Задачи по курсу случайных графов. Часть 1

Константинов Даниил Николаевич, 5 курс ФПМИ
dkonstantinov0@gmail.com

1. 1) Докажите, что любое выпуклое свойство есть пересечение возрастающего и убывающего свойств.

   Доказательство. Пусть $A \in Q_{\text{возр}}$, $B \in Q_{\text{убыв}}$ и $A \subset C \subset B$. Из этого следует, что: а) $C \in Q_{\text{возр}} \Rightarrow B \in Q_{\text{возр}}$; б) $C \in Q_{\text{убыв}} \Rightarrow A \in Q_{\text{убыв}}$ (из определений убвающего и возрастающего свойств).

   Обозначим $Q = Q_{\text{возр}} \cap Q_{\text{убыв}}$. Значит, $A, B \in Q$ и $A \subset C \subset B \Rightarrow \text{C} \in Q$ □

   2) Докажите, что для любого нетривиального выпуклого свойства Q существуют пороговые вероятности $\hat{p}_1 = \hat{p}_1(n) \leqslant \hat{p}_2 = \hat{p}_2(n)$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\hat{p}_1); \\ 1, & \text{если } p = o(\hat{p}_2) \text{ и } p = \omega(\hat{p}_1); \\ 0, & \text{если } p = \omega(\hat{p}_2). \end{cases}$$

   Доказательство. По доказанному выше свойству существует такое разложение: $Q = Q_1 \cap Q_2$, где $Q_1 = Q_{\text{возр}}, Q_2 = Q_{\text{убыв}}$. Без ограничения общности будем считать, что $\hat{p}_1$ — пороговая вероятность Q_1, а $\hat{p}_2$ — пороговая вероятность Q_2 (в силу того, что любое монотонное свойство имеет пор.вероятность).Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_1\right)\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = o(\hat{p}_1); \\ 1, & \text{если } p = \omega(\hat{p}_1). \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_2\right)\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = o(\hat{p}_2); \\ 0, & \text{если } p = \omega(\hat{p}_2). \end{cases}$$

   $\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q\right) = \mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_1 \cap Q_2\right) = \mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_1 \text{ и } \Gamma(n,p) \models Q_2\right) = \mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_1\right) \cdot$
   $\cdot \mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_2\right)$ (в силу независимости свойств)
   Если $p = o(\hat{p}_1)$, то $p = o(\hat{p}_2)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_1\right)\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q_2\right)\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

   Если $p = \omega(\hat{p}_1)$, то возможно два случая:

   а) $p = o(\hat{p}_2)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q\right)\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

   б) $p = \omega(\hat{p}_2)$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{P}\left(\Gamma(n,p) \models Q\right)\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

   □

2. 1) Докажите, что для любого свойства Q выполнено

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p) \models Q \,|\, |\Gamma(n,p)| = m) = \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q).$$

Доказательство.

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p)\models Q||\Gamma(n,p)|=m)=\frac{\mathrm{P}(\Gamma(n,p)\models Q\cap|\Gamma(n,p)|=m)}{\mathrm{P}(|\Gamma(n,p)|=m)}=$$
$$=\sum_{q\in Q,|q|=m}\frac{p^m(1-p)^{N-m}}{C_N^m p^m(1-p)^{N-m}}=\sum_{q\in Q,|q|=m}\frac{1}{C_N^m}=\mathrm{P}(\Gamma(n,m)\models Q).$$

□

2) Пусть Q — выпуклое свойство подмножеств Γ и $m_1\leqslant m\leqslant m_2\leqslant N$, $0\leqslant p_1\leqslant p\leqslant p_2\leqslant 1$. Докажите, что

$$\mathrm{P}(\Gamma(m)\models Q)\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m_1)\models Q)+\mathrm{P}(\Gamma(m_2)\models Q)-1,$$
$$\mathrm{P}(\Gamma(p)\models Q)\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(p_1)\models Q)+\mathrm{P}(\Gamma(p_2)\models Q)-1.$$

Доказательство. Из упражнения 1.1 $Q=Q_{\text{возр}}\cap Q_{\text{убыв}}$. Следовательно, используя лемму 1.1:

$$\mathrm{P}(\Gamma(m)\models Q)\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m)\models Q_{\text{возр}})+\mathrm{P}(\Gamma(m)\models Q_{\text{убыв}})-\mathrm{P}(\Gamma(m)\models Q_{\text{возр}}\cup Q_{\text{убыв}})\geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m_1)\models Q_{\text{возр}})+\mathrm{P}(\Gamma(m_2)\models Q_{\text{убыв}})-1\geqslant$$
$$\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m_1)\models Q)+\mathrm{P}(\Gamma(m_2)\models Q)-1.$$

Аналогично для $\Gamma(p)$.

