TOÁN RỜI RẠC

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên
vdhuycuong@gmail.com

Mục lục

Chương 1

Logic toán học

Định nghĩa 1.1. (Mệnh đề - Proposition)
Mệnh đề là những khẳng định có giá trị chân lý xác định.

Trong phép toán mệnh đề, người ta không quan tâm đến ý nghĩa của câu phát biểu mà chỉ chú ý đến chân trị của các mệnh đề.

Tên	Phủ định Negation	Hội Conjunction	Tuyển Disjunction	Tuyển loại Exclusive or	Kéo theo Implication	Kéo 2 chiều Biconditional
Kí hiệu	$\neg P$ không P	$P \wedge Q$ P và Q	$P \vee Q$ P hay Q	$P \bigoplus Q$ P hoặc Q	$P \rightarrow Q$, P kéo theo Q	$P \leftrightarrow Q$ P tđương Q
Ý nghĩa	- Phủ định của P	Hợp của P và Q	- Giao của P và Q	- Hoặc P hoặc Q	- Nếu P thì Q	- P nếu và chỉ nếu Q.
Bảng chân trị						

Định nghĩa 1.2. (Tương đương logic - Logically equivalent)
Nếu hai mệnh đề P và Q có cùng bảng chân trị, ta nói chúng tương đương logic và kí hiệu $P \equiv Q$.

Nếu $P \equiv Q$ thì mệnh đề $P \leftrightarrow Q$ luôn lấy giá trị T.
Nếu $P \equiv Q$ thì $G(P, ...) \equiv G(Q, ...)$ (có thể thay P bởi Q trong mọi mệnh đề bất kì).

Ví dụ 1.1. Chứng minh $P \rightarrow Q$ và $\neg P \vee Q$ tương đương.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Định lý 1.3. (Tương đương logic - Logically equivalent)

(i) Luật Phủ định của phủ định (Double negation law)

$\neg\neg P \equiv P.$

(ii) Luật De Morgan (De Morgan's laws)

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q.$

$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

(iii) Luật giao hoán (Commutative laws)

$P \wedge Q \equiv Q \wedge P.$

$P \vee Q \equiv Q \vee P.$

(iv) Luật kết hợp (Associative laws)

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R.$

$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R.$

(v) Luật phân bố (Distributive laws)

$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$

$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

1.1.2 Qui luật logic

(vi) Luật lũy đẳng (Idempotent laws)

$$P \wedge P \equiv P.$$

$$P \vee P \equiv P.$$

(vii) Luật trung hòa (Identity laws)

$$P \wedge \mathbf{1} \equiv P.$$

$$P \vee \mathbf{0} \equiv P.$$

(viii) Luật về phần tử bù (Negation laws)

$$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{0}.$$

$$P \vee \neg P \equiv \mathbf{1}.$$

(ix) Luật thống trị (Domination laws)

$$P \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}.$$

$$P \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}.$$

(x) Luật kéo theo (Implication laws)

$$P \to Q \equiv \neg P \vee Q.$$

Ví dụ 1.2. Chứng minh rằng $(P \wedge Q) \to Q$ là hằng đúng.

Ta có
$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \to Q &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee Q\\ &\equiv \neg P \vee \neg Q \vee Q\\ &\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee Q)\\ &\equiv \neg P \vee \mathbf{1}\\ &\equiv \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng $\neg(Q \to P) \vee (Q \wedge P) \equiv Q$.

Ta có
$$\begin{aligned}\neg(Q \to P) \vee (Q \wedge P) &\equiv \neg(\neg Q \vee P) \vee (Q \wedge P)\\ &\equiv (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge P)\\ &\equiv Q \wedge (\neg P \vee P)\\ &\equiv Q \wedge \mathbf{1}\\ &\equiv Q.\end{aligned}$$

1.1.2 Qui luật logic

Bài tập: Chứng minh các tương đương logic sau

1.1. $\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

1.2. $((P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)) \vee Q \equiv P \vee Q$.

1.3. $\neg(P \vee Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q) \equiv \neg(Q \wedge P)$.

1.4. $(P \to Q) \wedge (\neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \equiv \neg(Q \vee P)$.

Bài tập: Chứng minh các biểu thức mệnh đề sau là hằng đúng

1.5. $P \to (\neg P \to P)$.

1.6. $P \to ((Q \to (P \wedge Q))$.

1.7. $\neg(P \vee \neg Q) \to \neg P$.

1.8. $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$.

1.1.3 Qui tắc suy diễn

Xuất phát từ một số mệnh đề (gọi là tiền đề), ta dùng các qui tắc suy diễn để suy ra chân lý của một mệnh đề khác (gọi là kết luận).

Định nghĩa 1.4. (Qui tắc suy diễn)

(i) Qui tắc khẳng định (Modus Ponens)

$$[(P \to Q) \wedge P] \to Q.$$

(ii) Qui tắc phủ định (Modus Tollens)

$$[(P \to Q) \wedge \neg Q] \to \neg P.$$

Ví dụ 1.4. Kiểm tra các suy luận sau

a) Nếu Minh học tốt thì Minh thi đậu. $\quad P \to Q$
mà Minh học tốt. $\quad P$
Suy ra Minh thi đậu. $\quad \therefore Q$

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

b) Nếu Minh học tốt thì Minh thi đậu. $\quad P \to Q$
mà Minh thi rớt. $\quad \neg Q$
Suy ra Minh không học tốt. $\quad \therefore \neg P$

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ \neg Q \\ \hline \therefore \neg P \end{array}$$

1.1.3 Qui tắc suy diễn

(tiếp theo)

(iii) Tam đoạn luận (Syllogism)

$$[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R).$$

(iv) Qui tắc mâu thuẫn (Contraposition)

$$[(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q] \Leftrightarrow [(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg Q) \to \mathbf{0}].$$

Ví dụ 1.5. Kiểm tra các suy luận sau

a) Kim cương to thì hiếm.	$P \to Q$
Cái gì hiếm thì giá cao.	$Q \to R$
Suy ra kim cương to thì giá cao.	$\therefore P \to R$

b) Nếu $2 \cdot x > 0$.	P_1
mà $2 > 0$	P_2
và $x < 0$	$\neg Q$
thì vô lý.	$(P_1 \wedge P_2 \wedge Q) \to \mathbf{0}$
Vậy Nếu $2 \cdot x > 0$ và $2 > 0$ thì $x > 0$.	$\therefore (P_1 \wedge P_2) \to Q$

1.1.3 Qui tắc suy diễn

Bài tập 1.9. Giải thích các suy luận sau theo các qui tắc suy diễn:

a) Sinh viên phải học toán chuyên đề.
Chi là sinh viên.
Vậy Chi phải học toán chuyên đề.

b) Nếu An học tốt thì An thi đậu.
Nếu An không đi chơi thì An học tốt.
An thi trượt.
Vậy An hay đi chơi

c) Bình đi chơi thì Bình không đi học.
Bình không đi học thì Bình thi rớt
Mà Bình thích đi chơi.
Vậy Bình thi trượt

c) Minh tham gia bữa tiệc.
Nếu Lan tham gia bữa tiệc thì Trung cũng tham gia.
Nếu Lan không tham gia thì Minh cũng không tham gia .
Vậy Trung tham gia bữa tiệc.

Một số qui tắc suy diễn bổ sung:

Qui tắc rút gọn:

$(A \wedge B) \rightarrow A$.

Qui tắc cộng thêm:

$A \rightarrow (A \vee B)$.

Qui tắc tam đoạn luận rời:

$[(A \vee B) \wedge \neg A] \rightarrow B)$.

Qui tắc suy diễn theo trường hợp:

$[(A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)](A \vee B) \rightarrow C)$.

Ví dụ 1.6. Chứng minh $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ là hằng đúng.

Mô hình suy diễn là

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A \vee B} \equiv \frac{\begin{array}{c} A \wedge B \\ A \wedge B \rightarrow A \end{array}}{\therefore A \vee B} \equiv \frac{A}{\therefore A \vee B} \equiv \mathbf{1}$$

Bài tập: Chứng minh các công thức sau là hằng đúng:

1.10. $[(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \wedge (C \to D)] \to (\neg B \to D)$.

1.11. $[(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge (Z_1 \vee \neg Z) \wedge (\neg Z_1 \vee Z_2) \wedge \neg Z_2] \to \neg X$.

1.12. $[(X \to Y) \wedge (\neg X \to Z) \wedge (Z \to Z_1)] \to (\neg Y \to Z_1)$.

1.13. $[(A \to B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg C \vee D)] \to (B \vee D)$.

Bài tập: Chứng minh các công thức sau là hằng đúng:

1.14. $[(X_1 \to X_2) \wedge (X_1 \to X_4) \wedge (\neg X_1 \to X_3)] \to (X_2 \vee X_4)$.

1.15. $[(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (B \vee D \to E) \wedge \neg E] \to (\neg A \wedge \neg C)$

1.16. $[(\neg Y \to \neg X) \wedge (\neg Z \to X) \wedge (\neg Z_1 \to \neg Z)] \to (\neg Z_1 \to Y)$.

1.17. $[X \wedge (X \to Y) \wedge (Z \vee M) \wedge (M \to \neg Y)) \to (Z \vee M)$.

Định nghĩa 1.5. 1.10 (Vị từ - Predicate)

Một vị từ là một khẳng định $P(x, y, ...)$ trong đó có chứa một số biến $x, y, ...$ lấy giá trị trong những tập hợp $A, B, ...$ cho trước, sao cho

- Bản thân $P(x, y, ...)$ không phải là mệnh đề.

- Nếu thay $x, y, ...$ bằng những giá trị cụ thể $a, b, ...$ thuộc tập họp $A, B, ...$ cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(a, b, ...)$, nghĩa là khi đó chân trị của P hoàn toàn xác định.

Các biến $x, y, ...$ được gọi là các biến tự do của vị từ.

Ví dụ 1.7.

a) $P(n)$: "n là một số nguyên tố". là một vị từ theo biến $n \in \mathbb{N}$. Với $n = 3$ thì $P(3)$ là mệnh đề đúng, với $n = 4$ thì $P(4)$ là mệnh đề sai.

b) $Q(x, y) : x + y = 5$ là một vị từ theo biến x và $y \in \mathbb{R}$. Với $x = 1, y = 2$ ta có $Q(1, 2)$ là một mệnh đề sai. Với $x = 2, y = 3$ ta có $Q(2, 3)$ là một mệnh đề đúng.

1.1.4 Vị từ và lượng từ

Giả sử $P(x)$ là một vị từ theo biến $x \in A$. Khi đó có 3 trường hợp sau

Trường hợp 1: khi thay x bởi một phần tử a tùy ý trong A thì $P(a)$ luôn đúng.

Trường hợp 2: với một số giá trị $a \in A$ thì $P(a)$ đúng.

Trường hợp 3: khi thay x bởi một phần tử a tùy ý trong A thì $P(a)$ luôn sai.

Định nghĩa 1.6. (Lượng từ - Quantifier)

Các mệnh đề $\forall x \in A, P(x)$ và $\exists x \in A, P(x)$ được gọi là lượng từ hóa của vị từ $P(a)$ bởi lượng từ với mọi ($\forall$) và lượng từ tồn tại ($\exists$)

$$\forall x \in A, P(x) \qquad\qquad \exists x \in A, P(x).$$

Phủ định của trường hợp 1 là trường hợp 2 hoặc trường hợp 3. Phủ định của trường hợp 2 là trường hợp 3. Nghĩa là

$$\neg[\forall x \in A, P(x)] \equiv \exists x \in A, \neg P(x), \ \neg[\exists x \in A, P(x)] \equiv \forall x \in A, \neg P(x)$$

Lượng từ hóa của mệnh đề hai biến: Xét vị từ $P(x, y)$ với $x \in A$, $y \in B$. Nếu thay x bởi phần tử $a \in A$ tùy ý thì $P(a, y)$ trở thành vị từ theo biến $y \in B$. Ta có thể lượng từ hóa nó theo biến y được hai mệnh đề $\forall y \in B, P(a, y)$ và $\exists y \in B, P(a, y)$.

