Лекция 2
Отношения на множествах

- 1. Понятие отношения. Бинарные отношения.
- 2. Композиция бинарных отношений. Обратное отношение.
- 3. Свойства отношений.

ITMO University

Пример: X – множество студентов,

Y – множество дисциплин по выбору.

$X \backslash Y$	Мат.анализ базовый	Мат.анализ продвинутый	Машинное обучение	Биометрия	Управление ИБ
1	■				
2	■		■		
3					
4				■	■

Бинарное отношение Q: студент x выбрал дисциплину y.

$$Q = \{(1,\text{ма}_\text{б}),\ (2,\text{ма}_\text{б}),\ (2,\text{мо}),\ (4,\text{б}),\ (4,\text{уиб})\}$$

1. Понятие отношения. Бинарные отношения

Пусть $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$.

- **Определение 1**

Бинарным отношением Q на множествах X и Y называется произвольное подмножество упорядоченных пар (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$.

Обозначение: xQy или $(x,y) \in Q$.

Элементы x и y – *компоненты* (*координаты*) отношения Q.

$$Q \subseteq X \times Y$$

Определение 2

- Областью определения бинарного отношения Q называется множество

$$D_Q = \{x : \exists y \text{ такое, что } (x,y) \in Q\};$$

- областью значений бинарного отношения Q называется множество

$$R_Q = \{y : \exists x \text{ такое, что } (x,y) \in Q\}.$$

Бинарным отношением на X называется любое подмножество Q декартова квадрата множества X:

$$Q \subseteq X \times X = X^2$$

$\forall X$ определим:

- нуль-отношение: $\varnothing$ в $X \times X$
- тождественное отношение (диагональ)

на X:

$$id_X = \{(x, x):\ x \in X\}$$

- универсальное (полное) отношение:

$$U_X = X^2$$

Пример 1. $X = \{2,4\}$, $Y=\{3,4,6\}$

$X\times Y= \{ (2,3), (2,4), (2,6), (4,3), (4,4), (4,6)\}$

Отношения на X и Y

$1.\ P:$ $x \vdots y$ *x* делится на *y*

$$P = \{ (4,4) \}$$

2. $Q:$ $x|y$ *x* является делителем *y*

$$Q = \{ (2,4), (2,6), (4,4) \}$$

$D_Q = \{2, 4\} = X$ $R_Q = \{4, 6\}$

Пример 2. $X = \{2,4\}$

$X^2 = X \times X = \{ (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

Отношения на X

1. $Q: \quad x|y$

$Q = \{ (2,2), (2,4), (4,4) \} \subseteq X^2$

2. Тождественное отношение на X:

$id_X = \{ (2,2),(4,4) \}$ – равенство в X: $x=y$

3. Универсальное отношение

$U_X = X^2 = \{ (2,2), (2,4), (4,2), (4,4) \}$ – первая компонента является арифметической степенью второй

- **Определение 3**

n–местным (n-арным) отношением на множествах $X_1, X_2, \dots X_n$ называется любое подмножество прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$:

$$Q \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$$

При $n=1$ отношение Q является подмножеством X и называется *унарным* отношением или *свойством*.

Способы задания бинарных отношений

- перечисление
- график
- граф
- матрица

Пусть X,Y – конечные множества.

Граф отношения Q строится следующим образом:

- компоненты отношения изображаются точками;
- если xQy, то изображается стрелка, ведущая от точки, соответствующей элементу x, к точке, соответствующей элементу y.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

- **Определение 4**

Матрицей бинарного отношения Q на множествах X и Y называется матрица порядка $m \times n$ в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, определяется так:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & если \ (x_i, y_j) \in Q, \\ 0, & если \ (x_i, y_j) \notin Q. \end{cases}$$

Обозначение: $[Q]$.

Пусть P, Q – бинарные отношения на X и Y, известны их матрицы $[P]=(p_{ij})$, $[Q]=(q_{ij})$.

Основные свойства матриц

1. Если $P \subseteq Q$, то $\forall i, j \quad p_{ij} \le q_{ij}$.