□

3. Докажите лемму 1.3 из лекции.
Лемма 1. Пусть Q— монотонное свойство подмножетсв $\Gamma(n)$, $a\in(0,1)$ — фиксированная константа, а $m=m(n)\in\overline{[0,N]}$ — некоторая последовательность. Если для любой функции $p=p(n)\in(0,1)$ с условием $p=\frac{m}{N}+\mathrm{O}\left(\sqrt{\frac{m(N-m)}{N^3}}\right)$ выполнено

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p)\models Q)\to a \ \text{ при } n\to\infty,$$

то

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,m)\models Q)\to a \ \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство. Пусть Q— возрастающее свойство, и $C>0$— большая константа, $p_0=\frac{m}{N}, q_0=1-p_0$.

$$p_+=\min(p_0+C\sqrt{\frac{p_0q_0}{N}},1)$$
$$p_-=\max(p_0-C\sqrt{\frac{p_0q_0}{N}},0)$$
$$\frac{p_0q_0}{N}=\frac{m(N-m)}{N^3}$$

Используя лемму 1.1 и упражнение 2.1:

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p_-)\models Q)=\sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}(\Gamma(n,p_-)\models Q||\Gamma(n,p_-)|=k)\cdot\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)|=k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}(\Gamma(n,k)\models Q)\cdot\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)|=k)\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m)\models Q)\cdot\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)|\leqslant m)+1\cdot\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)|>m)\leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m)\models Q)+\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)|\geqslant m)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\Gamma(n,p_+) \models Q) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{P}(\Gamma(n,p_+) \models Q || \Gamma(n,p_+)| = k) \cdot \mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| = k) = \\
= \sum_{k=0}^{N} \mathrm{P}(\Gamma(n,k) \models Q) \cdot \mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| = k) \geqslant \\
\geqslant \sum_{k=m}^{N} \mathrm{P}(\Gamma(n,k) \models Q) \cdot \mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| = k) \geqslant \\
\geqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q) \cdot \mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| \geqslant m) \geqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q) - \mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| < m)
\end{aligned}$$

Пусть $m = 0$, тогда по условию $p = 0 \Rightarrow \Gamma(n, p = 0) = \Gamma(n, m = 0)$.
Пусть $m = N$, тогда по условию $p = 1 \Rightarrow \Gamma(n, p = 1) = \Gamma(n, m = N)$.
Тогда будем считать, что $1 \leqslant m \leqslant N - 1 \Rightarrow Np_0q_0 = \frac{m(N-m)}{N} \geqslant \frac{1}{2}$.
$|\Gamma(n,p_-)| \sim Bin(N, p_-)$, из чего следует:

$$Np_-(1-p_-) = (Np_0 - C\sqrt{Np_0q_0})(1-p_0+C\sqrt{p_0q_0/N}) \leqslant Np_0(q_0+C\sqrt{p_0q_0/N}) \leqslant Np_0q_0+C\sqrt{Np_0q_0}.$$

По неравенству Чебышева имеем:

$$\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_-)| \geqslant m) \leqslant \frac{Np_-(1-p_-)}{(m-Np_-)^2} = \frac{Np_-(1-p_-)}{(Np_0 - Np_0 + C\sqrt{Np_0q_0})^2} \leqslant \frac{Np_0q_0 + C\sqrt{Np_0q_0}}{C^2Np_0q_0} \leqslant \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{P}(|\Gamma(n,p_+)| < m) \leqslant \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}.$$

Получаем:

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p_-) \models Q) \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q) + \frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C},$$

$$\mathrm{P}(\Gamma(n,p_+) \models Q) \geqslant \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q) - (\frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}).$$

По предположению:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\Gamma(n,p_+)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\Gamma(n,p_-)) = a,$$

.

$$a - (\frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\Gamma(n,m) \models Q) \leqslant a + (\frac{1}{C^2} + \frac{\sqrt{2}}{C}).$$

В силу произвольности C , лемма доказана. Аналогично для случая, когда Q — убывающее свойство. □

4. Докажите усиление леммы 1.4 из лекции.
Лемма 2. Пусть Q— выпуклое свойство подмножетсв $\Gamma(n)$ и задана функция $m = m(n) \in \overline{[0, N]}$. Тогда если

$$\mathrm{P}(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\mathrm{P}(\Gamma(n, m) \models Q) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

Доказательство. (показано на занятии)
Пусть Q — возрастающее свойство.