Nghĩa là nếu không thay x bởi a, ta sẽ có hai vị từ theo biến $x \in A$ như sau $\forall y \in B, P(x, y)$ và $\exists y \in B, P(x, y)$. Nếu lượng từ hóa biến x, ta được bốn mệnh đề

$$\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y) \qquad \forall x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$$
$$\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y) \qquad \exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$$

Định lý 1.7. (Tính giao hoán của lượng từ hai biến)

Nếu $P(x, y)$ là một vị từ theo hai biến x, y thì các mệnh đề sau đúng

(i) $[\forall x \in A, \forall y \in B, P(x, y)] \leftrightarrow [\forall y \in B, \forall x \in A, P(x, y)]$.

(ii) $[\exists x \in A, \exists y \in B, P(x, y)] \leftrightarrow [\exists y \in B, \exists x \in A, P(x, y)]$.

(iii) $[\exists x \in A, \forall y \in B, P(x, y)] \rightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A, P(x, y)]$.

Qui tắc phủ định và giao hoán vẫn đúng cho lượng tử nhiều biến.

Ví dụ 1.8.

a) Cho $T: \forall x \in R, \forall y \in R, \exists z \in R, x^2 + y^2 = z^2$.

Mđề T tương đương $\forall y \in R, \forall x \in R, \exists z \in R, x^2 + y^2 = z^2$.

Mđề T không suy ra $\exists z \in R, \forall x \in R, \forall y \in R, x^2 + y^2 = z^2$.

b) Cho $S: \exists x \in R, \forall y \in R, xy = x$.

Mđề S suy ra $\forall y \in R, \exists x \in R, xy = x$.

c) Định nghĩa hàm $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$ là

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R, (|x - x_0| < \delta) \to (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Phủ định: hàm $f(x)$ không liên tục tại $x_0 \in \mathbb{R}$ khi

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in R, (|x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon).$$

Ví dụ 1.9.

a) Biểu diễn "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh con, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào khác" thành một biểu thức logic.

Diễn nghĩa: Mỗi đối tượng x là phụ nữ, nếu x sinh con thì có một đối tượng y sao cho y là con của x.

Đặt X là tập hợp dân số, $P(x)$: x là phụ nữ, $Q(x)$: x sinh con, $R(x, y)$: y là con của x. Câu nói trên được viết lại

$$[\forall x \in X, P(x) \wedge Q(x)] \to [\exists y \in X, R(x, y)].$$

b) Biểu diễn "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.

Diễn nghĩa: Mỗi đối tượng x có một đối tượng khác là y sao cho y là bạn tốt nhất của x, nếu z là một đối tượng khác y thì z không phải là bạn tốt nhất của x.

Đặt $P(x, y)$: y là bạn tốt của x. Câu nói trên được viết lại

$$\forall x \in X, \exists y \in X, \forall z \in X, [P(x, y) \wedge (z \neq y) \to \neg P(x, z)].$$

1.1.4 Vị từ và lượng từ

Bài tập: Biểu diễn các câu sau thành một biểu thức logic:

1.18. Học sinh giỏi phải giỏi cả tin lẫn toán. Nếu chỉ giỏi một trong hai môn hay không giỏi môn nào thì không phải học sinh giỏi.

1.19. Bạn không được lái xe máy nếu bạn cao dưới 1.5 mét trừ khi bạn trên 18 tuổi.

1.20. Người đi xe máy không thể vượt đèn đỏ nếu anh ta thấy công an trừ khi anh ta quá liều.

1.21. Tất cả sinh viên đều đóng học phí nhưng một số sinh viên được nhận học bổng.

1.22. Nếu bạn giải hết tất cả bài tập trong sách thì bạn sẽ gặp lại ít nhất một bài trong kì thi.

1.23. Có một sinh viên ở lớp này ít nhất đã ở tất cả các phòng của ít nhất một nhà trong ký túc xá.

1.24. Nếu bạn là khách VIP thì bạn được miễn phí tất cả dịch vụ. Nếu bạn không phải khách VIP thì bạn chỉ được miễn phí một phần. Nhưng nếu bạn là nữ thì bạn được miễn phí tất cả.

1.2. Phương pháp chứng minh
1.2.1 Các phương pháp chứng minh

Mỗi bài toán chứng minh có 2 phần chính: giả thiết và kết luận. Quá trình chứng minh bài toán là quá trình sử dụng các tiên đề, luật logic, quy tắc suy luận theo một phương pháp chứng minh nào đó để từ giả thiết ta tìm được kết luận.

Có nhiều phương pháp chứng minh:

- Chứng minh trực tiếp.
- Chứng minh gián tiếp.
- Chứng minh phản chứng.
- Chứng minh theo từng trường hợp.

1.2.2 Chứng minh trực tiếp

Phương pháp Chứng minh trực tiếp

Để chứng minh từ A suy ra B, ta giả sử A đúng, sau đó áp dụng các quy tắc suy luận,... để chỉ ra B đúng.

Ví dụ 1.10. Chứng minh nếu n là số lẻ thì n^2 cũng là số lẻ.

Vì n là số lẻ nên $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ là số lẻ.

Ví dụ 1.11. Cho ABC là tam giác và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng nếu $AM = MB$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Do $MA = MB$ nên tam giác MAB cân tại M. Khi đó $\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$.

Do $MC = MB = MA$ nên tam giác MAC cân tại M. Khi đó $\widehat{CAM} = \widehat{ACM}$.

Kết quả là $\widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{ACM} + \widehat{ABM} = 90^o$.

1.2.3 Chứng minh gián tiếp

Phương pháp chứng minh gián tiếp

Ta có

$$A \to B \Leftrightarrow \bar{B} \to \bar{A}$$

Như vậy, để chứng minh A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai và chứng minh A sai.

Ví dụ 1.12. Cho $n \in \mathbb{N}$, nếu $3n$ là số lẻ thì n là số lẻ.

$A(3n$ là số lẻ$) \to B(n$ là số lẻ$)$

$\Leftrightarrow \bar{B}(n$ là số chẵn$) \to \bar{A}(3n$ là số chẵn$)$.

Cho n là số chẵn nên $n = 2k$ với $k \in N$.

Ta có $3n = 3.2k = 6k$ là số chẵn.

Vậy nếu $3n$ là số lẻ thì n là số lẻ.

1.2.4 Chứng minh phản chứng

Phương pháp chứng minh phản chứng

Ta có

$$A \to B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B \text{ nên } \overline{A \to B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$$

Như vậy, để chứng minh A đúng suy ra B đúng, ta có thể giả sử B sai và chứng minh điều này dẫn đến một mâu thuẫn.

Ví dụ 1.13. Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, nghĩa là có thể biểu diễn $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $(m, n) = 1$. Điều này dẫn đến $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$ hay $m^2 = 2n^2$ hay m là số chẵn.

Do m là chẵn nên $(2k)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow 2n^2 = 4k^2 \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$.

Vậy n cũng là số chẵn nên $(m, n) = 2$. Mà ta đã giả thiết $(m, n) = 1$ nên dẫn đến điều vô lý. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

1.2.5 Chứng minh theo trường hợp

Phương pháp chứng minh theo trường hợp

Ta có

$$(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$$

Như vậy, để chứng minh $(A \vee B)$ đúng suy ra C đúng, ta chỉ cần chứng minh $(A \to C)$ và $(B \to C)$.

Ví dụ 1.14. Chứng minh $n^3 + 2n$ luôn chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Xét $n \vdots 3$ hiển nhiên $n^3 + 2n \vdots 3$.

Xét $n \not\vdots 3$ khi đó $n = 3k \pm 1$ với $k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$n^2 + 2 = (3k \pm 1)^2 + 2 = 9k^2 \pm 6k + 3 = 3(3k^2 \pm 2k + 1)$$

Vậy $n(n^2 + 2)$ cũng chia hết cho 3.

Vậy $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Quy nạp toán học
1.3.1 Phương pháp quy nạp yếu

Quy nạp là một kỹ thuật chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Phương pháp quy nạp yếu gồm hai bước:
Bước cơ sở: Chứng minh $P(N_0)$ đúng.
Bước quy nạp: với $k \geq K_0$, chứng minh nếu $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng.

Ví dụ 1.15. Chứng minh $1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Đặt $P(n) = "1 + 3 + ... + (2n-1) = n^2$.
(Bước cơ sở) Dễ thấy $P(1)$ đúng vì $1 = 1^2$.
(Bước quy nạp) Giả sử với $k \geq 1$, $P(k)$ đúng, tức là

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$$

Vậy theo nguyên lý quy nạp $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2 Phương pháp quy nạp mạnh

Phương pháp quy nạp mạnh gồm hai bước:
Bước cơ sở: Chứng minh $P(N_0)$, $P(N_0+1)$, ... $P(K_0)$ đúng.
Bước quy nạp: với $k \geq K_0$, chứng minh nếu $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$ thì $P(k+1)$ đúng.

Ví dụ 1.16. Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích những thừa số nguyên tố.

Đặt $P(n) = "n$ phân tích được thành tích các số nguyên tố".

(Bước cơ sở) Dễ thấy $P(2)$ đúng vì $2 = 2$ là số nguyên tố.

(Bước quy nạp) Với $k \geq 2$, giả sử $P(m)$ đúng với mọi $m \leq k$, tức là, với $1 < m \leq k$ thì m phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố. Ta cần chứng minh $P(k+1)$ đúng

Nếu $k+1$ là số nguyên tố thì $P(k+1)$ đúng.

Nếu $k+1$ không là số nguyên tố. Gọi p là một ước nguyên tố của $k+1$. Khi đó $k+1 = p.a$ với $a < k+1$ nên theo giả thiết quy nạp a phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố.

Bài tập

1.25. Chứng minh rằng $\forall n \in N, n > 1, 3^n > 3n + 1$.

1.26. Chứng minh rằng $\forall n \in N, n > 2, 3^n > n^2 + 4n + 5$.

1.27. Tìm số k sao cho $\forall n \in N, n > k, 3^n > n^3 + 2n + 1$.

1.28. Tìm số k sao cho $\forall n \in N, n > k, 3^n > 2^n + 7n$.

Bài tập

1.29. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì

$$2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

1.30. Chứng minh rằng với với $n \in \mathbb{N}$ thì

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

1.31. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

1.32. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì $n^7 - n$ chia hết cho 7.

1.4. Hệ thức đệ quy
1.4.1 Định nghĩa đệ quy

Định nghĩa 1.8. (Đệ quy) Thuật ngữ đệ quy được dùng để chỉ việc định nghĩa (hoặc xác định) một vấn đề mà có sử dụng ngay chính vấn đề đó.

Ví dụ 1.17. Định nghĩa số tự nhiên:

Số 1 là số tự nhiên. Số n là số tự nhiên nếu $n - 1$ là số tự nhiên.

Ví dụ 1.18. Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n.

Với $n = 1$ thì $x_n = 1$. Với $n = 2$ thì $x_n = 2$.

Với $n > 2$ thì $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ do

Nếu bước đầu là 1 bậc, số cách đi hết cầu thang là x_{n-1}.

Nếu bước đầu là 2 bậc, số cách đi hết cầu thang là x_{n-2}.

1.4.1 Định nghĩa đệ quy

Bài tập: Trong ngăn tiền của một cửa hàng chỉ có chứa các tờ tiền có mệnh giá 5.000 đồng và 10.000 đồng. Hỏi có bao nhiêu cách tổ hợp các tờ tiền sao cho

1.33. mệnh giá là 15.000 đồng.

1.34. mệnh giá là 20.000 đồng.

1.35. mệnh giá là 25.000 đồng.

1.36. mệnh giá là 30.000 đồng.

