Chương 6:

CHUỖI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

6.1. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Khi chúng cùng hội tụ, xác định α sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Bài giải:

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì : Với mọi $k \geq m$,

Vì dãy tổng riêng phần $\sum_{n=1}^{k} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=m}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$

Nên $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ (1)

- Nếu $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ hội tụ thì : Với mọi $k \geq m$,

Vì dãy tổng riêng phần $\sum_{n=m}^{k} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=m}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{m-1} a_n$

Nên $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ (2)

Từ (1) & (2) ta có điều phải chứng minh.

Hơn nữa, khi chúng cùng hội tụ thì :

$$\alpha = \sum_{n=1}^{m-1} a_n$$

Nhận xét: Như vậy, tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi không thay đổi khi ta thay đổi chỉ số xuất phát, nhưng tổng (khi chuỗi hội tụ) có thể biến đổi. Do đó, thay vì khảo sát tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ta có thể khảo sát tính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

6.2. Chứng tỏ rằng, nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ thì

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq n_0\,, \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| < \varepsilon$$

Bài giải:

Theo **bài 6.1** , do chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ nên ta có :

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k$
- Dãy tổng riêng phần (s_{n-1}) hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k$.

Theo định nghĩa giới hạn, ta được :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\,, \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right| < \varepsilon$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.3. Cho hai chuỗi số hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$ có tổng lần lượt là a và b. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum(a_n + b_n)$ và $\sum \alpha a_n$ với $\alpha \in \mathbb{R}$, cũng hội tụ có tổng lần lượt là $a + b$ và αa.

Bài giải:

Do chuỗi $\sum a_n$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (s_n) hội tụ và :

$$\sum a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = a$$

Chuỗi $\sum b_n$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (t_n) hội tụ và :

$$\sum b_n = \lim_{n\to\infty} t_n = b$$

Suy ra :

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = a + b$$

$$\sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n = \alpha$$

Khi đó dãy tổng riêng phần $(s_n + t_n)$ hội tụ nên $\sum(a_n + b_n)$ hội tụ và có tổng là $a + b$, $\sum \alpha a_n$ hội tụ và có tổng là αa .

6.4. Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ và dãy tăng ngặt các số nguyên (n_k) sao cho $n_1 = 1$. Đặt $b_k = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i = a_{n_k} + a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}-1}$. Chứng minh rằng nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ hội tụ và có tổng là a thì $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ cũng hội tụ và có tổng là a.

<u>Bài giải:</u>

Do chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ và có tổng là a.

Xét dãy tổng riêng phần $\{s_n\}$: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$ khi đó $\{s_n\}$ hội tụ và $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$

Ta cần chứng minh $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ cũng hội tụ và cũng có tổng là a.

Xét dãy tổng riêng phần $\{t_k\}$: $t_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ta có :

$$t_k = \sum_{i=1}^{k} b_i = b_i + b_2 + \dots + b_k$$

$$= \sum_{i=n_1}^{n_2-1} a_i + \sum_{i=n_2}^{n_3-1} a_i + \dots + \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i$$

$$= \sum_{n_1=1}^{n_{k+1}-1} a_i = s_{n_{k+1}-1} \text{ (do } n_1 = 1\text{)}.$$

Do vậy, với mọi k thì $t_k = s_{n_{k+1}-1}$

Do $\{n_k\}$ là dãy tăng ngặt các số tự nhiên nên $\{n_{k+1}-1\}$ cũng là dãy tăng ngặt các số tự nhiên.

Suy ra $\{s_{n_{k+1}-1}\}$ là dãy con của $\{s_n\}$. Mà $\{s_n\}$ hội tụ về a nên suy ra $\{s_{n_{k+1}-1}\}$ cũng hội tụ về a.

Do đó, $\{t_k\}$ hội tụ về a hay $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ cũng hội tụ và có tổng là a.

Ta có điều phải chứng minh.

6.5. Chứng minh rằng với $|x| < 1$ và $m \in \mathbb{N}$ thì ta có $\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \frac{x^m}{1-x}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{m-1} x^n + \sum_{n=m}^{+\infty} x^n$, suy ra $\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{m-1} x^n$.

Ta đặt :

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{khi } x \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{khi } x \neq 1 \end{cases}$$

Khi $|x| < 1$ ta có :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-x}$$

Nên

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Và ta có :

$$\sum_{n=0}^{m-1} x^n = \frac{1-x^m}{1-x}$$

Nên

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{m-1} x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^m}{1-x} = \frac{x^m}{1-x}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.6. Dãy số (a_n) được gọi là một cấp số cộng khi tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n + \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó α được gọi là công sai của cấp số cộng (a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số cộng thì $\sum a_n$ phân kỳ trừ khi dãy (a_n) gồm toàn các số 0.

Dãy số (a_n) được gọi là một cấp số nhân khi tồn tại $q \in \mathbb{R}$ sao cho $a_{n+1} = a_n \times q, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó q được gọi là công bội của cấp số nhân (a_n). Chứng minh rằng nếu (a_n) là một cấp số nhân có công bội là q thì $\sum a_n$ hội tụ nếu và chỉ nếu $|q| < 1$ và khi đó $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Bài giải:

- Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một cấp số cộng với công sai α.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta thấy $a_2 = a_1 + \alpha$, $a_3 = a_2 + \alpha = (a_1 + \alpha) + \alpha = a_1 + 2\alpha$ ... Một cách tổng quát thì $a_n = a_1 + (n-1)\alpha$.

Suy ra, tổng riêng phần thứ n của chuỗi $\sum a_n$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 = \sum_{i=1}^{n} [a_1 + (i-1)\alpha]$$

$$= na_1 + \alpha \sum_{i=1}^{n} (i-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha = \frac{\alpha}{2} n^2 + (a_1 - \frac{\alpha}{2})n$$

Để chuỗi $\sum a_n$ hội tụ, ta phải có dãy $\{s_n\}$ hội tụ. Từ công thức xác định s_n như trên, ta nhận thấy $\{s_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\frac{\alpha}{2} = a_1 - \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \alpha = 0$. Khi đó, do $a_n = a_1 + (n-1)\alpha \ \forall n$, $\{a_n\}$ sẽ là dãy gồm toàn các chứa số 0.

- Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một cấp số nhân với công bội q.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta thấy $a_2 = qa_1, a_3 = qa_2 = q(qa_1) = q^2a_1$ ...Một cách tổng quát thì $a_n = q^{n-1}a_1$.

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}\, a_1 = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

Theo mệnh đề 1.3, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ sẽ hội tụ trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $|q| < 1$, và tổng của chuỗi này (nếu có) sẽ là $\frac{1}{1-q}$.

Vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sẽ hội tụ nếu và chỉ nếu $|q| < 1$. Khi đó : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$.

6.7. Xét tính hội tụ của các chuỗi sau

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.5\ldots(4k-3)}$
3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)2^k}$
4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$
8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nl\ \ {}^2n}$
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^3 n}{n^4}$
10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.5\ldots(4n-3)}$
11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

Bài giải:

Lưu ý rằng tất cả các chuỗi số trong bài tập này đều là chuỗi số dương .

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ và :

Theo định lí về chuỗi điều hòa thì $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kỳ .

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ phân kỳ.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.5 \ldots (4k-3)}$

Ta có : $a_k = \frac{1}{1.5 \ldots (4k-3)}$

$a_{k+1} = \frac{1}{1.5 \ldots (4k-3)(4k+1)}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4k+1} = 0 < 1$

Vậy chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1.5 \ldots (4k-3)}$ hội tụ.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)2^k}$

Ta có :

Với mọi k , $\frac{k}{(2k+1)2^k} < \frac{1}{2^k}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ là chuỗi hội tụ .

