Дисциплина

Теория вероятностей

Раздел 1

Теория вероятностей

Лекция 1
Вероятностное пространство

1. Случайные события. Сигма-алгебра событий.
2. Понятие вероятностной меры случайного события.
3. Понятие вероятностного пространства.
4. Свойства вероятностей.
5. Условная вероятность.

Литература

1. Теория вероятностей: Учеб. для вузов./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во «Юрайт», 2020. https://urait.ru/bcode/449646
3. Горлач Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Изд-во «Лань», 2013. http://e.lanbook.com/book/4864

1. Случайные события. Сигма-алгебра событий

Случайный эксперимент:

- *непредсказуемость результата с абсолютной точностью,*
- *воспроизводимость (массовость),*
- *устойчивость относительных частот.*

Эксперимент: бросание монеты; результат: выпадение Г.

	Число бросаний n^*	Число выпадений Г m^*	Относительная частота Г
Ж. Бюффон	4040	2049	$\frac{2049}{4040} \approx 0{,}507$
К. Пирсон	24000	12012	$\frac{12012}{24000} \approx 0{,}5005$
В.И. Романовский	80640	39699	$\frac{39699}{80640} \approx 0{,}4923$

Относительная частота выпадения Г

$$\frac{m^*}{n^*} \approx 0{,}5$$

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучают математические модели случайных экспериментов.

Андрей Николаевич
Колмогоров
1903 – 1987

Определение 1

Каждый результат случайного эксперимента называется элементарным исходом (элементарным событием).

Обозначение: ω

Определение 2

Множество всех взаимоисключающих исходов случайного эксперимента называется пространством элементарных событий (ПЭС).

Обозначение: Ω

Множество исходов образует ПЭС, если:

- в результате эксперимента один из исходов обязательно происходит
- появление одного из исходов исключает появление всех остальных
- в данном эксперименте каждый исход неделим

Определение 3

Случайным событием называется произвольное подмножество пространства элементарных исходов.

Обозначение: $A, B, C, \ldots$

Элементарные исходы, которые являются элементами рассматриваемого случайного события, называются исходами, *благоприятствующими данному событию*.

Достоверное событие представляет собой совокупность всех элементарных исходов.

Обозначение: Ω

Невозможным событием называется пустое множество элементарных исходов.

Обозначение: $\varnothing$

Событие A содержится в событии B, если все элементарные события A являются элементарными событиями B.

Обозначение: $A \subset B$

Определение 4

Объединением (суммой) двух событий A и B называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих либо A, либо B.

Обозначение: $A \cup B$ или $A+B$

Событие

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A_n, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Определение 5

Пересечением (произведением) двух событий A и B называется событие, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат как A, так и B.

Обозначение: $A \cap B$ или $A \cdot B$

Событие

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих всем событиям A_n, где $n \in \boldsymbol{N}$.

Определение 6

Разностью двух событий A и B называется событие, состоящее из тех элементарных исходов, которые принадлежат A, но не принадлежат B.

Обозначение: $A \backslash B$ или $A - B$

Определение 7

Дополнением (противоположным событием) события A называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, которые принадлежат ПЭС, но не принадлежат A.

Обозначение: $\overline{A}$

СР Основные свойства операций над событиями

Определение 8

События A и B называются несовместными, если нет элементарных исходов, которые принадлежат как A, так и B, т.е.

$$A \cdot B = \varnothing$$

Определение 9

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно несовместными, если любые два из них несовместны, т.е.

$$A_i \cdot A_k = \varnothing, \quad \text{где } i \neq k.$$

Определение 10

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются несовместными в совокупности, если

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \varnothing$$

Определение 11

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, если их сумма образует достоверное событие, т.е.

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$$

Обозначение:
Σ – булеан множества Ω.