Bài tập

1.37. Tìm công thức đệ qui biểu diễn $n!$.

1.38. Tìm công thức đệ qui tính ước số chung của hai số a, b.

1.39. Một cầu thang gồm n bậc. Một bước đi có thể qua 1 bậc, 2 bậc hoặc 3 bậc. Tìm biểu diễn đệ quy của x_n là cách đi hết cầu thang.

1.40. Một cầu thang gồm n bậc. Một bước đi có thể qua 2 bậc hoặc 3 bậc. Tìm biểu diễn đệ quy của x_n là cách đi hết cầu thang.

1.4.2 Hệ thức đệ quy tuyến tính

Định nghĩa 1.9. Một hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng có dạng

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

trong đó $a_0, ..., a_k$ là các hệ số cho trước , $\{f_n\}$ là dãy số cho trước và $\{x_n\}$ là dãy ẩn chưa biết.

Dãy $\{x_n\}$ thỏa (1) được gọi là nghiệm của (1) .

Ví dụ 1.19. HTĐQ $2x_n - 3x_{n-1} = 0$
có nghiệm tổng quát $x_n = C(3/2)^n$.

Ví dụ 1.20. HTĐQ $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0, \\ x_0 = 4, x_1 = 9 \end{cases}$
có nghiệm riêng là $x_n = 3.2^n + 3^n$.

1.4.3 Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{2}$$

Phương trình đặc trưng có dạng $a_0\lambda + a_1 = 0$ có nghiệm $\lambda_0 = -a_1/a_0$. Khi đó (2) có nghiệm $x_n = C \cdot \lambda_0^n$.

Ví dụ 1.21. Giải hệ đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5 \end{cases} \quad (*)$

Phương trình đặc trưng $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda_0 = 2$.
Nghiệm tổng quát là $x_n = C \cdot 2^n$.
Nghiệm riêng thỏa $x_0 = C \cdot 2^0 = 5$. Ta thu được $C = 5$.
Vậy nghiệm riêng của hệ $(*)$ là $x_n = 5 \cdot 2^n$.

1.4.3 Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp 2 thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{3}$$

Phương trình đặc trưng có dạng $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Nếu ptđt có 2 nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì (3)

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

Nếu ptđt có nghiệm kép thực λ_0 thì (3)

$$x_n = (C_1 + nC_2)\lambda_0^n.$$

Nếu ptđt có nghiệm phức $\lambda = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ thì (3)

$$x_n = r^n(C_1\cos n\phi + C_2\sin n\phi).$$

Ví dụ 1.22. Giải pt đệ quy $x_n - 5x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 \ \ (*)$

Ptđt $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ có 2 nghiệm $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Hệ $(*)$ có nghiệm tổng quát $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$.

Ví dụ 1.23. Giải pt đệ quy $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 2; x_1 = 9 \end{cases} \quad (*)$

Ptđt $4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$ có 1 nghiệm kép $\lambda_0 = 3/2$.

Hệ $(*)$ có nghiệm tổng quát $x_n = (C_1 + nC_2) \cdot (3/2)^n$.

Với $x_0 = 2, x_1 = 9$ ta được $C_1 = 2, C_2 = 4$. Vậy nghiệm riêng của hệ $(*)$ là $x_n = (2 + 4n) \cdot (3/2)^n$.

Ví dụ 1.24. Giải pt đệ quy $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0 \\ x_0 = 1; x_1 = 4 \end{cases} \quad (*)$

Ptđt $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

Hệ $(*)$ có nghiệm tổng quát $x_n = 2^n(C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\sin\frac{n\pi}{3})$.

Với $x_0 = 1; x_1 = 4$ ta được $C_1 = 1$ và $C_2 = \sqrt{3}$. Vậy nghiệm riêng của hệ $(*)$ là $x_n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})$.

Bài tập: Giải các HTĐQTT sau

1.41. $a_{n+1} = -3a_n$.

1.42. $a_n = 2a_{n-1}$.

1.43. $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$.

1.44. $2a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.

Bài tập: Giải các HTĐQTT sau

1.45. $a_n = 8a_{n-1}, a_1 = 5$.

1.46. $a_{n+1} = -a_n, a_1 = 2$.

1.47. $a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}, a_1 = 9, a_2 = 45$.

1.48. $a_{n+2} = -2a_n, a_0 = 2, a_1 = 4$.

1.4.4 Nghiệm của HTĐQTT không thuần nhất

Nghiệm của HĐQTT không thuần nhất (1) bằng nghiệm của HĐQTT thuần nhất (vế phải bằng 0) tương ứng cộng với nghiệm riêng của HĐQTT không thuần nhất (vế phải khác 0).

Nghiệm riêng $\overline{x}_n$ của HĐQTT được tính dựa trên $f_n = b^n P_r(n)$ như sau:

- Nếu b không là nghiệm của ptđt thì $\overline{x}_n = b^n Q_r(n)$.
- Nếu b là nghiệm đơn của ptđt thì $\overline{x}_n = nb^n Q_r(n)$.
- Nếu b là nghiệm kép của ptđt thì $\overline{x}_n = n^2 b^n Q_r(n)$.

Nếu $f_n = f_{n,1} + f_{n,2}$ thì ta chia làm hai bài toán với vế phải lần lượt là từng thành phần của f_n. Nghiệm riêng của bài toán lớn sẽ là tổng của từng nghiệm riêng của các bài toán nhỏ.

Ví dụ 1.25. Tìm nghiệm riêng $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = f_n$.

Dễ thấy nghiệm tổng quát của pt thuần nhất ($f_n = 0$) là

$$x_n^g = C_1 2^n + C_2 3^n.$$

Nếu $f_n = 2n + 1$, ta đặt $\overline{x}_n = An + B$, thay vào $(*)$ ta được

$$An + B - 5(A(n-1) + B) + 6(A(n-2) + B) = 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 2An + 2B - 7A = 2n + 1.$$

Đồng nhất hệ số ta được $A = 1, B = 4$ vậy $x_n^p = n + 4$ và

$$x_n = x_n^g + x_n^p = C_1 2^n + C_2 3^n + n + 4$$

Nếu $f_n = 2^n(n-1)$, ta đặt $\overline{x}_n = n2^n(An + B)$, thay vào $(*)$ ta được

$$n2^n(An + B) - 5(n-1)2^{n-1}(A(n-1) + B)$$

$$+6(n-2)2^{n-2}(A(n-2) + B) = 2^n(n-1).$$

Đồng nhất hệ số ta được $A = -11/18, B = 29/18$ vậy

$$x_n = x_n^g + x_n^p = C_1 2^n + C_2 3^n + n2^n(29/18 - 11n/18)$$

Bài tập: Giải các HTĐQTT sau

1.49. $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 12$

1.50. $a_{n+1} = 3a_n + 4n - 6$.

1.51. $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1} + 3$

1.52. $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 4^n$

Bài tập: Giải các HTĐQTT sau

1.53. $a_n = a_{n-1} + 9, a_0 = -3$.

1.54. $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 53^{n+1}, a_1 = 13$.

1.55. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} - 10, a_2 = -5, a_3 = -26$

1.56. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 8(-1)^{n+1}, a_0 = 3, a_1 = -5$.

Chương 2

Các phương pháp đếm

2.1. Tập hợp và tính chất
2.1.1 Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, dùng để chỉ một nhóm đối tượng nào đó. Khi phần tử x thuộc tập hợp A ta kí hiệu $x \in A$, ngược lại nếu x không thuộc A ta kí hiệu $x \notin A$.

Ví dụ 2.1.

a) Tập hợp học sinh của lớp 10A1. b) Tập hợp các số nguyên.

Lực lượng của tập hợp là số phần tử của nó. Kí hiệu $|A|$ để chỉ lực lượng của A. Nếu A có hữu hạn phần tử, ta nói A hữu hạn.

Ví dụ 2.2.

a) $X = \{1, 3, 4, 5\}$ có $|X| = 4$. b) $\mathbb{N}$ là tập vô hạn.

Hai cách xác định tập hợp: liệt kê và nêu tính chất.

Ví dụ 2.3.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$ b) $B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ chia hết cho } 3\ \}$.

2.1.2 Quan hệ và phép toán của tập hợp

Quan hệ giữa các tập hợp:

Bao hàm : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \rightarrow x \in B$.

Bằng nhau $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Phép toán trên tập hợp

Hợp: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Giao: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

Hiệu: $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

Tập bù $\overline{A} = \{x | x \notin A\}$

Tính chất của các phép toán

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = A$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \cup \overline{A} = U$

2.1.3 Tập hợp của tập hợp

Cho A là một tập hợp. Khi đó tất cả các tập con của A được kí hiệu là $P(A)$. Quan hệ giữa lực lượng hai tập này là $|P(A)| = 2^{|A|}$

Ví dụ 2.4.

a) Cho $X = \{a\}$ thì $P(X) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

b) Cho $Y = \{a, b\}$ thì $P(Y) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Tích Descartes của hai tập hợp là một tập hợp mà mỗi phần tử là một cặp phần tử tương ứng của hai tập hợp trước.

$$A \times B = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Ví dụ 2.5. Cho $A = \{a, b\}$ và $B = \{1, 2, 3\}$. Khi đó

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

2.1.4 Biểu diễn tập hợp trên máy tính

Tập hợp U hữu hạn có n phần tử được xếp theo một thứ tự nào đó. Mỗi tập hợp con A của U được biểu diễn bởi một xâu bit nhị phân có độ dài n sao cho nếu $a_i \in A$ thì bit thứ i có giá trị 1 và nếu $a_i \notin A$ thì bit thứ i có giá trị 0.

Các phép toán trên tập hợp cũng được xây dựng. Phép giao được cho bởi $\min$, phép hợp được cho bởi $\max$, phép hiệu được cho bởi phép $-$.

Ví dụ 2.6. Cho $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Biểu diễn của $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ là 101010101.
Biểu diễn của $B = \{2, 4, 6, 8\}$ là 010101010.
Biểu diễn của $C = \{x | x < 5\}$ là 111100000.
Biểu diễn của $A \cup B$ là 111111111.
Biểu diễn của $A \cap C$ là 101000000.
Biểu diễn của $B \setminus C$ là 000001010.

2.1.4 Biểu diễn tập hợp trên máy tính

Bài tập: Cho $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b\}$. Biểu diễn các tập

2.1. $A = \{0, a, b, 5, 6, 7, 8, 9, \}$.
2.2. $B = \{0, 2, 8, 4, 6, b, \}$.
2.3. $C = \{a, b, 1, 3, 5, 7, 9, \}$.
2.4. $D = \{1, 2, 7, 5, 9, 4, a\}$.

Bài tập: Cho U, A, B, C, D như trên. Biểu diễn các tập sau

2.5. $A \cup B, A \cap B$.
2.6. $A \setminus C, A \setminus D$.
2.7. $C \cup D, C \cap D$.
2.8. $C \setminus D, D \setminus C$.

2.2. Các qui tắc đếm cơ bản
2.2.1 Nguyên lý cộng

Định nghĩa 2.1. (Công thức cộng) Giả sử công việc A có 2 phương pháp hoàn thành, trong đó phương pháp 1: có n cách làm và phương pháp 2 có m cách làm. Khi đó số cách hoàn thành công việc là $n + m$.

Ví dụ 2.7.

a) Để đi từ Sài Gòn đến Phú Quốc có hai lựa chọn chính là đường không và đường thủy. Nếu đi bằng máy bay có thể chọn hãng Vietnam hoặc Jetstar. Để đi bằng tàu thủy có thể chọn hãng Sài Gòn, Miền Nam hoặc Phú Quốc. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ SG đến PQ.

Để đi từ Sài Gòn đến Phú Quốc, ta chọn một trong hai lựa chọn chính. Vậy có $2 + 3 = 5$ cách.

b) Bạn Thủy chọn áo đi học. Bạn đó có 3 áo sơ mi và 4 áo thun. Hỏi có mấy cách chọn áo.