$$P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leqslant P(\Gamma(n, m) \models Q) \cdot P(|\Gamma(n, m)| \leqslant m) + P(|\Gamma(n, m)| > m)$$

Случайная величина $X_n = |\Gamma(n, \frac{m}{N})| \sim Bin(N, \frac{m}{N})$ Для доказательства необходимо рассмотреть следующие случаи:

(a) $m \to 0$.
Из условия, $X_n \to 0$ (по вероятности).
Т.е. $P(X_n = 0) = 1 \Rightarrow P(|\Gamma(n, m)| > m) = 0$ и $P(|\Gamma(n, m)| \leqslant m) = 1$.
Берем пределы:

$$1 = \lim_{n\to\infty} P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} P(\Gamma(n, m) \models Q) \cdot 1 + 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\Gamma(n, m) \models Q) = 1.$$

(b) $m \to c > 0$.
$X_n \to Pois(c) \Rightarrow$

$$P(X_n \leqslant c) = \sum_{k=0}^{c} \frac{c^k}{k!} e^{-c} = t < 1,$$

$$P(X_n > c) = \sum_{k=c+1}^{N} \frac{c^k}{k!} e^{-c} \to 1 - t \text{ при } n \to \infty.$$

Переходим к пределам:

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} P(\Gamma(n, c)) \cdot t + 1 - t.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P(\Gamma(n, m)) = \lim_{n\to\infty} P(\Gamma(n, c)) = 1$$

(c) $N - m \to c > 0$.
$N - X_n \sim Pois(c) \Rightarrow$

$$P(N - X_n \leqslant N - m) = \sum_{k=N-m}^{N} \frac{c^k}{k!} e^{-c} = P(X_n \leqslant m) = t < 1$$

$$P(X_n > m) = 1 - t.$$

Далее аналогично предыдущему пункту.

(d) $m \to \infty$ и $N - m \to \infty$ (рассмотрен на занятии)

Для Q — убывающего, аналогично.

$$P(\Gamma(n, \frac{m}{N}) \models Q) \leqslant P(\Gamma(n, m) \models Q) \cdot P(|\Gamma(n, m)| \geqslant m) + P(|\Gamma(n, m)| < m)$$

Следовательно, для выпуклого свойства как пересения убыв. и возвр. доказано. □

5. Пусть Q — свойство подмножеств $\Gamma(n)$, $|\Gamma(n)| = N$. Докажите, что тогда для $p = m/N$ выполняется неравенство

$$P(\Gamma(n, m) \models Q) \leqslant 10\sqrt{m} \cdot P(\Gamma(n, p) \models Q)$$

.

Доказательство.

$$P(\Gamma(n,p) \models Q) = \sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n,p) \models Q \,|\, |\Gamma(n,p)| = k) P(|\Gamma(n,p)| = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} P(\Gamma(n,k) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = k) \geqslant P(\Gamma(n,m) \models Q) P(|\Gamma(n,p)| = k).$$

Случайная величина $|\Gamma(n,p)|$ имеет биномиальное распределение $Bin(N,p)$.

$$P(|\Gamma(n,p)| = k) = C_N^m p^m (1-p)^{N-m} = \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= (1+\mathrm{o}(1)) \frac{N^N \sqrt{2\pi N}}{m^m \sqrt{2\pi m} (N-m)^{N-m} \sqrt{2\pi(N-m)}} p^m (1-p)^{N-m} =$$

$$= (1+\mathrm{o}(1)) \frac{N^N p^m (1-p)^{N-m}}{m^m (N-m)^{N-m}} \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}} =$$

$$= (1+\mathrm{o}(1)) \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}} = (1+\mathrm{o}(1)) \sqrt{\frac{1}{2\pi m}} \sqrt{\frac{1}{1-p}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{10\sqrt{m}}$$

Т.е., $P(\Gamma(n,m) \models Q) \leqslant 10\sqrt{m} \cdot P(\Gamma(n,p) \models Q)$.

$\square$

6. 1) В случайном процессе $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}(m), m = 0, ..., N)$ для возрастающего свойства Q определим $m_Q^* = \min\{m : \tilde{\Gamma}(m) \models Q\}$. Докажите, что функция $\hat{m}$ является пороговой функцией для Q тогда и только тогда, когда $m_Q^* = \Theta_p(\hat{m})$, т.е. для любой положительной функции $g(n) \to \infty$ выполнено

$$P\left(\frac{1}{g(n)}\hat{m} \leqslant m_Q^* \leqslant g(n)\hat{m}\right) \to 1.$$

Доказательство. По условию m_Q^*:

$$P(\tilde{\Gamma}(m_Q^*) \models Q) = 1, P(\tilde{\Gamma}(m_Q^* - 1) \models Q) = 0$$