2. Матрица объединения отношений:

$$[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij}) = [P] + [Q],$$

где сложение осуществляется поэлементным сложением соответствующих элементов матриц $[P]$ и $[Q]$ по бинарным правилам.

3. Матрица пересечения отношений

$$[P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij}) = [P] * [Q],$$

где умножение $*$ осуществляется *поэлементным перемножением* соответствующих элементов матриц $[P]$ и $[Q]$.

4. Матрица тождественного отношения на X есть единичная матрица размерности m:

$$[id_X] = \boldsymbol{E}_{m \times m}.$$

Реляционные таблицы

X_1	X_2	…	X_n
x_1	x_2	…	x_n
$x_1{}'$	$x_2{}'$	…	$x_n{}'$
$x_1{}''$	$x_2{}''$	…	$x_n{}''$
…	…	…	…

X_i – атрибуты (свойства);

$x_i \in X_i$ – домены (значения) атрибутов.

2. Композиция бинарных отношений. Обратное отношение

Пусть $Q \subseteq X \times Z, \quad P \subseteq Z \times Y.$

- **Определение 5**

Композицией (произведением) бинарных отношений Q и P называется множество

$$Q \circ P = \{(x,y)\colon\ x \in X,\ y \in Y \text{ и } \exists z \in Z \text{ такое, что } (x,z) \in Q \text{ и } (z,y) \in P\}.$$

Композиция $Q \circ Q$ называется **квадратом бинарного отношения** Q на X:

$$Q \circ Q = Q^2$$

Свойства композиции

1. $(Q \circ P) \circ R = Q \circ (P \circ R)$

2. $Q \circ (P \cup R) = (Q \circ P) \cup (Q \circ R)$

3. $\forall Q \quad Q \circ \varnothing = \varnothing \circ Q = \varnothing$

4. $\forall Q$ на $X \quad Q \circ id_X = id_X \circ Q = Q$

СР Верно ли, что $Q \circ P = P \circ Q$ на X ?

Докажем, что $(Q \circ P) \circ R = Q \circ (P \circ R)$:

1. Пусть $(x,y) \in (Q \circ P) \circ R \Rightarrow \exists\, u,v : (x,u) \in Q,$ $(u,v) \in P,$ $(v,y) \in R \Rightarrow (u,y) \in P \circ R,$ $(x,y) \in Q \circ (P \circ R)$

Т.о. $(Q \circ P) \circ R \subseteq Q \circ (P \circ R)$

2. Пусть $(x,y) \in Q \circ (P \circ R) \Rightarrow \exists\, v : (u,v) \in P,$ $(v,y) \in R$ и $\exists\, u : (x,u) \in Q \Rightarrow (x,v) \in Q \circ P,$ $(x,y) \in (Q \circ P) \circ R$

Т.о. $Q \circ (P \circ R) \subseteq (Q \circ P) \circ R$

Ч.т.д

Пусть $Q \subseteq X \times Z$, $P \subseteq Z \times Y$ заданы матрицами $[Q]=(q_{ij})_{m\times n}$ и $[P]=(p_{ij})_{n\times r}$.

Матрица композиции бинарных отношений – матрица размерности $m\times r$, которую находят по правилу:

$$[Q \circ P] = [Q] \cdot [P],$$

где умножение $\cdot$ матриц производится по правилу «строка на столбец», но произведение и сумма элементов q_{ij} и p_{ij} – по бинарному закону.

- **Определение 6**

  Обратным отношением для отношения $Q \subseteq X \times Y$ называется отношение $Q^{-1} \subseteq Y \times X$ такое, что:

$$Q^{-1} = \{(y,x):\ (x,y) \in Q\}.$$

Свойства обратного отношения

1. $(Q^{-1})^{-1} = Q$
2. $(Q \circ P)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1}$

Матрица обратного отношения:

$$[Q^{-1}] = [Q]^{\mathrm{T}}$$

где T – операция транспонирования матрицы.

3. Свойства отношений

Пусть Q – бинарное отношение на X.