Bạn nữ chỉ chọn một trong hai loại chứ không mặc đồng thời cả hai. Vậy có $3 + 4 = 7$ cách.

2.2.2 Nguyên lý nhân

Định nghĩa 2.2. (Công thức nhân) Giả sử công việc A cần 2 bước thực hiện, trong đó bước 1: có n cách làm và bước 2 có m cách làm. Khi đó số cách hoàn thành công việc là $n \cdot m$.

Ví dụ 2.8.

a) Bạn Nguyên cần chọn 1 bộ quần áo đi học. Bạn đó có 3 cái áo và 2 cái quần. Hỏi bạn đó có mấy cách chọn một bộ quần áo?

Một bộ quần áo cần 1 cái áo và một cái quần nên tổng số cách chọn là $3 \cdot 2 = 6$.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên 2 chữ số mà 2 chữ số đó khác nhau?

Một số tự nhiên cần tìm có dạng ab. Có 9 các chọn a (từ 1 đến 9) và có 9 cách chọn b (từ 0 đến 9 và khác a. Vậy có $9 \cdot 9 = 81$ cách chọn.

2.2.3 Nguyên lý bù trừ

Định nghĩa 2.3. (Công thức trừ) Để tìm số cách thực hiện công việc A ta tìm tất cả các cách rồi loại đi những cách không thực hiện được công việc A

Ví dụ 2.9.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 và không có chữ số nào giống nhau.

Số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 là 100 số (từ 0 cho đến 99). Số các số tự nhiên nhỏ hơn 100 và có 2 số giống nhau (dạng aa) là 10 số (từ 00, 11, ... 99). Vậy có $100 - 10 = 90$ số thỏa để bài.

b) Bạn Hiếu có ba cái áo màu xanh, đỏ và vàng. Bạn Thắng có bốn cái áo màu xanh, đen, trắng và đỏ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn áo để hai bạn không mặc áo cùng màu?

Tổng số cách chọn áo là $3 \cdot 4 = 12$ cách. Số cách chọn áo trùng màu là 2 (xanh-xanh, đỏ-đỏ). Vậy có $12 - 2 = 10$ cách chọn áo.

Định nghĩa 2.4. (Hoán vị) Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử của A được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

Ví dụ 2.10.

a) Xếp 5 người vào một băng ghế 5 chỗ. Có nhiêu cách?

Mỗi cách đổi chỗ là một hoán vị. Vậy có $P_5 = 5! = 120$ cách.

b) Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4$ có thể tạo được bao nhiêu số tự nhiên.

Số cần tìm có dạng $abcde$. Trong đó chọn a có 4 cách (khác 0). Bốn vị trí b, c, d, e là hoán vị của 4 số còn lại (bỏ a) nên số $P_4 = 4! = 24$ cách xếp. Vậy tổng cộng có $4 \cdot 24 = 96$ số được tạo thỏa yêu cầu.

2.3.2 Chỉnh hợp

Định nghĩa 2.5. (Chỉnh hợp) Cho tập A gồm n phần tử. Một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử của A được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử lad $A_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Ví dụ 2.11.

a) Xếp 5 người vào một băng ghế 7 chỗ. Có nhiêu cách?

Mỗi cách đổi chỗ là một chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử. Vậy có $A_5^7 = \dfrac{7!}{(7-5)!} = 2520$ cách.

b) Từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể tạo được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

Số cần tìm có dạng *abcde*. Trong đó chọn a có 5 cách (khác 0). Bốn vị trí b, c, d là chỉnh hợp chập 3 của 5 số còn lại (bỏ a) nên số $A_3^5 = 5!/2! = 60$ cách xếp. Vậy tổng cộng có $5 \cdot 60 = 300$ số.

2.3.3 Tổ hợp

Định nghĩa 2.6. (Tổ hợp) Cho tập A gồm n phần tử. Một tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số tổ hợp chập k của n phần tử là $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Ví dụ 2.12.

a) Có 10 cuốn sách toán khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 cuốn?

Số cách chọn là tổ hợp chập 4 của 10 phần tử $C_4^{10} = 210$.

b) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà các chữ số được xếp thứ tự giảm dần?

Số cần tìm có dạng $abcd$ với $a > b > c > d$. Dễ thấy với bất kì bộ 4 số khác nhau ta xếp được duy nhất 1 dãy giảm dần. Vậy Số cách xếp chính là tổ hợp chập 4 của 10 phần tử $C_4^{10} = 210$ số.

Bài tập

2.9. Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách?

2.10. Xét đa giác đều có n cạnh, biết số đường chéo gấp đôi số cạnh. Tính số cạnh của đa giác đều đó?

2.11. Từ 4 chữ số 0, 1, 2, 3 lập thành các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt. Có bao nhiêu số được thành lập và tính tổng của chúng.

2.12. Tính số hình chữ nhật được tạo thành từ 4 trong 20 đỉnh của đa giác đều có 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O.

2.13. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.

2.14. Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

2.15. Từ một nhóm 30 học sinh gồm 15 học sinh khối A, 10 học sinh khối B và 5 học sinh khối C chọn ra 15 học sinh sao cho có ít nhất 5 học sinh khối A và có đúng 2 học sinh khối C. Tính số cách chọn.

Giả sử có n chim bồ câu ở trong k chuồng. Khi đó tồn tại ít nhất một chuồng chứa từ $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ bồ câu trở lên. Với $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ là giá trị trần (số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng n/k).

Ví dụ 2.13.

a) Trong 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật.

b) Trong 100 người có ít nhất 9 người cùng tháng sinh.

c) Trong 10 số tự nhiên bất kì luôn chọn được hai số có hiệu chia hết cho 9.

d) Cần bao nhiêu sinh viên để tìm được 4 người cùng giới tính? Trả lời 7 sinh viên trở lên.

e) Một lớp học cần ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất 8 sinh viên cùng thứ bậc học tập? (biết rằng có 5 thứ bậc học tập A, B, C, D, E). Đáp án: 36 sinh viên.

Bài tập

2.16. Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

2.17. Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

2.18. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

2.19. Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài).

2.20. Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Chương 3

Cấu trúc đại số

3.1. Quan hệ hai ngôi
3.1.1 Định nghĩa Quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 3.1. (Quan hệ hai ngôi) Một quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B là tập con R của tích Descartes $A \times B$.

Ví dụ 3.1. Cho $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{a, b\}$. Khi đó
$R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ là một quan hệ từ A vào B.

Định nghĩa 3.2. (Quan hệ trên một tập) Một quan hệ trên tập hợp A là một quan hệ hai ngôi từ A đến chính nó.

Ví dụ 3.2. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $R = \{(a, b) | a \text{ là ước của } b\}$. Hãy tìm R.

Trả lời $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

3.1.2 Tính chất của Quan hệ hai ngôi

Định lý 3.3. (Tính chất của quan hệ hai ngôi) Cho R là một quan hệ trên A. Ta nói

(i) R phản xạ $\Leftrightarrow \forall x \in A, xRx$.

(ii) R đối xứng $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \rightarrow yRx$.

(iii) R phản xứng $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$.

(iii) R bắc cầu $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A, xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.

Ví dụ 3.3. Trên tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$, những quan hệ sau thỏa tính chất nào?

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$.

$R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$.

$R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$.

$R_4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.

3.1.3 Biểu diễn Quan hệ hai ngôi

Cho R là một quan hệ từ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ đến $B = \{u, v, w\}$ như sau $R = \{(1, u), (1, v), (2, w), (3, w), (4, u)\}$ Khi đó R được biểu diễn bởi

	u	v	w
1	1	1	0
2	0	0	1
3	0	0	1
4	1	0	0

Định nghĩa 3.4. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Ma trận biểu diễn của R là ma trận nhị phân $M(R)$ cấp $m \times n$ xác định bởi

$$M(R)_{(i,j)} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 \text{ nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Bài tập: Cho R là quan hệ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Cho biết R có tính chất nào?

3.1. $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$.
3.2. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
3.3. $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
3.4. $R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$.

Bài tập: Cho R là quan hệ trên S. Hãy viết tập hợp R, ma trận biểu diễn và xét tính chất R nếu

3.5. $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S, xRy \Leftrightarrow 0 \leq y - x \leq 1$.
3.6. $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S, xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$.
3.7. $S = \{0, 1, 2\}, \forall x, y \in S, xRy \Leftrightarrow 3x + y \leq 5$.
3.8. $S = \{0, 1, 2, 3\}, \forall x, y \in S, xRy \Leftrightarrow x + y \geq 4$.

3.2.1 Định nghĩa Quan hệ tương đương

Định nghĩa 3.5. (Quan hệ tương đương) Quan hệ tương đương R trên tập A là một quan hệ thỏa mãn tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 3.4. Cho R là quan hệ trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi

$$xRy \Leftrightarrow x + y \text{ chẵn}$$

Khi đó R là quan hệ tương đương.

Ví dụ 3.5. Cho R là quan hệ trên $\mathbb{N}$ xác định bởi

$$aRb \Leftrightarrow a \text{ là ước của } b$$

Khi đó R không là quan hệ tương đương.

3.2.2 Lớp tương đương

Định nghĩa 3.6. (Lớp tương đương) Cho R là quan hệ tương đương trên A và x thuộc A. Khi đó, tập hợp tất cả các phần tử trong A có quan hệ với x được gọi là lớp tương đương của x, kí hiệu bởi $\overline{x}$ hoặc $[x]$. Nghĩa là

$$\overline{x} = \{a \in A |\ aRx\}$$

Ví dụ 3.6. Trên tập $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$ xét quan hệ hai ngôi R sau

$$xRy \Leftrightarrow x + 3y \text{ chẵn}$$

Dễ thấy R là quan hệ tương đương.
Các lớp tương đương là
$\overline{1} = \{-1, 1, 3, 5\}$.
$\overline{2} = \{-2, 2, 4\}$.
$\overline{4} = \{-2, 2, 4\}$.

3.2.2 Lớp tương đương

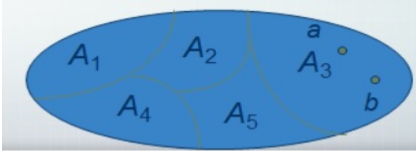
Định lý 3.7. (Tính chất lớp tương đương) Cho R là quan hệ tương đương trên A. Khi đó:

(i) $\forall x \in A, x \in \overline{x}$.

(ii) $\forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

(iii) $\forall x, y \in A$ nếu $\overline{x} \neq \overline{y}$ thì $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$

Theo phát biểu trên, nếu R là một quan hệ tương đương trên A thì ta có thể phân tích A thành hợp của các lớp tương đương rời nhau. Sự phân tích đó được gọi là sự phân hoạch tập hợp A thành các lớp tương đương.



Bài tập: Viết các lớp tương đương của S với quan hệ R sau.

3.9. $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$,
$\forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow x^2 + 5x = y^2 + 5y$.

3.10. $S = \{-4, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}, 2, 3\}$,
$\forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

3.11. $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 21, 24, 25, 35, 42, 48\}$,
$\forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2^k y$.

3.12. $S = P(E)$ với $E = \{1, 2, 3\}$ và $A = \{1, 2\}$
$\forall X, Y \in S : XRY \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.

Bài tập: Viết các lớp tương đương của $\mathbb{R}$ với quan hệ R sau.

3.13. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2 + 3x = y^2 + 3y$.

3.14. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2(x - y)$.

3.15. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2y + 7x = xy^2 + 7y$.

3.16. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow 4x + xy^2 = x^2y + 4y$.

3.2.3 Quan hệ đồng dư trên $\mathbb{Z}$

Định nghĩa 3.8. (Quan hệ đồng dư) Cho n là một số nguyên dương và quan hệ R trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n}$$

Khi đó R là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Z}$. Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư theo modulo n. Nghĩa là với mỗi $x \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\overline{x} = \{x + kn | k \in \mathbb{Z}\} = \{x, x \pm n, x \pm 2n, x \pm 3n, ...\}$$

Ta đặt $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, .., \overline{n-1}\}$.

