



TOÁN RỜI RẠC

Chương 4: Hàm & Quan hệ

Giảng viên: ThS. Trần Quang Khải

Nội dung



1. Hàm.

2. Quan hệ.

- a) Quan hệ trên một tập hợp.
- b) Các tính chất của quan hệ.
- c) Quan hệ n -ngôi.
- d) Biểu diễn quan hệ.
- e) Tính bao đóng của quan hệ.
- f) Quan hệ tương đương.

Review: Hàm



- ❖ Hàm là gì?
- ❖ Đơn ánh?
- ❖ Toàn ánh?
- ❖ Song ánh?

Khái niệm “hàm” trong lập trình



❖ Để mô tả một **function**:

- **Input**: các dữ liệu đầu vào.
- **Output**: các dữ liệu đầu ra.
- Các bước thực thi để **xử lý** input → tạo ra output.
- ☞ Quá trình **mô hình hóa** vấn đề/bài toán.



❖ Điểm yếu của hàm:

Không thể biểu diễn trường hợp **một phần tử** thuộc tập này tương ứng với **nhiều phần tử** thuộc tập khác.

Ví dụ:

- Một ông vua có 100 bà vợ.
- Một nhân viên cùng lúc đảm trách nhiều chức vụ.
- Một con vịt xòe ra hai cái cánh?



Quan hệ - Ví dụ

- ☞ *Quan hệ giữa một nhân viên và tiền lương của anh ta.*
- ☞ *Quan hệ giữa cấp quản lý và cấp dưới.*
- ☞ *Quan hệ giữa chương trình và biến của nó.*
- ☞ *Quan hệ giữa giá trị hàng hóa và tỉ lệ khuyến mãi.*
- ☞ *Quan hệ về vị trí/đường đi giữa các thành phố.*
- ➡ **Cải tiến/Tối ưu hoạt động của doanh nghiệp.**
- ➡ **Cải tiến/Tối ưu hoạt động của chương trình.**
- ➡ **Tối ưu thiết kế cơ sở dữ liệu.**



Định nghĩa

Cho hai tập hợp A và B . Một quan hệ hai ngôi (*binary relation*) từ A đến B là một tập con của $A \times B$.

$$R \subseteq A \times B$$

Ký hiệu:

Quan hệ: R

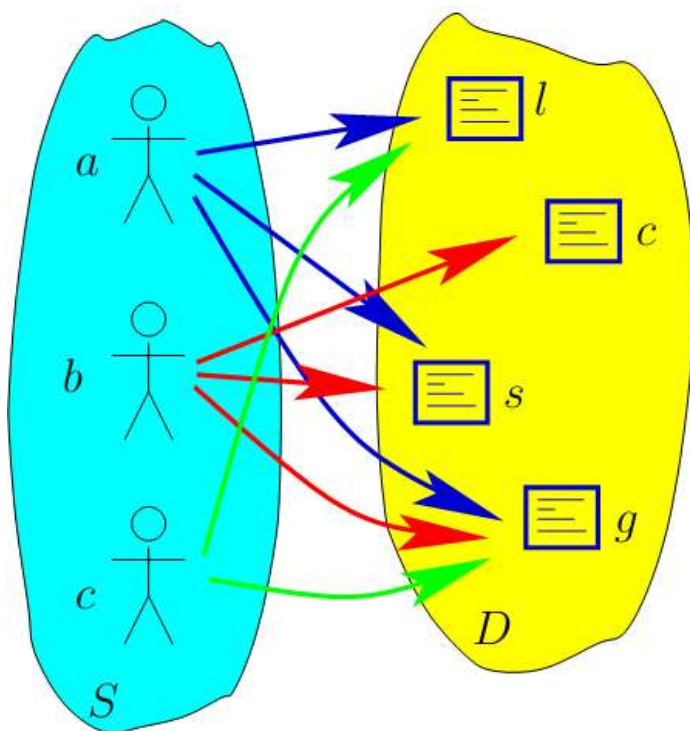
aRb để chỉ $(a, b) \in R$

$a \not R b$ để chỉ $(a, b) \notin R$



Quan hệ hai ngôi

Ví dụ: Cho tập sinh viên $S = \{a, b, c\}$ và tập các chương của môn Toán Rời Rạc $D = \{l, c, s, g\}$
 Các sinh viên này ôn thi như thế nào?



