Практика 8. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами. Интегралы от неограниченных функций.

Несобственные интегралы*:

Интегралы с бесконечными пределами	**Интегралы от неограниченных функций**
$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\ (\varepsilon>0)$
$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx\ (\varepsilon>0)$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx.$	$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\ (\varepsilon>0)$
Если существует конечный предел, то интеграл называется *сходящимся*, если предел не существует или равен бесконечности, интеграл называется *расходящимся*.	

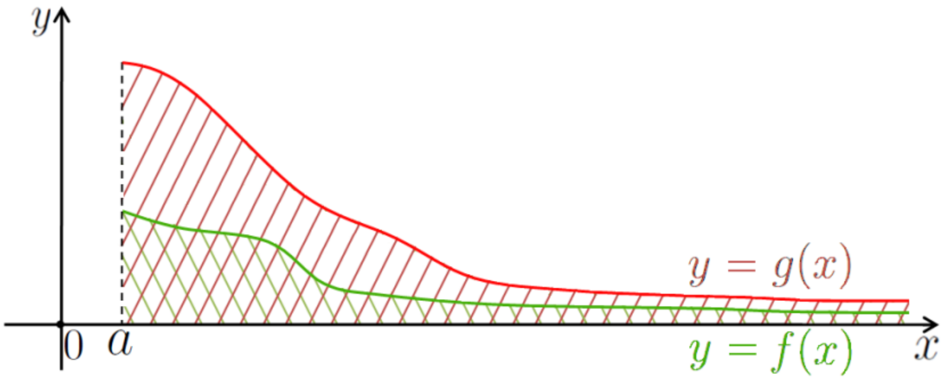
*Нужно дополнить условия

Признак сравнения

Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \geqslant a$. Тогда:

1) Из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

2) Из расходимости $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.



Предельный признак сравнения

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = K$ где $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Тогда:

1. При $0 \le K < \infty$ из сходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

2. Если $0 < K \le \infty$ из расходимости $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

3. При $0 < K < \infty$ интегралы либо оба сходятся либо оба расходятся, то есть ведут себя одинаково.

Признак сравнения

Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in [a,\ b]$. Тогда:

1) Из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2) Из расходимости $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Предельный признак сравнения

Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ где $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Тогда:

1. При $0 \leq K < \infty$ из сходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ вытекает сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2. При $0 < K \leq \infty$ из расходимости $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. При $0 < K < \infty$ интегралы либо оба сходятся либо оба расходятся, то есть ведут себя одинаково.

Теорема о сравнении с интегралом от эквивалентной бесконечно малой

Пусть при $x \to \infty$ функция $f(x)$ есть бесконечно малая, такая, что: $f(x) \sim \frac{C}{x^\lambda}$, где $\lambda > 0$, $C > 0$. Тогда $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda > 1$ и расходится, если $\lambda \leqslant 1$.

Теорема о сравнении с интегралом от эквивалентной бесконечно большой

Пусть при $x \to b-0$ функция $f(x)$ есть бесконечно большая, такая, что: $f(x) \sim \frac{C}{(b-x)^\lambda}$, где $C > 0$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.

Задания

Исходя из определения несобственных интегралов, установить их сходимость или расходимость.

1. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **2.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$. **3.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$. **4.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

5. Исследовать сходимость интеграла: а) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$; **б)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$; **в)** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{3+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$.

6. Исследовать сходимость интеграла: а) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}\ (a<b)$; **б)** $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 xdx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.