Bài giảng

GIẢI TÍCH HÀM NHIỀU BIẾN

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự Nhiên - TP. HCM
Email: vdhuycuong@gmail.com

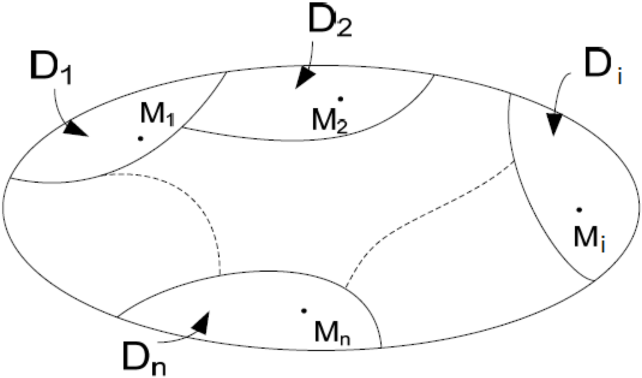
Nội dung

Chương 1

Tích phân hàm nhiều biến

1.1. Phép tính tích phân hàm nhiều biến
1.1.1 Định nghĩa tích phân hàm nhiều biến

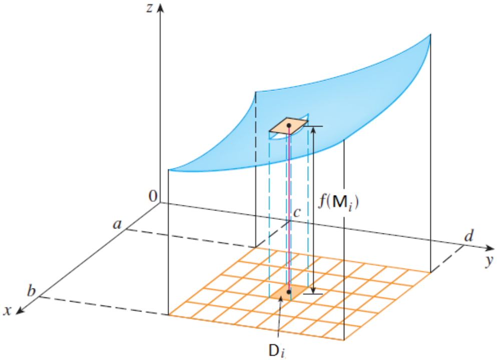
Cho hàm nhiều biến $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ xác định trên miền đóng, bị chặn $D \subset \mathbb{R}^N$. Chia miền D thành n miền nhỏ $D_1, D_2, ..., D_n$ và chọn một điểm tuỳ ý M_i trên mỗi miền nhỏ D_i:

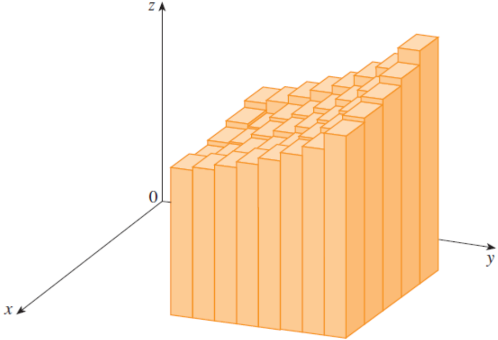


1.1.1 Định nghĩa tích phân hàm nhiều biến

Ta tính tích của $f(M_i)$ với diện tích D_i và lấy tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)|D_i| \qquad (1)$$



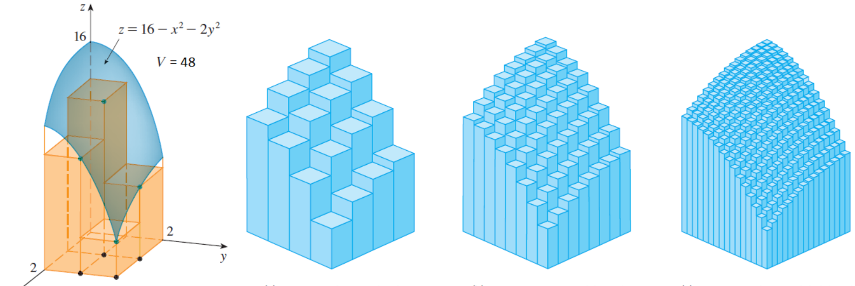


1.1.1 Định nghĩa tích phân hàm nhiều biến

Cho $n \to \infty$, nếu I_n hội tụ về một số thực I thì ta nói $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ khả tích trên D và I là tích phân của $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ trên D, ký hiệu:

$$I = \int \cdots \int_D f(x_1, x_2, ..., x_N) dx_1 dx_2 ... dx_N \qquad (2)$$

trong đó D được gọi là miền lấy tích phân và $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ là hàm dưới dấu tích phân.



(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

1.1.2 Tính chất tích phân hàm nhiều biến

(Thay $\mathbf{x}$ là $(x_1, x_2, ..., x_N)$ và $\mathbf{dx} = dx_1 dx_2 ... dx_N$.)

1) Nếu $f(\mathbf{x})$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì $f(\mathbf{x})$ khả tích trên D.

2) Nếu $D = D_1 \cup D_2$, trong đó D_1 và D_2 đóng, bị chặn và không giao nhau thì

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int \cdots \int_{D_1} f(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \int \cdots \int_{D_2} f(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

3) Nếu $f(\mathbf{x})$ và $g(\mathbf{x})$ khả tích và k là một số thực thì

$$\int \cdots \int_D kf(\mathbf{x})\mathbf{dx} = k \int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx},$$

$$\int \cdots \int_D \big(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\big)\, dx = \int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} + \int \cdots \int_D g(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

4) Nếu $f(\mathbf{x}) = 1,\ \forall \mathbf{x} \in D$ thì $\displaystyle\int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int \cdots \int_D \mathbf{dx} = |D|$.

5) Nếu $f(\mathbf{x})$ khả tích và $f(\mathbf{x}) > 0,\ \forall \mathbf{x} \in D$ thì $\displaystyle\int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} > 0$.

6) Nếu $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ khả tích và $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})\ \ \forall \mathbf{x} \in D$ thì

$$\int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} \leq \int \cdots \int_D g(\mathbf{x})\mathbf{dx}$$

7) Nếu $f(\mathbf{x})$ khả tích và $m < f(\mathbf{x}) < M,\ \forall \mathbf{x} \in D$ thì

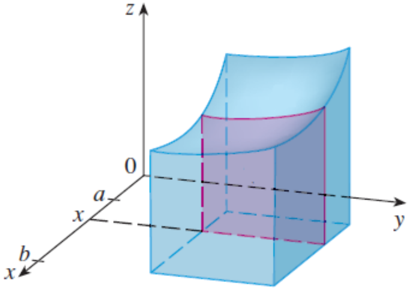
$$m < \frac{1}{|D|} \int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx} < M$$

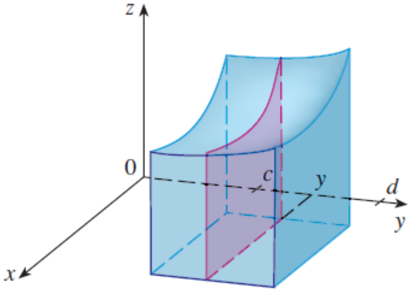
Ta gọi $\displaystyle\frac{1}{|D|} \int \cdots \int_D f(\mathbf{x})\mathbf{dx}$ là giá trị trung bình của $f(\mathbf{x})$ trên D.

1.1.3 Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ trực giao

Xét $D = [a, b] \times [c, d]$, ta có **định lý Fubini**

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (3)$$





Ví dụ 1.1. Cho $D = \left\{(x, y), 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\right\}$.

Tính $\iint_D (x^2 + y)dxdy$.

Giải:

$$I_1 = \int_0^1 \Big(\int_{-2}^2 (x^2 + y)dy \Big) dx = \int_0^1 \Big(yx^2 + \frac{y^2}{2} \Big)\Big|_{-2}^2 dx$$

$$= \int_0^1 \Big((2 - (-2))x^2 + \frac{2^2 - (-2)^2}{2} \Big) dx = \int_0^1 4x^2 dx = 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$I_2 = \int_{-2}^2 \Big(\int_0^1 (x^2 + y)dx \Big) dy = \int_{-2}^2 \Big(\frac{x^3}{3} + xy \Big)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_{-2}^2 \Big(\frac{1^3 - 0^3}{3} + (1 - 0)y \Big) dxy = \int_{-2}^2 \Big(y + \frac{1}{3} \Big) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{3}\Big|_{-2}^2 = \frac{4}{3}$$

1.1.3 Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ trực giao

Xét $D = [a, b] \times [c, d]$ và $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b f_1(x)dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)dy\right) \tag{4}$$

Ví dụ 1.2. Tính $\iint_D xlny\, dxdy$ với $D = \left\{(x, y), 0 \le x \le 4, 1 \le y \le e\right\}$.

Giải:

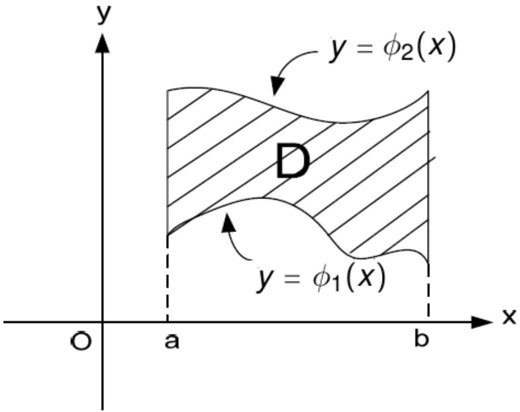
$$I = \int_0^4 xdx \int_1^e lnydy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 \left(ylny - y\right)\Big|_1^e$$

$$= 8(e - e + 1) = 8.$$

1.1.3 Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ trực giao

Xét $D = [a, b] \times [\phi_1(x), \phi_2(x)]$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{5}$$



Ví dụ 1.3. Cho $D = \left\{(x, y), -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\right\}$.

Tính $\iint_D (x + 2y)dxdy$.

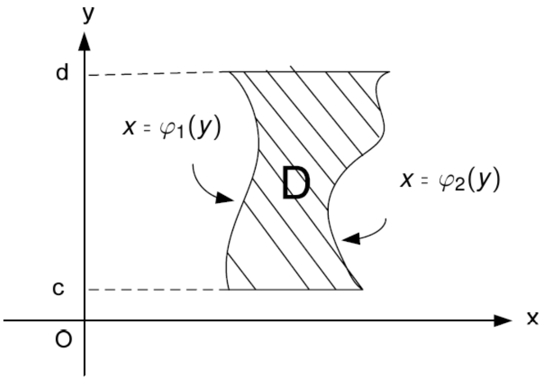
Giải:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx + y^2 \right)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(x(1 + x^2) - x(2x^2) + (1 + x^2)^2 - (2x^2)^2 \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \right) dx = \\
&= \left(-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right)\Big|_0^1 = \frac{79}{60}
\end{aligned}
$$

1.1.3 Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ trực giao

Xét $D = [\varphi_1(y), \varphi_2(y)] \times [c, d]$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \tag{6}$$



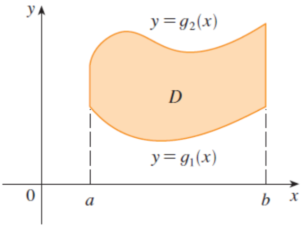
Ví dụ 1.4. Cho $D = \left\{(x, y), y/2 \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4\right\}$.

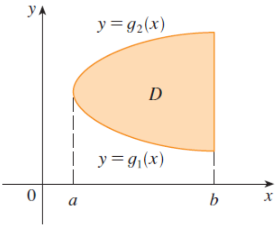
Tính $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$.