R	l	c	s	g
a	x		x	x
b		x	x	x
c	x			x

Quan hệ trên một tập hợp



❖ Quan hệ từ một tập hợp đến chính nó (tập con của $A \times A$).

❖ Ví dụ: cho tập $A = \{1, 5, 3, 6\}$

Cặp nào thuộc quan hệ $R = \{(a, b) \mid a \div b\}$

R	1	5	3	6
1	x	x	x	x
5		x		
3			x	x
6				x

$$R = \{(1,1), (5,1), (5,5), (3,1), (3,3), (6,1), (6,3), (6,6)\}$$

Quan hệ trên một tập hợp



❖ Có bao nhiêu quan hệ trên một tập hợp có n phần tử?

➤ $|A \times A| = n^2$

➤ Nếu $|S| = m$ thì $|P(S)| = 2^m$

➤ Vậy số quan hệ là 2^{n^2}

Các tính chất của quan hệ



1. Tính phản xạ.
2. Tính đối xứng – Phản đối xứng.
3. Tính bắc cầu.



Tính phản xạ

❖ Định nghĩa: $(a,a) \in R$ với mọi $a \in A$

❖ Ví dụ: xét tập $A = \{1, 2, 3\}$ và các quan hệ

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2)\}$$

$$R_2 = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,3)\}$$

Quan hệ nào là có tính phản xạ?



Tính đối xứng

❖ **Định nghĩa:** $(b, a) \in R$ khi $(a, b) \in R$ với $a, b \in A$

❖ **Ví dụ:** $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (2,1)\}$$

$$R_2 = \{(1,2), (1,1), (2,1), (2,2), (3,3)\}$$

❖ **Phản đối xứng:**

$$(b, a) \in R \text{ và } (a, b) \in R \text{ chỉ khi } a = b$$

Tính bắc cầu



❖ **Định nghĩa:** nếu $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in R$ thì $(a,c) \in R$
với $a,b,c \in A$

❖ **Ví dụ:** $A = \{1, 2, 3\}$
 $R = \{(1,2), (2,2), (2,3), (1,3)\}$



❖ Tìm tính chất của các quan hệ sau:

$$\Rightarrow R_1 = \{(a, b) | a \leq b\}$$

$$\Rightarrow R_2 = \{(a, b) | a > b\}$$

$$\Rightarrow R_3 = \{(a, b) | a = b \vee a = -b\}$$

\Rightarrow “get married” on human being

Tổng hợp



Phản xạ	$x R x, \forall x \in D$
Đối xứng	$x R y \rightarrow y R x, \forall x, y \in D$
Phản đối xứng	$(x R y \wedge y R x) \rightarrow x = y, \forall x, y \in D$
Bắc cầu	$(x R y \wedge y R z) \rightarrow x R z, \forall x, y, z \in D$



Quan hệ n -ngôi

❖ **Binary** relation: quan hệ trên **hai** tập hợp.

❖ **n -ary** relation: quan hệ trên **nhiều** tập hợp.

Quan hệ n -ngôi trên các tập hợp $A_1, A_2 \dots A_n$ là một tập con của tích Decartes $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

❖ Ví dụ: xét quan hệ R gồm các bộ ba (a, b, c) trên tập các số nguyên dương sao cho $a < b < c$

$$(1, 2, 3) \in R$$

$$(2, 1, 3) \notin R$$



❖ Cơ sở dữ liệu quan hệ.

Họ tên	Mã NV	Mã phòng ban	Mã người QL
Trần Văn A	SV01	KH	SV08
Lê Văn B	SV02	KD	SV10
Hà Thị C	SV04	TV	SV10
Nguyễn D	SV03	KD	SV02
Lê Anh E	SV08	KH	SV08

Biểu diễn quan hệ



- ❖ Có nhiều cách biểu diễn quan hệ.
- ❖ Hai cách biểu diễn quan hệ thường dùng:
 - Biểu diễn bằng ma trận **zero-one**.
 - Biểu diễn bằng **đồ thị có hướng**.

