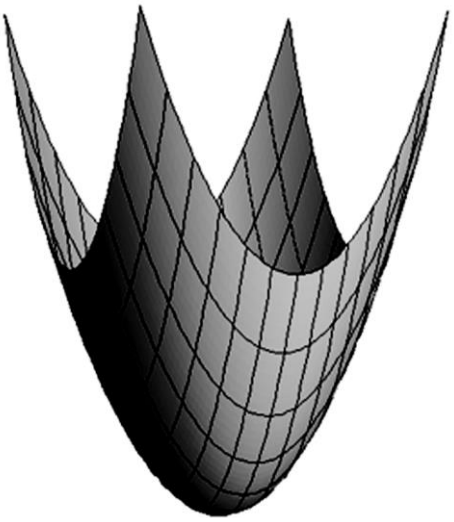
BÀI 5: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN



Các kiến thức cần có

Các bạn cần có kiến thức về phép tính đạo hàm vi phân (bài 2), sơ lược về hàm nhiều biến (bài 4) .

Mục tiêu

- Nắm được khái niệm phương trình vi phân.
- Làm được bài tập về phương trình vi phân.

Thời lượng

Bài này được trình bày trong 4 tiết lý thuyết và 3 tiết bài tập.

Nội dung

Bài này sẽ giới thiệu với các bạn các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân nói chung và một số vấn đề cơ bản như biểu diễn nghiệm, phương pháp giải một số loại phương trình vi phân cấp một, cấp hai đặc biệt.

Hướng dẫn học

Bạn cần đọc kỹ và áp dụng phương pháp giải của các ví dụ để làm được các dạng bài tập.

5.1. Các khái niệm cơ bản

5.1.1. Các khái niệm chung về phương trình vi phân

Trong thực tế, khi nghiên cứu sự phụ thuộc lẫn nhau giữa các đối tượng, nhiều khi chúng ta không thể thiết lập trực tiếp mối quan hệ phụ thuộc ở dạng hàm số giữa các đối tượng đó, mà chỉ có thể thiết lập mối liên hệ giữa các đối tượng mà ta cần tìm mối quan hệ hàm số, cùng với đạo hàm hoặc tích phân của hàm số chưa biết ấy. Trong nhiều mô hình, hệ thức liên hệ được viết dưới dạng phương trình có chứa đạo hàm, đó là phương trình vi phân.

5.1.1.1. Định nghĩa phương trình vi phân

Định nghĩa:

Phương trình vi phân là phương trình xuất hiện biến số, hàm số cần tìm và các đạo hàm (vi phân) các cấp của hàm số đó.

Trong giáo trình này, chúng ta xét phương trình vi phân trong đó hàm số cần tìm là hàm số của một biến số. Loại phương trình này được gọi là phương trình vi phân thường, mà ta hay gọi tắt là phương trình vi phân.

Ví dụ 1:

Sau đây là một số phương trình vi phân thường:

a) $y' = x^2 + xy^2 + y$ xuất hiện biến số x, hàm số cần tìm $y(x)$ và đạo hàm $y'(x)$.

a) $xdy - (y + x^2)dx = 0$ xuất hiện biến số x, hàm số y và vi phân dx, dy

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = -axy$ xuất hiện biến số x, hàm số y, vi phân cấp hai $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5.1.1.2. Cấp của phương trình vi phân

Định nghĩa:

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm số cần tìm xuất hiện trong phương trình đó.

Ví dụ 2:

c) $y' = x^2 + xy^2 + y$ là phương trình cấp một do phương trình có chứa đạo hàm cấp một y'.

b) $xdy - (y + x^2)dx = 0$ là phương trình cấp một do trong phương trình xuất hiện vi phân cấp một dy của hàm số cần tìm.

c) $\frac{d^2y}{dx^2} = -axy$ là phương trình cấp hai do vi phân cấp hai có mặt trong phương trình.

Định nghĩa:

Phương trình vi phân thường cấp n là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (5.1)$$

trong đó F là hàm số của n + 2 biến số.

5.1.1.3. Nghiệm của phương trình vi phân

Định nghĩa:

Nghiệm của phương trình vi phân (5.1) là một hàm số $\varphi(x)$ xác định trong một khoảng (a, b), sao cho khi thay $y = \varphi(x), y' = \varphi'(x), ..., y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ vào (5.1) ta được đồng nhất thức

$$F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0.$$

Giải một phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

5.1.2. Phương trình vi phân cấp một

Phương trình vi phân cấp một được cho dưới một trong các dạng sau đây

- Dạng tổng quát: $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$, $F(x, y, y') = 0$.
- Dạng đã giải ra đạo hàm: $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$.
- Dạng đối xứng: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Ta thấy rằng có thể dễ dàng chuyển đổi giữa hai dạng của phương trình vi phân: Dạng đối xứng và giải ra đạo hàm.

