ТЕМА XIII

ФМП. Предел и производная

лекции

Оглавление

Замечание. Остаточный член может быть записан в <u>*форме Пеано*</u> $R_{k+1} = o\left(\rho^k\right)$, где $\rho = \rho\left(M_0, M\right)$.

Пример

$z = x^y, M_0\left(1,0\right)$

$z\left(M_0\right) = 1$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(M_0\right) = 0, \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(M_0\right) = 0 \Rightarrow d\,z\big|_{M_0} = 0$

ЛЕКЦИЯ 1

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение. Будем называть множество X <u>*метрическим пространством*</u> если каждой паре элементов x и y из этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho\left(x, y\right)$, называемое расстоянием между x и y, такое что выполнены следующие аксиомы:

- $\rho\left(x, y\right) \geq 0$
- $\rho\left(x, y\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho\left(x, y\right) = \rho\left(y, x\right)$
- $\rho\left(x, z\right) \leq \rho\left(x, y\right) + \rho\left(y, z\right)$

Пример

Метрическое пространство $\mathbb{R}$. α, β – вещественные числа, $\rho\left(\alpha, \beta\right) = \left|\alpha - \beta\right|$

Метрическое пространство $\mathbb{R}^2$. $x = \left(x_1, x_2\right)$, $y = \left(y_1, y_2\right)$, $\rho\left(x, y\right) = \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(x_2 - y_2\right)^2}$. Для доказательства можно обратиться к геометрической интерпретации

Замечание. Для одного и того же множества расстояние можно определять по-разному.

Пример

Метрическое пространство $\mathbb{R}^2$. $x = \left(x_1, x_2\right)$, $y = \left(y_1, y_2\right)$, $\rho\left(x, y\right) = \max\left(\left|x_1 - y_1\right|, \left|x_2 - y_2\right|\right)$.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}^n$

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$, которое состоит их точек $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Определим расстояние как $\rho\left(x, y\right) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - y_i\right)^2}$.

Определение. Расстояние, определяемое формулой $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, называют <u>*евклидовым*</u>

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ – множество точек $\mathbb{R}^n$.

Определение. Если каждому натуральному числу k поставлена в соответствие точка $x^{(k)}\in\mathbb{R}^n$, то говорят, что задана последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Говорят, что точка $A\in\mathbb{R}^n$ называется <u>*пределом последовательности*</u> $\{x^{(k)}\}$ (последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ <u>*сходится к*</u> A), и пишут $\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=A$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\rho\left(x^{(k)},A\right)=0$

Определение. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ называется <u>*ограниченной*</u>, если $\exists C\in\mathbb{R},\exists a\in\mathbb{R}^n:\forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow\rho\left(x^{(k)},a\right)\le C$

Лемма. Если последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ имеет предел, то она ограничена

Лемма. Если последовательность точек $\{x^{(k)}\}$ имеет предел, то он единственный

Лемма. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}\in\mathbb{R}^n$, где $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)$ сходится к пределу $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\{x_1^{(k)}\},\{x_2^{(k)}\},\ldots,\{x_n^{(k)}\}$ сходятся к соответствующим $a_1,a_2,\ldots,a_n$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i, i=1,\ldots,n$

Определение. Последовательность точек $\{x^{(k)}\}\subset X$ называется <u>*фундаментальной*</u>, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall k,m\ge N\Rightarrow\rho\left(x^{(k)},x^{(m)}\right)<\varepsilon$.

Замечание. Это означает, что начиная с некоторого номера все точки последовательности достаточно близки друг к другу

$$\Delta y=d\,F\big|_{t=t_0}+\ldots+\frac{1}{k!}d^k\,F\big|_{t=t_0}+R_{k+1}$$

Для функции многих переменных имеет место аналогичная формула.