Biểu diễn bằng ma trận



❖ Cho quan hệ R từ tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ đến tập $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng ma trận $M_R = [m_{ij}]$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Biểu diễn bằng ma trận



❖ Ví dụ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{5, 6, 7\}$

$$R = \{(1, 5), (2, 6), (2, 7), (4, 7)\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Biểu diễn bằng đồ thị



❖ Cho quan hệ R từ tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ đến A . Đồ thị **có hướng** (directed graph) $G = (V, E)$ biểu diễn quan hệ R như sau:

V là tập **các đỉnh** (các phần tử **của** A)

E là tập **các cạnh** (các phần tử **của** R)

cạnh $(a_i, a_j) \in E$ nếu $(a_i, a_j) \in R$

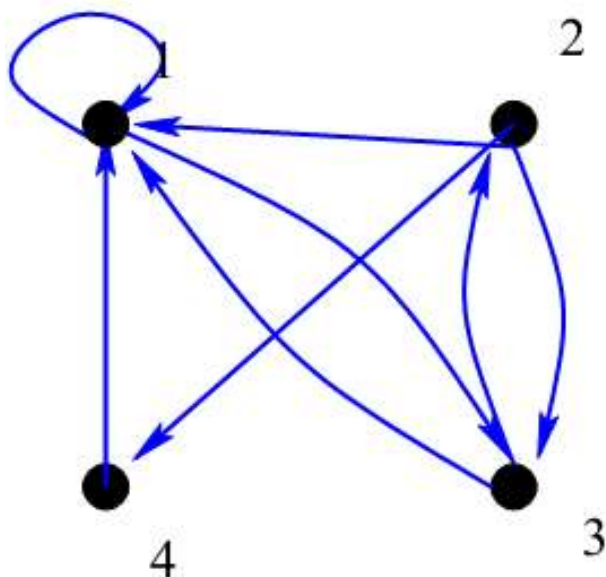
Biểu diễn bằng đồ thị



❖ Ví dụ:

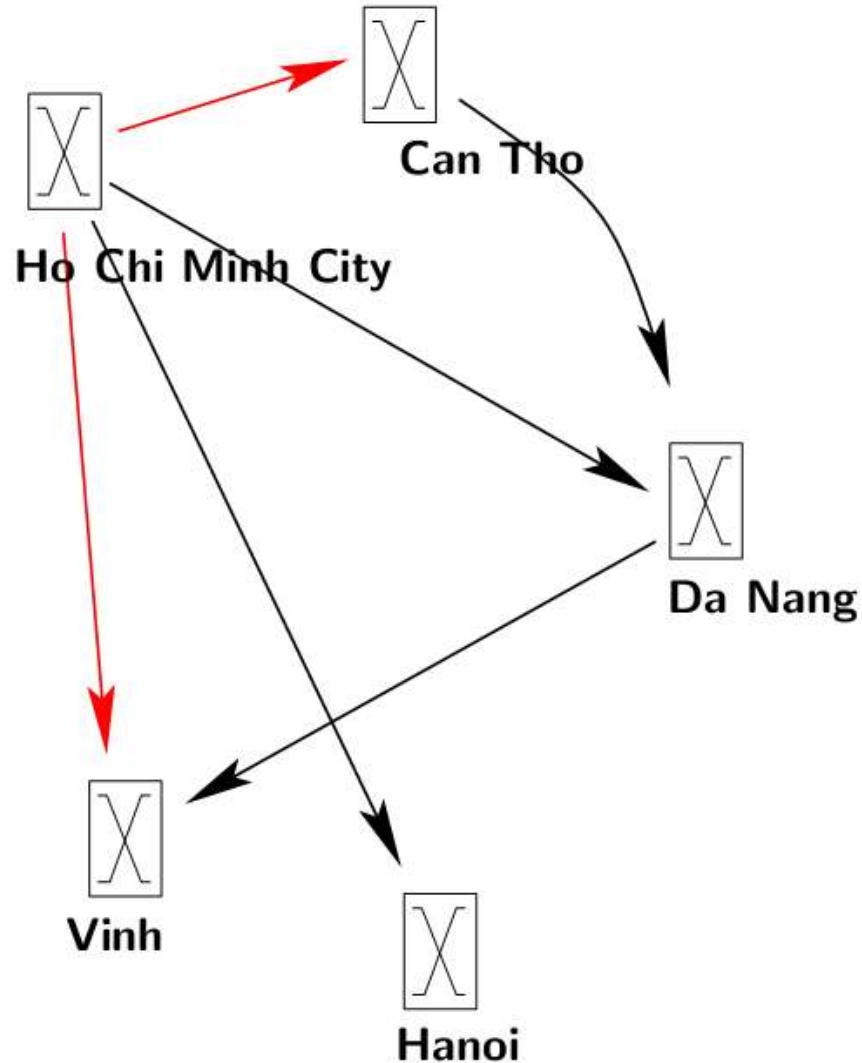
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$