5.1.2.1. Nghiệm và tích phân của phương trình vi phân cấp một

Trong phần trước chúng ta đã biết hàm số $\varphi(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân cấp một nếu như đồng nhất thức $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ được nghiệm đúng. Tuy nhiên có những trường hợp ta không giải được ra cụ thể hàm số $y = \varphi(x)$, mà nghiệm của phương trình lại được tìm ra ở dạng:

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (5.2)$$

Trong trường hợp này, phương trình (5.2) được gọi là tích phân của phương trình vi phân.

Ví dụ 3:

- Phương trình $y' = y$ có nghiệm là $y = Ce^x$, trong đó C là hằng số. Ta dễ kiểm tra được $y' = Ce^x = y$.
- Phương trình $ydy + xdx = 0$ có tích phân là $x^2 + y^2 = C$, C là hằng số dương bất kỳ.

5.1.2.2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng. Tích phân tổng quát và tích phân riêng

Ta xét một phương trình đơn giản $y' = f(x)$, đây là phương trình vi phân cấp một cho ở dạng đã giải ra đạo hàm và vế phải khuyết y. Trong bài 3, ta biết nghiệm của phương trình này là $y = \int f(x)dx$, biểu thức nghiệm có mặt của hằng số C bất kỳ. Nghiệm của một phương trình vi phân cấp một cũng đưa về việc lấy tích phân bất định, do đó nghiệm ấy sẽ có mặt một hằng số C :

$$y = \varphi(x, C).$$

Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa:

Họ hàm số $y=\varphi(x,C)$ được gọi là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân cấp một nếu với một hằng số C, C thuộc khoảng I, thì hàm số $\varphi(x,C)$ tương ứng là một nghiệm của phương trình. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C một giá trị xác định được gọi là một nghiệm riêng của phương trình.

Định nghĩa:

Nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân viết dưới dạng hàm ẩn $\Phi(x,y,C)=0$ được gọi là tích phân tổng quát của phương trình đó. Mỗi tích phân ứng với giá trị xác định C được gọi là một tích phân riêng của phương trình.

Ví dụ 4:

a) Phương trình $y'=x$ có nghiệm tổng quát là $y=\frac{x^2}{2}+C$.

Nghiệm $y=\frac{x^2+1}{2}$ là một nghiệm riêng của phương trình ứng với $C=\frac{1}{2}$.

a) Phương trình $y^2dy+xdx=0$ có tích phân tổng quát là $\frac{y^3}{3}+\frac{x^2}{2}=C$.

Với $C=1$ ta có tích phân riêng $2y^3+3x^2=6$.

5.1.2.3. Bài toán Cauchy

Xét phương trình vi phân cấp một cho ở dạng:

$$\frac{dy}{dx}=y'=f(x,y) \tag{5.3}$$

Bài toán tìm nghiệm riêng của phương trình (5.3) thoả mãn điều kiện:

$$y(x_0)=y_0 \tag{5.4}$$

được gọi là bài toán Cauchy. Điều kiện (5.4) được gọi là điều kiện ban đầu.

Ta thừa nhận định lý sau đây về tính tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy.

Định lý:

Giả sử hàm số $f(x,y)$ xác định và liên tục trong một lân cận U của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và tồn tại một hằng số $K>0$ sao cho:

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|, \forall(x,y_1),(x,y_2)\in U.$$

Khi đó tồn tại một giá trị $\delta>0$ đủ nhỏ sao cho trong khoảng $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, tồn tại duy nhất nghiệm $y=\varphi(x)$ của phương trình (5.3) thoả mãn điều kiện ban đầu (5.4).

5.2. Một số phương trình vi phân cấp một cầu phương được

5.2.1. Phương trình phân ly biến số

Phương trình phân ly biến số có dạng:

$$f(x)dx=g(y)dy.$$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$\int f(x)dx=\int g(y)dy \Leftrightarrow F(x)=G(y)+C$$

trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $G(y)$ là một nguyên hàm của $g(y)$.

Các phương trình khuyết $y'=f(x)$ và $y'=f(y)$ là các phương trình phân ly biến số.

Ví dụ 5:

Giải các phương trình vi phân sau:

a) $(1+x)dy=(1-y)dx$.

Nhận xét:

$y=1$ và $x=-1$ là hai nghiệm của phương trình này.

Khi $y\neq 1, x\neq -1$, ta biến đổi tương đương

$$(1+x)dy=(1-y)dx \Leftrightarrow -\frac{dy}{y-1}=\frac{dx}{x+1}.$$

Lấy tích phân hai vế ta có:

$$-\ln|y-1|+\ln|C|=\ln|x+1| \Rightarrow (x+1)(y-1)=C.$$

Rõ ràng $x=-1, y=1$ là tích phân riêng ứng với $C=0$. Vậy tích phân tổng quát của phương trình ban đầu là $(x+1)(y-1)=C$.

b) $y'=\dfrac{\cos y-\sin y-\sqrt{2}}{\cos x-\sin x+\sqrt{2}}$ (*)

Nhận xét:

Nghiệm y của phương trình $\cos y-\sin y-\sqrt{2}=0$ là nghiệm của phương trình vi phân đang xét.

$$\cos y-\sin y-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow y+\frac{\pi}{4}=2k\pi \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

Vậy $y=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình (*).

