GIẢI TÍCH 1:
HÀM SỐ MỘT BIẾN

Giảng viên
Vũ Đỗ Huy Cường

Khoa Toán-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên
vdhuycuong@gmail.com

Mục lục

Chương 1

Hàm số thực
và
các tính chất cơ bản

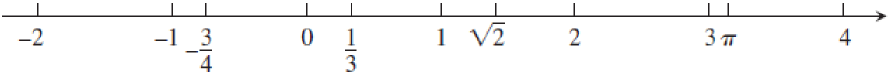
1.1. Hàm số và tính chất

1.1.1. Định nghĩa hàm số

Hầu hết các tính toán đều dựa trên tập số thực. Số thực là các số có thể được biểu diễn dưới dạng thập phân như

$$\begin{aligned} -3/4 &= -0.75000... \\ 1/3 &= \quad 0.33333... \\ \sqrt{2} &= \quad 1.4142... \end{aligned}$$

Các số thực có thể được biểu diễn như các điểm trên một trục số gọi là trục số thực.



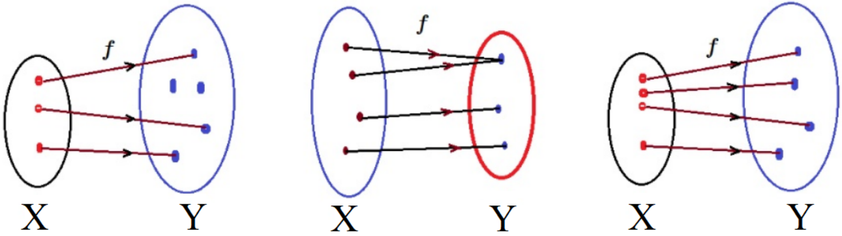
Kí hiệu $\mathbb{R}$ được dùng để chỉ tập số thực và trục số thực.

1.1.1. Định nghĩa hàm số

	Kí hiệu	Dạng	Mô tả	Hình ảnh
Hữu hạn	(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Mở	
	$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	Đóng	
	$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	Nửa mở	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	Nửa mở	
Vô hạn	(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Mở	
	$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	Đóng	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Mở	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	Đóng	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	Vừa mở vừa đóng	

1.1.1. Định nghĩa hàm số

Ánh xạ f từ một tập hợp X vào một tập hợp Y (ký hiệu $f : X \to Y$) là một quy tắc cho mỗi phần tử $x \in X$ tương ứng với một phần tử xác định $y \in Y$, phần tử y được gọi là ảnh của phần tử x, ký hiệu $y = f(x)$.



Đơn ánh Toàn ánh Song ánh

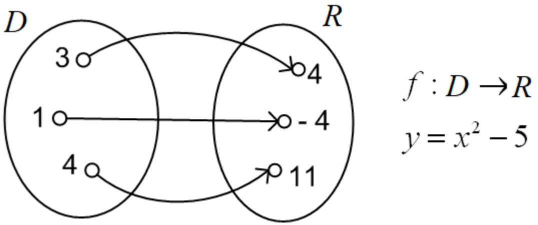
1.1.1. Định nghĩa hàm số

Một **hàm số** từ một tập $D \in \mathbb{R}$ đến một tập $R \in \mathbb{R}$ là một quy luật cho tương ứng duy nhất một phần tử $f(x) \in R$ với một phần tử $x \in D$.

Ví dụ:

$f(x) = x^2 - 5$ là một hàm số.

Giá trị của $f(x)$ thường được gán bởi kí hiệu y.



1.1.1. Định nghĩa hàm số

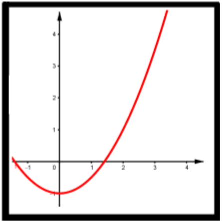
Bốn cách biểu diễn hàm số $y = -1 + \frac{1}{2}x^2$.

" Đại lượng y bằng trừ một cộng với một nửa bình phương đại lượng x ".

a) Dùng lời nói.

Đại lượng x	Đại lượng y
-1	-0,5
0	-1
1	-0,5
2	1
3	3,5

b) Dùng bảng số.



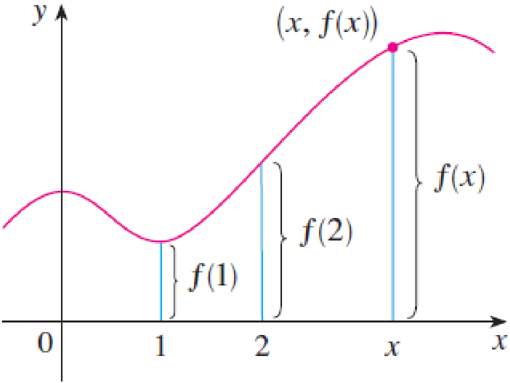
c) Dùng đồ thị.

$$y = -1 + \frac{1}{2}x^2$$

d) Dùng công thức.

1.1.1. Định nghĩa hàm số

Đồ thị của hàm số f là tập hợp của tất cả các cặp $(x, f(x))$ trên hệ trục tọa độ Decartes.



1.1.2. Tập xác định và tập giá trị

Tập xác định của hàm số là tất cả các trị số x sao cho hàm số có nghĩa. **Tập giá trị** của hàm số là tập hợp các giá trị của y tương ứng với các phần tử x trong tập xác định.

Ví dụ: Cho $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Tập xác định là $D = [-1, 1]$ vì chỉ những giá trị này mới làm cho y có giá trị thực.

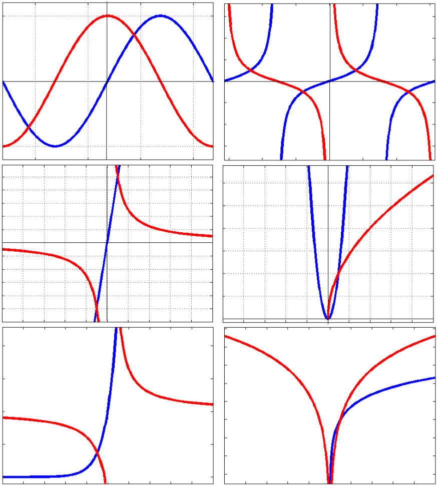
Tập giá trị là $R = [0, 1]$ vì với x trong tập xác định, y nhận các giá trị trong khoảng này.

Một số hàm số, vì một mục đích nào đó, được xác định trên một tập xác định giới hạn.

Ví dụ: Cho hàm số: $y = x^3$ với $-2 < x < 3$.

1.1.2. Tập xác định và tập giá trị

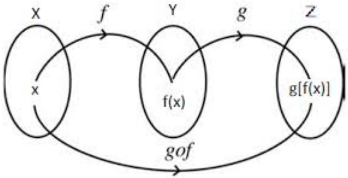
Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị
$\sin(x)$	$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R}$
$\cot(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
x^2	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$(0, \infty)$	$[0, \infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$e^{1/x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, \infty)$
$\ln(x)$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
$\ln(x^2)$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$



1.1.3. Hàm hợp, hàm ngược, hàm từng khúc

Nếu có $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, thì **hàm hợp** $h = g \circ f : X \to Z$ được định nghĩa bởi:

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)).$$



Tập xác định $D(g \circ f)$ là tập hợp $x \in D(f)$ sao cho $g(f(x))$ được xác định trên $D(f)$.

Ví dụ: Tìm $g \circ f$ và tập xác định của chúng:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{và} \quad g(x) = x + 1.$$

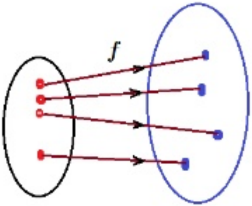
. $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1.$ $D(g \circ f) = [0, \infty).$

Xét $x = 4 \Rightarrow f(1) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow g(2) = 2 + 1 = 3.$

Xét $x = 4 \Rightarrow g \circ f(4) = \sqrt{4} + 1 = 3.$

1.1.3. Hàm hợp, hàm ngược, hàm từng khúc

Nếu $f : X \to Y$ là song ánh.
(Với mọi $y = f(x)$ trong Y, y là một ảnh của x trong X. Khi đó ta có thể cho tương ứng một y trong Y với một x trong X.)



Nếu $f(x)$ là một hàm số từ X đến Y, thì **hàm ngược** của f là:

$$f^{-1} : y \mapsto x = f^{-1}(y).$$

Ví dụ: Tìm hàm ngược của của $y = f(x) = 1 - 2^{-x}$.

Bởi vì $y = 1 - 2^{-x}$ nên $x = -log_2(1 - y) = -\dfrac{ln(1 - y)}{ln2}$.

Vậy $f^{-1}(x) = -\dfrac{ln(1 - x)}{ln2}$. TXĐ: $D(f^{-1}) = R(f) = (-\infty, 1)$.

1.1.3. Hàm hợp, hàm ngược, hàm từng khúc

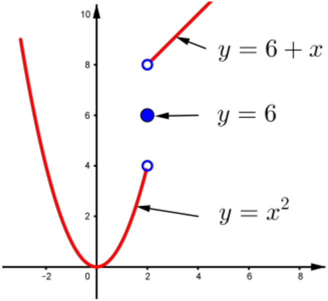
Hàm từng khúc là hàm số có dạng như sau

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \textit{nếu } x \in D_1 \\ & \dots \\ f_n(x) & \textit{nếu } x \in D_n \end{cases}$$

Các tập hợp số $D_1, ..., D_n$ không được phủ lên nhau. Ta có thể xem hàm số $f(x)$ là sự kết nối lần lượt của các hàm số $f_1(x), ..., f_n(x)$.

Cho hàm từng khúc

$$y = f(x) = \begin{cases} 6 + x, & x > 2, \\ 6, & x = 2, \\ x^2, & x < 2. \end{cases}$$



1.2. Tính chất cơ bản của hàm số
1.2.1. Tính đơn điệu của hàm số

Tính đơn điệu của hàm số là sự biến thiên (thay đổi) tang hoặc giảm của hàm số.

Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là đồng biến (hàm tang) trên D nếu x tuang và $f(x)$ cùng tang. Nghĩa là

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2). \tag{1}$$

Hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ được gọi là nghịch biến (hàm giảm) trên D nếu x tang và $f(x)$ lại giảm. Nghĩa là

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2). \tag{2}$$

1.2.2. Tính bị chặn của hàm số

Hàm số được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Hàm số f được gọi là bị chặn trên nếu tất cả các giá trị của nó đều nhỏ hơn một số nào đó. Nghĩa là

$$\exists\, a \in \mathbb{R}, \forall\, y \in R(f),\ \ y \leq a. \tag{3}$$

Hàm số f được gọi là bị chặn dưới nếu tất cả các giá trị của nó đều lớn hơn một số nào đó. Nghĩa là

$$\exists\, b \in \mathbb{R}, \forall\, y \in R(f),\ \ y \geq b. \tag{4}$$

1.2.3. Tính chẵn lẻ của hàm số

Một khoảng hoặc đoạn $X \in \mathbb{R}$ được gọi là đối xứng qua 0 nếu với mọi $x \in X$ thì ta luôn có $-x \in X$.

Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu $D(f)$ đối xứng qua 0 và

$$\forall\, x \in D(f),\; f(-x) = f(x). \tag{5}$$

Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy.

Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu $D(f)$ đối xứng qua 0 và

$$\forall\, x \in D(f),\; f(-x) = -f(x). \tag{6}$$

Đồ thị hàm số lẻ đối xứng qua gốc tọa độ O.

1.2.4. Tính tuần hoàn của hàm số

Hàm số f được gọi là hàm số **tuần hoàn** nếu tồn tại hằng số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D(f)$ ta có

$$x + T \in D(f) \ \text{ và } \ f(x + T) = f(x). \tag{7}$$

Có nhiều số dương T thỏa yêu cầu trên. Người ta chọn số dương nhỏ nhất và gọi nó là chu kì của hàm số f. Để khảo sát một hàm tuần hoàn, người ta chỉ cần kiểm tra các tính chất của hàm đó trên một chu kì mà thôi.

Các hàm số lượng giác $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ và $\cot(x)$ là các hàm số tuần hoàn thường gặp.

1.3. Giới hạn của hàm số
1.3.1. Giới hạn

Đặt $f(x)$ là hàm được xác định trên một lân cận của c, nhưng c có thể không thuộc tập xác định của $f(x)$.

Nếu $f(x)$ tiến đến gần L khi x tiến đến gần c, ta nói rằng f tiến đến giới hạn L khi x tiến tới c và ta viết

$$\lim_{x \to c} f(x) = L. \tag{8}$$

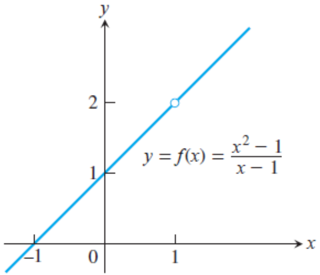
Biểu thức trên được đọc là "giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới c là L".

Ví dụ: Tìm giới hạn của $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ khi x tiến đến 1.

Ta có

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ không xác định tại } x = 1.$$

1.3.1. Giới hạn



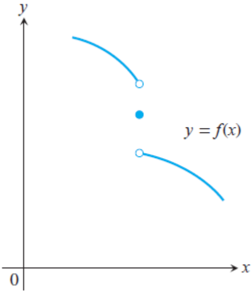
Giá trị của x	$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.999999	1.999999
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.000001	2.000001

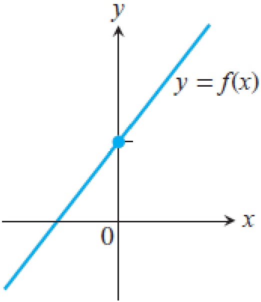
Ta nói rằng $f(x)$ tiến tới giới hạn 2 khi x tiến tới 1, và viết

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Một hàm số $f(x)$ có một giới hạn khi x tiến đến c nếu và chỉ nếu nó có giới hạn bên trái, giới hạn bên phải và chúng bằng nhau:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow, \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L. \tag{9}$$





Bài tập: Tìm giới hạn một phía và giới hạn (nếu chúng tồn tại).

1) $\lim\limits_{x\to -2^-} x+2.$

2) $\lim\limits_{x\to -2^+} x+2.$

3) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}.$

4) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}.$

7) $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sqrt{1+cosx}}{sinx}.$

8) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\sqrt{1+cosx}}{sinx}.$

Làm sao để tính $\lim_{x\to c} f(x)$? => Thay tọa độ $x = c$ vào $f(x)$

Trường hợp 1: Nếu $f(c)$ là hữu hạn thì nó chính là giới hạn. Nếu $f(c)$ là $\pm\infty$ thì không có giới hạn.

Trường hợp 2: Nếu $f(c)$ có dạng $\frac{0}{0}$, hãy triệt tiêu nhân tử chung khiến tử và mẫu bằng 0.

Ví dụ:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{-3}{-1} = 3,$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{4+4}{4-4} = \infty.$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$

d) $$\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 3} \frac{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})(2+\sqrt{x+1})}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{(3-x)(1+\sqrt{x-2})}{(3-x)(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 3} \frac{1+\sqrt{x-2}}{2+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}.$$

1.3.2. Tính toán giới hạn

Bài tập : Tìm giới hạn

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-2^2}$.

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^3-2^3}{x}$.

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3}}{x}$.

1.3.2. Tính toán giới hạn

Làm sao để tính $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$? => Thay tọa độ $x = \pm\infty$ vào $f(x)$

Trường hợp 1: Nếu $f(\pm\infty)$ là hữu hạn thì nó chính là giới hạn. Nếu $f(\pm\infty)$ là $\pm\infty$ thì không có giới hạn.

Trường hợp 2: Nếu $f(\pm\infty)$ có dạng $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$, hãy chia hai vế cho số mũ lớn nhất của x dưới mẫu.

Ví dụ:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0,$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4}{2} = \dfrac{\infty}{2} = \infty.$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3/x^2 - 1/x^2}{x^2/x^2 - 1/x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-0}{1-0} = -\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{3x-4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x/x+3/x}{3x/x-4/x} = \dfrac{2}{3}.$

1.3.2. Tính toán giới hạn

Bài tập : Tìm các giới hạn sau

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{2-5/x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{2-5/x^2}$.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^3|+2x-1}{2x^2+|x|-2}$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^3|+2x-1}{2x^2+|x|-2}$.

1.3.2. Tính toán giới hạn

1. Nếu $f(x) = c$ thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

2. Nếu $f(x) > b \ \forall x$ và $f(x)$ tồn tại giới hạn tại a thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) > b$.

3. Nếu $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ và $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$
   thì $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

4. Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ thì
   (i) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
   (ii) $\lim\limits_{x \to a} \Big(f(x) + g(x) \Big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
   (iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
   (iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$. $\quad (\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0)$

1.3.2. Tính toán giới hạn

Hai giới hạn quan trọng:

(i). $\lim\limits_{a(x)\to 0} \dfrac{\sin a(x)}{a(x)} = 1.$ (ii). $\lim\limits_{a(x)\to\infty} \left(1 \pm \dfrac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e^{\pm 1}.$

Bài tập: Tìm các giới hạn sau

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 \sin x}{2x^2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \dfrac{1}{x}.$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{x}.$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}.$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+3}.$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + x\right)^{1/x}.$

1.3.3. Vô cùng bé - Vô cùng lớn

Ta nói $f(x)$ khi $x \to x_0$ là một VCB nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Ví dụ: $(x-1)^2$ khi $x \to 1$, $sinx$ khi $x \to 0$ là các VCB.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Nếu $L = 0$ ta nói $f(x)$ có cấp cao hơn $g(x)$.
Nếu $0 < |L| < \infty$ ta nói $f(x)$ có cùng cấp với $g(x)$.
Nếu $L = \infty$ ta nói $f(x)$ có cấp thấp hơn $g(x)$.
Ví dụ: $sin2x$ và x khi $x \to 0$ là hai VCB cùng cấp.
$cosx - 1$ là VCB cấp cao hơn x khi $x \to 0$.