Теорема. Если функция $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ $k+1$ раз дифференцируема в окрестности точки M_0, то для любой точки из этой окрестности приращение функции можно представить в виде

$$\Delta z=d\,z\big|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2\,z\big|_{M_0}+\ldots+\frac{1}{k!}d^k\,z\big|_{M_0}+\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}\,z\big|_N,$$ где

N некоторая точка их отрезка M_0M, а дифференциал $d^kz=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k z$.

Эту формулу называют <u>*формулой Тейлора*</u> для функции $z=f(M)$ с центром разложения в точке M_0.

Следствие. При $n=0$ получается <u>*формула Лагранжа*</u> конечных приращений для функции многих переменных

$$\Delta z=f\left(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_n^0+\Delta x_n\right)-f\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)=d\,z\big|_N=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x_1}(N)\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}(N)\Delta x_n$$

Следствие. Формулу Тейлора можно записать через производные

$$f(M)=f(M_0)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)\left(x_1-x_1^0\right)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0)\left(x_n-x_n^0\right)+$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)\left(x_1-x_1^0\right)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}(M_0)\left(x_n-x_n^0\right)^k+R_{k+1}=$$
$$=P_k(x_1,\ldots,x_n)+R_{k+1}$$

Здесь $P_k(x_1,\ldots,x_n)$ многочлен от $x_1,\ldots,x_n$, все частные производные до k-го порядка которого в точке M_0 совпадают с соответствующими частными производными функции $z=f(x_1,\ldots,x_n)$, а $R_{k+1}=\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}\,z\big|_N$ – остаточный член.

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_x dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_y dy =$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка.

Если обозначить <u>*оператор дифференциала*</u> $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, а

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ и т д.}$$

То можно записать $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$, а

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь для независимых.

Формула Тейлора

Изученную ранее формулу Тейлора для функции одной переменной $y = F(t)$ в окрестности точки $t = t_0$

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \ldots + \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + R_{k+1}$$

можно переписать с использованием дифференциалов.

Пусть $t - t_0 = \Delta t = dt$ и $F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0)(dt)^k = d^k F\big|_{t=t_0}$, то обозначив $F(t) - F(t_0) = \Delta y$, получим

Лемма. Если последовательность точек $\left\{x^{(k)}\right\} \subset X$ сходится, то она фундаментальная

Замечание. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно

Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Определение. Шаром радиуса r с центром в точке $a \in X$ будем называть множество точек метрического пространства: $S_r(a) = \left\{x : x \in X, \rho(x, a) < r\right\}$.

Замечание. Шар в $\mathbb{R}$ это интервал $(a - r; a + r)$

Шар в $\mathbb{R}^2$ это круг $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$

Шар в $\mathbb{R}^n$ это множество

$$S_r(a) = \left\{x : x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\right\}$$

Определение. Пусть M множество точек в метрическом пространстве X. Точка $x^0 \in M$ называется <u>*внутренней точкой*</u> множества M, если $\exists S_\varepsilon(x^0) \subset M$.

Замечание. Внутренняя точка содержится в M вместе с некоторым шаром с центром в ней

Определение. Совокупность всех внутренних точек множества M образуют <u>*внутренность*</u> M $-$ $\operatorname{int} M$. Очевидно, что $\operatorname{int} M \subset M$.

Определение. Если $\operatorname{int} M = M$, то множество называется <u>*открытым*</u> в метрическом пространстве X. Пустое множество считается открытым по определению.

Определение. <u>*Окрестностью*</u> точки $x^0 \in X$ будем называть любое множество $O(x^0)$, для которого точка x^0 является внутренней.

Например, шар $S_\varepsilon(x^0)$ $-\varepsilon$ -окрестность точки x^0.

Определение. Точка x^0 называется <u>*предельной точкой*</u> множества $M \subset X$, если в любой ее окрестности есть точки множества M отличные от x^0.

Замечание. Предельная точка может принадлежать множеству, а может и не принадлежать.

Пример

Интервал, фигура на плоскости без границы

Определение. Точка множества M, не являющаяся предельной, называется <u>*изолированной*</u>.

