

Практика 12. Функциональные ряды. Часть 1

Функциональные ряды общего вида. Степенные ряды.

Функциональный ряд: $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Область сходимости функционального ряда X – совокупность значений x , при которых функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится.

Сумма функционального ряда – $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (\forall x \in X)$.

$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$

Равномерно сходящийся ряд. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** в некоторой области X , если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое целое положительное число N , что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in X)$

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса)

Если функции $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, причем числовой ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ сходится, то функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ в этой области сходится равномерно.

Степенной ряд – функциональный ряд вида $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$, где $a, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – действительные числа.

Задания.

Определите область сходимости функциональных рядов

1. $\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots$ 2. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$ 3. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots$
4. $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + \sin \frac{x}{2^n} + \dots$ 5. $\frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^{2x}} + \dots + \frac{nx}{e^{nx}} + \dots$

Убедиться, что данные ряды равномерно сходятся на всей оси Ox .

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+(nx)^2)}$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$.

Найдите область сходимости степенного ряда.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n \cdot 10^{n-1}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.