

ТРУДЫ МФТИ

Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)

Том 13, № 1 (49) 2021 год

Содержание

Информатика и управление	5
<i>Доткулова А. С.</i> Программная реализация мониторинга психофизических свойств водителя с использованием гейминг-технологий	5
<i>Ле В. Ш.</i> Оптимизация алгоритма декодирования min-sum для кодов с низкой плотностью проверок на четность	16
<i>Спивак В. С., Тартаковский А. Г.</i> Анализ взвешенной процедуры Ширяева–Робертса в задаче обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки	24
<i>Спивак В. С., Тартаковский А. Г., Беренков Н. Р.</i> Численное сравнение алгоритмов инициализации следов объектов	33
<i>Широкова Л. Р., Логинов В. Н.</i> Анализ эффективности архитектур нейронных сетей для детекции Replay Attack в системах лицевой биометрии	42
<i>Яшина М. В., Таташев А. Г., Фомина М. Ю.</i> Аппроксимация корреляционной функции скорости транспортного средства по GPS/Glonass-данным	47
Физика	55
<i>Астапенко В. А., Сахно С. В., Сахно Е. В.</i> Обобщение принципа спектроскопического соответствия на временную зависимость квантовых переходов	55
<i>Хлаинг Тун Йе, Чжко У Аунг, Васильев М. Н., Ко Ко Зау Хмет, Мин Маунг Зин, Зар Аунг Яр</i> Управление электростатической зарядкой твердых тел в каналах, заполненных электронно-пучковой плазмой	65
<i>Кхыонг Н. В.</i> Обоснование возможности применения посадочного радиолокатора для обнаружения метеобразований	71
<i>Сахно С. В., Кротов Ю. А., Яковец А. В.</i> Особенности фотопоглощения на «core-shell» наночастицах в различных матрицах при наличии плазмонных резонансов	83
Механика	89
<i>Бондаренко Н. С.</i> Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе {1,0}-аппроксимации	89
<i>Горелов С. Л., Нгуен В. Л.</i> Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа	96

<i>Засвялов И. Н., Быков А. А., Бычков А. А.</i> Определение относительной фазовой проницаемости при фильтрации жидкости со степенной реологией	108
<i>Карапетян А. В., Муницына М. А.</i> Динамика волчка тип-топ при вязком трении	114
<i>Муницына М. А.</i> Динамика кельтского камня при малом трении	122
<i>Константинов Д. Н.</i> Описание перехода турбулентности через скачок уплотнения на базе моделей турбулентности класса DRSM	128
<i>Максименко И. А., Хорин А. Н.</i> Течение вязкого газа в вертикальной трубе	139
Сведения об авторах статей	146
Ссылки на опубликованные статьи	148

PROCEEDINGS OF MIPT

Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology

Volume 13, N 1 (49) 2021

Contents

Computer science and management	5
<i>Dotkulova A. S.</i> Software implementation of monitoring the psychophysical properties of a driver using gaming technologies	5
<i>Le V. Sh.</i> Optimization of the min-sum decoding algorithm for low-density parity-check codes	16
<i>Spivak V. S., Tartakovsky A. G.</i> Analysis of the weighted Shiryaev-Roberts procedure in the problem of changepoint detection for models with unknown post change parameters	24
<i>Spivak V. S., Tartakovsky A. G., Berenkov N. R.</i> Numerical comparison of objects' tracks initiation algorithms	33
<i>Shirokova L. R., Loginov V. N.</i> Analysis of the effectiveness of neural network architectures for Replay Attack detection in the facial biometrics system	42
<i>Yashina M. V., Tatashhev A. G., Fomina M. Ju.</i> Approximation of the vehicle speed correlation function using GPS/Glonass data	47
Physics	55
<i>Astapenko V. A., Sakhno S. V., Sakhno E. V.</i> Generalization of the spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions	55
<i>Ye Hlaing Tun, Aung Kyaw Oo, Vasiliev M. N, Htet Ko Ko Zaw Zin Min Maung, Ya Zar Aung</i> Control of electrostatic charging of solids in channels filled with electron beam plasma	65
<i>Khuong N. V.</i> Justification of the possibility of using a landing radar to detect meteorological formations	71
<i>Sakhno S. V., Krotov Yu. A., Yakovets A. V.</i> Features of photoabsorption on $\langle\langle$ core-shell $\rangle\rangle$ nanoparticles in various matrices in the presence of plasmon resonances	83
Mechanics	89
<i>Bondarenko N. S.</i> Determination of generalized displacements in an orthotropic plate under the action of concentrated force based on the {1,0}-approximation	89
<i>Gorelov S. L, Nguyen V. L.</i> Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in the hypersonic rarefied gas flow	96
<i>Zavialov I. N., Bykov A. A., Bychkov A. A.</i> Calculation of the relative phase permeabilities in the case of filtration of power law fluids in porous media	108

<i>Karapetyan A. V., Munitsyna M. A.</i> Tip-top dynamics in viscous friction	114
<i>Munitsyna M. A.</i> Celt dynamics in the case of low friction	122
<i>Konstantinov D. N.</i> Description of the normal shock wave-turbulence interaction based on turbulence DRSM models	128
<i>Maximenko I. A., Khorin A. N.</i> Viscous gas flow in a vertical tube.....	139
Authors' Background Information	146
References to the Published	148

УДК 519.8

A. S. Dotkulova

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)

Программная реализация мониторинга психофизических свойств водителя с использованием гейминг-технологий

С развитием вычислительной техники меняется как поведение участников дорожного движения, так и структура самого потока. На улично-дорожной сети появляются разные уровни автономности транспортного средства, вносящие свои корректировки в поведение водителя на дорогах. Устройство автомобилей становится более сложным, появляется много элементов электроники, которые, с одной стороны, помогают водителю, с другой — требуют последовательности в действиях, для реализации которых необходимо безошибочное выполнение маневров. В связи с этим возникает потребность в оценке не только опыта вождения, но и состояния, а также настроения водителя. Возникает надобность в классификации поведения водителя на дороге и разработке методов мониторинга и оценки опасного вождения. Психофизическое состояние во многом влияет на стиль вождения. Таким образом, актуальна разработка подходов к исследованию зависимости вероятности принятия решения водителем от собственного состояния. Предлагаемый подход основан на проведении тестов с использованием игровых технологий и статистического анализа результатов экспериментов. Такой анализ во многом может помочь при прогнозировании поведения на дороге полностью автономных транспортных средств.

В настоящей статье предложен подход к исследованию психофизических свойств участника автодорожного движения, а именно водителя, при разработке информационной системы с использованием гейминг-технологий.

Ключевые слова: транспортный поток, клиент-серверная система, программирование компьютерной игры, внимание водителя, статистический анализ.

A. S. Dotkulova

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)
Moscow Technical University of Communication and Informatics (MTUCI)

Software implementation of monitoring the psychophysical properties of a driver using gaming technologies

With the development of computer technology, both the driver's behavior on the road and the flow structure itself change. Various levels of autonomy of vehicles occur on the roads making their own adjustments to the driver's behavior on the roads. The device of cars becomes more complex. There are many electronic elements that, on the one hand, help the driver, on the other hand a sequence of actions is required to perform for their implementation without errors. Therefore, it is necessary to assess, besides the driving experience, the condition and mood of the driver. There is a need to classify the driver behavior on the road and develop methods for monitoring and assessing dangerous driving. The psychophysical state greatly influences the driving style. Thus, the development of approaches to the study of the dependence of the probability of driver's decision-making on the driver's condition is relevant. The proposed approach is based on conducting tests using gaming technologies and conducting a statistical analysis of the experimental results. This analysis can greatly assist in predicting the road behavior of fully autonomous vehicles.

© Доткулова А. С., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

This paper proposes an approach to the study of the psychophysical properties of a road user, namely a driver, when developing an information system using gaming technologies.

Key words: traffic flow, client server system, computer game programming, driver attention, statistical analysis.

1. Введение

В мире происходит быстрый рост объема информации. Новые методы получения, хранения и переработки информации, процессы информационного взаимодействия в обществе, а также изменения объема информации — основа информационной революции. В течение всего двадцатого века эволюционировала вычислительная техника. Начиная с 1964 года происходит активное развитие сетевых технологий. Усовершенствование электроники позволяет получать данные о перемещении отдельных людей и транспортных средств, существует возможность мониторинга показателей различных форм жизнедеятельности человека, состояния окружающей среды, параметров движения транспортного средства.

Транспорт играет важную роль в развитии современного общества. Основной задачей транспорта является перевозка пассажиров и грузов. Автомобильный транспорт — лидер по количеству перевозимых пассажиров и грузов в мире. Главная задача при перевозке — обеспечение безопасности перевозимых пассажиров и грузов, а также стабильность транспортного потока.

Транспортным потоком будем называть последовательность синхронизированного множества транспортных средств, движущихся со скоростью, зависящей от плотности потока и взаимодействующих по правилам дорожного движения. Транспортный поток характеризуется основными параметрами: скоростью v — среднее значение, с которой движется поток на заданном интервале (м/с), плотностью ρ — число автомобилей, расположенных на участке дороги заданной длины (авт/м), интенсивностью q — число автомобилей, проходящих сечение дороги за единицу времени (авт/с).

Скорость потока и расстояние между автомобилями во многом зависит от человеческого фактора: стиля вождения, опыта, эмоционального и физического состояний, погодных условий, состояния дорожного полотна и др. В работе рассматривается модель следования за лидером как пример классической модели транспортных потоков, в которой не последнюю роль играет человеческих фактор. Согласно модели «следования за лидером» движение цепочки автомобилей можно представить уравнением:

$$\begin{cases} x_{n+1}(t) - x_n(t) = C_0 + C_1 \dot{x}_n(t) + C_2 \ddot{x}_n(t), \\ 0 \leq x_n(t) \leq M_1, \forall n = 0 \dots N, \forall t > 0 \leq, \\ |\ddot{x}_n(t)| \leq M_2, \forall n = 0 \dots N, \forall t > 0 \leq. \end{cases} \quad (1)$$

С начальными условиями:

$$x_1(0) = x_1 \dots x_n(0) = x_n$$

и граничным условием:

$$x_{N+1}(t) = f(t),$$

где $f(t)$ — функция движения x_{N+1} частицы (лидера), C_0 — длина автомобиля, C_1 — задержка реакции водителя, C_2 — коэффициент сцепления с дорогой, M_1 — ограничение скорости, M_2 — ограничение, связанное с торможением, M_3 — ограничение, связанное с ускорением.

Наша задача состоит в исследовании коэффициента C_1 . Время реакции водителя — это сложный процесс, зависящий от разных факторов. В простом случае — это время между получением сигнала об изменениях дорожной ситуации, его обработкой и началом

реакции водителя. Однако в каждом пункте есть свои особенности, в совокупности сильно влияющие на длительность принятия решения.

При исследовании модели движения «Следование за лидером» были проведены эксперименты с помощью микроволнового радара SSHD, собирающего данные о расстоянии между автомобилями, скорости автомобилей, интенсивности, типах транспортных средств и т. д. Опираясь на эти данные, была выделена закономерность между скоростью автомобилей и дистанцией между ними (рис. 1).

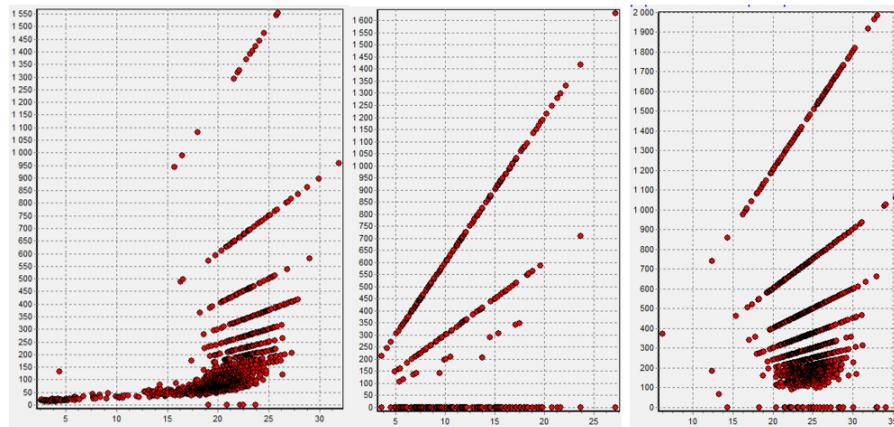


Рис. 1. Зависимость дистанции между автомобилями от их скорости при разных условиях:
а) затрудненное движение, б) движение по выделенной полосе, в) движение в будни

В результате обработки данных с радара получилось поле величин (рис. 2) по оси X — скорость v , которую мы пытаемся оценить ($\text{м}/\text{с}$), по оси Y дистанция d_m между автомобилями (м). Оказывается, что это прямые статистически устойчивые линии, показывающие, что на самом деле поток водителей можно классифицировать, например, по темпераменту человека или стилю поведения на дороге.