Замечание. Если точка является изолированной, то существует ее окрестность, в которой нет точек множества M

Определение. Множество $M \subset X$ называется <u>*замкнутым*</u>, если содержит все свои предельные точки.

Пример

Отрезок, фигура на плоскости с границей

ПРЯМЫЕ, ЛУЧИ И ОТРЕЗКИ В $\mathbb{R}^n$

Пока рассматривали объекты, которые использовали лишь понятие расстояния. Введем не связанные с метрикой объекты

Определение. <u>*Прямой*</u> в $\mathbb{R}^n$, проходящей через точки $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ будем называть следующее множество точек

$$\{x : x\in\mathbb{R}^n, x_i = a_i t + b_i(1-t), t\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n\}$$

Пример

Для $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = a_1 t + b_1(1-t) \\ y = a_2 t + b_2(1-t) \end{cases}$

Определение. <u>*Лучом*</u> в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ в направлении $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$, где $l_1^2+l_2^2+\ldots+l_n^2=1$ назовем множество

$$\{x : x\in\mathbb{R}^n, x_i = a_i + l_i t, 0\le t<+\infty, i=1,\ldots,n\}$$

Пример

Для $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt\ , 0\le t<+\infty \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

Определение. <u>*Отрезком*</u> в $\mathbb{R}^n$, соединяющим точки $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ и $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ будем называть следующее множество

Теорема. Если в некоторой окрестности точки x^0 функция $f(x)$ имеет смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, и они непрерывны в этой точке x^0, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>*дважды дифференцируемой*</u> в точке x^0, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки x^0 и все ее производные 1-го порядка дифференцируемы в самой точке x^0.

Замечание. При определении дифференцируемости n-го порядка необходимо требовать дифференцируемость функции и ее частных производных до $n-2$-го порядка в некоторой окрестности точки x^0.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим функцию $f(x)$ – дважды дифференцируема в точке x^0.

Рассмотрим $d(df)(x^0) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i\right)$, который является функцией $2n$ переменных. Будем считать dx_i фиксированными.

Определение. <u>*Дифференциал второго порядка*</u> функции $f(x)$ в точке x^0 называется дифференциал от первого дифференциала df при условиях:

- df – функция только от x_i
- при вычислении дифференциалов от $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ приращения Δx_i независимых переменных берутся такими же как в df – dx_i.

Вычислим для случая двух переменных

характеризует направление максимального роста функции в этой точке.

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если функция $f(x)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$ в некоторой окрестности точки x, то ее можно рассматривать как функцию от $x_1,\ldots,x_n$.

Определение. Если функция $\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$ имеет частную производную в точке x по переменной x_i, т. е. существует $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_k}\right)(x)$, то ее называют *__второй частной производной__* или *__частной производной второго порядка__*. Обозначают $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}(x), z^{(2)}_{x_k x_i}(x), z''_{x_k x_i}(x)$

Если $k \neq i$, то частная производная называется *__смешанной__*.

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Пример

Найти частные производные второго порядка функции $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

$z''_x = 4x^3 - 4xy^3$, $z''_y = -6x^2y^2 + 5y^4$.

$$z''_{xy} = \left(4x^3 - 4xy^3\right)' = -12xy^2$$

$$z''_{yx} = \left(-6x^2y^2 + 5y^4\right)' = -12xy^2.$$

Полученный результат обобщим в теореме

$$\left\{x : x \in \mathbb{R}^n, x_i = a_i t + b_i(1-t), 0 \le t \le 1, i = 1,\ldots,n\right\}$$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *__выпуклым__*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит отрезок, который эти точки соединяет.

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$ задается параметрически $x_i = \varphi_i(t), \alpha \le t \le \beta, i = 1,\ldots,n$, где $\varphi_i(t)$ непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *__связным__*, если любые две его точки можно соединить кривой $\Gamma \subset M$.