Một số VCB tương đương ($\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$) cần nhớ (khi $x \to x_0 = 0$):

$sinx \sim x, \quad tanx \sim x, \quad cosx - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}, \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n},$
$ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x$. (Có thể thay x bởi $a(x)$)

Áp dụng VCB tương đương để tính giới hạn.

Ví dụ: Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(\sqrt{x+1}-1) + x^2 tan^2 x}{sinx^3 + 2x}$

$x \to 0$: $sin(\sqrt{x+1}-1) \sim \sqrt{x+1}-1 \sim \dfrac{x}{2}$, $x^2 tan^2 x \sim x^4$, $sinx^3 \sim x^3$

Vậy $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2} + O(x) + x^4 + O(x^4)}{x^3 + O(x^3) + 2x + O(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2}}{2x} = \dfrac{1}{4}$.

Ví dụ: Tính $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1-2xsin^2 x)}{sinx^2 tanx}$

$x \to 0$: $ln(1-2xsin^2 x) \sim -2xsin^2 x \sim -2x^3$, $sinx^2 tanx \sim x^3$

Vậy $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^3 + O(x^3)}{x^3 + O(x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^3}{x^3} = -2$.

1.3.3. Vô cùng bé - Vô cùng lớn

Ta nói $f(x)$ khi $x \to x_0$ là một VCL nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$.

Ví dụ: x^{-3} khi $x \to 0$, $tanx$ khi $x \to \pi/2$ là các VCL.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Nếu $L = 0$ ta nói $f(x)$ có cấp thấp hơn $g(x)$.
Nếu $0 < |L| < \infty$ ta nói $f(x)$ có cùng cấp với $g(x)$.
Nếu $L = \infty$ ta nói $f(x)$ có cấp cao hơn $g(x)$.
Ví dụ: x^3 và $2x^3 - 1$ khi $x \to \infty$ là hai VCL cùng cấp.
e^x là VCL cấp cao hơn x khi $x \to \infty$.

Một số VCL cần nhớ (khi $x \to \infty$):
$a_n x^n + ... + a_k x^k + ... + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n$ (n là số lớn nhất.)
x là VCL cấp lớn hơn lnx, x là VCL cấp nhỏ hơn e^x .

Áp dụng VCL tương đương để tính giới hạn.

Ví dụ: Tính $I = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{3x^2+x+2})$

$x\to-\infty$: $\sqrt{x^2-2x-1}\sim -x$, $\sqrt{3x^2+x+2}\sim -\sqrt{3}x$

Vậy $I = \lim_{x\to-\infty}(-x+\sqrt{3}x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3}-1)x = -\infty$.

Ví dụ: Tính $J = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-4x-2}-\sqrt{3x^2+4x-1})$

$x\to\infty$: $A=\sqrt{3x^2-4x-2}\sim\sqrt{3}x$, $\quad B=\sqrt{3x^2+4x-1}\sim\sqrt{3}x$

Như vậy hiệu của hai biểu thức trên không là VCL hoặc là VCL cấp nhỏ hơn 1. Biến đổi $A-B=\dfrac{A^2-B^2}{A+B}$.

$x\to\infty$: $A^2-B^2=-8x+3\sim-8x$ và $A+B\sim 2\sqrt{3}x$

Vậy $J = \lim_{x\to\infty} = \dfrac{-8x}{2\sqrt{3}x} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập: Tìm các giới hạn sau.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+2tan^2x)}{xsinx}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(cos3x)}{(e^{2x}-1)sinx}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+sinx}{cosx-\sqrt[3]{1+2x}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sin(x-1)-2tan(x-1)}{x^2-1}$.

Bài tập: Tìm các giới hạn sau.

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{e^x-x}{x-lnx}\right)$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

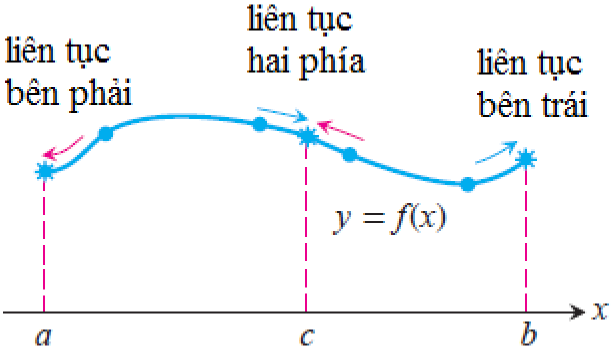
8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}-sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}$.

1.4. Tính liên tục của hàm số
1.4.1. Sự liên tục của hàm số

Một hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại một điểm c nàm trong tập xác định nếu

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{10}$$

Một hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại một điểm nằm trên biên nếu ... ?



1.4.1. Sự liên tục của hàm số

Một hàm số $y = f(x)$ có một giới hạn tại điểm c thuộc tập xác định nếu

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(c) \tag{11}$$

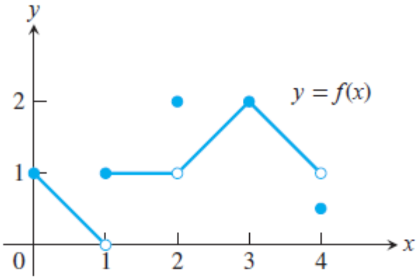
Một hàm số $y = f(x)$ là liên tục tại điểm c nằm trong tập xác định nếu

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \tag{12}$$

Ví dụ:

Tại đâu $f(x)$ không có giới hạn?

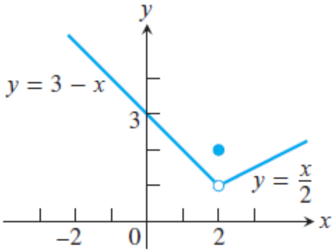
Tại đâu $f(x)$ không liên tục?



1.4.1. Sự liên tục của hàm số

Bài tập: Kiểm tra sự liên tục của $f(x)$?

1)



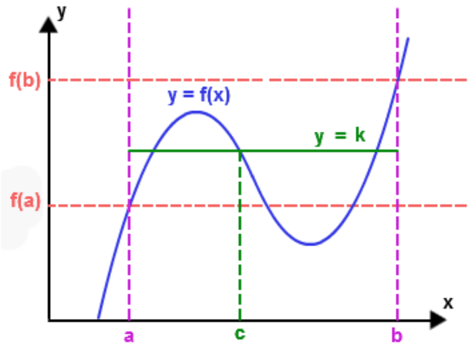
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2. \end{cases}$$

2) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2, & x \geq 3, \\ x^2 - 7, & x < 3. \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^x}{1 + cos^2 x}, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < xleq2, \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x} - 2x}{x - 2}, & x > 2. \end{cases}$

.

1.4.2. Định lý giá trị trung gian

Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ sao cho $f(a) \neq f(b)$.
Khi đó với mỗi số thực k nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$
thì luôn tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = k$.



Hệ quả: Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ:

a) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x + 23 = 0$ luôn có nghiệm.

Xét $f(x) = x^5 - 3x + 23 = 0$ liên tục trên $[-2, -1]$.

Ta có $f(-2) = -3, f(-1) = 25 \Rightarrow f(-2)f(-1) < 0$.

Vậy phương trình trên luôn có nghiệm trong $(-2, -1)$.

b) Cho hàm $f : [a, b] \to [a, b]$ liên tục. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trong $[a, b]$.

Đặt $g(x) = f(x) - x$.

Ta có $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - b \leq 0$.

Vậy tồn tại $c \in [a, b]$ thì $g(c) = 0$ hay $f(c) = c$.

Bài tập: Chứng minh các phương trình sau có ít nhất 1 nghiệm.

1) $x^3 - x - 1 = 0$.

2) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$.

Bài tập: Chứng minh các phương trình sau có ít nhất 2 nghiệm.

3) $x^5 - 6x + 3 = 0$.

4) $|x + 4| = 2\sin x$.

5) $x^3 - 4x^2 + x = 2\sqrt{x} - 4$.

Bài tập: Chứng minh các phương trình sau có nghiệm với mọi m.

6) $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$.

7) $(m^2 - 1)x^3 + 3x - 1 = 0$

8) $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = m$.

Chương 2

Đạo hàm
và
các ứng dụng

2.1. Các quy tắc của đạo hàm
2.1.1. Định nghĩa đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ theo biến x là hàm f' như sau

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'. \tag{13}$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm của $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} + 2) - (\sqrt{x} + 2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2.1.1. Định nghĩa đạo hàm

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x nếu và chỉ nếu nó có đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải và các đạo hàm này bằng nhau:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \tag{14}$$

Hàm số $f(x)$ được gọi là khả vi trên một miền mở nếu nó có đạo hàm tại tất cả các điểm trong miền này.

Hàm số $f(x)$ khả vi trên một miền đóng $[a, b]$ nếu nó khả vi trên miền mở (a, b) và có đạo hàm bên phải tại điểm biên trái và có đạo hàm bên trái tại điểm biên phải.

Nếu f có đạo hàm tại x, thì nó liên tục tại x.

Nếu f liên tục tại x, nó có đạo hàm tại x không?

2.1.1. Định nghĩa đạo hàm

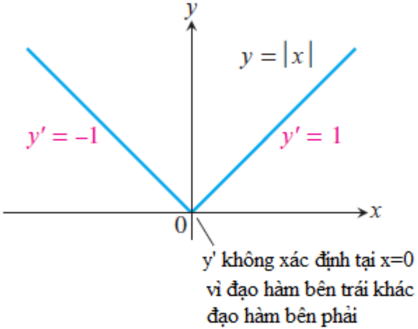
Ví dụ: Chứng minh rằng $f(x) = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Ta có

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = 1.$$

Do $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ nên $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.



Bài tập: Dùng định nghĩa để tính các đạo hàm sau

1) $f(x) = x^2 + 1$ tại $x = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tại $x = 2$.

3) $f(x) = \sqrt{x+3}$ tại $x = 1$.

4) $f(x) = \sin x$ tại $x = \pi$.

Bài tập: Các hàm số sau đây có khả vi hay không?

5) $y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0. \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1. \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2.1.2. Qui tắc tính đạo hàm

Các quy tắc tính đạo hàm

(i). $c' = 0$. (ii). $x' = 1$.

(iii). $(cx)' = c$. (iv). $(cu)' = cu'$.

(v). $(x^n)' = nx^{n-1}$. (vi). $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

(vii). $(u+v)' = u' + v'$. (viii). $(u-v)' = u' - v'$.

(ix). $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. (x). $(uv)' = u'v + v'u$.

Đạo hàm của một số hàm sơ cấp

(xi). $(\sin u)' = u' \cos u$. (xii). $(\cos u)' = -u' \sin u$.

(xiii). $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$. (xiv). $(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

(xv). $(e^u)' = u'e^u$. (xvi). $(a^u)' = u'a^u \ln a$.

(xvii). $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. (xviii). $(log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm sau

1) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

2) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2}$.

4) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$.

5) $y = e^x \ln x$.

6) $y = x^2 e^x$.

7) $y = x \sin x - \dfrac{\cos x}{x}$.

8) $y = \tan x \cot x + \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2.1.3. Đạo hàm bậc cao

Hàm số f'' được gọi là đạo hàm bậc hai của f nếu nó là đạo hàm của đạo hàm bậc nhất của f

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}. \qquad (15)$$

Hàm số $f^{(n)}$ được gọi là đạo hàm bậc n của f nếu nó là đạo hàm của đạo hàm bậc $(n-1)$ của f

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}(x)(y^{(n-1)}(x))'. \qquad (16)$$

Ví dụ: Tìm đạo hàm bậc 3 của $y = f(x) = \frac{1}{x} + xe^x$.

Ta có $y' = \left(\frac{1}{x} + xe^x\right)' = -\frac{1}{x^2} + e^x + xe^x$,

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{1}{x^2} + e^x + xe^x\right)' = \frac{2}{x^3} + 2e^x + xe^x,$$

$$y''' = (y'')' = \left(\frac{2}{x^3} + 2e^x + xe^x\right)' = -\frac{6}{x^4} + 3e^x + xe^x.$$

2.1.3. Đạo hàm bậc cao

Bài tập: Tìm đạo hàm bậc 2 của các hàm số sau đây

1) $y = e^{-x^2}$.

2) $y = e^{2x}\sin 3x$.

3) $y = \sqrt{2x+1}$ tại $x = 3$.

4) $y = (x+1)\ln x$ tại $x = 1$.

Bài tập: Tìm đạo hàm bậc 3 của các hàm số sau đây

5) $y = \sin^2 x$.

6) $y = x\ln x$.

7) $y = e^x\cos x$ tại $x = 0$.

8) $y = xe^x$ tại $x = 2$.

2.2. Đạo hàm hàm chuỗi
2.2.1. Đạo hàm hàm hợp

Nếu $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u = g(x)$ và $g(x)$ khả vi tại điểm x, thì hàm hợp $f \circ g(x) = f(g(x))$ khả vi tại x, và

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ hoặc } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \qquad (17)$$

Ví dụ: Đặt $g(x) = \sqrt{x}$ và $f(u) = \dfrac{1}{u^2+1}$. Tìm đạo hàm của $h = f \circ g$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(u) = -2\dfrac{u}{(u^2+1)^2}$. Đặt $u = g(x)$ thì

$$(f \circ g)'(x) = f'(u)g'(x) = \frac{-2u}{(u^2+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{(x+1)^2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

Cho hàm số $y = f(x)$ và **hàm ngược** $x = f^{-1}(y)$.

Ta có $\dfrac{dx}{dx} = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dx} = 1$. Như vậy

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{18}$$

Ví dụ: Cho $f(x) = x + \ln x$. Tìm đạo hàm của $(f^{-1})'$.

Đặt $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$. Ta có $y'_x = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+x}{x}$.
Vậy $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{x}{1+x}$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm của hàm $(y \circ t)(x)$

1) $y(t) = 3t - t^2, t(x) = 2x - x^2$.

2) $t(x) = x^2, y(t) = te^t$.

3) $y(x) = 2x^2 + x, t(x) = x^2 - 2$.

4) $y(x) = x^2, t(x) = 2^x$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm của hàm $y^{-1}(x)$

5) $y(x) = e^x - e^{-x}$.

6) $y(x) = \ln x - x^2$.

7) $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

8) $y(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

2.2.3. Đạo hàm hàm ẩn

Ta nói hàm số $y = f(x), x \in (a, b)$ được cho dưới dạng **hàm ẩn**

$$F(x, y) = 0.$$

nếu với mọi $x \in (a, b)$, ta có $F(x, f(x)) = 0$.

Để tính đạo hàm hàm số $y = f(x)$, ta đạo hàm hàm $F(x, y)$ theo biến x sau đó giải phương trình vừa tìm được đối với $f'(x)$

Ví dụ : Cho $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Tìm đạo hàm của $y = f(x)$.
Lấy đạo hàm hai vế theo biến x, ta thu được

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(y + xy') = 0.$$

Giải phương trình trên, ta thu được $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

2.2.4. Đạo hàm hàm chứa tham số

Cho hàm số $y = f(x)$ là **hàm chứa tham số** có dạng

$$y = y(t), \quad x = x(t), \quad t \in [a, b]$$

Khi đó đạo hàm của $y = f(x)$ được cho bởi

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

Ví dụ : Cho $y(x)$ thỏa $y(t) = t + \sin t$ và $x(t) = t^2 - t$. Tìm đạo hàm của $y = f(x)$.

Ta có $y'_t(t) = 1 + \cos t$ và $x'_t(t) = 2t - 1$.

Do đó $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \dfrac{1 + \cos t}{2t - 1}$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm của hàm $y(x)$

1) $x^2 + y^2 = 1$ tại $x = 1/2$.

2) $y = 1 + xe^y$ tại $y = 1$.

3) $y = x^2 + \ln y - x^2 e^y$.

4) $(x + y)^3 = -1$

Bài tập: Tìm các đạo hàm của hàm $y(x)$

5) $y = t^2 - t + 2$, $x = t^3 - 1$.

6) $y = te^t$, $x = t \ln t$.

7) $y = 3 \cos t$, $x = 2 \sin t$.

8) $y = \sqrt{t^2 + 1}$, $x = \sqrt{t} + 1$

2.3. Ý nghĩa hình học
2.3.1. Độ dốc - Tiếp tuyến - Pháp tuyến

Độ dốc của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(x_P, y_P)$ là đạo hàm $f'(x_P)$.

Tiếp tuyên của đường cong tại P là đường thẳng qua P có độ dốc $f'(x_P)$.

Pháp tuyến của đường cong tại P là đường thẳng qua P và vuông góc với tiếp tuyến qua P.

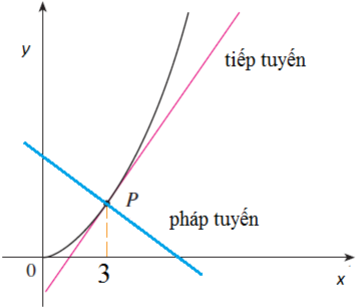
Ví dụ: Tìm độ dốc của $y = x^2$ tại $x = 3$.

Độ dốc của hàm số là

$$k(x) = f'(x) = 2x.$$

Độc dốc tại $x = 3$ là

$$k(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$



Ví dụ: Tìm tiếp tuyến của $y = f(x) = x^2$ tại $x = 3$.

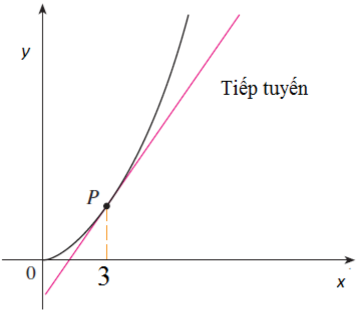
Tiếp tuyến của đường cong có dạng

$$y_1 = kx + b.$$

Độ dốc tại $x = 3$ là $k = 6$.
Do $(3, 9)$ nằm trên tiếp tuyến, nên

$$9 = 6 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -9.$$

Đường tiếp tuyến là $y_1 = 6x - 9$



2.3.1. Độ dốc - Tiếp tuyến - Pháp tuyến

Ví dụ: Tìm pháp tuyến của $y = f(x) = x^2$ tại $x = 3$.