Định nghĩa 3.9. Trên $\mathbb{Z}_n$ ta định nghĩa các phép toán $+, -, \cdot$ như sau

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$
- $\overline{x} - \overline{y} = \overline{x-y}$
- $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$

3.2.3 Quan hệ đồng dư trên $\mathbb{Z}$

Định nghĩa 3.10. (Phần tử khả nghịch) Phần tử $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại $\overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ sao cho $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{1}$.
Khi đó $\overline{y}$ được gọi là nghịch đảo của $\overline{x}$, ký hiệu $\overline{y} = \overline{x}^{-1}$.

Kiểm tra tính khả nghịch và tìm nghịch đảo của $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$.
Gọi $d = (x, n)$
Nếu $d = 1$ thì tìm p, q sao cho $1 = xp + nq$. Khi đó $\overline{x}^{-1} = \overline{p}$.
Nếu $d > 1$ thì $\overline{x}$ không khả nghịch.

Ví dụ 3.7. Cho $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.
a) $\overline{0}$ không có phần tử khả nghịch.
b) $\overline{1}$ có phần tử khả nghịch là $\overline{1}$, $\overline{4}$ có phần tử khả nghịch là $\overline{4}$.
c) $\overline{2}$ có phần tử khả nghịch là $\overline{3}$, $\overline{3}$ có phần tử khả nghịch là $\overline{2}$.

Bài tập: Tìm $\mathbb{Z}_n$ và viết các phần tử sau dưới dạng chuẩn

3.17. Z_{10} với $\overline{23}, \overline{-23}, \overline{47}, \overline{92}$.

3.18. Z_{13} với $\overline{23}, \overline{-23}, \overline{35}, \overline{-81}$.

3.19. Z_{25} với $\overline{23}, \overline{-23}, \overline{235}, \overline{1128}$.

3.20. Z_{60} với $\overline{23}, \overline{-23}, \overline{-279}, \overline{2017}$.

Bài tập: Thực hiện các phép tính sau trong Z_{28}.

3.21. $\overline{52} + \overline{23}, \overline{13} + \overline{44}$.

3.22. $\overline{31} - \overline{53}, \overline{64} - \overline{21}$.

3.23. $\overline{25} \cdot \overline{37}, \overline{45} \cdot \overline{30}$.

3.24. $\overline{46} \cdot \overline{38}^{-1}, \overline{53}^{-1} \cdot \overline{62}$.

3.3. Quan hệ thứ tự
3.3.1 Định nghĩa Quan hệ thứ tự

Định nghĩa 3.11. (Quan hệ thứ tự) Quan hệ thứ tự R trên tập A là một quan hệ thỏa mãn tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Khi đó (A, R) được gọi là một tập thứ tự.

Ví dụ 3.8.

a) Tập $(\mathbb{N}, \leq)$ là tập thứ tự. Các phần tử được xếp theo thứ tự $1, 2, 3, 4, ...$.

b) Tập $(N^*, |)$ là tập thứ tự. Các phần tử được xếp theo thứ tự.

$1, 2, 4, 8, 16, ...$

$1, 3, 9, 27, ...$

$2, 6, 12, ...$ và $3, 6, 12, ...$

Trong tập thứ tự, không phải bất kì hai phần tử nào cũng phải có thứ tự với nhau. Nếu tất cả các phần tử đều có thứ tự với nhau, ta gọi đó là tập thứ tự toàn phần.

3.3.2 Phần tử trội

Định nghĩa 3.12. (Phần tử trội) Cho $(A, \preceq)$ là một tập thứ tự và $x, y \in A$. Khi đó.

(i) Nếu $x \preceq y$ thì ta nói y là trội của x hoặc x được trội bởi y.

(ii) Nếu $x \prec y$ thì ta nói y là trội thật sự của x.

(iii) Nếu $x \prec y$ và không tồn tại $z \in A$ sao cho $x \prec z \prec y$ thì ta nói y là trội trực tiếp của x.

(iv) Phần tử tối đại là phần tử không có trội. Phần tử tối tiểu là phần tử không là trội của phần tử khác.

(v) Phần tử lớn nhất là trội của mọi pt, Phần tử nhỏ nhất bị trội bởi mọi pt.

Ví dụ 3.9. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Khi đó

a) Với $(A, \leq)$, ta có các trội của 2 là $2, 3, 4, 5, 6$.

Trội trực tiếp của 2 là 3. Tối đại là 6, tối tiểu là 1.

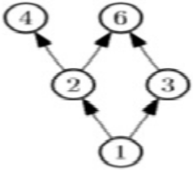
b) Với $(A, |)$, ta có các trội của 2 là $2, 4, 6, 8$

Trội trực tiếp của 2 là 4 và 6. Tối đại là $6, 8$, tối tiểu là 2.

3.3.3 Biểu đồ Hasse

Định nghĩa 3.13. (Biểu đồ Hasse) Biểu đồ Hasse của một tập thứ tự $(A, \preceq)$ là một đồ thị có hướng với
(i) Các đỉnh tương ứng với các phần tử của A.
(ii) Các cạnh có hướng nối từ x đến y nếu y là trội trực tiếp của x

Ví dụ 3.10. Ta có biểu đồ Hasse cho tập thứ tự ({ 1,2,3,4,6 },|) là



Bài tập: Kiểm tra R là một quan hệ thứ tự trên S. Vẽ sơ đồ Hasse cho (S, R).

3.25. $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20\}, \forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow x|y$.

3.26. $S = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50\}, \forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow x \vdots y$.

3.27. $S = \{96, 768, 6, 48, 384, 3, 24\}, \forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : y = 2^k x$.

3.28. $S = \{2, 3, ..., 11, 12\}, \forall x, y \in S : xRy \Leftrightarrow [(x$ lẻ và y chẵn) hay $(x - y$ chẵn và $x \leq y)]$.

Bài tập: Vẽ sơ đồ Hasse cho $(S, \prec)$ sau

3.29. $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ với $d \prec a, b \prec e, g \prec e, h \prec f, i \prec e$ và $h \prec d$.

3.30. $S = \{1, 2, 4, 5, 12, 15, 20\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

3.31. $S = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 12, 16\}$ với $\prec$ là quan hệ $\vdots$.

3.32. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ với $\prec$ là quan hệ $|$.

Định nghĩa 3.14. (Cận trên và cận dưới)

Cho B là tập con của $(A, \prec)$. Khi đó:

Phần tử c được gọi là chặn trên của B nếu $\forall b \in B, b \prec c$. Phần tử nhỏ nhất trong các chặn trên được gọi là chặn trên bé nhất và kí hiệu $\sup B$.

Phần tử d được gọi là chặn dưới của B nếu $\forall b \in B, d \prec b$. Phần tử lớn nhất trong các chặn dưới được gọi là chặn dưới lớn nhất và kí hiệu $\inf B$.

Định nghĩa 3.15. (Dàn)

Tập được sắp $(A, \prec)$ được gọi là dàn nếu mỗi cặp phần tử bất kỳ $x, y \in A$ của nó đều có $\sup\{x, y\}$ và $\inf\{x, y\}$.

Trong dàn, ta kí hiệu $x \vee y = \sup\{x, y\}$ và $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

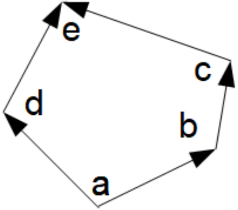
Trong dàn, hai phép toán $\vee$ và $\wedge$ thỏa mãn tính lũy đẳng, giao hoán, kết hợp và hấp thụ $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.

Định nghĩa 3.16. (Dàn phân bố)
Dàn được gọi là dàn phân bố nếu nó thỏa mãn tính phân bố.

Cho $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ thì $a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$ và $a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ chính là phần tử lớn nhất (kí hiệu 1) và bé nhất (kí hiệu 0) của A.
Phần tử $\bar{x} \in A$ là phần tử bù của $x \in A$ nếu: $x \vee \bar{x} = 1$ và $x \wedge \bar{x} = 0$.

Định nghĩa 3.17. (Dàn bù)
Dàn được gọi là dàn phân bố nếu mọi phần tử đều có phần tử bù.

Ví dụ 3.11. Dàn $A = \{a, b, c, d, e\}$ như sau là một dàn bù.



Định nghĩa 3.18. (Dàn $\mathcal{U}_n$)

Dàn $\mathcal{U}_n$ là tập các ước số chung của n được trang bị

Thứ tự: $a \prec b \Leftrightarrow a$ là ước số của b.

Cận trên nhỏ nhất $\sup(a, b) =$ bội chung nhỏ nhất của a và b.

Cận dưới lớn nhất $\inf(a, b) =$ ước chung lớn nhất của a và b.

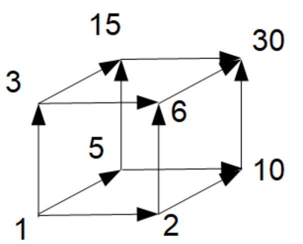
Định lý 3.19. (Tính chất của dàn $\mathcal{U}_n$)

Dàn $\mathcal{U}_n$ là dàn bù khi và chỉ khi n không có thừa số chính phương.

Dàn $\mathcal{U}_n$ có phần tử bé nhất là 1 và phần tử lớn nhất là n.

Dàn $\mathcal{U}_n$ là dàn phân bố.

Ví dụ 3.12. Dàn $\mathcal{U}_{30}$.



Định nghĩa 3.20. (Dàn $\mathcal{P}(E)$)

Dàn $\mathcal{P}(E)$ là tập hợp các tập hợp con của E được trạng bị

- Thứ tự: $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$.
- Cận trên nhỏ nhất $\sup(A, B) = A \cup B$.
- Cận dưới lớn nhất $\inf(A, B) = A \cap B$.

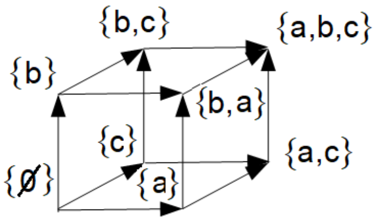
Định lý 3.21. (Tính chất của dàn $\mathcal{P}(E)$)

Dàn $\mathcal{P}(E)$ là dàn bù với $\bar{A} = E \setminus A$.

Dàn $\mathcal{P}(E)$ có phần tử bé nhất là $\emptyset$ và phần tử lớn nhất là E.

Dàn $\mathcal{P}(E)$ là dàn phân bố.

Ví dụ 3.13. Dàn $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$.



Định nghĩa 3.22. (Đại số Boole)

Một đại số Boole là tập hợp A cùng phép toán hai ngôi $\vee$ và $\wedge$ thỏa mãn tính lũy đẳng, giao hoán, kếp hợp, hấp thụ, phân bố, trung hòa và phần tử bù.

Trong đại số Boole A, ta định nghĩa quan hệ

$$x \prec y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Khi đó $(A, \prec)$ là một dàn bù phân bố có thứ tự. Hơn nữa

$$\sup(x, y) = x \vee y \text{ và } \inf(x, y) = x \wedge y.$$

Như vậy ta có thể nói Đại số Boole là một dàn bù phân bố.

Định nghĩa 3.23. (Đẳng cấu Boole)

Một đẳng cấu giữa hai đại số Boole A và B là một song ánh $\varphi : A \leftrightarrow B$ sao cho với mọi $x, y \in A$ ta có

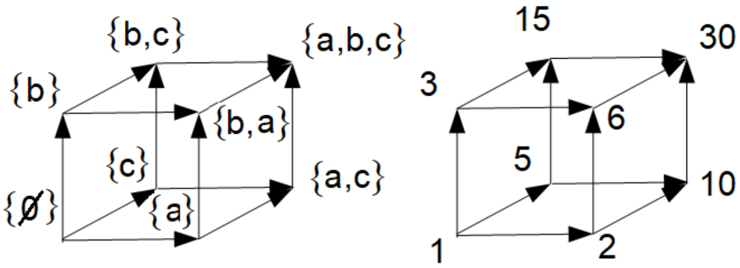
$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \text{ và } \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y).$$

3.4.1 Đại số Boole

Định lý 3.24. (Stone)

Một đại số Boole hữu hạn $\mathcal{A}$ luôn đẳng cấu với $\mathcal{P}(E)$ trong đó E là một tập hữu hạn nào đó.