Ω – конечно и $|\Omega|=n \Rightarrow |\Sigma|=2^n$

Пусть $A, B \in \Sigma$

Свойства операций на Ω

- $A+B \in \Sigma$
- $A \cdot B \in \Sigma$
- $\overline{A} \in \Sigma$

Вывод: $<\Sigma, +, \cdot, \overline{} >$ – *алгебра*

Определение 3 допустимо, если Ω – *конечное* или *счетное* множество.

Если Ω – *несчетно*, то событиями называют только те подмножества из Ω, которые принадлежат некоторому классу $\boldsymbol{B}$.

Определение 12

Непустая система подмножеств $\boldsymbol{B}$ некоторого множества J, удовлетворяющая условиям:

1. $A \in \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \boldsymbol{B}$
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \boldsymbol{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \in \boldsymbol{B}$
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \boldsymbol{B} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots \in \boldsymbol{B}$

называется сигма-алгеброй (σ-алгеброй).

Замечание:

поскольку $J = A \cup \overline{A}$ и $\varnothing = \overline{J}$, то $J \in \boldsymbol{B}$ и $\varnothing \in \boldsymbol{B}$

Рассмотрим ПЭС Ω.

Событиями называются элементы некоторой σ-алгебры $\boldsymbol{B}$, заданной на Ω.

σ-алгебра $\boldsymbol{B}$ называется σ-алгеброй событий.

Любая σ-алгебра событий включает достоверное событие Ω и невозможное событие $\varnothing$.

Множество Σ – σ-*алгебра событий*.

Пример

Эксперимент: бросание точки на числовую прямую $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$.

ПЭС $\Omega = \boldsymbol{R}$.

Подмножества Ω: $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b).

Полагают, что σ-алгебра $\boldsymbol{B}$ содержит все эти интервалы.

Случайное событие $A = [a, b]$ – попадание точки на отрезок $[a, b]$.

2. Понятие вероятностной меры случайного события

Вероятность есть численная мера степени объективной возможности появления случайного события.

Обозначение: P или p

Такое определение вероятности в современной математике вводится на основании аксиом.

Классическое определение вероятности (классическая схема)

Пусть ПЭС $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ – конечно.

Определение 13

Случайные события называются равновозможными, если ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие.

- Вероятностью $p_i(\omega_i)$ каждого элементарного исхода ω_i считают число $\dfrac{1}{n}$,
- вероятность события A, состоящего из m элементарных исходов ПЭС, определяют так:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \qquad (1)$$

– классическое определение вероятности

где $n = |\Omega|$ – общее число исходов случайного эксперимента,

$m = |A|$ – число исходов, благоприятствующих событию A

Урновые схемы

Пусть есть ящик, в котором N занумерованных шаров: 1,2,…, N

Эксперимент: выбор k шаров.

Возникает четыре схемы выбора:

1. *выбор без возвращения с учетом порядка*, тогда общее число исходов $n = \mathrm{A}_N^k$ (число размещений из N по k);

2. *выбор без возвращения и без учета порядка*, тогда общее число исходов $n = C_N^k$ (число сочетаний из N по k);

3. *выбор с возвращением и с учетом порядка*, тогда общее число исходов $n = \overline{A}_N^k$ (число размещений с повторениями из N по k);

4. *выбор с возвращением и без учета порядка*, тогда общее число исходов $n = \overline{C}_N^k$ (число сочетаний с повторениями из N по k).

Свойства вероятности

1. $\forall A \in \Sigma \quad P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A, B \in \Sigma$ и $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (геометрическая схема)

Пусть ПЭС Ω – бесконечное множество элементарных исходов, $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$:

- при $n=1$ в $\boldsymbol{R}$ рассматриваем подмножества, которые имеют длину;
- при $n=2$ в $\boldsymbol{R}^2$ – подмножества, которые имеют площадь;
- при $n=3$ в $\boldsymbol{R}^3$ $(\boldsymbol{R}^n)$ – подмножества, которые имеют объем (обобщенный объем).

Под *мерой множества* $A \subset \Omega$ понимают его длину, площадь,…, обобщенный объем.