Определение. Открытое и связное множество в $\mathbb{R}^n$ называют *__областью__*. Замыкание области называют *__замкнутой областью__*

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$, являющаяся объединением конечного числа отрезков, называется *__ломаной__* в $\mathbb{R}^n$

Функция многих переменных

Определение. Функцию $f : M \to \mathbb{R}$, где $M \subset \mathbb{R}^n$ которую называют *__функцией многих переменных__* и обозначают

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), x \in M$$

Для функции может быть найдена естественная область определения.

Пример

Найти ООФ $z = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$

ЛЕКЦИЯ 2

Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{O}\left(x^0\right)$ предельной точки x^0 метрического пространства X.

Определение. (По Коши) Говорят, что число A есть *__предел функции__* $f(x)$ при $x \to x^0$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in O\left(x^0\right) : 0 < \rho\left(x, x^0\right) < \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$,

Обозначается $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = A$.

Определение. (По Гейне) Говорят, что число A есть <u>*предел функции*</u> в точке x^0, если $\forall \left\{x^{(k)}\right\} \in O\left(x^0\right), x^{(k)} \neq x^0 : \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x^{(k)}\right) = A$

Теорема. Определения эквивалентны. (Доказывается, как и для функции одной переменной)

Для функции двух переменных $f(x, y)$, определенной в $O\left((a,b)\right)$ пишут $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = A$ (двойной предел)

Лемма. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в $O\left(x^0\right)$ и $\left|f(x)\right| \leq \varphi(x)$. Если $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$, то и $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$

Доказательство:

Т. к. $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$, то для $\forall \varepsilon > 0\ \exists S_\delta\left(x^0\right) : \forall x \in S_\delta\left(x^0\right) \Rightarrow \left|\varphi(x)\right| < \varepsilon$. Тем более $\forall x \in S_\delta\left(x^0\right) \Rightarrow \left|f(x)\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$

Пример

Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела.

Рассмотрим последовательность точек $\left(x_n, y_n\right) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$. Тогда

$f\left(x_n, y_n\right) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right) = 1$

Рассмотрим последовательность точек $\left(x_n', y_n'\right) = \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$.

Тогда $f\left(x_n', y_n'\right) = -1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n', y_n'\right) = -1$

Бесконечные пределы

Определение.

Теорема. Если функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, то производная по направлению l в этой точке можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}\left(x_0, y_0, z_0\right) = \frac{d}{dt} f\left(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\left(x_0, y_0, z_0\right)\cos\gamma$$

Формула есть прямое следствие правила дифференцирования сложной функции

Замечание. Формула показывает, что скорость изменения функции по заданному направлению l есть линейная комбинация скоростей изменения функции по направлениям координатных осей.

III Градиент

Определение. <u>*Градиентом*</u> дифференцируемой функции $f(x, y, z)$ в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ называется вектор,

$$\operatorname{grad} f\left(x_0, y_0, z_0\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0, z_0\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0, z_0\right), \frac{\partial f}{\partial z}\left(x_0, y_0, z_0\right)\right).$$

Перепишем формулу

$$\frac{\partial f}{\partial l}\left(x_0, y_0, z_0\right) = \left(l, \operatorname{grad} f\left(x_0, y_0, z_0\right)\right)$$

Если ввести символический вектор (<u>*оператор Гамильтона*</u>)

$\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} i + \dfrac{\partial}{\partial y} j + \dfrac{\partial}{\partial z} k$, то можно записать

$$(l, \nabla) = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma$$

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial l}\left(x_0, y_0, z_0\right) = (l, \nabla) f\left(x_0, y_0, z_0\right)$

Замечание. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial l}\left(x_0, y_0, z_0\right)_{\max} = \left|\operatorname{grad} f\left(x_0, y_0, z_0\right)\right|$ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial l}\left(M_0\right)\right)_{\max} = \left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right|$, то градиент функции в данной точке

Определение. Прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярная к касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется *нормалью* к поверхности.
Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, запишем каноническое уравнение нормали

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

Пример

Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\frac{x^2}{2}-y^2$ в точке $(2,-1,1)$.