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)2^k}$ hội tụ.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{(n+1)!} . \frac{n!}{2n+1} = \frac{2n+3}{(2n+1)} . \frac{1}{n+1}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)} . \frac{1}{(n+1)} = 0$

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$ hội tụ.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ .

Đặt $a_n = \frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$, $b_n = \frac{1}{n}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{li} \quad {}_{n\to\infty} \frac{2n^3+5n}{3n^3+n+7} = \frac{2}{3}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^3+n+7}$ phân kỳ.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Đặt $a_n = \frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+5n^2}{3n^4+n+9} = \frac{2}{3}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3n^4+n+9}$ hội tụ.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ .

Đặt $a_n = \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$, $b_n = \frac{1}{3^n}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)} = \frac{3}{2}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+5}{(2n^2+1)3^n}$ hội tụ .

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$

Xét ánh xạ $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$

Ta thấy f là ánh xạ liên tục,dương và giảm. Do đó theo tiêu chuẩn tích phân của Cauchy, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ và tích phân suy rộng $\int_2^{\infty} f(x)$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ta có :

$\int_2^{\infty} f(x) = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^2} = (-\frac{1}{t})|_{\ln}^{\infty} \ = \frac{1}{\ln 2}$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ hội tụ .

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln^3 n}{n^4}$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Đặt $a_n = \frac{\ln^3 n}{n^4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

Ta thấy :

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^2} = 0$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ .

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{1.5...(4n-3)}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3...(2n-1)(2n+1)}{1.5...(4n-3)(4n+1)} . \frac{1.5...(4n-3)}{1.5...(2n-1)} = \frac{2n+1}{4n+1}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{1}{2}$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{1.5...(4n-3)}$ hội tụ .

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^n}{(2n+2)!}$

Ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2 2^{n+1}}{(2n+4)}.\frac{(2n+2)!}{(n!)2^n}=\frac{2(n+1)^2}{(2n+3).(2n+4)}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{(2n+3).(2n+4)}=\frac{1}{2}$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)}{(n!)2^n}$ hội tụ.

6.8. Chứng minh $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ hội tụ .

Bài giải:

Với mọi $n\in\mathbb{N}$ thì :

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n(n+2)}>1$$

Do đó :

$$\frac{1}{n}\lg\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}>0$$

Vậy đây là chuỗi số dương .

Xét : Với mọi $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\lg\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}\frac{\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]}{\ln 10}<\frac{1}{n}\ln\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]<\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\ln e^{\frac{1}{n}}$$

Suy ra, với mọi $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n}\lg\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}<\frac{1}{n^2}$$

Mà chuỗi $\sum\frac{1}{n^2}$ hội tụ .

Vậy ta có chuỗi trên cũng hội tụ .

6.9. Tìm p sao cho

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ
2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ hội tụ

Bài giải:

1) Ta xét các trường hợp :

- Với $p \leq 0$ thì với $n \geq 3$ ta có : $\ln^p n \leq 1$. Nên :

$$\frac{1}{n\ln^p n} \geq \frac{1}{n}$$

Mà chuỗi $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{nl\ \ {}^p n}$ phân kỳ.

Theo **bài 6.1** ta có chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ phân kỳ.

- Với $p > 0$:

Đặt $f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$, $x \in [2, \infty)$

$f'(x) = -\frac{\ln^p x + p \qquad {}^{p-1}\, x}{x^2 \ln^{2p} x} \leq 0$, $\forall x \in [2, \infty)$

Suy ra f là hàm dương và giảm trên $[2, \infty)$.

Ta thấy : f liên tục trên $[2, \infty)$

Nên $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n}$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_2^{\infty} f(x)dx$ hội tụ .

Xét :

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^p x} dx$$

Đặt $t = \ln x$, suy ra : $e^t dt = d$

Suy ra $\int_2^{\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^p} dt$ hội tụ .

Khi đó : $p > 1$.

Vậy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nl\ \ {}^p n}$ hội tụ khi và chỉ khi $p > 1$.

2) Ta xét các trường hợp :

- Với $p \leq 0$ thì với $n \geq 3$ ta có : $\ln^p n \leq 1$. Nên :

$$\frac{1}{\ln^p n} \geq 1$$

Do chuỗi hằng $\sum_{n=2}^{\infty} 1$ phân kỳ .

Suy ra $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

- Với $p > 0$:

 i. $p \leq 1$: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ .

Vì

$$\frac{1}{\ln^p n} \geq \frac{1}{n^p}$$

Nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

 ii. $p > 1$: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ .

Do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{p} n^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p} n^{\frac{1}{p}} = \infty$$

Nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^{\mathrm{p}} n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{p}}}{\ln n} \right)^p = \infty$$

Suy ra $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ phân kỳ .

Vậy $\nexists p \in \mathbb{R} :\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n}$ hội tụ .

6.10. Xét tính hội tụ của các chuỗi

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$
2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$
3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln}{\sqrt{n}}$
4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$
5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$

Bài giải:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$

Đặt $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$, $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)x}{(x+1)^4} = \frac{-x^2+1}{(x+1)^2} \leq 0\, , \forall x \geq 1$$

Suy ra f giảm trên $[1, \infty)$. Ta có : $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Hay $\{a_n\}$ là dãy dương giảm.

Và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$ hội tụ .

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$

Đặt $a_n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\,(1 \quad \frac{1}{n})$

Xét hàm $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$, $x \in \mathbb{N}$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} < 0\,, \forall x \in \mathbb{N}$$

Suy ra f giảm trên $\mathbb{N}$.

Suy ra $\{a_n\}$ là dãy số dương, giảm và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\frac{n+1}{n}$ hội tụ.

3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Đặt $a_n = \frac{\ln}{\sqrt{n}}$

Xét chuỗi $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln}{\sqrt{n}}$

Xét hàm $f(x) = \frac{\ln}{\sqrt{x}}$, $x \geq 8$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \leq 0\,, \forall x \geq 8$$

Suy ra f giảm trên $[8, \infty)$.

Suy ra $\{a_n\}$ với $n \geq 8$ là dãy dương giảm và :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0\,, \forall n \geq 8$$

Ta đư c $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo **bài 6.1** .

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$

Đặt $a_n = \frac{1}{\ln^n n}$

Ta có : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ hội tụ .

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$

Đặt $a_n = (1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$

Ta có : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^3e^{-1} = e^{-1} < 1$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{3n}e^{-n}$ hội tụ .

6.11. Cho (a_n) là một dãy các chữ số thập phân, nghĩa là $a_n \in \{0,\dots,9\}, \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng chỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}$ luôn luôn hội tụ và có tổng là x thoả điều kiện $0 \le x \le 1$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng $x = 1$ nếu và chỉ nếu $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ là chuỗi số dương $\frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mà ta có : $0 < \frac{1}{10} < 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$ hội tụ

Và

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \frac{1}{9}$$

Do vậy chuỗi $9\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{10})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ hội tụ về 1.

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ hội tụ. Đồng thời, ta có :

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} = 1$$

- Chứng minh : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = 1$ khi và chỉ khi $a_n = 9, \forall n \in \mathbb{N}$.

Như ta đã chứng minh $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{10^n} = 1$. Do vậy, ta chỉ cần chứng minh :

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n} = 1$ thì $a_n = 9, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Giả sử, tồn tại m sao cho $a_m < 9$. Lúc đó : $\frac{9-a_m}{10^m} > 0$.

Mặt khác với mọi n, $0 \leq 9 - a_n \leq 9$ nên theo chứng minh trên $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_m}{10^m}$ hội tụ. Hơn nữa ta có :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_n}{10^n} \geq \frac{9-a_m}{10^m} > 0$$

Do vậy :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_m}{10^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1 \text{ (Vô lí)}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh .

6.12. Cho (a_n) và (b_n) là hai dãy các chữ số thập phân sao cho $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,

i) $a_{n_0} \neq 0$ và $a_n = 0, \forall n > n_0$.

ii) $b_n = a_n$, $\forall n < n_0$, $b_{n_0} = a_{n_0} - 1$ và $b_n = 9, \forall n > n_0$.

Chứng tỏ rằng $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có thể viết lại các dãy như sau :

$$(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0}, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$(b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1, 9, \dots, 9, \dots)$$

Đặt :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{10^k} = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}}$$

Đặt :

$$t_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{b^k}{10^k}$$

$$= \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + 9(\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{1}{10^m})$$

Xét :

$$\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{1}{10^m} = \frac{\frac{1}{10^{n_0+1}} - \frac{1}{10^m}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m}}{9}$$

(tổng cấp số nhân có công bội là 10^{-1})

Suy ra :

$$9(\frac{1}{10^{n_0+1}} + \frac{1}{10^{n_0+2}} + \cdots . + \frac{1}{10^m}) = \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m}$$

$$\lim_{m\to\infty} t_m = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + \lim_{m\to\infty} (\frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^m})$$

$$= \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots . + \frac{a_{n_0-1}}{10^{n_0-1}} + \frac{a_{n_0} - 1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Ta có điều phải chứng minh.

6.13. Cho $0 \le x < 1$. Chứng tỏ rằng tồn tại dãy số thập phân (x_n) sao cho

$$x = \sum_{1}^{+\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

(ta còn gọi cách viết $0, x_1 x_2 x_3$ ... là một biểu diễn thập phân của x)

<u>Bài giải:</u>

Ta kí hiệu : $x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots$ và $x_0 = E(x)$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta đặt : $u_n = 10^{-n} E(10^n x)$ và $v_n = 10^{-n}(E(10^n x) + 1)$.

Khi đó, ta có :

$$\begin{cases} u_n \leq x \leq v_n \\ 10^n u_n \in \mathbb{N} \text{ và } 10^n v_n \in \mathbb{N} \\ v_n - u_n = 10^{-n} \end{cases}$$

Do

$$\begin{cases} E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \end{cases}$$

Nên

$$\begin{cases} 10E(10^n x) \leq 10^{n+1} x < E(10^{n+1} x) + 1 \\ E(10^{n+1} x) \leq 1\ \ {}^{n+1} x < 10(E(10^n x) + 1) \end{cases}$$

Vì $10E(10^n x), E(10^{n+1}x) + 1, E(10^{n+1}x),\ 1\ \ (E(10^n x) + 1) \in \mathbb{Z}$ nên suy ra :

$$\begin{cases} 10E(10^n x) \leq E(10^{n+1} x) \\ E(10^{n+1} x) \leq 10(E(10^n x) + 1) \end{cases}$$

Từ đó :

$$\begin{cases} u_n \leq u_{n+1} \\ v_{n+1} \leq v_n \end{cases}$$

Vậy hai dãy (u_n) và (v_n) kề nhau, do đó hội tụ về cùng một giới hạn l.

Hơn nữa :

Do $u_n \leq x \leq v_n$ nên ta đư c : $l = x$, và $u_n \xrightarrow{n\to\infty} x, v_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Ta có :

- $u_n \leq u_{n+1}$, do đó : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1}$
- $u_{n+1} = 1\ \ {}^{-(n+1)} E(10^{n+1} x) < 10^{-n}(E(10^n x) + 1) = u_n + 10^{-n}$

Suy ra : $10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$.

Như vậy : $10^n u_n \leq 10^n u_{n+1} < 10^n u_n + 1$, $10^n u_n \in \mathbb{N}$.

Như vậy chứng tỏ rằng :$E(10^n u_{n+1}) = 10^n u_n$.

Vì $10^n u_{n+1}$ là một số thập phân chỉ có $n + 1$ chữ số sau dấu phẩy , nên ta có thể kết luận đư c rằng u_n và u_{n+1} có cùng các chứ số thập phân cho đến hàng thứ n.

Khi đó, chọn $x_0 = 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$, x_n là chữ số thập phân thứ n của u_n .
Ta có :

$$u_n = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k 10^{-k}$$

Như vậy : Tồn tại dãy chữ số thập phân (x_n) sao cho

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.14. Cho $0 \le x < 1$. Chứng minh rằng x là một số vô tỉ nếu và chỉ nếu x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn, nghĩa là tồn tại dãy $(x_n) \subset \{0,1, \dots ,9\}$ sao cho tồn tại $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n+k} = x_n, \forall n \ge n_0$ và $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

<u>**Bài giải:**</u>

- Ta chứng minh nếu x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn thì nó là một số hữu tỷ.

Thật vậy, giả sử tồn tại dãy $(x_n) \subset \{0,1, \dots 9\}$ và $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.
Và $x_{n+k} = x_n$, $\forall\, n > n_0$.
Đặt $n_1 = 1, n_i = n_0 + (i-2)k$,$\forall i \ge 2$
Và

$$a_m = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_i}{10^i}$$

Với $m \geq 3$, ta có :

$$a_m = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_i}{10^i} = \sum_{i=n_m}^{n_{m+1}-1} \frac{x_{i-k}}{10^i} = \frac{1}{10^k} \sum_{i=n_m-k}^{n_{m+1}-k-1} \frac{x_i}{10^i} = \frac{1}{10^k} \sum_{i=n_{m-1}}^{n_m-1} \frac{x_i}{10^i}$$

$$= \frac{1}{10^k} a_{m-1}$$

Từ đánh giá trên, bằng quy nạp, ta suy ra :

$$a_m = a_2 (\frac{1}{10^k})^{m-2}, \forall m \geq 2$$

Theo **bài 6.4**, ta có :

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

Do vậy

$$x = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_2 (\frac{1}{10^k})^{m-2}$$

$$= a_1 + a_2 \sum_{m=2}^{\infty} (\frac{1}{10^k})^{m-2} = a_1 + \frac{a_2}{1 - \frac{1}{10^k}} = a_1 + \frac{10^k a_2}{10^k - 1}$$

Với nhận xét rằng a_1 và a_2 đều là các số hữu tỉ, ta suy ra x hữu tỉ.

- Ta chứng minh nếu x hữu tỉ thì có một biểu diễn thập phân tuần hoàn.

Trước hết, ta có : Cho $n \in \mathbb{N}$ sao cho $(n, 10) = 1$. Khi đó, tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 9 là bội số của n. $(*)$

Chứng minh :

Giả sử : Không tìm được số tự nhiên gồm toàn chữ số 9 chia hết cho n.

Xét $9, 99, 999, \dots, \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ lần}}$. Theo điều giả sử, n số này đều không phải là bội số của n. Do đó, khi thực hiện phép chia chúng cho n, ta chỉ có thể thu được nhiều nhất $n-1$ số dư là $1, 2, \dots, n-1$. Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại ít nhất hai trong n số này sẽ cho ra cùng số dư khi chia cho n. Hiệu của chúng khi đó sẽ chia hết cho n.

Ta có $\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ lần}} - \underbrace{99 \dots 9}_{l \text{ lần}}$ chia hết cho n. Do đó $\underbrace{99 \dots 9}_{k-l \text{ lần}}\underbrace{00 \dots 0}_{l \text{ lần}}$ chia hết cho n.

Mà $(\mathrm{n}, 10) = 1$, suy ra $\underbrace{99 \dots 9}_{k-l \text{ lần}}$ chia hết cho n

Mâu thuẫn giả sử. Do vậy $(*)$ đúng.