Обозначение: $\lambda(A)$

Пусть:

- ПЭС Ω имеет конечную меру, т.е. $\lambda(\Omega) < +\infty$
- вероятность попадания случайно брошенной точки в любое подмножество Ω не зависит от его расположения и формы.

Говорят, что *случайное событие* A *наступило*, если случайно выбранная точка принадлежит подмножеству $A \subset \Omega$.

Определение 14

Геометрической вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению меры множества A к мере множества Ω ,т.е.

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} \qquad (2)$$

Свойства вероятности

1. $\forall A \in \boldsymbol{B} \;\; P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A, B \in \boldsymbol{B}$ и $A \cdot B = \varnothing \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

Замечание:

в $\boldsymbol{R}^n$ существуют подмножества, не имеющие меры. Поэтому в качестве событий A рассматривают только $A \in \boldsymbol{B}$.

3. Понятие вероятностного пространства

Аксиоматическое определение вероятности (А.Н. Колмогорова)

Рассмотрим определение вероятности события $\forall$ ПЭС, основанное на свойствах вероятностей всех предыдущих определений.

Пусть

Ω – ПЭС, $\boldsymbol{B}$ – σ-алгебра событий, $\Omega \in \boldsymbol{B}$, $A \subset \Omega$.

Определение 15

Функция $P(\cdot)$: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{R}$ называется вероятностью или вероятностной мерой, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

аксиома 1: $P(A) \geq 0$

аксиома 2: $P(\Omega) = 1$

аксиома 3: для любого счетного множества попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ справедливо

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Значение $P(A)$ называют вероятностью события A.

Пример

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ – конечное множество.

$\forall \omega_i \to$ число $p_i \ge 0$ так, чтобы

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

где $p_i = p(\omega_i)$.

$\forall A \subset \Omega$ *вероятность* $P(A)$ равна

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Замечания:

- вероятности $p(\omega_i)$ можно задавать произвольно, лишь бы они были неотрицательными и в сумме составляли единицу,
- аналогично для случая, когда Ω – счетное множество.

Определение 16

Тройка $(\Omega, \boldsymbol{B}, P)$, где

Ω – пространство элементарных исходов,

$\boldsymbol{B}$ – σ-алгебра событий,

P – вероятностная мера, заданная на $\boldsymbol{B}$, называется вероятностным пространством.

(Ω, Σ, P) – простейшее вероятностное пространство.

4. Свойства вероятностей

Теорема 1

1. $P(\varnothing) = 0$

2. $\forall A \in \boldsymbol{B} \quad 0 \le P(A) \le 1$

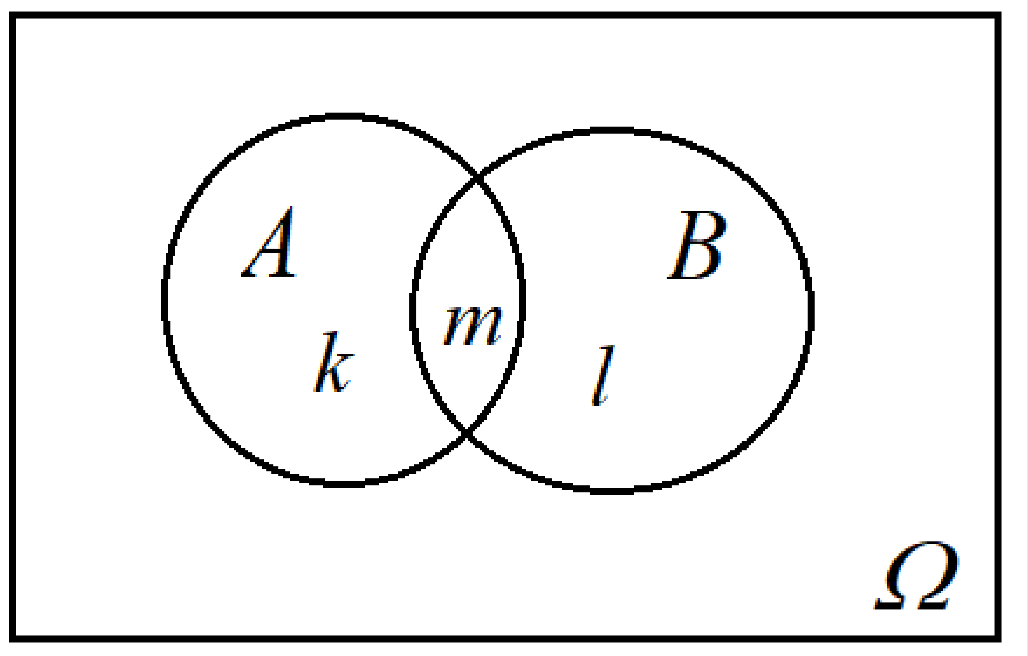
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. $A \subset B \;\Rightarrow P(A) \le P(B)$