Pháp tuyến của đường cong có dạng

$$y_2 = \bar{k}x + c.$$

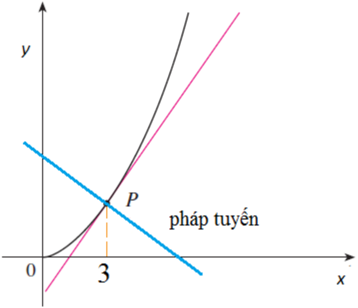
Pháp tuyến vuông góc với tiếp tuyến nên $\bar{k} = -1/k = -1/6$.

Do $(3, 9)$ nằm trên pháp tuyến, nên

$$9 = -3/6 + c \Leftrightarrow c = 19/2.$$

Đường pháp tuyến là

$$y_2 = -\frac{x}{6} + \frac{19}{2}$$



Bài tập: Tìm tiếp tuyến và pháp tuyến của các đường cong sau

1) $y = \sqrt{x}$ tại $x = 4$.

2) $y = \sin 2x + \cos x^2$ tại $x = 0$.

3) $y = x^2 - 2x + 3$ tại $x = 0$.

4) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ tại $x = -2$.

5) $y = \sqrt[3]{x-1}$ tại $x = 1$.

6) $y = \ln x$ tại $x = 0$.

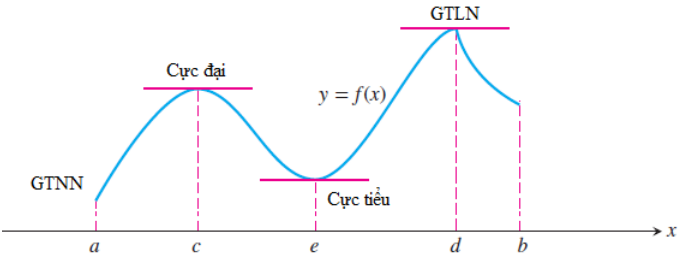
7) $y = x + \cos x$ tại $x = 0$.

8) $y = e^x - e^{-x}$ tại $x = 1$.

2.3.2. Cực trị của hàm số

Cho f là một hàm số có tập xác định D. Nếu tại c

- f đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in D$.
- f đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in D$.
- f đạt cực đại địa phương $\Leftrightarrow f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in (c-r, c+r)$.
- f đạt cực tiểu địa phương $\Leftrightarrow f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in (c-r, c+r)$.



2.3.2. Cực trị của hàm số

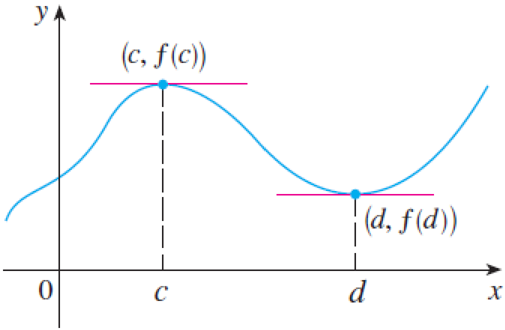
Làm sao để tìm cực đại và cực tiểu địa phương?

Bước 1: Tìm các điểm x sao cho $f'(x) = 0$.

Bước 2: Nếu $f''(x) < 0$: đó là cực đại địa phương.

Nếu $f''(x) > 0$: đó là cực tiểu địa phương.

Nếu $f''(x) = 0$: không thể kết luận điều gì



Ví dụ: Tìm cực đại và cực tiểu địa phương của

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

Các điểm cực trị của hàm số là

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{hoặc} \quad x = 2.$$

Đạo hàm cấp hai $f''(x) = 6x - 3$.

Tại $x = -1$, $f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0$.

Tại $x = 2$, $f''(2) = 6(2) - 3 = 9 > 0$.

Vậy cực đại là $f(-1) = \dfrac{7}{2}$ và cực tiểu là $f(2) = -10$.

Bài tập: Tìm cực đại và cực tiểu địa phương của các hàm số sau

1) $y = x^2 - 4x + 3.$

2) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$

3) $y = \dfrac{x+1}{x+3}.$

4) $y = \dfrac{x^2-2}{x+1}.$

5) $y = e^x - e^{-x}.$

6) $y = x^2 - 2\ln x.$

7) $y = \sin x + \cos x.$

8) $y = \sin x + \tan x.$

2.3.2. Cực trị của hàm số

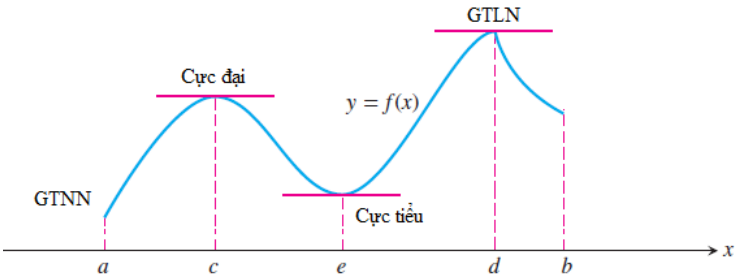
Làm sao để tìm GTLN và GTNN tren đoạn $[a, b]$?

Bước 1: Tìm các điểm x mà $f'(x) = 0$ và $x \in [a, b]$.

Bước 2: So sánh các giá trị của f tại các điểm vừa tìm được và tại các điểm biên.

Giá trị nào lớn nhất thì nó là GTLN.

Giá trị nào nhỏ nhất thì nó là GTNN.



2.3.2. Cực trị của hàm số

Ví dụ: Tìm GTLN và GTNN trên $[-2, 4]$ của hàm số

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x.$$

Các điểm cực trị của hàm số là

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{hoặc} \quad x = 2.$$

Các điểm này đều thuộc $[-2, 4]$.

Các giá trị cực trị là: $f(-1) = \frac{7}{2}$, $f(2) = -10$.

Các giá trị tại biên là: $f(-2) = -2$, $f(4) = 16$.

Vậy GTLN là $f(4) = 16$ và GTNN là $f(2) = -10$.

Bài tập: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

1) $y = x^2 - 3x + 4$ trên $[-3, 5]$.

2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ trên $[-5, 7]$.

3) $y = \dfrac{2}{x+3}$ trên $[-7, 3]$.

4) $y = \sqrt{x^2+1} - 2x$ trên $[0, 1]$.

5) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ trên $[-2, 4]$

6) $y = e^x - e^{-x}$ trên $[-2, 4]$.

7) $y = \ln x - x^2$ trên $[e, e^2]$.

8) $y = x + \cos x$ trên $[-1, 1]$.

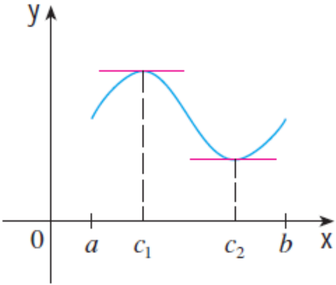
2.3.3. Định lý giá trị trung bình

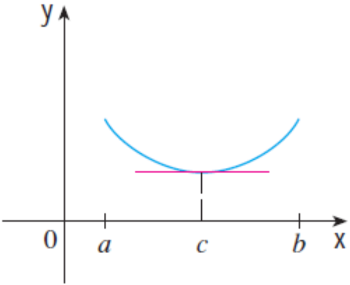
Định lý Rolle: Giả sử rằng $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trên miền đóng $[a, b]$ và khả vi tại mọi điểm trên tập mở (a, b).

Nếu $f(a) = f(b)$ thì có ít nhất một điểm c trong (a, b) mà tại đó

$$f'(c) = 0$$

.



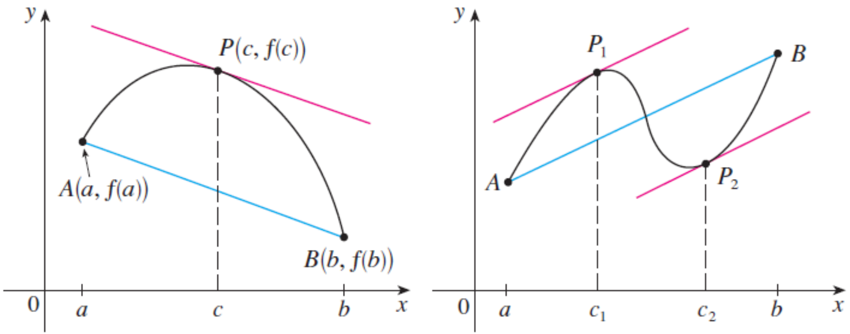


2.3.3. Định lý giá trị trung bình

Định lý Lagrange: Giả sử rằng $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trên miền đóng $[a, b]$ và khả vi tại mọi điểm trên tập mở (a, b).

Thì tồn tại ít nhất một điểm c trong (a, b) mà tại đó

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



2.3.3. Định lý giá trị trung bình

Ví dụ: a) Chứng minh rằng trên một đoạn được xác định bởi hai nghiệm của $f(x) = 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm sao cho $f'(x) = 0$.

Giả sử $f(x)$ có hai nghiệm $x = a$ và $x = b$. Thì $f(a) = f(b) = 0$.

Áp dụng định lý Rolle: Do $f(a) = f(b) = 0$ nên tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = 0.$$

Vậy có ít nhất một điểm sao cho $f'(x) = 0$.

Ví dụ: b) Chứng minh rằng $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Đặt $f(x) = \sin x$, ta có $f'(x) = \cos x \leq= 1$.

Áp dụng định lý Lagrange: tồn tại $c \in (x, y)$ such that

$$f'(c)(a - b) = f(a) - f(b) \Leftrightarrow \cos c(x - y) = \sin x - \sin y.$$

Lấy trị tuyệt đối hai vế ta được điều phải chứng minh.

Giả sử rằng $\frac{f(c)}{g(c)}$ có dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, nếu $f'(c)$ và $g'(c)$ tồn tại, và nếu $g'(c) \neq 0$ thì

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{19}$$

Ví dụ: Tìm $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Ta có $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

Ví dụ: Tìm $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x \frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \frac{2}{3} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{9} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$$

Nếu biểu thức có dạng vô định như $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, ta biến đổi nó về dạng $0/0$ sau đó áp dụng (19).

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Áp dụng quy tắc L'Hosptial ta được

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}\right)\\
&= \frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Nếu biểu thức có dạng vô định như $0^0, \infty^0$ hoặc 1^∞, ta đặt $y = f(x)^{\varphi(x)}$ thì $\ln y = \varphi(x)\ \ln f(x)$ có dạng 0∞.

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Đặt $y = x^x$ thì $\ln y = x \ln x$. Điều này dẫn đến

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x}.$$

Áp dụng quy tắc L'Hosptial ta được

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Bài tập: Tìm các giới hạn sau

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{1-\cos x}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

6) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^3e^{-x})$.

7) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

8) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

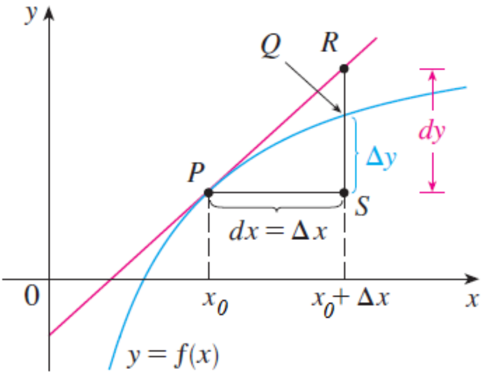
2.4.2. Xấp xỉ tuyến tính

Cho $f(x)$ là một hàm số khả vi.

Độ dịch dx là một biến độc lập.

Vi phân dy là

$$dy = f'(x)dx. \qquad (20)$$



Xấp xỉ tuyến tính:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (21)$$

Ví dụ: Tính xấp xỉ $\sin 46^o$.

Đặt $f(x) = \sin(x)$ thì $f'(x) = \cos(x)$.

Đặt $x_0 = 45^o = \dfrac{\pi}{4}$ và $\Delta x = 1^o = \dfrac{\pi}{180}$.

Áp dụng (21) ta thu được

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &\simeq \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \\ &\simeq 0.7071 + 0.0175 \cdot 0.7071 \\ &\simeq 0.7194 \end{aligned}$$

2.4.3. Khai triển Taylor và Maclaurin

Giả sử rằng $y = f(x)$ khả vi n lần trên khoảng chứa điểm x_0.

Chuỗi Taylor của $f(x)$ tại x_0 là

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n.$$

Khai triển Taylor với $n = 3$

$$f(x) \simeq f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0). \quad (22)$$

Trường hợp $n = 1$, chuỗi Taylor là xấp xỉ tuyến tính.
Trường hợp $x_0 = 0$, chuỗi Taylor là chuỗi Maclaurin.

2.4.3. Khai triển Taylor và Maclaurin

Ví dụ: a) Khai triển Taylor cho $\sin x$ tại $x_0 = 0$.

Đặt $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &\simeq f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) \\
&\simeq \sin 0 + x\cos 0 - \frac{x^2}{2}\sin 0 - \frac{x^3}{6}cos0 \simeq x - \frac{x^3}{6}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ: b) Phân tích e^x thành các lũy thừa của $(x+1)$.

Đặt $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &\simeq f(-1) + (x+1)f'(-1) + \frac{(x+1)^2}{2!}f''(-1) + \frac{(x+1)^3}{3!}f'''(-1) \\
&\simeq e^{-1} + (x+1)e^{-1} + \frac{(x+1)^2}{2}e^{-1} + \frac{(x+1)^3}{6}e^{-1}
\end{aligned}
$$

Bài tập: Sử dụng xấp xỉ tuyến tính để tính các biểu thức sau

1) $\sqrt[3]{1.02}$.

2) $\cos(-59^o)$.

3) $\sin(0.03) + 0.03^2$.

4) $\left(3.01 + \dfrac{1}{3.01}\right)^2$.

Bài tập: Thực hiện các yêu cầu sau

5) Khai triển Taylor cho $\cos x$ tại $x = \pi/6$.

6) Khai triển Taylor cho $\ln x$ tại $x = 1$.

7) Phân tích $\sqrt[3]{x}$ thành các lũy thừa của $(x - 1)$.

8) Phân tích $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ thành các lũy thừa của x đến cấp $n = 2$.

2.4.4. Phương pháp Newton

Phương pháp Newton là một kĩ thuật tính xấp xỉ nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Phương pháp này dựa vào đường tiếp tuyến tại vị trí gần nghiệm của phương trình (nơi $f(x)$ bằng zero).

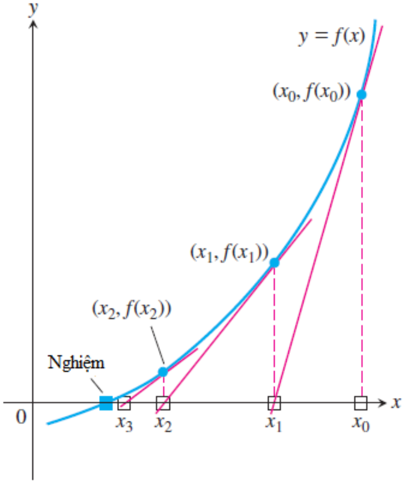
Bước 1: Chọn một nghiệm ban đầu x_0.

Bước 2: Sử dụng công thức

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (23)$$

để tìm nghiệm kế tiếp.

Bước 3: Quá trình kết thúc khi $f(x_{n+1})$ tiến rất gần 0.



2.4.4. Phương pháp Newton

Ví dụ: Tìm nghiệm dương của phương trình

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Với $f(x) = x^2 - 2$ và $f'(x) = 2x$, xấp xỉ kế tiếp là

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Ta có các kết quả sau

xấp xỉ x	giá trị $f(x)$
$x_0 = 1$	-1
$x_1 = 1.5$	0.25
$x_2 = 1.41667$	0.007
$x_3 = 1.41422$	0.00001

Bài tập: Dùng phương pháp Newton để tìm nghiệm các phương trình sau

1) $y = x^2 + x - 1 = 0$ với $x_0 = -1$.
2) $y = x^2 + x - 1 = 0$ với $x_0 = 1$.
3) $y = -x^2 + 2x + 1 = 0$ với $x_0 = 0$.
4) $y = -x^2 + 2x + 1 = 0$ với $x_0 = 2$.
5) $y = x^4 - 2 = 0$ với $x_0 = 1$.
6) $y = x^4 - 2 = 0$ với $x_0 = -1$.
7) $y = x^4 + x - 3 = 0$ với $x_0 = -1$.
8) $y = x^4 + x - 3 = 0$ với $x_0 = 1$.

Chương 3

Tích phân
và
các ứng dụng

3.1. Nguyên hàm của hàm số
3.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

Tập hợp tất cả nguyên hàm của hàm số f được gọi là tích phân bất định của f theo biến x, và được kí hiệu bởi

$$\int f(x)dx. \tag{24}$$

Các quy tắc của tích phân bất định:

(i). $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ (ii). $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$

(iii). $\int df = f(x) + c.$ (iv). $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

(v). $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$

3.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

(i). $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$ (ii). $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

(iii). $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}.$ (iv). $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{|a+x|}{|a-x|} + C.$

(v). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$ (vi). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Tích phân bất định của một số hàm cơ bản

(vii). $\displaystyle\int u' \sin u dx = -\cos u + C.$ (viii). $\displaystyle\int u' \cos u dx = \sin u + C.$

(ix). $\displaystyle\int u' \tan u dx = -\ln|\cos u| + C.$ (x). $\displaystyle\int u' \cot u dx = \ln|\sin u| + C.$

(xi). $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C.$ (xii). $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

(xiii). $\displaystyle\int u' e^u dx = e^u + C.$ (xiv). $\displaystyle\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

(xv). $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$ (xvi). $\displaystyle\int \log_a x dx = \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + C.$

Bài tập: Tìm các tích phân bất định sau

1) $\displaystyle\int (x+1)^2 dx.$

2) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx.$

3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4} dx.$

4) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+10}{5-x^2} dx.$

5) $\displaystyle\int (\ln x + \frac{1}{x} - e^x) dx.$

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^4-16}} dx.$

7) $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x} dx.$

8) $\displaystyle\int (\sqrt{\cos x} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}})^2 dx.$

3.1.2. Phương pháp thế

Nếu $u = g(x)$ là hàm khả vi mà tập giá trị của nó là tập I và f liên tục trên I thì

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du. \tag{25}$$

Ví dụ: Tìm $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$.