Do x là một số hữu tỉ thuộc $[0,1)$, tồn tại $m < n \in \mathbb{N}$ sao cho $x = \frac{m}{n}$

Giả sử : $n = 2^s 5^t q$ trong đó $(q, 10) = 1$, theo $(*)$ ta tìm đư c $p \in \mathbb{N}$ sao cho tích của p và q sẽ là một số tự nhiên gồm toàn chữ số 9. Ta có :

$$x = \frac{m}{n} = \frac{m}{2^s 5^t q} = \frac{2^t 5^s pm}{10^{s+t} pq} = \frac{2^t 5^s pm}{10^{s+t} \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ lần}}}$$

Như vậy, x có thể đư c viết dưới dạng $x = \frac{i}{10^j . \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ lần}}}$

Thực hiện phép chia i cho $\underbrace{99 \dots 9}_{k\ lần}$: $i = \underbrace{99 \dots 9}_{k\ lần} . b + r$

Vì : $x < 1$ nên $i < 10^j . \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ lần}}$. Suy ra, $b < 10^j$ hay b có nhiều nhất là j chữ số.

Vì r là số dư trong phép chia nên $r < \underbrace{99 \dots}_{k \text{ lần}}$. Vậy r có nhiều nhất là k chữ số. Ta viết lại : $\quad i = \underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ lần}} . \overline{b_1 b_2 \dots b_j} + \overline{r_1 r_2 \dots r_k}$

Thế vào x ta có :

$$x = \frac{\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ lần}}.\overline{b_1b_2\ldots b_J} + \overline{r_1r_2\ldots r_k}}{10^j.\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ lần}}}$$

$$= \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_J}}{10^j} + \frac{1}{10^j}.\frac{\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_k}}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}}$$

$$= \frac{\overline{b_1b_2\ldots b_J}}{10^j} + \frac{1}{10^j}.\frac{\overline{r_1r_2\ldots r_k}}{10^k}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{10^{hk}} = \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \frac{1}{10^j}.\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{r_l}{10^l}\right).\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{10^{hk}}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \frac{1}{10^j}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{r_1}{10^{l+hk}} = \sum_{l=1}^{j}\frac{b_l}{10^l} + \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\frac{r_l}{10^{j+l+hk}} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{x_l}{10^l}$$

Trong đó :

$$x_l = b_l \text{ nếu } 1 \le l \le j$$

$$x_{j+hk+l} = r_l\,, \forall l \in \{1,2,\ldots,k\}.$$

Ta nhận xét rằng : $x_n = x_{n+k}\,, \forall n > j$.

Suy ra x có một biểu diễn thập phân tuần hoàn .

Ta có điều phải chứng minh .

6.15. Chứng tỏ rằng 0,1010010001000010…, trong đó chữ số 0 giữa hai chữ số 1 liên tiếp tăng 1 sau mỗi lần xuất hiện, biểu diễn một số vô tỷ.

<u>**Bài giải:**</u>

Đặt $A = 0{,}1010010001000010\ldots$, ta sẽ chứng minh A vô tỷ.

- Giả sử A hữu tỉ, theo **bài 6.14**, A có dạng

$$0, a_1a_2a_3\ldots a_{T-1}(a_1\ldots a_{T+k})(a_T\ldots a_{T+k})\ldots$$

Trong đó, $a_T\ldots a_{T+k}$ là phần tuần hoàn và không thể toàn bằng 0.

- Gọi M là độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong $a_1a_2 \dots a_{T+k}$ có thể đạt được.
- Gọi N là độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong $a_Ta_{T+1} \dots a_{T+k}$ có thể đạt đư c.
- Ta suy ra độ dài lớn nhất mà chuỗi con toàn 0 trong biểu diễn của $A \leq \max\{M, N\} < \max\{T + k, 2(k + 1)\}$

Điều này mâu thuẫn vì A có thể chứa một chuỗi con toàn 0 với độ dài tuỳ ý.

Vậy $A \notin \mathbb{Q}$.

6.16. Chứng tỏ rằng $0, x_1x_2x_3 \dots$, trong đó $x_n = 1$ nếu n là số nguyên tố, $x_n = 0$ nếu n không là số nguyên tố biểu diễn một số vô tỷ.

Bài giải:

Giả sử $0, x_1x_2x_3 \dots$ có một biểu diễn thập phân tuần hoàn, nghĩa là tồn tại $(x_n) \subset \{0,1\}$ sao cho tồn tại $n_0, k \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n+k} = x_n, \forall n \geq n_0$.

Nếu $n_0, n_0 + k, n_0 + 2k$ là các số nguyên tố.

Do tập hợp các số nguyên tố là vô hạn, ta được $n_0 + n_0k$ sẽ là số nguyên tố.

(vô lí vì : $n_0 + n_0k = n_0(1 + k)$ chia hết cho $1, n_0, n_0(1 + k), 1 + k$)

Suy ra $0, x_1x_2x_3 \dots$ biểu diễn một số vô tỷ.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.17. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a+nb}$ phân kỳ.

Bài giải:

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ .

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a+nb}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{b}$$

Mà $0 < \frac{1}{b} < +\infty$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a+nb}$ phân kỳ.

Theo **bài 6.1**, ta có điều phải chứng minh .

6.18. Chứng minh rằng dãy tổng riêng phần của một chuỗi số dương là một dãy tăng.

Bài giải:

Xét chuỗi số dương $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ có dãy tổng riêng phần là (s_n)

Với $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Ta có :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} > 0$

Hay $s_{n+1} > s_n$.

Suy ra (s_n) là dãy tăng.

6.19. Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0. Xét A là tập hợp các tổng hữu hạn các phần tử của $(a_i)_{i\in I}$, nghĩa là

$$A = \{a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} | \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset I\}$$

Chứng minh rằng nếu $\sup A < \infty$ thì tập các chỉ số $i \in I$ sao cho $a_i \neq 0$ là tập quá lắm đếm được. Khi đó, ta đặt $\sum_{i\in I} a_i = \sup A$. Hơn nữa, chứng tỏ rằng khi I đếm được, nghĩa là có song ánh

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\to I \\ n &\longmapsto i_n \end{aligned}$$

Thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và có tổng cũng là $\sup A$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có mệnh đề sau : Một tập hợp I gọi là quá lắm đếm được khi và chỉ khi tồn tại một dãy tăng $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ các tập con hữu hạn của I mà hợp bằng I.

Chứng minh :

- Chiều thuận : Do I quá lắm đếm đư c nên tồn tại một tập con P của $\mathbb{N}$ và một song ánh $f : P \to I$.

Nếu P hữu hạn thì I hữu hạn, nên ta chọn $J_n = I$, với $n \in \mathbb{N}$.

Nếu P vô hạn thì tồn tại một song ánh tăng ngặt :

$$\varphi : \mathbb{N} \to P$$

Với $n \in \mathbb{N}$, ta kí hiệu $J_n = fo\varphi(\{1,2,\dots,n\})$, khi đó : với mọi $n \in \mathbb{N}$, J_n là một tập con hữu hạn của I và $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = fo\varphi(\mathbb{N}) = f(P) = I$.

- Chiều đảo :

Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $J_n = J_{n_0}$, với mọi $n \geq n_0$ thì $I = J_{n_0}$, do đó I hữu hạn.

Nếu ngược lại khi loại đi những phần tử lặp lại có thể có trong $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ thì ta lại quy về trường hợp một dãy $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tăng ngặt. Khi đó chỉ cần đánh số phần tử thuộc $J_0, J_1 \setminus J_0, J_2 \setminus J_1$ ... để thu được một song ánh từ $\mathbb{N} \to I$.