Теорема 2 (сложения вероятностей для 2 событий)

Вероятность суммы двух случайных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения, т.е.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)} \qquad (3)$$



$$P(A+B) = \frac{k+l-m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Следствие 1

События A и B *несовместны* $\Rightarrow$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

СР

Следствие 2

$$C \subset D \;\Rightarrow\; P(D - C) = \,?$$

СР

Сформулируйте Теорему 2 для трех событий:

$$P(A+B+C) = ?$$

Теорема 3 (сложения вероятностей для n событий) *

Вероятность суммы любого конечного числа событий равна

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2)+\ldots+ P(A_n) -$$

$$-P(A_1\cdot A_2) - P(A_1\cdot A_3) -\ldots- P(A_{n-1}\cdot A_n) +$$

$$+ P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)+\ldots+ (-1)^{n+1} P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)$$

Следствие 3

Если события A_i, где $i=1,2,\ldots,n$ образуют полную группу несовместных событий, то вероятность их суммы равна 1:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$$

5. Условная вероятность

Пусть дано $(\Omega, \boldsymbol{B}, P)$.
В результате эксперимента осуществилось событие B.

Если при этом изменилась вероятность некоторого другого события A, то говорят, что событие A зависит от события B.

Пусть $P(B)\neq 0$.

Определение 17

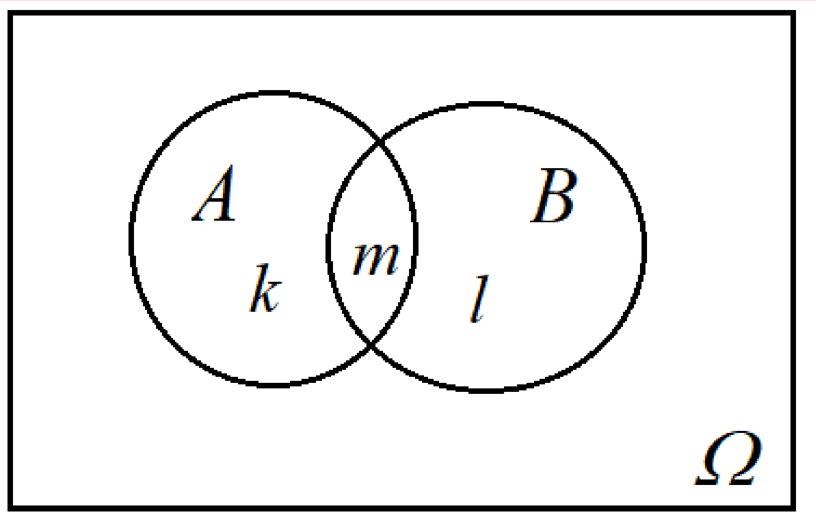
Вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется условной вероятностью события A.

Обозначение: $P(A/B)$

Пусть все исходы эксперимента *равновозможны*.

Тогда по классической схеме вычисления вероятностей:

$$P(A/B) = \frac{m}{l} = \frac{m \cdot n}{l \cdot n} = \frac{m}{n} : \frac{l}{n} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$



Пусть $P(B)\neq 0$ и $P(A)\neq 0$.