Đặt $u = x^2 + x - 3$ thì $du = (2x+1)dx$. Chúng ta thu được

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|x^2+x-3| + C.\end{aligned}$$

Nếu tồn tại $x = \varphi(t)$ sao cho $f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ thì

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt. \tag{26}$$

Ví dụ: Tìm $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$.

Đặt $x = t^2$ thì $t = \sqrt{x}$ và $dx = 2tdt$. Ta thu được

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1+t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t^3+t}{1+t}dt \\
&= 2\int (t^2 - t + 2)dt - 4\int \frac{dt}{t+1} \\
&= 2\Big(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\Big) - 4\ln|t+1| + C \\
&= 2\Big(\frac{1}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x + 2\sqrt{x}\Big) - 4\ln|\sqrt{x}+1| + C.
\end{aligned}$$

Bài tập: Tìm các tích phân bất định sau

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

2) $\displaystyle\int x(5x^2-3)^7 dx$.

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

4) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$.

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$.

6) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{e^x+1}$.

7) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} dx$.

8) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$.

3.1.3. Phương pháp tích phân từng phần

Cho $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm khả tích thì
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \qquad (27)$$

Ví dụ: Tìm $\int x^2 \cos x dx$.

Đặt $u = x^2, dv = \cos x dx$ thì $du = 2xdx, v = \sin x$.
$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx.$$
Đặt $u = 2x, dv = \sin x dx$ thì $du = 2dx, v = -\cos x$.
$$\int 2x \sin x dx = -2x \cos x + \int 2 \cos x dx = -2x \cos x + 2 \sin x.$$
Vậy $\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$.

Bài tập: Tìm các tích phân bất định sau

1) $\displaystyle\int (x+1)\ln x\,dx.$

2) $\displaystyle\int x^2\ln(x-1)\,dx.$

3) $\displaystyle\int (x+2)\sin 2x\,dx.$

4) $\displaystyle\int x\ln\frac{1}{x}dx.$

5) $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx.$

6) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx.$

7) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx.$

8) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}.$

3.2.3. Tích phân xác định

Cho $f(x)$ xác định trên $[a, b]$. Chúng ta chia đoạn $[a, b]$ thành các mảnh nhỏ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và đặt $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Tổng Riemann được tính như sau

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

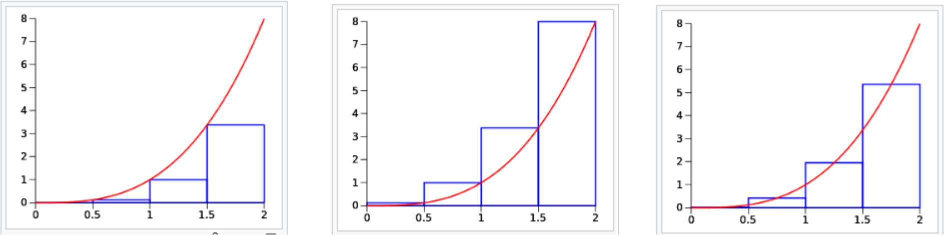
Giới hạn của tổng Riemann $\Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$ là tích phân xác định $f(x)$ trên $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i. \tag{28}$$

Một hàm liên tục thì khả tích. Nghĩa là nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì tích phân xác định của nó trên $[a, b]$ tồn tại.

Tùy theo vị trí c_i, ta có tổng Riemann trái, tổng Riemann phải và tổng Riemann giữa. Tuy nhiên giá trị của (28) là như nhau.

Ví dụ: Các tổng Riemann trái, phải, giữa của hàm $f(x) = x^3$ như hình dưới lần lượt là: $S_4^T = 2.25$, $S_4^P = 6.25$, $S_4^G = 3.875$. Khi $n \to \infty$ thì $S_n^T = S_n^P = S_n^G = 4$.



3.2.1. Tích phân xác định

Quy tắc tính tích phân xác định

(i) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

(ii) $\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(iii) $f(x) \le g(x) \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

(iv) $m \le f(x) \le M \forall x \in [a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

(v) $f(x)$ liên tục trên $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

(vi) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

(vii) Nếu $f(x)$ liên tục thì $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

3.2.2. Tích phân xác định và nguyên hàm

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{29}$$

Ví dụ:

a) $\displaystyle\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2-0}{2} = 2.$

b) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$

3.2.2. Tích phân xác định và nguyên hàm

Bài tập: Tìm các tích phân xác định sau

1) $\displaystyle\int_2^4 4(x-2)dx.$

2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2+x-1)dx.$

3) $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx.$

4) $\displaystyle\int_2^4 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx.$

5) $\displaystyle\int_{-2}^1 |x|dx.$

6) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-|x|)dx.$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \; dx.$

8) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x \; dx.$

3.2.3. Tính toán tích phân xác định

Nếu $u = g(x)$ là hàm khả tích có tập giá trị là I và f liên tục trên I thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_a}^{u_b} f(u)du. \tag{30}$$

với $u_a = u(a)$ và $u_b = u(b)$.

Nếu tồn tại $x = \varphi(t)$ sao cho $f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} g(t)dt. \tag{31}$$

với $t_a = x^{-1}(a)$ và $t_b = x^{-1}(b)$.

Ví dụ: Tìm $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Đặt $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\ dt$, $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ thì

$$x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0, x_2 = a \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2}$$

Ta thu được

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2sin^2t}\,a\cos t\ dt$$

$$= a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\ \cos^2 t\ dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\ dt$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\ dt = \frac{a^4}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\pi/2} = \pi\frac{a^4}{16}.$$

Tích phân từng phần cho ta

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (32)$$

Ví dụ: Tìm $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

Đặt $u = x, dv = \dfrac{xdx}{(1+x^2)^2} = d\Big(-\dfrac{1}{2(1+x^2)}\Big)$.

Thì $du = dx, v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Ta thu được

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)}\Big|_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{2(1+x^2)}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}.$$

Bài tập: Tìm các tích phân xác định sau

1) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x-2}dx.$

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+1}dx.$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$

4) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-3}}dx.$

Bài tập: Tìm các tích phân xác định sau

5) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x \, dx.$

6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx.$

7) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx.$

8) $\displaystyle\int_1^2 x^2e^{-x}dx.$

3.3. Tích phân suy rộng
3.3.1. Tích phân suy rộng loại 1

Dạng I: Tích phân với cận vô cùng.

(i) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx.$

Nếu giới hạn là hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng hội tụ và giới hạn đó chính là giá trị của tích phân suy rộng.

Nếu giới hạn không tồn tại thì tích phân suy rộng phân kì.

Ví dụ: Các tích phân sau có hội tụ không?

$$\int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^x dx = \lim_{b\to\infty} e^x\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} e^b - e^0 = \infty - 1 = \infty. \qquad \text{(phân kì)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan x\Big|_0^b$$
$$= \lim_{a\to-\infty}(\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0)$$
$$= 0 - \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \qquad \text{(hội tụ)}$$

3.3.2. Tích phân suy rộng loại 2

Dạng II: Tích phân của hàm số tiến đến ∞ tại một điểm trong miền tích phân.

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và không xác định tại c thì

(i) $\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \lim_{d\to c^-} \int_a^d f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_c^b f(x)dx = \lim_{d\to c^+} \int_d^b f(x)dx.$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Nếu giới hạn là hữu hạn, ta nói tích phân suy rộng hội tụ và giới hạn đó chính là giá trị của tích phân suy rộng.

Nếu giới hạn không tồn tại thì tích phân suy rộng phân kì.

Ví dụ: Tìm $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

Do $f(x) = 1/x^2$ không xác định tại $x = 0$, ta thực hiện như sau

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{d_1 \to 0^-} \int_{-1}^{d_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{d_2 \to 0^+} \int_{d_2}^{1} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\lim_{d_1 \to 0^-} \int_{-1}^{d_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{d_1 \to 0^-} \frac{1}{x}\Big|_{-1}^{d_1} = -\lim_{d_1 \to 0^-} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{-1}\right) = \infty.$$

$$\lim_{d_2 \to 0^+} \int_{d_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{d_2 \to 0^+} \frac{1}{x}\Big|_{d_2}^{1} = -\lim_{d_2 \to 0^+} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{d_2}\right) = \infty.$$

Vậy không tồn tại $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

3.3.2. Tích phân suy rộng dạng 2

Bài tập: Tính các tích phân suy rộng sau

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \sin x\, dx.$ 2) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx.$

3) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$ 4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$

Bài tập: Tính các tích phân suy rộng sau

5) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x-1} dx.$ 6) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx.$

7) $\displaystyle\int_{0}^{1} x \ln x dx.$ 8) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$

3.3.3. Sự hội tụ của tích phân suy rộng

Định lý so sánh 1: Cho $\int_a^\infty g(x)dx$, $\int_a^\infty f(x)dx$ là TPSR loại 1 và $0 \le f(x) \le g(x)$

Nếu $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^\infty g(x)dx$ phân kì.

Định lý so sánh 2: Cho $\int_a^\infty g(x)dx$, $\int_a^\infty f(x)dx$ là TPSR loại 1 và $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$.

Nếu $0 < k < \infty$ thì $\int_a^\infty g(x)dx$ và $\int_a^\infty f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ: a) Chứng minh rằng $I = \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$ phân kì.

Do $\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kỳ nên I phân kỳ.

Ví dụ: b) Cmr $J = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ và $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$ hội tụ.

Do $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$ và $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên J hội tụ.

Do $\frac{1}{\sqrt{x}+4x^3} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2$ nên K hội tụ.

Ghi chú $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ phân kì nếu $\alpha \leq 1$ và hội tụ nếu $\alpha > 1$ (với $a > 0$).

Ví dụ: Khảo sát sự hội tụ của

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}\, dx.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}$ và chọn $g(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. Khi đó

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}} = 1 \text{ (hữu hạn).}$$

Mà $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{2}{\sqrt{x}}\Big|_1^t = 2$ (hội tụ)

nên $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{1+x^3}}\, dx$ hội tụ theo so sánh dạng tỉ số.

Bài tập : Kiểm tra tích phân suy rộng sau hội tụ hay phân kì

1) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$.

2) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^3} dx$.

3) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x}{\ln x} dx$.

4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx$.

Bài tập : Kiểm tra tích phân suy rộng sau hội tụ hay phân kì

5) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^3-x+1} dx$.

6) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^3}} dx$.

7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{3\sqrt{x}}{1+x^2} dx$.

8) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x+\sin x}{x^2(x-\sin x)} dx$.

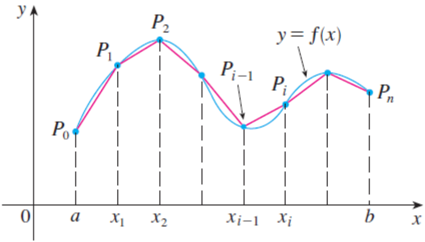
3.4. Ứng dụng của tích phân
3.4.1. Độ dài đường cong

Độ dài đường cong $y = f(x)$:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|,$$

với $P_{i-1}P_i$ là:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$



Nếu đường cong có dạng $y = y(x)$ với $x \in [a, b]$, thì chiều dài nó là

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx. \quad (33)$$

Nếu đường cong có dạng $x = x(t), y = y(t)$ với $t \in [t_1, t_2]$, thì chiều dài nó là

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \quad (34)$$

3.4.1. Độ dài đường cong

Ví dụ: a) Tìm chiều dài đường cong $x^2 + y^2 = 1$ trên $x > 0$, $y > 0$.

Hàm số được viết lại là $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Chiều dài của đường cong là

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ: b) Tìm chiều dài đường cong $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ trên $t \in [0, 2\pi]$.

Chiều dài của đường cong là

$$I = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt = 2a \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

Bài tập: Tìm chiều dài các đường cong

1) $y = x + 1$, $1 < x < 2$.

2) $y = x^2$, $0 < x < 1$.

3) $x^2 + y^2 = 2$, $0 \leq x \leq 1$.

4) $y = \dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3}$, $1 < x < 4$.

Bài tập: Tìm chiều dài các đường cong

5) $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $-2/3 \leq t \leq 1$.

6) $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

7) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

8) $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3.4.2. Diện tích giữa đường cong

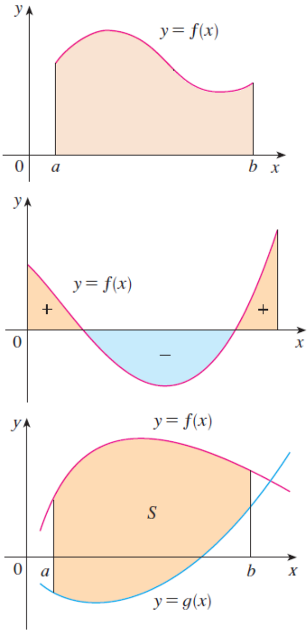
Nếu hình được tạo bởi $y = f(x) > 0$, $x = a$, $x = b$ và Ox, diện tích nó là

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (35)$$

Nếu $f(x) \leq 0$ thì $S = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$.

Nếu hình được tạo bởi $y = f(x)$, $y = g(x), (f(x) \geq g(x))$ và $x = a$, $x = b$ thì diện tích nó là

$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)dx. \qquad (36)$$



3.4.2. Diện tích giữa đường cong

Ví dụ: Nếu S được tạo bởi $y = \sin x$, Ox và $0 \le x \le 2\pi$.

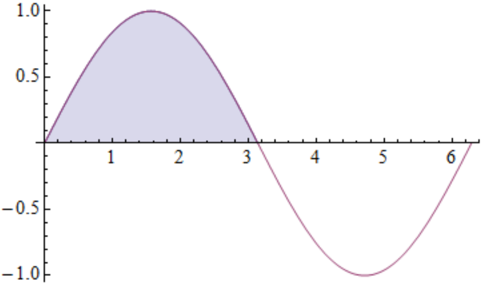
Đặt $S = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$.

Ta có

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi}$$
$$= -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

và

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -2.$$



Vậy $S = 2 + |-2| = 4$.

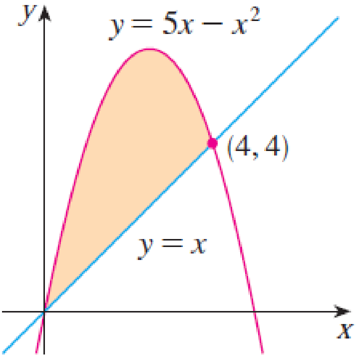
Ví dụ: Tính S tạo bởi $f(x) = 5x - x^2$ và $g(x) = x$.

Giới hạn của tích phân được tính bằng cách tìm hoành độ giao điểm của $y = 5x - x^2$ và $y = x$.

$$5x - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Diện tích của hình là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left(5x - x^2 - x\right) dx \\ &= \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 \\ &= -\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$



Bài tập: Tính diện tích giữa các đường cong sau

1) $y = x^2, y = 4$.

2) $y = 2x, y = x^2$.

3) $y = x^2 + 4, x - y = -4$.

4) $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$, $0 < x < \pi$.

Bài tập: Tính diện tích giữa các đường cong sau

5) $x = y^2, y = x - 2$.

6) $y = x^4, y = x^2$.

7) $y = -x^2 + 3x, y = 2x^3 - x^2 - 5x$.

8) $y = \cos(\pi x/2)$, $y = 1 - x^2$, $-1 < x < 1$

3.4.3. Thể tích vật thể

Thể tích của một vật có diện tích mặt cắt $A(x)$ từ $x = a$ đến b là

$$V = \int_a^b A(x)dx. \tag{37}$$

Thể tích của một vật có diện tích mặt cắt $A(x)$ là hình tròn bán kính $f(x)$, quay quanh trục Ox từ $x = a$ đến b là

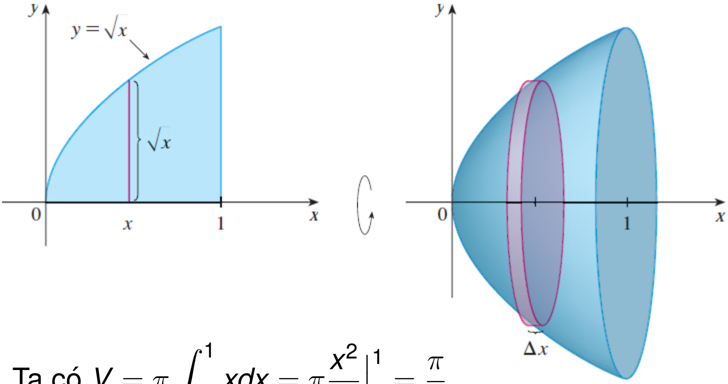
$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \tag{38}$$

Nếu vật thể được tạo bởi đường cong $y = f(x)$, $y = g(x)$, (với $f(x) > g(x) > 0$) quay quanh trục Ox từ $x = a$ đến b là

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx. \tag{39}$$

3.4.3. Thể tích vật thể

Ví dụ: Tính thể tích hình sinh ra bởi sự quay của hàm $y = \sqrt{x}$ từ $x = 0$ đến 1 quanh trục Ox



Ta có $V = \pi \int_0^1 x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

3.4.3. Thể tích vật thể

Bài tập: Tính thể tích hình sinh ra bởi sự quay của các hàm sau

1) $y = 1 - x^2, 0 < x < 1$ quanh trục Ox.

2) $y = \sin x, 0 < x < pi$ quanh trục Ox.

3) $y = x, y = x^2$ quanh trục Ox.

4) $y = x^2, x = 0, y = 1$ quanh trục Oy.