Ta kí hiệu tập hợp các tập con hữu hạn của I (không rỗng) là $\mathfrak{I}(I)$.

Do $\sup A <$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho :

$$\forall J \in \Im(I), \sum_{i \in J} a_i \leq M$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $I_n = \left\{ i \in I; a_i \geq \frac{M+1}{n} \right\}$

Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho I_n vô hạn. Khi đó tồn tại $i_1, \dots, i_n \in I$, từng đôi một khác nhau sao cho $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{i_k} \geq \frac{M+1}{n}$. Từ đó với $J_n = \{i_1, \dots, i_n\}$ ta có :

$$\sum_{i \in J_n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k} \geq n \frac{M+1}{n} > M$$

Điều này mâu thuẫn.

Do vậy I_n hữu hạn với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác : Với mọi $i \in I$ sao cho $a_i > 0$, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ thỏa $a_i \geq \frac{M+1}{n}$. Do đó $i \in I_n$.

Ta đư c :

$$\{i \in I; a_i > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Theo mệnh đề trên, ta kết luận rằng tập $\{i \in I; a_i > 0\}$ quá lắm đếm được.

Hơn nữa, do $\sup A < \infty$, I đếm được và $\{i_k; 1 \leq k \leq n\}$ là tập con hữu hạn của I, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i_n} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Và suy ra rằng $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Mặt khác : Cho J là một tập con hữu hạn của I. Khi đó $i^{-1}(J)$ là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$ và do đó tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $i^{-1}(J) \subset \{1, \dots, N\}$. Suy ra :

$$\sum_{i\in J} a_i \le \sum_{n=1}^{N} a_{i_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$$

Từ đó ta có :

$$\sum_{i\in I} a_i \le \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$$

Vậy ta được $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} = \sum_{i\in I} a_i = \sup$.

6.20. Cho $(a_i)_{i\in I}$ là một họ không rỗng các số ≥ 0 với tổng $\sum_{i\in I} a_i < \infty$ và $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ làm một phân hoạch của I, nghĩa là $I_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_m \cap I_n = \emptyset$ khi $m \neq n$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$. Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i\in I_n} a_i$ hội tụ và có tổng là $\sum_{i\in I} a_i$.

<u>Bài giải:</u>

Cho J là một tập con hữu hạn của I. Tồn tại một tập con hữu hạn A của $\mathbb{N}$ sao cho $J \subset \bigcup_{n\in A} I_n$, ta có :

$$\sum_{i\in J} a_i \le \sum_{i\in \bigcup_{n\in A} I_n} a_i = \sum_{n\in A}\sum_{i\in I_n} a_i \le \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i$$

Suy ra :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i \ge \sum_{i\in I} a_i$$

Mặt khác ta có :

Cho B là một tập con hữu hạn của $\mathbb{N}$. Vì $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$ và các I_n đôi một rời nhau nên $\bigcup_{n\in B} I_n$ là một tập con hữu hạn của I. Và :

$$\sum_{n\in B}\sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in \bigcup_{n\in B} I_n} a_i \le \sum_{i\in I} a_i$$

Do đó :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i \le \sum_{i\in I} a_i$$

Như vậy ta được :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i = \sum_{i\in I} a_i$$

Vì

$$\sum_{i\in I} a_i < \infty$$

Nên chuỗi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I_n} a_i$$

hội tụ và có tổng là $\sum_{i\in I} a_i$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.21. Xét hai chuỗi số dương $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Chứng minh,

a) Nếu $\sum b_n$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} < \infty$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

b) Nếu $\sum b_n$ phân kỳ và $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n} > 0$ thì $\sum a_n$ phân kỳ.

Bài giải:

a) Vì $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} < \infty$ nên chọn $t \in (0,\infty)$ sao cho $\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_n}{b_n} \le t$.

Do đó : tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a_n}{b_n} \le t$, với mọi $n \ge n_0$.

Suy ra $a_n \le tb_n$.

Mà $\sum b_n$ hội tụ nên ta có $\sum a_n$ hội tụ.

b) Vì $\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_n}{b_n} > 0$ nên chọn p sao cho $0 < p < \infty$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{a_n}{b_n} \geq p$ với mọi $n \geq n_0$.

Suy ra $a_n \geq pb_n$.

Vì $\sum b_n$ phân kì nên $\sum a_n$ phân kỳ.

6.22. Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

là chuỗi hội tụ, trong đó $u_{2n} = b^n$ và $u_{2n-1} = a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Bài giải:</u>

Ta có :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 \ldots = a + a^2 + a^3 + \cdots + b + b^2 + b^3 \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$$

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n$

Ta có $|a| < 1$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ hội tụ (chuỗi hình học).

Suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ hội tụ . (1)

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b^n$

Ta có $|b| < 1$ nên $\sum_{n=1}^{+\infty} b^n$ hội tụ (chuỗi hình học).

Suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ hội tụ . (2)

Từ (1) & (2) ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ.

6.23. Chứng minh rằng các hằng số α trong tiêu chuẩn tỉ số của d'Alembert và tiêu chuẩn căn số của Cauchy có thể lần lượt thay bằng $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ và $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$.

Bài giải:

i) Thay hằng số α trong tiêu chuẩn tỉ số của d'Alembert bằng

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ thì :

- Nếu $\alpha < 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nên ta chọn $q : \alpha < q < 1$ thì $\exists n_{0,} \forall n \geq n_0$, ta có : $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

Suy ra $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{q^{n+1}}{q^n} \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ $\forall n \geq n_0$.

Do đó: $a_n \leq q^n \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$ $\forall n \geq n_0$,

Mà chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ hội tụ với $\alpha < q < 1$ nên ta có $\sum a_n$ hội tụ.

- Nếu $\alpha > 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, suy ra tồn tại dãy con $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k$ của $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ sao cho $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k >$ 1.

Suy ra $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_k$ là dãy dương và tăng nên không thể hội tụ về 0 .

Nên $\frac{a_{n+1}}{a_n} \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$.

Nếu (a_n) là dãy hằng thì hiển nhiên chuỗi hằng và dương $\sum a_n$ phân kỳ.

Nếu (a_n) là dãy tăng thì (a_n) không thể hội tụ về 0.

Vậy $\sum a_n$ phân kỳ.

ii) Thay hằng số α của tiêu chuẩn căn số của Cauchy bằng

$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n}$ thì :

- Nếu $\alpha < 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} < 1$ nên chọn $\beta :\ \alpha < \beta < 1$ thì $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt[n]{a_n} <$ $\beta\ , \forall n \geq n_0$.

Suy ra $a_n < \beta^n, \forall n \geq n_0$.

Mà chuỗi $\sum \beta^n$ hội tụ (với $\alpha < \beta < 1$) nên $\sum a_n$ hội tụ.

- Nếu $\alpha > 1$:

$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{a_n} > 1$, suy ra tồn tại dãy con $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}})$ của $(\sqrt[n]{a_n})$ sao cho $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$ với k đủ lớn.

Do đó : $a_{n_k} > 1$ với k đủ lớn.

Nên $a_n \nrightarrow 0$ khi $n \to \infty$.

Vậy $\sum a_n$ phân kỳ.

6.24. (Định lý Albel hay Pringsheim) Nếu (a_n) là một dãy số dương giảm và $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Bài giải:

Theo **bài 6.2**, ta có thể thấy :

Chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ dẫn đến dãy số $\{r_n\}$ thoả $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ hội tụ về 0.

Do $\{a_n\}$ là các dãy số dương và giảm nên ta có :

$r_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq \sum_{i=n}^{2n-1} a_i \geq \sum_{i=n}^{2n-1} a_{2n} = na_{2n}$.