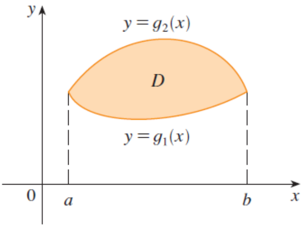
Giải:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^4 \Big(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)dx \Big) dy = \int_0^4 \Big(\frac{x^3}{3} + xy^2 \Big) \Big|_{y/2}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^4 \Big(\frac{\sqrt{y}^3}{3} - \frac{y^3}{3.2^3} + \sqrt{y}y^2 - \frac{y}{2}y^2 \Big) dy \\
&= \int_0^4 \Big(-13\frac{y^3}{24} + y^{5/2} + \frac{y^{3/2}}{3} \Big) dy \\
&= \Big(-13\frac{y^4}{36} - 2\frac{y^{7/2}}{7} + 2\frac{y^{5/2}}{15} \Big) \Big|_0^4 = \frac{216}{35}
\end{aligned}
$$

Các dạng miền tích phân







a) Miền giới hạn bởi $x = a, x = b, y = g_1(x), y = g_2(x)$.

b) Miền giới hạn bởi $x = b, y = g_1(x), y = g_2(x)$.

c) Miền giới hạn bởi $y = g_1(x), y = g_2(x)$.

1.1.3 Tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ trực giao

Bài tập: Xác định miền lấy tích phân và công thức tích phân

1.1. A giới hạn bởi $y = 0$, $y = x$ và $x = 2$.

1.2. B giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ và $y = 2$.

1.3. C giới hạn bởi $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$.

1.4. D giới hạn bởi $x + y = 2$, $y = x^2$ và $y = 0$.

Bài tập: Tính các tích phân của hàm $f(x, y)$ trên miền D như sau

1.5. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} lny$ và D là hình chữ nhật $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq e$

1.6. $f(x, y) = e^x$ và $D = \{(x, y), 0 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 2\}$.

1.7. $f(x, y) = y/x$ và $D = \{(x, y), 2 \leq x \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$.

1.8. $f(x, y) = x + y$ và D là tam giác $(0, 0)$, $(2, 2)$ và $(2, -1)$.

1.1.4 Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trực giao

Với $V = \Big\{(x, y, z) | a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le g\Big\}$,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_e^g f(x,y,z)dz \Big) dy \Big) dx \qquad (7)$$

Với $V = \Big\{(x, y, z) | a \le x \le b, c \le y \le d, \phi_1(x, y) \le z \le \phi_2(x, y)\Big\}$,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_c^d \Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big) dy \Big) dx \qquad (8)$$

Với $V = \Big\{(x, y, z) | a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \phi_1(x, y) \le z \le \phi_2(x, y)\Big\}$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \Big) dy \Big) dx \qquad (9)$$

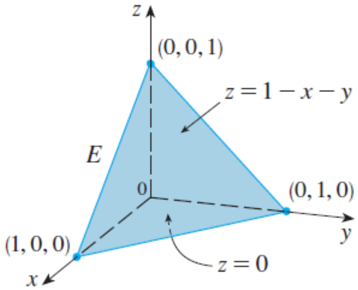
Ví dụ 1.5. Cho miền V được giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$,$z = 0$, $z = x$. Hãy tính $I = \iiint_V (x + y + z)dxdydz$.

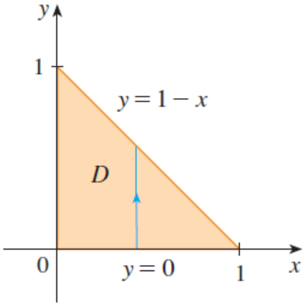
Giải:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^x (x + y + z)dzdydx = \int_0^1 \int_0^2 (xz + yz + \frac{z^2}{2})\Big|_0^x dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 (x^2 + xy + \frac{x^2}{2})dydx = \int_0^1 (\frac{3x^2}{2}y + x\frac{y^2}{2})\Big|_0^2 dx \\
&= \int_0^1 (3x^2 + 2x)dx = (x^3 + x^2)\Big|_0^1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.6. Cho miền V được giới hạn bởi các mặt phẳng $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và $x + y + z = 1$. Hãy tính $I = \iiint_V (1 - x)yz\, dxdydz$.

Giải:





Viết lại $V = \left\{(x, y, z), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\right\}$.

1.1.4 Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trực giao

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (1-x)yz\, dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x)y \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x)y \frac{(1-x-y)^2}{2} dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x)[(1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3]\, dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left[(1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right]\Big|_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\left[\frac{(1-x)^4}{2} - 2\frac{(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4}\right] dx \\
&= \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5 dx = \frac{1}{144}.
\end{aligned}
$$

1.1.4 Tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ trực giao

Bài tập: Tính các tích phân sau

1.9. $I = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^4 \frac{dzdydx}{\sqrt{y+1}}$.

1.10. $I = \int_0^1 \int_1^3 \int_2^4 (x + 2z)\, dzdydx$.

1.11. $I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}-y} x\, dzdydx$

1.12. $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} x - z\, dzdydx$.

Bài tập: Tính các tích phân sau (giới hạn bởi = ghb)

1.13. $I = \iiint_V x^2y^4z^6\, dxdydz$ với V ghb $x = \pm 1, y = \pm 1, z = \pm 1$.

1.14. $I = \iiint_V 2x\, dxdydz$ với V ghb

$z = x^2 + y^2 y, x + y = 1, x = y = z = 0$.

1.15. $I = \iiint_V xy\sqrt{z}\, dxdydz$ với V ghb $z = 0, z = y, y = x^2, y = 1$.

1.16. $I = \iiint_V dxdydz$ với V ghb $x = y = 0$, $y = z, x = y + 2$,

$z = 1, z = 2$.

1.2. Đổi biến trong tích phân hàm nhiều biến
1.2.1 Công thức đổi biến tổng quát

Với một phép đổi biến $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, ta có $\mathbf{dx} = \left|\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}\right| \mathbf{du}$ và

$$\int \cdots \int_{D_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int \cdots \int_{D_{\mathbf{u}}} f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}\right| \mathbf{du} \tag{10}$$

trong đó $D_{\mathbf{u}}$ là miền tích phân của biến mới $\mathbf{u}$ tương ứng với miền tích phân $D_{\mathbf{x}}$ của biến cũ $\mathbf{x}$ và

$$\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}\right| = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_N} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_N}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_N}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial x_N}{\partial u_N} \end{bmatrix} \tag{11}$$

1.2.2 Công thức đổi biến tích phân hai lớp

Xét hàm hai biến $f(x, y)$ ta cho một phép đổi biến $x = x(u, v)$ và $y = y(u, v)$. Khi đó

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv \qquad (12)$$

với

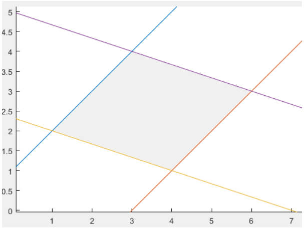
$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

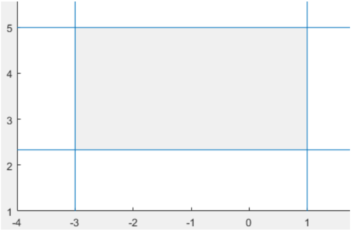
Ví dụ 1.7. Tính $I = \iint_D (y - x)dxdy$ trong đó D giới hạn bởi $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -x/3 + 7/3$, $y = -x/3 + 5$.

Giải:

Đặt $u = y - x$ và $v = y + \dfrac{x}{3}$. Ta thu được $x = -\dfrac{3u}{4} + \dfrac{3v}{4}, y = \dfrac{u}{4} + \dfrac{3v}{4}$.

Viết lại $D' = \left\{(u, v), -3 \le u \le 1, 7/3 \le v \le 5\right\}$.





Ma trận đổi biến là

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = det\begin{bmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = -\frac{3}{4} \tag{14}$$

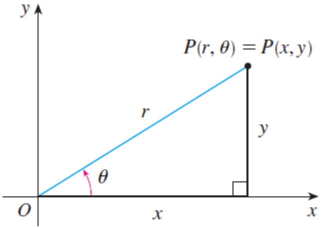
Tích phân cần tính

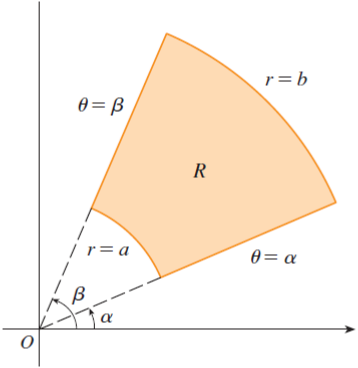
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \left[\left(\frac{u}{4} + \frac{3v}{4}\right) - \left(-\frac{3u}{4} + \frac{3v}{4}\right)\right]\left(-\frac{3}{4}\right) dudv \\ &= -\frac{3}{4}\int_{7/3}^{5}\int_{-3}^{1} ududv \\ &= -\frac{3}{4} v\Big|_{7/3}^{5} \frac{u^2}{2}\Big|_{-3}^{1} = 8 \end{aligned}$$

1.2.2 Công thức đổi biến tích phân hai lớp

Tích phân trong tọa độ cực:

Xét hàm hai biến $f(x, y)$ ta cho một phép đổi biến $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ sao cho $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$.





1.2.2 Công thức đổi biến tích phân hai lớp

Với $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$ ta có

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Ta có phép đổi biến tích phân như sau

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\; r\; drd\theta \tag{16}$$

Ví dụ 1.8. Tính $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ trong đó D thỏa $x^2 + y^2 \leq 1$.

Giải:

Đặt $x = r\cos\theta$ và $y = r\sin\theta$. Ta có $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$.

Viết lại $D' = \left\{(r,\theta), 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi\right\}$. Ta tính được

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} r\sqrt{1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}\, drd\theta. \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, drd\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3}\bigg|_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Bài tập: Tính các tích phân sau

1.17. $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ với D thỏa $x^2+y^2 \le 4$.

1.18. $I = \iint_D xy\,dxdy$ với D thỏa $x, y \ge 0$, $x^2+y^2 \le 9$.

1.19. $I = \iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ với D thỏa $x \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 2$.

Bài tập: Tính các tích phân sau

1.20. $I = \iint_D \dfrac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$ với D thỏa $x^2+y^2 \ge 3$.

1.21. $I = \iint_D \sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}dxdy$ với D thỏa $1 \le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \le 4$.

1.22. $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ với D thỏa $x^2+y^2 \le 6x$.

Xét hàm ba biến $f(x, y, z)$ ta cho một phép đổi biến $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ và $z = (u, v, w)$. Khi đó

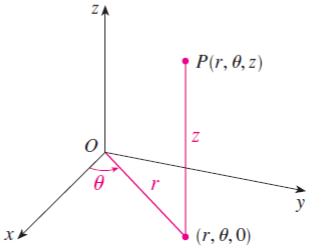
$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{D_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw \tag{17}$$

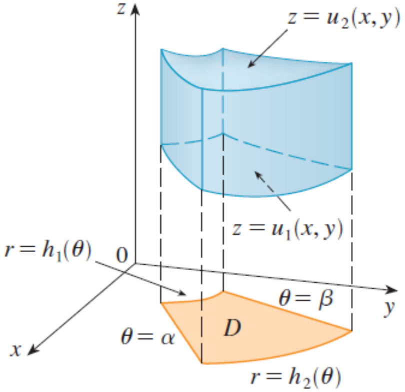
với

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \tag{18}$$

1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

Tích phân trong tọa độ trụ: Xét hàm ba biến $f(x, y, z)$ ta cho một phép đổi biến $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ với $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ và $z = z$.