Теорема 4 (умножения вероятностей)

Вероятность произведения двух случайных событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место быть, т.е.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B)} \qquad (4)$$

или $$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)}$$

Определение 18

Событие A называется независимым от события B, если осуществление события B не изменяет вероятности появления события A.

Следствие 4

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Лемма (о взаимной независимости событий)

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Определение 19

События A и B называются **независимыми**, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Определение 20

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **попарно независимыми**, если

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

$\forall\, i, j$ где $1 \le i < j \le n$.

Определение 21

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого $1 \le k \le n$ и для любого набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ выполняется равенство:

$$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Замечание:

из попарной независимости событий *не следует* их независимость в совокупности.

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности,

A – осуществление *хотя бы одного* из этих событий.

Обозначения:

$p_i = P(A_i)$ – вероятность A_i,

$q_i = 1 - p_i$ – вероятность $\overline{A_i}$ (неосуществления A_i)

Теорема 5

Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вычисляется по формуле:

$$\boxed{P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n} \qquad (5)$$

Следствие:

если все A_i равновероятны с вероятностью p, то

$$P(A) = 1 - q^n$$

где n – число экспериментов.

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$:

1. образуют полную группу,
2. попарно несовместны.

Событие A может осуществиться лишь вместе с одним из событий H_i, где $i = 1 \div n$.

События, удовлетворяющие условиям 1, 2, называются гипотезами.

Пусть известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2),\ldots, P(H_n)$, причем $P(H_i)\neq 0$, $i=1\div n$.

Пусть событие A, может осуществиться лишь вместе с одним из событий H_i, $i=1\div n$.

Пусть известны $P(A/H_1), P(A/H_2),\ldots, P(A/H_n)$ – условные вероятности события A при условии осуществления каждой из гипотез.

Теорема 6

Вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) +$$
$$+ P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).} \qquad (6)$$

– формула полной вероятности.

$P(H_i)$ – *априорная* вероятность гипотезы H_i.

Теорема 7 (гипотез)

Для любого $i=1\div n$ условную вероятность события H_i при условии, что событие A произошло, вычисляют по формуле:

$$\boxed{P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)}} \qquad (7)$$

– формула Байеса.

$P(H_i/A)$ – *апостериорная* вероятность гипотезы H_i.

7. Схема Бернулли

Несколько экспериментов называются независимыми, если любые события, возникающие в разных экспериментах, независимы в совокупности.

Схемой Бернулли (*повторными независимыми испытаниями*, *биномиальной схемой*) называют последовательность экспериментов, удовлетворяющих следующим условиям:

- эксперименты независимы;
- в каждом эксперименте возможны только два исхода – появилось или не появилось случайное событие A (*успех*);
- вероятность A в каждом эксперименте одна и та же и равна $p \in [0, 1]$.

Задача:

найти вероятность события – в n экспериментах событие A появится ровно m раз.

Обозначим:

q – вероятность непоявления A (*неудачи*) в каждом эксперименте, тогда

$$q = 1 - p.$$

Имеем:

n экспериментов

$0 \le m \le n$ раз появляется событие A

$$\omega = \{\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m}, \ldots, \underbrace{\overline{A}, \overline{A}, \ldots, \overline{A}}_{n-m}\}$$ – один из

благоприятствующих исходов, причем:

- все исходы равновероятны
- события, соответствующие этим исходам, несовместны
- число таких исходов равно C_n^m

Вывод: см. Теорему

Теорема 8

Вероятность того, что в n экспериментах по схеме Бернулли событие A появится ровно m раз, вычисляется по формуле:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}} \qquad (8)$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $m = 0 \div n$ – число сочетаний из n по m.

(8) – формула Бернулли (биномиальная формула).

Замечание:

$P_n(0) + P_n(1)+\ldots+P_n(m)=$
$=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n =1$, т.е.

сумма вероятностей всех исходов равна 1:

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\quad)=1$$

Вывод: получаем вероятностное пространство $(\Omega,\ \Sigma,\ P_n(m))$