Do vậy : $r_n \geq na_{2n} > 0$ hay $2r_n \geq 2na_{2n} > 0$.

Mà $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ nên suy ra $\lim_{n\to\infty}(2na_{2n}) = 0$ (1)

Vì thế ta chỉ cần chứng minh $\lim_{n\to\infty}((2n+1)a_{2n+1}) = 0$

Do $\{a_n\}$ là dãy các số dương và giảm nên ta có :

$$0 < (2n+1)a_{2n+1} < (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n}(2na_{2n})$$

Mà ta có : $\lim_{n\to\infty}(2na_{2n}) = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$

Nên suy ra $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n}(2na_{2n}) = 0$

Khi đó dẫn tới $\lim_{n\to\infty}((2n+1)a_{2n+1}) = 0$ (2)

Từ (1) & (2) ta suy ra $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

6.25. Cho $p, q, a > 0$. Khảo sát theo p, q sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$.

Bài giải:

Ta xét các trường hợp sau :

- Nếu $q > p + 1$ thì ta có : Với mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^p}{n^q + a} < \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$$

Mà $q - p > 1$ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ hội tụ .

Do vậy, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$ hội tụ .

- Nếu $q \le p + 1$ thì ta có $q - p \le 1$. Do vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ phân kỳ.

Mà ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^p}{n^q + a} \Big/ \frac{1}{n^{q-p}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p . n^{q-p}}{n^q + a} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^q}{n^q + a} = 1$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q+a}$ phân kỳ.

6.26. Cho (a_n) là một dãy các số dương, giảm và $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum k^n a_{k^n}$ hoặc cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Bài giải:

Ta cần chứng minh chuỗi $\sum a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum k^n a_{k^n}$ hội tụ .

- Chứng minh chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ dẫn đến chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ.

Do $\{a_k\}$ là dãy số dương giảm nên ta có, với mọi n :

$$(k-1)k^n a_{k^n} \geq a_{k^n} + a_{k^n+1} + \cdots + a_{k^{n+1}-1} = \sum_{i=k^n}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Dẫn đến

$$(k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i} \geq \sum_{i=k^1}^{k^2-1} a_i + \sum_{i=k^2}^{k^3-1} a_i + \cdots + \sum_{i=k^n}^{k^{n+1}-1} a_i = \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Như vậy :

$$(k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i} \geq (k-1)\sum_{i=1}^{n} k^i a_{k^i} \geq \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i$$

Hay

$$\sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_i\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta chứng minh : Với mọi $m > k$

$$\sum_{i=k^1}^{m} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$$

Thật vậy , với mọi $m > k$ tồn tại n sao cho $k^{n+1} - 1 > m$. Do đó :

$$\sum_{i=k^1}^{m} a_i \leq \sum_{i=k^1}^{k^{n+1}-1} a_i \leq (k-1)\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$$

Từ đây suy ra chuỗi $\sum_{i=k^1}^{\infty} a_i$ hội tụ. Theo **bài 6.1** , suy ra $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ .

- Chứng minh chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ hội tụ dẫn đến chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ.

Do $\{a_n\}$ là dãy các số dương giảm nên ta có, với mọi n :

$$\frac{k-1}{k} k^n a_{k^n} = (k-1)k^{n-1} a_{k^n} \leq a_{k^n-1} + a_{k^n-2} + \cdots + a_{k^{n-1}} = \sum_{i=k^{n-1}}^{k^n-1} a_i$$

Như vậy :

$$\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}k^i a_{k^i} \le \sum_{i=1}^{k^1-1} a_i + \sum_{i=k^1}^{k^2-1} a_i + \sum_{i=k^{n-1}}^{k^n-1} a_i = \sum_{i=1}^{k^n-1} a_i$$

Do đó :

$$\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}k^i a_{k^i} \le \sum_{i=1}^{k^n-1} a_i \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

Từ đây suy ra chuỗi $\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ hay chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} k^i a_{k^i}$ hội tụ.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.27. Xét chuỗi số dương $\sum a_n$. Chứng minh rằng nếu $\sum a_n$ hội tụ thì các chuỗi $\sum a_n^2$, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ và $\sum \frac{a_n}{n}$ cũng hội tụ.

<u>Bài giải:</u>

(a) Do $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ, ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tìm đư c một $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N$, ta đều có $0 \le a_n < 1$

Vậy $0 \le a_n^2 \le a_n$, $\forall n > N$

Suy ra chuỗi $\sum a_n^2$ hội tụ.

(b) Do $\sum a_n$ là chuỗi hội tụ, ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nên $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n}.\frac{1}{a_n} = 1$

Suy ra chuỗi $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ hội tụ.

(c) Nhận xét rằng : $\frac{a_n}{n} \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $\sum a_n$ hội tụ, ta suy ra chuỗi $\sum \frac{a_n}{n}$ hội tụ.

6.28. Chứng minh rằng nếu $\sum |a_n|$ hội tụ thì $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$ và đẳng thức chỉ xảy ra khi mọi a_n là cùng dấu.

Bài giải:

Ta có : $\sum |a_n|$ hội tụ nên dãy tổng riêng phần (s_k) bị chặn trên, nghĩa là :

$$\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M$$

$|\sum a_n|$ có dãy tổng riêng phần (z_k) là :

$$z_k = \left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_k|$$

Hay

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leq M$$

Suy ra chuỗi $|\sum a_n|$ hội tụ .

Suy ra $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots |a_k|$$

khi và chỉ khi mọi a_n là cùng dấu .

6.29. Chứng tỏ rằng chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$, với $a > 0$, hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$ và phân kì khi $p \leq 0$.

Bài giải:

1) Khi $p > 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối . Thật vậy :

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+a)^p} < \frac{1}{n^p}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ .

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$ hội tụ hay chuỗi tổng quát trên hội tụ tuyệt đối .

2) Khi $0 < p \leq 1$ thì chuỗi hội tụ có điều kiện .

Theo chứng minh trên thì chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$.

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ khi $0 < p \leq 1$.

Đặt $a_n = \frac{1}{(n+a)^p}$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{(x+a)^p}$, $x \in \mathbb{N}$.

$$f'(x) = \frac{-p}{(x+a)^{-p-1}} < 0 , \forall x \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 1$$

Suy ra f giảm trên $\mathbb{N}$. Ta đư c (a_n) là dãy dương giảm và :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+a)^p} = 0$$

Vậy chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ hội tụ có điều kiện .

3) Khi $p \leq 0$ thì chuỗi phân kỳ .

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+a)^p} > \frac{1}{n^p}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ phân kỳ .

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^p}$ phân kỳ .

Vậy chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{(n+a)^p}$ phân kỳ .

6.30. Chứng minh rằng các chuỗi $\sum \cos n\theta$ và $\sum \sin n\theta$ có dãy tổng riêng phần bị chặn trừ trường hợp θ là bội số của 2π ($\theta = 2k\pi$) trong chuỗi thứ nhất.