Số phần tử của một đại số Boole hữu hạn là một lũy thừa của 2.
Hai đại số Boole hữu hạn có cùng số phần tử thì đẳng cấu với nhau.



Định nghĩa 3.25. (Hàm Boole)

Một hàm Boole n biến là một ánh xạ $B^n \to B$ trong đó $B = \{0, 1\}$. Tập hợp các hàm Boole n biến được kí hiệu bởi $\mathcal{F}_n$.

Hàm Boole còn được gọi là hàm logic hay hàm nhị phân (do chỉ nhận giá trị 1 hoặc 0.

Các biến xuất hiện trong hàm boole được gọi là biến Boole.

Các biến Boole nhận giá trị 1 hoặc 0 nên tương ứng với chân trị mệnh đề. Tuy nhiên chân trị mệnh đề chỉ là một trường hợp của biến boole.

Ví dụ 3.14. Các hàm sau là các hàm boole

a) $F_1(P) = \neg P$.

b) $F_2(P, Q) = (P \to Q) \to (\neg P \bigoplus R)$.

c) $F_3(P, Q, R) = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$.

3.4.2 Hàm Boole

Như đã biết, mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa ba phép tích (hội), tổng (tuyển), bù (phủ định).

Để thuận tiện cho việc khảo sát, ta thay $\vee$ bởi $\cdot$ và $\wedge$ bởi $+$ và $\neg$ bởi $\bar{\ }$.

Định lý 3.26. (Biểu diễn của hàm Boole)

Mỗi hàm Boole f đều được viết dưới dạng

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = m_1 + m_2 + ... + m_l$$

trong đó $m_1, m_2, ..., m_l$ là các từ tối tiểu trội bởi f. Các từ tối tiểu này đều có thể viết dưới dạng $m_j = b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_n$ trong đó $b_i = x_i$ hoặc $b_i = \bar{x}_i$.

Ví dụ 3.15.

a) $f(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

3.4.3 Tối ưu hóa hàm Boole

Bài toán tối ưu hóa hàm Boole là tìm biểu diễn đơn giản của hàm boole.

Phương pháp Karnaugh, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ.

Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y. Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông. Các ô vuông được xếp kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

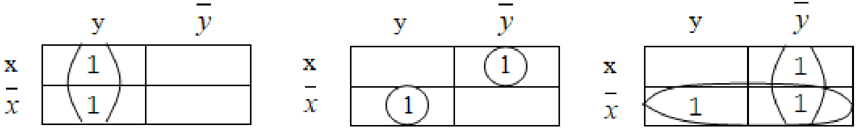
Hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1 vào ô tương ứng.

3.4.3 Tối ưu hóa hàm Boole

Ví dụ 3.16. Sử dụng PP Karnaugh để rút gọn các biểu thức sau:

a) $xy + \bar{x}y$. b) $x\bar{y} + \bar{x}y$. c) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$.

Giải: Ta ghi số 1 vào ô vuông khi hội sơ cấp được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong khai triển tổng các tích. Ba bản đồ Karnaugh được cho trên hình sau



Việc nhóm các hội sơ cấp được chỉ ra trong hình trên bằng cách sử dụng bản đồ Karnaugh cho các khai triển đó. Khai triển cực tiểu của tổng các tích này tương ứng là:

a) y. b) $x\bar{y} + \bar{x}y$. c) $\bar{x} + \bar{y}$.

Bản đồ Karnaugh ba biến là một hình chữ nhật tám ô.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

Ví dụ 3.17. Rút gọn các biểu thức $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.
Giải: bản đồ Karnaugh được thực hiện như sau

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

Khai triển cực tiểu là $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$.

3.4.4 Tối ưu hóa hàm Boole và mạch logic

Bản đồ Karnaugh bốn biến là một hình vuông mười sáu ô.

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx	$wxyz$	$wxy\bar{z}$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$
$w\bar{x}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{w}x$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$

Bản đồ Karnaugh sáu biến có bao nhiêu ô?

Bài tập: Tìm biểu thức cực tiểu của các biểu thức sau

3.33. $xy + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}$

3.34. $\bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + xy$

3.35. $xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z$

3.36. $\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

Bài tập: Tìm biểu thức cực tiểu của các biểu thức sau

3.37. $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

3.38. $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

3.39. $xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$

3.40. $xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w}$

Phương pháp Quine-McCluskey dùng cho số biến lớn:

Bước 1: Biểu diễn mỗi hội sơ cấp bằng dãy nhị phân (1 cho x_i, 0 cho $\bar{x}_i$. Sắp xếp chúng theo nhóm có tổng DNP bằng nhau. Cho $k = 1$.

Bước 2: So sánh từng hội sơ cấp trong hai nhóm gần kề nhau. Nếu 2^k hội sơ cấp chỉ lệch 1 số nhị phân thì ghi nhận lại. Tiếp tục sắp xếp các kết quả tìm được thành nhóm có tổng DNP bằng nhau.

Bước 3: Cho $k = k + 1$ và lặp lại Bước 2.

Ví dụ 3.18. Cực tiểu hóa biểu thức $xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Bước 1:

Hội sơ cấp	dãy nhị phân	Tổng DNP
xyz	111	3
$x\bar{y}z$	101	2
$\bar{x}yz$	011	2
$\bar{x}\bar{y}z$	001	1
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	0

3.4.4 Tối ưu hóa hàm Boole và mạch logic

Bước 2:

STT	Số hạng	DNP	STT	Số hạng	DNP
1	xyz	111	$(1,2)$	xz	$1-1$
2	$x\bar{y}z$	101	$(1,3)$	yz	-11
3	$\bar{x}yz$	011	$(2,4)$	$\bar{y}z$	-01
4	$\bar{x}\bar{y}z$	001	$(3,4)$	$\bar{x}z$	$0-1$
5	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	000	$(4,5)$	$\bar{x}\bar{y}$	$00-$

Bước 3:

STT	Số hạng	DNP	STT	Số hạng	DNP
$(1,2)$	xz	$1-1$	$(1,2,3,4)$	z	$--1$
$(1,3)$	yz	-11			
$(2,4)$	$\bar{y}z$	-01			
$(3,4)$	$\bar{x}z$	$0-1$			
$(4,5)$	$\bar{x}\bar{y}$	$00-$			

Kết quả khai triển cực tiểu là $z+\bar{x}\bar{y}$.

Bài tập: Tìm biểu thức cực tiểu của các biểu thức sau

3.41. $xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$

3.42. $xyz + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$

3.43. $xyz + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

3.44. $\bar{x}yz + x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Bài tập: Tìm biểu thức cực tiểu của các biểu thức sau

5) $xyzw + x\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}zw$

6) $xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w}$

7) $x\bar{y}zw + \bar{x}\bar{y}zw + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}w + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$

8) $\bar{x}yzw + x\bar{y}\bar{z}w + xyz\bar{w} + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + x\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}\bar{y}z\bar{w} + \bar{x}y\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}$

Chương 4

Lý thuyết đồ thị

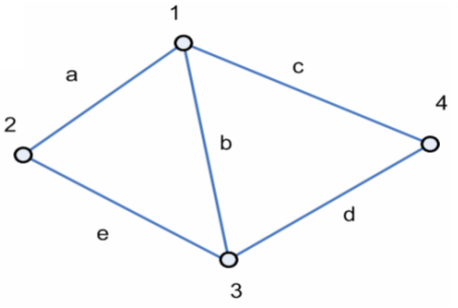
4.1. Đồ thị và tính chất
4.1.1 Định nghĩa Đồ thị

Định nghĩa 4.1. (Đồ thị) Là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Được kí hiệu bởi G và mô tả bởi

$$G = (V, E)$$

trong đó V gọi là tập các đỉnh và E gọi là tập các cạnh . Có thể coi E là tập các cặp (u, v) với u và v là hai đỉnh của V

V={1, 2, 3, 4}
E={a, b, c, d, e}

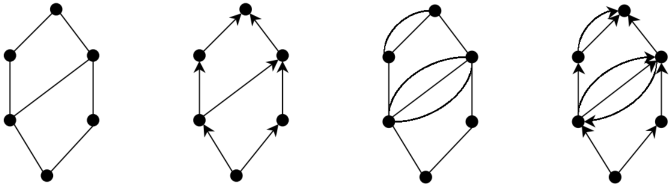


4.1.1 Định nghĩa Đồ thị

Có thể phân loại đồ thị theo đặc tính và số lượng của tập các cạnh E.

G được gọi là đơn đồ thị nếu giữa hai đỉnh u, v của V có nhiều nhất là 1 cạnh trong E nối từ u tới v. G được gọi là đa đồ thị nếu giữa hai đỉnh u, v của V có thể có nhiều hơn 1 cạnh trong E nối từ u tới v.

G được gọi là đồ thị vô hướng nếu các cạnh trong E là không định hướng. G được gọi là đồ thị có hướng nếu các cạnh trong E là có định hướng.



Vô hướng Có hướng Vô hướng Có hướng

Đơn đồ thị Đa đồ thị

4.1.2 Một số khái niệm cần biết

Đồ thị đầy đủ là đồ thị vô hướng, đơn, trong đó giữa hai đỉnh bất kỳ đều có đúng một cạnh liên kết chúng với nhau. Kí hiệu K_n

Một đồ thị được gọi là phẳng nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau ở điểm không phải là điểm mút của mỗi cạnh.

Cho hai đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V', E')$.

(i) G' là đồ thị con của G nếu $V' \subset V$ và $E' \subset E$.

(ii) G' là đồ thị khung của G nếu $V' = V$ và $E' \subset E$.

Đồ thị có trọng số là đồ thị mà các cạnh (hoặc các đỉnh) có môt giá trị. Giá trị đó có thể mô tả độ dài, khối lượng của cạnh cũng có thể mô tả những yếu tố quan hệ giữa hai đỉnh kề.

4.1.2 Một số khái niệm cần biết

Đối với đồ thị vô hướng $G = (V, E)$.

Xét một cạnh $e \in E$, nếu $e = (u, v)$ thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau và cạnh e này liên thuộc với đỉnh u và đỉnh v.

Với một đỉnh v trong đồ thị, ta định nghĩa bậc của v, ký hiệu $deg(v)$ là số cạnh liên thuộc với v. Dễ thấy rằng trên đơn đồ thị thì số cạnh liên thuộc với v cũng là số đỉnh kề với v. Khi đó $\sum\limits_{v \in V} deg(v) = 2|E|$

Đối với đồ thị có hướng $G = (V, E)$.

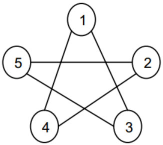
Xét một cung $e \in E$, nếu $e = (u, v)$ thì ta nói u nối tới v và v nối từ u, cung e là đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v. Đỉnh u khi đó được gọi là đỉnh đầu, đỉnh v được gọi là đỉnh cuối của cung e.

Với mỗi đỉnh v trong đồ thị có hướng, ta định nghĩa: bán bậc ra của v ký hiệu $deg^{+}(v)$ là số cung đi ra khỏi v; bán bậc vào ký hiệu $deg^{-}(v)$ là số cung đi vào v. Khi đó $\sum\limits_{v \in V} deg^{+}(v) = \sum\limits_{v \in V} deg^{-}(v) = |E|$

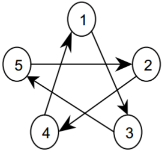
4.1.3 Biểu diễn đồ thị

Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có số đỉnh là n, Không mất tính tổng quát có thể coi các đỉnh được đánh số $1, 2, ..., n$. Khi đó ta có thể biểu diễn đồ thị bằng một ma trận vuông A_{ij} cấp n trong đó $a_{ij} = 1$ nếu $(i, j) \in E$ và $a_{ij} = 0$ nếu $(i, j) \notin E$.

