Лекция 1. Повторение ТВ. Задачи математической статистики

Кохович Дарья Игоревна

5 февраля 2024 г.

Числовые характеристики дискретных С.В.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i).$$

Дисперсией дискретной случайной величины X называется число

$$\mathbb{D}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = X_i).$$

Числовые характеристики непрерывных С.В.

Математическим ожиданием случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ называется число

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсией случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ называется число

$$\mathbb{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)dx.$$

Числовые характеристики С.В.

Свойства матожидания:

- для любых постоянных a, b верно $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$;
- для любых двух случайных величин X и Y верно $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$;
- если случайные величины X, Y независимы, то $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Числовые характеристики С.В.

Свойства дисперсии:

- для любой случайной величины $\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$;
- для любых постоянных a, b верно $\mathbb{D}(aX + b) = a^2\mathbb{D}(X)$;
- если случайные величины X и Y независимы, то $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$.

Основные распределения

- **Биномиальное распределение**. Пусть X – случайная величина, равная числу успехлов в n испытаниях Бернулли, и пусть вероятность успеха в каждом испытании равна p. Тогда величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p:

$$\mathbb{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Основные распределения

- **Биномиальное распределение**. Пусть X – случайная величина, равная числу успехлов в n испытаниях Бернулли, и пусть вероятность успеха в каждом испытании равна p. Тогда величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p:

$$\mathbb{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{D}(X) = np(1-p).$$

Основные распределения

- **Распределение Пуассона**. Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если
$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Основные распределения

- **Распределение Пуассона**. Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если
$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$
$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{D}(X) = \lambda.$$

Основные распределения

- **Геометрическое распределение**. Проводится бесконечная последовательность независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью $p = \mathbb{P}(A) > 0$. Пусть X – случайная величина, равная числу испытаний до момента первого наступления события A. Тогда

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Основные распределения

- **Геометрическое распределение**. Проводится бесконечная последовательность независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью $p = \mathbb{P}(A) > 0$. Пусть X – случайная величина, равная числу испытаний до момента первого наступления события A. Тогда

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - p}{p}, \qquad \mathbb{D}(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Основные распределения

- **Равномерное распределение** для любых $a < b$ задается плотностью
$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$

Основные распределения

- **Равномерное распределение** для любых $a < b$ задается плотностью
$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x).$$
$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{D}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Основные распределения

- **Показательное распределение** с параметром λ задается плотностью
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0.$$

Основные распределения

- **Показательное распределение** с параметром λ задается плотностью

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geq 0.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{D}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Основные распределения

- **Нормальное распределение** задается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Основные распределения

- **Нормальное распределение** задается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$$\mathbb{E}(X) = a, \qquad \mathbb{D}(X) = \sigma^2.$$

Квантиль

Квантилем порядка $\alpha \in [0, 1]$ случайной величины X будем называть число $q_{X,\alpha}$, для которого

$$\mathbb{P}(X \geq q_{X,\alpha}) \geq 1 - \alpha,$$

$$\mathbb{P}(X \leq q_{X,\alpha}) \geq \alpha.$$

Вероятностные сходимости

Пусть $(X_n), X$ – случайные величины, которые заданы на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Будем говорить, что X_n сходятся к X почти наверное, если

$$\mathbb{P}(\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$.

Вероятностные сходимости

Пусть $(X_n), X$ – случайные величины, которые заданы на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Будем говорить, что X_n сходятся к X по вероятности, если $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\{\omega\colon |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Замечание. Из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

Закон больших чисел

Пусть $X_1, x_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями $a_i = \mathbb{E}(X_i)$. Говорят, что для этой последовательности выполняется закон больших чисел (ЗБЧ), если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема (Хинчин). Если $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин в конечными математическими ожиданиями, то для нее выполняется ЗБЧ.

Усиленный закон больших чисел

Пусть $X_1, x_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с конечными математическими ожиданиями $a_i = \mathbb{E}(X_i)$. Говорят, что для этой последовательности выполняется усиленный закон больших чисел (УЗБЧ), если

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема (Колмогоров). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Для выполнения УЗБЧ необходимо и достаточно существование у величин X_i конечного математического ожидания.