Khi: $y\neq -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{dy}{\cos y-\sin y-\sqrt{2}}=\frac{dx}{\cos x-\sin x+\sqrt{2}} \Leftrightarrow -\frac{dy}{\sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $\operatorname{cotg}\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)+C$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $y=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ và tích phân tổng quát:

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

CHÚ Ý :

Phương trình dạng $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$ có thể đưa về phương trình phân ly biến số bằng cách đổi biến. Thật vậy, đặt $z = ax + by \Rightarrow z' = a + by'$, ta có phương trình vi phân đối với $x, z: \frac{z'-a}{b} = f(z) \Leftrightarrow z' = bf(z) + a$

5.2.2. Phương trình thuần nhất (phương trình đẳng cấp)

Phương trình thuần nhất là phương trình có dạng:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.5}$$

Đặt $y = ux$, trong đó $u(x)$ là hàm số của *x*. Ta có:

$$y' = xu' + u = f(u) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

- Nếu $f(u) \neq u$, ta có $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$, đây là phương trình phân ly biến số.
- Nếu $f(u) \equiv u$ thì phương trình (5.5) có dạng $y' = \frac{y}{x}$, nghiệm tổng quát của nó là $y = Cx$.
- Nếu $f(u) = u$ có nghiệm $u = u_0$ thì ta có $y = u_0x$ cũng là nghiệm của (5.5).

Ví dụ 6:

Giải phương trình vi phân

a) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

Đặt $y = xu \Rightarrow y' = xu' + u$. Thay vào phương trình ta được:

$$x(xu' + u) = x\sin u + xu \Leftrightarrow xu' = \sin u.$$

Ta thấy $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thoả mãn $xu' = \sin u$. Do đó $y = k\pi x$ là các nghiệm của phương trình ban đầu.

Nếu $\sin u \neq 0$, ta có:

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{y}{2x} = Cx.$$

b) $(x + 2y)dx - xdy = 0$ và $y(1) = -2$.

Đặt $y = xu \Rightarrow dy = xdu + udx$, thay vào phương trình ta được:

$$(x + 2xu)dx - x(udx + xdu) = 0 \Leftrightarrow x(1+u)dx = x^2du.$$

Ta thấy $u = -1$ không thoả mãn điều kiện ban đầu, nên đó không là nghiệm của phương trình. Ta được phương trình tương đương

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u+1} \Leftrightarrow \ln|x| + \ln|C| = \ln|u+1| \Rightarrow u+1 = Cx$$

$y(1) = -2 \Rightarrow u(1) = -2$, nên $C = -1$.

Vậy nghiệm của phương trình đang xét là: $y = -x^2 - x$.

CHÚ Ý:

Phương trình dạng:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right); (a_1b_2 \neq a_2b_1) \qquad (5.6)$$

có thể đưa về phương trình thuần nhất bằng cách đổi biến. Thật vậy, do $a_1b_2 \neq a_2b_1$ nên hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất (x_0, y_0). Sử dụng phép đổi biến $x = x_0 + u, y = y_0 + v$, ta có

$$dx = du, dy = dv$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = a_1u + b_1v + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = a_1u + b_1v$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = a_2u + b_2v + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = a_2u + b_2v$$

Phương trình (5.6) trở thành $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. Đây là phương trình vi phân thuần nhất đối với biến số u và hàm số $v = v(u)$

5.2.3. Phương trình tuyến tính

Phương trình tuyến tính cấp một có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số liên tục. Phương trình tuyến tính gọi là thuần nhất nếu $q(x) \equiv 0$, là không thuần nhất nếu $q(x) \neq 0$.

Để giải phương trình tuyến tính, ta chia làm ba bước:

- Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng:

  $$y' + p(x)y = 0.$$

  Đây là phương trình ở dạng phân ly biến số, ta giải ra $\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$.
- Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất:

  $$y' + p(x)y = q(x).$$

  Nghiệm này được tìm ở dạng $y^* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Ở đây, ta coi C là hàm số của x. Thay nghiệm y^* vào phương trình trên ta được:

  $$\left[C'(x) - p(x)C(x)\right]e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Suy ra: $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$ và $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

- Bước 3: Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính ban đầu là $y = \overline{y} + y^*$.

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Ví dụ 7:

Giải phương trình vi phân

a) $(x^2+1)y' + xy = -x$.

Giải phương trình thuần nhất tương ứng:

$$(x^2+1)y' + xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x}{x^2+1}dx \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|C| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Suy ra: $\overline{y} = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$.