	1	2	3	4	5
1	0	0	**1**	**1**	0
2	0	0	0	**1**	**1**
3	**1**	0	0	0	**1**
4	**1**	**1**	0	0	0
5	0	**1**	**1**	0	0



	1	2	3	4	5
1	0	0	**1**	0	0
2	0	0	0	**1**	0
3	0	0	0	0	**1**
4	**1**	0	0	0	0
5	0	**1**	0	0	0



Đối với đa đồ thị thì việc biểu diễn cũng tương tự trên, chỉ có điều nếu như (i, j) là cạnh thì không phải ta ghi số 1 vào vị trí a_{ij} mà là ghi số cạnh nối giữa đỉnh i và đỉnh j.

Ưu điểm của ma trận kề:

Đơn giản, trực quan, dễ cài đặt trên máy tính.

Để kiểm tra xem hai đỉnh (u, v) của đồ thị có kề nhau hay không, ta chỉ việc kiểm tra giá trị a_{uv}.

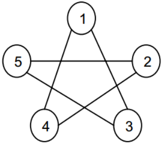
Nhược điểm của ma trận kề:

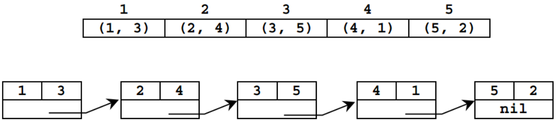
Bất kể số cạnh của đồ thị là nhiều hay ít, ma trận liền kề luôn luôn đòi hỏi n^2 ô nhớ để lưu các phần tử ma trận, điều đó gây lãng phí bộ nhớ dẫn tới việc không thể biểu diễn được đồ thị với số đỉnh lớn.

Khi đỉnh u là đỉnh cô lập (không kề với đỉnh nào) hoặc đỉnh treo (chỉ kề với 1 đỉnh) ta cũng buộc phải xét tất cả các đỉnh để tìm cạnh của nó.

4.1.3 Biểu diễn đồ thị

Ta có thể biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh. Trong cách biểu diễn này, người ta liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị trong một danh sách, mỗi phần tử của danh sách là một cặp (u, v) tương ứng với một cạnh của đồ thị.





Trong trường hợp đồ thị có hướng thì mỗi cặp (u, v) tương ứng với một cung, u là đỉnh đầu và v là đỉnh cuối của cung.

Ưu điểm của danh sách cạnh:

Trong trường hợp đồ thị thưa (có số cạnh tương đối nhỏ hơn số đỉnh), cách biểu diễn bằng danh sách cạnh sẽ tiết kiệm được không gian lưu trữ, bởi nó chỉ cần 2 lần số cạnh ô nhớ để lưu danh sách cạnh

Trong một số trường hợp, ta phải xét tất cả các cạnh của đồ thị thì cài đặt trên danh sách cạnh làm cho việc duyệt các cạnh dễ dàng hơn. (Thuật toán Kruskal chẳng hạn)

Nhược điểm của danh sách cạnh:

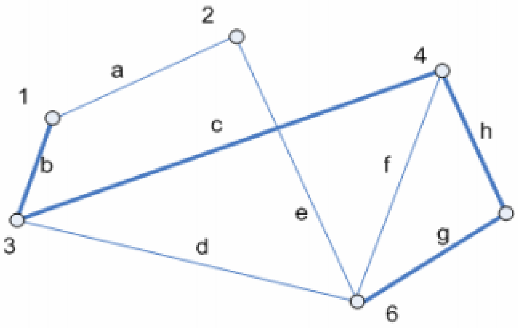
Nhược điểm cơ bản của danh sách cạnh là khi ta cần duyệt tất cả các đỉnh kề với đỉnh v nào đó của đồ thị, thì chẳng có cách nào khác là phải duyệt tất cả các cạnh, lọc ra những cạnh có chứa đỉnh v và xét đỉnh còn lại. Điều đó khá tốn thời gian trong trường hợp đồ thị dày (nhiều cạnh)

4.2. Đường đi - Chu trình
4.2.1 Đường đi - Chu trình

Định nghĩa 4.2. (Đường đi) Đường đi từ đỉnh u đến đỉnh v là một dãy các đỉnh kề nhau $\{x_n\}$ của đồ thị được xếp theo một thứ tự nào đó với $x_0 = u$ và $x_n = v$.

Đường đi cũng có thể được viết dưới dạng cách cạnh kề nhau

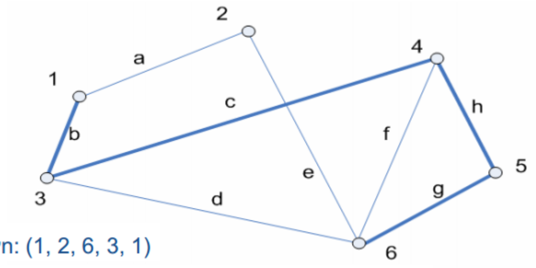
Theo đỉnh: (1, 3, 4, 5, 6)
Theo cạnh: (b, c, h, g)



4.2.1 Đường đi - Chu trình

Định nghĩa 4.3. (Chu trình) Đường đi có đỉnh đầu trùng đỉnh cuối được gọi là chu trình.

Đường đi (hay chu trình) được gọi là đơn nếu nó không đi qua một cạnh nào quá hai lần.



Chu trình đơn: (1, 2, 6, 3, 1)

Chu trình không phải chu trình đơn: (2, 6, 4, 3, 6, 2)

4.2.1 Đường đi - Chu trình

Định nghĩa 4.4. (Liên thông) Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của nó.

Một đồ thị không liên thông sẽ được phân rã thành các thành phần liên thông, và mỗi thành phần liên thông này là một đồ thị con của đồ thị ban đầu. (Đồ thị $H = (W, F)$ được gọi là đồ thị con của $G = (V, E)$ nếu $W \subset V$ và $F \subset E$).

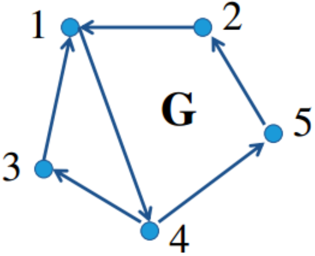
Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng các cạnh liên thuộc với nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

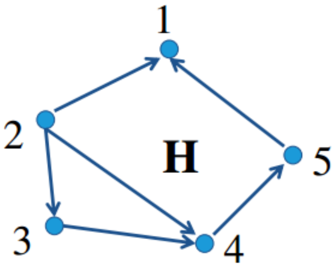
Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.

4.2.1 Đường đi - Chu trình

Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi từ 1 đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác của nó.

Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.

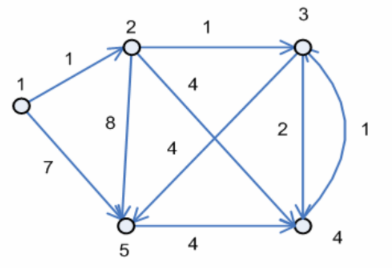




4.2.2 Thuật toán Dijkstra

Cho đơn đồ thị liên thông, có trọng số $G = (V, E)$. Tìm khoảng cách $d(u_0, v)$ từ một đỉnh u_0 cho trước đến một đỉnh v bất kỳ của G và tìm đường đi ngắn nhất từ u_0 đến v.

Ý tưởng của thuật toán Dijkstra là xác định đường đi từ u_0 đến tất cả các đỉnh trên đồ thị dựa trên ma trận kề và tìm đường đi ngắn nhất



	1	2	3	4	5
1	∞	1	∞	∞	7
2	∞	∞	1	4	8
3	∞	∞	∞	2	4
4	∞	∞	1	∞	∞
5	∞	∞	∞	4	∞

4.2.2 Thuật toán Dijkstra

Áp dụng thuật toán Dijkstra, ta thu được bảng sau

T	Đỉnh 2	Đỉnh 3	Đỉnh 4	Đỉnh 5
2, 3, 4, 5	1, 1	∞,1	∞, 1	7, 1
3, 4, 5		2, 2	5, 2	7, 1
4, 5			4, 3	6, 3
5				6, 3
$\varnothing$	1, 1	2, 2	4, 3	6, 3

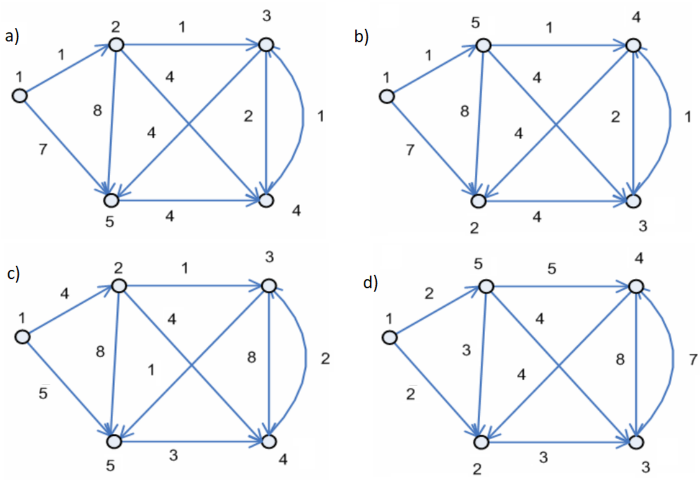
Kết luận:

Đường đi ngắn nhất từ (1) đến (2): 1 – 2.
Đường đi ngắn nhất từ (1) đến (3): 1 – 2 – 3.
Đường đi ngắn nhất từ (1) đến (4): 1 – 2 – 3 – 4.
Đường đi ngắn nhất từ (1) đến (5): 1 – 2 – 3 – 5.

4.2.2 Thuật toán Dijkstra

Bài tập:

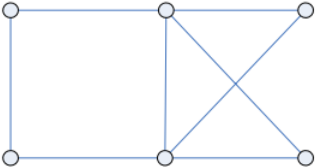
4.1. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh (1) đến các đỉnh khác.



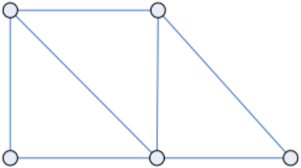
4.2.3 Chu trình Euler

Định nghĩa 4.5. (Chu trình Euler) Chu trình Euler trong G là chu trình đơn đi qua tất cả các cạnh của đồ thị. Nếu G có chu trình Euler thì G được gọi là đồ thị Euler.

Đường đi Euler trong G là đường đi đơn qua tất cả các cạnh của đồ thị. Nếu G có đường đi Euler thì G được gọi là đồ thị nửa Euler.



Đồ thị Euler



Đồ thị nửa Euler

4.2.3 Chu trình Euler

Đồ thị vô hướng, liên thông $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Đồ thị vô hướng, liên thông $G = (V, E)$ có đường đi Euler mà không có chu trình Euler khi và chỉ khi G có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

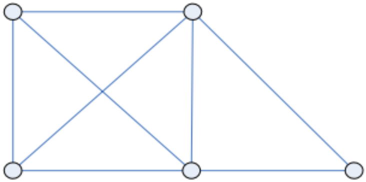
Đồ thị có hướng, liên thông yếu $G = (V, E)$ có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G có bán bậc vào bằng bán bậc ra

Đồ thị có hướng, liên thông yếu $G = (V, E)$ có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi G tồn tại duy nhất hai đỉnh sao cho: $deg^{+}(u)\breve{\ }deg^{-}(u) = deg^{+}(v) - deg^{-}(v) = 1$, và tất cả các đỉnh còn lại có bán bậc vào bằng bán bậc ra.