1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

Với $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ và $z = z$. ta có

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

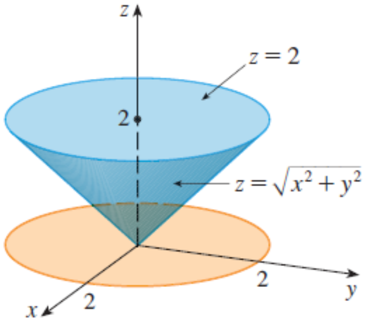
Ta có phép đổi biến tích phân như sau

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D_{r\theta z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ r\ drd\theta dz \qquad (19)$$

1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

Ví dụ 1.9. Tính $I = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz$ trong đó $V = \left\{(x, y, z), -2 \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2\right\}$.

Giải:



Đặt $x = r\cos\theta$,
$y = r\sin\theta$,
$z = z$.

Ta có
$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| = r.$$

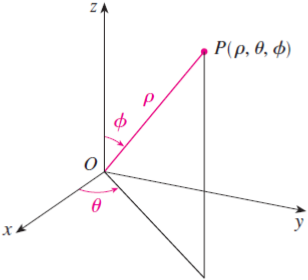
1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

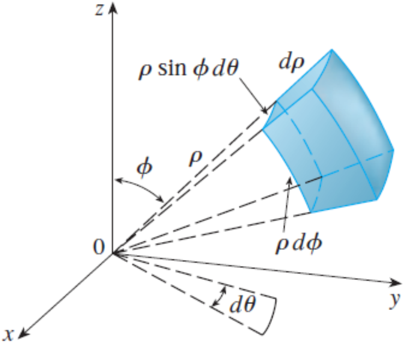
Viết lại $V' = \left\{(r, \theta, z), 0 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi, r \le z \le 2\right\}$.

Ta tính được

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V'} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) r \, dr d\theta dz. \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^3 \, dz dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2 - r) \, dr \\ &= 2\pi\left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5} \Big|_0^2\right) \\ &= \frac{16}{5}\pi \end{aligned}$$

Tích phân trong tọa độ cầu: Xét hàm ba biến $f(x, y, z)$ ta cho một phép đổi biến $(x, y, z) \mapsto (\rho, \theta, \phi)$ với $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$ và $z = \rho\cos\phi$.





1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

Với $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$ và $z = \rho\cos\phi$, ta có

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{bmatrix}$$

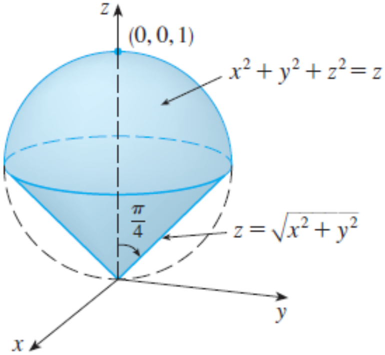
$$= \rho^2\sin\phi$$

Ta có phép đổi biến tích phân như sau

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D_{\rho\theta\phi}} f(\rho cos\theta sin\phi, \rho sin\theta sin\phi, \rho cos\phi)\rho^2 sin\phi\, d\rho d\theta d\phi \quad (20)$$

Ví dụ 1.10. Tính $I = \iiint_V 2z\, dxdydz$ trong đó V được giới hạn bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt cầu $z = x^2 + y^2 + z^2$.

Giải:



Đặt $x = \rho \cos\theta \sin\phi$,

$y = \rho \sin\theta \sin\phi$,

$z = \rho \cos\phi$.

Ta có

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = \rho^2 \sin\phi.$$

Mặt khác: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \Rightarrow \phi = \pi/4$.

Viết lại $V' = \Big\{(\rho, \theta, \phi), 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le cos\phi\Big\}$.
Ta tính được

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{V'} 2\rho \cos\phi \rho^2 \sin\phi \; d\rho d\theta d\phi.\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^3 \sin 2\phi \; d\rho d\phi d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \frac{\rho^4}{4} \sin 2\phi \Big|_0^{\cos\phi} d\phi\\
&= 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^5\phi \sin\phi}{2} \sin 2\phi \Big|_0^{\cos\phi} d\phi\\
&= -\pi \frac{\cos^6\phi}{6}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{7}{48}\pi.
\end{aligned}
$$

1.2.3 Công thức đổi biến tích phân ba lớp

Bài tập: Tính các tích phân sau

1.23. $I = \iiint_V (x^2 + y^2)\, dxdydz$ với V giới hạn bởi $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$.

1.24. $I = \iiint_V (x^3 + xy^2)\, dxdydz$ với V giới hạn bởi $x, y, z \geq 0, z = 1 - x^2 - y^2$.

1.25. $I = \iiint_V xy\, dxdydz$ với V giới hạn bởi $z = 0$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $x^2 + y^2 = 4$ và $x^2 + y^2 = 9$.

Bài tập: Tính các tích phân sau

1.26. $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dxdydz$ với V là hình cầu tâm O và bk 1.

1.27. $I = \iiint_V x^2 + y^2 + z^2\, dxdydz$ với V giới hạn bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq x$.

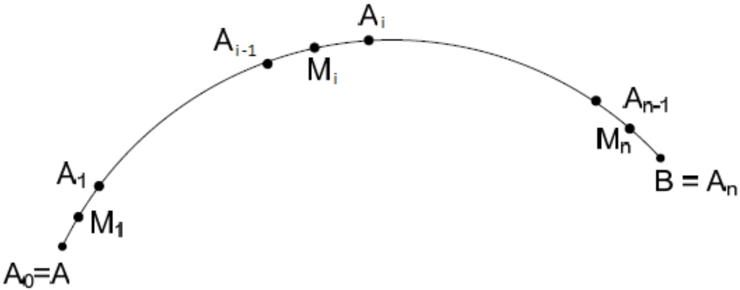
1.28. $I = \iiint_V xyz^5\, dxdydz$ với V là phần giao của $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ và $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$.

1.3. Tích phân đường loại 1

1.3.1 Tích phân đường loại 1

Cho hàm số $f = f(\mathbf{x})$ xác định trên đường cong $L = \overset{\frown}{AB}$ trong $\mathbb{R}^n$ (xét với $n = 2$ hoặc $n = 3$). Chia đường cong L thành nhiều cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n = B$.

Trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ta chọn một điểm tuỳ ý M_i.



1.3.1 Tích phân đường loại 1

Ta lập tổng:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)|\widehat{A_{i-1}A_i}| \quad (21)$$

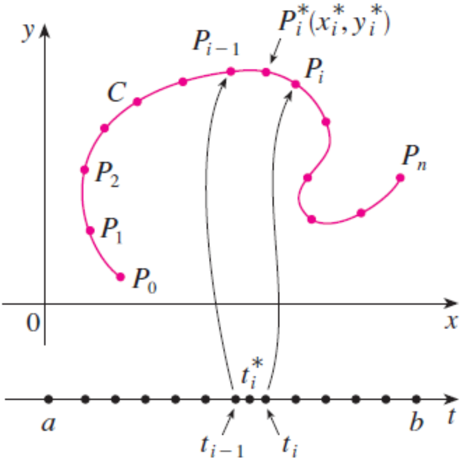
Cho $n \to \infty$ (khi đó $\widehat{A_{i-1}A_i} \to 0$), Nếu I_n hội tụ đến 1 số thực I thì ta nói f khả tích trên L và I là tích phân đường (loại 1) của f trên L, ký hiệu:

$$I_n = \int_L f(\mathbf{x})ds \quad (22)$$

Nếu đường cong L trơn và hàm $f(\mathbf{x})$ liên tục trên L thì tích phân $\int_L f(\mathbf{x})ds$ tồn tại.

1.3.1 Tích phân đường loại 1

Phương pháp cơ bản là đưa về tích phân một biến. Ta tìm phép biến đổi $ds = ds(t)$



1.3.1 Tích phân đường loại 1

Tổng quát: Đường cong L cho bởi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ với $t_1 \le t \le t_2$ thì

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt \qquad (23)$$

+ Nếu đường cong L cho bởi $x(t)$, $y(t)$ với $t_1 \le t \le t_2$ thì

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt \qquad (24)$$

+ Nếu đường cong L cho bởi $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ thì

$$ds = \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}dx \qquad (25)$$

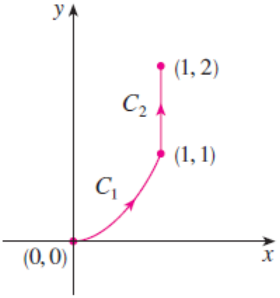
+ Nếu đường cong L cho bởi $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ thì

$$ds = \sqrt{r^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(rcos\theta, rsin\theta)\sqrt{r^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta \qquad (26)$$

Ví dụ 1.11. Tính $I = \int_C 2xds$ trong đó C gồm $C_1 : y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ và $C_2 : x = 1, 1 \leq y \leq 2$.

Giải:



Với C_1: $x = x, y = x^2, 0 \leq x \leq 1$

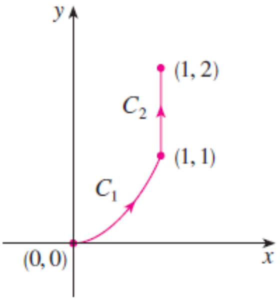
Ta có

$$\int_{C_1} 2xds = \int_0^1 2x\sqrt{[x'_x]^2 + [y'_x]^2}dx.$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

$$= \frac{1}{4}\frac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$



Với C_2: $x = 1, y = y, 1 \leq y \leq 2$

Ta có

$$\int_{C_2} 2xds = \int_1^2 2.1\sqrt{[x'_y]^2 + [y'_y]^2}dy.$$

$$= \int_1^2 2.1.\sqrt{0 + 1^2}dy$$

$$= 2y\Big|_1^2 = 2$$

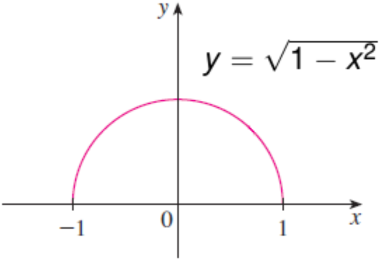
Kết quả là

$$\int_C 2xds = \int_{C_1} 2xds + \int_{C_2} 2xds$$

$$= \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5} + 11}{6}$$

Ví dụ 1.12. Tính $I = \int_C (2 + x^2 y) ds$ với $C : y = \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$.

Giải:



Đặt $x = cost, y = sint, 0 \leq t \leq \pi$.

Ta có

$$\int_C (2 + x^2 y) ds$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + cos^2 t sint) \sqrt{sin^2 t + cos^2 t} dt.$$

$$= \int_0^{\pi} (2 + cos^2 t sint) dt$$

$$= (2t - \frac{cos^3 t}{3})\Big|_0^{\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

1.3.2 Ứng dụng tính tích phân đường loại 1

1) Độ dài cung $\widehat{AB}$ được tính theo công thức: $L_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} ds$

Ví dụ 1.13. Tính độ dài đường cong $C : y = ln(sinx), \pi/4 \leq x \leq \pi/2$.

