

Рис. 1.2. (а) Цепь с туннельным диодом; (б) диаграмма  $v_R - i_R$  для диода

## Бифуркации

Качественное поведение систем второго порядка определяется типом ее точек равновесия и периодическими орбитами, а также другими ее свойствами устойчивости. Один из важных практических вопросов заключается в сохранении системой своих характеристик качественного поведения при бесконечно малых возмущениях. Если система сохраняет эти свои свойства, то она называется структурно-устойчивой. В этом параграфе мы займемся проблемой структурной устойчивости. В частности, мы будем рассматривать возмущения, которые будут изменять точки равновесия системы или ее периодические орбиты и другие характеристики устойчивого поведения. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2,\end{aligned}$$

которая зависит от параметра  $\mu$ . При  $\mu > 0$  система имеет две точки равновесия  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Матрица Якоби линеаризованной системы в точке  $(\sqrt{\mu}, 0)$  имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} -2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т. е.  $(\sqrt{\mu}, 0)$  — устойчивый узел. Аналогично матрица Якоби линеаризованной системы в точке  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т. е.  $(-\sqrt{\mu}, 0)$  — седловая точка. При уменьшении  $\mu$  седловая точка и узел приближаются друг у друга, сталкиваются друг с другом при  $\mu = 0$  и исчезают при  $\mu < 0$ . При прохождении  $\mu$  через нулевое значение мы можем наблюдать существенное изменение фазового портрета системы. На рис. 2.27 показаны фазовые портреты при положительном, нулевом и отрицательном значениях  $\mu$ . При положительном и сколь угодно малом значении  $\mu$  все траектории в обла-

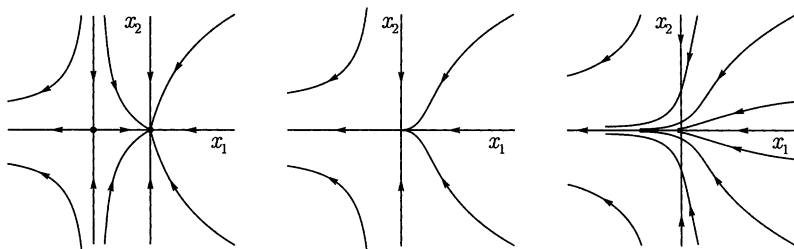


Рис. 2.27. Фазовый портрет системы из примера с бифуркацией «седло–узел» при  $\mu > 0$  (слева),  $\mu = 0$  (в центре),  $\mu < 0$  (справа)

сти  $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$  достигают устойчивого состояния в седловой точке, при отрицательном  $\mu$  все траектории стремятся к бесконечности. Такое изменение качественного поведения называется *бифуркацией*. Более строго, *бифуркацией* называется изменение точек равновесия или периодических орбит или изменение свойств устойчивости при изменении параметра. Этот параметр называется *параметром бифуркации*, а значения параметра, при которых происходят эти изменения, — *точками бифуркации*. В предыдущем примере параметром бифуркации является  $\mu$ , а точкой бифуркации —  $\mu = 0$ .

Бифуркация, которую мы наблюдали в предыдущем примере, может быть изображена в виде *бифуркационной диаграммы*, которая показана на рис. 2.28(а). На диаграмме показана мера амплитуды (или норма) точек равновесия по отношению к параметру бифуркации. Устойчивый узел представлен сплошной линией, а седловая точка — пунктирной. Ординатой бифуркационной диаграммы является мера амплитуды точек равновесия или периодических орбит; сплошные линии представляют устойчивые узлы, устойчивые фокусы и устойчивые