Dễ thấy một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y^* = -1$, do đó nghiệm của phương trình đang xét là: $y = \overline{y} + y^* = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Nếu bài toán yêu cầu tìm nghiệm của phương trình thoả mãn $y(0) = 2$ thì ta tìm ra $C = 3$. Nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu như trên là:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

b) $y' = \dfrac{1}{x}(2y + xe^x - 2e^x)$.

Giải phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y' = \frac{2y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|.$$

Suy ra: $\overline{y} = Cx^2$.

Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y^* = C(x)x^2$.

Thay vào phương trình ta được $C'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$, suy ra:

$$C(x) = \int\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{x^3}e^x\right)dx = \frac{e^x}{x^2} + K.$$

Với: $K = 0$, $y^* = e^x$.

Vậy nghiệm của phương trình cần tìm là: $y = e^x + Cx^2$.

5.2.4. Phương trình Bernoulli

Phương trình Bernoulli có dạng:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^{\alpha} q(x)$$

trong đó α là số thực khác 0 và 1.

Nếu $\alpha > 0$ thì $y = 0$ là một nghiệm của phương trình Bernoulli.

Khi $y \neq 0$ chia hai vế cho y^{α}, ta được:

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \tag{5.7}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta có:

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Thay vào (5.7) ta thu được phương trình:

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là phương trình tuyến tính đối với hàm số $z(x)$.

Ví dụ 8:

Giải phương trình vi phân: $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Đây là phương trình Bernoulli với: $\alpha = 4$.

Ta thấy $y = 0$ là một nghiệm của phương trình này.

Khi $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^4, đặt $z = y^{-3}$, ta được phương trình

$$z' - \frac{3}{x}z = -3x^2.$$

- Giải phương trình tuyến tính thuần nhất: $z' - \frac{3}{x}z = 0 \Rightarrow z = Cx^3$.
- Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $z' - \frac{3}{x}z = -3x^2$ dưới dạng $z^* = C(x)x^3$. Thay vào phương trình ta được $C'(x) = -\frac{3}{x} \Rightarrow C(x) = -3\ln|x|$.
- Vậy nghiệm riêng: $z^* = -3x^3 \ln|x|$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $y = 0$ và $y = \left[x^3(C - 3\ln|x|)\right]^{-1/3}$.

5.2.5. Phương trình vi phân toàn phần

5.2.5.1. Phương trình vi phân toàn phần

Phương trình vi phân toàn phần là phương trình có dạng:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.8}$$

trong đó $M(x,y); N(x,y)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong một miền D và $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \forall (x,y) \in D$

Khi đó tồn tại hàm số $u(x,y)$ sao cho $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, tức là vế trái của phương trình (5.8) là một biểu thức vi phân toàn phần. Ta có thể tìm được hàm số $u(x,y)$ bởi một trong hai công thức sau đây:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dy + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + K$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dy + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + K$$

trong đó K là một hằng số.

Giải phương trình (5.8) ta cần lấy tích phân hai vế và thu được tích phân tổng quát:

$u(x,y) = C$.

Ví dụ 9:

Giải phương trình vi phân:

a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.

Vì: $\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x} = 1$ nên đây là một phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta tìm được:

$$u(x,y) = \int_0^x (x+1)dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

b) $\left[xy\cos(xy) + \sin(xy)\right]dx + x^2\cos(xy)dy = 0$

Vì: $\frac{\partial\left[xy\cos(xy)+\sin(xy)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[x^2\cos(xy)\right]}{\partial x} = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy)$

nên đây là phương trình vi phân toàn phần.

Chọn $x_0 = 1, y_0 = 0$ ta có:

$$u(x,y) = \int_0^y x^2\cos(xy)dy = x\sin(xy)\Big|_0^y = x\sin(xy).$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là: $x\sin(xy) = C$

5.2.5.2. Phương pháp thừa số tích phân

Trong nhiều trường hợp mặc dù phương trình vi phân:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

không phải là một phương trình vi phân toàn phần, nhưng ta có thể chọn hàm số $\mu(x,y)$ sao cho khi nhân $\mu(x,y)$ vào hai vế, ta thu được phương trình vi phân toàn phần:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \qquad (5.9)$$

Hàm số $\mu(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân. Từ điều kiện để vế trái của (5.9) là vi phân hoàn chỉnh ta có:

$$\frac{\partial[\mu M]}{\partial y}=\frac{\partial[\mu N]}{\partial x} \qquad (5.10)$$

Nói chung thừa số tích phân $\mu(x,y)$ không dễ tìm mà ta thường xét trường hợp đơn giản khi thừa số tích phân chỉ phụ thuộc vào một biến số: $\mu=\mu(x)$ hoặc $\mu=\mu(y)$.

Ví dụ 10:

Giải phương trình:

$$(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$$

bằng cách tìm thừa số tích phân $\mu=\mu(y)$.