Giải:

Ta có $x'_x = 1, y'_x = \dfrac{cosx}{sinx}, \pi/4 \leq x \leq \pi/2$

Kết quả là: $\displaystyle\int_C ds = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + (\frac{cosx}{sinx})^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{sinx} dx$

$$= ln(tan\frac{x}{2})\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = ln(1 + \sqrt{2}).$$

2) Khối lượng và trọng tâm một thanh mỏng dẹt (đường cong):

Thanh có khối lượng phân bố là hàm $\delta(x, y, z)$. Khi đó:

Khối lượng thanh

$$m = \int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) ds \tag{27}$$

Trọng tâm thanh

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} x\delta(x, y, z) ds \\ y_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} y\delta(x, y, z) ds \\ z_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widehat{AB}} z\delta(x, y, z) ds \end{aligned} \tag{28}$$

Ví dụ 1.14. Tính chiều dài và trọng tâm của đường $C: x = 3cost$, $y = 3sint$, $z = 4t$, $0 \le t \le 2\pi$ với khối lượng riêng $\delta(x, y, z) = z$

Giải:

Chiều dài đường cong

$$L_C = \int_C ds$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9sin^2 t + 9cos^2 t + 16}dt = \int_0^{2\pi} 5dt = 10\pi.$$

Khối lượng đường cong

$$m = \int_C \delta(x, y, z)ds$$
$$= \int_0^{2\pi} 4t\sqrt{9sin^2 t + 9cos^2 t + 16}dt = \int_0^{2\pi} 4.5.tdt = 40\pi^2.$$

Trọng tâm của đường cong

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_C x\delta(x,y,z)ds = \frac{1}{40\pi^2}\int_0^{2\pi} 3cost4t\ dt$$

$$= \frac{12}{40\pi^2}(cost + tsint)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_C x\delta(x,y,z)ds = \frac{1}{40\pi^2}\int_0^{2\pi} 3sint4t\ dt$$

$$= \frac{12}{40\pi^2}(sint - tcost)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{3}{5\pi}.$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_C x\delta(x,y,z)ds = \frac{1}{40\pi^2}\int_0^{2\pi} 4t4t\ dt$$

$$= \frac{16}{40\pi^2}\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{15}\pi.$$

Bài tập: Tính các tích phân đường loại 1 sau

1.29. $I = \int_L (x+y)ds$ với L là $x+y=1, 0 \leq x \leq 1$.

1.30. $I = \int_L y^2 ds$ với L là $x = 2t, y = 1 - 2t$ với $0 \leq t \leq 1/2$.

1.31. $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2} ds$ với L thỏa $x^2+y^2 = 4$ và $x, y \leq 0$.

1.32. $I = \int_L (x-y)ds$ với L là $x^2+y^2 = 2x$.

Bài tập: Tính chiều dài, khối lượng và trọng tâm của các đường L:

1.33. $L : x = 3cost, y = 3sint, \pi/6 \leq t \leq \pi/3$, với $\delta = 2$.

1.34. $L : x+y+2 = 0, -2 \leq x \leq 0$, với $\delta = x^2+y^2$

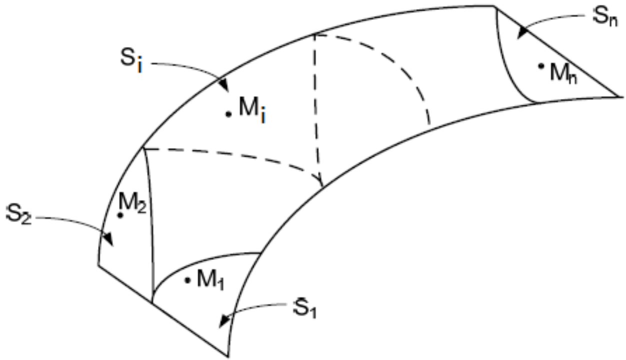
1.35. $L : x = 2e^t cost, y = 2e^t sint, z = ae^t, 0 \leq t \leq \pi$, với $\delta = t$.

1.36. $L : x = t, y = t^2/2, z = t^3/3, 0 \leq t \leq 1$, với $\delta = \sqrt{y}$

1.4. Tích phân mặt loại 1
1.4.1 Tích phân mặt loại 1

Cho hàm số $f = f(x, y, z)$ xác định trên mặt S. Chia mặt S thành n mặt nhỏ S_1, S_2,..., S_n.

Trên mỗi mặt nhỏ S_i ta chọn một điểm tuỳ ý M_i.



1.4.1 Tích phân mặt loại 1

Ta lập tổng tích phân:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)|S_i| \tag{29}$$

Cho $n \to \infty$ (khi đó $|S_i| \to 0$), Nếu I_n hội tụ đến 1 số thực I thì ta nói f khả tích trên L và I là tích phân mặt (loại 1) của f trên S, ký hiệu:

$$I = \iint_S f(x, y, z)dS \tag{30}$$

Nếu mặt cong S trơn và hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên S thì tích phân $\iint_S f(x, y, z)dS$ tồn tại.

1.4.1 Tích phân mặt loại 1

Phương pháp tính cơ bản là đưa về tích phân một biến. Ta tìm phép biến đổi $z = z(x, y)$.

1) Nếu đường cong L được cho bởi $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ thì

$$dS = \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\, dxdy$$

và

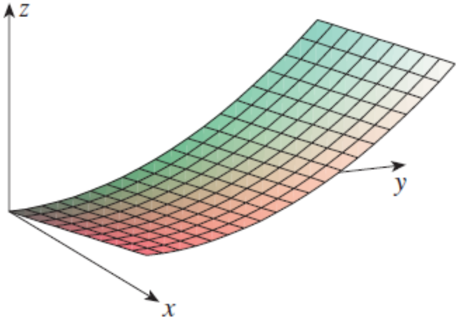
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\, dxdy \qquad (31)$$

2) Trường hợp riêng, nếu $f(x, y, z) = 1$ thì

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2}\, dxdy \qquad (32)$$

Ví dụ 1.15. Tính $I = \iint_S ydS$ với S là mặt $z = x + y^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

Giải:



Ta có $z'_x = 1, z'_y = 2y$ nên

$$\sqrt{1 + [z'_x]^2 + [z'_y]^2} = \sqrt{2 + 4y^2}$$

Vậy $I = \iint_S ydS$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2}dydx$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{2 + 4y^2}dy$$

$$= 1\frac{\sqrt{2}}{6}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$$

1.4.2 Ứng dụng tính tích phân mặt loại 1

1) Diện tích mặt S được tính theo công thức: $S = \iint_S dS$

Ví dụ 1.16. Tính diện tích mặt cầu tâm O bán kính $r = 4$.

Giải:

Diện tích mặt cong

$$S = 2\iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= 2\iint_D \sqrt{\frac{16}{16 - x^2 - y^2}}dxdy. \text{ (Đặt } x = 4cos\theta, y = 4sin\theta)$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^4 \frac{4}{\sqrt{16 - r^2}}rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (-4)\sqrt{16 - r^2}\Big|_0^4$$

$$= 4\pi(-4)(\sqrt{16 - 16} - \sqrt{16 - 0}) = 64\pi.$$

1.4.2 Ứng dụng tính tích phân mặt loại 1

2) Khối lượng và trọng tâm mặt mỏng khối lượng phân bố $\delta(x, y, z)$.

Khối lượng mặt

$$m = \iint_S f(x, y, z)dS \tag{33}$$

Trọng tâm mặt

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iint_S xf(x, y, z)dS \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iint_S yf(x, y, z)dS \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iint_S zf(x, y, z)dS \end{aligned} \tag{34}$$

Ví dụ 1.17. Tính khối lượng và trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O bán kính $r = 4$ với khối lượng riêng $\delta(x, y, z) = 16 - x^2 - y^2$

Giải:

Khối lượng mặt cong

$$m = \iint_S \delta(x, y, z)dS = \iint_D (16 - x^2 - y^2)\sqrt{\frac{16}{16 - x^2 - y^2}}dxdy$$

$$= 4\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}dxdy \text{ (đặt } x = rcos\theta, y = rsin\theta)$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^4 \sqrt{16 - r^2}rdrd\theta$$

$$= 4.2\pi \int_0^4 \frac{(16 - r^2)^{3/2}}{-3}\Big|_0^4 = \frac{512\pi}{3}.$$

Trọng tâm của đường cong

$$x_0 = \frac{12}{512\pi}\iint_D x\sqrt{16-x^2-y^2}dxdy$$
$$=\frac{12}{512\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^4 rcos\theta\sqrt{16-r^2}rdrd\theta = 0.$$

$$y_0 = \frac{12}{512\pi}\iint_D y\sqrt{16-x^2-y^2}dxdy$$
$$= \frac{12}{512\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^4 rsin\theta\sqrt{16-r^2}rdrd\theta = 0.$$

$$z_0 = \frac{12}{512\pi}\iint_D z\sqrt{16-x^2-y^2}dxdy$$
$$= \frac{12}{512\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (16-r^2)rdrd\theta = \frac{12}{512\pi}64.2.\pi = 3.$$

Bài tập: Tính các tích phân mặt loại 1 sau

1.37. $I = \iint_S zy\, dS$ với S là mặt $z = 2x, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

1.38. $I = \iint_S (y+z)\, dS$ với S là mặt $x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$.

1.39. $I = \iint_S xyz\, dS$ với với S là mặt lập phương $[0,1]^3$.

1.40. $I = \iint_S (z^2 - 2yx)\, dS$ với S là mặt $z = x + y, x^2 + y^2 < 9$.

Bài tập: Tính diện tích, khối lượng và trọng tâm của các mặt S:

1.41. $S : z = 2x + 2y, x^2 + y^2 \leq 4x$, với $\delta = 1$.

1.42. $S : 2x - 2y + z = 3, x^2 + 4y^2 \leq 4$, với $\delta = 1$.

1.43. $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$, với $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.44. $S : z = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 \leq 4x$, với $\delta = \sqrt{x^2 + z^2}$.

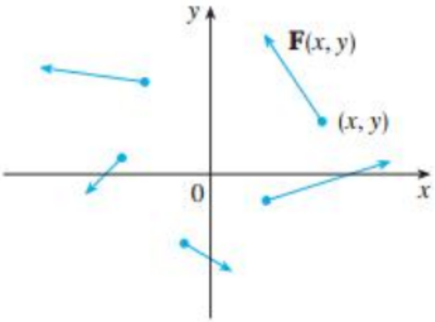
Chương 2

Trường vector

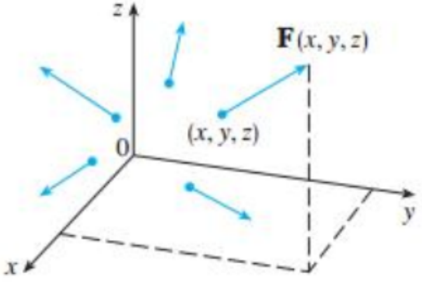
2.1. Trường vector
2.1.1 Định nghĩa Trường vector

Cho $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Một hàm vector từ Ω vào $\mathbb{R}^n$ được gọi là một trường vector.

Ví dụ 2.1.