- **Определение 7**

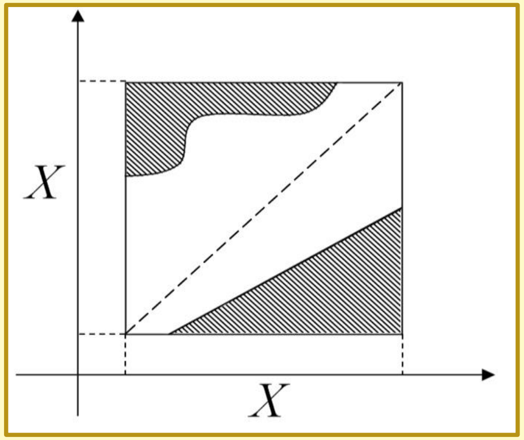
  Отношение Q на X называется:

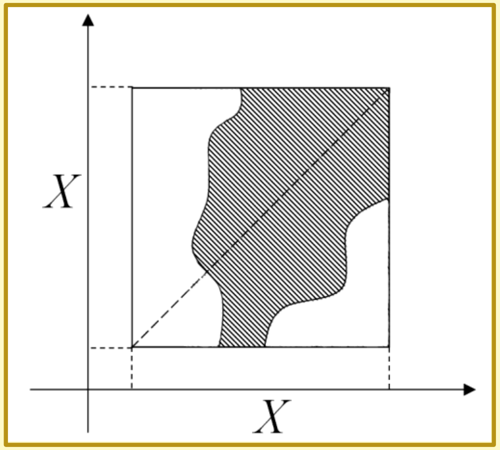
  ✓ рефлексивным, если

  $$\forall x \in X \quad (x,x) \in Q$$

  ✓ антирефлексивным (иррефлексивным), если $\nexists x \in X$ такой, что $(x,x) \in Q$.

✓ нерефлексивным, если оно ни рефлексивное, ни антирефлексивное.





Отношение Q рефлексивное, если

$$id_X \subseteq Q,$$

т.е. диагональ множества X содержится в Q.

Отношение Q антирефлексивное, если

$$id_X \cap Q = \varnothing.$$

- **Определение 8**

  Отношение Q на X называется:

✓ симметричным, если

$$\forall x, y \in X: \ (x, y) \in Q \Rightarrow (y, x) \in Q$$

✓ антисимметричным, если его наличие между x и y, $x \neq y$, влечет за собой его отсутствие между y и x:

$$\forall x, y \in X: \ (x, y) \in Q \ и \ (y, x) \in Q \Rightarrow x = y;$$

- несимметричным, если оно ни симметричное, ни антисимметричное.

Отношение Q симметричное $\Leftrightarrow$

$$Q^{-1} = Q$$

Отношение Q антисимметричное $\Leftrightarrow$

$$Q \cap Q^{-1} \subseteq id_X$$

в частности, $Q \cap Q^{-1} = \varnothing$

Отношение Q антисимметричное $\Leftrightarrow$

в матрице $[Q \cap Q^{-1}] = [Q] * [Q]^{\mathrm{T}}$

все элементы вне главной диагонали равны нулю.

- **Определение 9**

Отношение Q на X называется:

- ✓ транзитивным, если

$$\forall x, y, z \in X:\ (x, y) \in Q \ u\ (y, z) \in Q \Rightarrow (x, z) \in Q;$$

- ✓ интранзитивным, если

$$\forall x, y, z \in X:\ (x, y) \in Q \ u\ (y, z) \in Q \Rightarrow (x, z) \notin Q;$$

- ✓ нетранзитивным, если оно ни транзитивное, ни интранзитивное.

- **Теорема** (необходимый и достаточный признак транзитивности)

Бинарное отношение Q на X транзитивно тогда и только тогда, когда его квадрат содержится в нем:

$$Q - \textit{транзитивно} \Leftrightarrow Q \circ Q \subseteq Q.$$

Доказательство

1. Пусть Q транзитивно

$$(x,z)\in Q^2 \Rightarrow \exists\, y\in X : (x,y)\in Q \text{ и } (y,z)\in Q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,z)\in Q \Rightarrow Q^2\subseteq Q$$

2. **СР** Докажите, что

$$Q^2\subseteq Q \;\Rightarrow\; Q \text{ транзитивно}$$