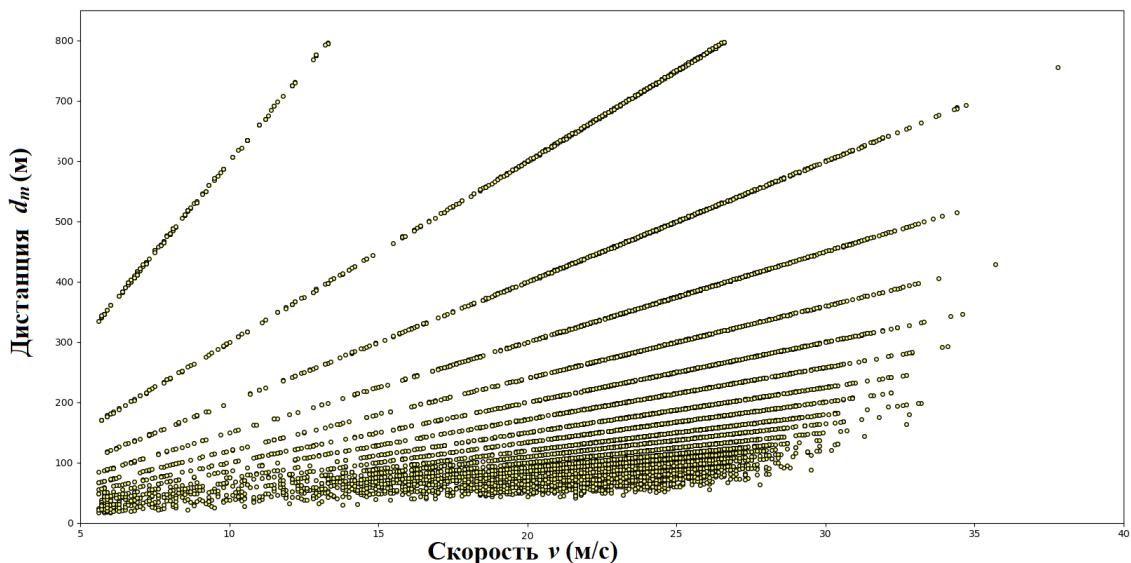


Рис. 2. Поле $d_m - v$ по данным с радара

2. Психофизиологические и эмоциональные характеристики человека

Изменения ситуаций на дороге обрабатываются органами зрения или органами слуха водителя. Поступивший сигнал обрабатывается центральной нервной системой. Результатом обработки является совокупность действий, совершаемых водителем. Процесс обработки информации зависит от многих параметров: пола, возраста, стажа вождения, физической подготовки, эмоционального состояния, психологического состояния, условий работы, времени суток, дорожных ситуаций, применениях медицинских препаратов, отвлекающих факторов: музыки, пассажиров, мобильных устройств, ароматов и т.д. В настоящее время нет ответа, какой из факторов: недостаточная профессиональная подготовка, усталость, болезненность, эмоциональное состояние и др., относящихся непосредственно к человеку, управляющему транспортным средством, вносит наибольший вклад в аварийность.

Целью данной статьи является выявление и описание оценки поведенческих характеристик водителя, влияющих на безопасность движения, а также их коррелируемость. Рассматриваются как психофизиологические характеристики [4], например, эмоциональная устойчивость, так и физические: переключаемость, распределение и концентрация внимания, скорость и время реакции и т. д.

В каждой реакции различают *латентный* и *моторный* периоды. В зависимости от вида источника раздражения время латентного периода различается по продолжительности. Время моторного периода зависит от психофизиологических особенностей человека и возможностей действий. Поведение участника движения зависит от разных факторов: общего физического состояния, эмоционального настроя, психологических особенностей и т. д. Нередко на дороге встречаются случаи девиантного поведения участников движения, которые непредсказуемы и не всегда объяснимы. Некоторые причины носят не социальный, а биopsихический характер. Важно уметь их оценивать. Человек как объект исследования слишком сложен, чтобы его поведение можно было уложить в определенные формулы, поэтому главное внимание уделяют исследованию статистических связей.

Человеческий фактор опишем следующим выражением:

$$HF = \sum_{i=1}^n a_i * f_i, \quad (2)$$

где HF — человеческий фактор, a_i — значимость психофизиологической характеристики, f_i — психофизиологическая характеристика.

Для анализа человеческого фактора была разработана система тестирования, оценивающая следующие психофизиологические качества человека: психотип личности, время простой реакции, память, степень утомляемости, внимательность и эмоциональная устойчивость. После созданной методики тестирования перед нами встало задание оценки надежности разработанных тестов. В рамках исследования были рассмотрены два физиологических качества: время простой реакции и внимательность.

3. Описание системы ADES

Разработанная система тестов с использованием игровых технологий [7] Analyzer of Driver Emotional State (ADES) [5] (рис. 3) имеет клиент-серверную архитектуру [2], обеспечивает обмен данными между устройствами Интернета вещей, представляет собой систему тестирования AutoTest, определяющую эмоциональное состояние водителя, по результатам которых выдаются рекомендации при дальнейшей подготовке и набор мини-игр, созданных с помощью Unity.

AutoTest — блок тестирования, в котором содержатся как открытые психофизиологические тесты, так и тесты на усвоение правил дорожного движения и вспомогательного материала. При создании тестовых вопросов имеется возможность выбрать один из четы-

рех типов вопроса: один правильный ответ, несколько правильных ответов, свободный ввод и указание соответствия.

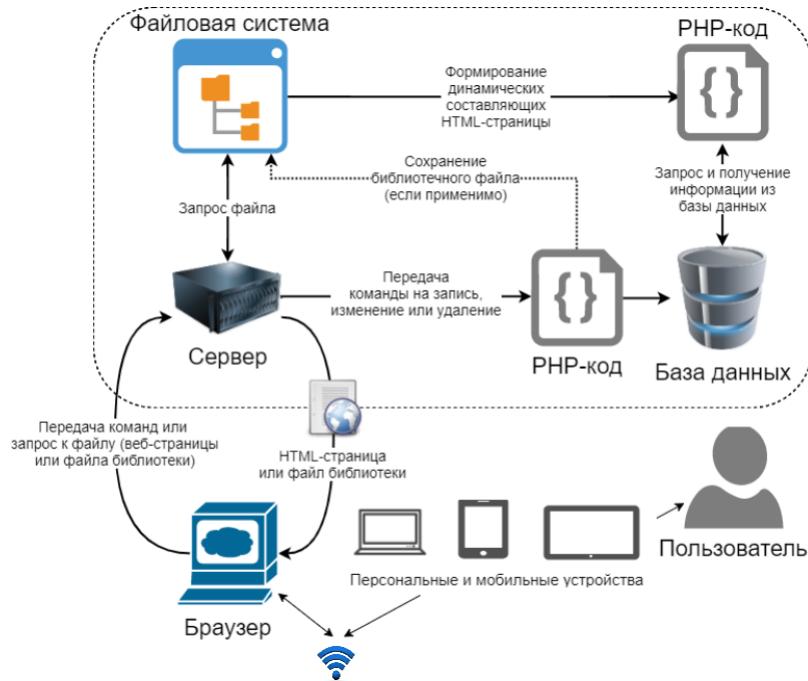


Рис. 3. Общая структура ADES

Unity — межплатформенная среда разработки компьютерных игр, разработанная американской компанией Unity Technologies. Unity позволяет создавать приложения, работающие на более чем 25 различных платформах, включающих персональные компьютеры, игровые консоли, мобильные устройства, интернет-приложения и другие. Основными преимуществами Unity являются наличие визуальной среды разработки, межплатформенной поддержки и модульной системы компонентов [3].

4. Разработка тестовых вопросов

Раздел текстовых заданий состоит из тестовых заданий, каждый из которых определяет одну из психофизиологических особенностей водителя:

- *Психологический тип.* Тест, определяющий тип водителя. Тест состоит из 86 вопросов. Ответ на вопрос предусмотрен «да» или «нет». Каждый вопрос относится к одному или нескольким типам поведения водителя.
- *Степень утомляемости.* Тест на усталость состоит из 34 вопросов. Вопросы с одним вариантом ответа: «да» или «нет». Каждому варианту ответа присваивается 0 или 1. В результате теста мы получаем последовательность из 0 и 1. Система подсчитывает количество единиц и выводит итоговый результат. По результатам теста будет выведена одна из трех фраз, в зависимости от набранных баллов.
- *Эмоциональная устойчивость.* Тест содержит 33 вопроса. На каждый вопрос можно ответить «да» или «нет». Есть две шкалы «эмоциональный» и «неэмоциональный». Часть вопросов соответствует одной шкале, часть другой. Результат тестирования выводится в виде графической шкалы с перевесом в ту или иную сторону.
- *Тест на внимательность.* Тест состоит из 18 вопросов. На каждый вопрос можно ответить «да» или «нет». Есть две шкалы «внимательность» и «невнимательность». Результаты выводятся аналогичны тесту на эмоциональную устойчивость.

- *Психотип личности.* Тест, помогающий лучше понимать свои собственные предпочтения и предпочтения других людей. Тест состоит из 30 вопросов. При ответе на вопрос можно дать один из следующих вариантов: «полностью согласны», «частично согласны», «частично не согласны», «полностью не согласны». В результате тестирования определяется, какую из альтернатив водитель предпочитает использовать. Рассматриваются четыре пары альтернативных предпочтений:

- Экстраверсия и интроверсия.
- Сенсорика и интуиция.
- Логика и этика.
- Рациональность и иррациональность.
- Внимательность. Текст заключается в изучении черно-белого изображения. При хорошо развитом внимании не составит труда дать ответы на вопросы теста. Тест состоит из 9 вопросов. Возможен только один правильный вариант. Правильному ответу присваивается 1, неправильному 0. Система подсчитывает количество единиц и выводит итоговый результат.

Вероятность правильного ответа на текстовые задания рассматривается как математическая функция параметров испытуемого человека и элемента теста, в основе которой лежит однопараметрическая модель Раша.

Однопараметрическая модель Раша имеет вид

$$p(\theta) = \frac{e^{\theta-b}}{1 + e^{\theta-b}}, \quad (3)$$

где θ — параметр, характеризующий уровень подготовленности испытуемого, b — параметр характеризующий трудность правильного ответа на вопрос, $p\theta$ — вероятность правильного ответа на вопрос, $p(\theta)$ — вероятность правильного ответа. Вероятность $P(\theta, b)$ как функция θ при фиксированном значении уровня сложности задания $b = b_0$ характеризует уровень подготовленности испытуемого. Вероятность $p(\theta, b)$ при фиксированном значении $\theta = \theta_0$ характеризует трудность задания.

5. Разработка гейминг-технологий

Unity — мультиплатформенный инструмент для разработки 3D- и 2D-игр. Данный движок предоставляет быстрый и гибкий способ портирования своего приложения практически на любую популярную операционную систему [6]. Разработанная информационная система ADES состоит из семи игр, направленных на определение физиологических характеристик водителя:

- *Тест-игра на реакцию и концентрацию.* Задача заключается в том, чтобы красный квадрат как можно дольше удержать в пределах игрового поля и не столкнулся с препятствиями.
- *Скорость реакции.* Тест-игра предназначена для определения простой скорости реакции. Задача состоит в том, чтобы за минимальное количество времени нажать на кнопку при смене цвета экрана.
- *Внимательность и память.* Тест-игра «Матрица» предназначена для проверки и тренировки зрительной памяти. Задача состоит в том, чтобы за минимальное время открыть все пары картинок, спрятанные за синим фоном. Цель игры «Матрица» — находить одинаковые изображения под кнопками, запоминая нужный цвет и расположение нужной ему кнопки.