Bài giải:

- $\theta \neq k2\pi$

Ta xét :

$$\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta + i\sum_{n=0}^{m} \sin n\theta = \sum_{n=0}^{m} \left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{m+1}}{1-e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-e^{-i} \;\; -\left(e^{i\theta}\right)^{m+1} + \left(e^{i\theta}\right)^{m}}{(1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}$$

$$= \frac{1-\cos\theta + i\sin\theta - \cos(m+1)\theta - i\sin(m+1)\theta + \cos m\theta + i\sin m\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

Như vậy, ta được :

$$\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta = \frac{1-\cos\theta - \cos(m+1)\theta + \cos m\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos m\theta - \cos m\theta\cos\theta + \sin m\theta \sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos m\theta}{2} + \frac{\sin m\theta \sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

Suy ra :

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \cos n\theta\right| \leq \frac{1}{2} + \left|\frac{\cos m\theta}{2}\right| + \left|\frac{\sin m\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right| \leq 1 + \frac{|\sin\theta|}{2(1-\cos\theta)}$$

Và :

$$\sum_{n=0}^{m} \sin n\theta = \frac{\sin\theta - \sin(m+1)\theta + \text{s}}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin m\theta\,(1-\cos\quad) + \sin\theta\,(1-\cos\qquad)}{2(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin m\theta}{2} + (1-\cos m\theta)\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

Suy ra :

$$\left|\sum_{n=0}^{m} \sin n\theta\right| \le \left|\frac{\sin m\theta}{2}\right| + |(1-\cos m\theta)|\frac{|\sin\theta|}{2(1-\cos\theta)} \le \frac{1}{2} + \frac{|\sin\theta|}{1-\cos}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.31. Xét $\sum \frac{\cos n\theta}{n^p}$ và $\sum \frac{\sin n\theta}{n^p}$. Chứng tỏ rằng, tổng quát các chuỗi này hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$, hội tụ có điều kiện khi $0 < p \le 1$ và phân kỳ khi $p < 0$. Khảo sát theo θ các trường hợp ngoại lệ.

Bài giải:

- $p > 1$

Vì

$$\left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p} \text{ và } \sum \frac{1}{\mathrm{n^p}} \text{ phân kỳ.}$$

Nên

$$\sum \left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right| \text{hội tụ}$$

Suy ra các chuỗi trên hội tụ tuyệt đối .

- $0 < p \le 1$

Vì $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 và chuỗi $\sum \cos n\theta$ có tổng riêng phần bị chặn khi $\theta \neq k2\pi$ (theo **bài 6.30**) nên $\sum \frac{\cos n\theta}{n^p}$ hội tụ . Chứng minh tương tự đối với $\sum \frac{\sin n\theta}{n^p}$.

Xét chuỗi

$$\sum \left|\frac{\sin n\theta}{n^p}\right|$$

Ta chỉ cần khảo sát $\theta \in [0; \frac{\pi}{2})$.

Với $\theta = 0$: Chuỗi $\sum \left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|$ phân kỳ vì khi đó sự hội tụ của chuỗi phụ thuộc vào p.

Với $\theta \neq 0$:

Với mọi k, chọn $n_k \in \mathbb{Z}$ sao cho $n_k\theta \leq 2k\pi < (n_k + 1)\theta$.

Do đó : $0 < \cos\theta \leq \cos n_k\theta \leq 1$ và $n_k \leq \frac{2k\pi}{\theta}$.

Suy ra :

$$\frac{|\cos n_k\theta|}{n_k^p} \geq \frac{\theta^p \cos\theta}{(2k\ \ )^p}$$

Do đó :

$$\sum \frac{|\cos n\theta|}{n^p} \geq \sum \frac{\theta^p \cos\theta}{(2k\pi)^p}$$

Vậy chuỗi $\sum \left|\frac{\cos n\theta}{n^p}\right|$ phân kỳ .

- $p < 0$

Với $\theta \neq k\pi$.

Giả sử : $\sin n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l \in \mathbb{R}$.

Ta có : Với mọi $n \in \mathbb{N}$: $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \sin\theta \cos n\theta$

Suy ra :

$$\cos n\theta = \frac{\sin(n+1)\theta - \sin n\theta \cos\theta}{\sin\theta} \xrightarrow{n\to\infty} l' = l\frac{1-\cos}{\sin\theta}$$

Ta lại giả sử : $\cos n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l' \in \mathbb{R}$. Sử dụng : $\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos\theta -$ $\sin n\theta \sin\theta$. Ta được :

$$\sin n\theta \xrightarrow{n\to\infty} l = l'\frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$$

Đặt $t = \frac{1-\cos}{\sin}$. Ta có :

$$\begin{cases} l' = lt \\ l = -l't \end{cases}$$

Suy ra $l = l' = 0$.

Mặt khác : $\cos^2 n\theta + \text{si}\ \ ^2 n\theta = 1$ nên $l^2 + l'^2 = 1$ khi $n \to \infty$, mâu thuẫn với $l = l' = 0$.

Như vậy, ta có : $(\cos n\theta)$ và $(\sin n\theta)$ phân kỳ .

Suy ra với $p < 0$: $(\frac{\cos n\theta}{n^p})$ và $(\frac{\sin n\theta}{n^p})$ đều không hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

Vậy các chuỗi trên phân kỳ .

- $\theta = k\pi$. Chuỗi trên trở thành :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^p} \text{ và } \sum 0$$

Chuỗi $\sum 0$ hội tụ .

Xét chuỗi $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$

- $p > 0$: Vì $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ là dãy dương, giảm và hội tụ về 0 nên chuỗi đan dấu trên hội tụ. (hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$, hội tụ tuyệt đối khi $p > 1$)
- $p < 0$: Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} = \pm\infty$ nên chuỗi đan dấu phân kỳ .

6.32. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum \frac{a_n}{n^p}$ hội tụ hay có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ khi $q > p$.

<u>Bài giải:</u>

Ở bài này ta hiểu $q \neq p$

1) Ta chứng minh $\sum \frac{a_n}{n^p}$ hội tụ thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ.

Xét : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^p} . \frac{n^q}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{q-p} = \alpha$

Nên chuỗi $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ khi $\alpha = \infty$ hay $q > p$.

2) Ta chứng minh $\sum \frac{a_n}{n^p}$ có tổng riêng phần bị chặn thì $\sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ.

Ta có :

Với $q > p$: $a_n = \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$ là dãy dương giảm và hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

Và $\sum \frac{a_n}{n^p}$ có tổng riêng phần bị chặn .

Nên $\sum \frac{a_n}{n^p} . \frac{n^p}{n^q} = \sum \frac{a_n}{n^q}$ hội tụ theo **tiêu chuẩn Dirichlet**.

6.33.

1) Chứng minh rằng nếu $A_n \to A$ và $B_n \to B$ khi $n \to \infty$ thì

$$D_n = \frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1}{n} \to A$$

Hơn nữa, nếu $(A_n), (B_n)$ là các dãy dương giảm thì (D_n) cũng dương giảm.

2) Chứng minh rằng với $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1, A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, thì $C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1 = b_1 A_n + b_2 A_{n-1} + \cdots + b_n A_1$ và $C_1 + C_2 + \cdots + C_n = A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \cdots + A_n B_1$.

Suy ra rằng nếu $\sum a_n$, $\sum b_n$ hội tụ và có tổng là A, B thì

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to AB$$

3) (Định lý Abel về chuỗi tích) Cho $\sum c_n$ là chuỗi tích của hai chuỗi hội tụ $\sum a_n$ và $\sum b_n$. Nếu $\sum c_n$ hội tụ thì,

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Bài giải:

1) Đặt $\begin{cases} u_n = A_n - A \\ v_n = B_n - B \end{cases}$. Khi đó : $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ v_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{cases}$

Và :

$$D_n = AB + \frac{A(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)}{n} + \frac{B(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n} + \frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n}$$

Do (v_n) hội tụ nên $|v_n|$ bị chặn trên, nghĩa là $\exists M > 0 : |v_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó :

$$\left|\frac{u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1}{n}\right| \leq M.\frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n}$$

Theo **bài 5.6.2.5** (Giáo Trình Giải Tích I) thì :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{n} = 0$$

Hơn nữa, do $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nên $|u_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Áp dụng kết quả trên, ta được :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}{n} = 0$$

Như vậy, ta có : $D_n \xrightarrow{n\to\infty} AB$.