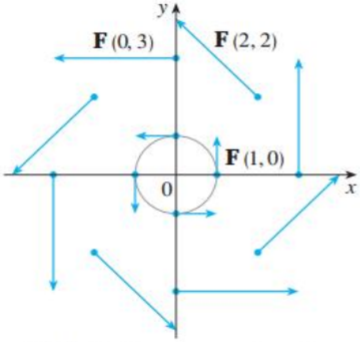


Trường véc tơ trong $\mathbb{R}^2$



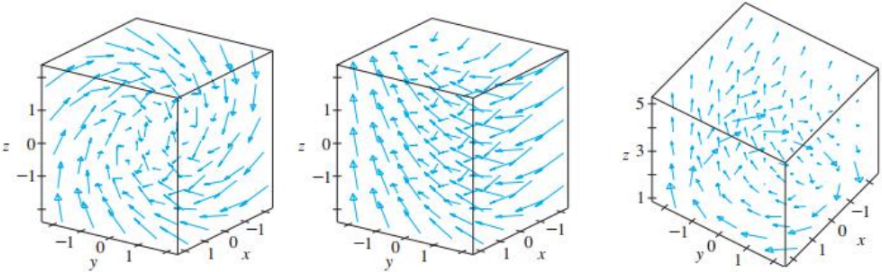
Trường véc tơ trong $\mathbb{R}^3$

Ví dụ 2.2. Trường vector cho bởi $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ được mô tả bởi bảng giá trị và đồ thị sau



(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Ví dụ 2.3. Trường vector trong không gian 3 chiều



$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z}\boldsymbol{i} - \frac{x}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z}{4}\boldsymbol{k}$

Bài tập: Những hàm nào sau đây là trường vector

2.1. $\mathbf{F}(x, y) = 4x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$.

2.2. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, xy, y^2)$.

2.3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$.

2.4. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, xy)$.

Bài tập: Hãy vẽ các trường vector sau tại các điểm có tọa độ $-2, -1, 0, 1, 2$

2.5. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(x, 2)$

2.6. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(x, x/4 + y/2)$

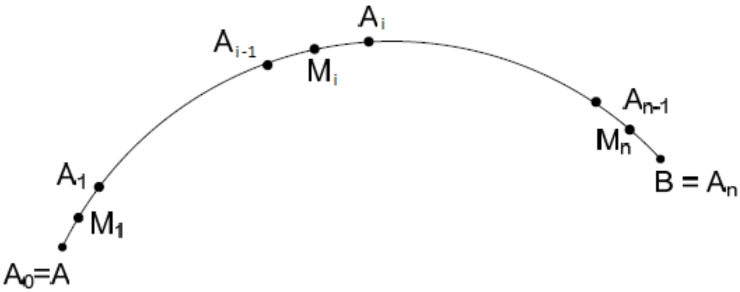
2.7. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{4}(x, x - y)$

2.8. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{4}(x^2, xy)$

2.2. Tích phân đường loại 2
2.2.1 Tích phân đường loại 2

Cho hàm số $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ xác định trên đường cong có hướng $L = \widehat{AB}$ trong $\mathbb{R}^2$. Chia đường cong $\widehat{L}$ thành nhiều cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n = B$.

Trên mỗi cung nhỏ $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ta chọn một điểm tuỳ ý M_i.



2.2.1 Tích phân đường loại 2

Ta lập tổng:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i) \tag{35}$$

trong đó $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Cho $n \to \infty$ (khi đó $\Delta x_i, \Delta y_i \to 0$), nếu I_n hội tụ đến 1 số thực I thì ta nói I là tích phân đường (loại 2) của $P(x,y), Q(x,y)$ trên L, ký hiệu:

$$I = \int_L \Big(P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Big) \tag{36}$$

Ý nghĩa cơ học của tích phân đường loại 2: Lực $\vec{F} = (P, Q)$ tác dụng lên vật chuyển động trên đường cong L. Công của lực trên đường cong này là

$$A = \int_L \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_L \Big(P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Big) \tag{37}$$

Tính chất đặc biệt của tích phân đường loại 2

a) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = -\int_{\widehat{BA}} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$

b) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy$

c) Nếu các hàm số $P = P(x,y)$ và $Q = Q(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên D. Khi đó 2 mệnh đề sau tương đương:

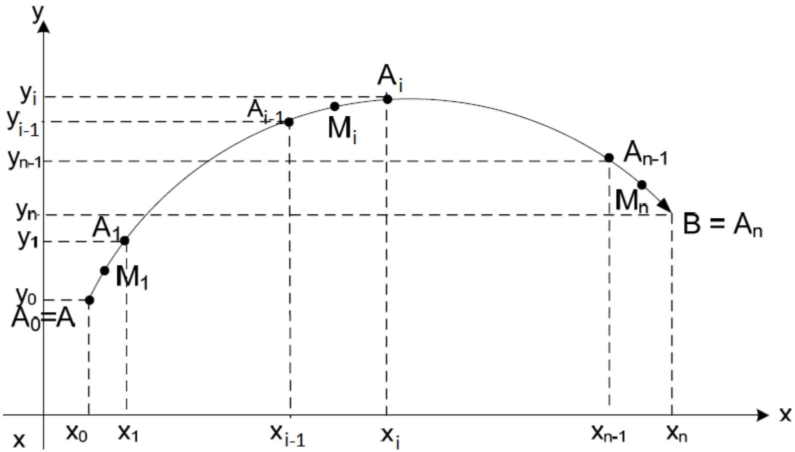
i) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B.

ii) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

d) Nếu L là một đường cong kín, chiều dương của L là ngược chiều kim đồng hồ.

2.2.1 Tích phân đường loại 2

Phương pháp tính cơ bản là đưa về tích phân một biến. Ta tìm phép biến đổi $dx = dx(t)$ và $dy = dy(t)$.



2.2.1 Tích phân đường loại 2

Tổng quát: Đường cong L cho bởi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ với $t_1 \leq t \leq t_2$ thì

$$\begin{aligned}\int_L (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) = \\ \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ +R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt\end{aligned} \tag{38}$$

+ Nếu đường cong L được cho bởi $x(t)$, $y(t)$ với $t_1 \leq t \leq t_2$

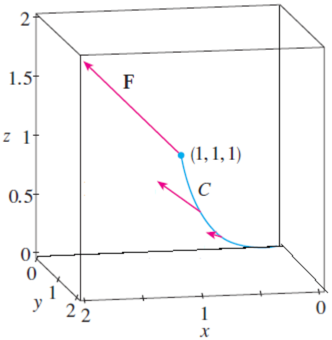
$$\int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt \tag{39}$$

+ Nếu đường cong L được cho bởi $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$

$$\int_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_a^b (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx \tag{40}$$

Ví dụ 2.4. Tính $I = \int_C xydx + yzdy + zxdz$ với $C : x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \le t \le 1$.

Giải:



Ta có

$$\int_C (xydx + yzdy + zxdz)$$

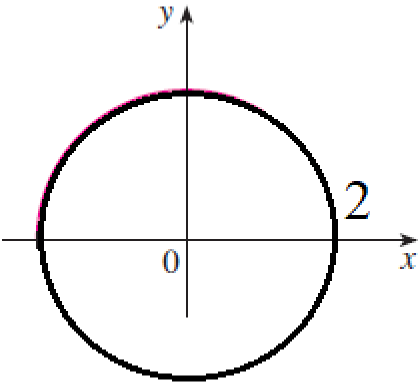
$$= \int_0^1 (tt^2dt + t^2t^3 2tdt + tt^3 3t^2dt).$$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)dt$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{27}{28}.$$

Ví dụ 2.5. Tính $I = \int_C ydx - xdy$ với C là đường tròn tâm $O(0,0)$ có $R = 2$.

Giải:



Đặt $x = 2cost, y = 2sint, 0 \leq t \leq 2\pi$.
Ta có

$$\int_C (ydx - xdy)$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(2sint(-2sintdt) - 2cost(2cost)dt\Big)$$

$$= -\int_0^{2\pi} 4dt = -4t\Big|_0^{2\pi} = -8\pi.$$

2.2.2 Ứng dụng của tích phân đường loại 2

Công thức Green: Nếu $P = P(x, y)$ và $Q = Q(x, y)$ là các hàm hai biến có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn D giới hạn bởi đường cong kín L trơn từng khúc. Khi đó ta có công thức

$$\oint_L (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (41)$$

trong đó tích phân đường được lấy theo chiều dương của L.

Hệ quả: Diện tích của miền phẳng D giới hạn bởi đường cong kín L được tính bằng công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint_L (-ydx + xdy) \qquad (42)$$

2.2.2 Ứng dụng của tích phân đường loại 2

Ví dụ 2.6. Tính $I = \oint_L \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, $L = \{(x, y), (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$.

Giải:

Ta có $P = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ nên $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Vậy $I = \iint_V \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$.

Ví dụ 2.7. Tính $I = \oint_L (x - y)dx + (x - 2)dy$ với L là đường viền hình vuông có các cạnh nằm trên $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$.

Giải:

Ta có $I = \iint_V \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^2 (1 + 1) dxdy = 4$.

Bài tập: Tính các tích phân đường loại 2 sau

2.9. $I = \int_L (2xy + 4x + 1)dx - (2xy + 3y)dy$ với L là $x = 2$ đi từ $(2, 1)$ đến $(2, 0)$.

2.10. $I = \int_L (y + 2x + 1)dx + (y - 1)dy$ với L là $y = -x + 1$ đi từ $(0, 1)$ đến $(1, 0)$.

2.11. $I = \int_L (xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 3)dy$ với L là $y = x^2$ đi từ $(-1, 1)$ đến $(1, 1)$.

2.12. $I = \int_L (y + 2x)dx + (4y + x)dy$ với L là nửa trên đtròn từ $(1, 0)$ đến $(-1, 0)$

Bài tập: Áp dụng công thức Green tính tích phân sau:

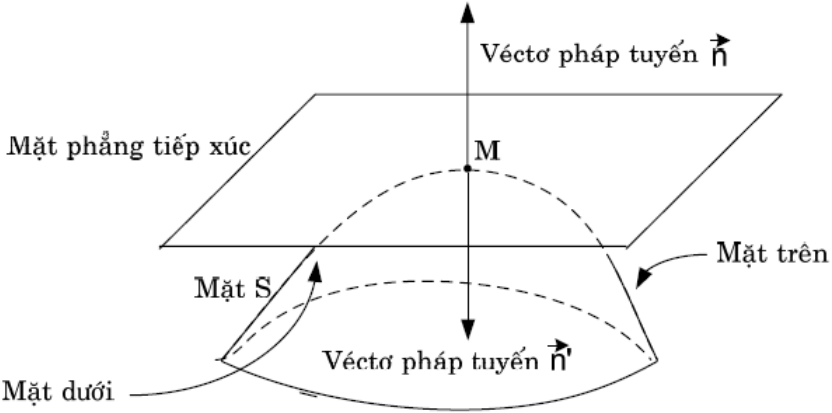
2.13. $I = \oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$ với L là chu vi $A(1, 1), B(2, 2), C(1, 3)$.

2.14. $I = \oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ với L là êlip $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

2.15. $I = \oint_L (3x + y^2)dx + 2x(y + 1)dy$ với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

2.3. Tích phân mặt loại 2
2.3.1 Tích phân mặt loại 2

Mặt định hướng: Giả sử S là một mặt trơn, khi đó tại mỗi điểm M thuộc S tồn tại mặt phẳng (P) tiếp xúc với S.



2.3.1 Tích phân mặt loại 2

Cho các hàm $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ xác định trên mặt định hướng S với véctơ pháp tuyến đơn vị dương $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ với α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi $\vec{n}$ với Ox, Oy, Oz.