$\Rightarrow$
Пусть $\hat{m}$ — пороговая функция для Q и $\exists g(n) \to \infty$: либо а) $m_Q^* \leqslant \frac{\hat{m}}{g(n)}$, либо б) $m_Q^* \geqslant g(n)\hat{m}$.
а) $\frac{m_Q^*}{\hat{m}} \leqslant \frac{1}{g(n)} \to 0$, т.е. $m_Q^* = \mathrm{o}(\hat{m}) \Rightarrow P(\tilde{\Gamma}(m_Q^*) \models Q) = 0$. Получили противоречие.
б) $\frac{m_Q^*}{\hat{m}} \geqslant g(n) \to \infty$, т.е. $m_Q^* = w(\hat{m}) \Rightarrow P(\tilde{\Gamma}(m_Q^* - 1) \models Q) = 1$. Противоречие.

$\Leftarrow$
Пусть $m_Q^* = \Theta_p(\hat{m})$. Нужно доказать, что $\hat{m}$ — пороговая функция для Q (она существует по следствию 1.3).
Пусть $m = \mathrm{o}(\hat{m})$. Тогда $\exists g(n) : m < \frac{\hat{m}}{g(n)}$ при $n > n_0$.

$$P(\tilde{\Gamma}(m) \models Q) = P(m_Q^* \leqslant m) \to 0, n \to \infty.$$

Пусть теперь $m = w(\hat{m})$. Тогда $\exists g(n) : m \geqslant g(n)\hat{m}$ при $n > n_0$.

$$\mathrm{P}(\tilde{\Gamma}(m) \models Q) = \mathrm{P}(m_Q^* \leqslant m) \to 1, n \to \infty.$$

□

2) Докажите, что если в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства Q выполнено $m(1/2; n) \to +\infty$, то точная пороговая функция для Q существует тогда и только тогда, когда

$$\frac{m_Q^*}{m(1/2; n)} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1.$$

Доказательство. Пусть Q — возрастающее свойство.
$\Rightarrow$
Пусть $\hat{m}$ — точная пороговая функция, и либо а) $m_Q^* < m(1/2; n)$, либо б) $m_Q^* > m(1/2; n)$.

$$\mathrm{P}(\Gamma(m(1/2; n) - 1) \models Q) < \frac{1}{2} \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(m(1/2; n)) \models Q)$$

а) $1 \leftarrow \mathrm{P}(\Gamma(m_Q^*) \models Q) \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(m(1/2; n) - 1) \models Q) < \frac{1}{2}$. Противоречие
б) Так как $m(1/2; n) \to \infty$, то и $m_Q^* \to \infty$. Понятно, что точная пороговая функция связана с $m_Q^* \Rightarrow \hat{m} \to \infty$

$\Leftarrow$
По условию, $(1 - \vartheta)m(1/2; n) \leqslant m_Q^* \leqslant (1 + \vartheta)m(1/2; n)$.
Пусть $m(1/2; n)$ — точная пороговая функция, тогда если $m \leqslant m(1/2; n) - 1$, то:

$$\mathrm{P}(\Gamma(m) \models Q) \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(m(1/2; n) - 1) \models Q) \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(m_Q^* - 1) \models Q) \to 0$$

Если же $m \geqslant m(1/2; n)$, то

$$\mathrm{P}(\Gamma(m) \models Q) \geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m(1/2; n) \models Q)) \geqslant \mathrm{P}(\Gamma(m_Q^*) \models Q) \to 1.$$

□

7. Докажите, что в биномиальной модели случайных подмножеств для монотонного свойства Q существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено

$$\frac{p(\varepsilon; n)}{p(1/2; n)} \to 1.$$

Доказательство. .
$\Rightarrow$

$\Leftarrow$
По условию, $(1 - \vartheta)p(1/2; n) \leqslant p(\varepsilon; n) \leqslant (1 + \vartheta)p(1/2; n), \vartheta \to 0$.
Пусть $p(1/2; n)$ — точная пороговая вероятность. Тогда если $p \leqslant (1 - \varepsilon)p(1/2; n)$, то

$$\mathrm{P}(\Gamma(p) \models Q) \leqslant \mathrm{P}(\Gamma(p(\varepsilon; n))) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

Если $p \geqslant (1 + \varepsilon)p(1/2; n)$, то

$$\mathrm{P}(\Gamma(p) \models Q) \geqslant \mathrm{P}(\Gamma(p(\varepsilon; n))) \to 1 \text{ при } \varepsilon \to 1$$

□