Bao đóng của các quan hệ





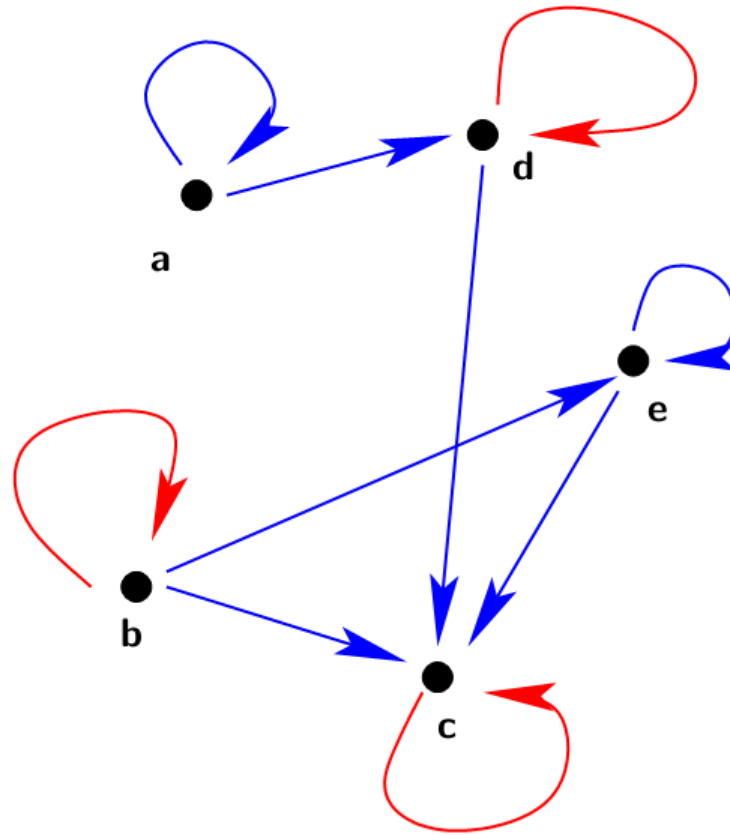
Bao đóng của các quan hệ

Cho quan hệ R trên tập A . R có thể **có hoặc không có** tính chất P nào đó (**phản xạ**, **đối xứng** hoặc **bắc cầu**). Nếu tồn tại quan hệ S sao cho:

- S có tính chất P .
 - S chứa R .
 - S là tập con của **tất cả** các quan hệ có tính chất P và chứa R (S là tập nhỏ nhất có tính chất P).
- ⇒ S là một bao đóng của R đối với tính chất P .
- ⇒ Có 3 loại bao đóng: ???