- *Тест-игра «Мяч» для проверки простой реакции.* В игре реализовано динамическое падение объектов сверху экрана. Игроку необходимо собирать все мячи, стараясь не свершать ошибок. Помимо объекта «мяч», сверху падают другие предметы круглой формы.
- *Тест-игра «Сложная реакция».* Для определения сложной реакции водителя была создана игра, цель которой проехать как можно дальше и набрать наибольшее количество очков. В игре присутствуют объекты, которые как помогают игроку, так и мешают достижению цели. В игре в зависимости от пойманных объектов меняется скорость движения игра, направление, уровень здоровья.
- *Тест-игра на переключаемость и распределение внимания.* Игра заключается в том, чтобы за минимально количество времени нажатия на кнопку (простая реакция) правильно определить фигуру и ее расположение (сложная реакция). Описание игры: экран устройства водителя разделен на две части, в которых будут появляться случайные фигуры; водитель за минимальное время должен выбирать ту сторону экрана, на которой фигуры нет; игра заканчивается по истечении 60 секунд. В процессе игры программа ведет подсчет правильных и неправильных ответов, а также среднего времени ответа, эти данные отображаются на экране, записываются в переменные и хранятся в БД для дальнейшей обработки.
- *Тест-игра на концентрацию внимания.* Игра «Шум» представляет собой приложение для тренировки концентрации внимания водителя. Описание игры: игра состоит из двух режимов. Одна игровая сессия — 20 секунд. По шести полосам движутся машины с разными скоростями. Количество машин при каждой игре случайное. Всего шесть цветов машин — желтый, красный, зеленый, синий, оранжевый, бирюзовый (рис. 5). После окончания времени появляется вкладка «Ответ». В зависимости от режима (предусмотрено два режима) нужно посчитать количество красных машин или сумму красных и зеленых машин одновременно. Рассмотрим схему приложения игры «Шум» и принцип работы (рис. 4).

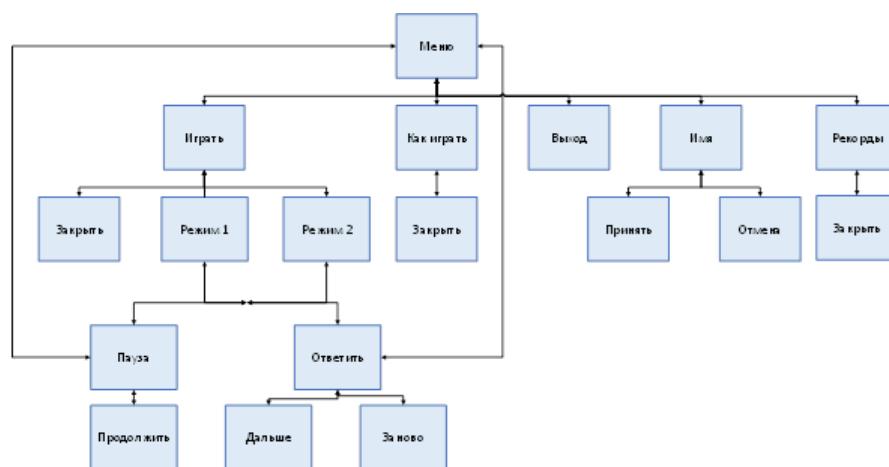


Рис. 4. Общая схема игры «Шум»

Перед началом создания игры необходимо подготовить рабочее поле программы, выставить необходимые настройки и изучить ее интерфейс. Для того чтобы описать логику поведения объектов сцены и их взаимодействие между собой использовался язык программирования C#. В качестве редактора кода был Visual Studio Code. Игра состоит из нескольких режимов: режим 1 и режим 2, инструкции по игре и рекордов. Движение транспортных средств задаётся при помощи скрипта «MoveCars», где вводится переменная скорость (максимальная и минимальная), а также коэффициент увеличения скорости и точку

уничтожения объектов. Задаем математическую модель — `Vector2 (1,0)` — направление с отношением 1 части по оси *X* и 0 частей по оси *Y* (таким образом автомобили едут горизонтально). Игра начинается с того, что объектам задается случайная скорость «`speed = Random.Range(minSpeed, maxSpeed)`». Если машина ехала направо «`if (isRight)`», меняем точку движения — `Vector (-1,0)` — машина едет налево — и, соответственно, меняем точку уничтожения транспортного средства. После окончания времени появляется вкладка «Ответ».

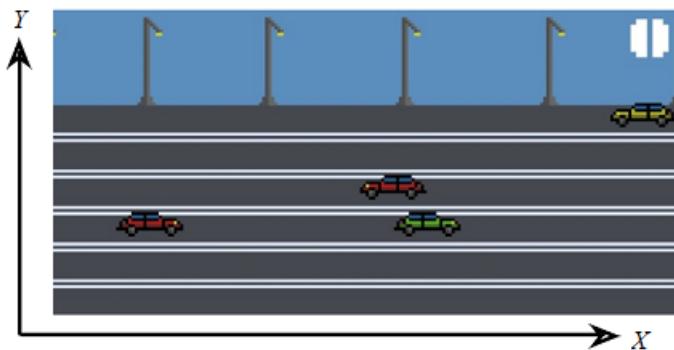


Рис. 5. Интерфейс игры

Таблица рекордов		
Ранг	Счет	Имя
1-ый	3	Николай
2-ой	2	Яна
3-ий	2	Вита
4-й	2	Антон
5-й	1	Ира
6-й	1	Настя

Рис. 6. Результат игры

В игре реализована многоуровневая система повышения сложности прохождения игры. Повышение сложности заключается в присвоении баллов, которые повышают количество обычных машин и тех, которые необходимо посчитать, а также их скорость движения. При прохождении нескольких уровней подряд начинается новая игра, скорость и количество машин увеличивается с каждым выигрышем. Таймер не изменяется. Во вкладке «Рекорды» — отображается окно с рейтинговой системой оценки: записью очков новых игроков; проверкой был ли игрок уже зарегистрирован в системе или нет; проверкой записи только лучшего результата; автоматической сортировкой по убыванию счета (рис. 6). Сохранение данных происходит таким образом, что все значения записываются с помощью `Json`, переводятся в `string` и записываются на устройство с помощью `PlayerPrefs`. `Json` (`JavaScript Object Notation`) — удобный формат для отправки и получения данных вне зависимости от языка. `PlayerPrefs` — это специальная система кэширования для отслеживания простых настроек игрока между игровыми сессиями; это небольшой набор методов для сохранения и загрузки данных из реестра системы.

6. Оценка результатов гейминг-технологий

Результаты проведения испытаний с использованием игровых технологий обрабатываются с помощью статистического анализа. В качестве статистического метода обработки использовался критерий Вилкоксона [1]. Критерий Вилкоксона был выбран в качестве непараметрического критерия сравнения двух выборок по уровню отношения количества правильных ответов ко всем в течении времени и череде испытаний.

Проверим зависимость результатов испытания от физиологического состояния.

Пример 1. Число экспериментов, в которых участник экспериментов охарактеризовал свое состояние как «бодрое» (состояние A), $n_1 = 40$. В $n_2 = 7$ экспериментах состояние было охарактеризовано как «расслабленное» (состояние B).

Будем представлять результат эксперимента в виде дроби $\frac{a}{a+b}$, где a — число ошибочных ответов, а b — число правильных ответов, данных в экспериментах. Результаты $n_1+n_2 = 47$ экспериментов представляются в виде вариационного ряда (подчеркиваются результаты, относящиеся к состоянию A).

$$\begin{aligned} & 1. \frac{1}{103}, 2. \frac{2}{119}, 3. \frac{3}{108}, 4. \frac{3}{107}, 5. \frac{3}{107}, 6. \frac{4}{122}, 7. \frac{4}{110}, 8. \frac{5}{112}, 9. \frac{5}{111}, \\ & 10. \frac{5}{111}, 11. \frac{5}{108}, 12. \frac{6}{124}, 13. \frac{5}{103}, 14. \frac{6}{123}, 15. \frac{7}{133}, 16. \frac{7}{114}, 17. \frac{8}{108}, 18. \frac{9}{121}, \\ & 19. \frac{9}{117}, 20. \frac{8}{102}, 21. \frac{10}{126}, 22. \frac{9}{113}, 23. \frac{11}{133}, 24. \frac{11}{133}, 25. \frac{11}{131}, 26. \frac{10}{113}, 27. \frac{11}{124}, \\ & 28. \frac{12}{135}, 29. \frac{13}{139}, 30. \frac{13}{139}, 31. \frac{10}{100}, 32. \frac{12}{119}, 33. \frac{14}{137}, 34. \frac{11}{106}, 35. \frac{13}{121}, 36. \frac{16}{138}, \\ & 37. \frac{11}{94}, 38. \frac{14}{119}, 39. \frac{14}{116}, 40. \frac{16}{127}, 41. \frac{16}{124}, 42. \frac{15}{116}, 43. \frac{17}{128}, 44. \frac{17}{128}, 45. \frac{19}{141}, \\ & 46. \frac{13}{139}, 47. \frac{18}{124}. \end{aligned}$$

Для наблюдаемого значение критерия имеем $W = 925$.

Чтобы оценить нижнюю критическую точку $W_{\text{н}}$, используем формулу:

$$W_{\text{н}} = \left[\frac{(n_1 + n_2 + 1)n_1 - 1}{2} - z_{\text{кр}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \right], \quad (4)$$

где $z_{\text{кр}}$ — находят по таблице Лапласа по равенству $\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$, α — уровень значимости.

Подставив значения, получаем $W_{\text{н}} = 904.45$.

Определим теперь $W_{\text{в}} = (n_1 + n_2 + 1) \cdot n_1 - W_{\text{н}} = (40 + 7 + 1) \cdot 40 - 953.99 = 1015.547$.

При уровне значимости 0.1 нижняя критическая точка равна 904, а верхняя критическая точка равна 1015.

Таким образом, при уровне значимости 0.1 нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу H_0 , состоящую в том, что доля ошибочных ответов не зависит от того, находится ли участник экспериментов в состоянии А («бодрое») или в состоянии В («расслабленное»). Аналогичным образом рассматривались состояние как «уставшее» (состояние А) и как «сонное» (состояние В), в которых гипотеза H_0 также подтверждалась.

Далее рассматривались три различные пары эмоциональных состояний водителей: «депрессивное» + «спокойное», «депрессивное» + «улыбчивое» и «улыбчивое» + «спокойное». По трем парам проверялись зависимости количества правильных ответов, а также времени реакции испытуемого от его эмоционального состояния. Результаты исследования подтвердили гипотезу H_0 о том, что количество правильных ответов не зависит от того, в каком состоянии находится участник эксперимента. Для проверки зависимости времени реакции от состояния был проведен аналогичный расчет.

Заключение

Представленные исследования показали, что эмоциональное состояние водителя влияет на время реакции и общее количество ответов. В среднем отношение количества правильных ответов ко всем остается неизменным. Данные исследования могут быть использованы при подготовке водителей перед выходом на реальную дорогу, а также в исследованиях влияния дорожных ситуаций на состояния и характеристики водителя.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю Яшиной Марине Викторовне за поставленную задачу и ценные советы при планировании исследования.