- Do (A_n), (B_n) là hai dãy dương giảm nên ta chỉ cần chứng minh :

$$D_{n+1} \leq D_n$$

Ta có : Với mọi $n \geq k \geq 1$:

$$\begin{aligned} nA_k B_{n+2-k} &= (n + 1 - k)A_k B_{n+2-k} + (k - 1)A_k B_{n+2-k} \\ &\leq (n + 1 - k)A_k B_{n+1-k} + (k - 1)A_{k-1} B_{n+2-k} \end{aligned}$$

Từ đó , ta lấy tổng theo k từ 1 đến $n + 1$, ta được :

$$n\sum_{k=1}^{n+1} A_k B_{n+2-k} \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n} A_k B_{n+1-k}$$

Hay $D_{n+1} \leq D_n$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2)

- Ta có :

$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + \cdots + a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1$$

$$= \begin{cases} a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n) + a_2(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 \\ b_1(a_1+a_2+\cdots+a_n) + b_2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) + \cdots + b_na_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 \\ b_1A_n + b_2A_{n-1} + \cdots + b_nA_1 \end{cases}$$

Khi đó :

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = a_1B_1 + a_1B_2 + a_2B_1 + \cdots + a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_{n-1}B_2 + a_nB_1$$

$$= B_1(a_1+a_2+\cdots+a_n) + B_2(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) + \cdots + B_na_1$$

$$= A_nB_1 + A_{n-1}B_2 + \cdots + A_1B_n$$

- Ta có : $\sum a_n$, $\sum b_n$ hội tụ và có tổng là A, B nên $A_n \to A$ và $B_n \to B$ khi $n \to \infty$. Áp dụng kết quả ở câu trên, ta được :

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to A$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

3) Đặt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to A \text{ , } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \to B \text{ khi } n$$

Ta có : $\sum c_n$ hội tụ và $C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

Nên tồn tại $X \in \mathbb{R}$ sao cho $C_n \xrightarrow{n\to\infty} X$

Mà ở câu trên ta đã có, khi $n \to \infty$:

$$\frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n} \to AB$$

Mặt khác :

$$X = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}{n}$$

Nên $X = AB$.

Suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} C_n = AB$$

Nên

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

6.34. Cho $\sum a_n$,$\sum b_n$ với $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1) Chứng minh rằng chuỗi tích $\sum c_n$ với số hạng tổng quát

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

2) Khảo sát sự hội tụ của $\sum c_n$.

Bài giải:

1) Ta có :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} . \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

2) Ta có :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$$

Ta có :

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \frac{n+2}{2}$$

Suy ra :

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$$

Vì

$$\frac{2(n+1)}{n+2} \to 2 \text{ khi } n \to$$

Nên

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ phân kỳ}$$

6.35. Cho chuỗi $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện. Chứng tỏ rằng với mọi $a \in \overline{\mathbb{R}}$, có một chuỗi hoán vị $\sum a_{n(i)}$ của $\sum a_n$ sao cho $\sum a_{n(i)}$ hội tụ và có tổng là a.

Bài giải:

Ta kí hiệu : $P = \{n \in \mathbb{N}; u_n > 0\}$ và $N = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq 0\}$.

Vậy ta có $P \cap N = \emptyset$ và $P \cup N = \mathbb{N}$.

Do $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện, các tập hợp P và N đều vô hạn, do đó tồn tại hai song ánh $f : \mathbb{N} \to P$ và $g : \mathbb{N} \to N$ đồng biến ngặt .

Với $p \in P$, kí hiệu $v_p = u_{f(p)} > 0$

Với $n \in N$, $w_n = -u_{g(n)} \geq 0$

Vì $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện nên các chuỗi $\sum v_p$ và $\sum w_n$ phân kỳ (và có các số hạng ≥ 0).

Do đó các tổng riêng phần của chúng có giới hạn ∞ .

Ta kí hiệu p_1 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p > a$$

Và n_1 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho :

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n < a$$

Sau đó, ta kí hiệu :

p_2 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $p_2 > p_1$:

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p > a$$

Và n_2 là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $n_2 > n_1$:

$$\sum_{p=0}^{p_1} v_p - \sum_{n=0}^{n_1} w_n + \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n > a$$

Cứ như vậy, ta xây dựng được hai chuỗi $(p_k)_{k\geq 1}$ và $(n_k)_{k\geq 1}$ là những số nguyên không âm nhỏ nhất tăng ngặt, sao cho khi ta kí hiệu :

$$t_0 = \sum_{p=0}^{p_1} v_p \ , s_0 = \sum_{n=0}^{n_1} w_n \ , t_1 = \sum_{p=p_1+1}^{p_2} v_p \ , s_1 = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} w_n \ , \ldots$$

Thì ta có với mọi $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + \displaystyle\sum_{p=p_k+1}^{p_{k+1}-1} v_p \leq a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k > a \end{cases}$$

Và :

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} - \displaystyle\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1} w_n \geq a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k < a \end{cases}$$

Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có :

$$\begin{cases} 0 < (t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k) - a \leq v_{p_k+1} \\ w_{n_k+1} \leq (t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k) - a < 0 \end{cases}$$

Do $\sum a_n$ hội tụ nên $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Do đó : $v_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ và $w_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Suy ra $v_{p_{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ và $w_{n_{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Như vậy, ta đư c :

$$\begin{cases} t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k \xrightarrow{k\to\infty} a \\ t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k \xrightarrow{k\to\infty} a \end{cases}$$

Khi đó, ta kí hiệu $\varphi(n) = n(i)$ là hoán vị của $\mathbb{N}$ cho bởi :

$$\begin{aligned} \varphi(0) = f(0), \dots, \varphi(p_1) = f(p_1), \varphi(p_1+1) = g(0), \dots, \varphi(p_1+n_1) \\ = g(n_1), \varphi(p_1+n_1+1) = f(p_1+1), \dots \end{aligned}$$

Vì các số hạng t_k và s_k đều không âm

Nên mọi tổng riêng phần $\sum_{n=0}^{M} a_{\varphi(n)}$ của chuỗi hoán vị $\sum a_{\varphi(n)}$ đều bao gồm giữa hai tổng kiểu

$$t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k \text{ và } t_0 - s_0 + \cdots + t_{k-1} - s_{k-1} + t_k - s_k$$

Do đó :

$$\sum_{n=0}^{M} a_{\varphi(n)} \xrightarrow{M\to\infty} a$$

Vậy chuỗi hoán vị $\sum a_{\varphi(n)}$ hay $\sum a_{n(i)}$ hội tụ và có tổng là a .

Bài tập mở rộng

1. Chuỗi **Bertrand**:

Với mọi $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ cho trước, chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ hội tụ khi và chỉ khi :

$$\alpha > 1 \text{ hay } (\alpha = 1 \text{ và } \beta > 1 \ .$$

2. Cho $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là ánh xạ liên tục thỏa mãn :

$$\forall(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3, f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x, y).$$

Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ và $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ hội tụ.

Chứng minh rằng $\sum_{n=1}^{\infty} \left(f(x_n, y_n)\right)^2$ hội tụ.

3. (**Định lí Mertens**) Cho $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ là chuỗi hội tụ tuyệt đối, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ là chuỗi hội tụ. Với $n \in \mathbb{N}$, ta kí hiệu :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \ , U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ , V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \ , W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Với $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ sao cho $p < q$, ta kí hiệu :

$$V_{p,q} = \sum_{k=p+1}^{q} v_k$$

a. Chứng minh : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n V_n - W_n = \sum_{k=1}^{n} u_k V_{n-k,n}$$

b. Từ đó suy ra : $U_n V_n - W_n \to 0$ khi $n \to \infty$