Từ điều kiện (5.10) ta có:

$$\mu'(y)(2xy^2-3y^3)+\mu(y)(4xy-9y^2)=-3y^2\mu(y)$$

$$\Leftrightarrow y(2x-3y)\left[2\mu(y)+y\mu'(y)\right]=0.$$

Với điều kiện $y(2x-3y)\neq 0$, ta có:

$$2\mu(y)+y\mu'(y)=0\Rightarrow \mu(y)=\frac{C}{y^2}.$$

Chọn $C=1$ ta được thừa số tích phân $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$, phương trình đã cho tương đương:

$$(2x-3y)dx+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)dy=0.$$

Chọn $x_0=0, y_0=1$, ta có:

$$u(x,y)=\int_0^x(2x-3)dx+\int_1^y\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)dy=x^2-\frac{7}{y}-3xy+7.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x^2-\frac{7}{y}-3xy+7=C.$$

5.3. Phương trình vi phân cấp hai

5.3.1. Phương trình vi phân cấp hai

5.3.1.1. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Phương trình vi phân cấp hai có dạng tổng quát:

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad (5.11)$$

trong đó F là hàm số của 4 biến.

Thông thường việc giải phương trình dạng tổng quát rất phức tạp, nên người ta xét phương trình vi phân cấp hai ở dạng đã giải ra đạo hàm:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (5.11')$$

Việc giải phương trình cấp hai là tìm tất cả các hàm số $y = \varphi(x)$ sao cho khi thay vào (5.11) và (5.11') ta được các đồng nhất thức:

$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \equiv 0$ hoặc $\varphi''(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$.

Ví dụ 11:

Giải phương trình $y'' = 6x$.

Ta có:

$$(y')' = 6x \Leftrightarrow y' = \int 6x dx = 3x^2 + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = \int (3x^2 + C_1) dx = x^3 + C_1 x + C_2.$$

Ta thấy nghiệm của phương trình vi phân cấp hai nói trên phụ thuộc vào hai hằng số. Từ đây ta có định nghĩa:

Định nghĩa:

Ta gọi họ hàm số: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân cấp hai nếu khi gán cho mỗi ký hiệu C_1, C_2 một giá trị xác định thì ta được một nghiệm của phương trình đó. Mỗi nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát khi gán cho C_1, C_2 các giá trị xác định gọi là nghiệm riêng của phương trình.

Trong ví dụ 11, cho $C_1 = 1, C_2 = -1$, ta được một nghiệm riêng của phương trình là:

$$y = x^3 + x - 1.$$

5.3.1.2. Tích phân tổng quát và tích phân riêng

Tương tự như trường hợp phương trình vi phân cấp một, không phải lúc nào ta cũng có thể giải được tường minh nghiệm của một phương trình dưới dạng hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, mà chỉ có thể đưa về một phương trình hàm ẩn.

Định nghĩa: Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

được gọi là tích phân tổng quát của phương trình đó. Mỗi tích phân ứng với giá trị xác định của C_1, C_2 được gọi là một tích phân riêng của phương trình đó.

5.3.1.3. Bài toán Cauchy

Xét phương trình vi phân cấp hai: $y'' = f(x, y, y') = 0$

Bài toán Cauchy là bài toán tìm nghiệm của phương trình nói trên thoả mãn các điều kiện ban đầu:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0.$$

Ta thừa nhận định lý sau đây về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân cấp hai.

Định lý:

Giả sử hàm số $f(x,y,y')$ xác định và liên tục trong một lân cận U của điểm $M_0(x_0,y_0,y_0')$ và tồn tại các hằng số $K_1,K_2>0$ sao cho:

$|f(x,y_2,y')-f(x,y_1,y')|\le K_1|y_2-y_1|\forall(x,y_1,y'),(x,y_2,y')\in U$

$|f(x,y,y_2')-f(x,y,y_1')|\le K_1|y_2'-y_1'|\forall(x,y,y_1'),(x,y,y_2')\in U$.

Khi đó tồn tại $\delta>0$ đủ nhỏ sao cho tồn tại duy nhất nghiệm $y=\varphi(x)$ xác định trong khoảng $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ thoả mãn điều kiện ban đầu.

5.3.1.4. Một số phương trình cấp hai hạ cấp được

Sau đây ta xét một số trường hợp phương trình vi phân cấp hai có thể đưa được về phương trình cấp một.

Phương trình khuyết: y,y': $y''=f(x)$.

Ta lấy nguyên hàm hai vế hai lần:

$$y'=\int f(x)dx=g(x)+C_1$$

$$y=\int(g(x)+C_1)dx=G(x)+C_1x+C_2.$$

Ví dụ 12:

Giải phương trình $y''=x^2$.

$$y'=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C_1$$

$$y=\int(\frac{x^3}{3}+C_1)dx=\frac{x^4}{12}+C_1x+C_2.$$

Phương trình khuyết: $y: y''=f(x,y')$.