Tích phân mặt loại 2 của P, Q, R trên S được xác định bởi

$$\iint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS \quad (43)$$

Ý nghĩa cơ học của tích phân đường mặt 2: vận tốc nước $\vec{v} = (P, Q, R)$ chảy qua một mặt cong S. Lưu lượng (thể tích nước chảy qua trong 1 đơn vị thời gian) là

$$F = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) \quad (44)$$

2.3.1 Tích phân mặt loại 2

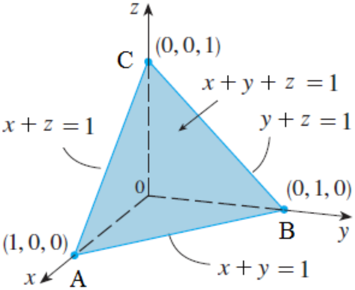
Phương pháp tính tích phân: Xác định hình chiếu của S xuống từng mặt phẳng Oyz, Oxz và Oxy. Trong mỗi trường hợp, viết lại phương trình biểu diễn S theo biến tương ứng:

$$\begin{aligned}
\iint_S P(x,y,z)dydz &= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \\
\iint_S Q(x,y,z)dxdz &= \pm \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \\
\iint_S R(x,y,z)dxdy &= \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy
\end{aligned} \tag{45}$$

Trong công thức trên, dấu $+$ được lấy nếu $\vec{n}$ tạo với trục tọa độ một góc nhọn và dấu $-$ được lấy nếu $\vec{n}$ tạo với trục tọa độ một góc tù.

Ví dụ 2.8. Tính $I = \iint_S y dxdz$ với S là phía trong tứ diện $x + y + z = 1$ và $x = 0, y = 0, z = 0$.

Giải:



Xét mặt ABC, ta có:

$$I_1 = -\iint_{OAC} (1 - x - z) dxdz$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x + z - 1) dxdz = -\frac{1}{6}.$$

Mặt khác $I_2 = \iint_{OAC} 0 dxdz = 0$.

Vì OBC và OAB đều vuông góc với Oxz nên hình chiếu của chúng xuống Oxz bằng 0 nên $I_3 = I_4 = 0$.

Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_1 = -1/6$.

Bài tập: Tính các tích phân mặt loại 2 sau

2.16. $I = \iint_S dxdy$ với S là mặt trên $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, z = 2$.

2.17. $I = \iint_S \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ với S là mặt dưới $x^2 + y^2 < 9, z = 4$.

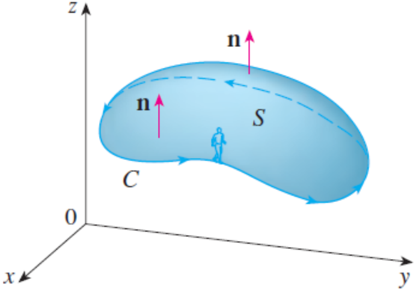
2.18. $I = \iint_S z^2 dxdy + x^2 dydz$ với S là mặt trên $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 2$.

2.19. $I = \iint_S z^2 dxdy$ với với S là mặt trong $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$, $0 \le z \le 1$.

2.20. $I = \iint_S (z - R)^2 dxdy$ với với S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2, R \le z \le 2R$.

Công thức Stokes: Nếu $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ và $R = R(x,y,z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên mặt trơn định hướng S giới hạn bởi đường cong kín C trơn từng khúc. Khi đó ta có công thức

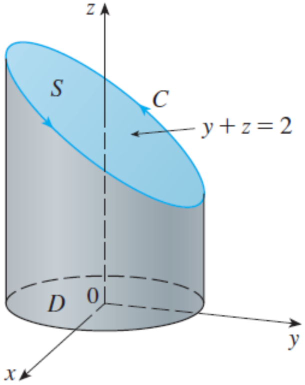
$$\oint_C (Pdx+Qdy+Rdz) = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dydz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \quad (46)$$



2.3.2 Ứng dụng của tích phân mặt loại 2

Ví dụ 2.9. Tính $I = \oint_L -y^2dx + xdy + z^2dz$ với L là giao của $y + z = 2$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Giải:



Ta có $\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2y$

$$\text{Vậy } I = \iint_S (1+2y)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2rsin\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}sin\theta\right]\Big|_0^1 d\theta$$

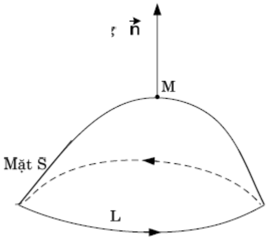
$$= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}sin\theta d\theta) = \frac{1}{2}2\pi + 0 = \pi$$

2.3.2 Ứng dụng của tích phân mặt loại 2

Công thức Gaus-Ostrogradski: Nếu $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ và $R = R(x, y, z)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong miền đơn liên V giới hạn bởi mặt kín S trơn từng khúc. Khi đó ta có công thức

$$\oiint_S (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \tag{47}$$

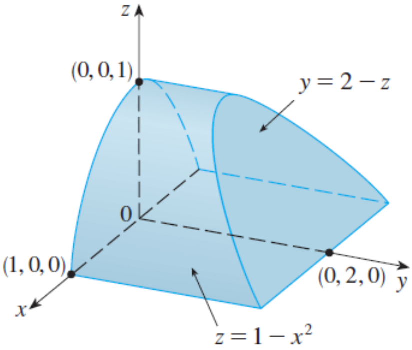
trong đó tích phân mặt được lấy theo mặt ngoài của S.



2.3.2 Ứng dụng của tích phân mặt loại 2

Ví dụ 2.10. Tính $I = \oiint_S (xydydz + (y^2 + e^{xz^2})dxdz + \sin xydxdy)$ với S là mặt ngoài của $z = 1 - x^2$, $y + z = 2$, $z = 0$, $y = 0$.

Giải:



Ta có $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y + 2y + 0 = 3y$

Viết lại $V = \{(x, y, z), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z\}$.

Vậy $I = \iiint_V 3ydxdydz$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} 3ydydzdx$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}dzdx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = \frac{184}{35}$$

Bài tập: Áp dụng Stokes tính tích phân sau

2.21. $I = \oint_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

với L là đường tròn $x^2+y^2+z^2 = 4, x+y+z = 0$.

2.22. $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$

với L là giao giữa $x^2+y^2 = 1, x+z = 1$.

Bài tập: Áp dụng Gauss- Ostrogradski tính tích phân sau

2.23. $I = \oiint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$

với S là phía ngoài $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 9$.

2.24. $I = \oiint_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$

với S là phía ngoài $z = x^2+y^2$ bị cắt bởi $z = 2x$.

2.4. Toán tử div - rot
2.4.1 Toán tử div F

Cho **F** là một trường véctơ. Đại lượng

$$div\ \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{48}$$

được gọi là dive của trường véctơ **F**.

Trường véctơ **F** được gọi là một trường ống nếu $div\ \mathbf{F}(M) = 0$ với mọi $M \in \Omega$.

Ví dụ 2.11. : Tìm $div\ F$ của $F(x, y, z) = \Big(xz, xyz, -y^2\big)$.

Đặt $P = xz, \quad Q = xyz, \quad R = -y^2$. Ta có

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = z + xz$$

Bài tập: Tính *div* **F** và kiểm tra **F** có phải trường ống hay không?

2.25. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$

2.26. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z, y - x, z - y)$

2.27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, z^2)$

2.28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2, z^2 - y^2, z^2 - x^2)$

Bài tập: Tính *div* **F** và kiểm tra **F** có phải trường ống hay không?

2.29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^3, 2xyz, y^3 + z^2)$.

2.30. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x^2 - 2y^2, 2y^2 - 2z^2, 2z^2 - 2x^2)$.

2.31. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, 2y, x + y - 3z)$.

2.32. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + xy, 2y^2 - xy, xy - z^2)$.

Vector

$$rot\ \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \quad (49)$$

được gọi là véctơ xoáy (hay véctơ rota) của trường véctơ **F**

Ví dụ 2.12. : Tìm *curl F* của $F(x, y, z) = \Big(xz, xyz, -y^2\Big)$.
Đặt $P = xz, \quad Q = xyz, \quad R = -y^2$. Ta có

$$curlF = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) = \Big(-y(2+x), x, yz\Big)$$

Bài tập: Tính *rot* **F** của trường **F**

2.33. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$

2.34. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-z, y-x, z-y)$

2.35. $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, z^2)$

2.36. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2-y^2, z^2-y^2, z^2-x^2)$

Bài tập: Tính *rot* **F** của trường **F**

2.37. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^3, 2xyz, y^3+z^2)$.

2.38. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2-2y^2, 2y^2-2z^2, 2z^2-2x^2)$.

2.39. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, 2y, x+y-3z)$.

2.40. $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+xy, 2y^2-xy, xy-z^2)$.

Chương 3

Phương trình vi phân

3.1. Định nghĩa pt vi phân
3.1.1 Phương trình vi phân

Phương trình liên hệ giữa các biến độc lập, hàm phải tìm và đạo hàm (hay vi phân) của hàm phải tìm được gọi là **phương trình vi phân .**

Cấp cao nhất của đạo hàm có mặt trong phương trình được gọi là **cấp của phương trình vi phân .**

Ví dụ 3.1.

a) Phương trình vi phân cấp 1.

$$y' = y + 2x.$$

b) Phương trình vi phân cấp 2.

$$y'' + y' - 2y = -4x.$$

3.1.1 Phương trình vi phân

Nghiệm tổng quát của ptvp $F(x, y, y', y''...)$ trong miền Ω là hàm $y = \varphi(x, C)$ với các tính chất sau:

1. Nó là nghiệm của ptvp đã cho với mọi giá trị của hằng số C.
2. Với điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0$ sao cho $(x_0, y_0) \in \Omega$ chỉ có một giá trị duy nhất $C = C_0$ làm cho nghiệm $y = \varphi(x, C_0)$ thỏa mãn điều kiện ban đầu đã cho.

Nghiệm riêng $y = \varphi(x, C_0)$ nhận được từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x, C)$ ứng với giá trị cụ thể $C = C_0$ gọi là nghiêm riêng.

Ví dụ 3.2. Cho ptvp $y' = 2x$ với điều kiện đầu $y(0) = 1$.

Nghiệm tổng quát $y(x, C) = x^2 + C$.

Nghiệm riêng $y(x) = x^2 + 1$.

Bài toán Cauchy: là bài toán tìm nghiệm riêng của

$$\begin{cases} \text{phương trình vi phân } y' = f(x, y), \\ \text{điều kiện ban đầu } y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{50}$$

3.1.1 Phương trình vi phân

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

3. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$ 4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$ 5. $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}.$ 7. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|} + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$ 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

10. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$ 11. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$

12. $\displaystyle\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C.$ 13. $\displaystyle\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$ 15. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)| + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$ 17. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

Phương trình tách biến là ptvp có dạng

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0. \tag{51}$$

Ví dụ 3.3.

$$x^2e^x\ dx + y\sin y\ dy = 0.$$

Nhận dạng: mỗi đơn thức chỉ chứa duy nhất 1 biến tương ứng.