Литература

1. Гмурман В. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для бакалавров. 12-е изд. Москва : Издательство Юрайт, 2013. 479 с.
2. Веллинг Л., Томсон Л. Разработка веб-приложений с помощью PHP и MySQL : пер. с английского. 5-е изд. Москва, Санкт-Петербург : Диалектика, 2019. 768 с.
3. Мэннинг Д., Батфилд-Эддисон П. Unity для разработчика. Мобильные мультиплатформенные игры. Санкт-Петербург : Питер, 2018. 304 с.
4. Рогов Е.И. Настольная книга практического психолога: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Гуманит. центр ВЛАДОС, 1999.
5. Яшина М.В., Доткулова А.С. Программа — анализатор эмоционального состояния водителя — ANALYZER OF DRIVER EMOTIONAL STATE (ADES). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610102, 09.01.2020. Заявка № 2019666978 от 19.12.2019.
6. Яшина М.В., Доткулова А.С., Кутейников И.А. Методические указания по программированию алгоритмов обработки изображений для мобильных устройств на базе операционной системы Android. Москва : Техполиграфцентр, 2019.
7. Xianyang Gan, Yutong Yao, Xin Zong, Ruifang Cui, Nan Qiu, Jiaxin Xie, Dong Jiang, Shaofei Ying, Xingfeng Tang, Li Dong, Diankun Gong, Weiyi Ma, Tiejun Liu, Action real-time strategy gaming experience related to increased attentional resources: an attentional blink study. Frontiers in Human Neuroscience. 2020. V. 14. P. 101. doi: 10.3389/fnhum.2020.00101

References

1. Gmurmam V. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika : uchebnoe posobie dlya bakalavrov. 12 izd. Moscow : Yurayt-Izdat, 2013. (in Russian).
2. Velling L., Tomson L. Razrabortka web-prilozheniy s pomoshchyu PHP i MySQL : perevod s anglijskogo. 5 izd. Moscow, Sankt-Peterburg : Dialetika, 2019. 768 p. (in Russian).
3. Menning D. Batfild-Eddison P. Unity dlya razraborotchika. Mobilnyye multiplatformennyye igry. Sankt-Peterburg : Piter, 2018. (in Ruassian).
4. Rogov E.I. Nastolnaya kniga prakticheskogo psikhologa: Ucheb. posobiye: 2-e izd. pererab. i dop. Sanktpeterburg : Gumanit. izd. tsentr VLADOS, 1999. (in Ruassian).
5. Yashina M.V., Dotkulova A.S. Programma — analizator emotsionalnogo sostoyaniya voditelya — ANALYZER OF DRIVER EMOTIONAL STATE (ADES). Svidetelstvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2020610102. 09.01.2020. Zayavka № 2019666978 ot 19.12.2019 (in Russian).

6. Yashina M.V., Dotkulova A.S., Kuteynikov I.A. Metodicheskiye ukazaniya po programmirovaniyu algoritmov obrabotki izobrazheniy dlya mobilnykh ustroystv na baze operatsionnoy sistemy Android. Sanktpeterburg : Tekhpoligrafcentr, 2019. (in Russian).
7. Xianyang Gan, Yutong Yao, Xin Zong, Ruifang Cui, Nan Qiu, Jiaxin Xie, Dong Jiang, Shaofei Ying, Xingfeng Tang, Li Dong, Diankun Gong, Weiyi Ma, Tiejun Liu, Action real-time strategy gaming experience related to increased attentional resources: an attentional blink study. Frontiers in Human Neuroscience. 2020. V. 14. P. 101.

Поступила в редакцию 08.12.2020

УДК 621.391

B. III. Le

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Оптимизация алгоритма декодирования min-sum для кодов с низкой плотностью проверок на четность

Рассмотрены итеративные алгоритмы декодирования кодов с низкой плотностью проверок на чётность. Приведены различные модифицированные версии алгоритма min-sum. Построены графики зависимости битовой ошибки при передаче данных по двоичному каналу связи с аддитивным белым гауссовским шумом. Проведено сравнение сложности реализации различных алгоритмов декодирования.

Ключевые слова: LDPC-код, алгоритм «sum-product», алгоритм «min-sum», алгоритм «min-sum normalized», алгоритм «min-sum offset», комбинированный алгоритм «min-sum», коэффициент нормализации, коэффициент сдвига.

V. Sh. Le

Moscow Institute of Physics and Technology

Optimization of the min-sum decoding algorithm for low-density parity-check codes

In this paper iterative decoding algorithms of low-density parity check codes are considered. Various modified versions of the minsum algorithm are considered. Dependency graphs of the bit error on various coefficients when transmitting data over a binary communication channel with additive white Gaussian noise are constructed. Comparison of the complexity of the implementation of various decoding algorithms is studied.

Key words: LDPC-code, sum-product algorithm, min-sum algorithm, min-sum normalized algorithm, min-sum offset algorithm, combined min-sum algorithm, normalization factor, shift factor.

1. Введение

Среди многих существующих помехоустойчивых кодов коды с низкой плотностью проверок на четность (LDPC-коды) являются одними из самых мощных, эффективность которых приближается к пределу Шеннона [1, 2]. LDPC-коды впервые были представлены Робертом Галлагером [3] в 1963 г., однако из-за сложности реализации коды практически не нашли применения. С развитием компьютерных технологий и ростом требований к точности передачи информации LDPC-коды вновь привлекли к себе внимание исследователей. В последнее время эти коды применяются во многих современных стандартах, таких как DVB-S2, DVB-T2 и IEEE 802.3an [1, 4, 5].

Существует множество алгоритмов декодирования LDPC-кодов. Среди них самым известным является алгоритм «sum-product» [6], который обеспечивает высокую эффективность декодирования, но требует больших вычислительных затрат. В связи с этим существуют альтернативные методы, целью которых является снижение вычислительных затрат. Среди них одним из самых популярных является алгоритм «min-sum» [6, 7]. Алгоритм «min-sum» является аппроксимацией алгоритма «sum-product» с использованием простых

операций, таких как поиск минимума и сложение, вместо сложных функций гиперболического тангенса и арктангенса. В то же время из-за такого упрощения алгоритм «min-sum» обладает худшей помехоустойчивостью по сравнению с «sum-product» алгоритмом. Проигрыш по энергетическому выигрышу кодирования составляет при этом 0.2...0.5 dB [4]. В связи с чем в данной работе предложены некоторые модифицированные версии алгоритма «min-sum» для повышения его эффективности.

2. Алгоритмы декодирования LDPC-кодов

LDPC-код представляет собой линейный блочный код, характеризующийся разряженной проверочной матрицей $H(N \times M)$, где M – количество проверочных строк; N – длина кода, т.е. количество столбцов в матрице; K – длина исходных данных. Если количество ненулевых элементов в каждой строке равно $d_r < N$ и количество ненулевых элементов в каждом столбце равно $d_c < M$, то код называется регулярным, в противном случае – нерегулярным.

Графически LDPC-коды можно представить с помощью графа Таннера (рис. 1).

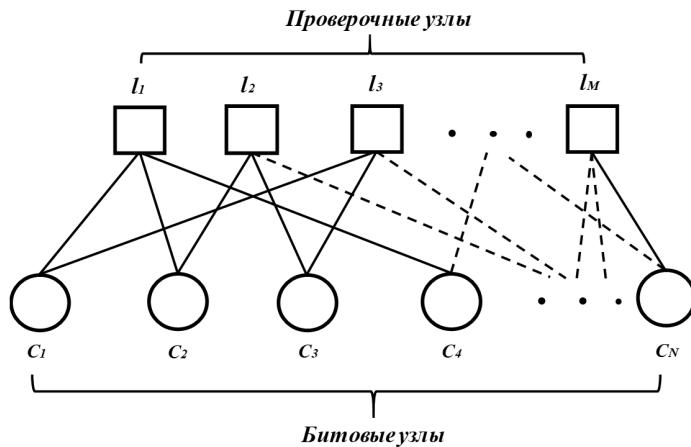


Рис. 1. Представление регулярного LDPC-кода в виде графа Таннера

На рис. 1 вершины $l_1, l_2 \dots l_M$ – проверочные узлы, а вершины $c_1, c_2 \dots c_N$ – битовые узлы. Таким образом, из графа видно, что $d_r = 3$ и $d_c = 2$.

Для декодирования LDPC-кодов используются различные алгоритмы декодирования с «жёстким» и «мягким» входом [8]. Причём «жёсткие» декодеры имеют достаточно простую конструкцию, их легко реализовать на практике, но они обладают невысокой эффективностью. А «мягкие» декодеры, наоборот, более сложные, но обладают высокой эффективностью. В данной работе рассмотрены только «мягкие» декодеры.

2.1. Алгоритм декодирования «sum-product»

Для пояснения алгоритма введём следующие обозначения:

$M_{j,i}$ – сообщение от i -го битового узла к j -му проверочному узлу; $E_{j,i}$ – сообщение от j -го проверочного узла к i -му битовому узлу; A_i – множество проверок, в которых участвует i -й символ; B_j – множество символов, которые участвуют в j -й проверке.

Алгоритм «sum-product» описан в [6, 9]. Его можно представить в виде следующих шагов:

Шаг 1. Инициализация: для каждого принятого символа c_i установить значения $M_{j,i}$:

$$M_{i,j} = L(c_i), \quad (1)$$

где $L(c_i)$ – априорная функция логарифмического отношения правдоподобия (LLR) принятого символа c_i :

$$L(c_i) = \ln \frac{p(c_i = 0)}{p(c_i = 1)}. \quad (2)$$

Шаг 2. Формирование сообщений от битовых узлов к проверочным (для первой итерации используется формула (1)):

$$M_{j,i} = L(c_i) + \sum_{j' \in A_i, j' \neq i} E_{j',i}. \quad (3)$$

Шаг 3. Формирование сообщений от проверочных узлов к битовым:

$$E_{j,i} = 2 \tanh^{-1} \left(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \tanh(M_{j,i'} / 2) \right). \quad (4)$$

Шаг 4. Расчёт значения общего суммарного LLR и определение новых значений битов кодового слова:

$$L(P_i) = L(c_i) + \sum_{j \in A_i} E_{j,i}. \quad (5)$$

По полученным значениям $L(P_i)$ определить новые значения битов кодового слова:

$$c_i = \begin{cases} 1, & L(P_i) \leq 0, \\ 0, & L(P_i) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Процесс декодирования будет остановлен тогда, когда будет найдено допустимое кодовое слово, т.е. $cH^T = 0$, или пока не будет выполнено заданное количество итераций.

2.2. Алгоритм декодирования «min-sum»

Алгоритм «min-sum» является модифицированным алгоритмом «sum-product», полученный путём упрощения вычисления сообщений от проверочных узлов к битовым. Для этого применено упрощение расчёта LLR суммы по модулю 2 множества случайных статистически независимых величин $C_1, C_2 \dots C_n$ [4]:

$$L(C_1 \oplus C_2 \dots \oplus C_n) \approx \left(\prod_{i=1}^n \text{sign}(L(C_i)) \right) \cdot \min_{i=1 \dots n} (|L(C_i)|). \quad (7)$$

Таким образом, в алгоритме «min-sum» упрощается вычисление $E_{j,i}$, считая что элемент, соответствующий наименьшему $M_{j,i'}$, является определяющим при расчёте. Поэтому $E_{j,i}$ может быть аппроксимирован следующим образом:

$$E_{j,i} \approx \left(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} \text{sign}(M_{j,i'}) \right) \cdot \min_{i' \in B_j, i' \neq i} (|M_{j,i'}|). \quad (8)$$

Вычисление значения $E_{j,i}$ теперь требует только простых операций поиска минимума и сложения.

3. Модифицированные алгоритмы «min-sum»

Как уже было сказано выше, из-за упрощения алгоритм «min-sum» обладает достаточно большим энергетическим проигрышем, порядка 0.2...0.5 дБ, по сравнению с «sum-product» алгоритмом. В связи с этим задача его модификации с целью повышения эффективности является актуальной. Ниже представлены модифицированные версии алгоритма «min-sum».

3.1. Алгоритм «min-sum normalized»

Отличие алгоритма «min-sum normalized» [2, 4, 6] от алгоритма «min-sum» состоит в том, что теперь к расчёту сообщений от проверочных узлов к битовым добавляется один элемент, так называемый коэффициент нормализации α для сокращения разницы в значениях, вычисляемых по формулам (4) и (8):

$$E_{j,i} = \alpha \cdot \left(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} sign(M_{j,i'}) \right) \cdot \min_{i' \in B_j, i' \neq i} (|M_{j,i'}|), \quad (9)$$

где значение α варьируется, как правило, в пределах $(0, 1]$.

Для нахождения оптимального значения коэффициента α конкретного кода (в данном случае использовался регулярный LDPC-код со скоростью $R = 1/2$) было проведено исследование в среде моделирования Matlab. При этом использовалась проверочная матрица регулярного кода $H(408 \times 204)$ [10]. Вес каждого столбца: $d_c = 3$, а вес каждой строки: $d_r = 6$. Максимальное количество итераций – 5, канал связи – АБГШ, модуляция – BPSK.