Đặt $y'=z\Rightarrow y''=z'$, ta đưa về giải phương trình vi phân cấp một $z'=f(x,z)$.

Ví dụ 13:

Giải phương trình $y''=\frac{y'}{x}$.

Đặt $y'=z$, ta được phương trình:

$$z'=\frac{z}{x}\Leftrightarrow y'=z=C_1x$$

Lấy tích phân hai vế ta được:

$$y=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2.$$

Phương trình khuyết x: $y''=f(y,y')$.

Đặt $z=y'$, khi đó:

$$\frac{dy}{dx}=y'=z;\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=z\frac{dz}{dy}.$$

Phương trình đã cho trở thành $zz'=f(y,z)$, là phương trình cấp một của hàm $z=z(y)$

Ví dụ 14:

Giải phương trình: $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Đặt $y' = z$, suy ra:

$$y''(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}y'(x) = zz'(y).$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$z^2 + 2yzz' = 0.$$

Nếu $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0$, suy ra $y = C$ là một nghiệm của phương trình.

Nếu $z \neq 0$: $z^2 + 2yzz' = 0 \Leftrightarrow \left(yz^2\right)' = 0 \Leftrightarrow yz^2 = C_1$

$$\Leftrightarrow y' = z = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{C_1}}dy = \pm dx \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{C_1}} = \pm x + C_2.$$

5.3.2. Phương trình tuyến tính cấp hai

Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai là phương trình dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (5.12)$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là các hàm số cho trước.

Nếu $f(x) \equiv 0$, (5.12) được gọi là phương trình thuần nhất. Nếu $f(x) \neq 0$, (5.12) được gọi là phương trình không thuần nhất.

Tương tự phương trình vi phân tuyến tính cấp một, ta nêu ra cấu trúc của nghiệm của phương trình không thuần nhất trong mối liên hệ với nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng. Ta luôn giả sử $f(x), p(x), q(x)$ là các hàm liên tục.

5.3.2.1. Phương trình tuyến tính thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (5.13)$$

Định lý 1:

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của phương trình (5.13) thì $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ trong đó C_1, C_2 là hai hằng số, cũng là nghiệm của phương trình đó.

Thật vậy, do $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình (5.13) nên:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Nhân lần lượt hai vế của hai phương trình trên với hai hằng số C_1, C_2 tương ứng, ta được:

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) = 0.$$

Vậy $y = C_1y_1 + C_2y_2$ cũng là nghiệm của phương trình (5.13).

Định nghĩa:

Hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên tập D nếu tồn tại các số k_1, k_2 không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

Ngược lại nếu đồng nhất thức trên xảy ra chỉ khi $k_1 = k_2 = 0$ thì ta nói $y_1(x), y_2(x)$ độc lập tuyến tính trên tập D.

Nhận xét: Hệ hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên tập D khi và chỉ khi $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ là hằng số trên D.

Ví dụ 15:

Các cặp hàm số sau đây độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

a) $\{e^{ax}, e^{bx}\}, (a \neq b)$.

b) $\{1, x\}$.

Định nghĩa:

Cho hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$. Định thức:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

được gọi là định thức Wronsky của y_1, y_2

Ta thừa nhận một số định lý sau về định thức Wronsky của hai hàm số y_1, y_2.

Định lý 2:

Nếu hai hàm số $y_1(x)$ và $y_2(x)$ phụ thuộc tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ thì $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

Định lý 3:

Giả sử hai nghiệm y_1, y_2 của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.13) có định thức Wronsky $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, với một giá trị $x_0 \in [a, b]$ thì $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ với mọi $x \in [a, b]$.

Định lý 4:

Nếu các nghiệm y_1, y_2 của phương trình (5.13) là độc lập tuyến tính trên đoạn $[a, b]$ thì định thức Wronsky $W(y_1, y_2)$ khác không tại mọi điểm của đoạn ấy.

Ta có định lý sau đây về cấu trúc nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất (5.13).

Định lý 5:

Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (5.13) thì nghiệm tổng quát của phương trình đó là:

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số bất kỳ.

Chứng minh:

Theo định lý 1, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm của phương trình (5.13).

Ngược lại, ta cần chứng minh với mọi điều kiện ban đầu $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ ta luôn tìm được các hằng số C_1, C_2 để $y = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm riêng của (5.13) ứng với điều kiện ban đầu đã cho. Thật vậy, ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) \\ y_0' = C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0). \end{cases}$$

Hiển nhiên hệ này có nghiệm duy nhất (C_1, C_2) vì định thức của hệ chính là định thức Wronsky $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ (đpcm).

5.3.2.2. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{5.12}$$

Tương tự như đối với phương trình vi phân cấp một tuyến tính không thuần nhất, ta có định lý sau về cấu trúc nghiệm của phương trình không thuần nhất.

