) + (d+b)i$
$= c_2 + c_1$

$(+)$ - коммутативная

$\Rightarrow$ $\langle C, + \rangle$ - коммутативная группа.

Задание 2: $\langle C, \cdot \rangle$ - алгебра

1) $\forall c_1, c_2, c_3 \in C$, $c_1 = a+bi$
$c_2 = c+di$
$c_3 = e+fi$

+) $(c_1 . c_2) . c_3 = ((a+bi).(c+di)).(e+fi)$

$= (ac + adi + bci - bd).(e+fi)$

$= (ace + acfi + adei - adf + bcei - bcf - bde - bdfi)$

$= (ace - adf - bcf - bde) + i(acf + ade + bce - bdf)$

+) $c_1 . (c_2 . c_3) = (a+bi).((c+di).(e+fi))$

$= (a+bi).(ce + cfi + dei - df)$

$= (ace + acfi + adei - adf + bcei - bcf - bde - bdfi)$

$= (ace - adf - bcf - bde) + i(acf + ade + bce - bdf)$

$\Rightarrow (c_1 . c_2) . c_3 = c_1 . (c_2 . c_3)$

$\Rightarrow$ $(\cdot)$ ассоциативная на C

$\langle C, \cdot \rangle$ - полугруппа

2) $\exists!\ 1 = 1 + 0i \in C : \forall c \in C,\ c = a+bi$

+) $c.1 = (a+bi).(1+0i)$

$= a + bi + a.0.i - b.0$

$= a + bi = c$

+) $1.c = (1+0i).(a+bi)$

$= a + bi + 0.a.i - 0.b = a+bi = c$

$\Rightarrow c.1 = 1.c = c$

$\Rightarrow$ 1 - нейтральный элемент по $(\cdot)$

Вывод $\langle C, \cdot, 1 \rangle$ - моноид

Задание 3:

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, $c_1 = a+bi$

$c_2 = c+di$

$c_3 = e+fi$

+) $c_1 . (c_2 + c_3) = (a+bi)(c+di+e+fi)$

$= (a+bi) . ((c+e) + i(d+f))$

$= (a+bi) . (c+e) + (a+bi) . i(d+f)$

$= ac + ae + bci + bei + i(ad + af + bdi + bfi)$

$= ac + ae + bci + bei + adi + afi - bd - bf$

$= (ac + ae - bd - bf) + i(bc + be + ad + af)$

+) $c_1 . c_2 + c_1 . c_3 = (a+bi).(c+di) + (a+bi)(e+fi)$

$= ac + adi + bci - bd + ae + afi + bei - bf$

$= (ac + ae - bd - bf) + i(bc + be + ad + af)$

$\Rightarrow c_1(c_2 + c_3) = c_1 . c_2 + c_1 . c_3$

$\Rightarrow$ Операция (.) дистрибутивной относительно бинарной операции (+).

Задание 4:

$\forall c_1, c_2 \in C$, $c_1 = a+bi$

$c_2 = c+di$

$c_1 \cdot c_2 = (a+bi) \cdot (c+di)$

$= ac + adi + bci + i^2 bd$

$= c \cdot (a+bi) + di(a+bi)$

$= (c+di)(a+bi) = c_2 \cdot c_1$

$\Rightarrow$ $(\cdot)$ коммутативна на множестве C

Задание 5: $\forall c \in C$, $c = a+bi$

1 - нейтральный элемент $\langle C, \cdot \rangle$

Пусть $\exists$ $c^{-1} \in C$: $c \cdot c^{-1} = c^{-1} \cdot c = 1$

$\Rightarrow c^{-1} (a+bi) = 1$

$\Rightarrow c^{-1} \cdot (a+bi) \cdot \frac{1}{a+bi} = 1 \cdot \frac{1}{a+bi}$

$\Rightarrow c^{-1} = \frac{1}{a+bi}$

Если $a = 0, b = 0 \Rightarrow \frac{1}{0+0i}$ не существует

$\Rightarrow c^{-1}$ не существует.

$\langle C, \cdot \rangle$ не все элементы имеют обратный элемент.

Задание 6:

Чтобы $\langle C, + \rangle$ полурешетка, (+) должно быть..

1) ассоциативность
2) коммутативность
3) идемпотентность

Рассмотрим идемпотентность, Если (+) идемпотентно значит: $\forall c = a+bi \in C$, $c + c = c$

$$c + c = (a+bi) + (a+bi)$$
$$= (a+a) + (b+b)i = 2c$$

- $z = 0 \Rightarrow 2c = 0$
- $c \neq 0 \Rightarrow 2c \neq c$

$\Rightarrow$ (+) не идемпотеность на множестве C

$\Rightarrow$ $\langle C, + \rangle$ - не является ~~иде~~ полурешеткой.