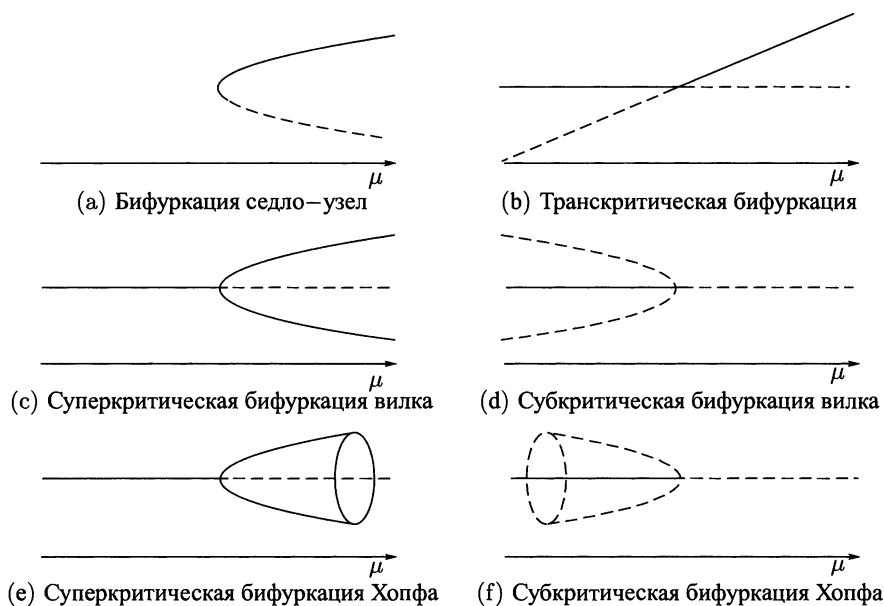


Рис. 2.28. Бифуркационные диаграммы

предельные циклы, а пунктирные линии — неустойчивые узлы, неустойчивые фокусы и неустойчивые предельные циклы. Бифуркация, изображенная на рис. 2.28(a), называется *бифуркацией «седло–узел»*, поскольку она возникает при столкновении седловой точки и узла. Заметим, что матрица Якоби имеет нулевое собственное значение в точке бифуркации. Эта особенность свойственна всем бифуркациям, изображенным на рис. 2.28(a)–(d), которые являются примерами *бифуркаций с нулевым собственным значением*. На рис. 2.28(b) показана *транскритическая бифуркация*, которая характеризуется тем, что при ее прохождении точки равновесия остаются неизменными, но их свойства устойчивости изменяются. Например, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

Эта система имеет две точки равновесия  $(0, 0)$  и  $(\mu, 0)$ . Матрица Якоби в  $(0, 0)$  имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т. е. точка  $(0, 0)$  является устойчивым узлом при  $\mu < 0$  и седловой точкой при  $\mu > 0$ . С другой стороны, матрица Якоби в  $(\mu, 0)$  имеет вид:

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т. е. точка  $(\mu, 0)$  является седловой точкой при  $\mu < 0$  и устойчивым узлом при  $\mu > 0$ . Таким образом, точки равновесия сохраняются при прохождении через точку бифуркации  $\mu = 0$ , но  $(0, 0)$  изменяется из устойчивого узла в седловую точку, а  $(\mu, 0)$  — из седловой точки в устойчивый узел.

Прежде чем перейти к описанию других типов бифуркаций, диаграммы которых изображены на рис. 2.28, отметим важное различие между предыдущими двумя примерами. Во втором примере прохождение через точку бифуркации приводит к тому, что точка равновесия в начале координат изменяется из устойчивого узла в седловую точку, но одновременно возникает устойчивый узел в  $(\mu, 0)$ , который при малом  $\mu$  будет близок к началу координат. Это означает, что воздействие бифуркации на систему не столь драматично. Предположим, например, что значение параметра  $\mu$  в исходной системе отрицательно, т. е. начало координат представляет собой устойчивый узел. Из фазового портрета такой системы видно, что все траектории в множестве  $\{x_1 > \mu\}$  сходятся к началу координат при стремлении времени к бесконечности. Предположим, что исходное значение  $\mu$  настолько мало, что малые возмущения этого параметра могут привести к тому, что он станет положительным. Тогда начало координат станет седловой точкой, а  $(\mu, 0)$  — устойчивым узлом. Тогда из фазового портрета системы видно, что все траектории в множестве  $\{x_1 > 0\}$  сходятся к устойчивому узлу  $(\mu, 0)$  при стремлении времени к бесконечности. При малых значениях  $\mu$  устойчивая рабочая точка системы будет близка к началу координат. Таким образом, хотя возмущенная система и не имеет желаемого устойчивого поведения, она тем не менее близка к нему. В примере бифуркации «седло–узел» ситуация совершенно иная. Предположим, что значение параметра  $\mu$  в исходной системе положительно, т. е. все траектории в множестве  $\{x_1 > -\sqrt{\mu}\}$  сходятся к устойчивому узлу  $(\sqrt{\mu}, 0)$  при стремлении времени к бесконечности. Если исходное значение  $\mu$  мало и малые возмущения этого параметра приводят к тому, что он становится отрицательным, то устойчивый узел исчезает и траектории должны будут отклоняться от желаемой устойчивой рабочей точки или даже стремиться к бесконечности, как в этом конкретном примере. Вследствие указанных различий в воздействии на устойчивое поведение, бифуркация в примере с транскритической бифуркацией называется *безопасной* или *мягкой*, а бифуркация в примере с бифуркацией «седло–узел» — *опасной* или *жесткой*.