Định lý 6:

Nghiệm tổng quát $y(x)$ của phương trình không thuần nhất (5.12) bằng tổng của nghiệm tổng quát $\overline{y}(x)$ của phương trình thuần nhất (5.13) cộng với một nghiệm riêng $y^*(x)$ của phương trình không thuần nhất (5.12).

5.3.2.3. Phương pháp biến thiên hằng số

Trong trường hợp không dễ dàng nhẩm ra nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (5.12), ta có thể sử dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng này.

Giả sử $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (5.13), ta sẽ tìm nghiệm riêng của (5.12) dưới dạng:

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Thay y^* vào phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, ta cần tính:

$$\left(y^*\right)' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'.$$

Ta sẽ chọn $C_1(x), C_2(x)$ thoả mãn:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Khi đó $\left(y^*\right)' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$. Tính $\left(y^*\right)''$ và thay vào vế trái của (5.12), ta có:

$$f(x) = VT = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)$$

$$(\text{do } y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0).$$

Tóm lại $C_1(x), C_2(x)$ thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y_1(x)C_1'(x) + y_2(x)C_2'(x) & = 0 \\ y_1'(x)C_1'(x) + y_2'(x)C_2'(x) & = f(x) \end{cases}$$

Vì y_1 và y_2 là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất nên định thức Wronsky của chúng khác không, do đó từ hệ trên ta có thể giải ra được $C_1(x)$ và $C_2(x)$.

Vậy ta giải phương trình tuyến tính không thuần nhất theo ba bước sau đây.

- Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ của phương trình tuyến tính thuần nhất.
- Bước 2: Tìm một nghiệm riêng y^* của phương trình không thuần nhất (5.12). Ta có thể nhẩm nghiệm trong trường hợp đơn giản, hoặc tìm nghiệm bằng phương pháp biến thiên hằng số.
- Bước 3. Kết luận nghiệm $y = \overline{y} + y^*$.

Ví dụ 16:

Giải phương trình $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ (**)

- Bước 1: Giải phương trình thuần nhất $y'' + y = 0$, suy ra $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (cách giải phương trình hệ số hằng này sẽ được trình bày trong phần sau).
- Bước 2: Tìm nghiệm riêng của phương trình (**) dưới dạng

$$y^* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \cos x C_1'(x) + \sin x C_2'(x) & = 0 \\ -\sin x C_1'(x) + \cos x C_2'(x) & = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow C_1'(x) = -\operatorname{tg} x; C_2'(x) = 1.$$

Ta tìm được:

$$\begin{cases} C_1(x) = \int -\operatorname{tg} x dx = \ln|\cos x| + \overline{C_1} \\ C_2(x) = x + \overline{C_2} \end{cases}$$

trong đó $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ là hai hằng số bất kỳ. Để có một nghiệm riêng, ta có thể chọn:

$$\overline{C_1} = \overline{C_2} = 0.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

5.3.3. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng

5.3.3.1. Phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Xét phương trình

$$y''+py'+qy=0 \qquad (5.14)$$

trong đó p,q là các hằng số thực.

Định nghĩa:

Phương trình đặc trưng của phương trình (5.14) là:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad (5.15)$$

Tuỳ theo giá trị nghiệm λ của phương trình đặc trưng (5.15) mà ta có công thức nghiệm tổng quát của (5.14). Giả sử phương trình này có hai nghiệm λ_1,λ_2.

- Nếu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ là hai nghiệm thực phân biệt thì nghiệm tổng quát $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.
- Nếu $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$ thì nghiệm tổng quát $y=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x)$.
- Nếu hai nghiệm phức $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ thì $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

Ví dụ 16:

Giải các phương trình vi phân

a) $y''-2y'-3y=0$.

Phương trình đặc trưng là $\lambda^2-2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=-1, \lambda=3$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$

b) $y''+2y+5=0$.

Phương trình đặc trưng là $\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y=e^{-x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)$.

5.3.3.2. Phương trình tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

$$y''+py'+qy=f(x).$$

Ta đã biết phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất y^*. Tuy nhiên đối với một số dạng cụ thể của vế phải $f(x)$, ta có cách lựa chọn dạng đặc biệt của nghiệm riêng y^*.

Phương trình đặc trưng tương ứng là $\lambda^2+p\lambda+q=0$ (5.15).

- Nếu $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ mà trong đó $P_n(x)$ là một đa thức bậc n, α là một hằng số
  - Mà α không là nghiệm của (5.15) thì ta tìm nghiệm ở dạng $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)$.
  - Mà α là nghiệm đơn của (5.15) thì ta tìm nghiệm ở dạng $y^*=xe^{\alpha x}Q_n(x)$.
  - Mà α là nghiệm kép của (5.15) thì ta tìm nghiệm ở dạng $y^*=x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là một đa thức bậc n.

