**Практика 5. Интегрирование некоторых иррациональных функций**

1. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$, подстановка $x = t^k$, где $k$ – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

2. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где $k$ – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

3. $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$ (дифференциальный бином)

   1) $p$ – целое число $\Rightarrow$ подстановка $x = t^s$, где $s$ – наименьший общий знаменатель дробей $m$ и $n$.

   2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число $\Rightarrow$ подстановка $a + bx^n = t^r$, где r – знаменатель дроби $p$

   3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число $\Rightarrow$ подстановка $a + bx^n = x^n t^r$, где r – знаменатель дроби $p$

4. Интегралы вида:

   4.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, выделением полного квадрата из квадратного трехчлена сводится к табличному

   4.2. $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$, выделение в числителе производной квадратного трехчлена и представление интеграла в виде суммы двух интегралов (интеграл от степенной функции и интеграл вида 4.1)

   4.3. $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами, $\lambda$ – число.

   4.4. $\int \frac{dx}{(x-p)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, подстановкой $x - p = \frac{1}{t}$ сводится к интегралу вида 4.3.

5. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$

| |
|---|
| $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ |
| $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$ |

   1) Подстановки Эйлера:

   $a>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$

   $c>0 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$

   корни полинома $x_1, x_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ или $t(x - x_2)$

   2) Тригонометрические подстановки. Выделением под знаком радикала полного квадрата и заменой $t = x + \frac{b}{2a}$ интеграл сводится к интегралу одного из следующих видов:

   $\int R\left(t, \sqrt{a^2 - t^2}\right)dt \Rightarrow$ подстановка $t = a\sin z$ или $t = a\cos z$

   $\int R\left(t, \sqrt{t^2 + a^2}\right)dt \Rightarrow$ подстановка $t = a\,tg z$ или $t = a\,ctg z$

   $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - a^2}\right)dt \Rightarrow$ подстановка $t = \frac{a}{\sin z}$ или $t = \frac{a}{\cos z}$

**Найти интегралы.**

**1.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$. **2.** $\int \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. **3.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **4.** $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$. **5.** $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}$.

**6.** $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}dx$. **7.** $\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx$. **8.** $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2 + 2x}}$. **9.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x} + 1\right)^{10}}$.

---

**10.** $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}dx$. **11.** $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{3x+4}}dx$. **12.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2 - 6x + 1}}$. **13.** $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$. **14.** $\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$. **15.** $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.