Безопасные и опасные бифуркации можно видеть и на диаграммах, изображенных на рис. 2.28(с) и (d), на которых показаны *суперкритическая бифуркация «вилка»* и *субкритическая бифуркация «вилка»* соответственно. Бифуркация первого типа возникает, например, в следующей системе:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

При  $\mu < 0$  имеется единственная точка равновесия в начале координат. Вычислив матрицу Якоби, можно показать, что эта точка является седловой. При  $\mu > 0$  существует три точки равновесия  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{\mu}, 0)$  и  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . Первая из них

является седловой точкой, а оставшиеся две — устойчивыми узлами. При прохождении  $\mu$  через точку бифуркации  $\mu = 0$  устойчивый узел в начале координат превращается в седловую точку и одновременно возникают еще два устойчивых узла в  $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ . Амплитуда возникших устойчивых узлов возрастает при увеличении  $\mu$  и, следовательно, она мала при малом  $\mu$ . Субкритическая бифуркация «вилка» возникает, например, в следующей системе:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu x_1 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}$$

При  $\mu < 0$  существует три точки равновесия: устойчивый узел в  $(0, 0)$  и две седловых точки  $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$ . При  $\mu > 0$  имеется единственная точка равновесия в начале координат и она является седловой точкой. При прохождении  $\mu$  через точку бифуркации  $\mu = 0$  устойчивый узел в начале координат сталкивается с седловыми точками  $(\pm\sqrt{-\mu}, 0)$  и превращается в седловую точку. Сравнивая суперкритическую и субкритическую бифуркации, можно заметить, что суперкритическая является безопасной, а субкритическая — опасной. В частности, если система имеет номинальную рабочую точку в устойчивом узле  $(0, 0)$  при  $\mu < 0$ , то при суперкритической бифуркации «вилка» обеспечивается устойчивое поведение при малом положительном возмущении параметра  $\mu$ , а после субкритической бифуркации «вилка» траектории начинают отклоняться от номинальной рабочей точки.

В рассмотренных простых примерах бифуркаций с нулевыми собственными значениями траектории стремились к бесконечности в опасных случаях. В более сложных примерах система может иметь другие точки равновесия или периодические орбиты, которые не изменяются при рассматриваемых бифуркациях. Траектории, отклоняющиеся от подвергающейся бифуркации точки равновесия, могут не уходить на бесконечность, но притягиваться другой точкой равновесия или периодической орбитой. Такая ситуация может быть проиллюстрирована следующим примером.

**Пример 2.12.** Рассмотрим цепь с туннельным диодом :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C}[-h(x_1) + x_2], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L}[-x_1 - Rx_2 + \mu].\end{aligned}$$

Вольт-амперная характеристика диода  $h(\cdot)$  изображена на рис. 1.2 и  $\mu$  представляет собой постоянный вход системы. Исследуем бифуркации при изменении  $\mu$ . Точки равновесия системы представляют собой пересечения кривой  $x_2 = h(x_1)$  с нагрузочной прямой  $x_2 = (\mu - x_1)/R$ . В примерах 2.1 и 2.3 (см. также рис. 2.29(а)) мы показали, что при  $\mu < A$  имеется устойчивый узел на левой ветке; при  $A < \mu < B$  имеется три точки равновесия — седловая точка на средней ветке и два устойчивых узла на двух других ветках; при  $\mu > B$  имеется устойчивый узел на правой ветке. Бифуркационная диаграмма изображена

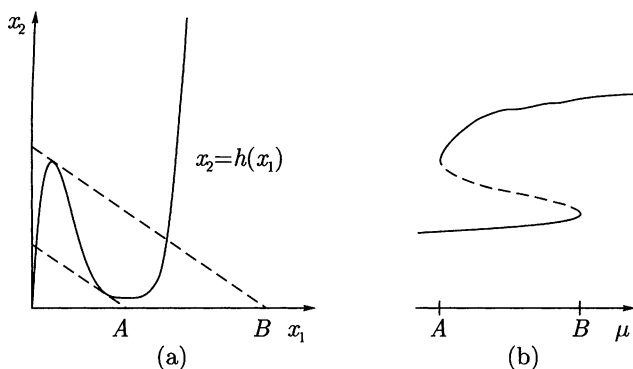


Рис. 2.29. К примеру 2.12: (а) нахождение точек равновесия; (б) диаграмма бифуркации