- Nếu $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$ trong đó α,β là các hằng số, $P_n(x), Q_m(x)$ là các đa thức với bậc tương ứng là n, m, $\max(n,m)=1$
  - Mà $\alpha\pm i\beta$ khác nghiệm phức $a\pm ib$ của (5.15) thì ta tìm nghiệm ở dạng $y^*=e^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x+S_1(x)\sin\beta x\right]$
  - Mà $\alpha\pm i\beta$ là nghiệm phức $a\pm ib$ của (5.15) thì ta tìm nghiệm ở dạng $y^*=xe^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x+S_1(x)\sin\beta x\right]$.

Ví dụ 18:

Giải các phương trình vi phân:

a) $y''-y=(2x+1)e^{2x}$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-1=0$ có hai nghiệm là $\lambda_{1,2}=\pm1$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

Ở vế phải $\alpha=2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất ở dạng $y^*=(Ax+B)e^{\alpha x}$.

Thay vào phương trình, ta thu được:

$$4Axe^{2x}+(4A+4B)e^{2x}-(Ax+B)e^{2x}=(2x+1)e^{2x}\Rightarrow A=\frac{2}{3};B=-\frac{5}{9}$$

nên $y^*=\left(\frac{2x}{3}-\frac{5}{9}\right)e^{2x}$ và $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\left(\frac{2x}{3}-\frac{5}{9}\right)e^{2x}$.

b) $y''-2y'-3y=xe^{-x}$.

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-2\lambda-3=0$ có hai nghiệm $\lambda_1=-1;\lambda_2=3$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là:

$$\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

Ở vế phải, $\alpha=-1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng, do đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất ở dạng:

$$y^*=xe^{-x}(Ax+B).$$

Thay vào phương trình đã cho, ta thu được:

$$y''-2y'-3y=xe^{-x}\Rightarrow A=-\frac{1}{8},B=-\frac{1}{16}$$

nên $y^*=-xe^{-x}\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right)$ và $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-xe^{-x}\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\right)$.

Nếu $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$, trong đó $P_m(x), P_n(x)$ là các đa thức bậc m and n, β là hằng số.

Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình (5.15), ta tìm nghiệm riêng ở dạng:

$$y^* = e^{\alpha x}\left[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right], \text{ trong đó } l = \max(m,n).$$

Nếu $\pm i\beta$ là một nghiệm của phương trình (5.15) ta tìm nghiệm riêng ở dạng:

$$y^* = xe^{\alpha x}\left(Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right)$$

trong đó $l = \max(m,n)$ và $Q_l(x)$ là đa thức bậc l.

Ví dụ 19:

Giải phương trình vi phân $y'' + y = x\cos x$.

Phương trình thuần nhất tương ứng là $y'' + y = 0$. Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm $\lambda = \pm i$, nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất $y'' + y = x\cos x$ ở dạng:

$$y^* = x\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right].$$

Thay vào phương trình ta được $A = D = 0, B = C = \frac{1}{4}$, suy ra:

$$y^* = \frac{x}{4}\left(\cos x + x\sin x\right).$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\left(\cos x + x\sin x\right).$$

TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Trong bài này chúng ta nghiên cứu vấn đề là:

- Phương trình vi phân.
- Nghiệm, nghiệm riêng, tích phân cơ bản, tích phân riêng của phương trình vi phân (cấp một và cấp hai).
- Mối quan hệ giữa nghiệm của một phương trình thuần nhất và nghiệm của phương trình không thuần nhất.
- Phương pháp giải một số loại phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

Bài này trình bày các khái niệm cơ bản về phương trình vi phân: Định nghĩa phương trình vi phân, cấp, nghiệm riêng, và nghiệm tổng quát, đường cong tích phân của phương trình vi phân, phương pháp giải một số phương trình vi phân cấp 1 và phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Học viên cần hiểu rõ các khái niệm đó, nhận được các phương trình đã học và giải các phương trình đó, hiểu được ý nghĩa hình học và ý nghĩa thực tiễn của bài toán đặt ra.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là nghiệm tổng quát và tích phân tổng quát của một phương trình vi phân cấp n?

2. Hãy nêu cấu trúc của nghiệm của một phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp hai. Nêu phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình vi phân cấp một sau

a) $\operatorname{tg} y dx - x\ln x dy = 0$

b) $y'(2x+y) = 1, y(0) = -1$

c) $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$

d) $xy' = y\ln\frac{y}{x}, y(1) = 1$

e) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$

f) $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y+3}$.

2. Giải các phương trình vi phân

a) $3x^2(1+\ln y)dx - \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$

b) $ydx - x(1+xy)dy = 0$ bằng cách tìm thừa số tích phân dạng $\mu(x)$.

3. Giải các phương trình vi phân cấp hai khuyết

a) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2^x$

b) $xy'' - y' = 0$

c) $y''^2 + y'^2 = 1$

d) $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

4 Giải các phương trình vi phân sau

a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

b) $y'' - 5y' + 4y = e^x$

c) $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x+1)$

d) $y'' + 4y = 2\sin 2x$.