TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

Bùi Thị Thủy
Đặng Xuân Thọ

Support

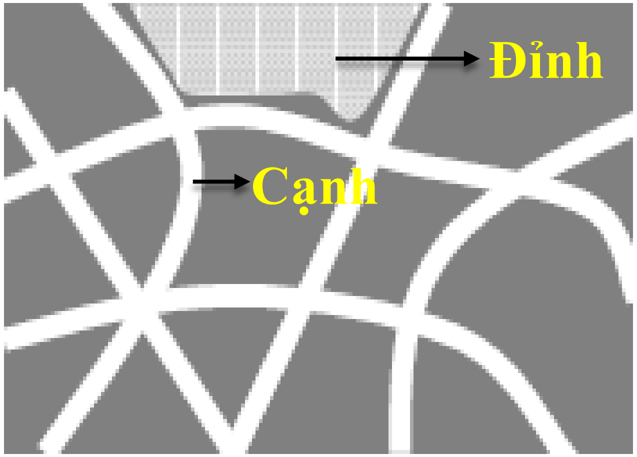
- Full name: Đặng Xuân Thọ
- Mobile: 091.2629.383
- Email: thodx@hnue.edu.vn
- Website: http://fit.hnue.edu.vn/~thodx/

Chương 7. Lý thuyết đồ thị

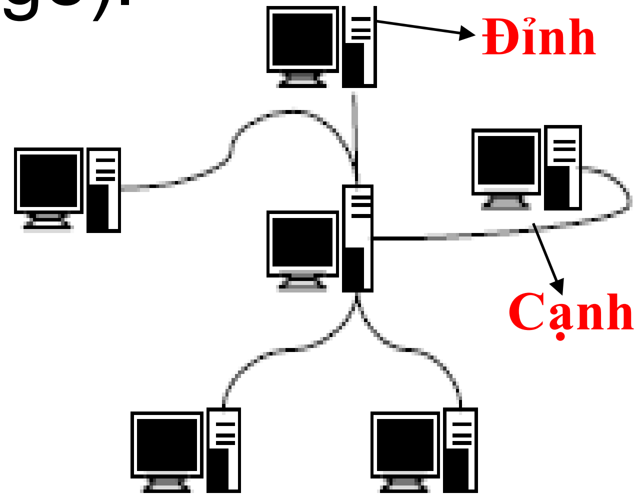
- Lý thuyết đồ thị được khởi đầu từ vài trăm năm trước (1736 với bài toán 7 cây cầu thành Konigsberg – Nga, và được gắn với các tên tuổi lớn như Euler, Gauss, Hamilton..)
- Đường một nét Euler, chu trình Hamilton
- Tìm đường đi ngắn nhất, Dijkstra
- Cây khung nhỏ nhất, Prim, Kruskal
- …

Định nghĩa đồ thị

- **Định nghĩa:** Một đồ thị được hiểu là một bộ hai tập hợp hữu hạn: tập hợp đỉnh và tập hợp cạnh nối các đỉnh này với nhau.
- **Kí hiệu:** đồ thị là G (Graph), tập đỉnh là V (vertex), tập cạnh là E (edge).



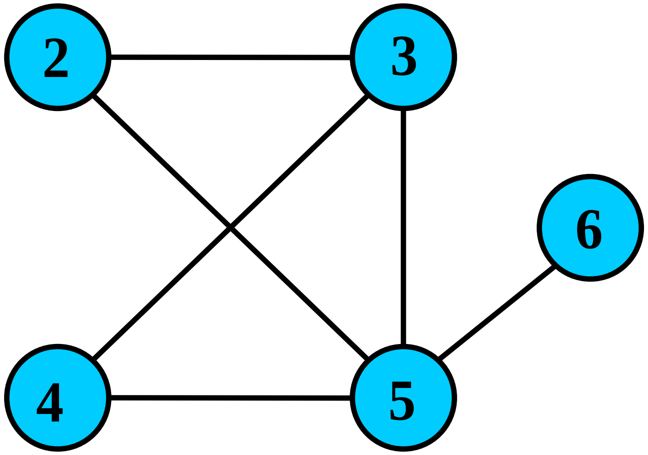
Bản đồ giao thông



Mạng máy tính

Đồ thị vô hướng

- **Ví dụ:** Cho tập V = {2, 3, 4, 5, 6}. Hãy biểu diễn quan hệ nguyên tố cùng nhau của tập trên.
- Quan hệ này được biểu diễn bằng đồ thị sau:

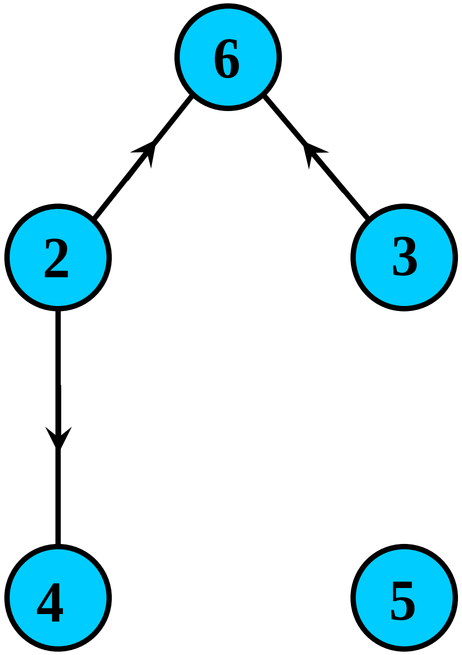


Đồ thị vô hướng

- **Đồ thị vô hướng** G = (V, E) trong đó:
  - V là tập hợp các phần tử gọi là đỉnh
  - E là tập hợp, mỗi phần tử là một cặp không thứ tự (u, v) của hai đỉnh thuộc V.
  - (u, v) được gọi là cạnh nối đỉnh u và đỉnh v.
  - Ta có $(u, v) \equiv (v, u)$

Đồ thị có hướng

- **Ví dụ:** Cho tập V = {2, 3, 4, 5, 6}. Hãy biểu diễn quan hệ aRb ⇔ a là ước của b và a ≠ b.

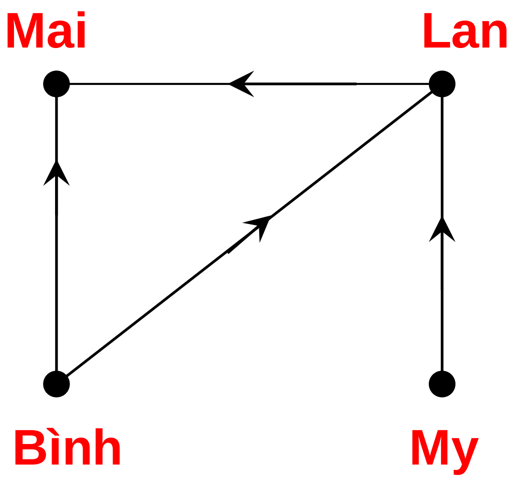


Đồ thị có hướng

- **Định nghĩa: Đồ thị có hướng**, kí hiệu G=[V,E] trong đó:
  - V là tập hợp các phần tử gọi là đỉnh
  - E là tập hợp, mỗi phần tử là một cặp *có thứ tự* [u, v] của hai đỉnh của tập V
  - [u, v] được gọi là cung nối từ u đến v.
- **Chú ý:** [u, v] $\neq$ [v, u]

Đồ thị có hướng

- **Ví dụ:** Khi nghiên cứu tính cách của nhóm người ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác.
  - Mỗi người của nhóm được biểu diễn bởi một đỉnh
  - Khi người a có ảnh hưởng lên người b thì giữa đỉnh a và b được nối bằng cạnh có hướng.

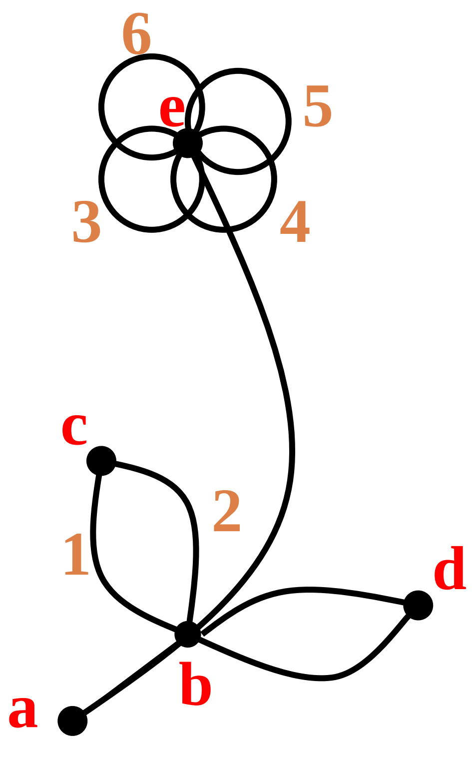


Một số thuật ngữ cơ bản

- Với cạnh e = (u, v) $\in$ E; u,v $\in$ V; khi đó:
  - e là cạnh **liên thuộc** u và v.
  - u, v được gọi là **kề nhau** hay **láng giềng** của nhau.
  - u, v gọi là hai **đầu mút** của cạnh e.
  - Nếu e = [u, v] thì u gọi là **đỉnh đầu (xuất phát)** và v gọi là **đỉnh cuối (đích)** của cung e.
  - Nếu u ≡ v thì e được gọi là **khuyên.**
  - Nếu có e’ = (u, v) thì e và e’ được gọi là **cạnh kép**.

Một số thuật ngữ cơ bản

- **Ví dụ:**
  - Cạnh 1 liên thuộc hai đỉnh b, c
  - Đỉnh b, c gọi là hai đỉnh kề
  - Các cạnh 3, 4, 5, 6 gọi là khuyên
  - Các đỉnh b và c, b và d được nối với nhau bởi các cạnh kép



Phân loại đồ thị

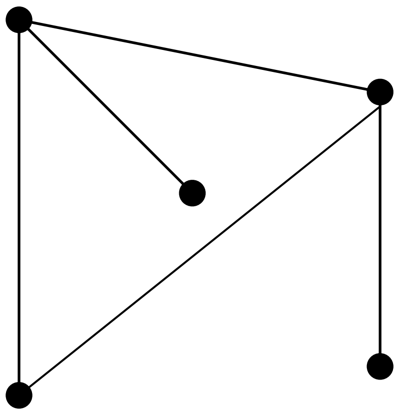
- **Phân loại theo tập đỉnh và cạnh**
  - Đồ thị hữu hạn: Khi cả V và E đều là tập hợp hữu hạn
  - Đồ thị vô hạn: Khi V hoặc E là tập hợp vô hạn
  - **Lưu ý**: chúng ta chỉ nghiên cứu đồ thị hữu hạn.
- **Phân loại theo tính chất cạnh**
  - Đồ thị vô hướng: đồ thị có tất cả các cạnh là vô hướng
  - Đồ thị có hướng: đồ thị mà tất cả các cạnh của nó là có hướng
  - Đồ thị hỗn hợp: là đồ thị có cả cạnh vô hướng và cạnh có hướng

Phân loại đồ thị

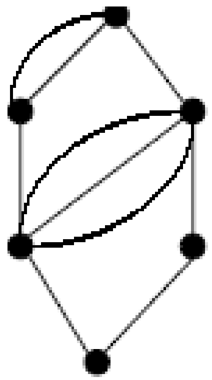
- Ngoài ra chúng ta còn có một số loại đồ thị sau:
  - Đồ thị đơn: là đồ thị không chứa khuyên và các cạnh kép
  - Đa đồ thị: là đồ thị có chứa cạnh kép và không chứa khuyên
  - Giả đồ thị: là đồ thị có chứa cả cạnh kép và khuyên
  - Đồ thị điểm: là đồ thị chỉ có một điểm và không có cạnh nào
  - Đồ thị rỗng: là đồ thị không có đỉnh và cạnh nào cả.

Phân loại đồ thị

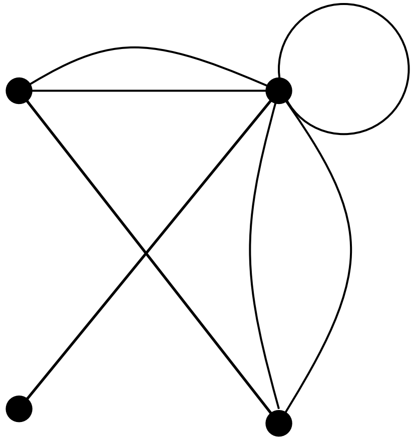
- **Ví dụ:**



Đơn đồ thị



Đa đồ thị



Giả đồ thị

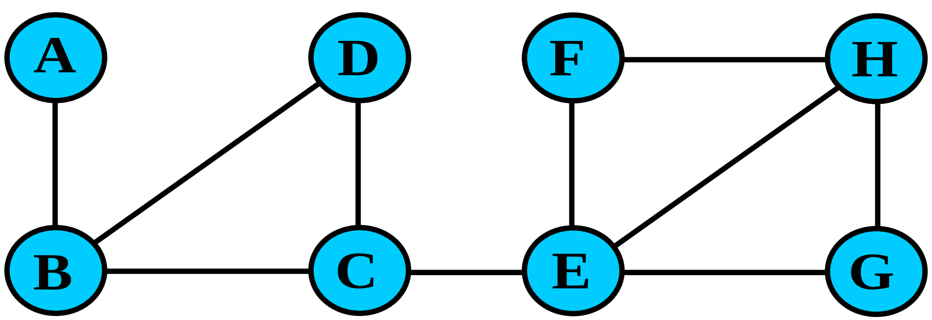
Luyện tập

1. Hãy biểu diễn quan hệ ước chung lớn nhất bằng 2 của các cặp hai số trong tập hợp V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
2. Vẽ đồ thị vô hướng G = (V, E) cho bởi: V = {A, B, C, D, E, F} và E = {(E, F), (B, F), (D, C), (D, F), (F, B), (C, F), (A, F), (E, D)}.
3. Trong trận đấu vòng tròn, đội Hổ thắng đội Giẻ cùi xanh, Chim giáo chủ và Chim vàng anh. Đội Giẻ cùi xanh thắng các đội Chim giáo chủ và Chim vàng anh. Chim giáo chủ thắng đội Chim vàng anh. Hãy mô hình hóa kết quả bằng một đồ thị có hướng?

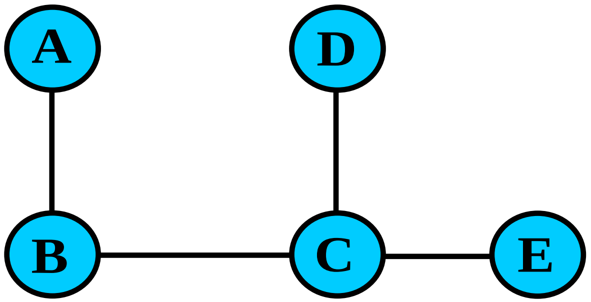
Các yếu tố cơ bản của đồ thị

Đồ thị con

- **Định nghĩa:** Cho đồ thị G = (V, E). Đồ thị G’ = (V’, E’) được gọi là đồ thị con của G nếu như V’ $\subset$ V và E’ $\subset$ E.
- **Ví dụ 1:**



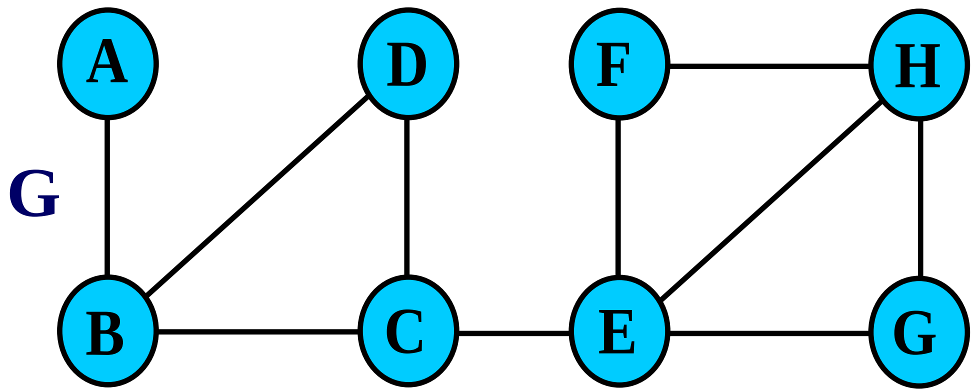
G

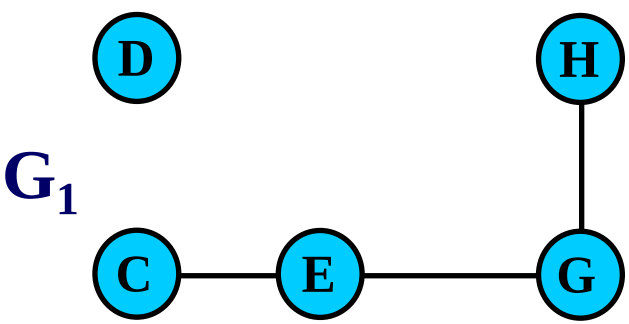


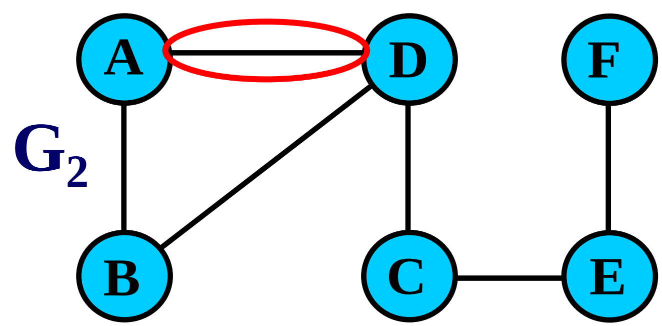
G’ là con của **G**

Đồ thị con

- **Ví dụ 2:** G_1 là đồ thị con của G; G_2 không là đồ thị con của G







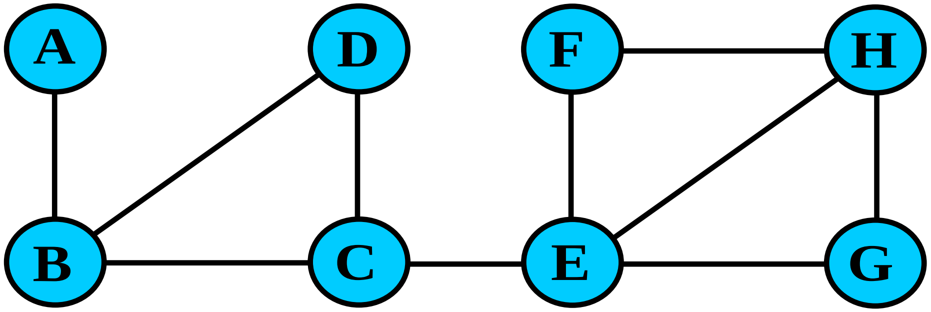
Đồ thị thành phần

- **Định nghĩa:** Cho đồ thị G=(V,E) và G'=(V', E'). Đồ thị G' là **đồ thị thành phần** của đồ thị G nếu:
  - i. $V' \subset V$
  - ii. $\forall u, v \in V'$ và $(u, v) \in E$ thì $(u, v) \in E'$
- G' còn được gọi là đồ thị sinh bởi tập V'.
- Đồ thị rỗng là đồ thị thành phần của mọi đồ thị cho trước.

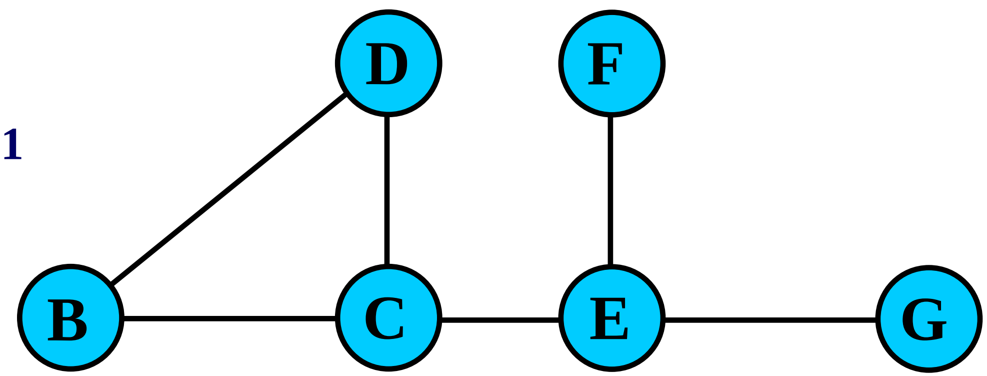
Đồ thị thành phần

- **Ví dụ 1:** G_1 là đồ thị thành phần của G

G

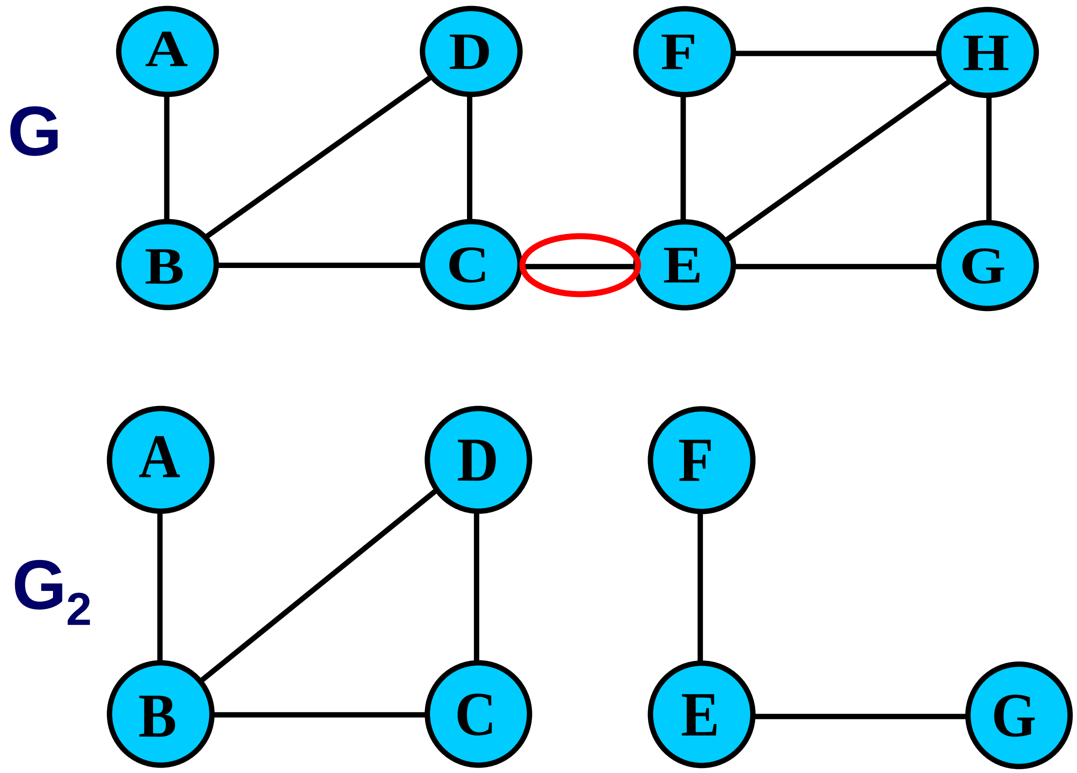


G_1



Đồ thị thành phần

- **Ví dụ 2:** G_2 là đồ thị con nhưng không là đồ thị thành phần của G



Bậc của đỉnh

- **Định nghĩa: Bậc** của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số cạnh xuất phát từ đỉnh đó (các khuyên được tính gấp đôi).
- **Kí hiệu:** bậc của đỉnh v là deg(v)
- **Đặc biệt**:
  - Đỉnh bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập
  - Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo

Bậc của đỉnh

- **Ví dụ:** Đồ thị bên có bậc các đỉnh như sau:

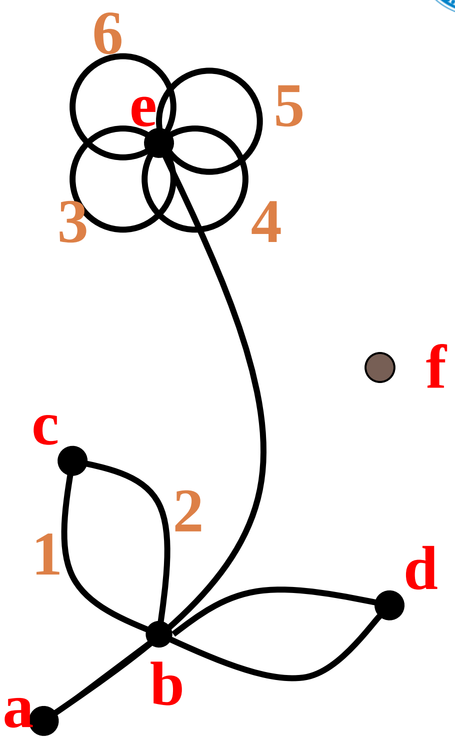
  deg(a) = 1 (a là đỉnh treo)

  deg(b) = 6

  deg(c) = deg(d) = 2

  deg(e) = 9

  deg(f) = 0 (f là đỉnh cô lập)



Bậc của đỉnh

- **Định lý (Định lý bắt tay):** Cho G = (V, E) là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó ta có:

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

- **Hệ quả**: Trong một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.
- **Ví dụ:** trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6 có số cạnh là: e = (10 x 6) : 2 = 30 (cạnh)

Đường đi và chu trình

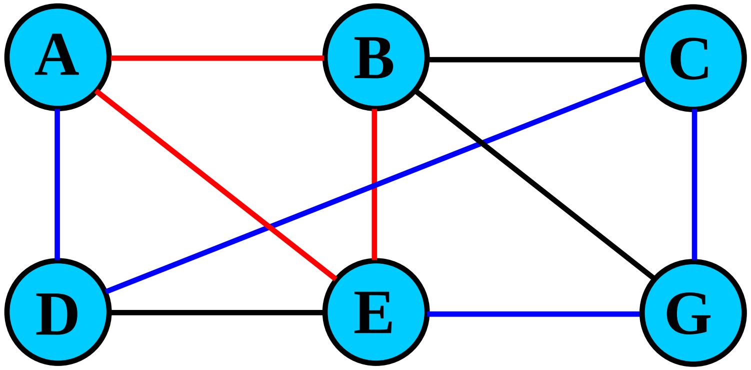
- **Định nghĩa:** Cho trước một đồ thị G = (V, E). Một dãy cạnh dạng $e_i = (A_i, A_{i+1})$ với i = 1, 2, …, m được gọi là **đường đi** nếu các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_m$ đôi một khác nhau.
- **Kí hiệu:** $H = (A_1, e_1, A_2, e_2, \ldots, e_m, A_{m+1})$
- Nếu G là đồ thị đơn, ta biểu diễn đường đi bởi các đỉnh của chúng. **Kí hiệu:** $H = (A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$
- **Đặc biệt:** một đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị gọi là đường đi Hamilton.