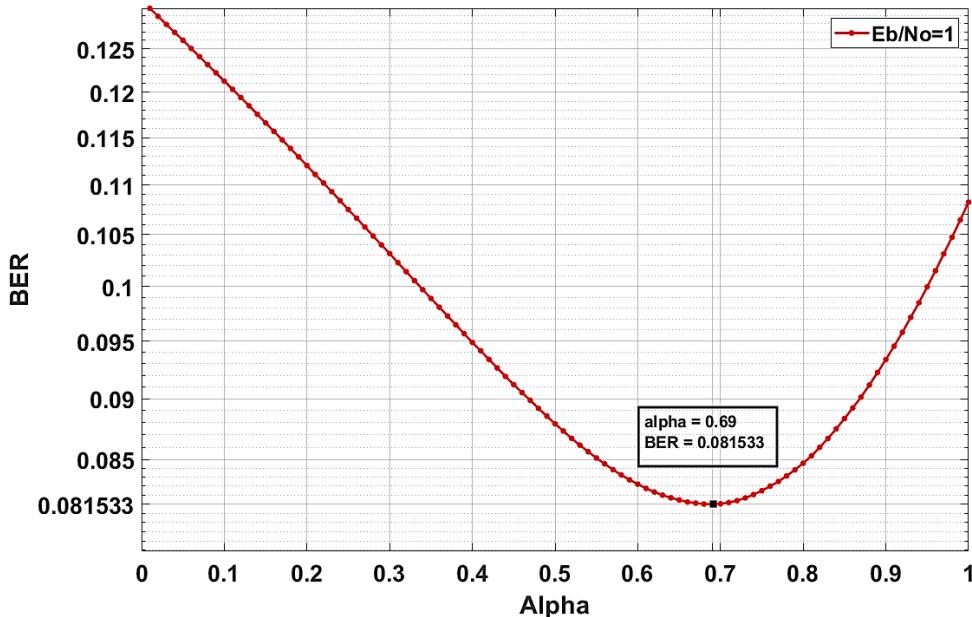


Рис. 2. Зависимость вероятности битовой ошибки (BER) от коэффициента нормализации α при $E_b/N_0 = 1$ дБ

На рис. 2 видно, что при $\alpha = 0.69$ вероятность битовой ошибки достигает минимума – 0.081533.

3.2. Алгоритм «min-sum offset»

Алгоритм «min-sum offset» [1, 2, 4] является альтернативной модификацией «min-sum» алгоритма. В отличие от алгоритма «min-sum normalized», в расчёте $E_{j,i}$ используется коэффициент сдвига β :

$$E_{j,i} = \left(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} sign(M_{j,i'}) \right) \cdot \max \left(\left(\min_{i' \in B_j, i' \neq i} (|M_{j,i'}|) - \beta \right), 0 \right). \quad (10)$$

Значение β также варьируется в пределах $(0, 1]$. При таких же условиях, как и для α , была построена зависимость для нахождения оптимального значения β . На рис. 3 показано, что значение BER достигло минимума – 0.082560 при $\beta = 0.73$.

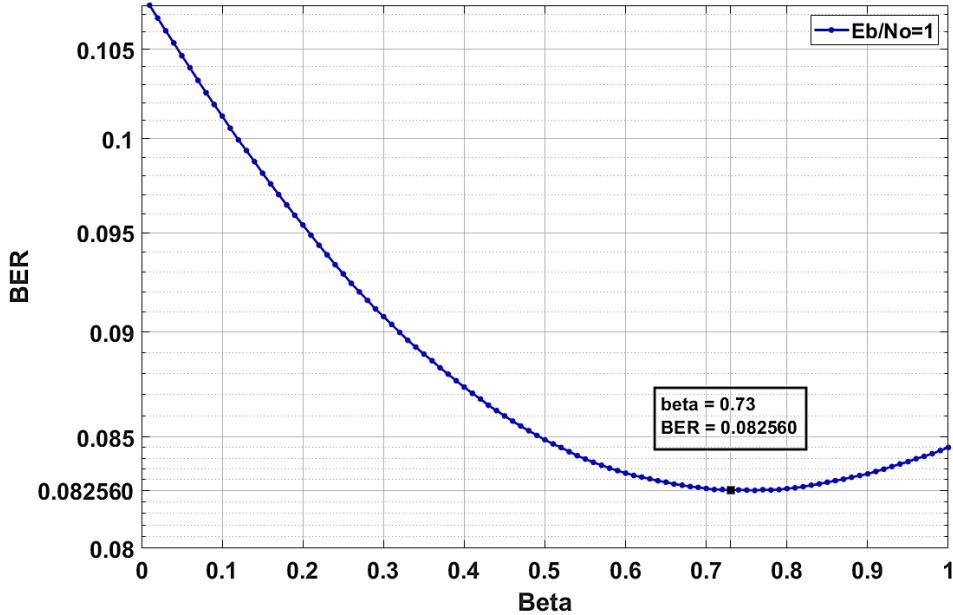


Рис. 3. Зависимость вероятности битовой ошибки (BER) от коэффициента сдвига β при $E_b/N_0 = 1$ дБ

3.3. Комбинированный алгоритм «min-sum»

Для достижения максимальной эффективности, приближенной к алгоритму «sum-product», предложен следующий вариант комбинации двух вышерассмотренных алгоритмов: «min-sum normalized» и «min-sum offset», т.е. в расчёте $E_{j,i}$ присутствуют одновременно два коэффициента α и β :

$$E_{j,i} = \alpha \cdot \left(\prod_{i' \in B_j, i' \neq i} sign(M_{j,i'}) \right) \cdot \max \left(\left(\min_{i' \in B_j, i' \neq i} (|M_{j,i'}|) - \beta \right), 0 \right). \quad (11)$$

На рис. 4 представлена поверхность, иллюстрирующая зависимость вероятности битовой ошибки от коэффициентов α и β . Можно заметить, что минимальная вероятность битовой ошибки достигается при $\alpha = 0.84$, $\beta = 0.44$.

В табл. 1 приведены оптимальные значения α и β для нескольких значений E_b/N_0 для различных алгоритмов декодирования.

Т а б л и ц а 1

Сравнительная характеристика помехоустойчивости различных алгоритмов декодирования

E_b/N_0	«min-sum»	«min-sum normalized»		«min-sum offset»		Комбинированный		
		α	BER	β	BER	α	β	BER
1	$0.10601 \cdot 10^{-0}$	0.69	$0.81533 \cdot 10^{-1}$	0.73	$0.82560 \cdot 10^{-1}$	0.84	0.44	$0.80552 \cdot 10^{-1}$
2	$0.41161 \cdot 10^{-1}$	0.77	$0.26561 \cdot 10^{-1}$	0.53	$0.27528 \cdot 10^{-1}$	0.81	0.22	$0.25399 \cdot 10^{-1}$
3	$0.45882 \cdot 10^{-2}$	0.81	$0.26443 \cdot 10^{-2}$	0.42	$0.27289 \cdot 10^{-2}$	0.86	0.14	$0.23823 \cdot 10^{-2}$

Из рис. 4 и табл. 1 видно, что значения вероятности ошибки на бит при комбинированном алгоритме для различных значений E_b/N_0 являются минимальными по сравнению с двумя другими модификациями «min-sum» алгоритма.

В табл. 2 представлены расчёты количества операций для выполнения одной итерации рассмотренных алгоритмов. Для конкретной проверочной матрицы $H(408 \times 204)$, имеющей вес каждого столбца: $d_c = 3$, а вес каждой строки: $d_r = 6$, получена табл. 3.

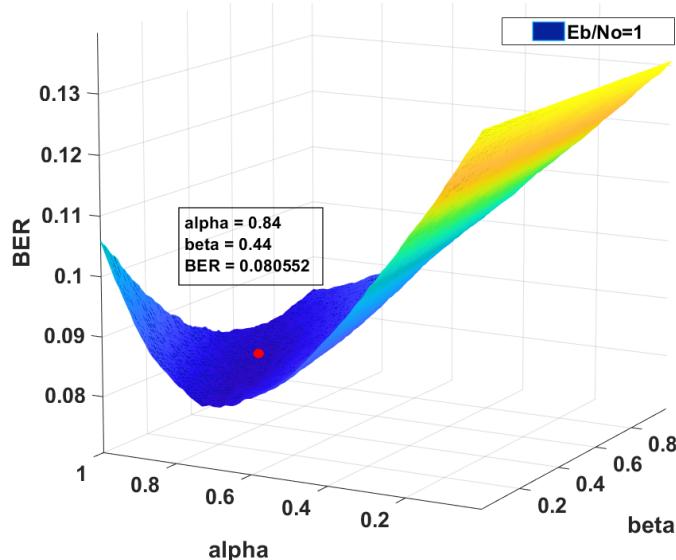


Рис. 4. Зависимость вероятности битовой ошибки (BER) от коэффициентов α и β при $E_b/N_0 = 1$ дБ

Таблица 2

Количество вычислительных операций для выполнения одной итерации алгоритмов декодирования «min-sum», «min-sum normalized», «min-sum offset» и предложенного комбинированного алгоритма

Операция	Количество операций			
	«min-sum»	«min-sum normalized»	«min-sum offset»	«Комбинированный»
Сложение	Nd_c^2	Nd_c^2	$Nd_c^2 + Mdr$	$Nd_c^2 + Mdr$
Умножение	$Mdr(d_r - 1)$	$Mdr(d_r - 1) + Mdr$	$Mdr(d_r - 1)$	$Mdr(d_r - 1) + Mdr$
Сравнение	$Mdr(d_r - 2) + N$	$Mdr(d_r - 2) + N$	$Mdr(d_r - 1) + N$	$Mdr(d_r - 1) + N$
Взятие модуля числа	$Mdr(d_r - 1)$	$Mdr(d_r - 1)$	$Mdr(d_r - 1)$	$Mdr(d_r - 1)$
Сложение по модулю 2	Mdr	Mdr	Mdr	Mdr

Таблица 3

Количество вычислительных операций, необходимых для выполнения одной итерации алгоритмов декодирования для LDPC-кода 408×204 [10]

Операция	Количество операций			
	«min-sum»	«min-sum normalized»	«min-sum offset»	«Комбинированный»
Сложение	3672	3672	4896	4896
Умножение	6120	7344	6120	7344
Сравнение	5304	5304	6528	6528
Взятие модуля числа	6120	6120	6120	6120
Сложение по модулю 2	1224	1224	1224	1224

Также построена гистограмма для сравнения количества операций для выполнения одной итерации различных алгоритмов декодирования (рис. 5). Из гистограммы видно,

что самым сложным является комбинированный метод, затем алгоритмы «min-sum offset», «min-sum normalized» и «min-sum».

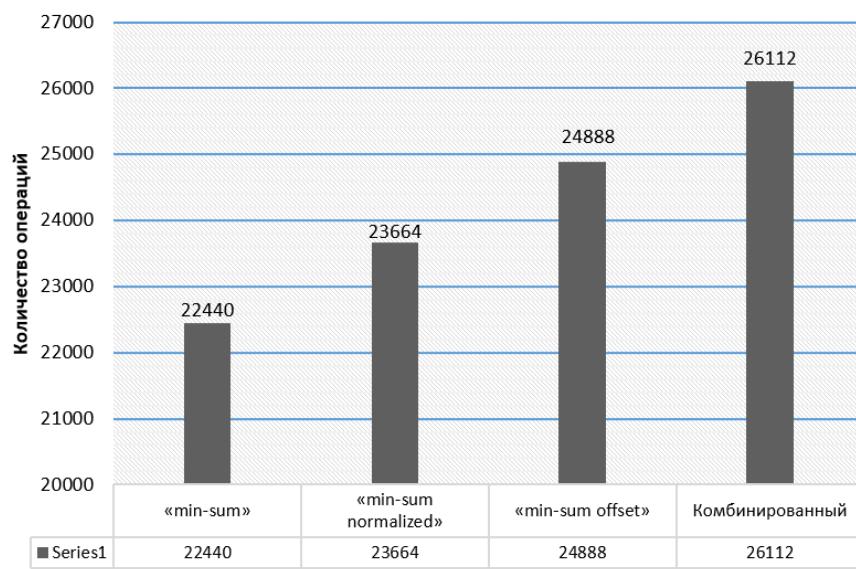


Рис. 5. Сложность различных алгоритмов декодирования

4. Заключение

В статье рассмотрены несколько алгоритмов декодирования LDPC-кодов, основанных на алгоритме «min-sum». Была исследована возможность использования двух коэффициентов (коэффициент нормализации и коэффициент сдвига) для повышения эффективности алгоритма «min-sum», получены их оптимальные значения для каждого алгоритма. А также предложен комбинированный алгоритм «min-sum», в котором использовались одновременно два коэффициента, и получены их оптимальные значения для разных значений E_b/N_0 .