на рис. 2.29(б). Имеется две бифуркации «седло–узел» при  $\mu = A$  и  $\mu = B$ . Заметим, что при исчезновении устойчивого узла после столкновения с седловой точкой уходящие на бесконечность траектории начинают притягиваться другим устойчивым узлом, который не изменился при бифуркации.  $\triangle$

Когда устойчивый узел теряет устойчивость после прохождения точки бифуркации, собственное значение якобиана проходит через нулевое значение. Теряет ли устойчивость в подобной ситуации устойчивый фокус? В этом случае два комплексно-сопряженных собственных числа должны пройти через мнимую ось. На рисунках 2.28(е) и (ф) показаны эти ситуации: на первом рисунке изображена *суперкритическая бифуркация Хопфа*, а на втором — *субкритическая бифуркация Хопфа*<sup>18</sup>. Суперкритическая бифуркация Хопфа возникает, например, в системе

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) + x_1,\end{aligned}$$

которая может быть представлена в полярных координатах

$$x_1 = r \cos \theta \quad \text{и} \quad x_2 = r \sin \theta$$

в следующем виде:

$$\dot{r} = \mu r - r^3 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 1.$$

Система имеет единственную точку равновесия в начале координат. Фазовые портреты для двух случаев, соответствующих  $\mu$  с различными знаками, показаны на рис. 2.30. При  $\mu < 0$  начало координат является устойчивым фокусом и все траектории притягиваются к нему, а при  $\mu > 0$  начало координат является неустойчивым фокусом, но имеется устойчивый предельный цикл, который притягивает все траектории за исключением нулевого решения. Предельный цикл

<sup>18</sup>Используются также термины «бифуркация Андронова–Хопфа» и «бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа», чтобы подчеркнуть наличие более ранних работ Андронова и Пуанкаре.

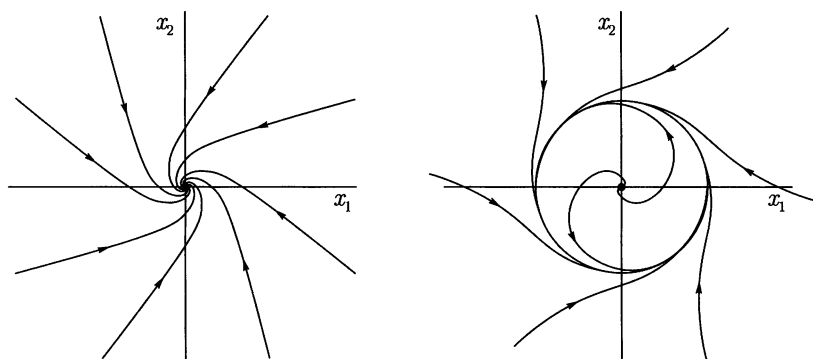


Рис. 2.30. Фазовый портрет суперкритической бифуркации Хопфа при  $\mu < 0$  (слева) и  $\mu > 0$  (справа)

задается уравнением  $r = \sqrt{\mu}$ , т.е. амплитуда колебаний возрастает с увеличением  $\mu$  и мала при малом  $\mu$ . Рассматриваемая бифуркация является безопасной, т.к. при исчезновении устойчивого фокуса вследствие малого возмущения система будет порождать устойчивое колебание с малой амплитудой. Для того чтобы изучить поведение собственных значений при бифуркации, заметим, что якобиан в начале координат

$$\begin{bmatrix} \mu - 1 & \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения  $\mu \pm j$ , которые пересекают мнимую ось слева направо при увеличении  $\mu$  из области отрицательных значений в область положительных значений.

Субкритическая бифуркация Хопфа возникает в системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2[\mu + (x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2] + x_1, \end{aligned}$$

которая в полярных координат имеет следующий вид:

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = 1.$$

Эта система имеет единственную точку равновесия в начале координат, которая является устойчивым фокусом при  $\mu < 0$  и неустойчивым фокусом при  $\mu > 0$ . Предельный цикл системы может быть определен из следующего уравнения:

$$0 = \mu + r^2 - r^4.$$

При  $\mu < 0$  имеется два предельных цикла, определяемых равенствами  $r^2 = (1 \pm \sqrt{1 + 4\mu})/2$ . Из графика функции  $\dot{r}(r) = r(\mu + r^2 - r^4)$  (см. рис. 2.31) можно видеть, что предельный цикл  $r^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2$  является устойчивым,