Đường đi và chu trình

- Một đường đi $H = (A_1, e_1, A_2, e_2, \ldots, e_m, A_{m+1})$ trong đó $A_1 = A_{m+1}$ được gọi là một chu trình.
- **Kí hiệu** chu trình là $C = (A_1, e_1, A_2, e_2, \ldots, e_m, A_1)$ hoặc $C = (A_1, A_2, \ldots, A_m, A_1)$.
- Độ dài của đường đi (chu trình) là số các cạnh của nó.

Đường đi và chu trình

- **Ví dụ**:
  - A, D, C, G, E: đường đi độ dài 4
  - D, E, C, A: không là đường đi
  - A, B, E: là chu trình có độ dài 3
- **Lưu ý**: có thể có nhiều đường đi giữa hai đỉnh của đồ thị



Đường đi và chu trình

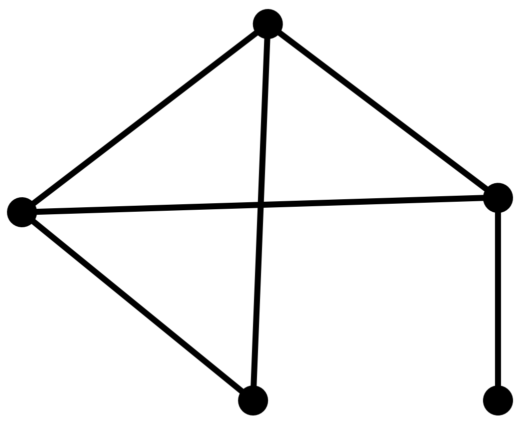
- **Nhận xét:**
  - Khuyên là một chu trình có độ dài 1
  - Nếu đồ thị có cạnh kép thì có chu trình độ dài 2
  - Một đồ thị không là đồ thị đơn thì luôn có chu trình (độ dài 1 hoặc 2)
  - Trong đồ thị đơn mỗi chu trình độ dài ít nhất là 3 và không phải lúc nào cũng tìm được một chu trình.

Liên thông

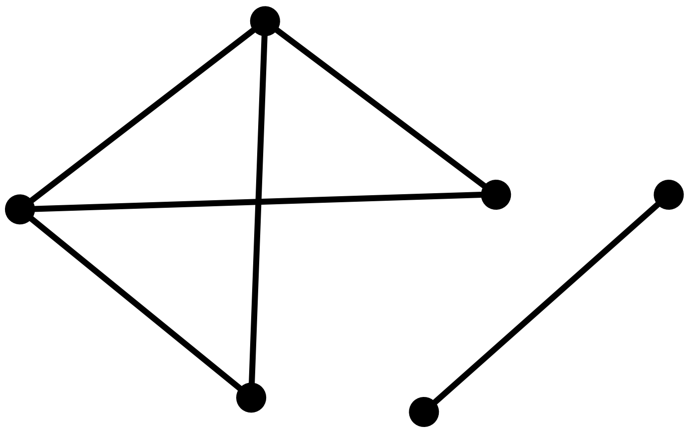
- **Khái niệm:** Hai đỉnh của một đồ thị cho trước là **liên thông** với nhau nếu có một dãy cạnh kế tiếp nối chúng với nhau trong đồ thị đã cho.
- **Định nghĩa**: Một đồ thị được gọi là liên thông nếu hai đỉnh bất kì của nó liên thông với nhau.
- Quan hệ liên thông là một quan hệ tương đương trong tập V:
  - Mỗi đỉnh a của đồ thị liên thông với chính nó
  - Nếu a liên thông với b thì b cũng liên thông với a
  - Nếu a liên thông với b, b liên thông với c thì a liên thông với c.

Liên thông

- **Ví dụ:**



G_1



G_2

G_1 liên thông

G_2 không liên thông

Liên thông

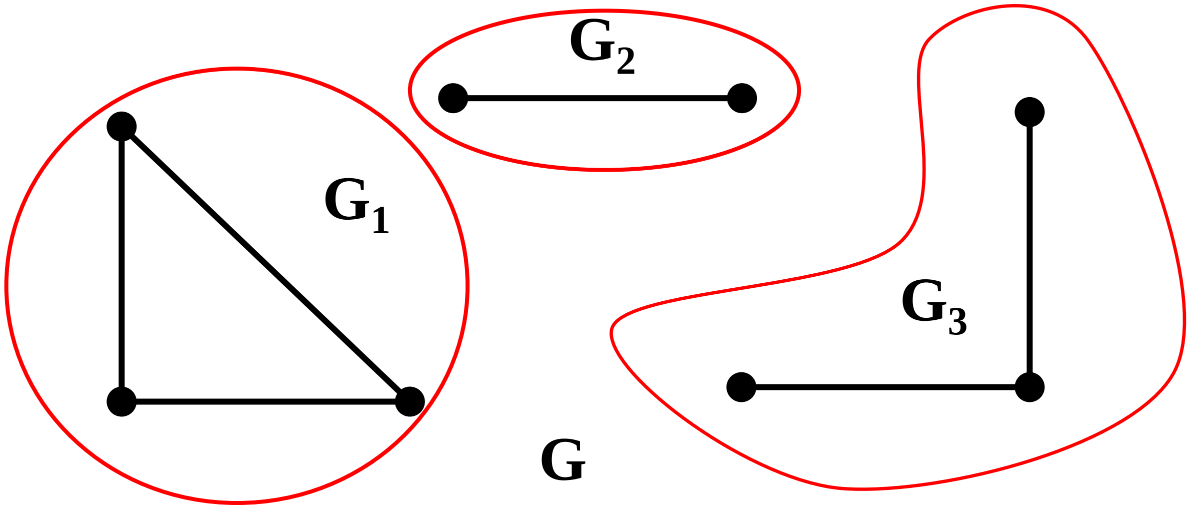
- Quan hệ liên thông chia tập đỉnh V thành các lớp có hai tính chất:
  - Các đỉnh thuộc cùng một lớp thì liên thông với nhau
  - Các đỉnh không cùng thuộc một lớp không liên thông với nhau
- Mỗi tập đỉnh con cùng với các cạnh nối các đỉnh của chúng tạo thành một đồ thị thành phần. Và được gọi là **thành phần liên thông** của đồ thị đã cho.

  ⇒ Một đồ thị không liên thông được chia thành các đồ thị thành phần liên thông.

Liên thông

Thành phần liên thông

- **Ví dụ:**



Đồ thị G và 3 thành phần liên thông G_1, G_2, G_3

Liên thông

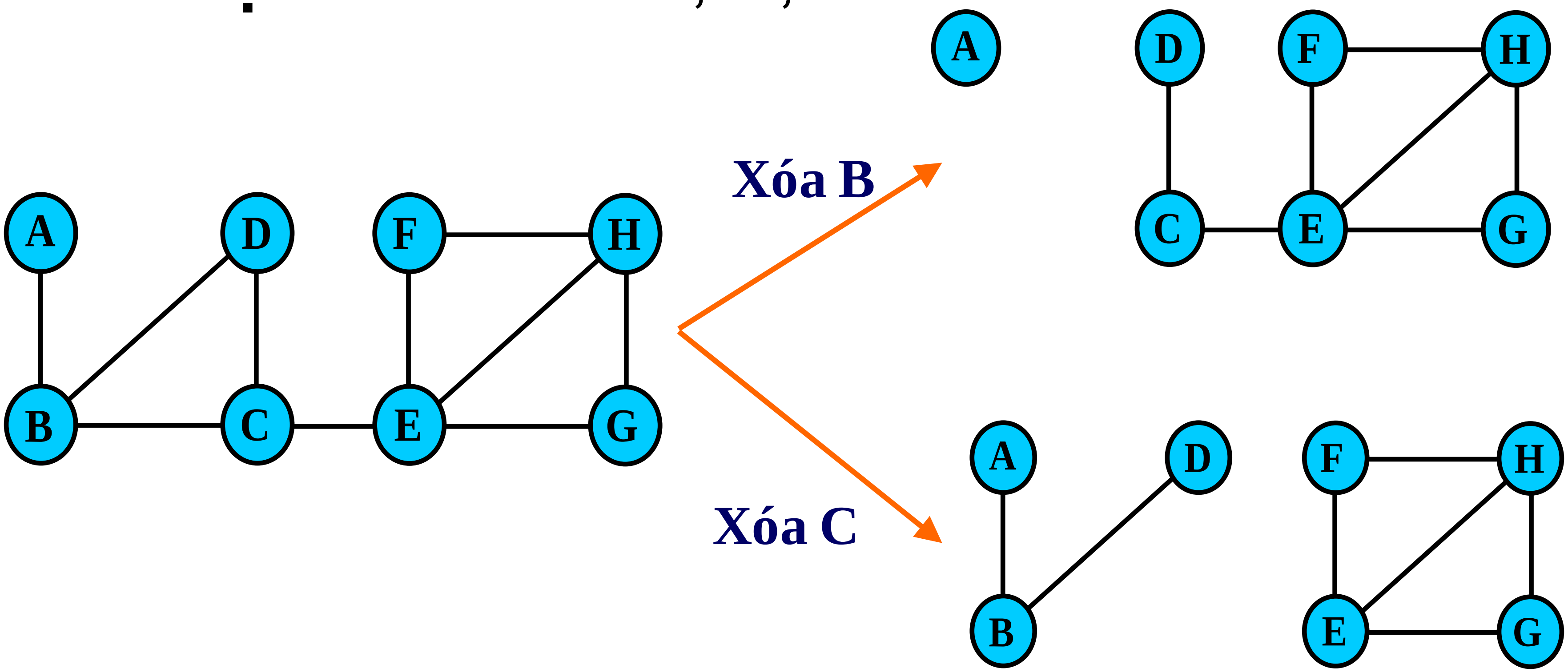
Đỉnh cắt, cạnh cắt (cạnh cầu)

- u được gọi là **đỉnh cắt (đỉnh khớp)** nếu như bỏ nó và các cạnh liên thuộc với nó đi thì sẽ làm tăng thành phần liên thông của đồ thị con.
- e được gọi là **cạnh cắt (cạnh cầu)** nếu như xóa nó đi thì sẽ làm tăng thành phần liên thông của đồ thị con.

Liên thông

Đỉnh cắt, cạnh cắt (cạnh cầu)

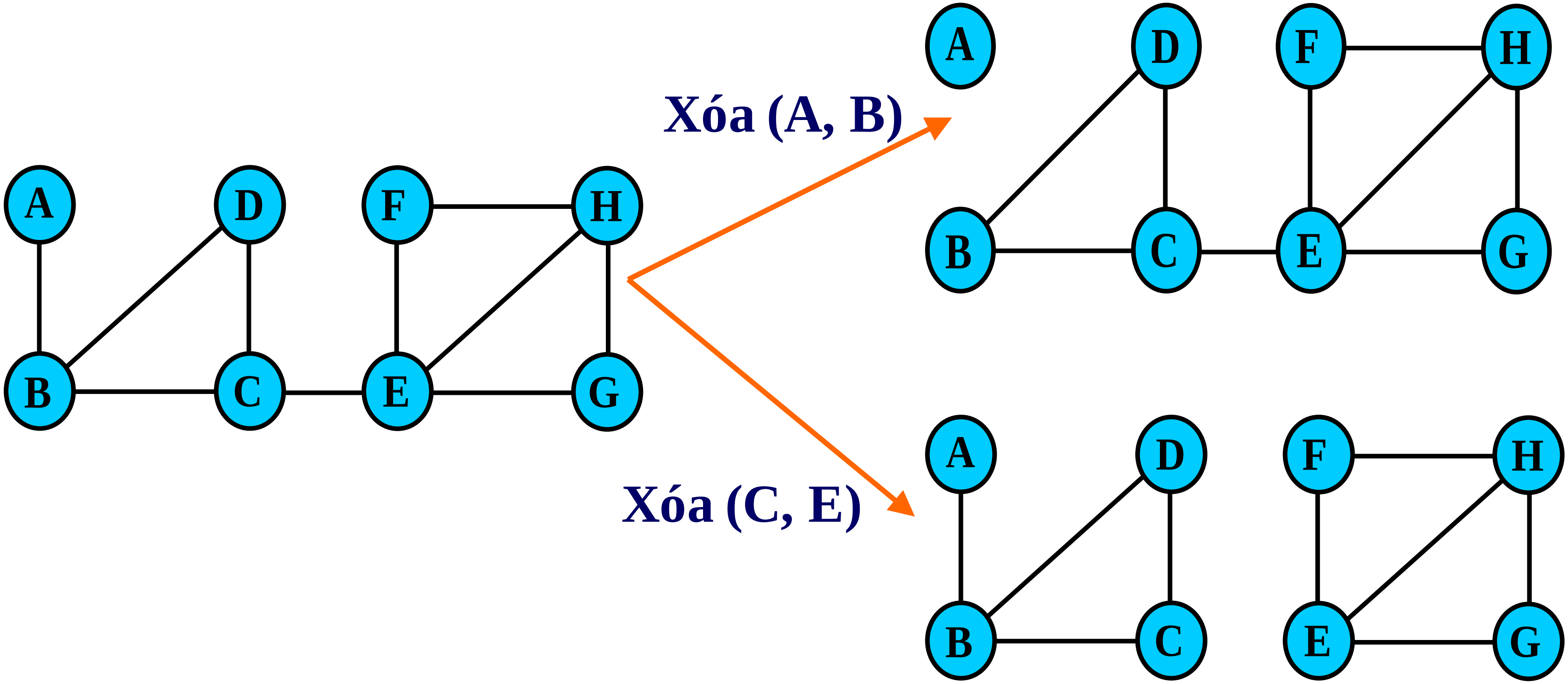
- **Ví dụ:** đỉnh cắt là B, C, E



Liên thông

Đỉnh cắt, cạnh cắt (cạnh cầu)

- **Ví dụ:** cạnh cắt là (A, B); (C, E)



Liên thông

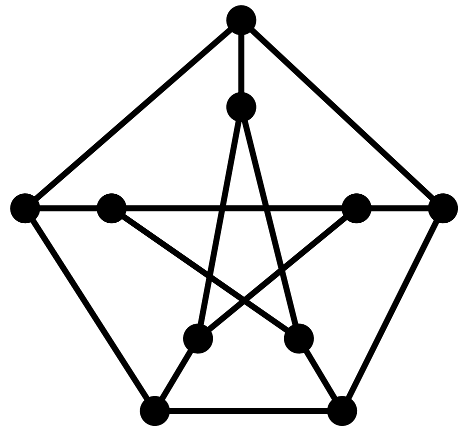
Chỉ số liên thông

- **Định nghĩa:** Cho trước đồ thị G và số k $\in$ N, k $\geq$ 2. Ta nói G là một đồ thị **k – liên thông** (đỉnh) nếu như:
  - *i.* G là một đồ thị liên thông
  - *ii.* Nếu bỏ đi một số t < k đỉnh tùy ý thì đồ thị thu được vẫn là một đồ thị liên thông.
- G là đồ thị liên thông cạnh nếu như bỏ đi ít hơn k cạnh từ đồ thị ban đầu ta vẫn thu được đồ thị liên thông.

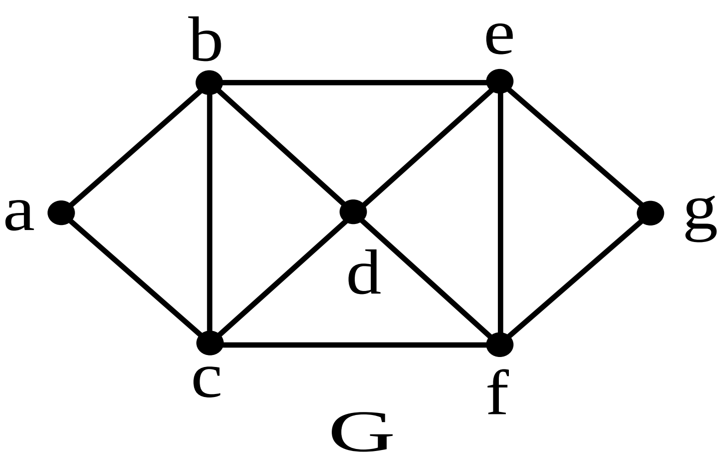
Liên thông

Chỉ số liên thông

- **Ví dụ 1:**
  Đồ thị Peterson trong hình bên là một đồ thị 3 – liên thông.

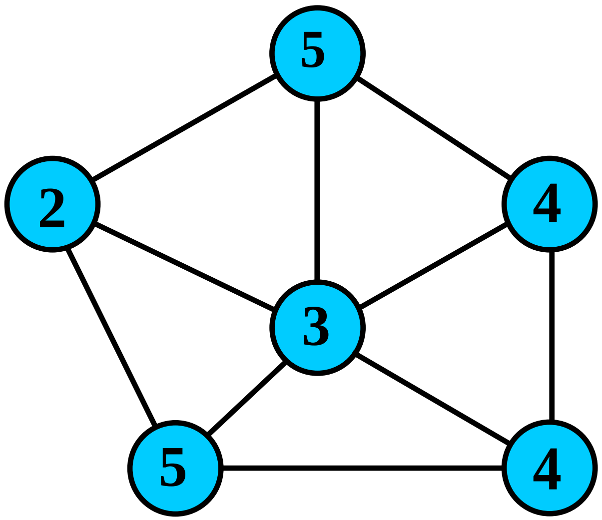


- **Ví dụ 2:**
  Đồ thị G là 2 – liên thông



Luyện tập

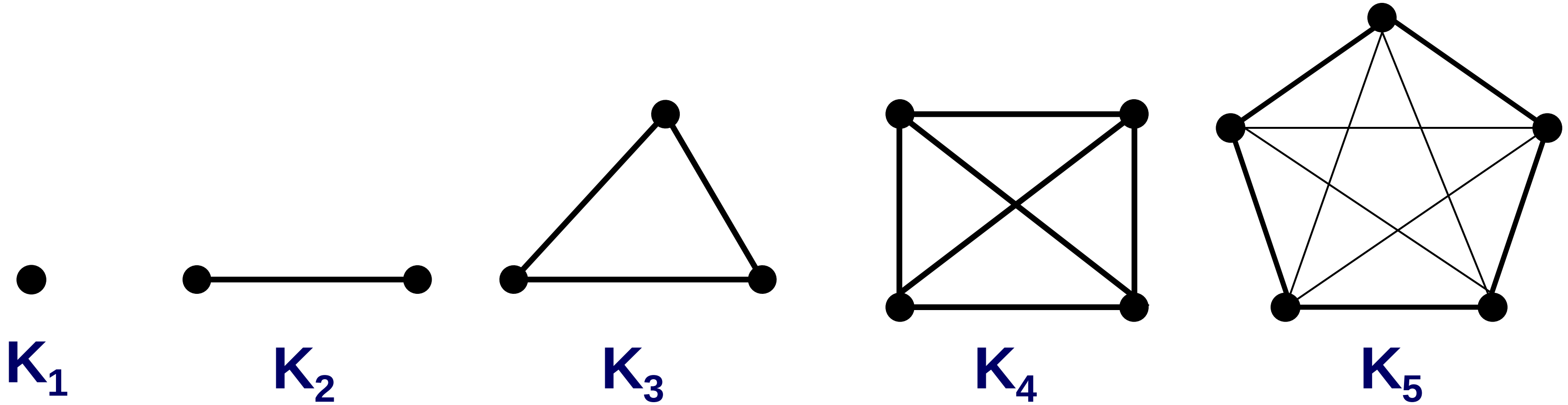
1. Tồn tại hay không một đồ thị đơn vô hướng với bậc của các đỉnh là:
   a) 2, 3, 3, 3, 4, 4.
   b) 2, 3, 3, 4, 4, 4.
2. Xác định chỉ số liên thông của đồ thị sau:



Đơn đồ thị vô hướng đặc biệt

Đồ thị đầy đủ

- **Khái niệm đồ thị đầy đủ n đỉnh**: kí hiệu là K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kì đều có cạnh nối.
- **Ví dụ:**

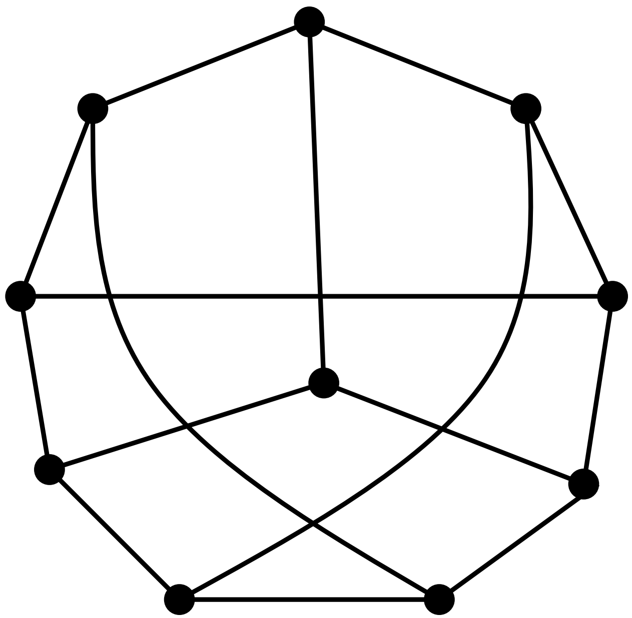


Đồ thị đầy đủ

- **Nhận xét:** Một đồ thị K_n có:
  - n đỉnh
  - deg(u) = n – 1
  - n(n – 1)/2 cạnh
- Mô hình đồ thị đầy đủ trong thực tế: biểu diễn các cặp đấu trong một giải đấu mà các đội thi đấu vòng tròn một lượt…

Đồ thị đều

- **Khái niệm đồ thị đều bậc k:** là đơn đồ thị vô hướng mà mỗi đỉnh của nó đều có bậc là k.
- **Ví dụ:**
  - Đồ thị K_n đều bậc n – 1.
  - Đồ thị Peterson là đều bậc 3 Hình bên là một biểu diễn khác của đồ thị Peterson

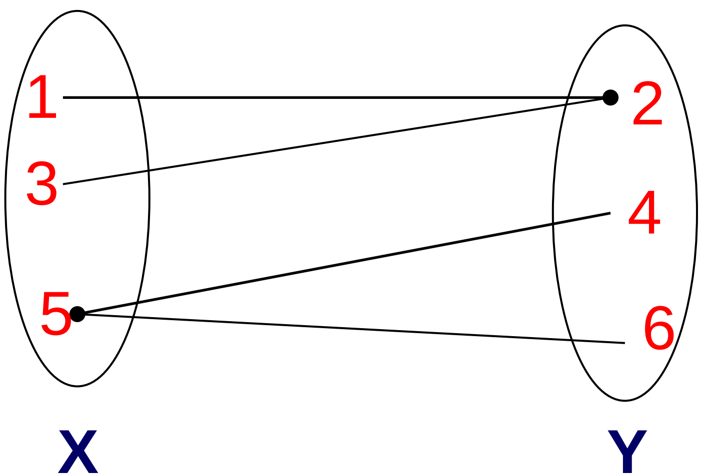


Đồ thị đều

- **Nhận xét:**
  - Đồ thị chỉ có các đỉnh rời gọi là đồ thị đều bậc 0
  - Đồ thị K_2 là đồ thị đều bậc 1 duy nhất
- **Định lý 1:** Số đỉnh của đồ thị đều bậc lẻ luôn là một số chẵn.
- **Định lý 2:** G là một đồ thị đều bậc k với n đỉnh và e cạnh. Khi đó ta có: k.n = 2.e

Đồ thị lưỡng phân

- **Khái niệm:** đồ thị **lưỡng phân** G = (V, E) là đồ thị mà tập đỉnh V có thể được phân hoạch thành hai tập hợp X, Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của X với một đỉnh của Y.
- **Kí hiệu:** G = (X, Y, E)
- **Ví dụ:**



Đồ thị lưỡng phân

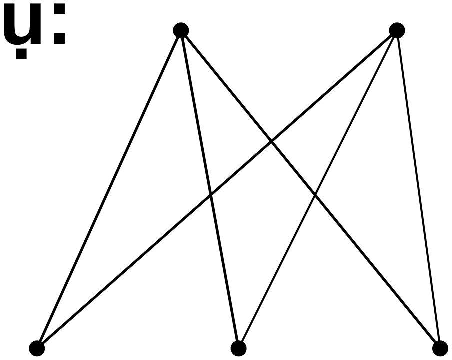
- **Tính chất** của đồ thị lưỡng phân:
  - Mỗi đồ thị con của đồ thị lưỡng phân là một đồ thị lưỡng phân
  - Đồ thị lưỡng phân không có khuyên
- **Định lý:** Đồ thị G là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của G có độ dài chẵn.
- **Ví dụ:** Đồ thị biểu diễn quan hệ hôn nhân của một làng là đồ thị lưỡng phân.