Bài tập: Tính thể tích hình sinh ra bởi sự quay của các hàm sau

5) $y = x, y = \sqrt{x}$ quanh trục $x = 2$.

6) $y = e^{-x}, y = 1, x = 2$ quanh trục $y = 2$.

7) $y = x^2, x = y^2$ quanh trục $x = -1$.

8) $y = x, y = \sqrt{x}$ quanh trục $y = 1$.

Chương 4

Dãy số
và
chuỗi số

4.1. Dãy số và các phép tính
4.1.1. Khái niệm dãy số

Một dãy số vô hạn là một tập hợp có thứ tự của vô số số hạng.
Dãy số được mô tả bởi công thức tổng quát là một biểu thức chứa n

$$a_n = Q(n). \tag{40}$$

Ví dụ

a) $a_n = \sqrt{n}$: $\{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}...\}$.

b) $b_n = (-1)^n$: $\{b_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1...\}$.

c) $c_n = \dfrac{n-1}{n}$: $\{c_n\} = \{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}...\}$

d) $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$: $\{d_n\} = \{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}...\}$.

4.1.2. Giới hạn của dãy số

Trong một số trường hợp, các số trong dãy sẽ tiến tới một giá trị nào đó khi chỉ số n tang.

Ví dụ

a) $c_n = \dfrac{n-1}{n}$: $\{c_n\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} ...\} \to 1$.

b) $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$: $\{d_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} ...\} \to 0$.

Ngược lại, các số trong dãy có thể không tiến tới một giá trị nào đó khi chỉ số n tang.

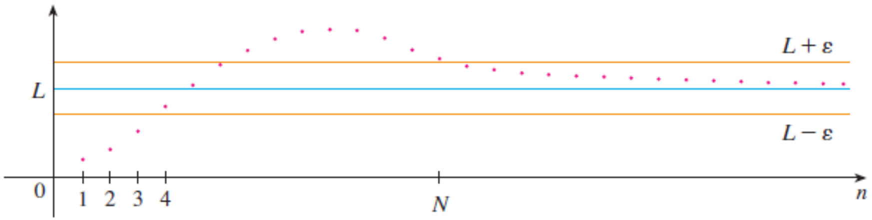
Ví dụ:

c) $a_n = \sqrt{n}$: $\{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} ...\} \to \infty$.

d) $b_n = (-1)^n$: $\{b_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1 ...\} \to ?$.

Dãy số $\{a_n\}$ hội tụ đến số L nếu với mọi số dương ϵ tương ứng với N sao cho
$$\forall n > N, \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ hoặc $a_n \to L$ và gọi L là giới hạn của dãy số.



Nếu không có số L tồn tại, ta nói rằng $\{a_n\}$ phân kì.

Ví dụ:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ với $(a > 1)$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ với $(0 < a < 1)$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1.$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_t n^t + a_{t-1} n^{t-1} + ... + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + ... + b_0} = \begin{cases} \infty & t > m > 0 \\ \dfrac{a_t}{b_m} & t = m, \\ 0 & 0 < t < m \end{cases}$$

4.1.2. Giới hạn của dãy số

Đặt $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là dãy các số thực. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ thì ta có các quy luật sau

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B.$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}, \qquad (B \neq 0).$$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = A^B.$

Nếu dãy $\{c_n\}$ hội tụ thì nó bị chặn.

Nếu dãy $\{c_n\}$ tang và bị chặn trên thì nó hội tụ về chặn trên nhỏ nhất của chính nó.

Bài tập: Tìm giới hạn của các dãy số sau

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n}\right)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1^n + (-1)^n\right)$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln n}{\sqrt[n]{n}}\right)$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\dfrac{1}{n}}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n(1+\frac{1}{2^n})}\right)$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n} + 2\right)^n$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n$.

4.1.3. Tính toán dãy số

Định lý so sánh:

Nếu $x_n \to a$, $y_n \to b$ và $x_n \le y_n, \forall n \ge N$ thì $a \le b$.

Ví dụ: Nếu $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ hội tụ về e. Chứng minh rằng $2 \le e$.

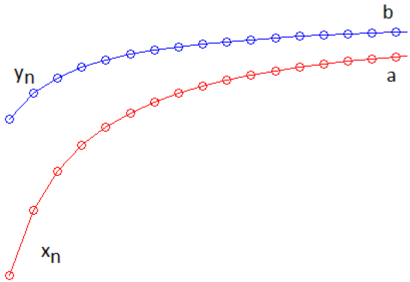
Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2})^n = 2,$$

$$1+\frac{1}{n} \ge \sqrt[n]{2}, \qquad \forall n \ge 2,$$

Vậy $e \ge 2$.



4.1.3. Tính toán dãy số

Định lý kẹp:
Nếu $x_n \to a$, $y_n \to a$ và $x_n \le z_n \le y_n, \forall n \ge N$ nếu $z_n \to a$.

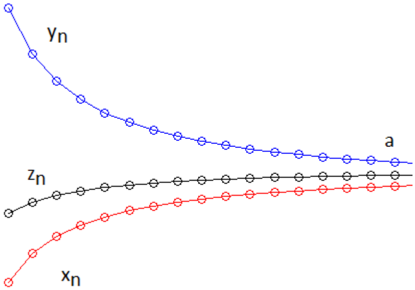
Ví dụ: Chứng minh rằng $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{2^n} \right\}$ hội tụ tới 0.

Ta có

$$-\frac{1}{2^n} < \frac{(-1)^n}{2^n} < \frac{1}{2^n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Vậy $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0.$



4.1.3. Tính toán dãy số

Bài tập: Tìm giới hạn các dãy số sau

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{n}\right)^n$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n-2)}$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)\ln(n+2)}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2}$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

4.2. Chuỗi số và các phép tính
4.2.1. Khái niệm chuỗi số

Một chuỗi số là tổng vô hạn các số trong một dãy số

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Tổng của n số hạng đầu

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

là một tổng hữu hạn và có thể được tính bằng phép tính cộng thông thường. Nó được gọi là tổng riêng phần thứ n.

Khi n lớn, ta hy vọng tổng riêng phần sẽ tiến gần đến một giới hạn số nào đó, và khi đó chuỗi số sẽ tiến đến giá trị đó. Đặt $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
Nếu S có giá trị hữu hạn thì chuỗi hội tụ về giá trị S.

4.2.1. Khái niệm chuỗi số

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân có số hạng đầu là $a_1 = 1/3$ và công bội là $q = 1/3$.

Theo công thức tổng n số hạng đầu của cấp số nhân

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Vậy $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3} \frac{1 - \lim_{n\to\infty} (1/3)^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{3} \frac{1}{2/3} = \frac{1}{2}$.

4.2.1. Khái niệm chuỗi số

Ví dụ: Tính tổng của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

Ta có $\dfrac{1}{n^2+n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Do đó

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 1.$

Bài tập: Tính tổng của các chuỗi sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{6^n}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-4)^n}{12^n}$.

Bài tập: Tính tổng của các chuỗi sau

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{9n^2 + 3n - 2}$.

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - 2n}{n^4 - 2n^3 + n^2}$.

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$.

4.2.2. Giới hạn của chuỗi số

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì $a_n \to 0$. Nếu $a_n \nrightarrow 0$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì.

Ví dụ: a) Chứng minh rằng chuỗi sau phân kì

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

Do $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ nên chuỗi trên phân kì.

Ví dụ: b) Chứng minh rằng chuỗi phân kì sau có $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Ta có $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

4.2.3. Chuỗi số dương

Định lý D'Alembert: Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = h$.

(i) Nếu $h < 1$ thì chuỗi hội tụ.
(ii) Nếu $h > 1$ thì chuỗi phân kì.

Ví dụ:

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ phân kì vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

4.2.3. Chuỗi số dương

Định lý Cauchy: Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = h$.

(i) Nếu $h < 1$ thì chuỗi hội tụ.

(ii) Nếu $h > 1$ thì chuỗi phân kì.

Ví dụ:

a) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ phân kì vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

b) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ hội tụ vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bài tập: Các chuỗi sau hội tụ hay phân kì?

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n-3}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Bài tập: Các chuỗi sau hội tụ hay phân kì?

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n-1}\right)^{2n}$.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n-1}}{n^n}\right)$.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n \ln n}{n^n}\right)$.

4.2.3. Chuỗi số dương

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi dương. Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ với $0 < k < \infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Ví dụ:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+1}{3^n+2}\right)$ hội tụ vì $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2^n+1}{3^n+2}\right)}{(2/3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/2^n}{1+2/3^n} = 1.$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n^2-1}$ phân kì vì $\lim_{n\to\infty} \frac{2n/(3n^2-1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2-1} = \frac{2}{3}.$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$ phân kì nếu $0 < \alpha \leq 1$ và hội tụ nếu $\alpha > 1$.

4.2.3. Chuỗi số dương

Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi dương và $a_n \leq b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì.

Ví dụ:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ hội tụ do $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì do $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

4.2.3. Chuỗi số dương

Bài tập : Các chuỗi sau hội tụ hay phân kì?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

Bài tập : Các chuỗi sau hội tụ hay phân kì?

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{n}}$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+2n}$.

4.2.3. Chuỗi số dương

Xem xét sự hội tụ hoặc phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Tiêu chuẩn	Biểu thức	Hội tụ	Phân kỳ
Giới hạn	$\lim_{n\to\infty} a_n$		$\neq 0$
Tỉ số	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$	< 1	> 1
Can thức	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$	< 1	> 1
So sánh (TS)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	hữu hạn, b_n hội tụ	hữu hạn, b_n phân kỳ

+ $a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ: nhỏ hơn hội tụ thì hội tụ.

+ $a_n \geq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì: lớn hơn phân kì thì phân kì.

4.2.4. Chuỗi đổi dấu

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Một chuỗi đổi dấu là chuỗi có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

Định lý Leibniz: Cho một chuỗi đổi dấu. Nếu $a_{n+1} < a_n$ (dãy giảm) và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi đổi dấu hội tụ và $0 < S < a_1$.

Ví dụ: Chứng minh rằng chuỗi sau hội tụ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

Ta có $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > ...$ và $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Vậy chuỗi này hội tụ.

4.2.4. Chuỗi đổi dấu

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và chuỗi đổi dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ tương ứng

(i) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hội tụ tuyệt đối.

(ii) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì, thì $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là nửa hội tụ.

Ví dụ:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ là nửa hội tụ

vì $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kì.

4.2.4. Chuỗi đổi dấu

Bài tập:Khảo sát sự hội tụ của chuỗi đổi dấu sau

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+2n} \frac{n}{2^n}$.

Bài tập: Chuỗi nào sau đây là hội tụ tuyệt đối, nửa hội tụ?

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{1/n}}{n^3}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.5.8...(3n-1)}$.

4.3.1. Khái niệm chuỗi hàm

Chuỗi hàm là một tổng vô hạn các hàm số của biến x

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Với những trị số x khác nhau, ta thu được các chuỗi số khác nhau. Các chuỗi này có thể hội tụ, có thể phân kỳ. Tập hợp những trị số x mà chuỗi hàm hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi đó.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm:

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Đặt $S_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$. Vậy $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

Với $|x| < 1$, chuỗi hội tụ. Với $|x| \geq 1$, chuỗi phân kỳ.

4.3.2. Chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

trong đó các hằng số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được gọi là các hệ số của chuỗi.

Định lý Abel:

Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ với trị số x_1 (khác 0), thì nó hội tụ tuyệt đối với mọi trị số x thỏa $|x| < |x_1|$.

Nếu chuỗi lũy thừa phân kỳ với trị số x_2, thì nó phân kỳ với mọi x thỏa mãn $|x| > |x_2|$.

Tồn tại số R sao cho các điểm $|x| < R$ là những điểm hội tụ tuyệt đối và những điểm $|x| > R$ là những điểm phân kỳ. Số R được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi lũy thừa.

4.3.2. Chuỗi lũy thừa

Tiêu chuẩn d'Alembert: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$

Tiêu chuẩn Cauchy: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$

Ví dụ: a) Tìm bán kính hội tụ của chuỗi $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$

Tiêu chuẩn d'Alembert: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{1}\right| = 1.$

Ví dụ: b) Tìm BKHT của $\dfrac{2x}{1} - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3} ... + \dfrac{(-1)^n(2x)^n}{n} + ...$

Cauchy: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n 2^n}{n}\right|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \dfrac{1}{2}.$

4.3.2. Chuỗi lũy thừa

Bài tập: Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nx}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+2n} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$.

Bài tập: Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau.

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n$.

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+1)^{2n}$.

Chương 5

Vi phân hàm nhiều biến

5.1. Cơ sở và khái niệm
5.1.1. Các khái niệm cơ bản

Không gian $\mathbb{R}^n$ là tích Descartes của n tập hợp $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \quad (n \text{ tập hợp } \mathbb{R}) \\ &= \Big\{(x_1, x_2, .., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\Big\}. \end{aligned} \tag{41}$$

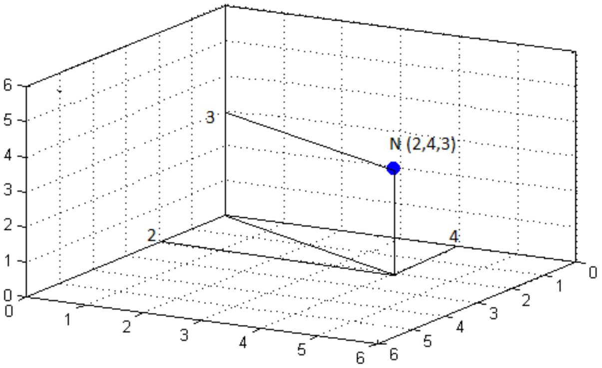
Ví dụ 5.1. Mặt phẳng Oxy: $\mathbb{R}^2 = \Big\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\Big\}$,

Không gian $Oxyz$: $\mathbb{R}^3 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\Big\}$.

Mỗi **điểm** $M(x_1, x_2, .., x_n)$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một phần tử trong tập hợp $\mathbb{R}^n$.

Các giá trị x_k là **tọa độ** thứ k của M $(0 \leq k \leq n)$.

Ví dụ 5.2. Cho điểm $N(2, 4, 3)$ trong không gian $\mathbb{R}^3$. Xác định tọa độ của điểm N.



5.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nếu theo quy luật f; với mỗi $\mathbf{x} \in \Omega$ ta tìm được một phần tử duy nhất $z \in \mathbb{R}$, ta nói ta xác định được một ánh xạ

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \tag{42}$$

hoặc

$$z = f(\mathbf{x}). \tag{43}$$

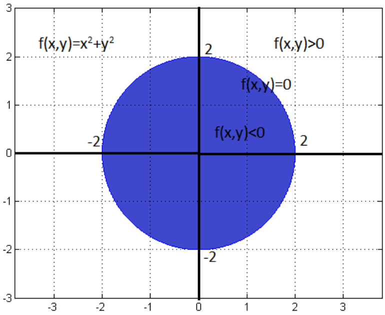
Ta nói rằng f xác định trên Ω và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Khi đó Ω được gọi là miền xác định và $f(\Omega) = \left\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega \right\}$ là miền giá trị của hàm số f.

Ví dụ 5.3. Cho $f : [-2, 2] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ sao cho $f(x, y) = x + y$.
Miền xác định: $\Omega = [-2, 2] \times [0, 1]$.
Miền giá trị: $f(\Omega) = [-2, 3]$.

Ví dụ 5.4. Tìm miền xác định của hàm: $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

Giải: Biểu thức trong dấu can và dưới mẫu phải lớn hơn 0.

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4.$$



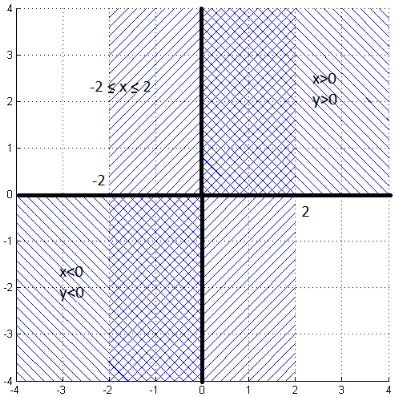
Vậy tập xác định của hàm số là các điểm nằm trong vòng tròn bán kính bằng 2, tâm tại gốc tọa độ.

Đồ thị của hàm $f(x, y) = 0$ chia mặt phẳng Oxy thành hai miền $f(x, y) > 0$ và $f(x, y) < 0$. Xét dấu những điểm đặc biệt để xác định vị trí hai miền này.

5.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến

Ví dụ 5.5. Tìm miền xác định của hàm: $z = arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

Giải:



Biểu thức trong arcsin phải có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1, nghĩa là

$$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Biểu thức trong dấu can phải dương, nghĩa là

$$xy \geq 0 = \left[\begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0, \\ x \leq 0, y \leq 0. \end{array}\right.$$

5.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến

Bài tập: Tìm miền xác định của các hàm số sau:

5.1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

5.2. $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$.

5.3. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

5.4. $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

Bài tập: Tìm miền xác định của các hàm số sau:

5.5. $z = ln(x + y)$.

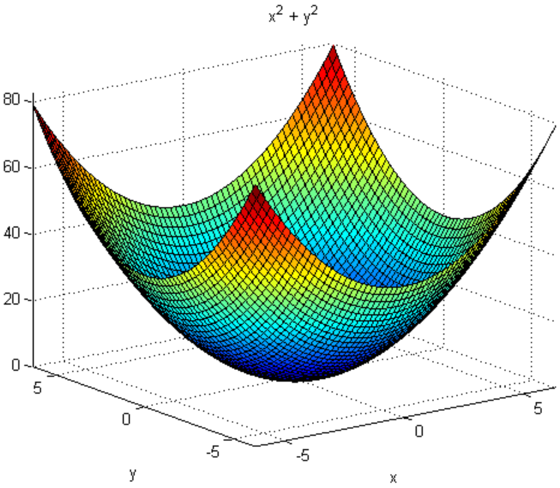
5.6. $z = arcsin\dfrac{y}{x}$.