Слабая сходимость распределений

Пусть $(X_n), X$ – случайные величины $\Omega \to \mathbb{R}^m$. Говорят, что распределения $\mathbb{P}_{X_n}$ слабо сходятся к распределению $\mathbb{P}_X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathbb{P}_{X_n}(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$$

для любой непрерывной ограниченной функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Также в таком случае говорят, что случайные величины X_n сходятся **по распределению** к случайной величине X.

Центральная предельная теорема

Теорема (ЦПТ). Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом (в частности, конечной дисперсией). Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$. Тогда последовательность распределений случайных величин

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{D}(S_n)}}$$

слабо сходится при $n \to \infty$ к стандартному нормальному распределению, то есть для любого вещественного x

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{D}(S_n)}} < x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x).$$

Задачи математической статистики

Предположим, что мы повторяем один и тот же случайный эксперимент в одинаковых условиях. Что можно о распределении в практическом эксперименте?
Пример. С какой веротяностью выпадает герб на данной монете?

Задачи математической статистики

Предположим, что мы повторяем один и тот же случайный эксперимент в одинаковых условиях. Что можно о распределении в практическом эксперименте?
Пример. С какой веротяностью выпадает герб на данной монете? Для определения вероятности мы можем подбросить монету много раз, но выводы придется сделать по результатам *конечного* числа наблюдений. Если после 10000 бросков монеты выпадет 5035 гербов, нельзя сделать точный вывод о вероятности выпадения герба.

Задачи математической статистики

Пусть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина, наблюдаемая в случайном эксперименте. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – значения наблюдаемой случайной величины. Случайная величина ξ имеет некоторое распределение $\mathcal{F}$, которое нам частично или полностью неизвестно.

Задачи математической статистики

Удобно считать, что до опыта X_i – случайная величина, одинаково распределенная с ξ, а после опыта X_i – число, которое мы наблюдаем в i-м по счету эксперименте, то есть одно из возможных значений случайной величины X_i.
Определение. Выборкой $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ объема n из распределения $\mathcal{F}$ называется набор из n независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение $\mathcal{F}$.

Задачи математической статистики

Задачей математической статистики является получение по выборке выводов о неизвестном распределении $\mathcal{F}$, из которого она извлечена. Распределение характеризуется функцией распределения, плотностью или набором числовых характеристик. По выборке строятся приближения для этих характеристик, так называемые *оценки*.

Задачи математической статистики

Пример. Шестигранный кубик подброшен 100 раз. Первая грань выпала 25 раз, вторая и пятая – по 14 раз, третья – 21 раз, четвертая – 15 раз, шестая – 11 раз.
Оценкой для неизвестной вероятности p_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ будет случайная величина

$$p_i^* = \frac{\text{число выпавших на кости } i}{100}.$$

Статистическая оценка

Формально говоря, **(статистическая) оценка** – это любая функция T на основе выборки $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то есть

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^d.$$

Пример. Эмпирическое среднее используется для оценки $\mathbb{E}(X)$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Несмещенные оценки

Рассмотрим некоторый параметр распределения θ и оценку этого параметра T.

Определение. T – несмещенная оценка для θ, если $\mathbb{E}T(X_1, \ldots, X_n) = \theta$.

Пример. Эмпирическое среднее – несмещенная оценка:

$$\mathbb{E}T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_i).$$

Несмещенные оценки

Еще один пример. Интуитивно понятно, что оценка $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1$ – плохая. Однако, она тоже является несмещенной:

$$\mathbb{E}\,T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathbb{E}X_1.$$

Несмещенные оценки

Пример. Рассмотрим выборку, где $X_i \sim N(a, \sigma^2)$, число a – заранее известно, а σ^2 – нет. Рассмотрим оценку для дисперсии:

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2.$$

Конечно, она тоже несмещенная:

$$\mathbb{E}T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}(X_i) = \mathbb{D}(X_i).$$

Несмещенные оценки

Пример. Теперь рассмотрим выборку, про которую заранее известно, что $X_i \sim N(a, \sigma^2)$, но a, σ^2 – неизвестны.
Является ли такая оценка несмещенной, узнаем на лекции №2.