Практическое занятие 2

Схема Бернулли

Литература

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Издательство «Юрайт», 2016.
2. Решетов С.В., Суслина И.А. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике – СПб: НИУ ИТМО, 2014.

Схема Бернулли

Несколько экспериментов называются независимыми, если любые события, возникающие в разных экспериментах, независимы в совокупности.

Схемой Бернулли (*повторными независимыми испытаниями*, *биномиальной схемой*) называют последовательность экспериментов, удовлетворяющих следующим условиям:

- эксперименты независимы;
- в каждом эксперименте возможны только два исхода – появилось или не появилось случайное событие A ($успех$);
- вероятность A в каждом эксперименте одна и та же и равна p.

Вероятность непоявления A ($неудачи$) в каждом эксперименте

$$q = 1 - p.$$

Задача:

найти вероятность события: в n экспериментах событие A появится ровно m раз.

Имеем:

n экспериментов,

$0 \le m \le n$ раз появляется событие A

$\omega = (\underbrace{A, A, \dots, A,}_{m} \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \overline{A}}_{n-m})$ – один из

благоприятствующих исходов,

$P(\omega) = p^m q^{n-m}$

причем:

- все исходы равновероятны
- события, соответствующие этим исходам, несовместны
- число таких исходов равно C_n^m

Вывод: см. Теорему 1

Теорема 1

Вероятность того, что в n экспериментах по схеме Бернулли событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}} \qquad (1)$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 0 \div n$ – число сочетаний из n по m.

(1) – формула Бернулли (биномиальная формула).

Замечание:

$P_n(0) + P_n(1)+\ldots+P_n(m)=$
$=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n =1$, т.е.

сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)=1$$

Вывод: получаем вероятностное пространство $(\Omega,\ \Sigma,\ P_n(m))$

Следствие:

вероятность появления события A в n испытаниях не более m_2 раз и не менее m_1 раз равна:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (2)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности,

A – осуществление хотя бы одного из этих событий.

Обозначения:

$p_i = P(A_i)$ – вероятность A_i ,

$q_i = 1 - p_i$ – вероятность неосуществления A_i .

Теорема 2

Вероятность появления *хотя бы одного* из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вычисляется по формуле:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n. \qquad (3)$$

Следствие

Если все A_i равновероятны с вероятностью p, то

$$P(A) = 1 - q^n$$

где n – число экспериментов.

Число экспериментов, в которых событие A произойдет хотя бы один раз

Если событие A в каждом эксперименте может наступить с вероятностью p, то число экспериментов, которые нужно провести, чтобы событие A произошло хотя бы один раз, с вероятностью, не меньшей P, вычисляется по формуле:

$$n \geq \frac{ln(1-P)}{ln(1-p)} \qquad (4)$$

Полиномиальная (мультиноминальная) схема

Эксперимент:

- n-кратное повторение одинаковых независимых испытаний,
- в каждом из испытаний может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$,
- события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ несовместны,
- вероятность A_i равна p_i.

Теорема 3

Вероятность $P(m_1,m_2,\ldots, m_k)$ того, что в n экспериментах событие A_1 произойдет ровно m_1 раз, событие A_2 произойдет ровно m_2 раз,…, событие A_k произойдет ровно m_k раз, причем $m_1+m_2+\ldots+ m_k = n$, вычисляется по формуле:

$$P\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_\kappa!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k} \quad (5)$$

Формула Пуассона

Теорема 4

Пусть число испытаний n по схеме Бернулли велико, а вероятность события A ($успеха$) p в одном испытании мала, причем мало также произведение $\lambda = np$.

Тогда вероятность $P_n(m)$ вычисляется по формуле:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,\ldots n \qquad (6)$$

Формула (6) называется формулой Пуассона.

Замечание:

1. формула (6) справедлива также для числа появлений события $\overline{A}$ (*неудачи*) в том случае, когда мало $\lambda = nq$;
2. Значения функции $P(m,\lambda)$ для некоторых λ табулированы.