5.7. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

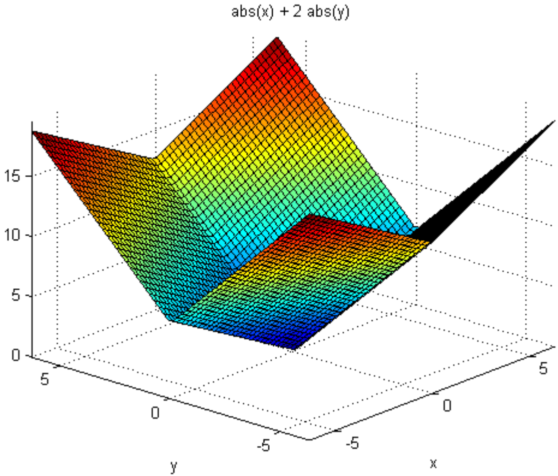
5.8. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

5.1.3. Đồ thị của hàm nhiều biến

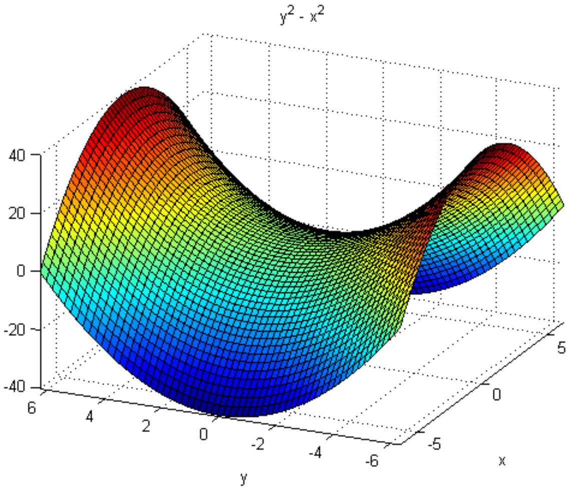
Ví dụ 5.6. Vẽ đồ thị của hàm số $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.



Ví dụ 5.7. Vẽ đồ thị của hàm số $z = f(x,y) = |x| + 2|y|$.



Ví dụ 5.8. Vẽ đồ thị của hàm số $z = f(x, y) = y^2 - x^2$.



Xét hàm

$$z = f(x, y) \tag{44}$$

xác định trong miền Ω của mặt phẳng Oxy. Qua mỗi điểm $M(x_M, y_M)$ của miền xác định ta vẽ 1 đường trực giao của mặt phẳng Oxy với độ cao bằng $z_P = f(x_M, y_M)$. Ta thu được 1 điểm P trong không gian $Oxyz$ có tọa độ $P(x_M, y_M, z_P)$. Quỹ tích tất cả các điểm P được vẽ như trên gọi là **đồ thị** của hàm số (44).

Để vẽ đồ thị của hàm số hai biến, chúng ta thực hiện như sau:

Bước 1: Gán một giá trị a cho z. Trong mặt phẳng $z = a$, vẽ đường cong quan hệ $f(x, y) = a$.

Bước 2: Thực hiện lại bước 1 với một giá trị mới của z. Thực hiện nhiều lần bước này.

Bước 3: Nhận diện và phán đoán dạng của đồ thị $z = f(x, y)$.

5.1.3. Đồ thị của hàm nhiều biến

Bài tập: Vẽ đồ thị của các đường cong sau:

5.9. Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

5.10. Đường Elliptic $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

5.11. Đường Parabolic $y^2 = 2ax$.

5.12. Đường Hyperbolic $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Bài tập: Vẽ đồ thị của các mặt cong sau:

5.13. Mặt Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

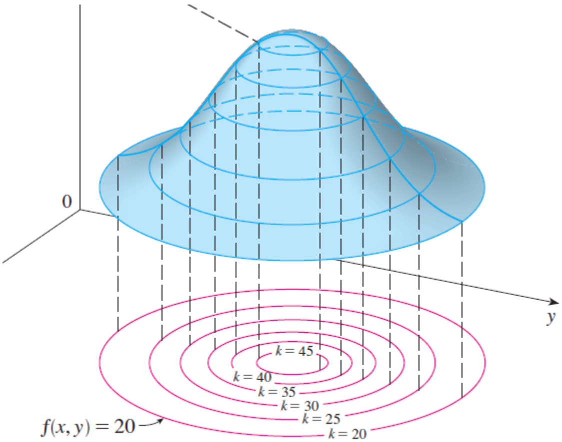
5.14. Mặt Elliptic Parabolic $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$.

5.15. Mặt Hyperbolic Parabolic $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - z = 0$.

5.16. Mặt Hyperbolic $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

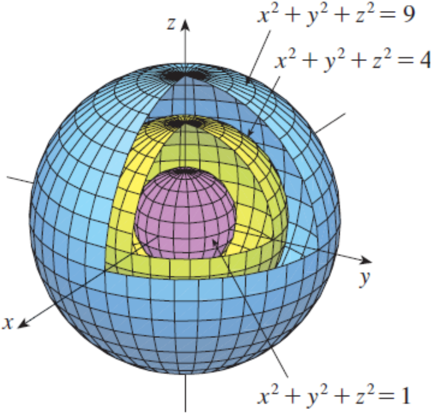
5.1.4. Đường mức và mặt mức

Đường mức của hàm $z = f(x, y)$ là đường $f(x, y) = C$ trên mặt phẳng Oxy, tại các điểm trên đường đó, hàm có giá trị không đổi.



5.1.4. Đường mức và mặt mức

Mặt mức của hàm $u = f(x, y, z)$ là mặt $f(x, y, z) = C$ trên không gian $Oxyz$, tại các điểm trên mặt đó, hàm có giá trị không đổi.



5.1.4. Đường mức

Bài tập: Vẽ các đường mức của các hàm 2 biến sau:

5.17. $z = x + y$.

5.18. $z = x^2 + y^2$.

5.19. $z = x^2 - y^2$.

5.20. $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.

Bài tập: Vẽ các đường mức của các hàm 2 biến sau:

5.21. $z = (y - 2x)^2$

5.22. $z = y - lnx$.

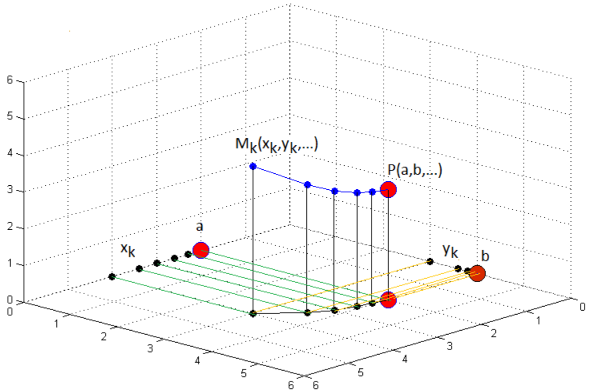
5.23. $z = ye^x$.

5.24. $z = x^3 - y$.

5.2. Giới hạn và sự liên tục.
5.2.1. Giới hạn hàm số

Cho 1 dãy điểm $M_k(x_k, y_k, ...) \in \mathbb{R}^n$ và điểm $P(a, b, ...) \in \mathbb{R}^n$. Dãy M_k được gọi là hội tụ đến P nếu

$$d(M_k, P) \to 0 \text{ khi } k \to \infty.$$



Sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$ là sự hội tụ theo điểm, nghĩa là

$$M_k \to P \Leftrightarrow$$

$$x_k \to a, y_k \to b, ...$$

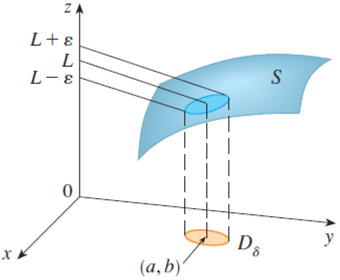
khi $k \to \infty$

5.2.1. Giới hạn hàm số

Số A được gọi là giới hạn của hàm $z = f(x, y)$ khi điểm $M(x, y)$ tiến đến điểm $P(a, b)$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ cho trước nhỏ bao nhiêu tùy ý, có thể tìm được $\delta > 0$ sao cho $0 < d(M, P) < \delta$ thì bất đẳng thức

$$|f(x, y) - A| < \epsilon \tag{45}$$

được thỏa mãn. Kí hiệu $\lim\limits_{x\to a\, y\to b} f(x, y) = A$ hoặc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$.



Hay ta có thể nói khoảng cách giữa $f(x, y)$ và A có thể làm nhỏ tùy ý bằng cách làm cho khoảng cách giữa 2 điểm $M(x, y)$ và $P(a, b)$ đủ nhỏ (nhưng không bằng zero).

Ví dụ 5.9. Tìm giới hạn của $e^{-xy}cos(x+y)$ khi $x \to 1$ và $y \to -1$.

Giải:

Ta có $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = e^{-1(-1)}cos(1+(-1)) = e$.

Vậy $f(x,y) = e^{-xy}cos(x+y)$ có giới hạn bằng e tại $(1,-1)$.

Ví dụ 5.10. Tìm giới hạn của $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ khi $x \to 0$ và $y \to 0$.

Giải:

Ta có $0 \leq \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right||x| \leq |x|$.

Nên $0 \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

Vậy $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ có giới hạn bằng 0 tại $(0,0)$.

5.2.1. Giới hạn hàm số

Khi giới hạn của hàm số có dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Có thể giới hạn đó không tồn tại. Ta có thể sử dụng một trong ba cách sau để chứng minh điều đó.

Cách 1. Tìm 2 dãy điểm $M_n \neq P$ và $N_n \neq P$ sao cho $M_n \to P$ và $N_n \to P$ nhưng $\lim\limits_{M_n \to P} f(M_n) \neq \lim\limits_{N_n \to P} f(N_n)$.

Cách 2. Tìm đường cong (C_k) sao cho $(x, y) \to (a, b)$ dọc theo (C_k). Chứng minh rằng giới hạn của hàm $f(x, y)$ khi $(x, y) \to (a, b)$ theo đường cong (C_k) phụ thuộc vào tham số k.

Cách 3. Đặt $x - a = r\ cos\varphi$ và $y - b = r\ sin\varphi$, trong đó $\varphi \in [0, 2\pi]$. Khi $r \to 0$ thì $x \to a$ và $y \to b$. Nếu giới hạn sau khi thay thế phụ thuộc vào tham số φ thì ta kết luận giới hạn đã cho không tồn tại.

Ví dụ 5.11. Chứng minh $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ không có giới hạn tại $P(0,0)$.

Giải:

Đặt $M_n(\frac{1}{n}, 0)$, dễ thấy $M_n \to P(0,0)$ khi $n \to \infty$.

Khi đó $\lim\limits_{M_n \to P} f(M_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n - 0}{1/n + 0} = 1.$

Đặt $N_n(0, \frac{1}{n})$, dễ thấy $N_n \to P(0,0)$ khi $n \to \infty$.

Khi đó $\lim\limits_{N_n \to P} f(N_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0 - 1/n}{0 + 1/n} = -1.$

Vậy $M_n \to P(0,0)$ và $N_n \to P(0,0)$ nhưng $\lim\limits_{M_n \to P} f(M_n) \neq \lim\limits_{N_n \to P} f(N_n)$.

Kết luận $f(x,y)$ không có giới hạn tại $P(0,0)$.

5.2.1. Giới hạn hàm số

Trong trường hợp hai dãy có cùng giới hạn, ta không thể kết luận hàm số có giới hạn:

Đặt $M_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, dễ thấy $M_n \to P(0,0)$ khi $n \to \infty$.

Khi đó $\lim\limits_{M_n \to P} f(M_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1/n - 1/n}{1/n + 1/n} = 0.$

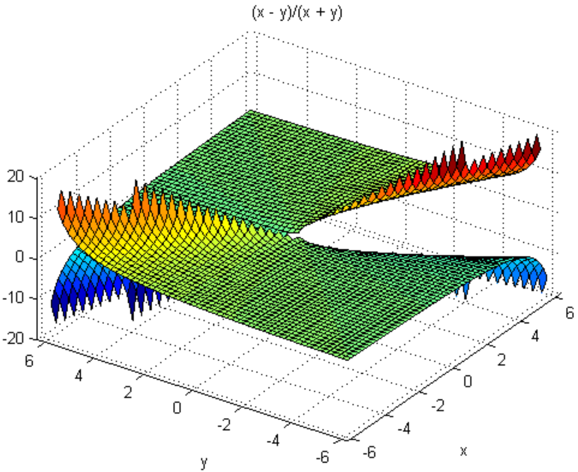
Đặt $N_n(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$, dễ thấy $N_n \to P(0,0)$ khi $n \to \infty$.

Khi đó $\lim\limits_{N_n \to P} f(N_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-1/n + 1/n}{-1/n_1/n} = 0.$

Vậy $M_n \to P(0,0)$ và $N_n \to P(0,0)$ và $\lim\limits_{M_n \to P} f(M_n) = \lim\limits_{N_n \to P} f(N_n)$.

Ta KHÔNG THỂ kết luận $f(x,y)$ có giới hạn tại $P(0,0)$.

5.2.1. Giới hạn hàm số



Bài tập: Tìm giới hạn của các hàm số sau:

5.25. $x + \dfrac{1}{y}, \quad (x, y) \to (1, 0).$

5.26. $\dfrac{xy}{x + y + 1}, \quad (x, y) \to (0, 0).$

5.27. $\dfrac{sin(xy)}{x + y}, \quad (x, y) \to (1, 1).$

5.28. $\dfrac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \to (0, 0).$

Bài tập: Chứng minh các giới hạn sau không tồn tại:

5.29. $\dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \to (0, 0).$

5.30. $\dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad (x, y) \to (0, 0).$

5.31. $\dfrac{xy - 1}{x - y}, \quad (x, y) \to (1, 1).$

5.32. $\dfrac{4 - 2xy}{x^2 - 4y^2}, \quad (x, y) \to (2, 1).$

5.2.2. Sự liên tục của hàm số

Lân cận của điểm $P(a,b)$ là tập hợp các điểm M thỏa điều kiện $0 < d(M,P) < \delta$ (nghĩa là hình tròn tâm $P(a,b)$ bán kính δ).

Hàm $z = f(x,y)$ được gọi là **liên tục** tại điểm $P(a,b)$ nếu

i) $f(x,y)$ xác định tại P và trong lân cận của P.

ii) Giới hạn $\lim\limits_{M \to P} f(M)$ tồn tại với M thuộc lân cận của P.

iii) $\lim\limits_{M \to P} f(M) = f(P)$.

Hàm $z = f(x,y)$ **gián đoạn** tại điểm $P(a,b)$ nếu

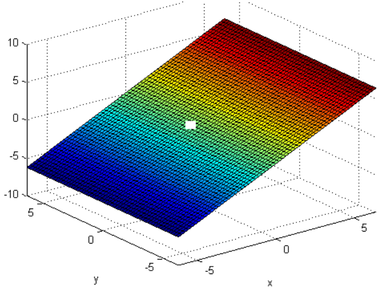
i) $f(x,y)$ không xác định tại P ,

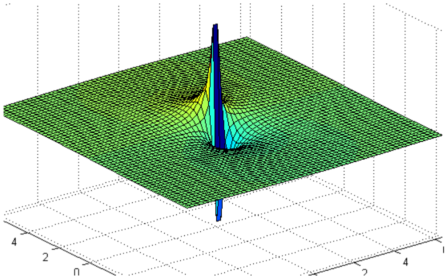
ii) Giới hạn $\lim\limits_{M \to P} f(M)$ không tồn tại,

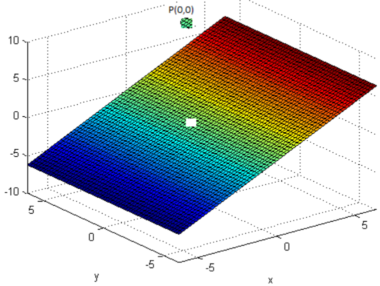
iii) $\lim\limits_{M \to P} f(M) \neq f(P)$.

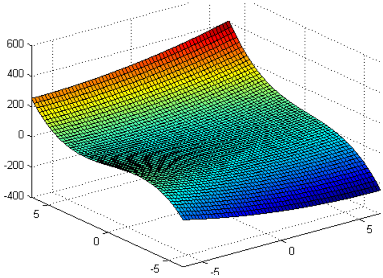
Hàm số liên tục tại mọi điểm của một miền nào đó được gọi là **hàm liên tục trong miền** đó.

5.2.2. Sự liên tục của hàm số









Bài tập: Kiểm tra hàm số có liên tục tại các điểm sau không:

5.33. $z = e^x + \sqrt{x + y^2}$ tại $(-1, -1)$.

5.34. $z = ln(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy})$ tại $(-1, 0)$.

5.35. $z = arcsin(x + \sqrt{y})$ tại $(1, 1)$.

5.36. $z = \dfrac{x^2 cosy + ye^x}{2x^2 + y^2}$ tại $(0, 0)$.

Bài tập: Tìm tập hợp các điểm **x** mà hàm số liên tục:

5.37. $z = x^4 + sinxy - 4x + 1$.

5.38. $z = \dfrac{x^2 - 2xy + 3}{x + y - 1}$.

5.39. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + ln(x^2 + y^2 - 1)$.

5.40. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

5.3. Đạo hàm và vi phân
5.3.1. Đạo hàm riêng phần

Cho $f : \Omega \to \mathbb{R}$ và $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$. Giới hạn

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{h_1}, \tag{46}$$

(nếu có) được gọi là **đạo hàm riêng** theo biến thứ nhất của f tại $\mathbf{x}$.