$z'_x=x$, $A_1=z'_x(2,-1)=2$

$z'_y=-2y$, $B_1=z'_y(2,-1)=2$

$z-1=2(x-x_0)+2(y-y_0)$ или $2x+2y-z-1=0$

Уравнение нормали $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1_0}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

II Производная по направлению

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в области $G\subset\mathbb{R}^3$ и пусть точка $(x_0,y_0,z_0)\in G$. Рассмотрим луч, проходящий через точку параллельно направлению $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

Поскольку (x_0,y_0,z_0) внутренняя точка G, то найдется число t_0, что отрезок $x=x_0+t\cos\alpha, y=y_0+t\cos\beta, z=z_0+t\cos\gamma, -t_0\le t\le t_0$ тоже лежит в G

Определение. *Производной по направлению* функции $f(x,y,z)$ в точке (x_0,y_0,z_0) в направлении l назовем

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$\forall C>0\ \exists\delta>0:\forall x\in\overset{o}{O}_\delta(x^0)\Rightarrow f(x)>C\Leftrightarrow\lim_{x\to x^0}f(x)=+\infty$$

Определение.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R>0:\forall x:\rho(x,O)>R\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

Пример

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to\infty}\frac{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}{r^2}=0$$

Непрерывность функции многих переменных

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $O(x^0)$ точки x^0 метрического пространства

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x^0, если $\lim_{x\to x^0}f(x)=f(x^0)$

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x^0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists S_\delta(x^0):\forall x\in S_\delta(x^0)\Rightarrow|f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$

Замечание. Основные теоремы о непрерывных в некоторой точке функциях доказываются аналогично теоремам о функции одной переменной

Теорема. (Непрерывность сложной функции) Пусть функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x^0, а функция $f(y)=f(y_1,\ldots,y_n)$ определена в окрестности точки $y^0=(\varphi_1(x^0),\ldots,\varphi_n(x^0))$ и непрерывна в точке y^0. Тогда в некоторой окрестности x^0 определена сложная функция $\Phi(x)=f(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$, причем $\Phi(x)$ непрерывна в x^0

Свойства функций непрерывных на компакте

Определение. Множество $M\subset X$ называется *компактом* в X, если из любой последовательности точек $x_n\in M$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей M

Пример

$\left[a,b\right]$ – компакт в $\mathbb{R}$, а $\left[a,b\right)$ – не компакт в $\mathbb{R}$

Определение. Функция $f(x)$ называется <u>непрерывной на множестве</u> M, если она непрерывна в каждой точке этого множества по этому множеству, т. е. в каждой предельной точке x^0 выполнено $\lim\limits_{x\to x^0, x\in M} f(x) = f(x^0)$

Теорема. (первая Вейерштрасса) Функции $f(x)$, непрерывна на компакте метрического пространства, ограничена на этом компакте.

Теорема. (вторая Вейерштрасса) Функции $f(x)$, непрерывна на компакте метрического пространства, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.

Равномерная непрерывность

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ называется <u>*равномерно непрерывной*</u> на множестве $G \subset X$, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in G : \rho(x, x') < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(x') \right| < \varepsilon$.

Теорема. (Кантора) Функции $f(x)$, непрерывная на компакте метрического пространства, равномерно непрерывна на этом компакте.

Промежуточные значения непрерывной функции

Теорема. Пусть функции $f(x)$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и принимает в этой области значения A и B. Тогда функция $f(x)$ принимает в этой области все значения, заключенные между A и B

Частные производные

Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$.

$\mathrm{Gr}_f = \left\{ (x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in D \right\}$. Пусть точка $P(x_0, y_0, z_0)$ лежит на Gr_f

Как показано ранее $z'_x(x_0, y_0)$ угловой коэффициент касательной к кривой $z = f(x, y_0)$ – l_1. Аналогично, $z'_y(x_0, y_0)$ угловой коэффициент касательной к кривой $z = f(x_0, y)$ – l_2.