Также проведено сравнение рассмотренных алгоритмов по эффективности. Следует отметить, что самым эффективным оказался предложенный комбинированный алгоритм.

Проведена оценка сложности рассмотренных алгоритмов. По общему результату исследования комбинированный алгоритм имеет лучший результат по сравнению с двумя остальными из семейства алгоритмов min-sum, но, к сожалению, его вычислительная сложность получается наибольшей.

Литература

1. Roberts M.K. Combined Normalized and Offset Min-Sum Decoding Algorithm for Irregular LDPC Codes // National Conference on Networking, Embedded and Wireless Systems (NEWS-2016), BMS College of Engineering, Bangalore, INDIA. 2016.
2. Gunnam K., Choi G. A low power architecture for min-sum decoding of LDPC codes // TAMU, ECE Technical Report, May. 2006.
3. Gallager R.G. Low-Density Party-Check Codes // Monograph, M.I.T. Press. 1963.
4. Кирьянов И.А. Декодирование кодов с малой плотностью проверок на чётность. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. 2015.
5. Коротков Л.Н., Башкиров А.В., Свиридова И.В. Использование LDPC-кодов // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2013. Т. 9, № 6–3. С. 41–44.

6. Islam M.R., Shafiullah D.S., Faisal M.M.A., Rahman I. Optimized min-sum decoding algorithm for low density parity check codes // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2011. V. 2, N 12. P. 168–174.
7. Башкиров А.В., Хорошайлова М.В., Борисов В.И. Реализации LDPC-декодера низкой сложности с использованием алгоритма Min-sum // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2016. № 5. С. 82–86.
8. Хлынов А.А. Исследование итеративных алгоритмов декодирования кодов с низкой плотностью проверок на четность // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 4. С. 13–17.
9. Johnson S.J. Introducing low-density parity-check codes // University of Newcastle, Australia. 2006. V. 1.
10. MacKay D.J.C. Encyclopedia of Sparse Graph Codes. 2014.
<http://www.inference.org.uk/mackay/codes/data.html>

References

1. Roberts M.K. Combined Normalized and Offset Min-Sum Decoding Algorithm for Irregular LDPC Codes. National Conference on Networking, Embedded and Wireless Systems (NEWS-2016), BMS College of Engineering, Bangalore, INDIA. 2016.
2. Gunnam K., Choi G. A low power architecture for min-sum decoding of LDPC codes. TAMU, ECE Technical Report, May. 2006.
3. Gallager R.G. Low-Density Party-Check Codes. Monograph, M.I.T. Press. 1963.
4. Kiryanov I.A. Decoding of codes with a low density parity checks. dissertation for the degree of candidate of technical sciences. 2015. (in Russian).
5. Korotkov L.N., Bashkirov A.V., Sviridova I.V. Using LDPC Codes. Vestnik of Voronezh State Technical University. 2013. V. 9, N 6–3. P. 41–44. (in Russian).
6. Islam M.R., Shafiullah D.S., Faisal M.M.A., Rahman I. Optimized min-sum decoding algorithm for low density parity check codes. International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2011. V. 2, N 12. P. 168–174.
7. Bashkirov A.V., Khoroshaylova M.V., Borisov V.I. Implementations of LDPC decoder of low complexity using Min-sum algorithm. Vestnik of Voronezh state technical University. 2016. N 5. P. 82–86. (in Russian).
8. Khlynov A.A. Investigation of iterative algorithms for decoding codes with a low density parity checks. Proceedings of MIPT. 2016. V. 8, N 4. P. 13–17. (in Russian).
9. Johnson S.J. Introducing low-density parity-check codes. University of Newcastle, Australia. 2006. V. 1.
10. MacKay D.J.C. Encyclopedia of Sparse Graph Codes. 2014.
<http://www.inference.org.uk/mackay/codes/data.html>

Поступила в редакцию 05.10.2020

УДК 519.216.5

B. C. Спивак, A. G. Тартаковский

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Анализ взвешенной процедуры Ширяева–Робертса в задаче обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки

Рассматривается задача обнаружения изменения свойств случайного процесса (разладки) с неизвестными после изменения параметрами случайного процесса. В данной задаче в качестве наблюдаемого случайного процесса рассматриваются две модели: гауссовский процесс и процесс авторегрессии 1 порядка. В работе предлагается алгоритм обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки: взвешенная процедура Ширяева–Робертса. Такой подход позволяет эффективно решать множество задач, встречающихся на практике, когда на самом деле до конца неизвестны свойства случайного процесса после разладки. Проведены исследования характеристик обнаружения для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса и сравнены с характеристиками обнаружения процедуры Ширяева–Робертса, когда параметры случайного процесса после разладки известны. Анализ показал, что использование взвешенной процедуры Ширяева–Робертса позволяет обнаруживать разладку с заданным уровнем ложных обнаружений, при этом не проигрывать существенно характеристикам указанной процедуры, когда параметры случайного процесса после разладки известны.

Ключевые слова: обнаружение момента изменения, процедура Ширяева–Робертса, гауссовский процесс, процесс авторегрессии 1 порядка, метод Монте–Карло.

V. S. Spivak, A. G. Tartakovsky

Moscow Institute of Physics and Technology

Analysis of the weighted Shiryaev–Roberts procedure in the problem of changepoint detection for models with unknown post change parameters

A problem of detecting a change in the properties of a random process (disorder) with unknown post change parameters is considered. In this problem, two models of an observable random process are considered: a Gaussian process and an autoregressive process of the first order. In this paper, we propose a changepoint detection algorithm for models with unknown post change parameters, viz. the weighted Shiryaev–Roberts procedure. This approach makes it possible to effectively solve many problems encountered in practice when the properties of a random process after the changepoint are not fully known. Analysis of detection characteristics for the weighted Shiryaev–Roberts procedure is carried out and compared with the detection characteristics of the Shiryaev–Roberts procedure, when the post changes of the parameters of the random process are known. The results show that the use of the weighted Shiryaev–Roberts procedure allows for detecting the changepoint with a given level of false detections, while not losing significantly to the characteristics of the Shiryaev–Roberts procedure, when the parameters of the random process after the changepoint are known.

Key words: changepoint detection, Shiryaev–Roberts procedure, Gaussian process, autoregressive process of the first order, Monte Carlo.

1. Введение

В работе [1] рассматривалась задача последовательного обнаружения разладки — изменения свойств случайного процесса, в которой его свойства были известны до и после разладки. Практический интерес вызывает задача, когда свойства случайного процесса после разладки до конца неизвестны. В такой задаче для обнаружения разладки логично применить взвешенные процедуры обнаружения разладки (это процедуры, в которых учитывается вероятностное пространство, элементарные события которого — случайный процесс после разладки с определенными свойствами, и задана вероятность наступления соответствующего элементарного события).

Напомним, задача последовательного обнаружения разладки — пока наблюдение за случным процессом соответствует ожидаемому, следует продолжать наблюдение и обнаруживать изменение (разладку) как можно скорее после разладки. В работе [1] было показано, что в байесовской постановке (момент разладки — неизвестная и случайная величина) процедура Ширяева–Робертса показывает схожие характеристики с оптимальной процедурой Ширяева, но, в отличие от нее, не использует априорное распределение момента разладки. По этой причине процедура Ширяева–Робертса больше подходит для решения практических задач. В другой работе [2] было показано, что взвешенная процедура Ширяева–Робертса асимптотически оптимальна в классе процедур с заданным уровнем максимальной условной вероятностью ложной тревоги, а также в минимаксной постановке (момент разладки — неизвестная, но неслучайная величина). Поэтому интересно исследовать, насколько сильно в различных постановках проигрывает взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на несколько возможных параметров случайного процесса после разладки, процедуре Ширяева–Робертса, настроенной на известные свойства случайного процесса после разладки.

В данной работе используются две модели наблюдаемого случайного процесса: гауссовский процесс и процесс авторегрессии 1 порядка. Для первой модели рассмотрим байесовский подход, а для второй модели рассмотрим минимаксный подход. На рис. 1 представлен процесс авторегрессии 1 порядка и взвешенная процедура обнаружения разладки, состоящая из взвешенной суммы трех процедур, настроенных на различные параметры случайного процесса после разладки.

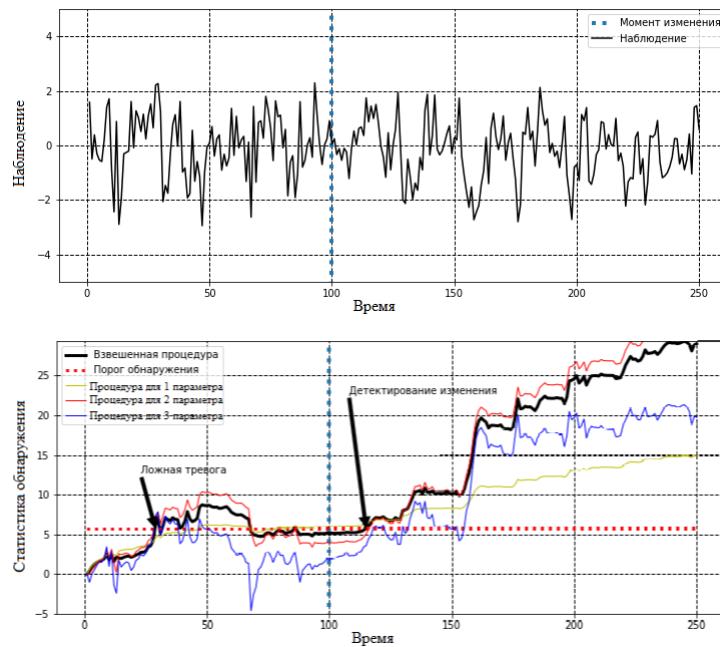


Рис. 1. Пример задачи обнаружения разладки взвешенной процедурой Ширяева–Робертса

2. Модель

Пусть $\{X_n\}$ — наблюдаемый процесс, где $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. До изменения он описывается распределением P_∞ , после изменения — P_0 . В байесовской постановке изменение происходит в неизвестный и случайный момент времени ν , $\nu \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Обозначим $p_j(\mathbf{X}^n)$, $j = \infty, 0$ — плотность распределения P_j^n , где $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$. Тогда, если зафиксирован момент изменения $\nu \in Z_+$, плотность $p_\nu(\mathbf{X}^n) = p(\mathbf{X}^n|\nu)$ является комбинацией плотностей до и после момента изменения:

$$\begin{aligned} p_\nu(\mathbf{X}^n) &= p_\infty(\mathbf{X}^\nu) \cdot p_0(\mathbf{X}_{\nu+1}^n | \mathbf{X}^\nu) = \\ &= \prod_{i=1}^{\nu} p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=\nu+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_i^n = (X_i, \dots, X_n)$ и $p_j(X_n | \mathbf{X}^{n-1})$ — условная плотность X_n при условии \mathbf{X}^{n-1} . Пусть ν — порядковый номер последнего наблюдения перед изменением.

Как было упомянуто выше, в данной задаче (для гауссовой модели) рассматривается байесовская постановка: постановка задачи, когда момент изменения — случайная величина, независимая от наблюдений, с априорным распределением вероятности $\pi_k = P(\nu = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Как и в [1] будем считать, что момент изменения ν получается из геометрического распределения

$$P(\nu = k) = \rho(1 - \rho)^k \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $0 < \rho < 1$.

Процедура обнаружения разладки представляет собой время остановки T для наблюдаемого процесса $\{X_n\}$. Когда $T \leq \nu$, это означает, что произошла ложная тревога. Хорошая процедура обнаружения гарантирует при низком уровне ложной тревоги маленькую задержку в обнаружении $T - \nu$.

В байесовской постановке риск, связанный с задержкой обнаружения, измеряется средней задержкой обнаружения [3]:

$$ADD(T) = E^\pi[T - \nu | T > \nu] = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k E_k[T - k | T > k] P_\infty(T > k)}{1 - PFA(T)}, \quad (3)$$

а риск ложной тревоги измеряется как взвешенная вероятность ложной тревоги [3]:

$$PFA(T) = P^\pi(T \leq \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P_\infty(T \leq k), \quad (4)$$

где P_k и E_k — вероятность и соответствующее ей ожидание момента изменения $\nu = k \in Z_+$.