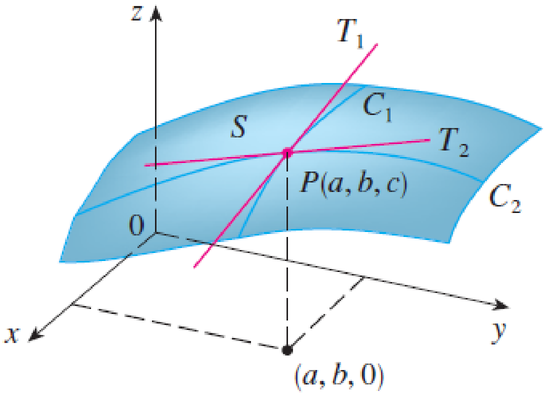
Các ký hiệu sau được dùng để biểu thị đạo hàm riêng của hàm f theo biến x_1

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \ , \ f_{x_1}(\mathbf{x}) \ , \ f'_{x_1}(\mathbf{x}) \ , \ D_1 f(\mathbf{x}) \ , \ D_{x_1} f(\mathbf{x}). \tag{47}$$

Tương tự cho các đạo hàm riêng theo biến thứ k, $k \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + h_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{h_k}. \tag{48}$$

5.3.1. Đạo hàm riêng phần



$g_1(x) = f(x,b)$ (C_1),

$g_1'(x) = f_x'(x,b)$ (T_1).

$g_2(y) = f(a,y)$ (C_2),

$g_2'(y) = f_y'(a,y)$ (T_2).

Khi tìm đạo hàm riêng theo biến x, ta cố định biến y.
Khi tìm đạo hàm riêng theo biến y, ta cố định biến x.

5.3.1. Đạo hàm riêng phần

Các quy tắc tính đạo hàm

1. $c' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(cx)' = c$.
4. $(cu)' = cu'$.
5. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
6. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.
7. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
8. $(uv)' = u'v + v'u$.
9. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Đạo hàm của hàm sơ cấp

1. $(\sin x)' = \cos x$.
2. $(\cos x)' = -\sin x$.
3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
4. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
5. $(e^x)' = e^x$.
6. $(a^x)' = a^x \ln a$.
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

5.3.1. Đạo hàm riêng phần

Khi f có đhr theo tất cả các biến tại $\mathbf{x}$, thì **gradient** $f(\mathbf{x})$ là vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right). \tag{49}$$

Ví dụ 5.12. Tính gradient của $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Giải:

Bước 1: Tìm các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(xy^2)'_x(x^2+y^2) - xy^2(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(xy^2)'_y(x^2+y^2) - xy^2(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Bước 2: Tính giá trị gradient f tại tọa độ cần tìm

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

5.3.1. Đạo hàm riêng phần

Bài tập: Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số sau

5.41. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

5.42. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$.

5.43. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

5.44. $z = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Bài tập: Tìm gradient của các hàm số sau

5.45. $z = x^2(y + 1)$ tại $P(1, 2)$.

5.46. $z = (y^2 + 1)e^x$ tại $Q(0, 1)$.

5.47. $z = x \sin y + y \cos x$ tại $M(0, \pi)$.

5.48. $u = \ln(xy + z^2)$ tại $N(1, 2, 0)$.

5.3.2. Đạo hàm riêng phần cấp cao

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $f(x, y)$ là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 của nó

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{yx}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yy}.
\end{aligned} \tag{50}$$

Nếu f''_{yx} và f''_{xy} liên tục, ta có thể chứng minh được $f''_{yx} = f''_{xy}$.

5.3.2. Đạo hàm riêng phần cấp cao

Ví dụ 5.13. Tìm đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f = y\ln x$.

Giải:

Bước 1: Tìm các đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = lnx.$$

Bước 2: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 từ đạo hàm riêng cấp 1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x\right) = 0.$$

5.3.2. Đạo hàm riêng phần cấp cao

Bài tập: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau

5.49. $z = x^2 + y^3 - 2xy$.

5.50. $z = x \sin y$.

5.51. $z = \ln(x^2 y)$.

5.52. $z = e^{xy}$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau

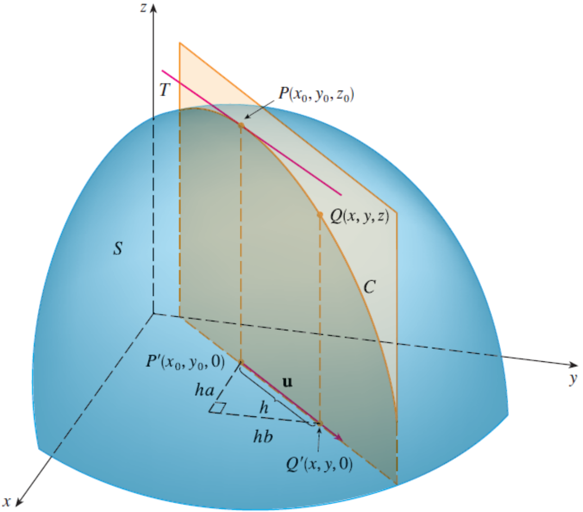
5.53. $z = x^2 y - xy^2$ tại $P(1, 1)$.

5.54. $z = \ln(xy^2)$ tại $M(e, 1)$.

5.55. $z = x^2 e^y$ tại $Q(2, 0)$.

5.56. $z = \dfrac{y}{x}$ tại $N(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

5.3.3. Đạo hàm theo hướng



5.3.3. Đạo hàm theo hướng

Cho điểm (x, y) và một vecto $\mathbf{u} = (v, w)$.

Hàm $f(x, y)$ liên tục trong lân cận của (x, y).

Tốc độ thay đổi của f tại (x, y) theo hướng $\mathbf{u}$ được gọi là **đạo hàm theo hướng** và được định nghĩa như sau

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + vh, y + wh) - f(x, y)}{h}. \tag{51}$$

Điều này tương đương với

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f \cdot \mathbf{u} = D_1 f(x, y) v + D_2 f(x, y) w. \tag{52}$$

5.3.3. Đạo hàm theo hướng

Ví dụ 5.14. Tìm đạo hàm theo hướng $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ của hàm số $f(x, y) = x^2 + y$ tại điểm $M(2, 3)$ theo hai cách.

Giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x + 1/2h)^2 + (y + \sqrt{3}/2h) - x^2 - y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{xh + h^2/4 + \sqrt{3}/2h}{h} \\ &= x + \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= D_1 f(x, y)/2 + D_2 f(x, y)\sqrt{3}/2 \\ &= x + \sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Vậy $D_{\mathbf{u}} f(2, 3) = 2 + \sqrt{3}/2$.

5.3.3. Đạo hàm theo hướng

Bài tập: Tìm đạo hàm theo hướng **u** của các hàm số tại điểm cho trước

5.57. $z = \sqrt{xy}$, $P(2,8)$, $\mathbf{u} = (5,4)$.

5.58. $z = x^4 - x^2y^2$, $Q(2,1)$, $\mathbf{u} = (1,2)$.

5.59. $z = xe^y + ye^x$, $M(4,-1)$, $\mathbf{u} = (1,2)$.

5.60. $z = x^3 + y^2x + y^3$, $N(3,-4)$, $\mathbf{u} = (-1,2)$.

Bài tập: Tìm đạo hàm theo hướng **u** của các hàm số tại điểm cho trước

5.61. $z = \sin(2x + 3y)$, $P(-6,4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$.

5.62. $z = \frac{y^2}{x}$, $Q(1,2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2, \sqrt{5})$.

5.63. $z = \sqrt{y} + 2x$, $M(3,4)$, $\mathbf{u} = (4,-2)$.

5.64. $z = ln(x^2 + y^2)$, $N(2,1)$, $\mathbf{u} = (-1,2)$.

5.3.4. Đạo hàm hàm hợp và hàm ẩn

Nhắc lại hàm số 1 biến: Cho hàm số $f(x)$ có x phụ thuộc t. Khi đó

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Xét hàm số $z = f(x, y)$ trong đó x và y chỉ phụ thuộc 1 biến t. Đạo hàm thường của z cũng được tính như sau

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{53}$$

Xét hàm số $z = f(x, y)$ trong đó $x = x(\eta, \psi)$ và $y = y(\eta, \psi)$ là các hàm số theo biến η và ψ. Thì các đạo hàm riêng được tính như sau:

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}. \tag{55}$$

Ví dụ 5.15. Cho hàm số $z = x^2 + y$. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số trong tọa độ cực $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Giải:

Bước 1: Tìm đạo hàm của x và y trong tọa độ cực:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

Bước 2: Tìm đạo hàm của z trong tọa độ cực:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x\cos\theta + \sin\theta = 2r\cos^2\theta + \sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -2xr\sin\theta + r\cos\theta = 2r^2\sin\theta\cos\theta + r\cos\theta.$$

Bài tập: Tìm đạo hàm $\dfrac{dz}{dt}$ của các hàm số sau

5.65. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$.

5.66. $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$.

5.67. $z = xe^y$, $x = t^2$, $y = 1 - t$.

5.68. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Bài tập: Tìm các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ của các hàm số sau

5.69. $z = x^2y^3$, $x = s\cos t$, $y = s\sin t$.

5.70. $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$.

5.71. $z = \sin x \cos y$, $x = st$, $y = s + t$.

5.72. $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = s^2t$, $y = st^2$.

5.3.4. Đạo hàm hàm hợp và hàm ẩn

Định lý đạo hàm của hàm ẩn:

Cho hàm số $F(x, y, z)$ xác định, liên tục và tồn tại các đạo hàm riêng bậc 1 trong lân cận điểm $P(a, b, c)$ và $F(x, y, z) = 0$ tại điểm P.

Khi đó tồn tại duy nhất hàm $z(x, y)$ khả vi liên tục trong lân cận (a, b) thỏa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}. \tag{56}$$

Chứng minh: Đạo hàm hàm hợp theo biến x

$$\frac{\partial F}{\partial x}\overset{1}{\cancel{\frac{\partial x}{\partial x}}} + \frac{\partial F}{\partial y}\overset{0}{\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Ví dụ 5.16. Cho phương trình $e^z = x + y + z$. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Giải:

Hàm số $F = x + y + z - e^z$ xác định, liên tục và tồn tại các đạo hàm riêng bậc 1 trong toàn không gian $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - e^z.$$

Vậy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{1 - e^z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{1 - e^z}.$$

Bài tập: Tìm các đạo hàm cấp 1 của hàm số z thỏa

5.73. $z^3 - 3xyz = 8.$

5.74. $x^3 + y^3 + z^3 = 2.$

5.75. $e^{xy} + e^{yz} = e^{xz}.$

5.76. $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$

Bài tập: Tìm đạo hàm cấp 1 tại các điểm cho trước của hàm số z thỏa

5.77. $z \sin x + z \cos y = xy, \quad$ tại $M(\pi/2; 0; 1).$

5.78. $z^3 + z^2 = xy + 1, \quad$ tại $N(1; 2; 3).$

5.79. $xyz = x^2 + y^2 + z^2, \quad$ tại $P(0; 2; 1).$

5.80. $xye^z + xze^y + yze^x = 1, \quad$ tại $Q(1; 2; 0).$

5.3.5. Vi phân toàn phần

"Cho hàm số $z = f(x, y)$, quan hệ giữa $\Delta x, \Delta y$ và Δz như thế nào?"

Số gia toàn phần của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $P(a, b)$:

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b). \tag{57}$$

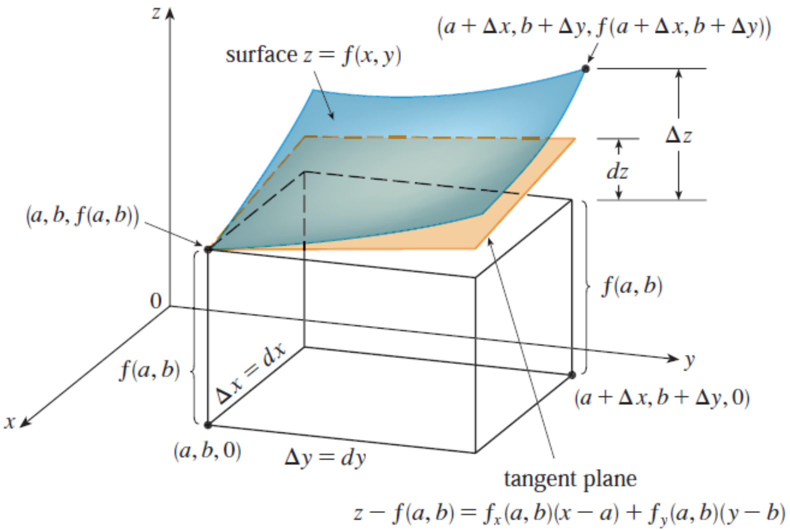
Vi phân toàn phần của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $P(a, b)$ được định nghĩa bởi

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{58}$$

Số gia toàn phần của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $P(a, b)$ được xấp xỉ bởi công thức sau

$$\Delta z \simeq \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \tag{59}$$

5.3.5. Vi phân toàn phần



5.3.5. Vi phân toàn phần

Ví dụ 5.17. Tìm giá trị gần đúng của biểu thức $A = \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$

Giải: Đặt $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Yêu cầu bài toán: tìm giá trị hàm số tại điểm $M(1,02; 1,97)$.

Xét điểm $P(1;2)$. Ta chọn $a = 1, \Delta x = 0,02$ và $b = 2, \Delta y = -0,03$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1;2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1;2) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} = 2,$$

$$\Delta z \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(1;2)(0,02) + \frac{\partial f}{\partial y}(1;2)(-0,03) = -0,05.$$

$$f(1,02; 1,97) = f(1;2) + \Delta z \simeq 2,95.$$

Để giải ví dụ này, ta chọn điểm $P = P(1;1)$ được không?

5.3.5. Vi phân toàn phần

Bài tập: Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của các hàm số sau

5.81. $z = x^3 + xy + xy^2 - 5x + y^2$.

5.82. $z = \sin x \cos y$.

5.83. $z = \ln(xy)$.

5.84. $z = e^{x/2+y/2}$.

Bài tập: Dùng vi phân toàn phần tính gần đúng

5.85. $4,05^2 + 3,07^2$.

5.86. $\sqrt{1,03} + \sqrt{0,98} - 1$.

5.87. $e^{2,01} + \cos(-0.02)$.

5.88. $(0,97)^{2,05}$.

5.3.5. Vi phân toàn phần

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad \text{(Vi phân cấp một)}$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \qquad \text{(Vi phân cấp hai)}$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f \qquad \text{(Vi phân cấp ba)}$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

...

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f. \qquad \text{(Vi phân cấp n)}$$

5.3.5. Vi phân toàn phần

Ví dụ 5.18. Tìm vi phân toàn phần cấp 2 của $f(x,y) = x^2y^3$.

Giải:

Đạo hàm riêng cấp 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Đạo hàm riêng cấp 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y.$$

Vi phân cấp 2

$$d^2z = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2.$$

5.3.5. Vi phân toàn phần

Bài tập: Tìm vi phân toàn phần cấp 2 của các hàm số sau

5.89. $z = x^3 + xy^2$.

5.90. $z = y \sin x - x \cos y$.

5.91. $z = \ln(xy) + y^2$.

5.92. $z = y^2 e^x$.

Bài tập: Tìm vi phân toàn phần cấp 2 của các hàm số sau

5.93. $z = xy + y^2$ tại $P(1; 2)$.

5.94. $z = x \sin y$ tại $N(1; 0)$.

5.95. $z = x^2 e^y$ tại $M(1; 0)$.

5.96. $z = \ln(xy^2)$ tại $Q(2; 2)$.

5.3.6. Khai triển Taylor

Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$. **Khai triển Taylor** cho hàm hai biến tại lân cận điểm $P(a, b)$

$$f(x,y) = f(a,b)+df(a,b)+\frac{1}{2!}d^2f(a,b)+...+\frac{1}{n!}d^nf(a,b)+O^n\Big(d(M,P)\Big). \tag{60}$$

Công thức gần đúng (với n=2)

$$f(x,y) \simeq f(a,b) + (x-a)f'_x(a,b) + (y-b)f'_y(a,b) + \frac{(x-a)^2}{2}f''_{xx}(a,b) + (x-a)(y-b)f''_{xy}(a,b) + \frac{(y-b)^2}{2}f''_{yy}(a,b). \tag{61}$$

Trường hợp công thức Taylor lấy tại điểm $(0; 0)$ thì gọi là **công thức Maclaurin.**

Ví dụ 5.19. Viết khai triển Taylor cấp $n = 2$ tại điểm $P(1;2)$ của hàm số

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^2 + 5y - 4.$$

Giải:

Ta có

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - y, \quad f'_y(x,y) = -x + 2y + 5,$$

$$f''_{xx}(x,y) = 6x, \quad f''_{xy}(x,y) = -1, \quad f''_{yy}(x,y) = 2.$$

Tại điểm $P(1,2)$ thì

$$f(1,2) = 9, \quad f'_x(1,2) = 1, \quad f'_y(1,2) = 8,$$

$$f''_{xx}(1,2) = 6, \quad f''_{xy}(1,2) = -1, \quad f''_{yy}(1,2) = 2.$$

Khai triển Taylor của hàm số $f(x,y)$ tại điểm $P(1;2)$ cấp $n = 2$

$$f(x,y) \simeq 9 + 1(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 - (x-1)(y-2) + (y-2)^2.$$

5.3.6. Khai triển Taylor

Áp dụng: Biết trước giá trị của hàm số và đạo hàm riêng các cấp tại điểm $P(a, b)$, tìm giá trị gần đúng của hàm số tại lân cận $M(x, y)$.

Ví dụ 5.20. Tìm giá trị điểm tại $M(1,01; 1,98)$ của hàm số

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^2 + 5y - 4$$

Giải:

Khai triển Taylor của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $P(1; 2)$ cấp $n = 2$

$$f(x, y) = 9 + (x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 - (x-1)(y-2) + (y-2)^2.$$

Giá trị của hàm số $f(x, y)$ tại điểm $M(1,01; 1,98)$

$$\begin{aligned} f(1,01; 1,98) &= 9 + (1,01 - 1) + 8(1,98 - 2) + 3(1,01 - 1)^2 \\ &\quad - (1,01 - 1)(1,98 - 2) + (1,98 - 2)^2 \\ &= 9 + 0,01 - 0,16 + 3 * 0,01^2 + 0,01 * 0,02 + 0,02^2 \\ &= 8,8509. \end{aligned}$$

5.3.6. Khai triển Taylor

Bài tập: Khai triển Taylor đến cấp 2 của $f(x, y)$ tại điểm cho trước .