Определение. Прямые l_1 и l_2 определяют плоскость α, которая называется <u>*касательной плоскостью*</u> к поверхности Gr_f в точке (x_0, y_0, z_0)

Теорема. Уравнение касательной плоскости к поверхности Gr_f в точке (x_0, y_0, z_0) имеет вид $z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Доказательство:

Плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ или $z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0)$

Уравнения касательных имеют вид

l_1: $z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0)$ для $y = y_0$ и

l_2 : $z - z_0 = z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ для $x = x_0$.

Поскольку $l_1 \subset \alpha$, координаты ее точек удовлетворяют уравнению плоскости

$\begin{cases} z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \\ z - z_0 = A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) \end{cases}$, решая, получаем $A_1 = z'_x(x_0, y_0)$.

Аналогично, $B_1 = z'_y(x_0, y_0)$.

Окончательно, получаем уравнение касательной плоскости

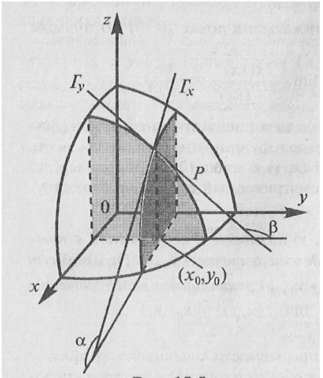
$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

По правилу нахождения производной сложной функции имеем

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1+t(y_1-x_1),\ldots,x_n+t(y_n-x_n)\right)(y_i-x_i)$$

Применим к $\varphi(t)$ формулу конечных приращений Лагранжа для функции одной переменной. Получаем, что найдется число $\theta\in(0,1)$ такое, что $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$. Откуда получим требуемое

Геометрический смысл частных производных для функции двух переменных



Пусть график функции $z=f(x,y)$ представляет некоторую поверхность. Тогда при $y=y_0$ получим кривую – сечение этой поверхности плоскостью. Тогда производная z'_x выражает угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке (x_0,y_0). $z'_x=\operatorname{tg}\alpha$. Аналогично $z'_y=\operatorname{tg}\beta$.

Геометрический смысл дифференцируемости

I Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^2$. Рассмотрим ее график

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_1)=f(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)$. Она может иметь в точке x_1^0 производную. По определению ее называют частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Аналогично определяются другие частные производные

Определение. <u>*Частной производной*</u> от функции $f(x)$ по переменной x_k в точке x^0 называют

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1^0,\ldots,x_k,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\Delta x_k},i=1,\ldots,n,$$ где

$\Delta x_k=x_k-x_k^0$ Обозначается $f'_{x_k}(x^0),\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$.

Из определения следует, что для вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и производных функции одной переменной.
При этом все переменные кроме одной фиксируются

Пример

$$f(x,y)=x\ln y+\frac{y}{x}.$$

$$f'_x=\ln y-\frac{y}{x^2},\ f'_y=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}.$$

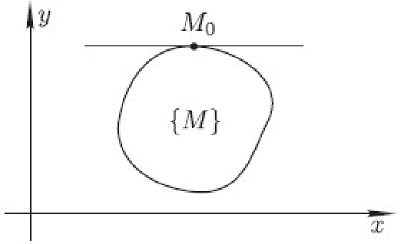
Пример

$$f(x,y)=\begin{cases}1\text{ на осях координат}\\0\text{ в остальных точках}\end{cases}.$$

$f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$.

При этом в точке $(0,0)$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}z$ не существует, т. е. функция не непрерывна, но имеет частные производные. Это невозможно для функции одной переменной.

Замечание. Если x^0 граничная точка ООФ, то для нее определение частной производной может быть непригодным.