Phương pháp giải: Tích phân từng đơn thức theo biến tương ứng
Nghiệm tổng quát của Phương trình tách biến

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C. \tag{52}$$

Ví dụ 3.4. Tìm nghiệm của ptvp $y' = \tan x \ \tan y$ thỏa mãn $y(0) = \pi/2$.
Giải:
Đặt $y' = dy/dx$ và viết lại phương trình đã cho như sau

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \ \tan y.$$

Phân ly biến số: $\cot y \ dy - \tan x \ dx = 0$.
Tích phân phương trình trên, ta thu được kết quả sau

$$\int \cot y \ dy - \int \tan x \ dx = C.$$

Nghiệm tổng quát: $\ln(\sin y) + \ln(\cos x) = C$
Với điều kiện đầu $x = 0, y = \pi/2$, ta tìm được
$C = \ln(\sin \frac{\pi}{2}) + \ln(\cos 0) = 2$.
Kết luận: Nghiệm riêng của bài toán là $\ln(\sin y) + \ln(\cos x) = 2$.

Bài tập: Giải các đường cong tích phân sau

3.1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.

3.2. $\dfrac{xdx}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

3.3. $xyy' = 1 - x^2$.

3.4. $y' \sin x = y \ln y$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.5. $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$; biết $y(1) = 1$.

3.6. $(1+e^x)y^2dy = e^x dx$; biết $y(0) = 0$.

3.7. $y \ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$; biết $y(-\dfrac{15}{16}) = e$.

3.8. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$; biết $y(0) = 0$.

3.2.2 Phương trình đẳng cấp

Phương trình đẳng cấp là ptvp có thể đưa về dạng

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{53}$$

Ví dụ 3.5.

$$x^2y^2y' + xy^3 - x^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow y' = -\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^{-2}.$$

Nhận dạng: tổng cấp lũy thừa của các biến trong từng đơn thức là bằng nhau (không tinh cấp lũy thừa của đạo hàm).

Phương pháp giải: Đặt $y = tx, dy = x\ dt + t\ dx$ sau đó đưa về dạng phương trình tách biến.

3.2.2 Phương trình đẳng cấp

Ví dụ 3.6. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp sau

$$(x^2 + 2xy)\, dx + xy\, dy = 0.$$

Giải:

Đặt $y = tx$, ta có $dy = x\, dt + t\, dx$. Phương trình đã cho có dạng

$$(x^2 + 2tx^2)dx + tx^2(x\, dt + t\, dx) = 0,$$

hay

$$(x^2 + 2tx^2 + t^2x^2)dx + tx^3\, dt = 0.$$

Phân ly biến số và tích phân

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{t\, dt}{(1+t)^2} = C,$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{1+t} = C.$$

Vậy nghiệm tổng quát của ptvp ban đầu là: $\ln|x+y| + \dfrac{x}{x+y} = C.$

3.2.2 Phương trình đẳng cấp

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.9. $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) y' + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

3.10. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

3.11. $xy' \ln\left(\frac{y}{x}\right) = y \ln\left(\frac{y}{x}\right) + x$.

3.12. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.13. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$; biết $y(2) = 1$.

3.14. $xy' - y = x \tan\frac{y}{x}$; biết $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

3.15. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$; biết $y(1) = 2$.

3.16. $xy' = xe^{y/x} + y$; biết $y(1) = 0$.

3.2.3 Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (54)$$

Nhận dạng: Các hàm số thỏa mãn $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt $u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y)$.

Bước 2: Tìm $C(y)$ thỏa $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

Bước 3: Nghiệm TQ là $u(x,y) = 0$ với $C(y)$ vừa tìm được.

Ví dụ 3.7. Tìm nghiệm của ptvp $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$

Giải

Đặt $P(x,y)=x+y-1$ và $Q(x,y)=e^y+x$. Phương trình trên là ptvp toàn phần vì $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$.

Ta có:

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)=\int (x+y-1)\,dx+C(y)$$

$$=\frac{1}{2}x^2+xy-x+C(y).$$

Ta lại có

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\Leftrightarrow x+C'(y)=e^y+x\Leftrightarrow C'(y)=e^y.$$

$$\Rightarrow C(y)=\int e^y\,dy=e^y+C.$$

Vậy nghiệm của ptvp là

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y+C=0.$$

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.17. $(\frac{2}{3}xy^3 + x^2)\ dx + (x^2y^2 + y^2)\ dy = 0.$

3.18. $(\frac{y^2}{2} - 1)e^x\ dx + (ye^x - 1)\ dy = 0.$

3.19. $sinx\ siny\ dx - cosx\ cosy\ dy = 0.$

3.20. $(\frac{x}{2}cos2y + x^2e^{2y})\ dx - (\frac{x^2}{2}sin2y - \frac{2x^3}{3}e^{2y})\ dy.$

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.21. $(\frac{xy^2}{2} + y)\ dx + (\frac{x^2y}{2} + x)\ dy = 0$; biết $y(1) = 2$.

3.22. $(xye^{-2x} + x)\ dx - (\frac{2x+1}{4}e^{-2x})\ dy = 0$; biết $y(0) = 0$.

3.23. $(sinx\ siny - sinx\ cosy)\ dx - (cosx\ cosy + cosxsiny)\ dy = 0$; biết $y(0) = \pi/2$.

3.24. $(ycosxe^{sinx} - e^{cosy})\ dx + (e^{sinx} + xsinye^{cosy})\ dy$; biết $y(0) = \pi/2$.

3.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình vi phân tuyến tính là ptvp có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{55}$$

Nhận dạng: y và y' có mặt với lũy thừa bậc 1 và không nhân với nhau.
Phương pháp giải:
Phương trình thuần nhất: Nếu $Q \equiv 0$:

$$y' + P(x)y = 0. \tag{56}$$

Dùng phương pháp phân ly biến số $\dfrac{dy}{y} = -P(x)dx$.
Tích phân hai vế, ta thu được $lny = -\int P(x)dx + lnC$.
Nghiệm tổng quát là

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{57}$$

Phương trình không thuần nhất: Nếu $Q \neq 0$: .
Đặt

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

với $C(x)$ là hàm số chưa xác định. Để tìm $C(x)$, ta thay y vào phương trình ban đầu

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Suy ra

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Nghiệm tổng quát cần tìm

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] \tag{58}$$

3.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính

Ví dụ 3.8. Tìm nghiệm riêng của ptvp $xy' + y = \dfrac{1}{x}$.

Giải:

Phương trình có thể viết lại $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2}$.

Đây là ptvp tuyến tính cấp 1 với $P(x) = 1/x, Q(x) = 1/x^2$.

Nghiệm tổng quát theo công thức (58), có dạng

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C\right]$$

Ta có $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x$ nên $e^{-\int \frac{dx}{x}} = \dfrac{1}{x}$ và $e^{\int \frac{dx}{x}} = x$.

Ta có $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} dx = \int \frac{1}{x^2} x dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$.

Vậy $y = \dfrac{1}{x}\left(\ln x + C\right)$.

3.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính

Phương trình Bernoulli là ptvp có dạng

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m, \qquad m \neq 0, m \neq 1. \tag{59}$$

Phương trình giải: Đổi biến $z = y^{1-m}$, (59) thành ptvptt thuần nhất.

$$\frac{1}{1-m}z' + P(x)z = Q(x), \qquad m \neq 0, m \neq 1.$$

Ví dụ 3.9. Giải ptvp $y' - 4y = x^2y^2$.

Giải:

Chia hai vế cho y^2 và đặt $z = 1/y$. Ta có $z' = -y'/y^2$. Phương trình được viết lại

$$-z' - 4z = x^2$$

Giải phương trình này, ta được $z = Ce^{-4x} - x^2/4 + x/8 - 1/32$.

Vậy $y = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{Ce^{-4x} - x^2/4 + x/8 - 1/32}$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.25. $xy' + y = \cos x$.

3.26. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3.27. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$.

3.28. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.29. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$; biết $y(e) = \dfrac{1}{2}e^2$.

3.30. $xy' + y - e^x = 0$; biết $y(1) = 0$.

3.31. $y' - \dfrac{2y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; biết $y(0) = 0$.

3.32. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$; biết $y(1) = 0$.

3.2.5 Phân biệt các dạng ptvp cấp 1

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

hoặc

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Phân biệt các dạng ptvp cấp 1

Dạng pt	Đặc điểm nhận dạng
pt tách biến	$P(x,y) = P(x), Q(x,y) = Q(y)$.
pt đẳng cấp	$P(x,y)$ và $Q(x,y)$ có cùng tổng cấp lũy thừa của các biến.
pt toàn phần	$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.
pt tuyến tính	$P(x,y)$ chứa tối đa y lũy thừa 1, $Q(x,y) = Q(x)$.

3.3. Phương trình vi phân cấp 2
3.3.1 Ptvpc2 tuyến tính hệ số hằng dạng thuần nhất

Phương trình thuần nhất có dạng

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \tag{60}$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Nhận thấy phương trình trên có nghiệm dạng $y = e^{kx}$ với k là hằng số. Thay vào (60) ta thu được

$$(ak^2 + bk + c)e^{kx} = 0.$$

Vì hàm $y = e^{kx}$ luôn luôn khác zero nên ta thu được

$$ak^2 + bk + c = 0. \tag{61}$$

Đây được gọi là **phương trình đặc trưng** của ptvp (60).

3.3.1 Ptvpc2 tuyến tính hệ số hằng dạng thuần nhất

Nếu $\Delta > 0$, ptvp có nghiệm là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{62}$$

với C_1, C_2 là các hằng số, $k1, k2$ là các nghiệm của ptđt.

Nếu $\Delta = 0$, ptvp có nghiệm là

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}, \tag{63}$$

với C_1, C_2 là các hằng số, k là các nghiệm kép của ptđt.

Nếu $\Delta < 0$, ptvp có nghiệm là

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{64}$$

với C_1, C_2 là các hằng số và $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm phức của ptđt.

Ví dụ 3.10. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp: $y'' - y' - 2y = 0$.

Giải:

Xét phương trình đặc trưng $k^2 - k - 2 = 0$.

Pt này có 2 nghiệm thực $k_1 = 2$, $k_2 = -1$.

Vậy ptvp ban đầu có nghiệm là

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Ví dụ 3.11. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Giải:

Xét phương trình đặc trưng $k^2 + 4k + 4 = 0$.

Pt này có 1 nghiệm kép $k = -2$.

Vậy ptvp ban đầu có nghiệm là

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$$

Ví dụ 3.12. Tìm nghiệm của ptvp: $y'' - 2y' + 5y = 0$ với các điều kiện $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Giải:

Xét phương trình đặc trưng $k^2 - 2k + 5 = 0$.

Pt này có $\Delta = -16 < 0$ với $\alpha = 1$ và $\beta = 2$.

Ptvp ban đầu có nghiệm tổng quát là

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Thay điều kiện đầu

$$y(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 = 0.$$

$$y'(0) = e^0(C_2 \sin 0) + e^0(2C_2 \cos 0) = 2C_2 = 1.$$

Vậy nghiệm của ptvp là

$$y = \frac{e^x}{2} \sin 2x.$$

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.33. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

3.34. $y'' - 2y' + y = 0$.

3.35. $y'' = 2y$.

3.36. $\dfrac{y' - y}{y''} = 3$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.37. $y'' - 5y' + 4y = 0$; biết $y = 5, y' = 8$ khi $x = 0$.

3.38. $y'' + 4y = 0$; biết $y = 0, y' = 2$ khi $x = 0$.