Đồ thị lưỡng phân

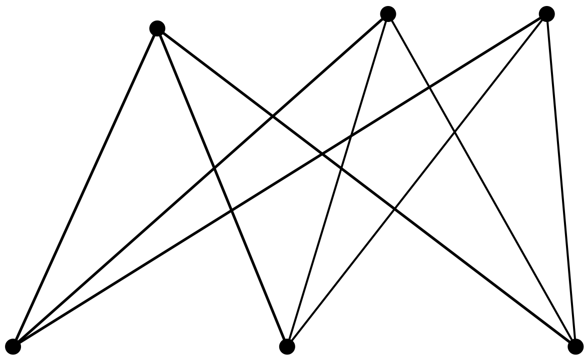
- Đồ thị G = (V, E) là đồ thị **lưỡng phân đầy đủ**, kí hiệu là $K_{m,\ n}$ nếu G là đồ thị hai phía, tập đỉnh V phân hoạch thành hai tập V_1 và V_2 mà $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ và giữa hai đỉnh bất kỳ không cùng trong một lớp đỉnh thì luôn có đúng một cạnh nối.
- **Nhận xét:**
  - Với $K_{m,\ n}$ như trên có m + n đỉnh
  - $Deg(v) = n$ với $\forall v \in V_1$, $deg(v') = m$ với $\forall\ v' \in V_2$

Đồ thị lưỡng phân

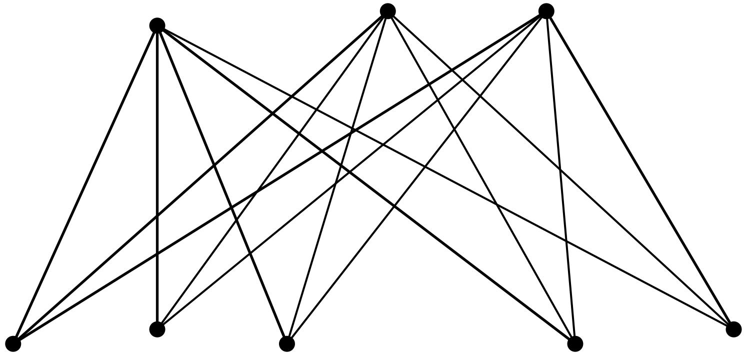
- **Ví dụ:**



$K_{2,\,3}$



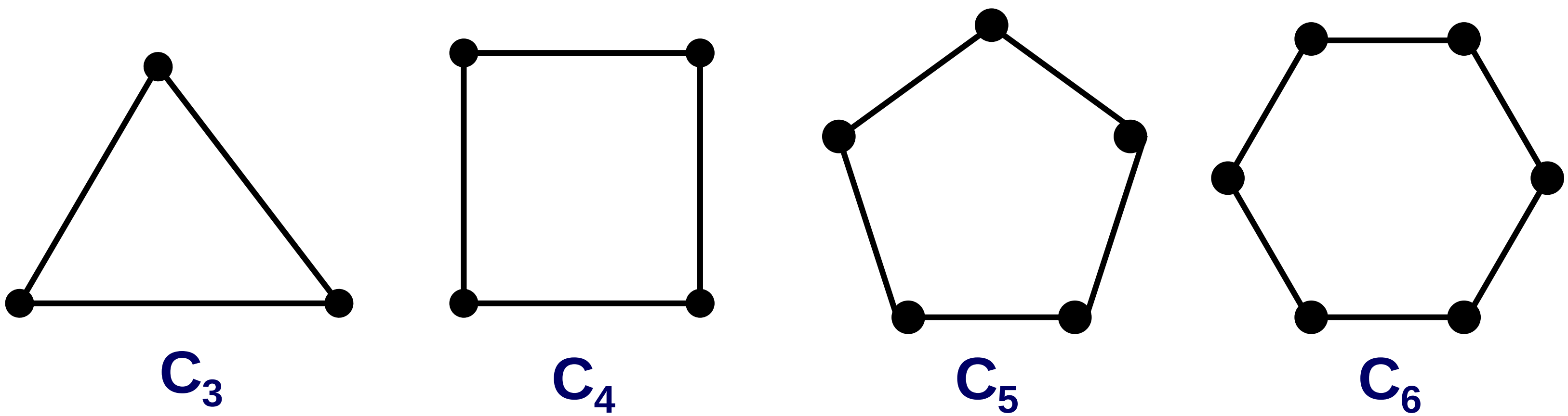
$K_{3,\,3}$



$K_{3,\,5}$

Đồ thị vòng

- **Khái niệm:** Đồ thị vòng (chu trình) C_n, $n \geq 3$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và n cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$
- **Ví dụ:**



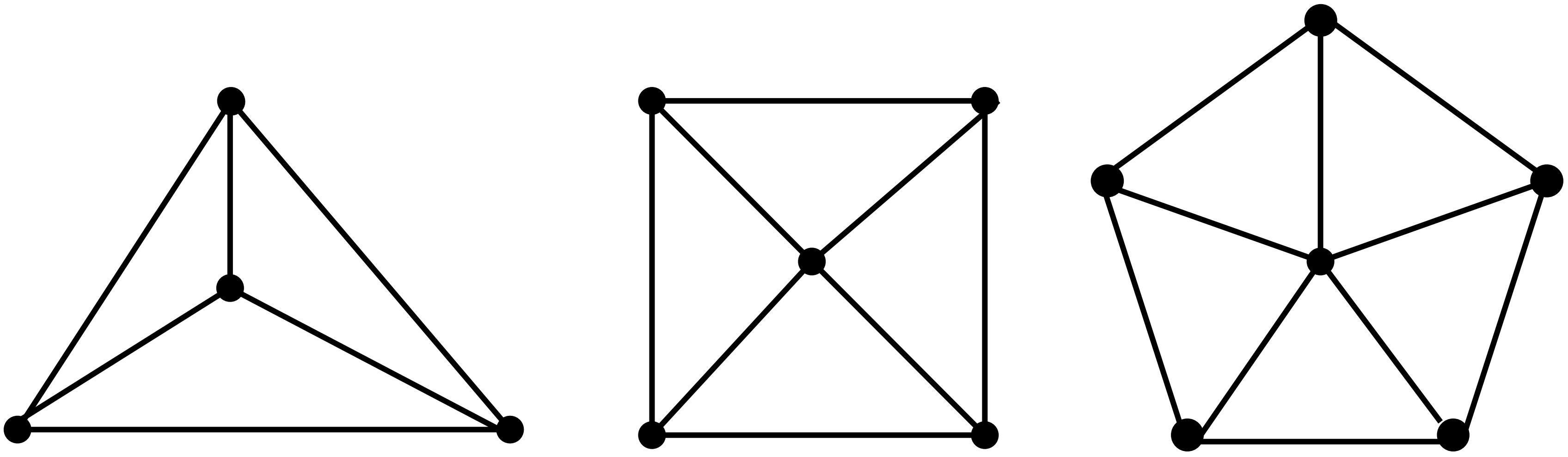
Đồ thị vòng C_n có n đỉnh, n cạnh và $\deg(v) = 2$ với $v \in V$

Đồ thị hình bánh xe

- **Đồ thị hình bánh xe:** Cho chu trình C_n ($n \geq 3$) và thực hiện:
  - Thêm một đỉnh mới u
  - Thêm các cạnh nối đỉnh u với các đỉnh của chu trình C_n ta thu được đồ thị mới gọi là *đồ thị hình bánh xe.*
  - Kí hiệu là W_n ($n \geq 4$)
- **Một W_n ($n \geq 4$) có:**
  - n + 1 đỉnh
  - Deg(u) = n; deg(v) = 3 với $\forall$ v $\neq$ u
  - Có 2n cạnh

Đồ thị hình bánh xe

- **Ví dụ** về đồ thị hình bánh xe:



W_3 W_4 W_5

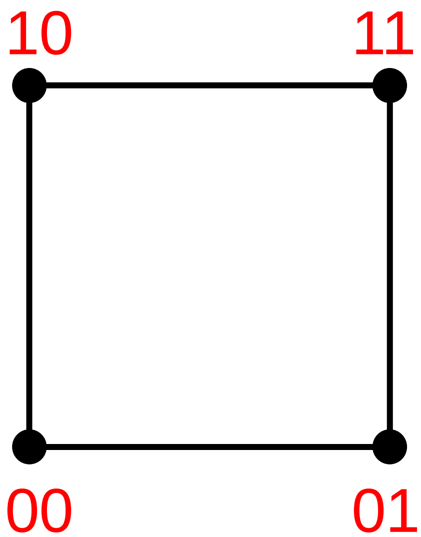
Đồ thị hình khối

- **Khái niệm**: *Đồ thị khối n chiều* ($n \geq 1$), kí hiệu Q_n, là đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân có độ dài n.
- Hai đỉnh là liền kề ⇔ các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bít.
- Bậc của mỗi đỉnh trong Q_n là n
- Số cạnh của Q_n là $n.2^{n-1}$

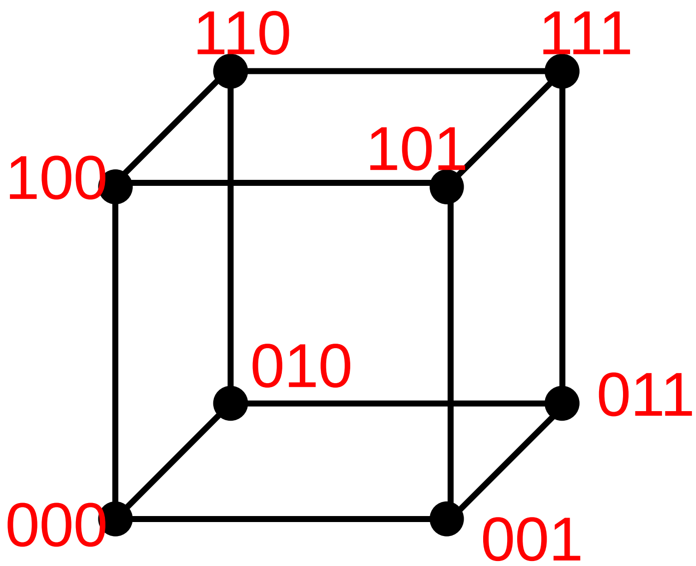
Đồ thị hình khối

- **Ví dụ:**

Q_1



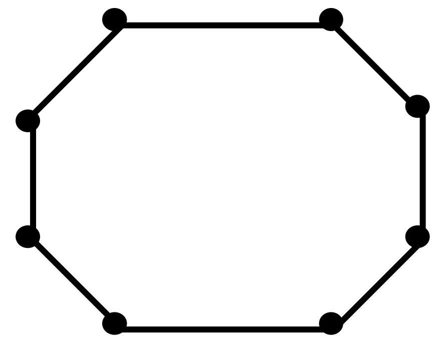
Q_2



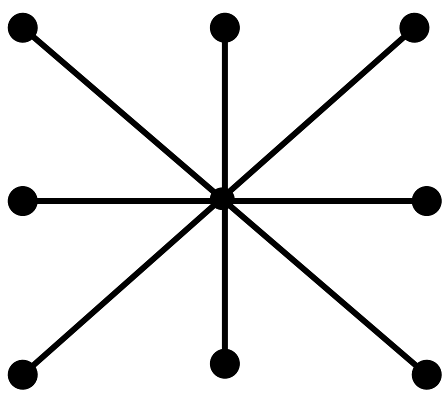
Q_3

Một vài ứng dụng

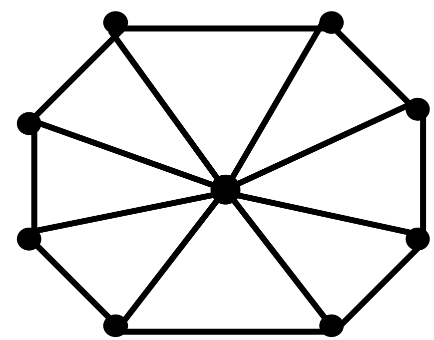
- Trong các mạng cục bộ (LAN)



Mạng vòng ↔ $\mathbf{C_n}$



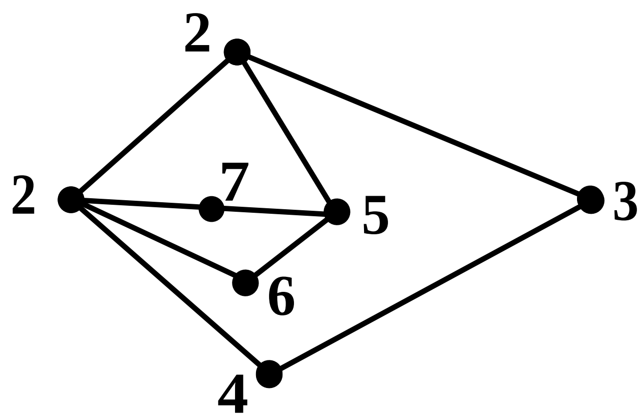
Mạng hình sao ↔ $\mathbf{K_{1,n}}$

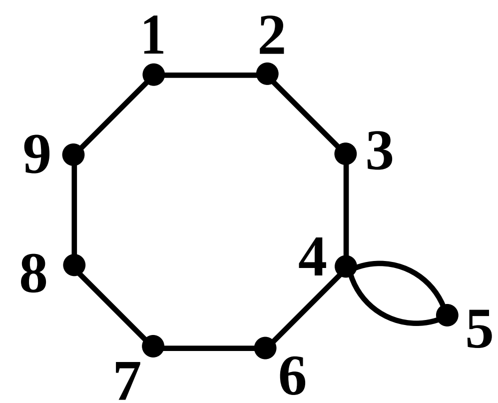


Mạng hỗn hợp ↔ $\mathbf{Q_n}$

Luyện tập

1. Cho G là đồ thị hai phía với n đỉnh và m cạnh. Chứng minh rằng $m \leq n^2/4$.
2. Đồ thị sau có phải là đồ thị lưỡng phân không? Hãy chỉ ra cách phân chia tập đỉnh?



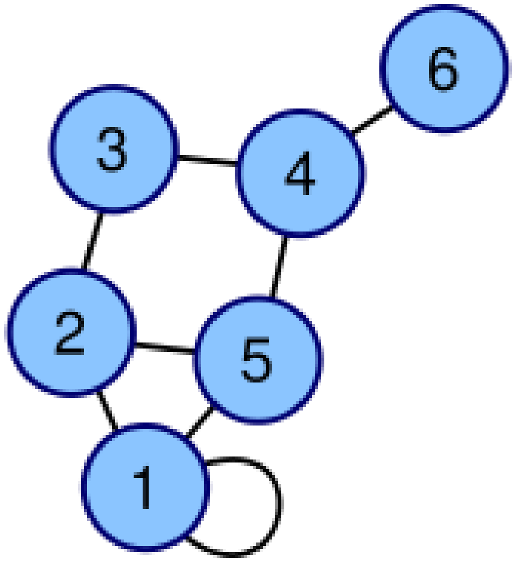


Biểu diễn đồ thị trên máy tính

Ma trận liền kề

- Cho đồ thị G = (V, E) có n đỉnh.
  Ma trận liền kề của G là $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ trong đó:
  $$a_{ij} = \text{số cạnh nối đỉnh } i \text{ với đỉnh } j$$
- **Ví dụ:**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Ma trận liền kề

- **Nhận xét:**
  - Đồ thị liền kề của đồ thị phụ thuộc vào thứ tự liệt kê các đỉnh ⇨ có n! ma trận liền kề khác nhau.
  - Ma trận liền kề của đồ thị đơn vô hướng là ma trận đối xứng ($a_{ij} = a_{ji}$ và $a_{ii} = 0$)
  - Tổng các phần tử dòng (cột) của ma trận liền kề chính bằng bậc của đỉnh tương ứng (không có khuyên).

Ma trận liên thuộc

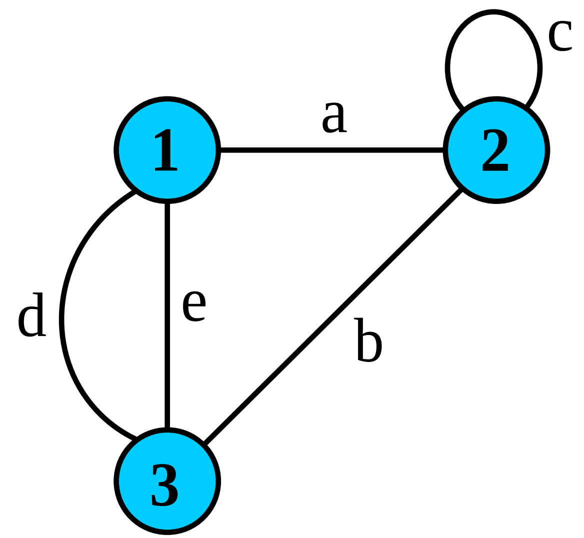
- Cho đồ thị G = (V, E) có n đỉnh, m cạnh.

Ma trận liên thuộc của G là $M = [m_{ij}]_{nxm}$ trong đó:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu đỉnh i thuộc cạnh j} \\ 0 \text{ nếu đỉnh i không thuộc cạnh j} \end{cases}$$

- **Ví dụ:**

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \longleftarrow$$



Ma trận liên thuộc

- Có thể biểu diễn các cạnh kép và khuyên trong ma trận liên thuộc:
  - Các cạnh kép được biểu diễn bằng các cột có giá trị giống hệt nhau
  - Các khuyên: dùng một cột với đúng một phần tử bằng 1 tương ứng với đỉnh nối với khuyên đó.
- Nếu đồ thị không có khuyên thì tổng các phần tử theo hàng chính bằng bậc của đỉnh tương ứng.

Ma trận trọng số

- Cho đồ thị G = (V, E) có V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ và $\forall e \in E$, e được gán trọng số ω(e). Ma trận trọng số biểu diễn G là:

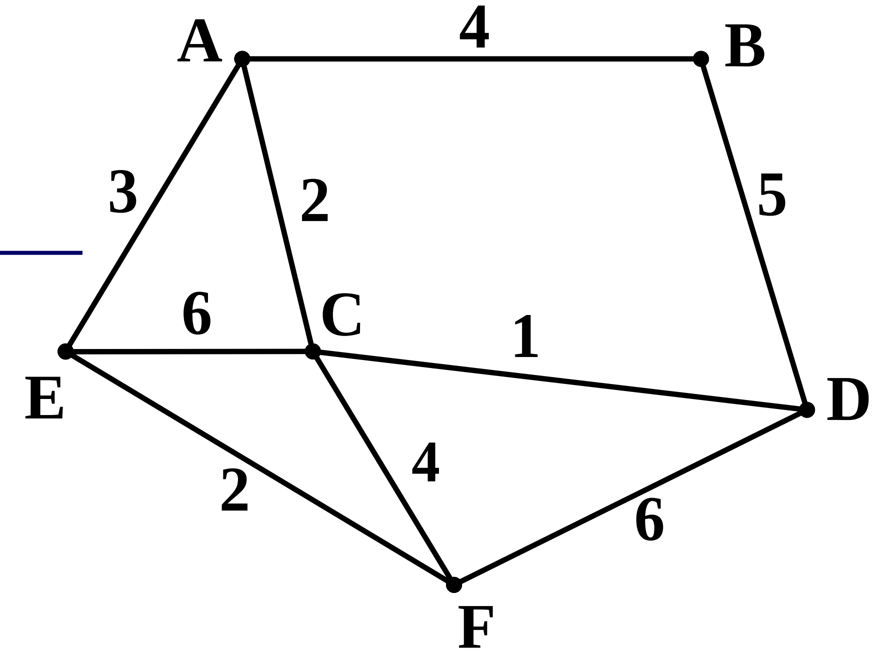
$$C = [c_{ij}]_{nxn} = \begin{cases} \omega(v_i, v_j) \text{ nếu } (v_i, v_j) \in E \\ \theta \text{ nếu } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Trong đó θ = {0, -∞, +∞}

Ma trận trọng số

- Ví dụ: $c_{ij} = 0$ nếu $(v_i, v_j) \notin E$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

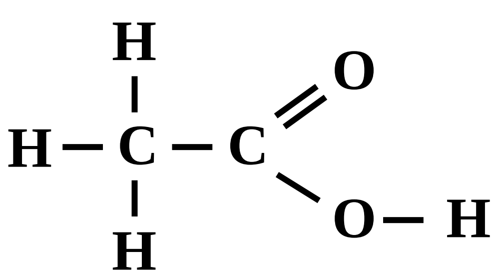


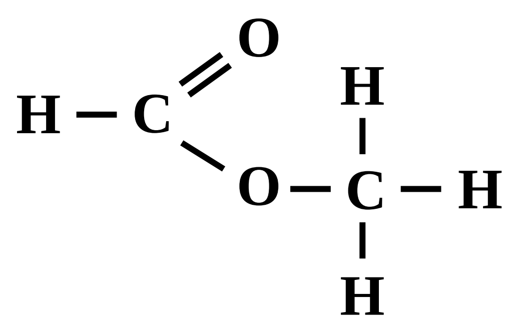
Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- Trong hoá học, các đồ thị được dùng để tạo mô hình các hợp chất. Có nhiều chất có cùng công thức phân tử nhưng cấu trúc khác nhau. Chúng được biểu diễn bằng các đồ thị khác nhau.

  $\Rightarrow$ Các đồ thị có cùng cấu trúc được gọi là các đồ thị đẳng cấu biểu diễn mô hình của cùng một chất.
- **Ví dụ:** Xét công thức phân tử $C_2H_4O_2$.





Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- **Định nghĩa**: hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu như tồn tại một song ánh $f : V_1 \rightarrow V_2$ sao cho f bảo toàn quan hệ liền kề giữa các cặp đỉnh, tức là: $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$.
  - Khi đó: f được gọi là một phép đẳng cấu.
- Hai đơn đồ thị đẳng cấu sẽ tồn tại phép tương ứng một – một giữa các đỉnh của hai đồ thị bảo toàn quan hệ liền kề.

Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- **Ví dụ**: G và H là đẳng cấu

  Ta dễ dàng chỉ ra song ánh f như sau:

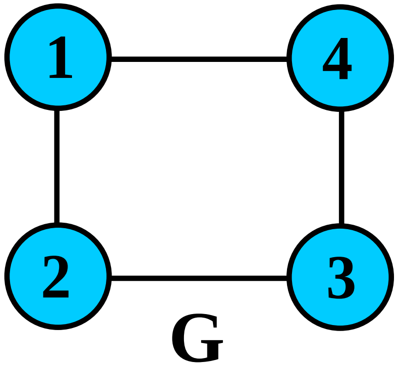
  f: {1, 2, 3, 4} $\rightarrow$ {a, b, c, d}

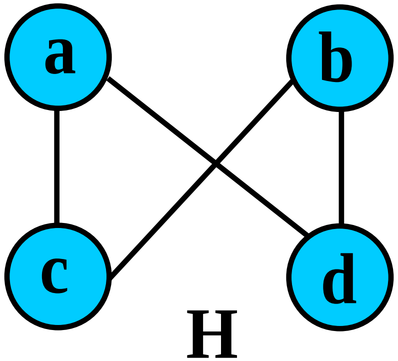
  f(1) = a $\qquad$ f(2) = c

  f(3) = b $\qquad$ f(4) = d

  (1, 2) – (a, c) $\qquad$ (1, 4) – (a, d)

  (2, 3) – (c, b) $\qquad$ (3, 4) – (b, d)





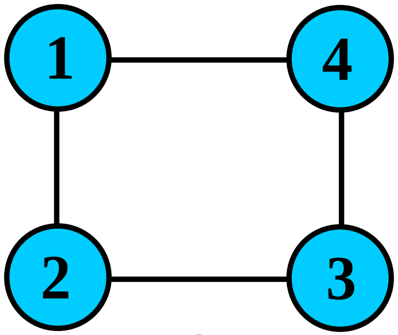
Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- **Nhận xét:**
  - Việc xác định hai đồ thị đẳng cấu hay không là không đơn giản vì ∃n! phép tương ứng một một giữa hai đơn đồ thị có n đỉnh.
  - Để chỉ ra hai đồ thị không đẳng cấu với nhau ta chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà hai đồ thị đẳng cấu phải có (gọi là *một bất biến*):
    - i. Số đỉnh
    - ii. Số cạnh
    - iii. Bậc của đỉnh

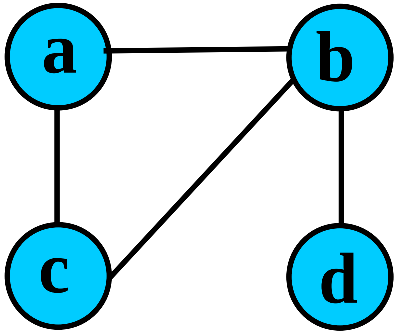
Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- **Ví dụ:** Hai đồ thị H và G:
  - Số đỉnh: cùng là 4
  - Số cạnh: cùng là 4
  - Bậc của đỉnh:
    - G có 4 đỉnh bậc 2
    - H có 2 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 3, 1 đỉnh bậc 1.