5.97. $f(x, y) = \sin x \cos y, \quad M(0; 0).$

5.98. $f(x, y) = \ln(xy), \quad N(1; 1).$

5.99. $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 2, \quad P(-3; 4).$

5.100. $f(x, y) = e^x \cos y, \quad Q(0; \pi).$

Bài tập: Tìm giá trị gần đúng của $f(x, y)$ tại điểm cho trước bằng Khai triển Taylor đến cấp 2.

5.101. $f(x, y) = x/y - y/x, \quad P(1,03; -0,99).$

5.102. $f(x, y) = x^3 - y^2 - 2xy + 5, \quad Q(-0,98; 1,03).$

5.103. $f(x, y) = x^2\sqrt{y}, \quad M(1,02; 4,03).$

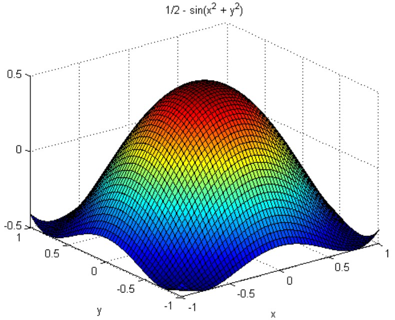
5.104. $f(x, y) = xe^{-2y}, \quad N(2; 0,01).$

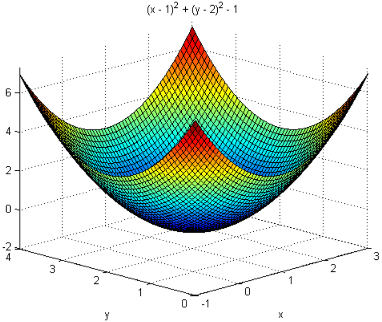
5.4. Cực trị hàm hai biến
5.4.1. Cực trị không có điều kiện

Định nghĩa cực trị địa phương: Xét hàm $z = f(x,y)$ với $(x,y) \in \Omega$.

$f(a,b)$ gọi là cực đại địa phương nếu tồn tại một lân cận hình tròn tâm (a,b) trong Ω sao cho $f(a,b) \geq f(x,y)$.

$f(a,b)$ gọi la cực tiểu địa phương nếu tồn tại một lân cận hình tròn tâm (a,b) trong Ω sao cho $f(a,b) \leq f(x,y)$.





5.4.1. Cực trị không có điều kiện

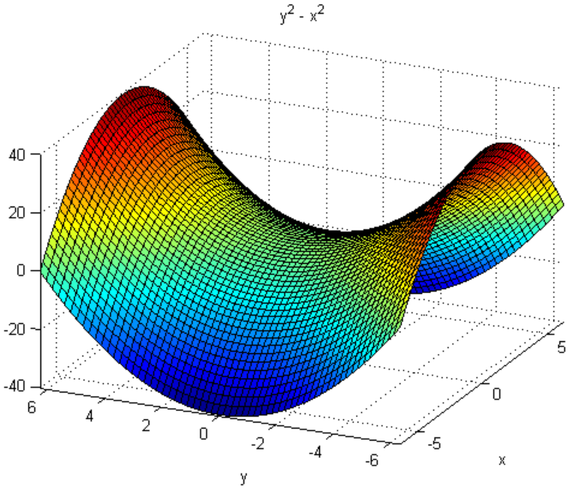
Điểm dừng: là những điểm mà tại đó các đạo hàm riêng cấp 1 bằng 0. Điểm dừng có thể là điểm cực trị (không phải mọi điểm dừng đều là điểm cực trị).

Định lý "Điều kiện đủ của cực trị": Xét hàm $z = f(x, y)$ thỏa mãn
1) Hàm $f(x, y)$ khả vi hai lần,
2) Điểm $P(a, b)$ là điểm dừng.
3) Các đạo hàm cấp 2 tồn tại trong lân cận của $P(a, b)$.

Đặt: $A = f''_{xx}(a, b), B = f''_{xy}(a, b), C = f''_{yy}(a, b)$ và $D = AC - B^2$.

Nếu $D > 0$ và $A < 0$ thì $f(a, b)$ là cực đại địa phương.
Nếu $D > 0$ và $A > 0$ thì $f(a, b)$ là cực tiểu địa phương.
Nếu $D < 0$ thì $P(a, b)$ là điểm yên ngựa.
Nếu $D = 0$ thì không kết luận được gì.

Ví dụ về điểm yên ngựa



5.4.1. Cực trị không có điều kiện

Ví dụ 5.21. Tìm các điểm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

Giải:

(Bước 1: Tìm các điểm dừng)

Xét các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x.$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 3y^2 - 6x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x^2, \\ 2x = y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = x^4, \\ 2y = x^2. \end{cases}$$

có hai nghiệm

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hàm số có hai điểm dừng là $P_1(0; 0)$ và $P_2(2; 2)$.

(Bước 2: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2)

Xét các đạo hàm riêng cấp 2 tại điểm $P_1(0;0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) = -6,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0) = 0.$$

(Bước 3: Xét dấu D và A. Kết luận)

Vậy $D = AC - B^2 = -36 < 0$.

Kết luận $P_1(0;0)$ là điểm yên ngựa.

5.4.1. Cực trị không có điều kiện

Xét các đạo hàm riêng cấp 2 tại điểm $P_2(2;2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2;2) = 12,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2;2) = -6,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2;2) = 12.$$

Vậy $D = AC - B^2 = 144 - 36 > 0$ và $A = 12 > 0$.
Kết luận $P_2(2;2)$ là điểm cực tiểu địa phương.

Vậy hàm số $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$ có 1 điểm cực tiểu là $P_2(2;2)$ với $f(P_2) = -8$.

5.4.1. Cực trị không có điều kiện

Bài tập: Tìm cực trị các hàm số sau đây.

5.105. $z = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y$.

5.106. $z = x^3 - 6x^2 - 3y^2$.

5.107. $z = (x-1)^2 + 2y^3 - 3y^2$.

5.108. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

Bài tập: Tìm cực trị các hàm số sau đây.

5.109. $z = x^2 - e^{y^2}$.

5.110. $z = (y-2)lnxy$.

5.111. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.

5.112. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Phương pháp xét dấu vi phân cấp hai.

Bước 1: Tìm các điểm dừng $P(a, b)$.

Bước 2: Tìm vi phân cấp hai $d^2z(P)$.

Bước 3: Xét dấu $d^2z(P)$ và kết luận.
Nếu $d^2z(P) < 0$ thì P là điểm cực đại.
Nếu $d^2z(P) > 0$ thì P là điểm cực tiểu.
Nếu $d^2z(P) = 0$ thì không kết luận được.

Lưu ý: Ta luôn có dx và dy không đồng thời bằng 0,
hay $dx^2 + dy^2 > 0$.

Ví dụ 5.22. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.
Chứng minh $P(2, 2)$ là điểm cực tiểu của f.
Giải:
(Bước 1: Kiểm tra $P(2; 2)$ có phải điểm dừng hay không?)
Ta có $f'_x(x, y) = 3x^2 - 6y = 0 \Rightarrow f'_x(2; 2) = 0$
và $f'_y(x, y) = 3y^2 - 6x = 0 \Rightarrow f'_y(2; 2) = 0$.
Vậy $P(2; 2)$ là điểm dừng của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(Bước 2: Tìm vi phân cấp 2)
Ta có $f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -6, \quad f''_{yy} = 6y$.
$\Rightarrow d^2z = 6.2dx^2 + 2(-6)dxdy + 6.2dy^2 = 12(dx^2 - dxdy + dy^2)$.

(Bước 3: Xét dấu vi phân cấp 2)
Dễ thấy $d^2z = 12\Big((dx - \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{3}{4}dy^2\Big) > 0$.
Kết luận $P(2; 2)$ là điểm cực tiểu địa phương.

Bài tập: Tìm cực trị các hàm số sau đây.

5.113. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

5.114. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y$.

5.115. $z = 9x^2y - 2x^2 - 4y^2$.

5.116. $z = 2x^3 + y^3 - 6x - 3y$.

Bài tập: Tìm cực trị các hàm số sau đây.

5.117. $z = x + y - e^x y$.

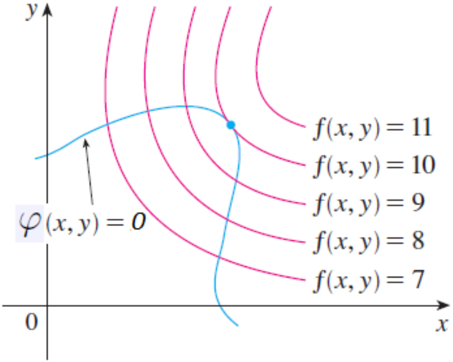
5.118. $z = e^{4y - x^2 - y^2}$.

5.119. $z = \sin x \cos y$.

5.120. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

5.4.2. Cực trị có điều kiện

Bài toán: Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.



Hàm $f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ tiếp xúc

$$\Leftrightarrow \nabla f = \lambda \nabla \varphi.$$

Bài toán tương đương với tìm cực trị của hàm $n+1$ biến

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \tag{62}$$

trong đó λ là một biến (mới) chưa xác định, gọi là nhân tử Lagrange.

5.4.2. Cực trị có điều kiện

Điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ ba phương trình

$$\begin{cases} L'_x(x,y;\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0, \\ L'_y(x,y;\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0, \\ L'_\lambda(x,y;\lambda) = \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Xét vi phân cấp 2 của hàm Lagrange

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2,$$

trong đó dx, dy thỏa ràng buộc $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$ (và $dx^2 + dy^2 > 0$) .

Tại điểm dừng $P(a,b)$ và nhân tử λ,
 Nếu $d^2L < 0$ thì hàm $f(x,y)$ đạt cực đại (có điều kiện),
 nếu $d^2L > 0$ thì hàm $f(x,y)$ đạt cực tiểu (có điều kiện).

Ví dụ 5.23. Tìm cực tiểu của hàm $f(x,y) = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = x + y - 10 = 0$.

Giải:

(Bước 1: Xác định hàm Lagrange)

Tìm cực tiểu của hàm $f(x,y)$ thỏa điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.

Đặt $L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 10)$.

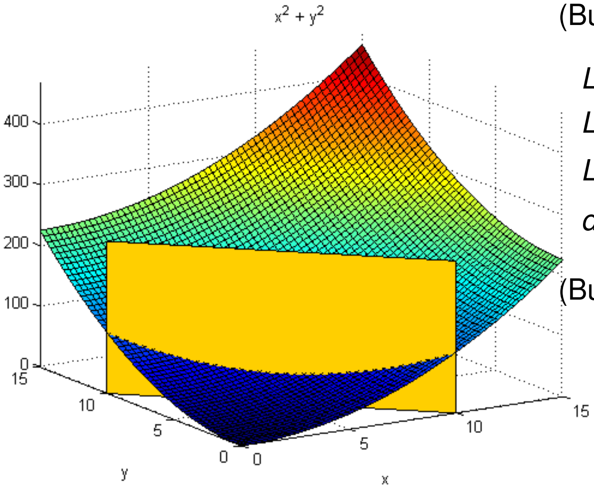
(Bước 2: Tìm các điểm dừng)

Giải hệ 3 phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x,y) = x + y - 10 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda/2, \\ y = -\lambda/2, \\ \lambda = -10. \end{cases}$$

Vậy điểm dừng là $P(5,5)$ với $\lambda = -10$.

5.4.2. Cực trị có điều kiện



(Bước 3: Tìm biểu thức d^2L)

$$L''_{xx}(5;5;-10) = 2,$$
$$L''_{yy}(5;5;-10) = 2,$$
$$L''_{xy}(5;5;-10) = 0,$$
$$d^2L(5;5;-10) = 2(dx^2 + dy^2)$$

(Bước 4: Xét dấu d^2L)

Dễ thấy $d^2L(5;5;-10) > 0$.

Kết luận: hàm số đạt cực tiểu tại $P(5,5)$ với $f(P) = 50$.

5.4.2. Cực trị có điều kiện

Bài tập: Tìm cực trị của các hàm số với các điều kiện sau

5.121. $z = 6 - 4x - 3y$ với $x^2 + y^2 = 1$.

5.122. $z = xy$ với $x + y = 1$.

5.123. $z = x + 2y$ với $x^2 + 2y = 2$.

5.124. $z = x^2 + y^2$ với $xy = 1$.

Bài tập: Tìm cực trị của các hàm số với các điều kiện sau

5.125. $z = 2x^2 + y^2 - 2x + 5$ với $x^2 + y^2 = 1$.

5.126. $z = 2x + 8y$ với $x^{1/2}y^{1/4} = 8$.

5.127. $z = 3x + 2y - 5$ với $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

5.128. $z = x^2y$ với $x^2 + 2y^2 = 6$.

5.4.2. Cực trị có điều kiện

Phương pháp khử biến số: Sử dụng điều kiện ràng buộc để khử biến số và bài toán cực trị có điều kiện được đưa về bài toán cực trị địa phương.

Ví dụ: Tìm cực tiểu của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện $\varphi(x, y) = x + y - 10 = 0$.

Giải:

Từ điều kiện ràng buộc ta có $y = 10 - x$. Thế vào hàm $f(x, y)$ ta được hàm 1 biến:

$$f(x, y(x)) = g(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Tại $x = 5$ hàm $g(x)$ có cực tiểu $g_{min} = 50$ và $y = 10 - 5 = 5$.
Vậy tại $x = 5, y = 5$ hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu $f_{min} = g_{min} = 50$.

Bài tập: Tìm cực trị của các hàm số với các điều kiện sau

5.129. $z = 6 - 4x - 3y$ với $x^2 + y^2 = 1$.

5.130. $z = xy$ với $x + y = 1$.

5.131. $z = x + 2y$ với $x^2 + 2y = 2$.

5.132. $z = x^2 + y^2$ với $xy = 1$.

Bài tập: Tìm cực trị của các hàm số với các điều kiện sau

5.133. $z = 2x^2 + y^2 - 2x + 5$ với $x^2 + y^2 = 1$.

5.134. $z = 2x + 8y$ với $x^{1/2}y^{1/4} = 8$.

5.135. $z = 3x + 2y - 5$ với $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.

5.136. $z = x^2y$ với $x^2 + 2y^2 = 6$.

5.4.3. GTLN,GTNN của hàm 2 biến trong miền đóng

Các bước cơ bản tìm GTLN và GTNN của hàm $z = f(x, y)$ trong miền đóng:

Bước 1: Tìm các điểm dừng nằm trong miền này và tính giá trị của hàm tại các điểm dừng.

Bước 2: Tìm các điểm dừng của hàm đang xét với điều kiện ràng buộc là phương trình đường biên.

Bước 3: Chọn giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong tất cả các giá trị đã tìm được.

Ví dụ 5.24. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm $z = x^2 + y^2$ trong hình tròn $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$

Giải:

(Bước 1: Tìm các điểm dừng và tính giá trị của f)

Xét các đạo hàm riêng của hàm $z = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Vậy hàm số có 1 điểm dừng là $P(0, 0)$ (thỏa điều kiện) với $f(0, 0) = 0$.

(Bước 2: Tìm điểm dừng có điều kiện)

Lập hàm Lagrange

$$L = x^2 + y^2 + \lambda[(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9].$$

5.4.3. GTLN,GTNN của hàm 2 biến trong miền đóng

Tìm điểm dừng của hàm Lagrange:

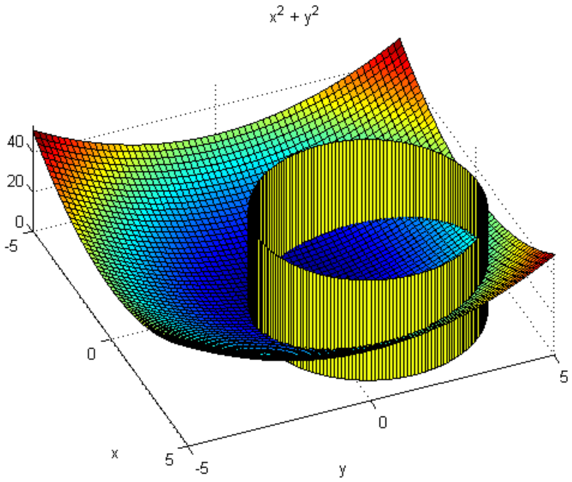
$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ L'_y = 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ L'_\lambda = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Hệ có 2 nghiệm: $P_1(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ và $P_2(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Ta tính được $f(P_1) = 25$ và $f(P_2) = 1$.

(Bước 3: Kết luận)

Giá trị lớn nhất $f_{max} = 25$ tại $P_1(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$,
Giá trị nhỏ nhất: $f_{min} = 0$ tại $P(0, 0)$.

5.4.3. GTLN,GTNN của hàm 2 biến trong miền đóng



Bài tập: Tìm GTLN và GTNL của hàm với các ràng buộc

5.137. $z = x + y$ với $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.138. $z = 6 - 6x - 8y$ với $x^2 + y^2 \leq 4$.

5.139. $z = 1 - x^2 - y^2$ trong miền $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4$.

5.140. $z = xy$ trong miền $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$.

Bài tập: Tìm GTLN và GTNN của hàm 2 biến trong miền đóng

5.141. $z = -3xy + x + y^2$ trong hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 1, x = 2$, $y = 1$ và $y = 3$.

5.142. $z = sinxsiny$ trong hình vuông $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$.

5.143. $z = x^2 - y^2$ trong hình tam giác giới hạn bởi $x = 2$, $y = 2$ và $x + y = 0$.

5.144. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ trong hình tam giác giới hạn bởi $x = 1$, $y = 1$ và $x + y = 1$.