Не существует частное приращение по x.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется <u>*дифференцируемой*</u> в точке $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$f(x)-f(x^0)=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0$, где $A_1,A_2,\ldots,A_n$ числа

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Теорема. (Необходимое условие дифференцируемости) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0\in\mathbb{R}^n$, то она имеет в ней частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0),i=1,\ldots,n$ и

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0$$

Доказательство:
Из дифференцируемости в точке имеем

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0)),x\to x^0$$

Пусть $x_1\neq x_1^0,x_2=x_2^0,\ldots,x_n=x_n^0$. Тогда

Если бы $y_1,\ldots,y_m$ были независимыми переменными, то $df(y^0)$ отличался бы от дифференциала сложной функции только тем, что $dy_i(x^0)$ дифференциалы независимых переменных. Формальная запись дифференциала в обоих случаях одинаковая.
Говорят, что форма первого дифференциала <u>*инвариантна относительно замены переменных*</u>.
Замечание. Это очень удобное свойство, т. к. во многих прикладных задачах часто бывает трудно выяснить вопрос о независимости переменных.
Правила дифференцирования такие же как для функции одной переменной

Пример

Найти полный дифференциал для функции $z=x^y$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

$dz=yx^{y-1}\cdot dx+x^y\ln x\cdot dy$.

ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой выпуклой области $G\subset\mathbb{R}^n$. Тогда для любых двух точек $x=(x_1,\ldots,x_n),y=(y_1,\ldots,y_n)\in G$ найдется число $\theta\in(0,1)$ такое, что

$$f(y)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta(y-x))(y_i-x_i)$$

Доказательство:
Пусть $x,y\in G$. Т. к. G выпукло, то отрезок, соединяющий x и y, лежит в G. Поэтому определена функция одной переменной

$\varphi(t)=f(x_1+t(y_1-x_1),\ldots,x_n+t(y_n-x_n)),0\le t\le 1$

Очевидно, что $\varphi(0)=f(x),\varphi(1)=f(y)$ и $\varphi(t)$ дифференцируема на $[0,1]$

$$\varphi_j(x)-\varphi_j(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{ij}(x)(x_j-x_i^0),\varphi_{ij}(x^0)=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}(x^0),$$

$i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$

Подставляя

$$\Phi(x)-\Phi(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x)(x_j-x_i^0),\Phi_i(x)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_{ij}(x)\psi_j(x)$$

Т. к. $\varphi_{ij}(x),\psi_j(x)$ непрерывны в x^0, то и $\Phi_i(x)$ непрерывны и по теореме имеем дифференцируемость $\Phi(x)$ в x^0

ЛЕКЦИЯ 3

Дифференциал

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x^0, тогда при $x\to x^0$ ее можно записать в виде

$$f(x)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0))$$

Положим $dx_i=\Delta x_i=x_i-x_i^0$

Определение. *<u>Дифференциалом</u>* (первым дифференциалом) функции $f(x)$ в точке x^0 называют линейную форму относительно приращений независимых переменных

$$df(x^0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)dx_i$$

Он будет функцией $2n$ переменных $x_1,\ldots,x_n,dx_1,\ldots,dx_n$. Причем при фиксированных $x_1,\ldots,x_n$ дифференциал – линейная функция от $dx_1,\ldots,dx_n$.

Тогда $f(x)=f(x^0)+df(x^0)+o(\rho(x,x^0))$

Дифференциал сложной функции

$$df(\varphi_1(x^0),\ldots,\varphi_m(x^0))=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0)dy_i(x^0)$$

$$f(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)=A_1(x_1-x_1^0)+o(|\Delta x_1|),\Delta x_1\to 0$$

Тогда существует предел, имеем $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{f(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)}{\Delta x_1}=A_1=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Аналогично для остальных переменных.

Замечание. Обратное утверждение не верно. Из существования частных производных не следует дифференцируемость.

Пример

Покажем, что $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$

Допустим, дифференцируема

$f(x,y)-f(0,0)=Ax+By+o(\rho),\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. При этом $f(0,0)=0$.