$\Rightarrow$ H và G không đẳng cấu.



G

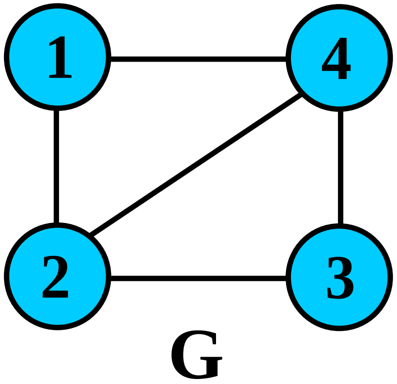


H

Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

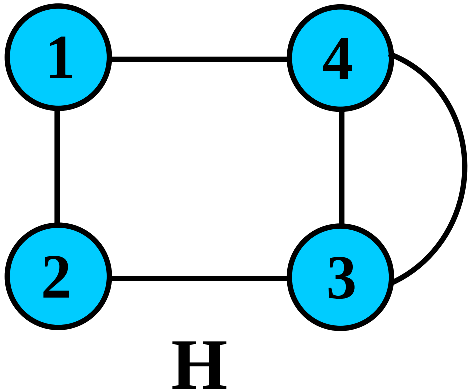
- Ngoài 3 bất biến nêu trên, sự tồn tại của chu trình đơn với độ dài đặc biệt là một bất biến có ích để chỉ ra hai đồ thị là không đẳng cấu.
- **Chú ý:** không có các bất biến mà nhờ chúng có thể xác định được hai đơn đồ thị là đẳng cấu.
- Hai đơn đồ thị có các đại lượng bất biến như nhau nhưng không kết luận được chúng đẳng cấu.

Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị



- **Ví dụ:**
  - Số đỉnh: G và H đều có 4 đỉnh
  - Số cạnh: G, H có 5 cạnh
  - Bậc của đỉnh:
    - G có 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3, mỗi đỉnh bậc 2 kề với 2 đỉnh bậc 3
    - H có 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3, mỗi đỉnh bậc 2 của H kề với 1 đỉnh bậc 2 và 1 đỉnh bậc 3

$\Rightarrow$ G và H không đẳng cấu



Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

- Để chứng minh hàm f từ tập đỉnh của G lên tập đỉnh của H là một phép đẳng cấu, ta phải chỉ ra f bảo tồn các cạnh bằng cách sử dụng ma trận liền kề.
- f là đẳng cấu nếu như ma trận liền kề của G ≡ ma trận liền kề của H.

Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị

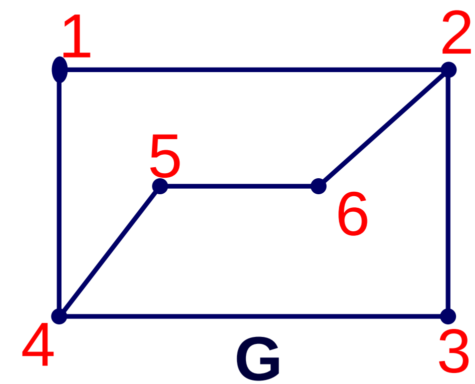
Ví dụ: Hai đồ thị G và H như hình bên

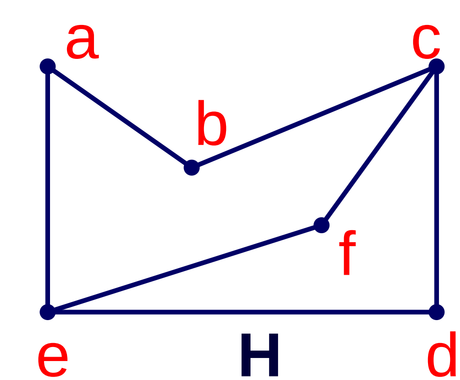
- G và H cùng có 6 đỉnh, 7 cạnh, 4 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 3 thỏa mãn các bất biến là như nhau
- Tìm phép đẳng cấu f:
  - Định nghĩa hàm f:

    $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$

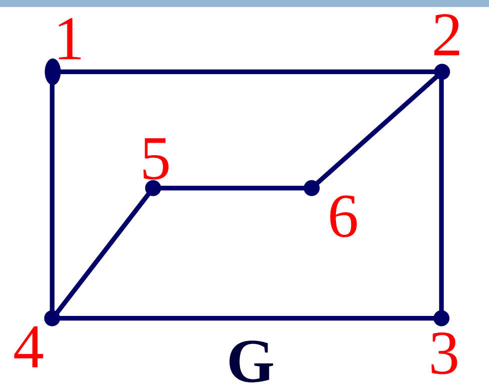
$f(1) = f$	$f(2) = c$	$f(3) = d$
$f(4) = e$	$f(5) = a$	$f(6) = b$

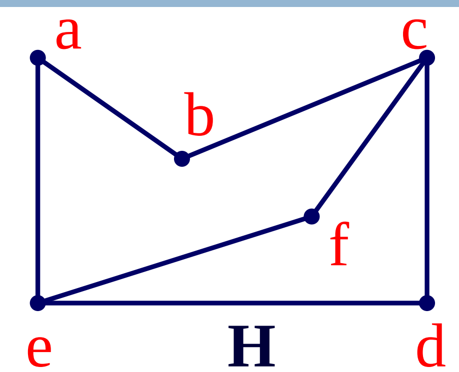
  - Chỉ ra f là một phép đẳng cấu: lập ma trận liền kề của G và H





Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị





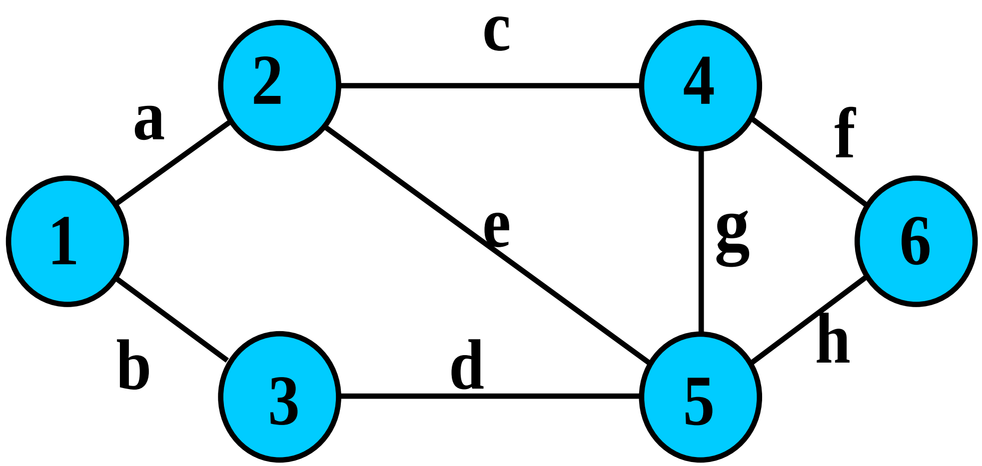
$$A_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_H = \begin{array}{c} \\ f \\ c \\ d \\ e \\ a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f & c & d & e & a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow A_G = A_H$. Vậy là phép đẳng cấu hay G và H là đẳng cấu.

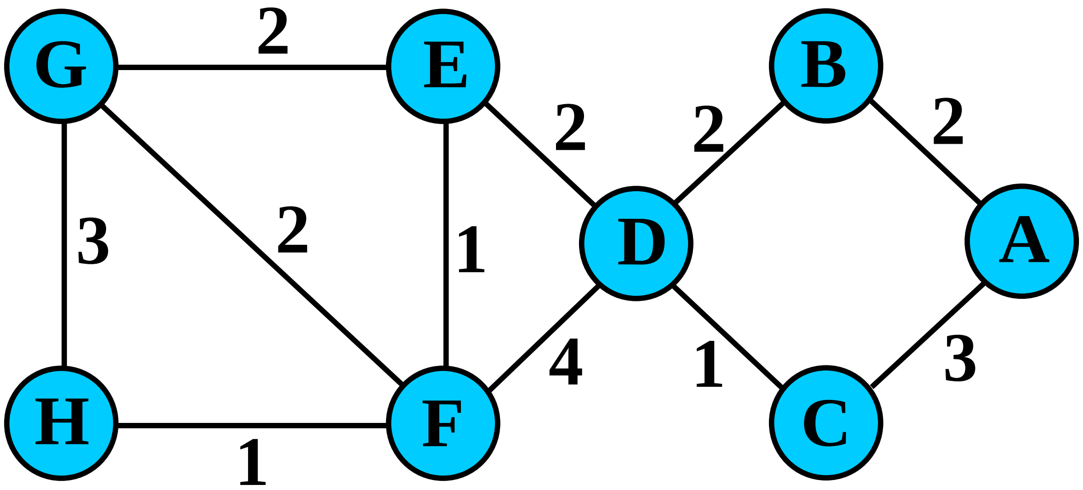
Luyện tập

1. Biểu diễn đồ thị sau bằng ma trận liền kề và ma trận liên thuộc.



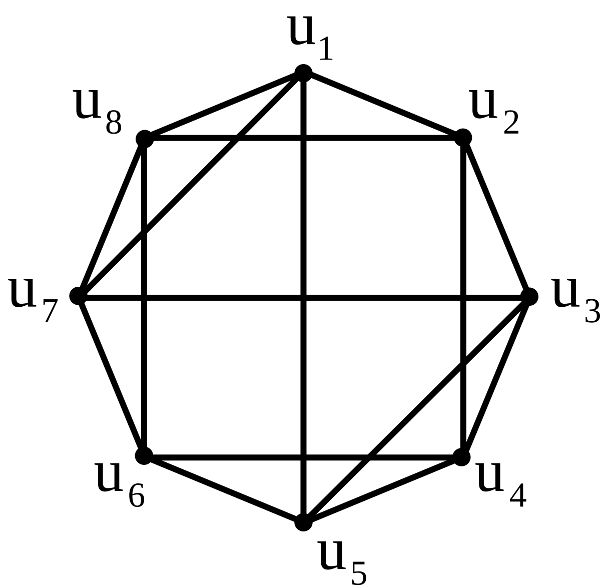
Luyện tập

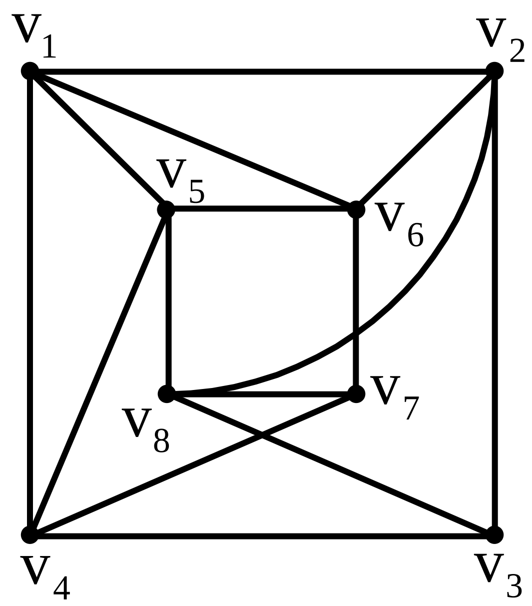
2. Biểu diễn đồ thị sau bằng ma trận trọng số:



Luyện tập

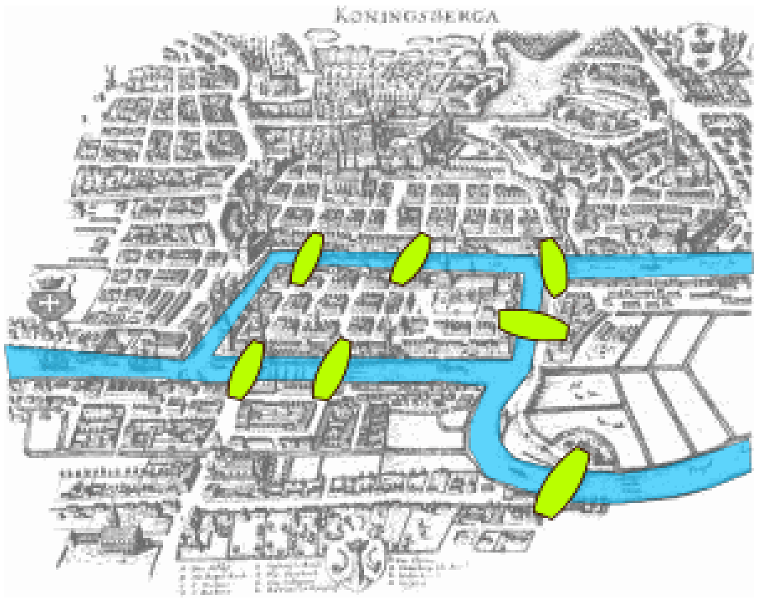
3. Hãy xác định xem hai đồ thị sau có đẳng cấu hay không?

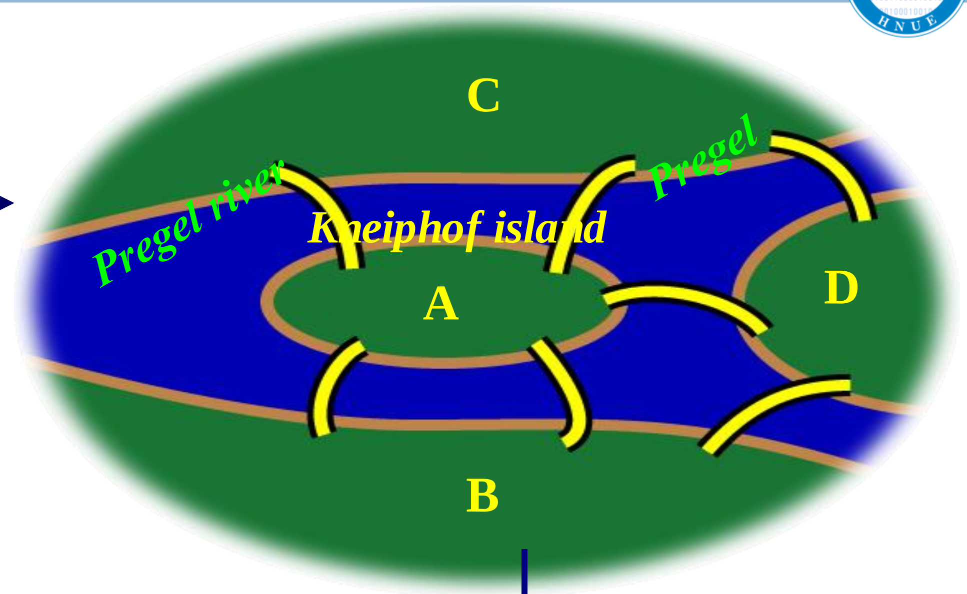


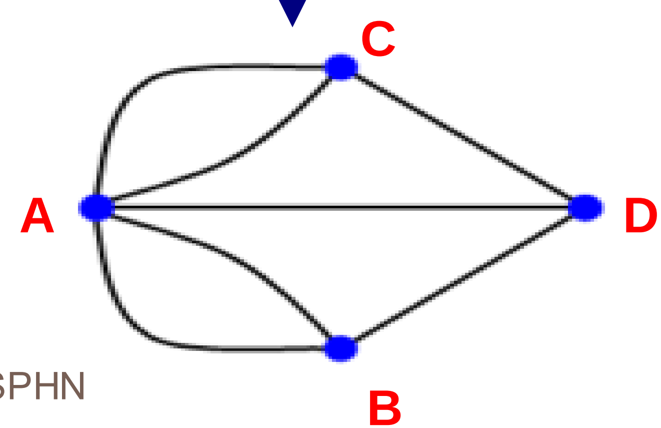


Đường một nét Euler

Đường một nét Euler







Bài toán 7 cây cầu thành Konigsberg

Đường một nét Euler

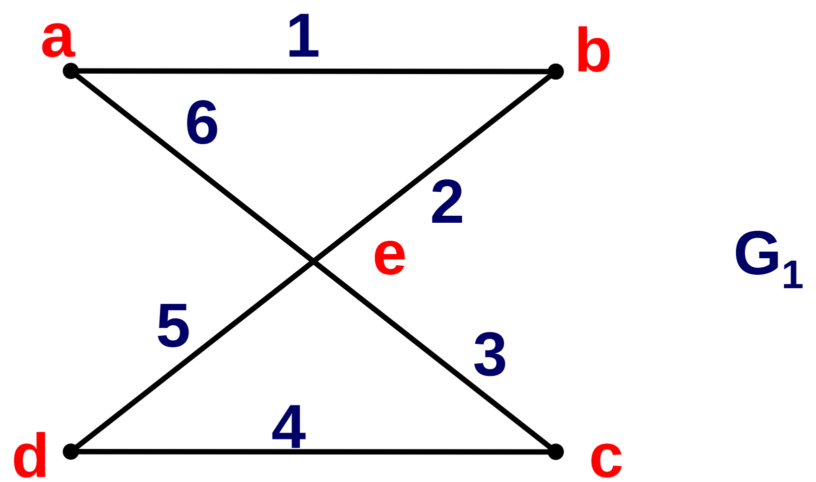
- **Khái niệm**: Cho một đồ thị vô hướng G = (V, E) có n đỉnh, m cạnh. Đường một nét Euler trong G là một dãy chứa tất cả m cạnh của đồ thị và có dạng $P_1, e_1, P_2, e_2, \ldots, P_m, e_m, P_{m+1}$ sao cho cạnh e_i là cạnh nối hai đỉnh P_i và P_{i+1}.
- Nếu $P_1 = P_{m+1}$ ta gọi đó là đường một nét Euler khép kín
- Nếu $P_1 \neq P_{m+1}$ ta gọi đó là đường một nét Euler mở

Đường một nét Euler

- **Định lý 1:** Đồ thị vô hướng và liên thông G = (V, E) có đường một nét Euler khép kín ⇔ bậc của tất cả các đỉnh trong G là số chẵn.
- **Định lý 2:** Điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông G có đường một nét Euler mở là số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị là 2.
- Đồ thị Euler được ứng dụng trong các bài toán thực tế như tìm hành trình ngắn nhất cho người đưa thư, xe thu rác, cảnh sát tuần tra.

Đường một nét Euler

- **Ví dụ:**

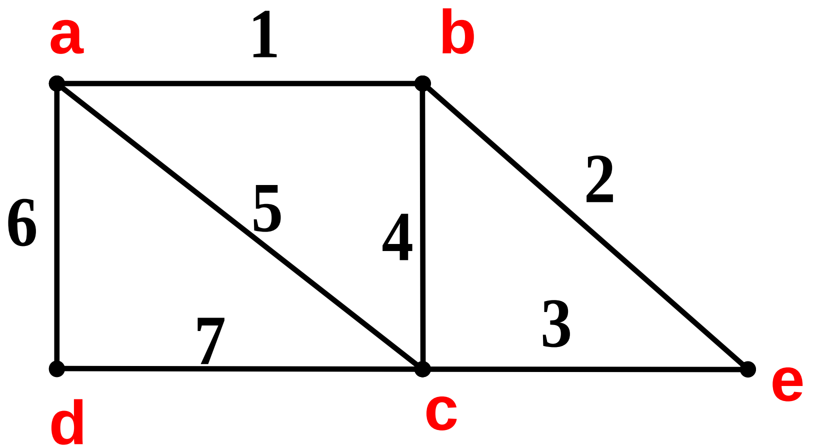


Đồ thị G_1 có đường một nét Euler khép kín:

a, b, e, d, c, e, a.

Đường một nét Euler

- **Ví dụ:**



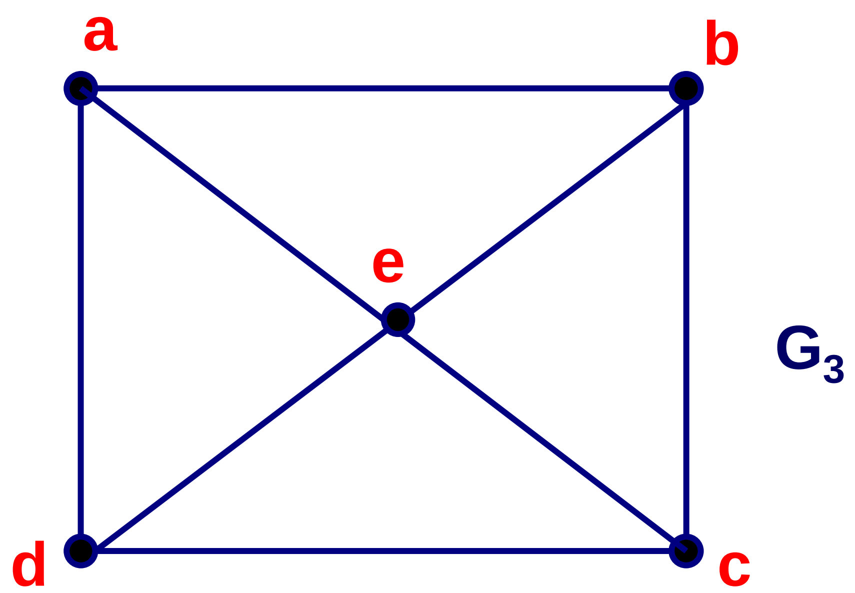
G_2

Đồ thị G_2 có đường một nét Euler mở:

a, d, c, e, b, c, a, b

Đường một nét Euler

- **Ví dụ:**



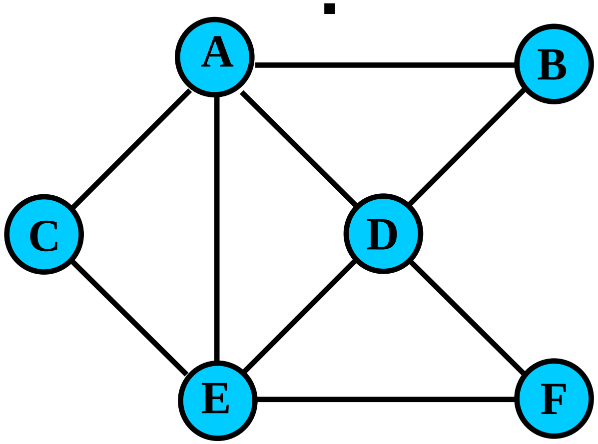
Đồ thị G_3 không có đường một nét Euler

Đường một nét Euler

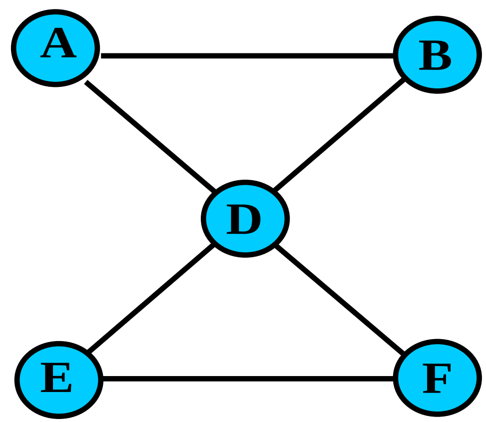
- **Thuật toán** tìm đường một nét Euler khép kín:
  - **B1:** Chọn đỉnh a làm đỉnh bắt đầu. Xây dựng đường một nét khép kín con C'.
  - **B2:** Loại bỏ các cạnh trong C' khỏi đồ thị. Loại bỏ các đỉnh cô lập (nếu có).
  - **B3:** Lấy một đỉnh chung của C' và đồ thị còn lại để xây dựng đường một nét con tiếp theo C''. Rồi ghép vào C' và quay lại bước 2. Lặp cho đến khi các cạnh được đưa hết vào C'.