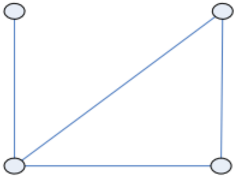
4.2.4 Chu trình Hamilton

Định nghĩa 4.6. (Chu trình Hamilton) Chu trình Hamilton là chu trình xuất phát từ một đỉnh, đi thăm tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần, cuối cùng quay trở lại đỉnh xuất phát. Đồ thị có chu trình Hamilton gọi là đồ thị Hamilton

Đường đi Hamilton là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần. Đồ thị có đường đi Hamilton gọi là đồ thị nửa Hamilton



Đồ thị Hamilton



Đồ thị nửa Hamilton

4.2.4 Chu trình Hamilton

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu mọi đỉnh v của đồ thị đều có$deg(v) \geq n/2$ thì G có chu trình Hamilton.

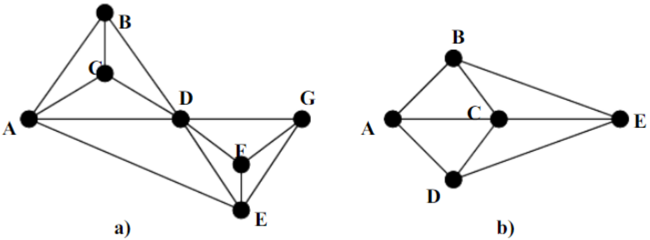
Cho đồ thị có hướng, liên thông mạnh $G = (V, E)$ và có n đỉnh. Nếu mọi đỉnh $v \in V$ đều có và thì G có chu trình Hamilton

4.3. Sắc số của đồ thị
4.3.1 Định nghĩa sắc số

Tô màu một đơn đồ thị là việc gán màu cho các đỉnh của nó sao cho hai đỉnh liền kề có màu khác nhau.

Định nghĩa 4.7. (Sắc số) Số màu hay sắc số của một đồ thị G là số màu tối thiểu cần thiết để tô màu G. Ký hiệu: s.

Mỗi đồ thị có thể có nhiều cách tô màu khác nhau.



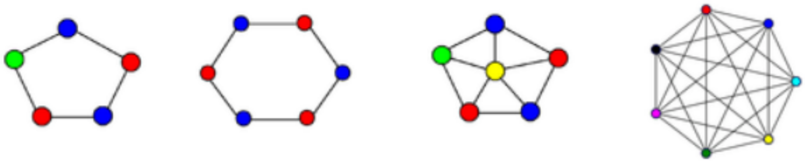
4.3.2 Sắc số của đồ thị

Định lý 4.8. Tất cả các chu trình độ dài chẵn đều có sắc số bằng 2.

Định lý 4.9. Tất cả chu trình độ dài lẻ đều có sắc số là 3.

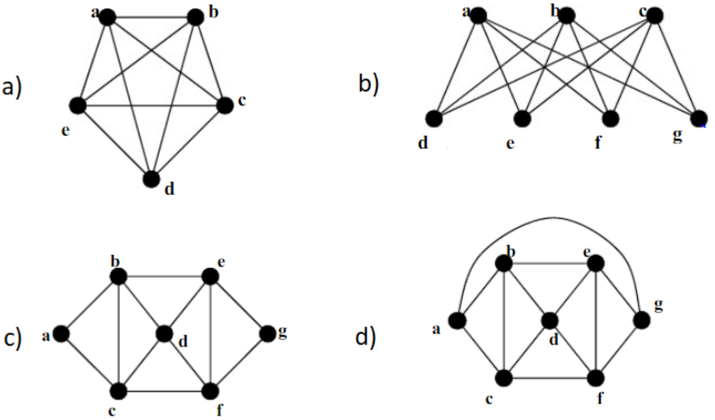
Định lý 4.10. Số màu của 1 đồ thị phẳng không lớn hơn 4.

Định lý 4.11. Mọi đơn đồ thị đầy đủ K_n có sắc số bằng n



Bài tập:

4.2. Cho biết sắc số các đồ thị sau



4.3.3 Thuật toán tô màu

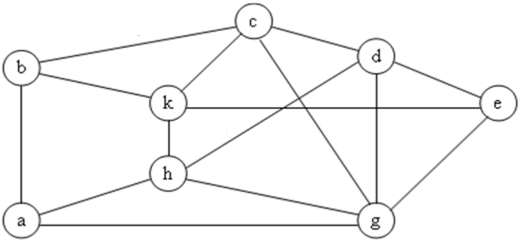
Thuật toán tô màu được trình bày như sau;

Bước 1: Liệt kê các đỉnh $u_1, u_2, ..., u_n$ theo thứ tự giảm dần của bậc: $deg(u_1) \geq deg(u_2) \geq ... \geq deg(u_n)$.

Bước 2: Tô màu 1 cho đỉnh u_1 cùng các đỉnh không kề với u_1 và không kề với đỉnh vừa mới tô màu 1.

Bước 3: Tô màu 2 cho đỉnh kế tiếp (theo thứ tự ở bước 1) như bước 2 cho đến khi tô màu hết các đỉnh của đồ thị.

Ví dụ 4.1. Tô màu đồ thị sau



4.3.4 Ứng dụng của tô màu

Bài toán tô màu có nhiều ứng dụng trong thực tế. Chẳng hạn: việc xếp lịch thi cho sinh viên, phân chia tần số phát sóng của các đài phát thanh truyền hình, bố trí các con vật trong sở thú, phân biệt vùng lãnh thổ...

4.4. Cây và ứng dụng
4.4.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 4.12. (Cây) là đồ thị vô hướng liên thông nhưng không có chu trình.

Rừng là tập hợp nhiều cây không liên thông với nhau.

Định lý 4.13. (Tính chất) Cho $T = (V, E)$ là đồ thị vô hướng n đỉnh. Các mệnh đề sau đây là tương đương

(i) T là cây (T liên thông và không chứa chu trình).

(ii) T không chứa chu trình và có $n - 1$ cạnh.

(iii) T liên thông và có $n - 1$ cạnh.

(iv) T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cầu.

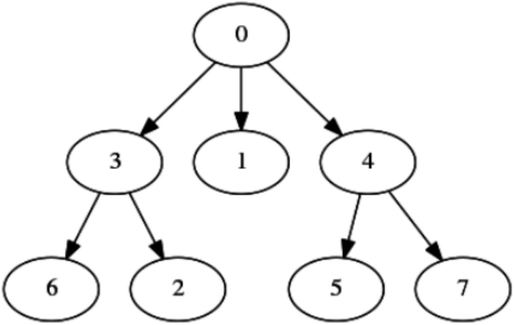
(v) Hai đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi đúng 1 đường đơn.

(vi) T không chứa chu trình nhưng hễ cứ thêm vào nó một cạnh ta thu được đúng 1 chu trình.

4.4.1 Định nghĩa và tính chất

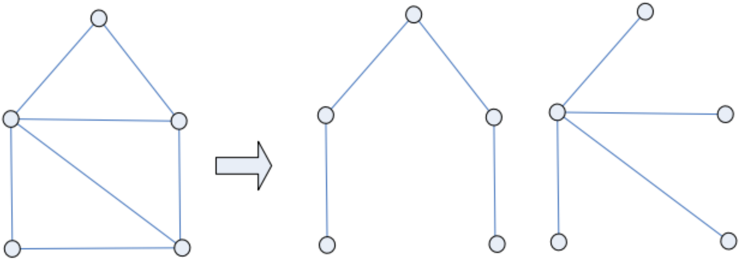
Cho *G* là một đồ thị. Đỉnh *r* được gọi là một gốc của *G* nếu từ *r* có đường đi đến đỉnh mọi đỉnh của *G*.

Định nghĩa 4.14. (Cây có hướng) Một đồ thị được gọi là một cây có hướng nếu nó là một cây và có một gốc. Khi ấy các đỉnh có nửa bật ngoài gọi là lá, các đỉnh còn lại gọi là đỉnh trong



4.4.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 4.15. Cho đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng, liên thông. Một cây $T = (V, F)$ được xây dựng từ G với $F \in E$ (T chứa tất cả các đỉnh của G và tập cạnh F là con của tập cạnh E) được gọi là cây khung của đồ thị G.



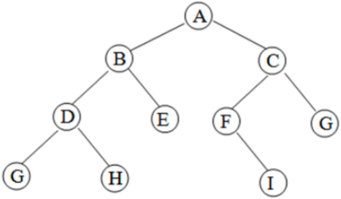
4.4.2 Thuật toán duyệt cây

Phép duyệt trước: duyệt các đỉnh theo thứ tự

- Duyệt gốc r
- Duyệt cây con T_1 rồi cây con T_2 và tiếp tục cho đến cây con T_k.

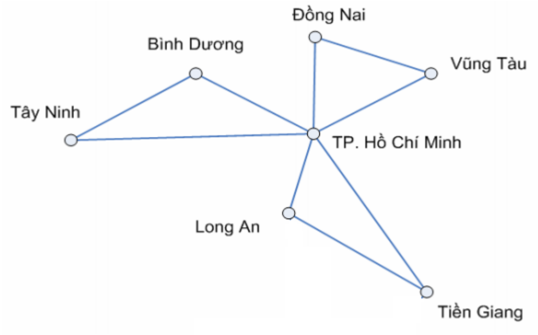
Phép duyệt sau: duyệt các đỉnh theo thứ tự

- Duyệt cây con T_1 rồi cây con T_2 và tiếp tục cho đến cây con T_k.
- Duyệt gốc r



4.4.3 Cây khung nhỏ nhất

Định nghĩa 4.16. (Cây khung nhỏ nhất) Cho $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng liên thông có trọng số. Cây khung $T = (V, F)$ là cây khung nhỏ nhất của G nếu $w(T) = \sum_{e \in F} w(e)$ nhỏ nhất.



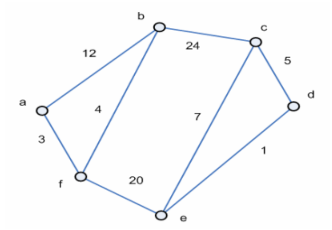
4.4.3 Cây khung nhỏ nhất

Thuật toán Kruskal: Cho đồ thị $G = (V, E)$, xây dựng $T = (V, F)$ như sau:

Bước 1: Sắp xếp các cạnh của G theo thứ tự trọng số tăng dần.

Bước 2: Bắt đầu với $F = \emptyset$ bổ xung dần các cạnh của G vào F với điều kiện không tạo nên chu trình trong T.

Bước 3: Thuật toán dừng lại khi có $n - 1$ cạnh được chọn.



(d, e)	(a, f)	(b, f)	(c, d)	(c, e)	(a, b)	(f, e)	(b, c)
1	3	4	5	7	12	20	24

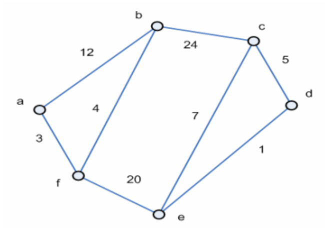
(d, e)
1
(a, f)
3
(b, f)
4
(c, d)
5
(f, e)
20

Thuật toán Prim: Cho đồ thị $G = (V, E)$, xây dựng $T = (V, F)$ như sau:

Bước 1: Bắt đầu với $V_T = s$, một đỉnh bất kỳ. Trong tất cả các cạnh có 1 đỉnh $\notin V_T$ và 1 đỉnh $\in V_T$ chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất.

Bước 2: Bổ sung cạnh đó vào F và đỉnh tương ứng vào V_T.

Bước 3: Thuật toán dừng lại khi có $n - 1$ cạnh được chọn.



(d, e)	(a, f)	(b, f)	(c, d)	(c, e)	(a, b)	(f, e)	(b, c)
1	3	4	5	7	12	20	24

(a, f)
3

(e, f)
2

(d, e)
1

(c, f)
4

(a, b)
12

Bài tập 4.3. Tìm cây khung nhỏ nhất lần lượt ứng với từng đỉnh của đồ thị sau