Для модели авторегрессии 1 порядка рассматривается минимаксный подход: подход, когда момент изменения — неизвестная и неслучайная величина [3]. В минимаксной постановке, риск, связанный с риском ложного срабатывания, оценивается максимальной локальной условной вероятностью ложной тревоги:

$$LCPFA(T) = \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} P_\infty(T > k + m^* | T \geq k). \quad (5)$$

В минимаксной постановке считается максимальная средняя задержка обнаружения ADD в определенном окне.

3. Процедуры обнаружения

Если « $H_k : \nu = k$ » и « $H_\infty : \nu = \infty$ » — гипотезы, что разладка наступает в момент времени $0 \leq k < \infty$ и что разладка не наступает никогда, тогда получаем отношение правдоподобия между гипотезами, используя (1):

$$\begin{aligned} LR_{k,n} &= \frac{p_k(\mathbf{X}^n)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \frac{p_\infty(\mathbf{X}^k) \cdot p_0(\mathbf{X}_{k+1}^n | \mathbf{X}^k)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=k+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{\prod_{i=1}^n p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})} = \\ &= \prod_{i=k+1}^n \frac{p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}, \quad k < n. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{L}_i = p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) / p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})$. Тогда из [4] статистика Ширяева–Робертса будет считаться:

$$R_n = \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \mathcal{L}_i = (1 + R_{n-1}) \mathcal{L}_n, \quad n \geq 1, \quad R_0 = 0. \quad (6)$$

Время остановки процедуры Ширяева–Робертса:

$$T_A = \inf\{n \geq 1 : R_n \geq A\}, \quad A > 0, \quad (7)$$

где A — порог.

Для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса необходима статистика, настроенная на каждый из возможных после разладки параметров наблюдения θ_j [5]:

$$R_n(\theta_j) = (1 + R_{n-1}(\theta_j)) \mathcal{L}_n(\theta_j), \quad n \geq 1, \quad R_0 = 0. \quad (8)$$

С учетом веса (вероятности) принять каждый из параметров наблюдения θ_j после разладки, получается взвешенная статистика Ширяева–Робертса:

$$R_n^w = \sum_{j=i}^N W(\theta_j) R_n(\theta_j),$$

где $W(\theta)$ — функция распределения θ .

Тогда время остановки для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса записывается как:

$$T_B = \inf\{n \geq 1 : R_n^w \geq B\}, \quad B > 0, \quad (9)$$

где B — порог.

В данной работе неизвестным параметром после разладки будем считать среднее θ . Также будем считать, что каждое из возможных значений среднего θ_j равновероятно, для каждого значения θ_j значение функции распределения будет $W(\theta_j) = \frac{1}{N_\theta}$, где N_θ — число значений θ_j .

4. Гауссовская модель

Процесс наблюдения $\{X_n\}$ гауссовской модели удовлетворяет гауссову распределению $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ до разладки и $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ после:

$$X_n = \theta \mathbb{1}_{\{n > \nu\}} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

Отношение правдоподобия, используемое в (6) и (8), в этом случае:

$$\mathcal{L}_n = \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} X_n - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Отношение сигнал–шум определяется как $I = \theta^2/2\sigma^2$, $\sigma^2 = 1$.

Для оценки характеристик процедур обнаружения в данной задаче, будем использовать метод Монте-Карло. Для каждого прогона Монте-Карло мы симулируем двойную стохастическую модель: (X_n, ν) — наблюдение согласно (10) и момент изменения согласно (2). В каждом i -м, $i = 1, \dots, N$, прогоне Монте-Карло находится время остановки T_i для обычной (7) и взвешенной (9) процедур Ширяева–Робертса. Считается, что в конкретном i -м прогоне Монте-Карло $i = 1, \dots, N$ происходит ложная тревога, если $T_i < \nu_i$.

Оценка вероятности ложной тревоги (4):

$$\widehat{PFA}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{T_i < \nu_i\}}.$$

Оценка Монте-Карло средней задержки обнаружения (3):

$$\widehat{ADD}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - \nu_i) \mathbb{1}_{\{T_i > \nu_i\}} \frac{1}{1 - \widehat{PFA}(T)}.$$

Число прогонов Монте-Карло $N = \frac{1}{\Delta\alpha}$, где Δ — это точность, а α — ограничение для частоты возникновения ложных тревог.

4.1. Результаты компьютерного моделирования

Напомним, для исследования была выбрана процедура Ширяева–Робертса, поскольку, как показано в [1], она показывает почти такие же характеристики, как и оптимальная в байесовской постановке процедура Ширяева, но при этом не использует априорное распределение момента разладки. По этой причине процедура Ширяева–Робертса является более удачной с точки зрения практической применимости. Метод Монте-Карло позволяет получить характеристики процедур обнаружения с высокой точностью.

Параметры симуляций.

- 1) Отношение сигнал–шум после разладки $I = 0.5; 0.245; 0.125$, т.е. среднее после разладки $\theta = 1.0; 0.7; 0.5$;
- 2) Параметры геометрического распределения: $\rho = 0.2; 0.1; 0.05$.
- 3) Верхняя граница PFA : $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$.
- 4) Сетка параметров для процедуры взвешенного среднего:
 $\theta_6 = \{-1.0; -0.6; -0.2; 0.2; 0.6; 1.0\}$, $\theta_{20} = \{-1.0; -0.9; -0.8; \dots; 0.8; 0.9; 1.0\}$ — с пропуском 0.

В табл. 1–3 приведены сравнительные характеристики процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры и взвешенной процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на 6 и на 20 возможных параметров наблюдения после разладки. Из этих исследований мы делаем следующие выводы:

- 1) Как и ожидалось, процедура Ширяева–Робертса, настроенная на известные после разладки параметры, работает лучше, чем взвешенные процедуры Ширяева–Робертса, настроенные на несколько возможных после разладки параметров. Однако этот проигрыш в задержке обнаружения не является очень большим (не более 20%).
- 2) Как и ожидалось, проигрыш в задержке обнаружения взвешенными процедурами обнаружения, настроенных на несколько возможных параметров после разладки, относительно процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные параметры после разладки, увеличивается с уменьшением отношения сигнал–шум I .
- 3) Взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на 6 возможных параметров после разладки, когда один из этих шести является реальным, демонстрирует характеристики обнаружения немного лучше, чем взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на 20 возможных параметров, но начинает ей проигрывать, когда реальный параметр близок, но в точности не равен ни одному из шести возможных параметров после разладки в

отличие от взвешенной процедуры Ширяева–Робертса, которая настроена на 20 возможных параметров после разладки, среди которых есть реальный.

Т а б л и ц а 1
Характеристики процедур обнаружения для гауссовой модели наблюдения,
 $\rho = 0.2$

$\rho = 0.2$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09464	0.09471	0.09431	3.57	4.39	4.42
0.500	0.05	0.04762	0.04732	0.04718	4.46	5.31	5.33
0.500	0.01	0.00980	0.00983	0.00975	6.70	7.48	7.49
0.245	0.1	0.09373	0.09240	0.09154	4.80	6.00	5.96
0.245	0.05	0.04638	0.04697	0.04720	6.22	7.58	7.47
0.245	0.01	0.00967	0.00993	0.00951	9.70	11.46	11.28
0.125	0.1	0.09486	0.09454	0.09471	5.84	7.49	7.38
0.125	0.05	0.04908	0.04773	0.04708	7.66	10.22	9.90
0.125	0.01	0.00932	0.00989	0.00942	12.92	17.02	16.44

Т а б л и ц а 2
Характеристики процедур обнаружения для гауссовой модели наблюдения,
 $\rho = 0.1$

$\rho = 0.1$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09094	0.09171	0.09104	4.90	5.96	6.02
0.500	0.05	0.04838	0.04708	0.04682	5.91	7.06	7.09
0.500	0.01	0.00972	0.00958	0.00970	8.55	9.66	9.67
0.245	0.1	0.09717	0.09850	0.09866	6.96	8.65	8.62
0.245	0.05	0.04703	0.04900	0.04847	8.95	10.75	10.68
0.245	0.01	0.00936	0.00953	0.00946	13.54	15.83	15.53
0.125	0.1	0.09504	0.09793	0.09763	9.35	12.21	12.00
0.125	0.05	0.04841	0.04812	0.04883	12.18	15.94	15.61
0.125	0.01	0.00923	0.00954	0.00944	19.64	25.44	24.50

Т а б л и ц а 3
Характеристики процедур обнаружения для гауссовой модели наблюдения,
 $\rho = 0.05$

$\rho = 0.05$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09203	0.09202	0.09167	6.26	7.52	7.60
0.500	0.05	0.04694	0.04562	0.04521	7.47	8.82	8.90
0.500	0.01	0.00985	0.00953	0.00950	10.29	11.66	11.75
0.245	0.1	0.09336	0.09200	0.09313	9.65	11.86	11.73
0.245	0.05	0.04607	0.04501	0.04573	11.96	14.32	14.19
0.245	0.01	0.00910	0.00932	0.00942	17.34	19.85	19.56
0.125	0.1	0.09138	0.09223	0.09189	13.98	18.16	17.83
0.125	0.05	0.04610	0.04523	0.04574	17.69	22.78	22.22
0.125	0.01	0.00935	0.00929	0.00949	26.66	33.61	32.50

5. Модель авторегрессии 1 порядка

Процесс наблюдения $\{X_n\}$ модели авторегрессии 1 порядка удовлетворяет следующему выражению:

$$X_n = \theta \mathbb{1}_{\{n>\nu\}} X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1, X_0 = 0, \quad (11)$$

где ξ_n — гауссовский шум с единичной дисперсией.

Из [5] отношение правдоподобия, используемое в (6) и (8), в этом случае:

$$\mathcal{L}_n = \exp \left\{ \theta X_n X_{n-1} - \frac{\theta^2 X_{n-1}^2}{2} \right\}.$$

Отношение сигнал–шум в этом случае: $I = \frac{\theta^2}{2(1-\theta^2)}$.

Для оценки характеристик процедур обнаружения в данной задаче будем использовать метод Монте-Карло. Так как мы рассматриваем минимаксный подход, момент изменения ν — фиксированное число. Для каждого прогона Монте-Карло мы симулируем наблюдение X_n^i согласно (11), а также находим время остановки T_i для обычной (7) и взвешенной (9) процедур Ширяева–Робертса. Оценка локальной условной вероятности ложной тревоги (5):

$$\begin{aligned} \widehat{LCPFA}(T) &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} P_\infty(T < k + m^* | T \geq k) = \\ &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{P_\infty(k \leq T < k + m^*)}{P_\infty(T \geq k)} = \\ &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{N_{k,k+m^*}}{N} \cdot \frac{N}{N_k} = \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{N_{k,k+m^*}}{N_k}, \end{aligned}$$

где $N_{k,k+m^*}$ — количество прогонов Монте-Карло, в которых время остановки T_i попадает в интервал $[k; k + m^*]$, а N_k — количество прогонов Монте-Карло, в которых время остановки $T_i \geq k$.

5.1. Результаты компьютерного моделирования

Выбор порога для процедур обнаружения.

Для того, чтобы обеспечить $\widehat{LCPFA}(T) \leq \beta$, выбираем порог, как в [5]

$$A_\beta = \frac{1-\alpha}{\zeta\alpha},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta(1-\zeta)^{k^*}}{1+\beta}; \\ \zeta &= \frac{1}{(1+|\log \beta|)H}. \end{aligned}$$

где, в свою очередь, $k^* = H \cdot m^*$, а $m^* = |\log \beta|(1+|\log \beta|)$.

Параметры симуляций.

- 1) $H = 1.2$.
- 2) Отношение сигнал–шум после разладки $I = 2.132; 0.889; 0.48; 0.281; 0.167; 0.095$, т.е. среднее после разладки $\theta = 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5; 0.4$.
- 3) Момент изменения $\nu = 0; 10$.
- 4) Верхняя граница PFA : $\beta = 0.01$.
- 5) Сетка параметров для процедуры взвешенного среднего:
 $\theta_{18} = \{-0.9; -0.8; -0.7; \dots; 0.7; 0.8; 0.9\}$ — с пропуском 0.

