Практика 13. Функциональные ряды. Часть 2
Ряд Тейлора. Приближенные вычисления с использованием рядов Тейлора.

Ряд Тейлора

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<R$ (R – радиус сходимости ряда), может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной *ряд Тейлора*

$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, если в этом интервале $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

Ряд Маклорена

При $x_0=0$ получается *ряд Маклорена*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;+\infty)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$x\in[-1;1]$ при $\alpha\ge 0$;
$x\in(-1;1]$ при $-1<\alpha<0$;
$x\in(-1;1)$ при $\alpha\le -1$.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1;1)$$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1;1)$ *(Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии)*

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ (-1<x\le 1)$$

Упражнения

1. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-1$ функцию $f(x)=\ln(x+2)$ и исследовать его сходимость.

2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=2^x$: а) используя общую формулу; б) используя разложения элементарных функций.

3. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\sin^2 x$: а) используя общую формулу; б) используя разложения элементарных функций.

4. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$ по степеням x.

5. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x-1$.

6. Разложить $\dfrac{1}{x}$ в ряд по степеням $x-2$.

7. Разложить $\ln(4+3x)$ в ряд по степеням $x-2$.

8. Разложить $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ в ряд Тейлора по степеням $(z+4)$.

9. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4x+33}{(3x+4)(x-5)^2}$.

10. Вычислить $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001.

11. Вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}} dx$ с точностью до 0,0001.

----

12. Разложить в ряд Маклорена $\dfrac{z}{4+z^2}$.

13. Разложить $\dfrac{1}{z^2-6z+5}$ в ряд Тейлора по степеням $(z-3)$.

14. Вычислить $\sqrt[3]{30}$ с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$.

15. Вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до 0,0001.

16. Вычислить $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{e^{-x}-1}{x} dx$ с точностью до 0,001.