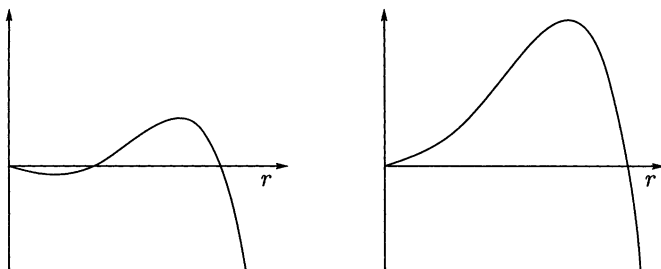


Рис. 2.31. График  $r\mu + r^3 - r^5$  при  $\mu < 0$  (слева) и  $\mu > 0$  (справа)

а  $r^2 = (1 - \sqrt{1 + 4\mu})/2$  — неустойчивым. При малом  $|\mu|$  неустойчивый предельный цикл может быть аппроксимирован уравнением  $r^2 = -\mu$ . При  $\mu > 0$  имеется только один устойчивый предельный цикл  $r^2 = (1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2$ . Таким образом, при увеличении  $\mu$  из области отрицательных значений в область положительных значений устойчивый фокус в начале координат сливается с неустойчивым предельным циклом и превращается в неустойчивый фокус (см. бифуркационную диаграмму 2.28(f)). Заметим, что устойчивый предельный цикл не показан на бифуркационной диаграмме, т. к. изменение  $\mu$  приводит лишь к изменению его амплитуды. Субкритическая бифуркация Хопфа является опасной, т. к. малое возмущение номинального устойчивого фокуса в начале координат может привести к тому, что траектории начнут отклоняться от начала координат и притягиваться к устойчивому предельному циклу.

Все показанные на рис. 2.28 бифуркации происходили в окрестности точки равновесия. Поэтому они называются *локальными*. Существуют также *глобальные бифуркации*, которые происходят на больших областях пространства состояния и не могут быть описаны в окрестности какой-либо точки равновесия. Мы рассмотрим лишь один пример глобальной бифуркации. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \mu x_2 + x_1 - x_1^2 + x_1 x_2.\end{aligned}$$

Имеются две точки равновесия в  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . С использованием линеаризации системы мы можем установить, что  $(0, 0)$  всегда является седловой точкой, а  $(1, 0)$  — неустойчивым фокусом при  $-1 < \mu < 1$ . Ограничимся рассмотрением системы при  $-1 < \mu < 1$ . На рис. 2.32 показан фазовый портрет для четырех различных значений  $\mu$ . Фазовые портреты при  $\mu = -0.95$  и  $-0.88$  типичны для случая  $\mu < \mu_c \approx -0.8645$ , а при  $\mu = -0.8$  — типичны для случая  $\mu > \mu_c$ . При  $\mu < \mu_c$  имеется устойчивый предельный цикл, который окружает неустойчивый фокус. При приближении значения  $\mu$  к  $\mu_c$  предельный цикл расширяется до тех пор, пока не коснется седловой точки при  $\mu = \mu_c$ . При этом возникает траектория, которая начинается и заканчивается в седловой точке. Такая траектория



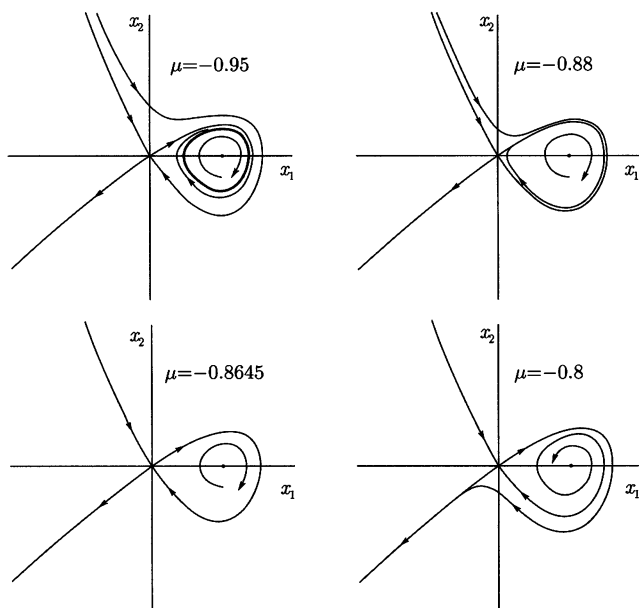


Рис. 2.32. Гомоклинические бифуркации

называется *гомоклинической орбитой*. При  $\mu > \mu_c$  предельный цикл исчезает. Заметим, что эта бифуркация не приводит к изменениям точек равновесия  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . Такой тип бифуркации называется *гомоклинической бифуркацией* (saddle-connection, homoclinic bifurcation).