Практика 6. Определенный интеграл. Часть 1
Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.

Свойства определенного интеграла

1) $\int\limits_a^b Af(x)\,dx = A\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

2) Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы, то:
$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

3) Интегрирование неравенств. Пусть $a<b$. Если на отрезке $[a,\,b]$ всюду выполнено неравенство: $f(x)\leqslant \varphi(x)$, то неравенство может быть проинтегрировано:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

4) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

5) Аддитивность интеграла.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

если эти три интеграла существуют.

6) Пусть $m = \min\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, $\quad M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$, функция $f(x)$ – интегрируема. Тогда выполнено:

$$m(b-a)\leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

7) Теорема о среднем
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то существует точка $c\in[a,\,b]$ такая, что выполнено:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Интегрирование по симметричному промежутку

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ – нечетная функция,} \\ 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, & f(x) \text{ – четная.} \end{cases}$$

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть $x = \varphi(t)$ и выполнены следующие условия:

1) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и значение $\varphi(t)$ не выходит за пределы отрезка $[a,\ b]$ при изменении $t \in [\alpha,\ \beta]$ (если $f(x)$ непрерывна в бо́льшем промежутке, то можно предполагать, что $\varphi(t)$ не выходит за пределы этого бо́льшего промежутка).

2) $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b$;

3) Существует производная $\varphi'(t)$, непрерывная на отрезке $[\alpha,\ \beta]$.

Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Формула интегрирования по частям

Пусть u и v – дифференцируемые функции на отрезке $[a,\ b]$. Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Задания

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^2dx$ как предел интегральной суммы. **2.** Оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$

Вычислить интегралы (3-11).

3. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$. **4.** $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **5.** $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$. **6.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. **7.** $\int\limits_1^2 x\ln x dx$. **8.** $\int\limits_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$.

9. $\int\limits_{-3}^3 \frac{x^2\sin 2xdx}{x^2+1}$. **10.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin xdx}{\cos^2 x}$. **11.** $\int\limits_1^e \sin(\ln x)dx$.

12. Доказать, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nxdx = \begin{cases} 0\ при\ m \neq n \\ \pi\ при\ m = n \end{cases}$, где m и n – целые положительные числа.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^x dx$ как предел интегральной суммы.

14. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 x(1-x)^2\,dx$.

Вычислить интегралы (15-17).

15. $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x^2}$. **16.** $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ **17.** $\int\limits_{-3}^3 \frac{x^2\sin 2xdx}{x^2+1}$.