Поэтому

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$A=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=1,B=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$$

Пусть теперь $x=y>0$, $\sqrt[3]{2}x=2x+o(x)\Rightarrow(\sqrt[3]{2}-2)x=o(x),x\to 0$, что противоречит определению $o(x)$. Функция не дифференцируема.

Теорема. (Достаточное условие дифференцируемости функции). Если все частные производные определены в некоторой окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в ней, то функция дифференцируема в точке x^0.

Доказательство:

Пусть $\dfrac{\partial f}{\partial x_k},k=1,\ldots,n$ определены в некотором шаре $S_\varepsilon(x^0)$ и непрерывны в x^0

Запишем приращение функции в следующем виде

$$f(x)-f(x^0)=f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2,\dots,x_n)+$$
$$+f(x_1^0,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n)+\dots$$
$$\dots+f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{n-1}^0,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$$

Пусть $x_1^0<x_1$. Рассмотрим функцию одной переменной $\psi(t)=f(t,x_2,\dots,x_n),t\in[x_1^0,x_1]$. Она имеет производную $\psi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x_2,\dots,x_n)$

Воспользуемся формулой приращений Лагранжа для функции одной переменной на $[x_1^0,x_1]$

$\psi(x_1)-\psi(x_1^0)=\psi'(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0))(x_1-x_1^0),0<\theta<1$. Или

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2,\dots,x_n)=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)(x_1-x_1^0),$$

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0))$$

Т. к. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ непрерывна в x_1^0, то существует

$\lim\limits_{x_1\to x_1^0}f_1(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0)$. Аналогично с остальными переменными.

Функции $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n),i=1,\dots,n$ имеют пределы при $x\to x^0$. Доопределяя их предельными значениями, получим непрерывные функции

Подставим в

$$f(x)-f(x^0)=f_1(x_1,\dots,x_n)(x_1-x_1^0)+f_2(x_1,\dots,x_n)(x_2-x_2^0)+\dots$$
$$\dots+f_n(x_1,\dots,x_n)(x_n-x_n^0)$$

По критерию дифференцируемости получили требуемое.

Замечание. Непрерывность частных производных не является необходимым условием дифференцируемости

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. Пусть функции $\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x)$ дифференцируемы в точке $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, $y^0=(\varphi_1(x^0),\dots,\varphi_m(x^0))\in\mathbb{R}^m$ и функция $f(y)=f(y_1,\dots,y_m)$ дифференцируема в точке y^0. Тогда сложная функция $\Phi(x)=f(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ дифференцируема в точке x^0, причем при $x\to x^0$ $\Phi(x)-\Phi(x^0)=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(x_i-x_i^0)+o(\rho(x,x^0))$, где

$$A_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x^0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}(y^0)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x^0)$$

Доказательство:

Т. к. $f(y)$ дифференцируема в y^0 по теореме найдутся $f_j(y),j=1,\dots,m$ непрерывные в $y^0=(y_1^0,\dots,y_m^0)$, такие что

$$f(y)-f(y^0)=\sum_{j=1}^{m}f_j(y)(y_j-y_j^0),f_j(y^0)=\frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0)$$

Поскольку дифференцируемая в точке функция непрерывна в ней, воспользуемся теоремой о непрерывности сложной функции, получим $\psi_j(x)=f_j(\varphi_1(x),\dots,\varphi_m(x))$ непрерывны в x^0, причем

$$\psi_j(x^0)=f_j(\varphi_1(x^0),\dots,\varphi_m(x^0))=f_j(y^0)=\frac{\partial f}{\partial y_j}(y^0)$$

Подставив $y_1=\varphi_1(x),\dots,y_m=\varphi_m(x)$, получим

$$\Phi(x)-\Phi(x^0)=\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)(\varphi_j(x)-\varphi_j(x^0))$$

Но $\varphi_j(x)$ дифференцируемы в x^0, и значит, непрерывны, поэтому найдутся $\varphi_{ij}(x)$, что