Лекция 4-5
Группы

- 4. Степень элемента группы.
- 5. Циклическая группа.

© I.Krivtsova
ITMO University

4. Степень элемента группы

$A = \langle X, \cdot \rangle, \quad x_0 \in X.$

В *полугруппе* элемент вида

$$x_0 \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot x_0$$

называется n–й степенью элемента x_0 и обозначается x_0^n.

$$x_0^1 = x_0 \; ; \qquad x_0^n = x_0 \cdot x_0^{n-1}, \;\; n = 2, 3, \ldots$$

В *моноиде* $< X, \cdot, \mathbf{1} >$ вводят нулевую степень элемента x_0:

$$x_0^{\,0} = \mathbf{1}.$$

Если $< X, \cdot\ , \mathbf{1} >$ – *группа*, то вводят отрицательную степень элемента x_0 согласно равенству:

$$x_0^{-n} = (x_0^{-1})^n\ , \quad n=1,2,3,\ldots$$

Теорема 6

Для любой *группы* выполняется:

$$x_0^{-n} = (x_0^{n})^{-1}$$

$$x_0^{m} \cdot x_0^{n} = x_0^{m+n}$$

$$(x_0^{m})^{n} = x_0^{m \cdot n}$$

где $m,n \in \mathbf{Z}$.

При аддитивной форме записи бинарной операции возведения элемента x_0 в степень $k>0$, $x_0{}^k$ понимают как сумму k элементов x_0 и записывают как $k \cdot x_0$.

5. Циклическая группа

$< X, \cdot\, , \mathbf{1} >$ – группа.

- **Определение 13**

Группа называется циклической, если существует такой элемент x_0, что любой элемент группы является некоторой целой степенью элемента x_0:

- в мультипликативной форме

$$\exists x_0 \in X: \ \forall x \in X \quad x = x_0^k, \ k \in \mathbf{Z}$$

- в аддитивной форме

$$\exists x_0 \in X: \ \forall x \in X \quad x = kx_0, \ k \in \mathbf{Z}$$

x_0 – *образующий элемент* группы.

Пример

$A = < N_0, +, 0 >$, где $N_0 = N \cup \{0\}$

$x_0 = 1$ – образующий элемент:

$x = k \cdot 1,\ k \geq 0,$

$< N_0, +, 0 >$ – циклическая полугруппа

$A = \langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$

$x_0=1$ – образующий элемент:

$x = k\cdot 1,\ k\in \mathbf{Z}$

$$0\cdot 1=0,\quad k\cdot 1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k\text{ раз}}=k\ \ (k>0)$$

$$(-1)\cdot 1=-1,$$

$$(-k)\cdot 1=k\cdot(-1)=\underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{k\text{ раз}}=-k\ \ (k>0)$$

$x_0 = -1$ – образующий элемент:

$x = k\cdot(-1)$

$0\cdot(-1) = 0$

$$k\cdot(-1) = \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{k \text{ раз}} = -k \quad (k > 0)$$

$(-1)\cdot(-1) = 1$

$$(-k)\cdot(-1) = k\cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ раз}} = k \quad (k > 0)$$

$< Z, +, 0 >$ – циклическая группа.

$A = < \boldsymbol{Z}_{[3]}, \oplus, [0] >$ - циклическая группа

$< X, \cdot, \mathbf{1} >$ – циклическая группа.

Порядок образующего элемента циклической группы – это наименьшее число $k > 0$, такое, что

$$x_0^k = \mathbf{1}.$$

Теорема 7

Порядок образующего элемента *конечной циклической* группы равен порядку самой группы.

Следствие:

в *бесконечной циклической* группе не $\exists k > 0$ такого, что для образующего элемента x_0 группы выполняется равенство $x_0^k = \mathbf{1}$.

Группа подстановок

$X \neq \varnothing$

$f : X \to X$ – биекция X на себя

f_X – множество всех биекций X на себя

$\circ$ – композиция биекций:

$$\forall x \in X \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in f_X$$

$A = \langle f_X, \circ \rangle$

(1) $\forall\, g, f, h \in f_X$ выполняется $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

$\Rightarrow \circ$ – ассоциативная

(2) $\forall x \in X \quad e_X(x) = x$ – тождественное отображение на X:

$e_X \in f_X$ и $\forall f \in f_X \quad f \circ e_X = e_X \circ f = f$

$\Rightarrow e_X$ – нейтральный элемент по $\circ$

(3) $\forall\, f \in f_X$ определено отображение $f^{-1} \in f_X$:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$$

$\Rightarrow f^{-1}$ – элемент, обратный биекции f по $\circ$

$A = \langle f_X, \circ \rangle$ – *симметрическая* группа множества X.

- **Определение 14**

Если X *конечно,* то группа всех биекций X на себя с операцией композиции биекций называется группой подстановок множества X.

- **Определение 15**

  Группа подстановок множества X с числом элементов n называется симметрической группой степени n.

  Обозначение: S_n

- **Теорема Кэли** (о представлении групп)

  Всякая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n.