3.39. $y'' + 3y' = 0$; biết $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

3.40. $y'' + 3y' + 2y = 0$; biết $y = 1, y' = -1$ khi $x = 0$.

Phương trình không thuần nhất có dạng

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x), \qquad (65)$$

trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$, $f(x)$ là hàm số cho trước.

Giả sử y_p là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất và y_g là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng, khi đó nghiệm tổng quát của (65) là tổng

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x). \qquad (66)$$

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của pt thuần nhất $y_g(x)$.
Bước 2: Tìm nghiệm riêng của pt không thuần nhất $y_p(x)$.
Bước 3: Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất $y = y_g + y_p$.

3.3.2 Ptvpc2 tuyến tính hệ số hằng không thuần nhất

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Hàm $f(x)$	Nghiệm riêng $y_p(x)$
$f(x) = x$	$y_p(x) = Ax + B$,
$f(x) = x^2$	$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$,
$f(x) = e^{\alpha x}$	$y_p(x) = Ae^{\alpha x}$,
$f(x) = xe^{\alpha x}$	$y_p(x) = Axe^{\alpha x}$,
$f(x) = \sin \beta x$	$y_p(x) = A\cos \beta x + B\sin \beta x$,
$f(x) = \cos \beta x$	$y_p(x) = A\cos \beta x + B\sin \beta x$.

Trường hợp nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $y_g(x)$ có dạng tương tự với $f(x)$. Ta tang nghiêm riêng thêm 1 cấp của x. Nghĩa là $y_p(x) = xy_p(x)$.

Ví dụ:

Nếu $f(x) = x, y_g(x) = x$ thì ta chọn $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Nếu $f(x) = e^x, y_g(x) = e^x$ thì ta chọn $y_p(x) = xe^x$.

Ví dụ 3.13. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp sau $y'' + 3y' + 2y = x^2$.

Giải:

(Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát của pt thuần nhất tương ứng)

Phương trình thuần nhất tương ứng có dạng

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 3k + 2 = 0$. có 2 nghiệm $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_g(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

(Bước 2: Tìm nghiệm riêng của ptvp)

Nghiệm riêng của ptvp ứng với $f(x) = x^2$ là $y = Ax^2 + Bx + C$.

$\Rightarrow y' = 2Ax + B$ và $y'' = 2A$.

Thay vào ptvp đề bài, ta được

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

Đồng nhất hệ số ta thu được

$$\begin{cases} 2Ax^2 = x^2, \\ 6Ax + 2Bx = 0x, \\ 2A + 3B + 2C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2, \\ B = -3/2, \\ C = 7/4. \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của ptvp là

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

(Bước 3: Tìm nghiệm tổng quát của ptvp)

Nghiệm tổng quát của ptvp là

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

3.3.2 Phương trình dạng không thuần nhất

Ví dụ 3.14. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp sau $y'' + 4y' + 4y = 3e^x$.

Giải:

Phương trình thuần nhất tương ứng có dạng

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Phương trình đặc trưng $k^2 + 4k + 4 = 0$ có nghiệm kép $k = -2$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$y_g(x) = e^{-2x}(C_1 + xC_2).$$

Nghiệm riêng của ptvp ứng với $f(x) = 3e^x$ là $y_P(x) = Ae^x$. Thay vào ptvp ta được $Ae^x + 4Ae^x + 4e^x = 3e^x$.

Nghiệm tổng quát của pt không thuần nhất

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + xC_2) + \frac{1}{3}e^x.$$

3.3.2 Ptvpc2 tuyến tính hệ số hằng không thuần nhất

Xét phương trình

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x), \tag{67}$$

với $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có dạng khác nhau (đa thức, lũy thừa, sin cos).

Gọi y_{p_1} là nghiêm của ptvp

$$ay'' + by' + cy = f_1(x).$$

và y_{p_2} là nghiêm của ptvp

$$ay'' + by' + cy = f_2(x).$$

Khi đó nghiệm y_p của phương trình (67) được xác định như sau

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}.$$

3.3.2 Ptvpc2 tuyến tính hệ số hằng không thuần nhất

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.41. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

3.42. $y'' + y' - 6y = x^2 - 2x$.

3.43. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

3.44. $y'' - 4y = \sin x$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.45. $y'' + 4y' = \sin x$; biết $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

3.46. $y'' + y' = e^{2x} + 5x$; biết $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

3.47. $y'' + 2y' + y = e^{x} + e^{-x}$; biết $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

3.48. $y'' + y = x + \cos x$; biết $y = 1, y' = -1$ khi $x = 0$.

3.3.3 Ptvpc2 có thể giảm cấp dạng 1

Phương trình có vế phải không chứa hàm cần tìm

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \tag{68}$$

Đặt $\frac{dy}{dx} = p$, dẫn đến $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$. Phương trình (68) trở thành

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Giải phương trình trên tìm nghiệm p. Sau đó nghiệm tổng quát là

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2. \tag{69}$$

3.3.3 Ptvpc2 có thể giảm cấp dạng 1

Ví dụ 3.15. Giải ptvp $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$.

Giải:

Đặt $y' = p, y'' = p'$, ta thu được ptvp tuyến tính cấp 1

$$p' + \frac{p}{x} = x.$$

Phương trình theo p có nghiệm như sau

$$\begin{aligned} p &= e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[\int x e^{\int \frac{dx}{x}} dx + C_1\right] \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}. \end{aligned} \tag{70}$$

Ptvp có nghiệm tổng quát

$$y = \int \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2.$$

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.49. $xy'' = y' + x^2$.

3.50. $xy'' = y' + x$.

3.51. $x^2y'' - xy' = 0$.

3.52. $xy'' - y' = x^2e^x$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.53. $xy'' = y'(x+1)$; biết $y(1) = 0, y'(1) = 1$.

3.54. $y'' - y' = e^x$; biết $y(0) = 1, y(1) = 0$.

3.55. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$; biết $y(0) = 0, y'(0) = 3$.

3.56. $y'' \sin x - y' \cos x = -1 - \sin^2 x$; $y(0) = 1, y'(\pi/2) = 0$.

3.3.4 Ptvpc2 có thể giảm cấp dạng 2

Phương trình có vế phải không chứa biến x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{71}$$

Đặt $\dfrac{dy}{dx} = p$, dẫn đến $\dfrac{d^2y}{dx^2} = p\dfrac{dp}{dy}$. Phương trình (71) trở thành

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

Giải phương trình trên tìm nghiệm p. Sau đó nghiệm tổng quát là

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2. \tag{72}$$

3.3.4 Ptvpc2 có thể giảm cấp dạng 2

Ví dụ 3.16. Tìm nghiệm tổng quát của ptvp $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Giải

Đặt $y' = p$, ta có $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Thế y' và y'' vào pt đề bài, ta thu được

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Xét trường hợp $p \neq 0$. Tách biến ta được

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}.$$

Tích phân 2 vế, ta được

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C1|,$$

nghĩa là với $y > 0$

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}dy = C_1 dx.$$

Tích phân hai vế ta thu được 1 nghiệm của ptvp

$$y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$$

Xét trường hợp $p = 0$, nghĩa là $y = const$. Đây cũng là 1 nghiệm của ptvp ban đầu.

3.3.4 Ptvpc2 có thể giảm cấp dạng 2

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.57. $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$.

3.58. $yy'' = y'^2$.

3.59. $yy'' = y^2y' + y'^2$.

3.60. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$.

Bài tập: Giải các ptvp sau

3.61. $y'^2 + yy'' = yy'$; biết $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

3.62. $1 + y'^2 = 2yy''$; biết $y(1) = 1, y'(1) = 1$.

3.63. $yy'' + y'^2 = y'^3$; biết $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

3.64. $yy'' + y'^2 = y^2$; biết $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Phân biệt các dạng ptvp cấp 2

Dạng pt	Lũy thừa của y' và y bằng 0 hoặc 1	y'', y' và y không cùng thuộc 1 đơn thức	Có chứa đơn thức không chứa y, y' và y''
pt tuyến tính thuần nhất	Có	Có.	Không
pt tuyến tính không thuần nhất	Có	Có.	Có
pt giảm cấp dạng 1 (có x)	-	-	Có
pt giảm cấp dạng 1 (có y)	-	-	Không

3.4. Hệ phương trình vi phân
3.4.1 Định nghĩa hệ ptvp

Hệ phương trình vi phân là một hệ các phương trình dạng

$$y_i' = f_i(x, y_1, ..., y_n), \qquad i = 1, ..., n \tag{73}$$

trong đó f_i là những hàm số $(n+1)$ biến, y_i là những hàm chưa biết của biến x.

Giải hệ trên có nghĩa là tìm tất cả các bộ n hàm số $y_i(x)$ thỏa mãn (73). Bộ nghiệm này được gọi là nghiệm tổng quát của hệ.

Nếu cho trước điểm x_0 và các giá trị $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ thì một nghiệm $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ của hệ (73) thỏa mãn điều kiện (khởi đầu)

$$y_i(x_0) = b_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{74}$$

được gọi là nghiệm riêng của hệ

3.4.1 Định nghĩa hệ ptvp

Phương trình vi phân bậc cao luôn có thể đưa được về hệ phương trình vi phân bậc nhất.

Ví dụ 3.17. Xét phương trình vi phân cấp hai

$$y'' + y = x$$

Nếu đặt $y_1 = y$ và $y_2 = y'$ thì phương trình tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = x - y_1 \end{cases}$$

3.4.2 Hệ tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất n hàm số là hệ có dạng

$$y_i' = a_1^i(x)y_1 + ... + a_n^i(x)y_n, \qquad i = 1, ..., n \tag{75}$$

trong đó $a_j^i(x)$ là những hàm số theo biến x.

Ta kí hiệu Y là vectơ cột chứa các $y_i(x)$ và A là ma trận chứa $a_j^i(x)$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_1^1(x) & \cdots & a_n^1(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_1^n(x) & \cdots & a_n^n(x) \end{bmatrix},$$

thì hệ (75) được viết dưới dạng ma trận $Y' = AY$. Với giả thiết về tính liên tục của các hàm hệ số a_j^i và điều kiện đầu thích hợp, tồn tại duy nhất một nghiệm $Y(x)$ của hệ (75).

Để tìm nghiệm $Y(x)$ của hệ $Y' = AY$ ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm λ_i là trị riêng và $\overline{Y}_i$ là vector riêng của A.

Bước 2: Nghiệm $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \overline{Y} e^{\lambda_i}$.

Ví dụ 3.18. Giải hệ phương trình $X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$

Ma trận A có giá trị riêng là $2, 1 \pm i$ với $\overline{Y} = [0, -1, 1]^T, [1, -i, 1]^T$.

Ta thu được nghiệm

$$Y(x) = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^t \sin t \\ -e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix}$$

3.4.3 Hệ tuyến tính không thuần nhất

Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất n hàm số là hệ có dạng

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{76}$$

trong đó $A(x)$ là ma trận cấp $n \times n$ và $B(x)$ là vectơ cột n trong đó các thành phần là hàm theo x.

Giả thiết Y_g là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất (75) và Y_p là một nghiệm nào đó của hệ không thuần nhất (76). Khi ấy nghiệm tổng quát của hệ không thuần nhất có dạng

$$Y(x) = Y_g(x) + Y_p(x) \tag{77}$$