Đường một nét Euler

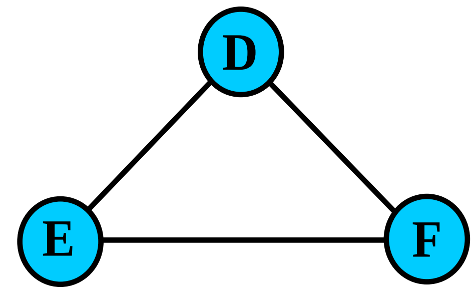
- **Ví dụ:**



G



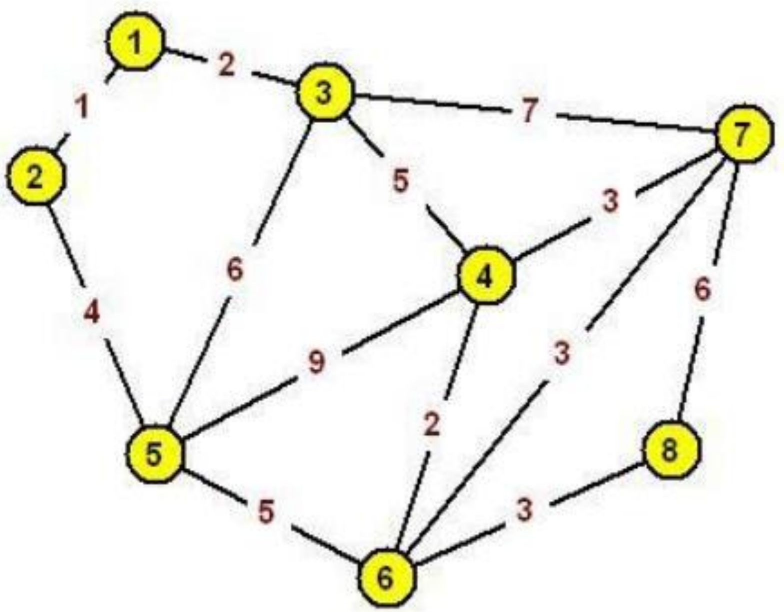
G’

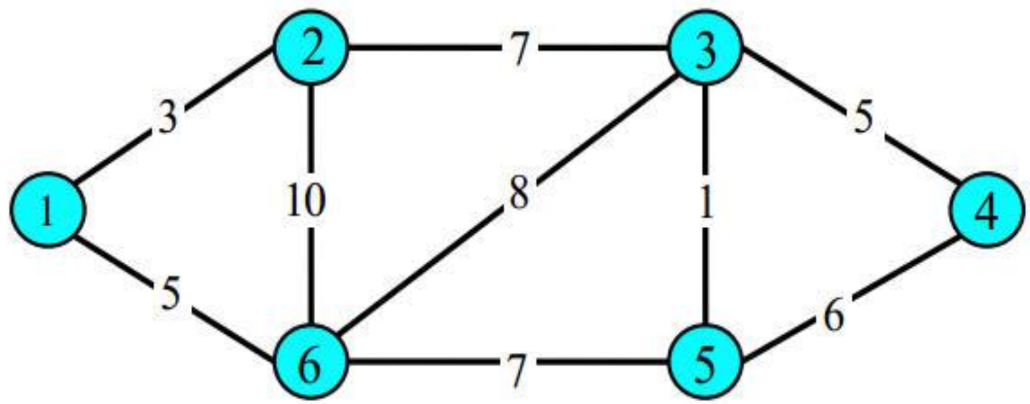


G”

- Chọn A là đỉnh bắt đầu.
- B1: C’ = A, C, E, A
- B2: Thu được đồ thị G’
- B3: Chọn đỉnh A tiếp, C” = A, D, B, A $\Rightarrow$ C’ = A, C, E, A, D, B, A
- B2: Thu được G”
- B3: Chọn đỉnh D, C” = D, E, F, D $\Rightarrow$ C’ = **A, C, E, A, D, E, F, D, B, A**

Luyện tập





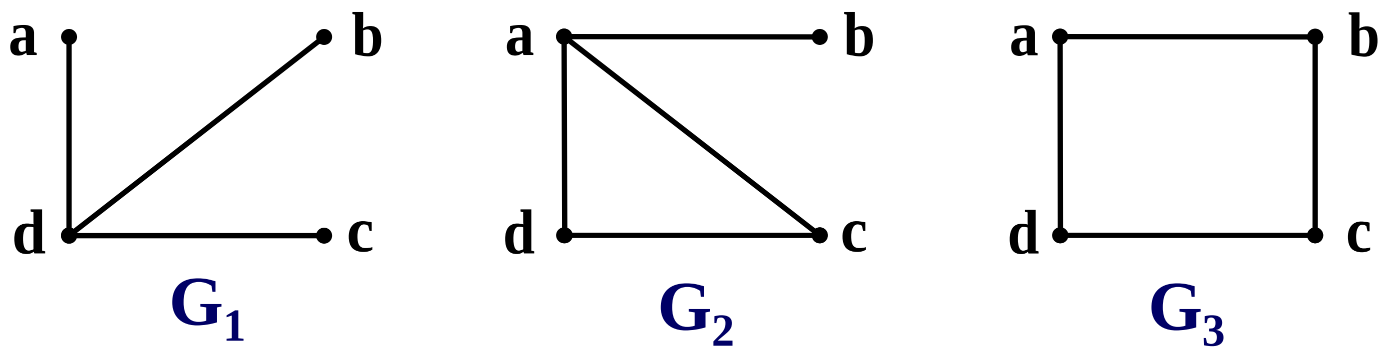
Chu trình Hamilton

Chu trình Hamilton

- **Khái niệm**: Cho đồ thị G = (V, E). Một chu trình C được gọi là *chu trình Hamilton* nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị.
- Nếu tồn tại đường đi H có tính chất như trên thì H được gọi là *đường đi Hamilton.*
- Vấn đề tìm chu trình Hamilton trong đồ thị được nhà toán học Anh là Hamilton nêu ra năm 1858.

Chu trình Hamilton

- **Ví dụ:**



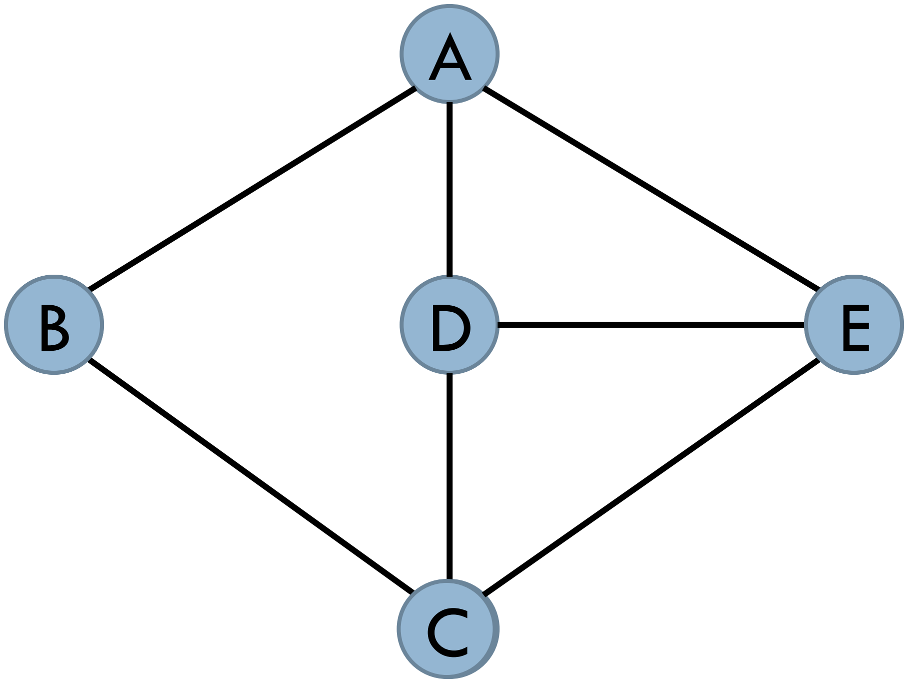
- G_1 không chứa đường đi và chu trình Hamilton
- G_2 chứa đường đi Hamilton
- G_3 chứa chu trình Hamilton

Thuật toán liệt kê chu trình Hamilton

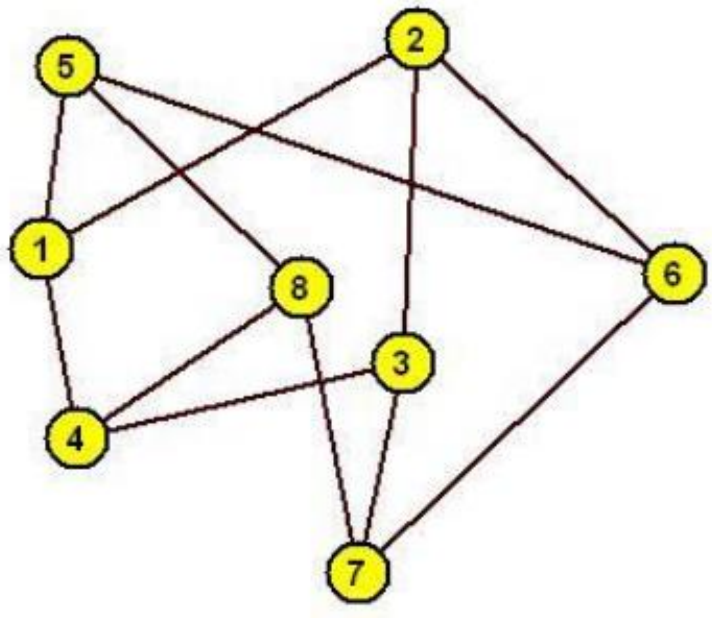

```
Procedure Hamilton(k);
Begin
    For y ∈ Ke(X[k-1]) do
        If (k =N+1) and (y=v0) then Ghinhan(X[1],. . . , X[n], v0)
        Else if Chuaxet[y] then
        Begin
            X[k] := y;
            Chuaxet[y] := False;
            Hamilton(k+1);
            Chuaxet[y] := True;
        End;
End;
```

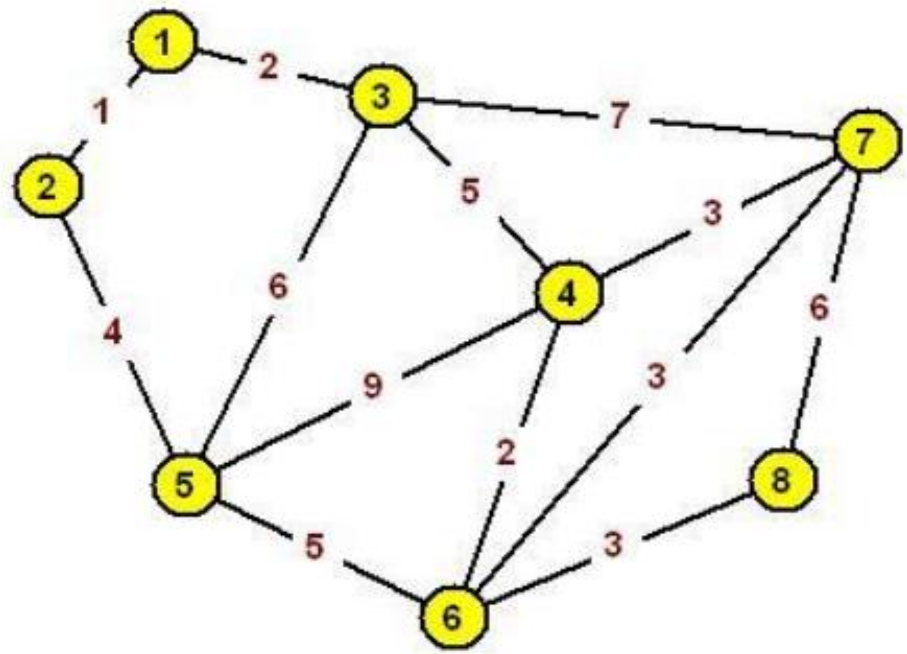
Thuật toán liệt kê chu trình Hamilton

- **Ví dụ:**



Luyện tập





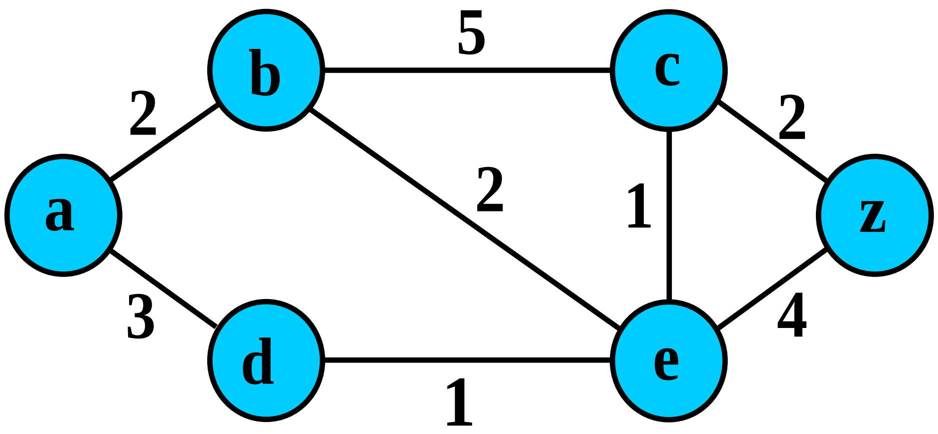
Bài toán tìm đường đi ngắn nhất

Bài toán thực tế

- Có 6 điểm du lịch trong một khu sinh thái là a, b, c, d, e, z. Giữa hai điểm có thể có hoặc không có đường đi trực tiếp.
  - Hãy tìm đường đi có khoảng cách ngắn nhất từ điểm a đến z.
- Bài toán được mô hình hoá bằng đồ thị có trọng số như sau:
  - Mỗi đỉnh biểu diễn một điểm du lịch.
  - Hai đỉnh có cạnh nối nếu có đường đi trực tiếp.
  - Trọng số của cạnh được gán là khoảng cách từ điểm này sang điểm kia.

Bài toán thực tế

- Đồ thị mô hình bài toán:



- Đường đi ngắn nhất là đường đi có tổng trọng số các cạnh của nó là nhỏ nhất

Thuật toán Dijkstra

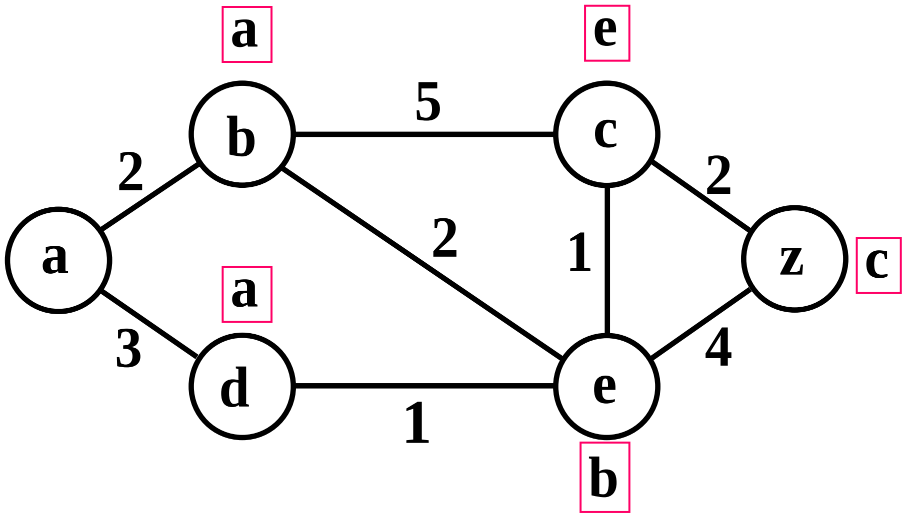
- **Bài toán:** Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến z của đồ thị có trọng số liên thông G=(V,E)
- Năm 1959, nhà toán học người Hà Lan E.Dijkstra đề xuất *thuật toán Dijkstra* để giải quyết bài toán trên.
- Gọi L(v) là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh v.
- S là tập các đỉnh đã tìm được đường đi ngắn nhất từ a đến nó.

Thuật toán Dijkstra

- **Thuật toán Dijkstra**:
  - Bước 1: $L(a) = 0$, $S = \emptyset$, $\forall v \in V$, $v \neq a$: $L(v) = \infty$
  - Bước 2: Nếu $z \in S$ thì kết thúc.
  - Bước 3: Chọn $v \notin S$ sao cho $L(v)$ là nhỏ nhất.
    Đưa v vào S.
  - Bước 4: Với mỗi đỉnh x liền kề v và $x \notin S$ thì đặt:
    $L(x) = \min\{L(x), L(v) + c(v,x)\}$
    Quay lại bước 2.

Ví dụ

- Ví dụ 1:



B1: L(a) = 0; S = ∅, L(b) = L(c) = L(d) = L(e) = L(z) = ∝

B3: v = a, S = {a}

B4: L(b) = min{∝, 2 + 0} = 2, L(d) = min{∝, 3 + 0} = 3

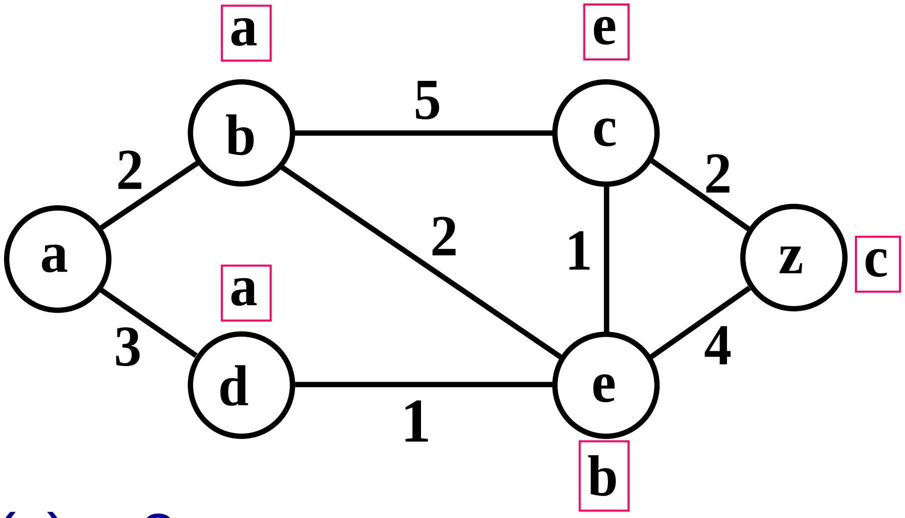
B3: v = b, S = {a,b}

B4: L(c) = 7, L(e) = 4, L(d) = 3, L(z)=∝

B3: v = e, S = {a,b,d,e}

Ví dụ

- Ví dụ 1:



B4: L(c) = 5, L(z) = 8

B3: v = c, S = {a, b, d, e, c}

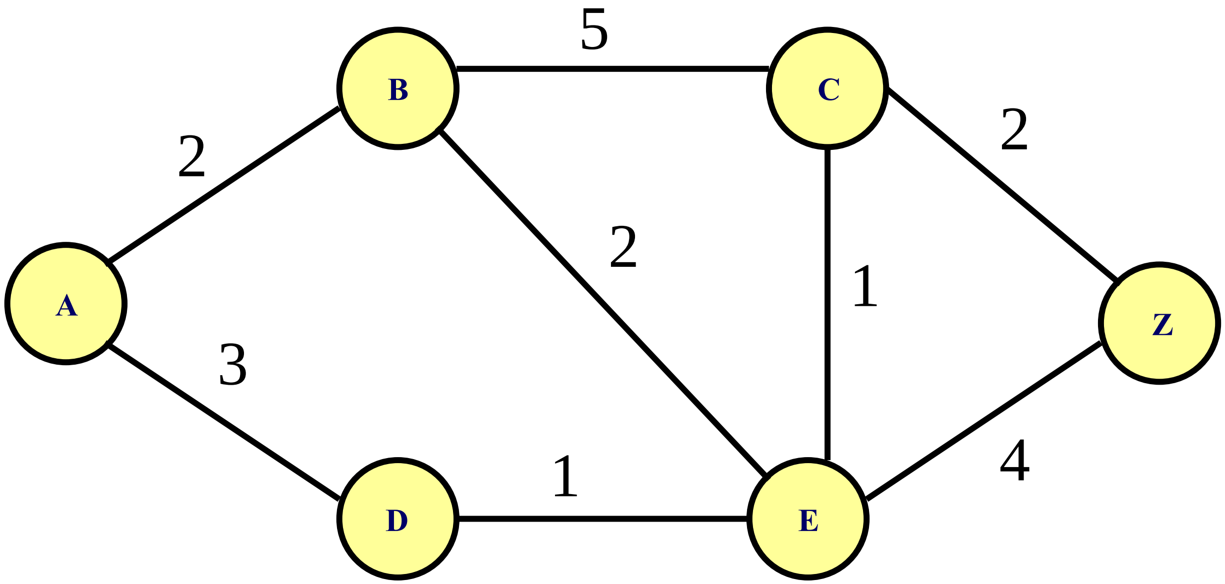
B4: L(z) = 7

B3: v = z, S = {a, b, d, e, c, z}

Về bước 2: kết thúc

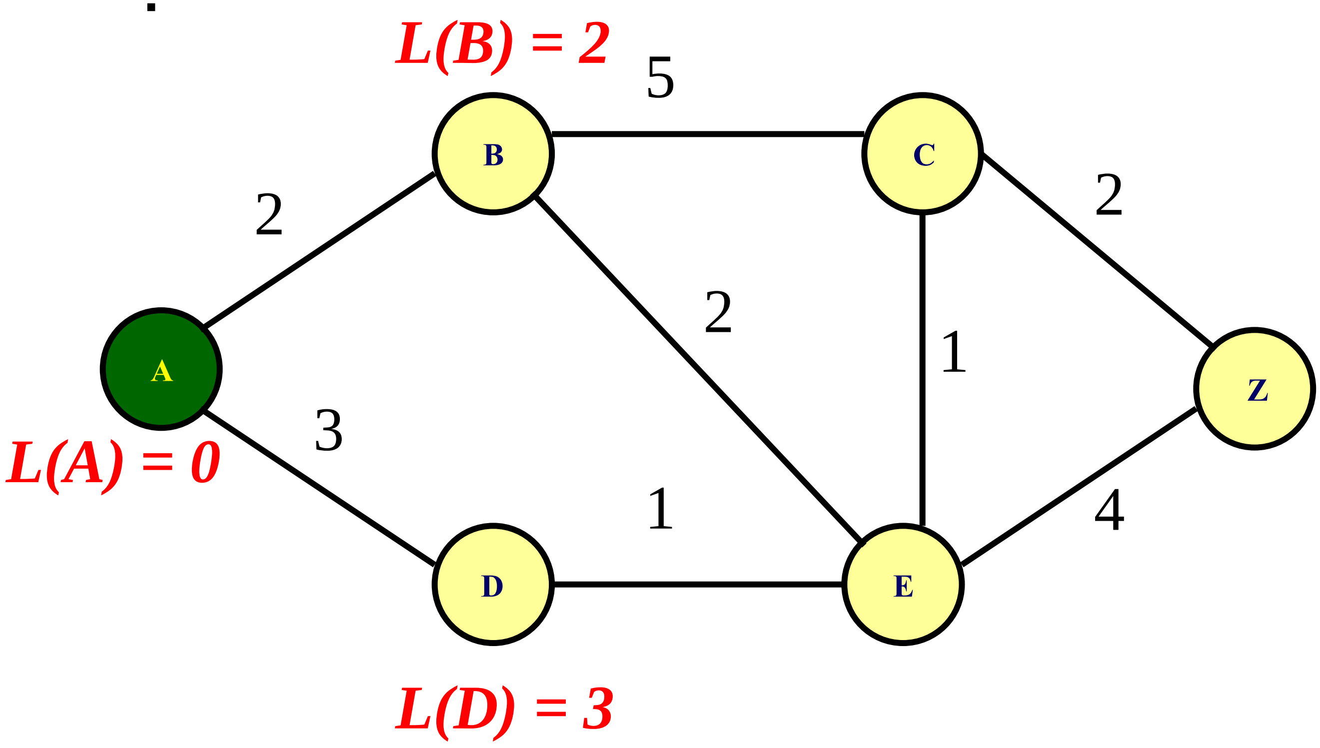
Ví dụ

- Ví dụ 2:



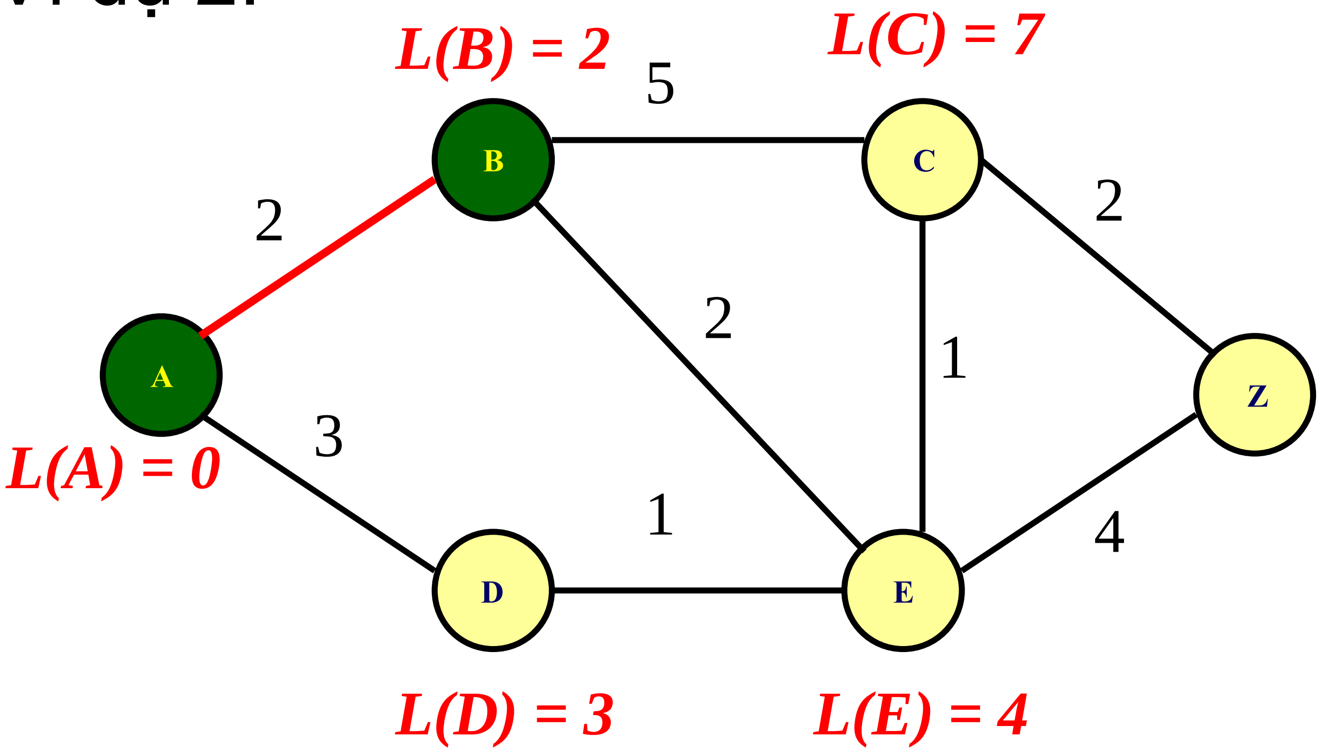
Ví dụ

- Ví dụ 2:



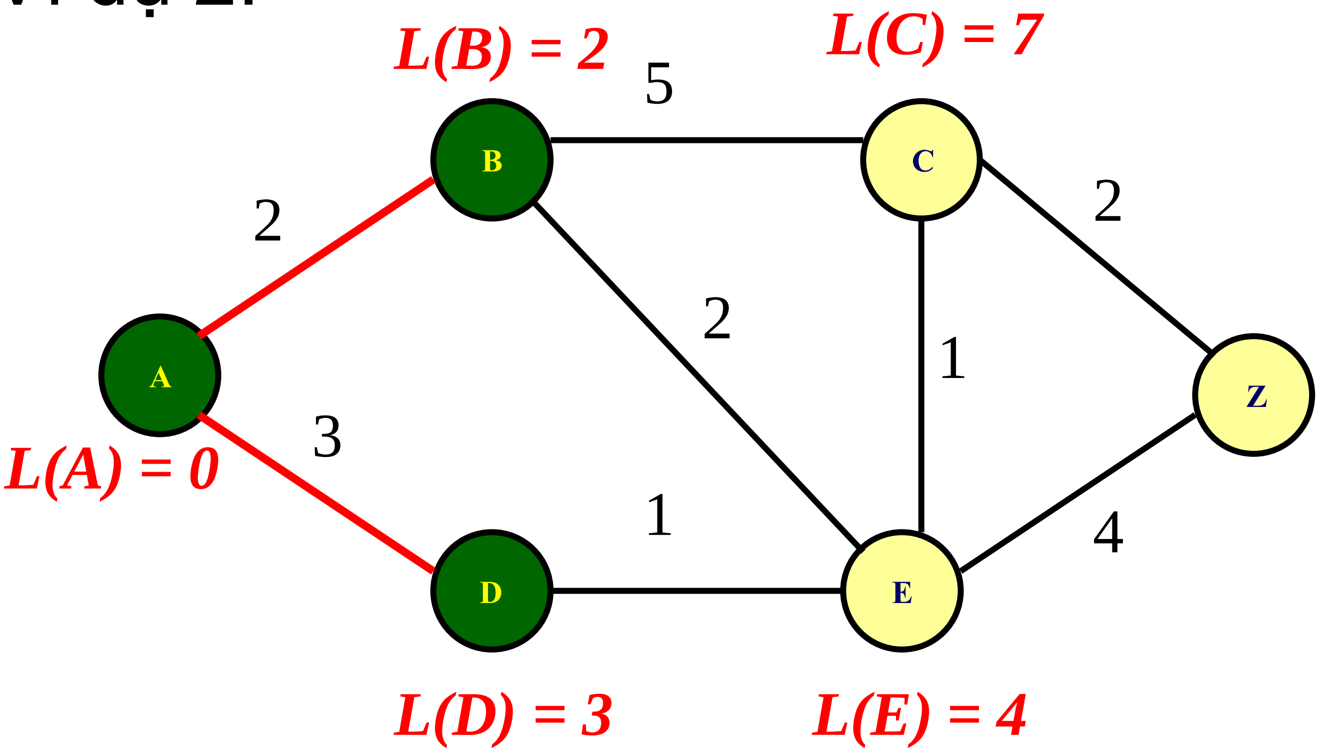
Ví dụ

- Ví dụ 2:



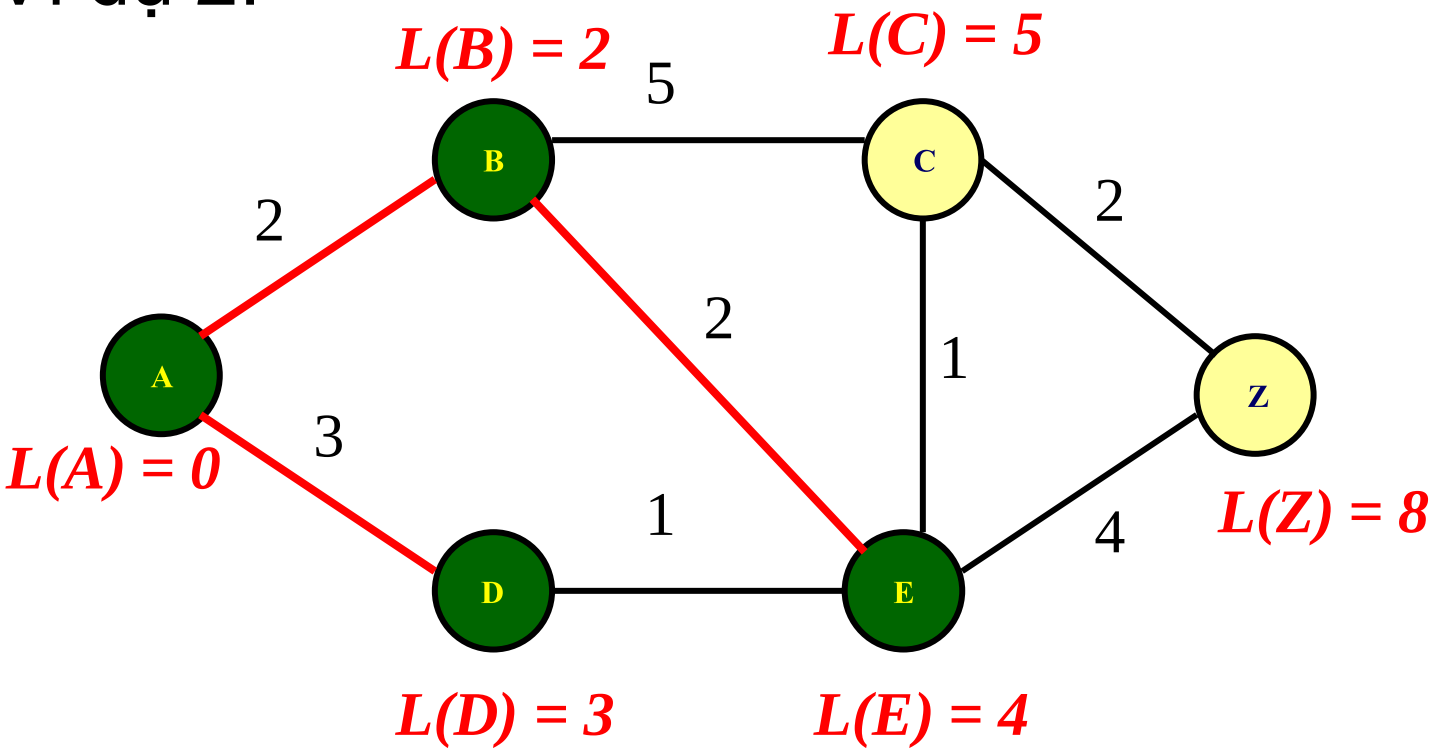
Ví dụ

- Ví dụ 2:



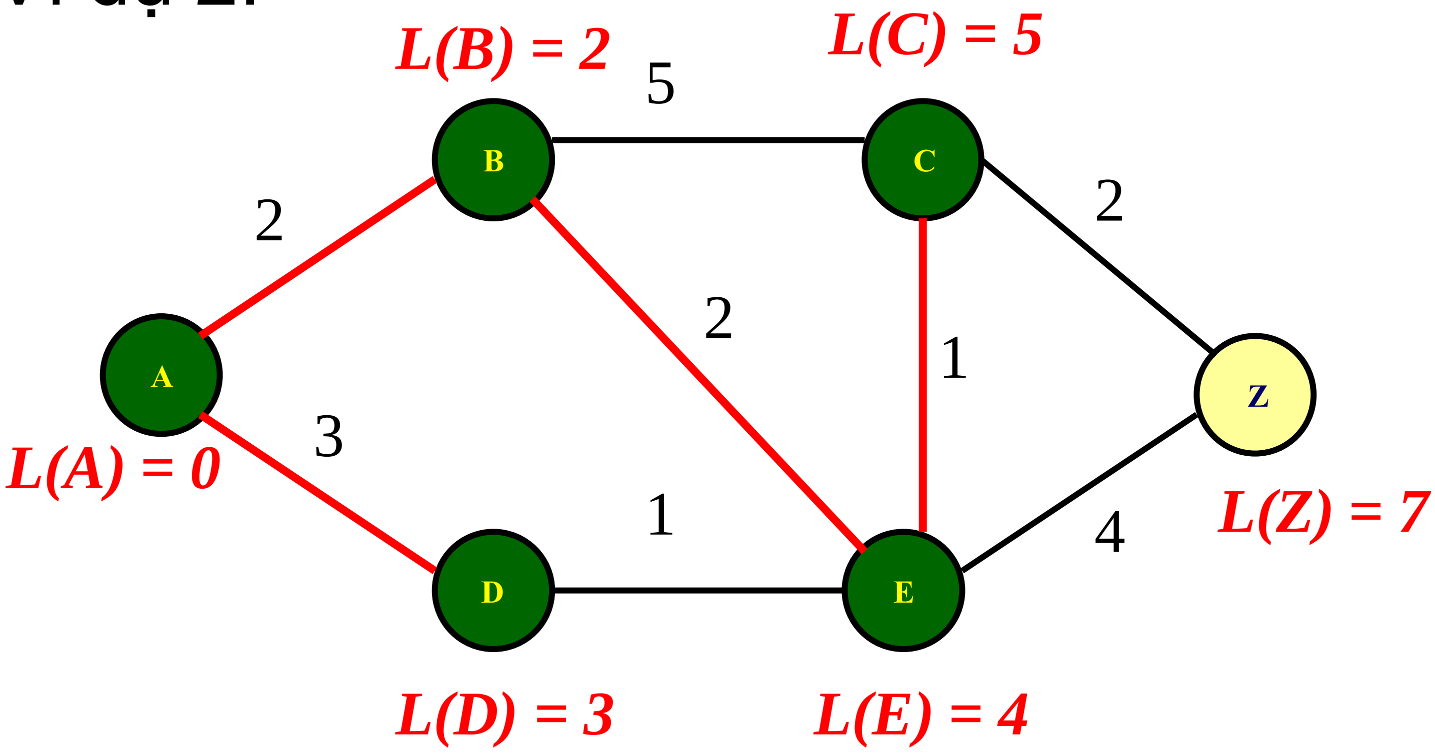
Ví dụ

- Ví dụ 2:



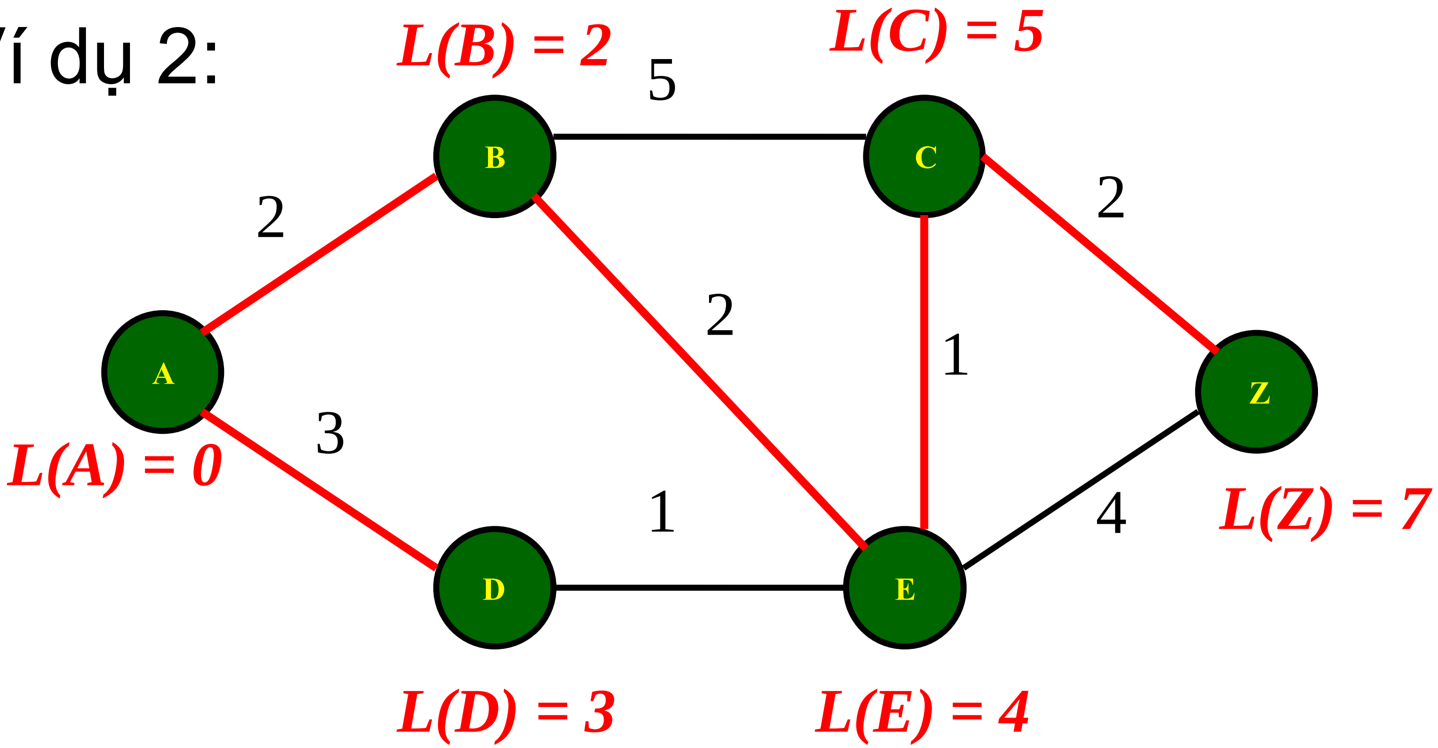
Ví dụ

- Ví dụ 2:



Ví dụ

- Ví dụ 2:

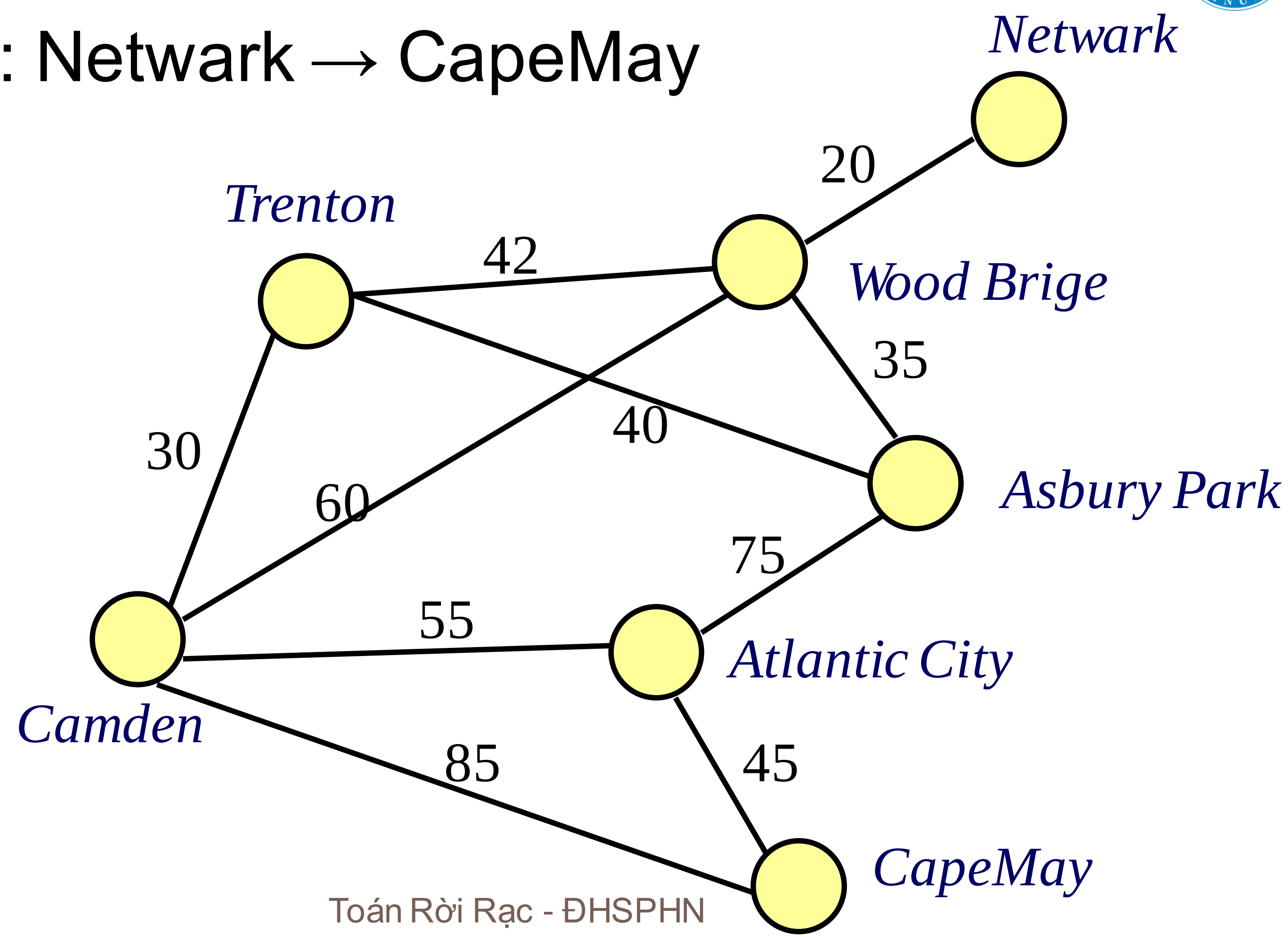


Đường đi ngắn nhất từ A đến Z được tô màu đỏ, qua các đỉnh:

A – B – E – C – Z, Tổng trọng số 7

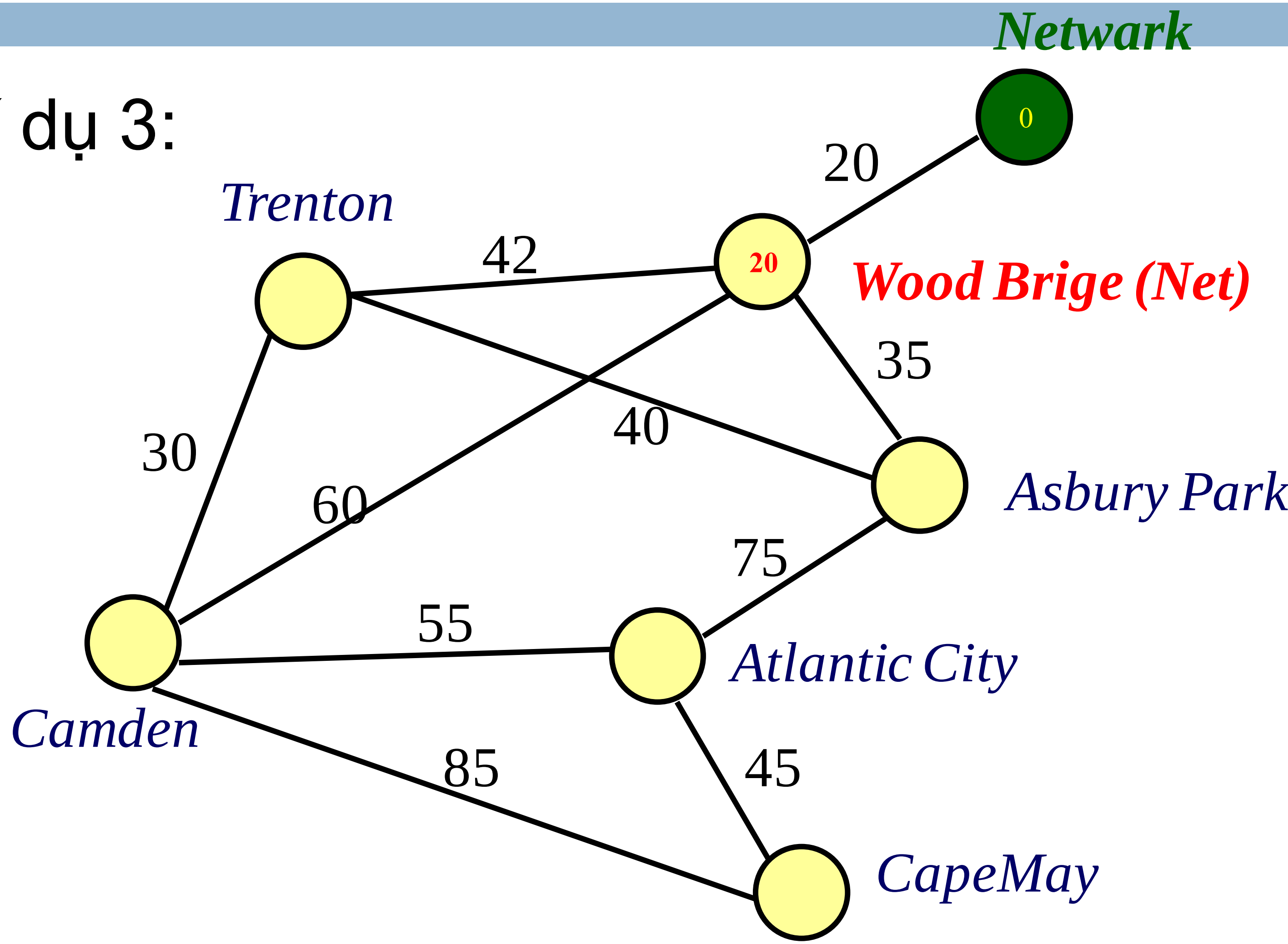
Ví dụ

- Ví dụ 3: Netwark → CapeMay



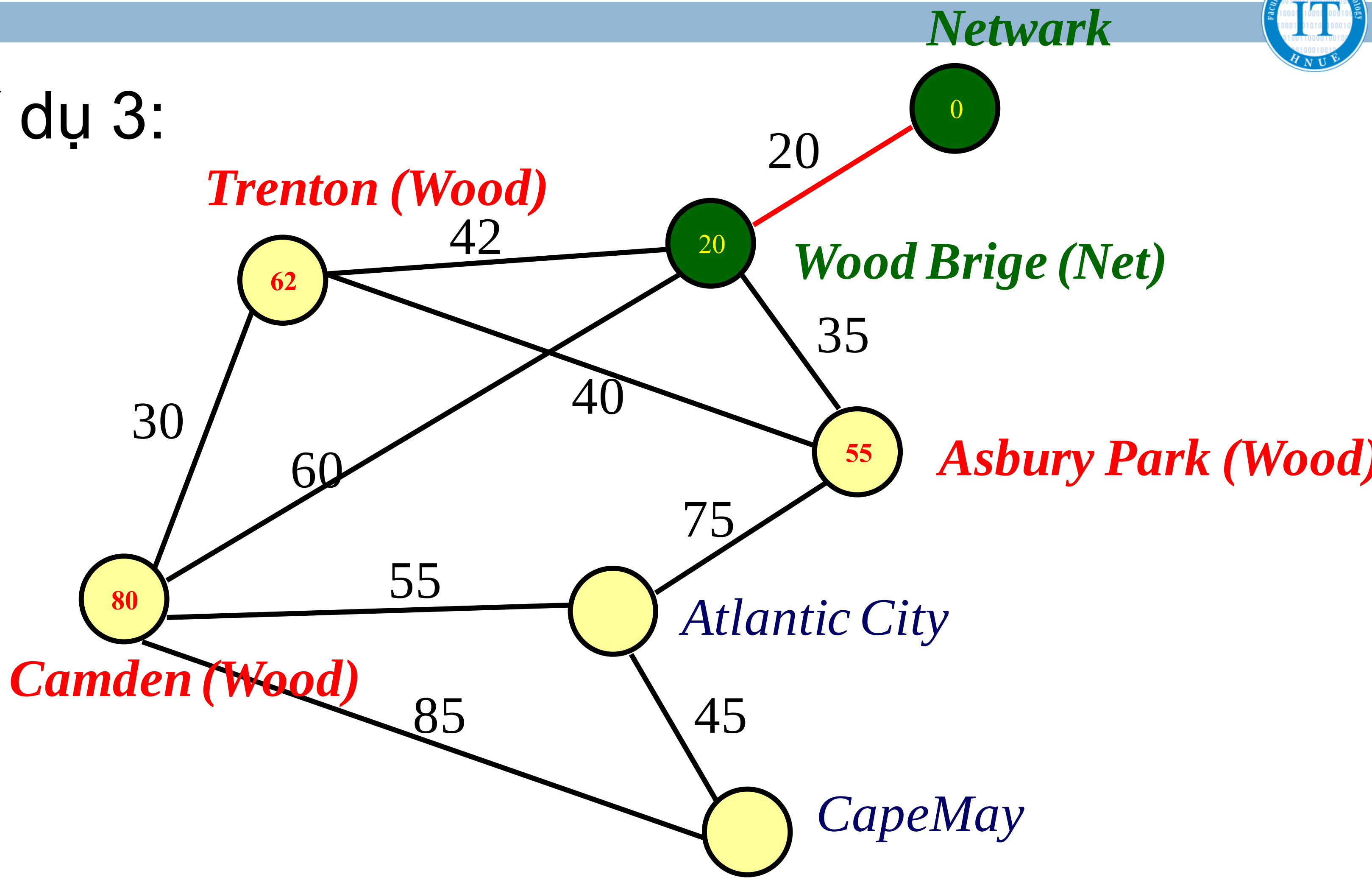
Ví dụ

- Ví dụ 3:


Netwark
0
20
Trenton
42
20
Wood Brige (Net)
35
40
30
60
Asbury Park
75
55
Atlantic City
Camden
85
45
CapeMay

Ví dụ

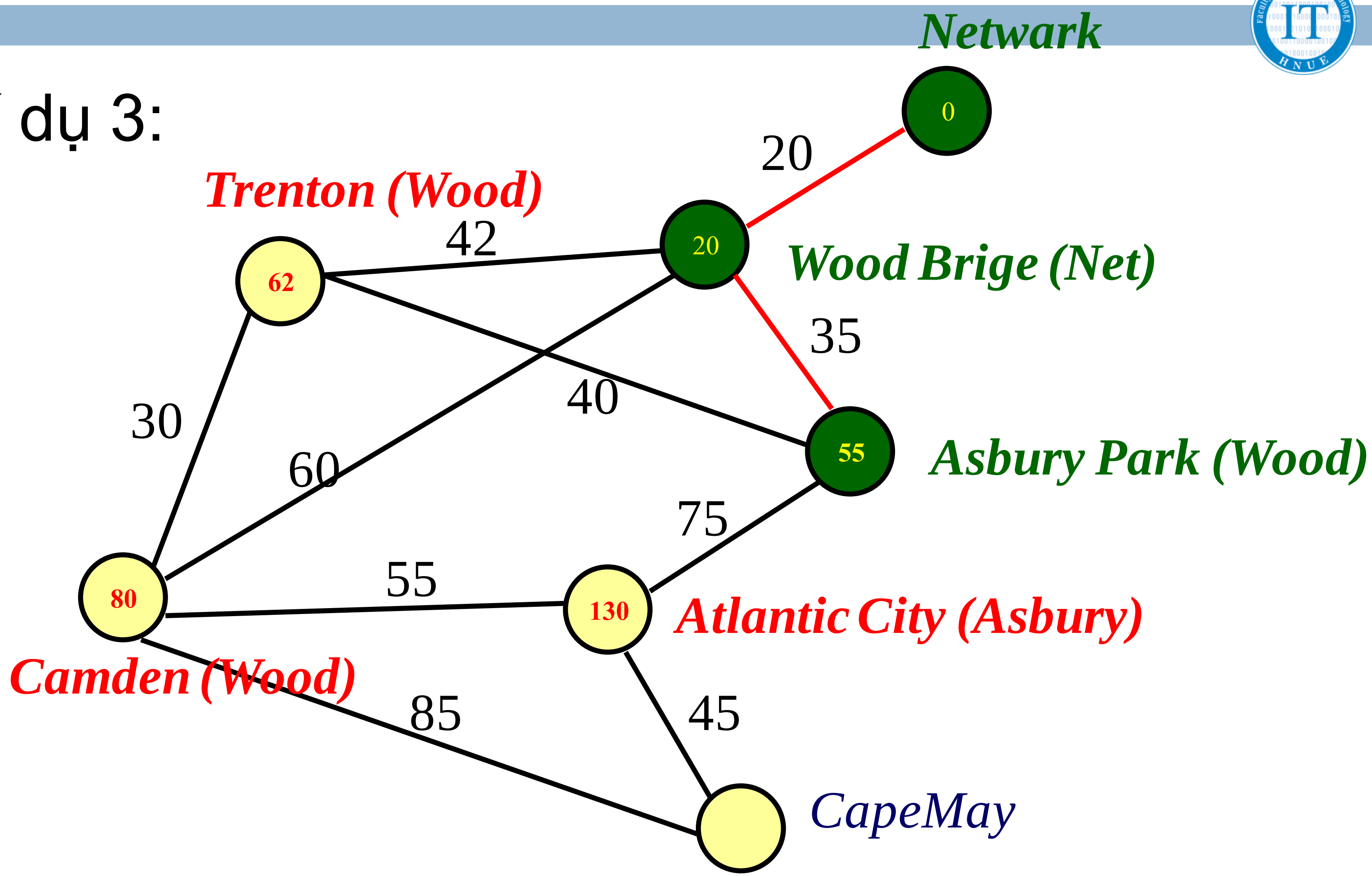
- Ví dụ 3:



Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
30
40
60
55
Asbury Park (Wood)
75
80
55
Atlantic City
Camden (Wood)
85
45
CapeMay

Ví dụ

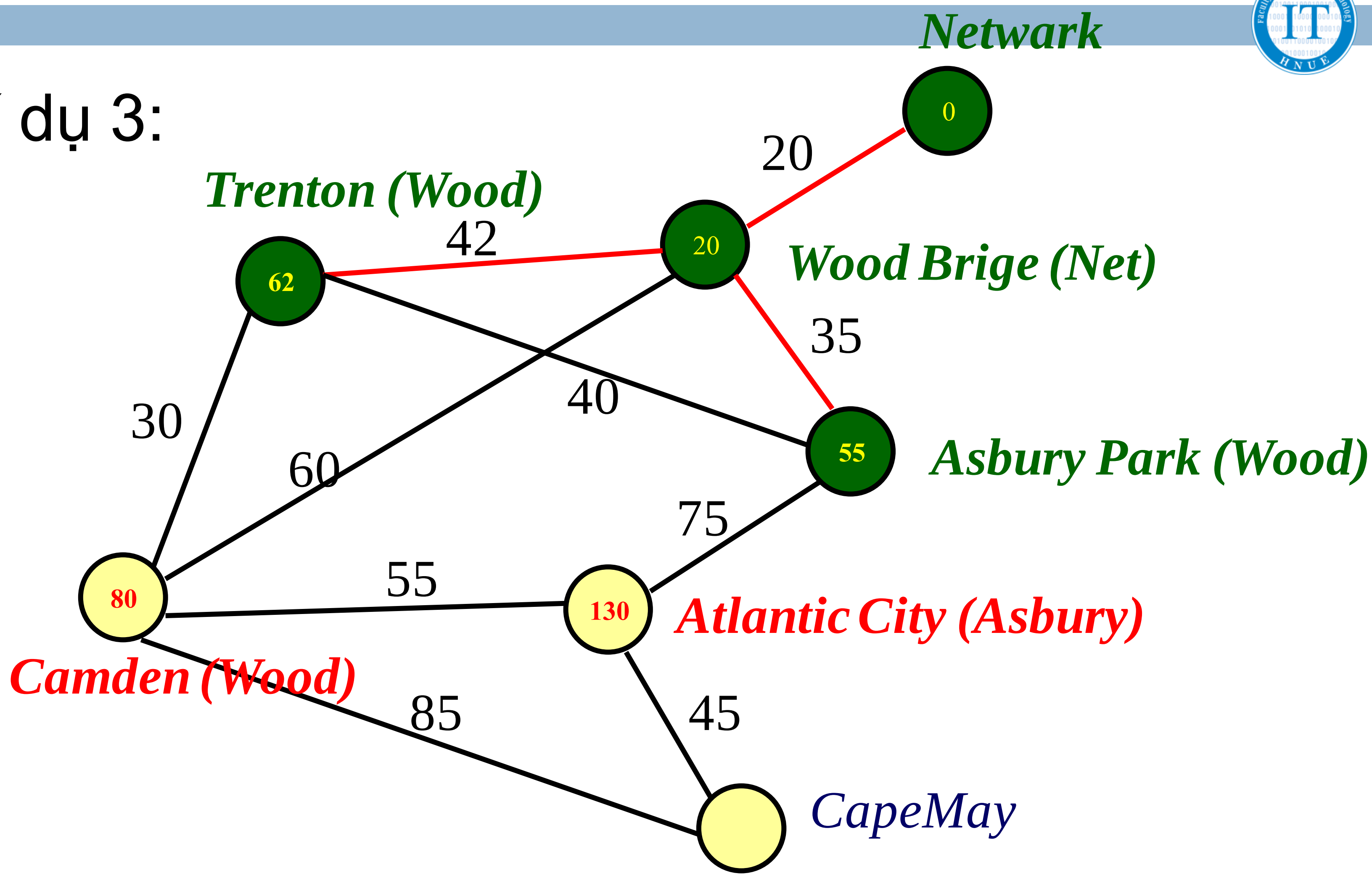
- Ví dụ 3:



Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
30
40
60
55
Asbury Park (Wood)
75
55
80
130
Atlantic City (Asbury)
Camden (Wood)
85
45
CapeMay

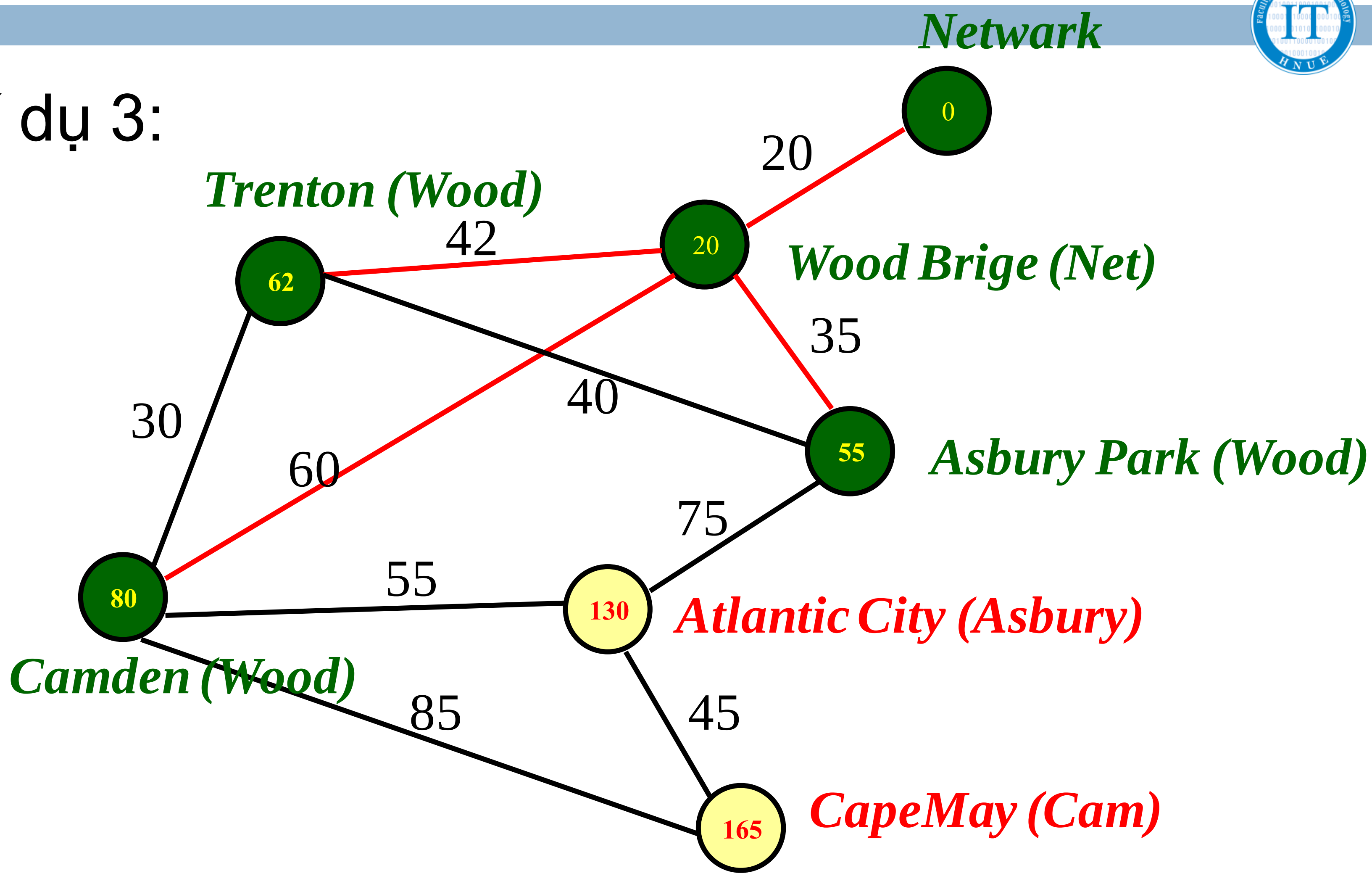
Ví dụ

- Ví dụ 3:


Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
40
30
60
55
Asbury Park (Wood)
75
55
80
130
Atlantic City (Asbury)
Camden (Wood)
85
45
CapeMay

Ví dụ

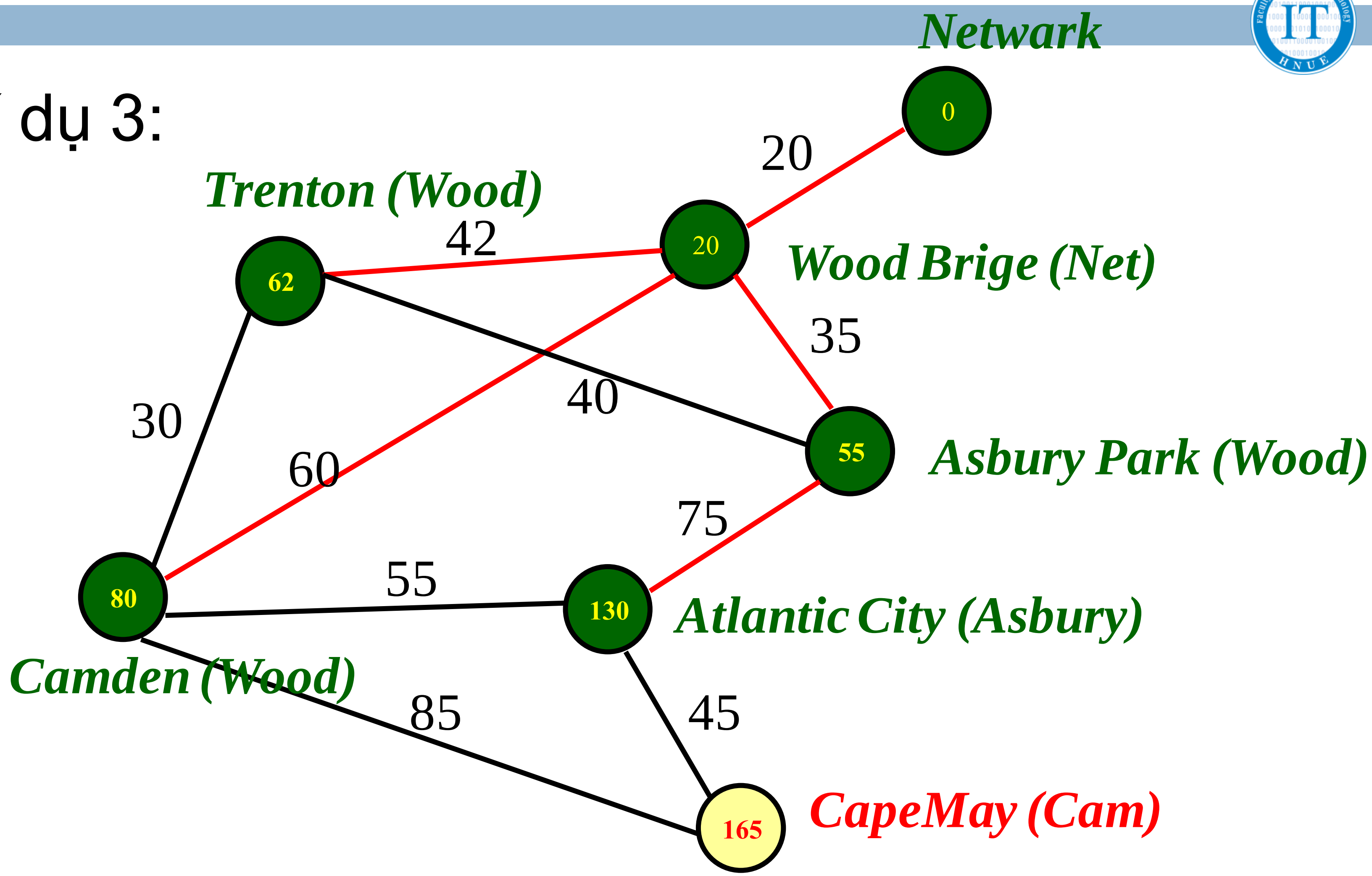
- Ví dụ 3:



Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
40
30
60
55
Asbury Park (Wood)
75
80
55
130
Atlantic City (Asbury)
Camden (Wood)
85
45
165
CapeMay (Cam)

Ví dụ

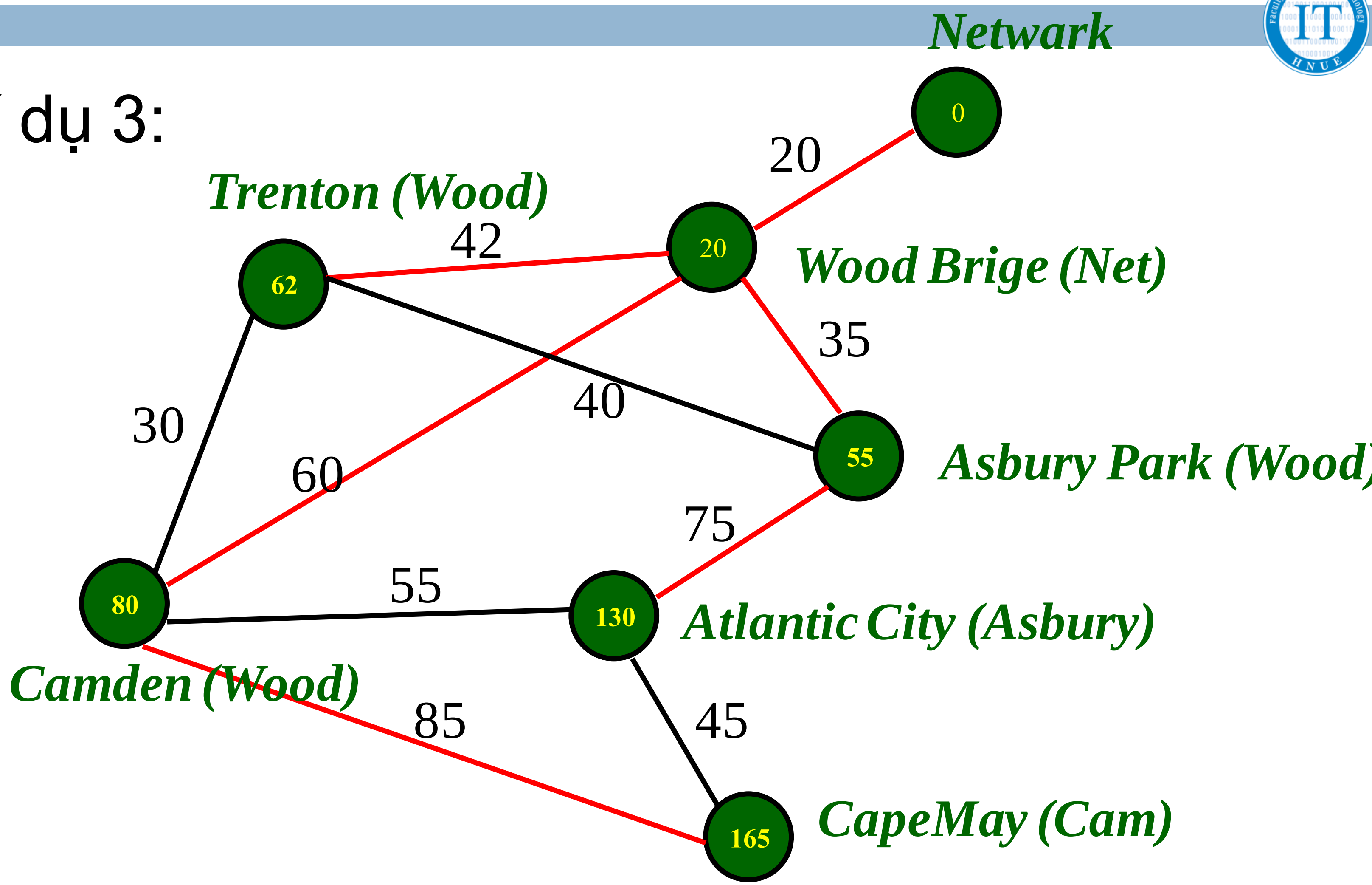
- Ví dụ 3:



Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
40
30
60
55
Asbury Park (Wood)
75
55
80
130
Atlantic City (Asbury)
Camden (Wood)
85
45
165
CapeMay (Cam)

Ví dụ

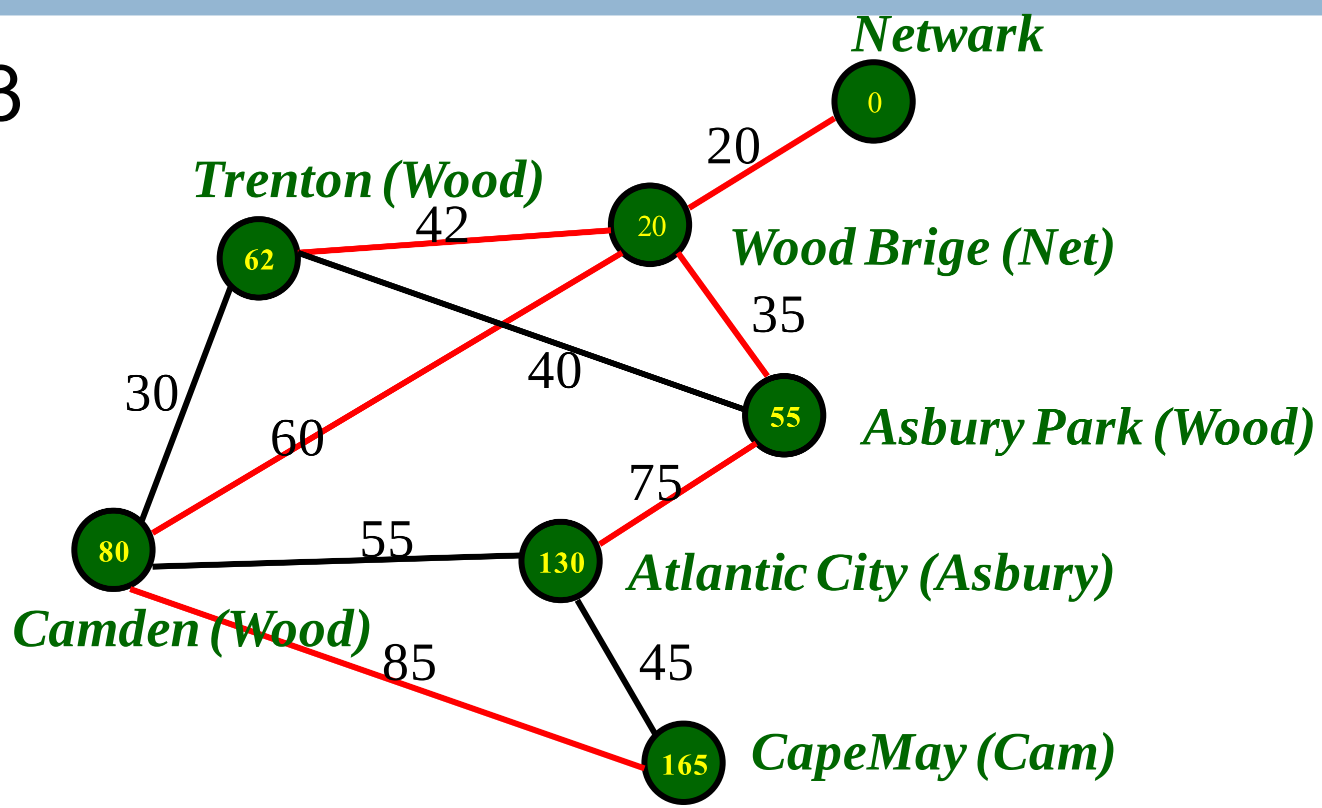
- Ví dụ 3:



Netwark
0
20
Trenton (Wood)
42
20
Wood Brige (Net)
62
35
40
30
60
55
Asbury Park (Wood)
75
55
80
130
Atlantic City (Asbury)
Camden (Wood)
85
45
165
CapeMay (Cam)

Ví dụ

- Ví dụ 3

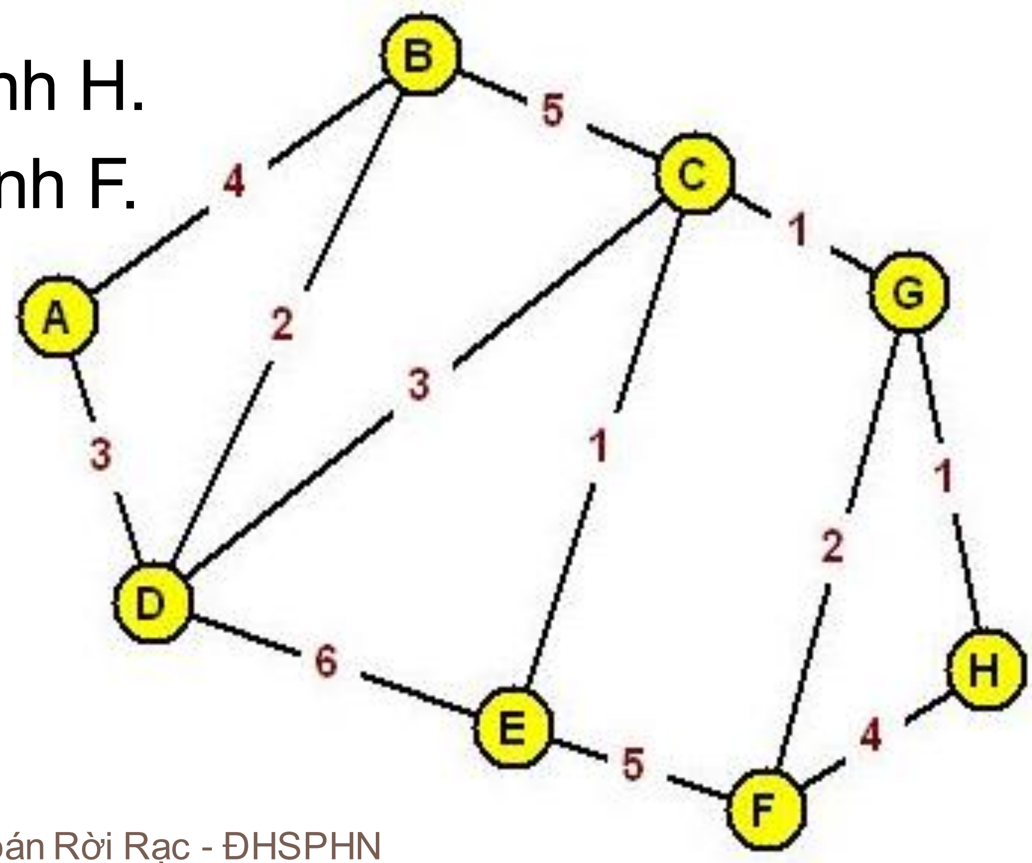


Vậy đường đi ngắn nhất từ Netwark đến CapeMay có độ dài 165:

Netwark → Wood Brige → Camden → CapeMay

Luyện tập

1. Tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị cho bởi hình bên:
   a. Từ đỉnh A đến đỉnh H.
   b. Từ đỉnh B đến đỉnh F.



Luyện tập

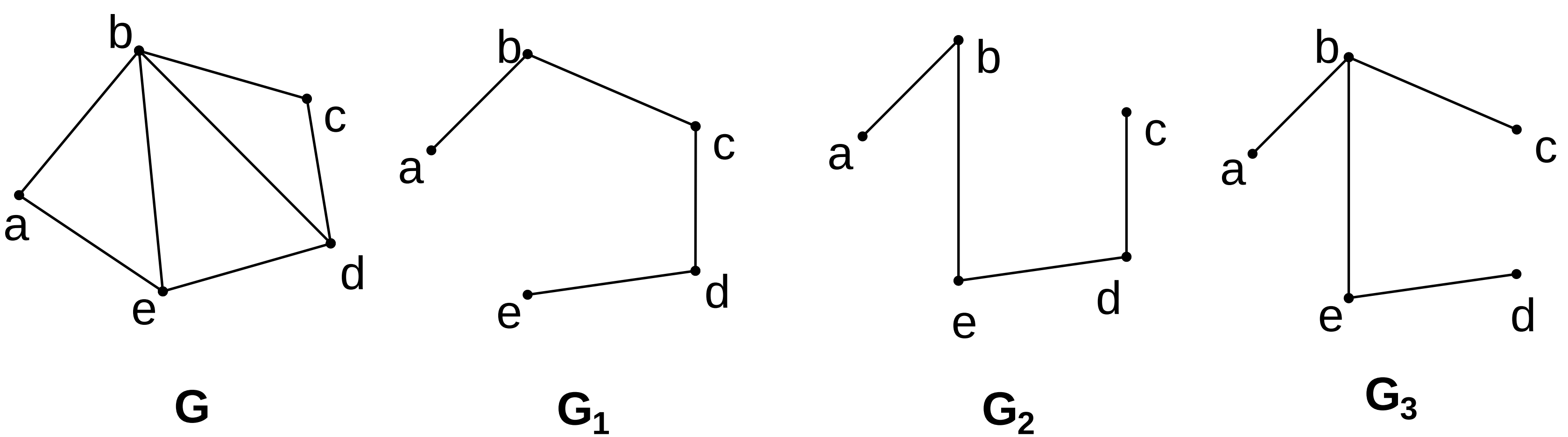
2. Tự vẽ một đồ thị đơn, vô hướng, các đỉnh liên thông với nhau gồm 8 đỉnh và 14 cạnh. Tìm đường đi ngắn nhất từ hai đỉnh tùy ý:

   a. Trọng số của mỗi cạnh là 1.
   b. Tự đánh trọng số cho các cạnh.

Cây khung của đồ thị

Định nghĩa cây khung

- **Định nghĩa**: Cho đồ thị G = (V, E) là một đồ thị vô hướng liên thông. Một đồ thị con G’ của G được gọi là *cây khung (hay cây bao trùm)* của G nếu:
  - G’ là một cây
  - G’ chứa tất cả các đỉnh của cây
- **Ví dụ:**



Xác định cây khung

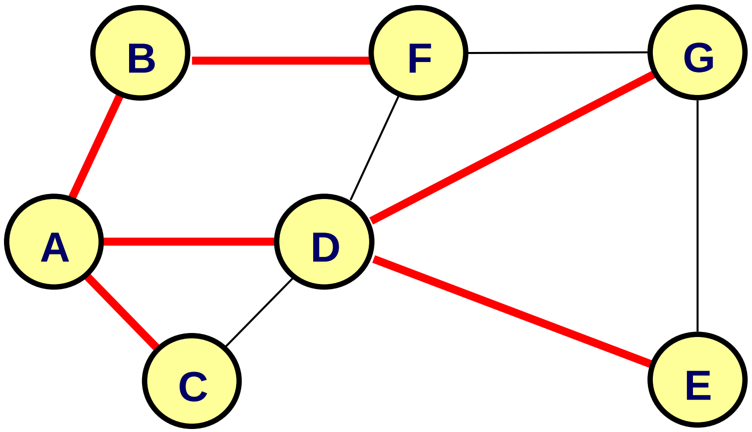
- Xác định cây khung là việc xây dựng một cây chứa tất cả các đỉnh của đồ thị.
- Hai thuật toán xác định cây khung là:
  - Xác định ưu tiên theo chiều rộng
  - Xác định ưu tiên theo chiều sâu

Theo chiều rộng (BFS)

- **Bước 1:** Lấy một đỉnh a làm gốc của cây khung.
- **Bước 2:** Ghép các cạnh liên thuộc với gốc. Các đỉnh kề với gốc trong bước này có mức là 1.
- **Bước 3:** Tiếp tục ghép các cạnh liên thuộc đỉnh mức 1 sao cho không tạo chu trình. Các đỉnh được đưa vào ở bước này có mức là 2.
- **Bước 4:** Tiếp tục quá trình khi tất cả các đỉnh đã được ghép vào cây.

Theo chiều rộng (BFS)

Đỉnh	Tập đỉnh chờ	Cây khung
A	B(A),C(A), D(A)	A
B	C(A), D(A), F(B)	A, B
C	D(A), F(B)	A, B, C
D	F(B), E(D), G(D)	A, B, C, D
F	E(D), G(D)	A, B, C, D, F
E	G(D)	A, B, C, D, F, E
G	∅	A, B, C, D, F, E, G



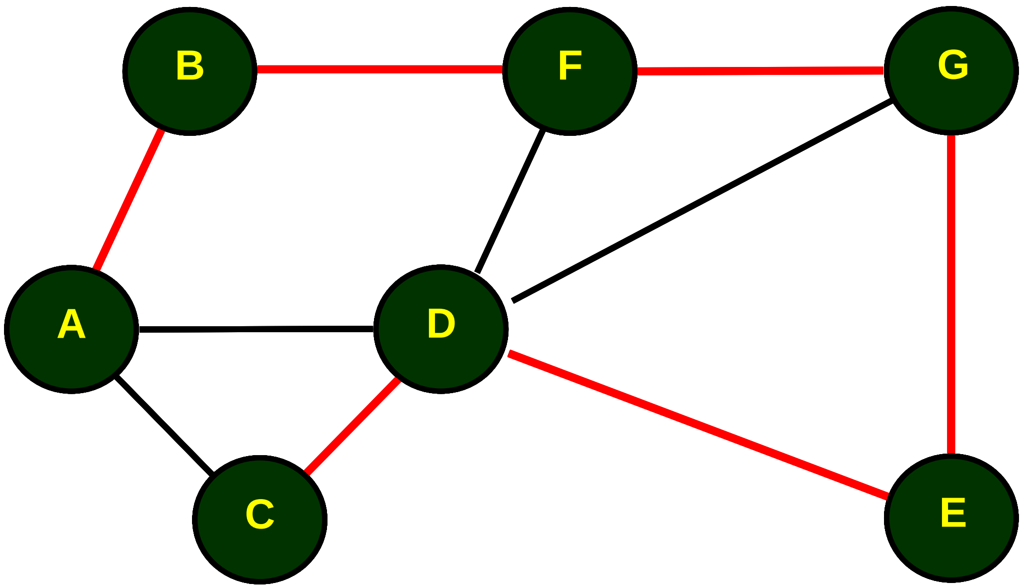
Cây khung tìm được có cạnh tô màu đỏ

Theo chiều sâu (DFS)

- **Bước 1:** Lấy một đỉnh a làm gốc của cây khung.
- **Bước 2:** Xây dựng đường đi từ đỉnh này bằng cách ghép lần lượt các cạnh vào. Mỗi cạnh được ghép vào nối đỉnh cuối cùng của đường đi và một đỉnh chưa thuộc đường đi. Thực hiện đến khi không ghép được thêm cạnh nào nữa.
- **Bước 3:** Nếu đường đi chứa tất cả các đỉnh của đồ thị thì đó chính là cây khung. Nếu không thì chuyển sang bước 4.
- **Bước 4:** Quay lui lại đỉnh ngay trước đỉnh cuối cùng của đường đi và xây dựng đường đi mới bắt đầu từ đỉnh này. Nếu không được thì lùi tiếp đỉnh nữa.

Theo chiều sâu (DFS)

- **Ví dụ:**



Cây khung nhỏ nhất

Cây khung nhỏ nhất

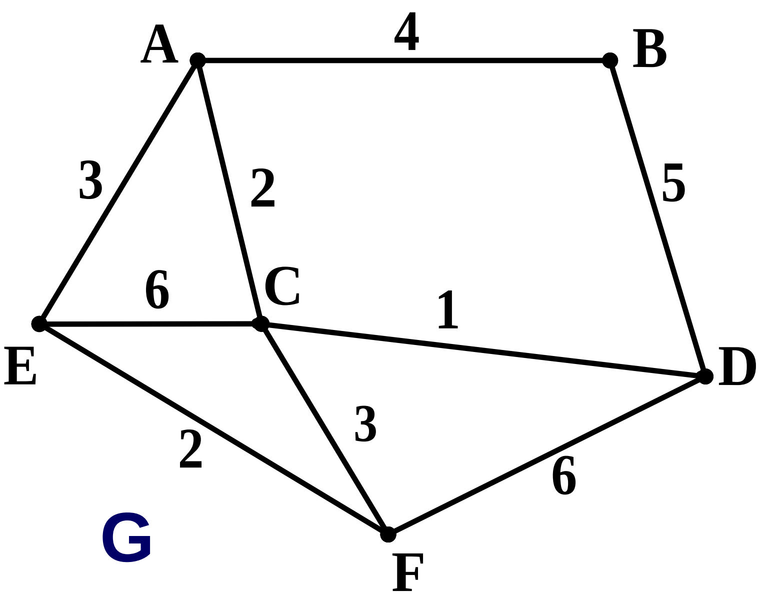
- **Định nghĩa**: **Cây khung nhỏ nhất** trong một đồ thị liên thông, có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.
- **Thuật toán** tìm cây khung nhỏ nhất:
  - Prim (Robert Prim - 1957)
  - Kruskal (Joseph Kruskal – 1965)

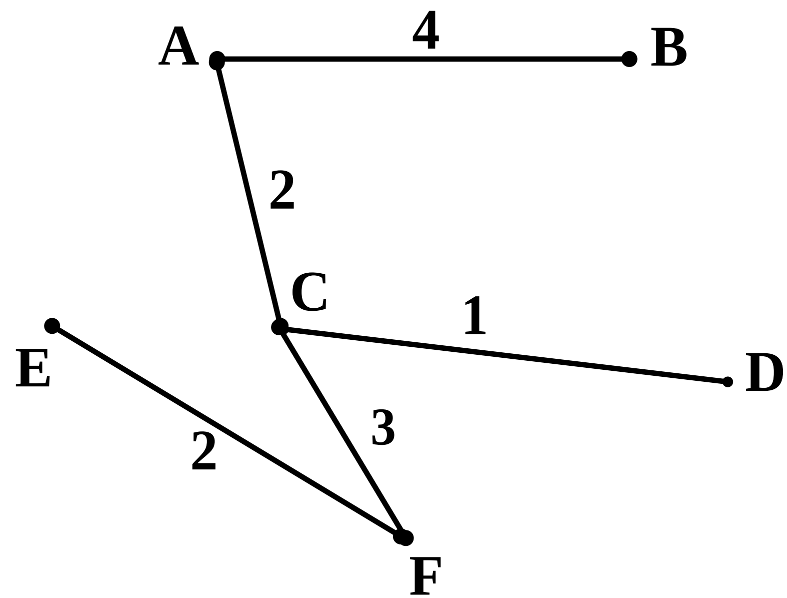
Thuật toán Prim

- Đồ thị G = (V, E) liên thông, có n đỉnh.
  - **Bước 1:** Chọn một cạnh bất kỳ có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung.
  - **Bước 2:** Lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với một đỉnh của cây và không tạo ra chu trình trong cây.
  - **Bước 3:** Thuật toán dừng lại khi (n – 1) cạnh được ghép vào cây.

Thuật toán Prim

- **Ví dụ:** Bằng thuật toán Prim





Cạnh đã được chọn

Cạnh đang xét chọn

Cây khung nhỏ nhất của G

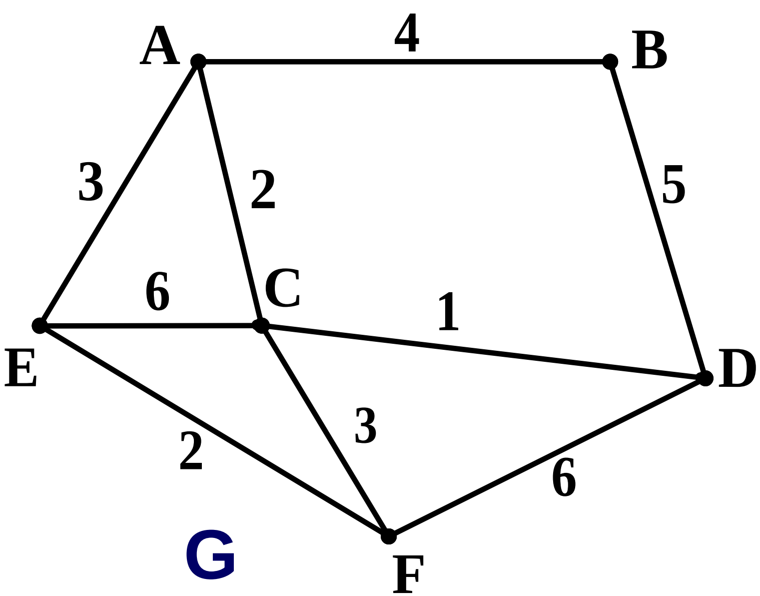
Tổng trọng số là 12

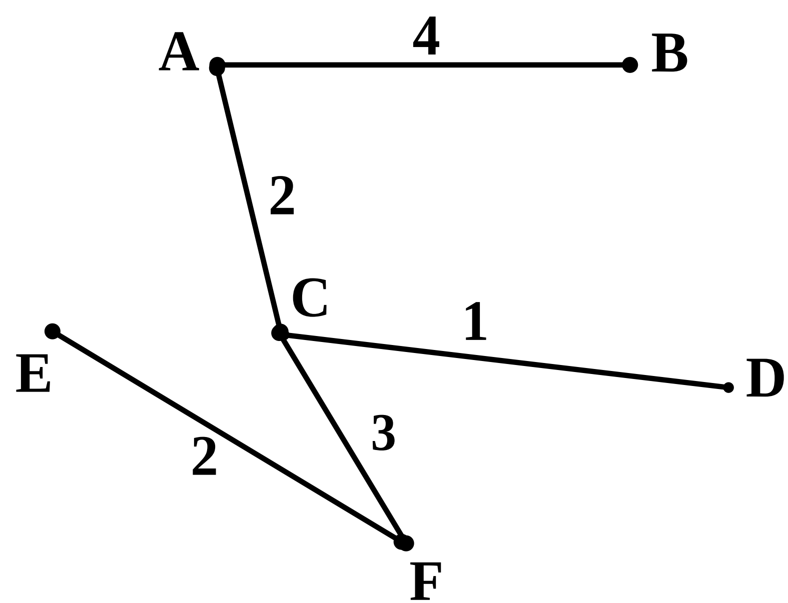
Thuật toán Kruskal

- Đồ thị G = (V, E) liên thông, có n đỉnh.
  - **Bước 1:** Chọn một cạnh bất kỳ có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung.
  - **Bước 2:** Lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số nhỏ nhất mà không tạo ra chu trình trong cây.
  - **Bước 3:** Thuật toán dừng lại khi (n – 1) cạnh được ghép vào cây.

Thuật toán Kruskal

- **Ví dụ:** Bằng thuật toán Kruskal





Cạnh đã được chọn

Cây khung của G

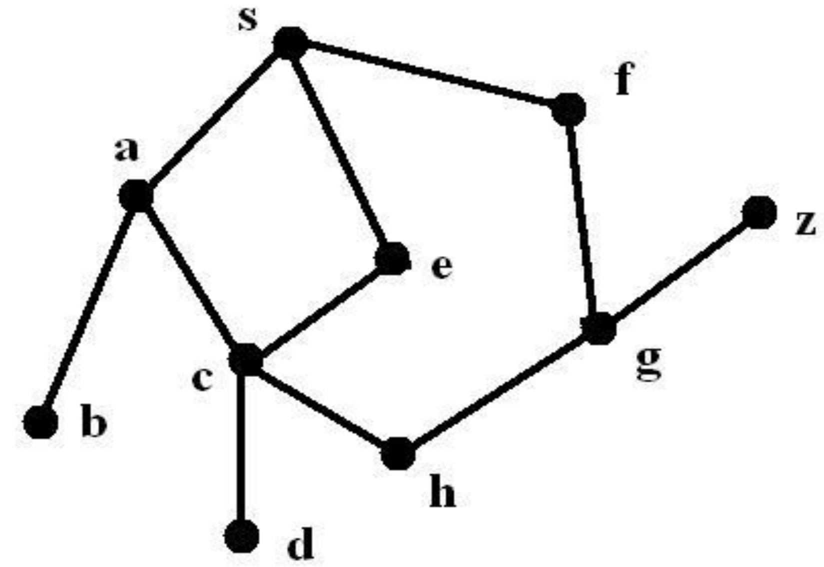
Tổng trọng số 12

Luyện tập

1. Hãy mô tả các bước xét các đỉnh trong quá trình tìm đường đi từ đỉnh *s* tới đỉnh *z* trong đồ thị bên

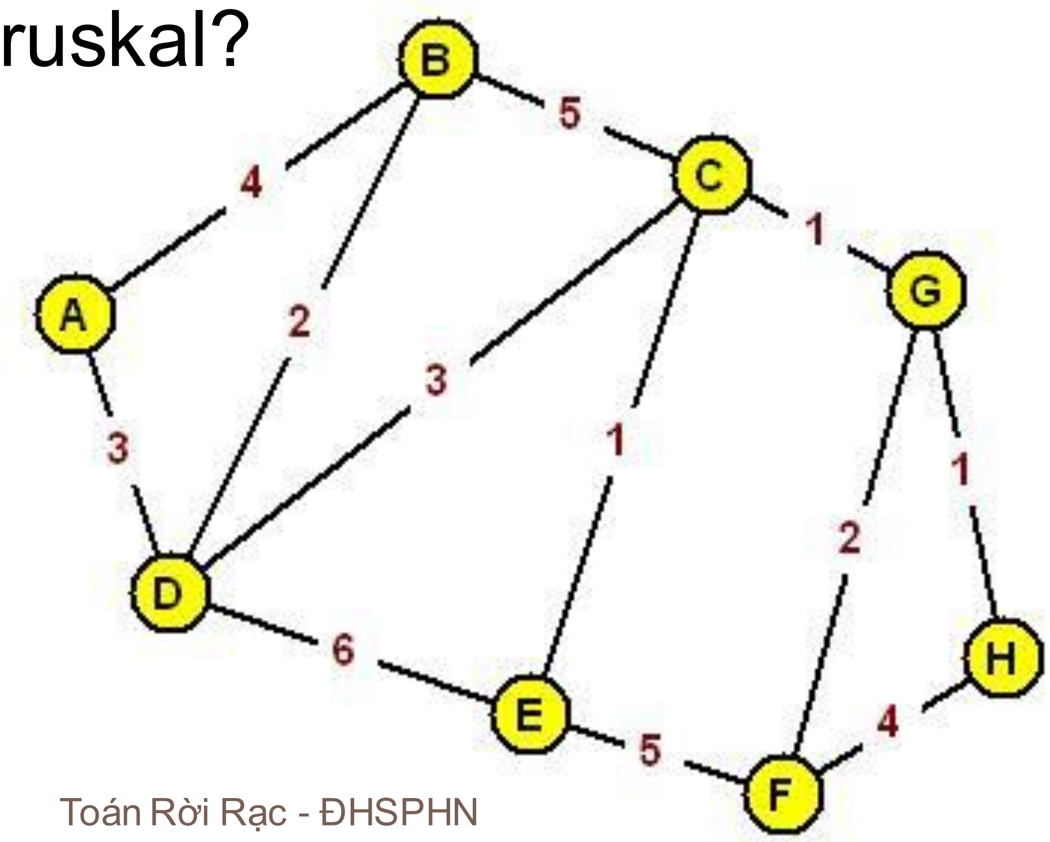
   a. Theo chiều rộng

   b. Theo chiều sâu.



Luyện tập

2. Hãy tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị G có trọng số trong hình bên bằng thuật toán Prim và thuật toán Kruskal?



THANK YOU!