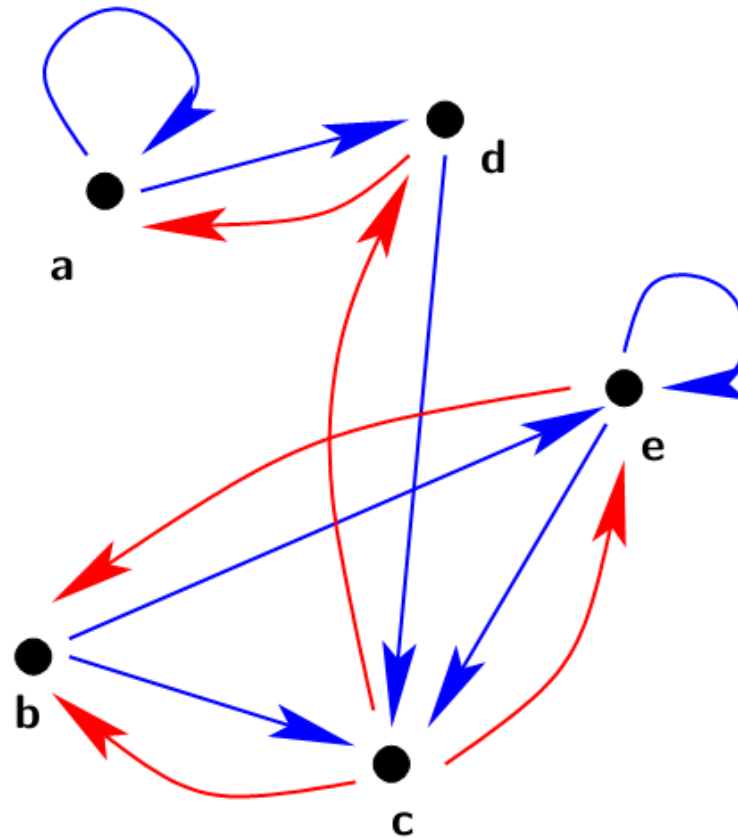
Tạo bao đóng phản xạ



$$R \cup \{(a, a) \mid a \in A \wedge (a, a) \notin R\}$$



Tạo bao đóng đối xứng

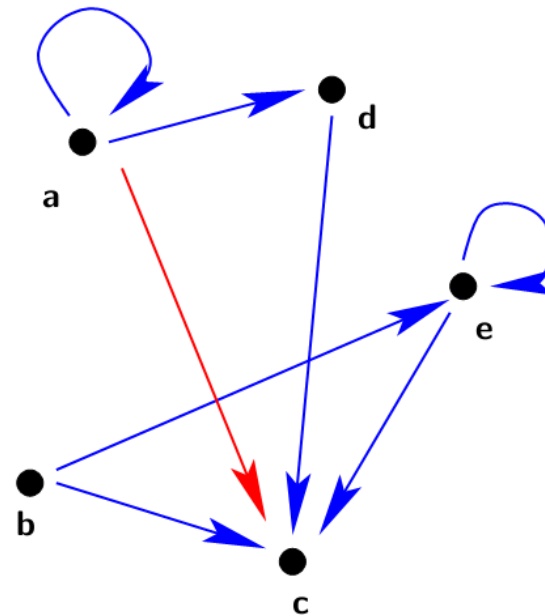


$$R \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in R \wedge (b, a) \notin R\}$$

Tạo bao đóng bắc cầu



- ❖ **Phức tạp hơn nhiều so với tạo bao đóng phản xạ và đối xứng:**
 - **Tương tự bài toán cặp đỉnh trong đồ thị liên thông (sẽ được giới thiệu trong phần Lý thuyết đồ thị).**
 - **Thuật toán Warshall.**





Quan hệ tương đương

❖ Một quan hệ R trên tập A được gọi là tương đương nếu nó là **phản xạ**, **đối xứng** và **bắc cầu**.

Ví dụ: quan hệ “đồng dư chia cho 3”.

❖ Lớp tương đương:

Cho quan hệ R trên tập A , các phần tử có quan hệ với 1 phần tử a của A được gọi là lớp tương đương của a .

Ví dụ: trong quan hệ “đồng dư chia cho 3”, lớp tương đương với 3 gồm $\{3, 6, 9, \dots, 21, \dots\}$



Bài tập – Hỏi đáp

1. Quan hệ “chia hết” trên tập số nguyên dương:

- Đối xứng? hay Phản đối xứng?
- Phản xạ?
- Bắc cầu?

2. Cho tập $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$R = \{(1,1), (2,3), (3,3), (5,5), (5,4), (4,1)\}$$

- Vẽ đồ thị mô tả quan hệ R .
- R có là đối xứng? phản xạ? bắc cầu?
- Tìm bao đóng: phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Bài tập



3. Cho 2 tập $A = \{1,4,5\}, B = \{2,3,6,7\}$

$$R = \{(4,6), (1,3), (4,3), (5,2), (5,7), (4,7)\}$$

- **Lập ma trận mô tả quan hệ R .**
- **Có thể có bao nhiêu quan hệ trên A hoặc B ?**
- **R có là phản xạ? đối xứng? bắc cầu?**
- **Tìm các bao đóng của R ?**