Результаты симуляций Монте-Карло представлены в табл. 4. Из этих исследований мы делаем следующие выводы:

- 1) Для относительно больших значений сигнал–шум после изменения правила Ширяева–Робертса лишь незначительно превосходит взвешенную процедуру Ширяева–Робертса, но с уменьшением эта разница увеличивается.
- 2) Как и ожидалось, наихудший момент изменения $\nu = 0$.

Т а б л и ц а 4

**Характеристики процедур обнаружения для модели наблюдения
авторегрессии 1 порядка**

$\nu = 0; \beta = 0.01$				
I	$LCPFA$	$LCPFA_{18}^W$	ADD	ADD_{18}^W
2.132	0.0080	0.0079	11.08	11.74
0.889	0.0073	0.0073	13.72	14.72
0.480	0.0070	0.0071	17.52	18.97
0.281	0.0065	0.0065	23.15	25.32
0.167	0.0049	0.0049	31.84	36.35
0.095	0.0024	0.0025	45.88	59.57
$\nu = 10; \beta = 0.01$				
I	$LCPFA$	$LCPFA_{18}^W$	ADD	ADD_{18}^W
2.132	0.0080	0.0079	9.62	10.05
0.889	0.0073	0.0073	11.98	12.72
0.480	0.0070	0.0071	15.30	16.59
0.281	0.0065	0.0065	20.34	22.55
0.167	0.0049	0.0049	28.01	32.96
0.095	0.0024	0.0025	40.83	55.34

6. Заключение

Было проведено исследование характеристик обнаружения взвешенной процедуры Ширяева–Робертса для задачи с неизвестным параметром наблюдения после разладки. Характеристики взвешенной процедуры Ширяева–Робертса сравнивались с характеристиками процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры. Критерием качества для сравнения служила средняя задержка обнаружения при ограниченной вероятности ложной тревоги (модель гауссовского наблюдения) и при ограниченной локальной условной вероятности ложной тревоги (модель наблюдения авторегрессии 1 порядка). Результаты представлены в табл. 1–4. Показано, что взвешенная процедура Ширяева–Робертса проигрывает процедуре Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры, но незначительно. В свою очередь, взвешенная процедура, которая настроена на меньшее количество параметров, среди которых в точности нет реального параметра после разладки, проигрывает взвешенной процедуре, с большим количеством параметров, среди которых присутствует в точности параметр после разладки. Следовательно, идея применения взвешенных процедур, в случае, когда параметры наблюдения после разладки до конца неизвестны, является удачной. Результаты исследования очень полезны для большинства задач, так как на практике почти всегда параметры после разладки до конца неизвестны.

Литература

1. *Spivak B.C.* Численное сравнение наиболее популярных быстрых процедур обнаружения разладки // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 2. С. 88–98.
2. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection // Sequential Analysis. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
3. *Tartakovsky A. G., Nikiforov I. V., Bassevile M.* Sequential Analisis Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
4. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case // IEEE Transactions on Information Theory. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
5. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules // Monographs on Statistics and Applied Probability, Moscow, Russia and Los Angeles, USA, 2019.

References

1. *Spivak V.S.* Numerical comparison of popular quickest changepoint detection procedures. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 2. P. 88–98.
2. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection. Sequential Analysis. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
3. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Bassevile M.* Sequential Analisis Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
4. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case. IEEE Transactions on Information Theory. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
5. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules. Monographs on Statistics and Applied Probability, Moscow, Russia and Los Angeles, USA, 2019.

Поступила в редакцию 24.09.2020

B. C. Спивак, A. Г. Тартаковский, H. Р. Беренков

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Численное сравнение алгоритмов инициализации следов объектов

Алгоритмы обнаружения разладки могут быть использованы в большинстве задач инициализации следов объектов. Раньше, когда вычислительная сложность была проблемой, свою популярность завоевал алгоритм K/N благодаря вычислительной легкости. Существенно более эффективный алгоритм инициализации следов может быть построен на основе метода последовательного обнаружения разладки. В данной статье мы рассматриваем алгоритм движущегося среднего. Мы сравниваем характеристики алгоритмов K/N и движущегося среднего. Критерием оптимальности является максимизация вероятности правильного обнаружения в определенном временном интервале при заданном уровне риска ложной тревоги, измеряемом как локальная вероятность ложной тревоги. Для рассматриваемых рабочих характеристик мы получаем теоретическую оценку и оценку методом Монте-Карло. Результаты показывают, что предложенный алгоритм движущегося среднего демонстрирует рабочие характеристики значительно лучшие, чем алгоритм K/N .

Ключевые слова: последовательное обнаружение разладки, вероятность правильного обнаружения, локальная вероятность ложной тревоги, алгоритм K/N , алгоритм движущегося среднего.

V. S. Spivak, A. G. Tartakovsky, N. R. Berenkov

Moscow Institute of Physics and Technology

Numerical comparison of objects' tracks initiation algorithms

In many problems of the initialization of objects' tracks, changepoint detection algorithms can be used. In the past when computational complexity was an issue, the K/N algorithm gained its popularity due to computational simplicity. A substantially more efficient track initiation algorithm can be built based on the sequential change detection technique. In this paper, we consider the Finite Moving Average algorithm. We compare the performance of the K/N algorithm with the Finite Moving Average algorithm. The optimality criterion is to maximize a probability of correct detection in a certain time interval under the given false alarm risk measured as a local probability of a false alarm. For performance, we obtain a theoretical estimate and an estimate by Monte Carlo simulations. The results show that the Finite Moving Average algorithm performs significantly better than the K/N procedure.

Key words: sequential changepoint detection, probability of correct detection, local probability of false alarm, K/N algorithm, finite moving average algorithm.

1. Введение

Задача инициализации следов объектов с целью дальнейшего сопровождения может быть рассмотрена как задача последовательного обнаружения разладки, т. е. обнаружения изменения в наблюдаемом сигнале [1]: интересующий нас объект появляется в неизвестный момент времени, таким образом изменяя свойства наблюдаемого сигнала (процесса). В большинстве задач инициализации следов объектов цель — обнаружить след в определенном временном интервале после появления следа объекта. Таким образом, в качестве оптимального критерия мы выбрали максимизацию минимальной вероятности правильного обнаружения в определенном временном интервале (окне) при ограниченном уровне частоты ложных тревог (срабатываний).

Самым популярным алгоритмом инициализации следов объектов является так называемый алгоритм K/N [2], [3]. Этот алгоритм завоевал свою популярность благодаря своей вычислительной простоте. Во времена, когда вычислительная техника была плохо развита, более сложные алгоритмы не могли быть применимы на практике. Однако, благодаря техническому прогрессу в вычислительной технике, проблема поиска более эффективного алгоритма обнаружения для задачи инициализации следов объектов вновь актуальна и практически важна. К примерам подобных задач относятся инициализация треков спутников, подводных лодок, баллистических ракет и т. д.

В данной работе мы предлагаем в качестве эффективного алгоритма обнаружения алгоритм движущегося среднего (далее FMA — Finite Moving Average). В разделе 2 приведена постановка задачи в терминах последовательного обнаружения разладки. В разделе 3 рассматриваются алгоритмы инициализации следов. Здесь приводятся полученные формулы для теоретических оценок рабочих характеристик: в 3.1 для алгоритма K/N , в 3.2 для алгоритма FMA. В разделе 4 представлены результаты симуляций Монте-Карло. Результаты показывают, что алгоритм FMA демонстрирует значительно лучшие рабочие характеристики по сравнению с алгоритмом K/N . Это позволяет нам рекомендовать использовать процедуру FMA на практике для инициализации следов объектов. В разделе 5 представлены выводы по проделанной работе.

2. Постановка задачи

Пусть наблюдаемый процесс $\{X_n\}$ задается распределением P_∞ . Будем считать, что в неизвестный момент времени ν ($\nu = \{0, 1, 2, \dots\}$) появляется след от интересующего нас объекта. Тогда, после появления следа, наблюдаемый процесс $\{X_n\}$ задается распределением P_0 . Пусть $p_j(\mathbf{X}^n)$, $j = \infty, 0$ — плотность распределения P_j^n , где $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка размера n . Для фиксированного момента разладки ν вероятностное распределение P_ν с плотностью $p_\nu(\mathbf{X}^n) = p(\mathbf{X}^n|\nu)$ — является комбинацией до и после изменения плотностей:

$$\begin{aligned} p_\nu(\mathbf{X}^n) &= p_\infty(\mathbf{X}^\nu) \cdot p_0(\mathbf{X}_{\nu+1}^n | \mathbf{X}^\nu) = \\ &= \prod_{i=1}^{\nu} p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=\nu+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_m^n = (X_m, \dots, X_n)$ и $p_j(X_n | \mathbf{X}^{n-1})$ — условная плотность X_n , зависящая от \mathbf{X}^{n-1} . Мы считаем, что наблюдение является независимым и одинаково распределенным. Обозначим $f_\infty(x)$ — плотность в нормальном (до разладки) режиме, и $f_0(x)$ — плотность в режиме после разладки, т. е. в этом случае (1) записывается с $p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_\infty(X_i)$ и $p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_0(X_i)$.

В данной работе наиболее удачно подходит максиминная постановка, в которой момент разладки ν — неизвестное, но не обязательно случайное число.

Любая последовательная процедура обнаружения дает время остановки T для наблюдаемого процесса $\{X_n\}$.

Как предложено в [4], в максиминной постановке риск, связанный с ложной тревогой, разумно измерять как максимальную локальную вероятность ложной тревоги (LPFA) в определенном окне M , определенную как

$$\mathbf{LPFA}(T) = \sup_{\ell \geq 0} P_\infty(\ell < T \leq \ell + M), \quad (2)$$

а риск, связанный с обнаружением, — как минимальную вероятность правильного обнаружения (PD) в определенном окне N , определенную как

$$\mathbf{PD} = \inf_{\nu \geq 0} P_\nu(\nu < T \leq \nu + N). \quad (3)$$

Однако в задаче инициализации следов объектов разумно задать размеры обоих временных окон M и N одинаковыми $N = M$.

Для $0 < \beta < 1$, пусть $\mathbf{C}_\beta = \{T : \mathbf{LPFA}(T) \leq \beta\}$ — класс процедур обнаружения, для которого локальная вероятность ложной тревоги во временном интервале фиксированной длины $N \geq 1$ не превосходит заданного уровня β . В максиминной постановке цель — найти оптимальную процедуру, которая максимизирует в классе \mathbf{C}_β вероятность правильного обнаружения (3) во временном интервале фиксированной длины $N \geq 1$.

3. Процедуры обнаружения

Обозначим « $\mathbf{H}_k : \nu = k$ » и « $\mathbf{H}_\infty : \nu = \infty$ » — гипотезы, что разладка (появление следа от наблюдаемого объекта) происходит в момент времени $0 \leq k < \infty$, и что разладка не происходит никогда (т. е. объект не появляется никогда) соответственно. Тогда, используя (1), мы получаем отношение правдоподобия между этими гипотезами для выборки $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned} LR_{k,n} &= \frac{p_k(\mathbf{X}^n)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \frac{p_\infty(\mathbf{X}^k) \cdot p_0(\mathbf{X}_{k+1}^n | \mathbf{X}^k)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=k+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{\prod_{i=1}^n p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})} = \\ &= \prod_{i=k+1}^n \frac{p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}, \quad k < n. \end{aligned}$$

Так как наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными, а $p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_\infty(X_i)$ и $p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) = f_0(X_i)$, тогда

$$LR_{k,n} = \prod_{i=k+1}^n \frac{f_0(X_i)}{f_\infty(X_i)}, \quad k < n.$$

Обозначим $\mathcal{L}_i = f_0(X_i)/f_\infty(X_i)$.

В качестве наблюдения рассматривается гауссовская модель:

$$X_i = \theta \mathbb{1}_{\{i>\nu\}} + \xi_i, \quad i \geq 1, \quad (4)$$

где $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$ — нормальная (гауссовская) $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ независимая и одинаково распределенная последовательность, $\theta > 0$, т.е. мы имеем изменение в среднем независимой и одинаково распределенной гауссовой последовательности. Здесь и далее $\mathbb{1}_B$ — индикатор события B . В случае гауссовой модели наблюдений отношение правдоподобия

$$\mathcal{L}_i = \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} X_i - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (5)$$

3.1. Алгоритм K/N

Мы рассматриваем алгоритм инициализации следов объектов K/N . На каждом последовательном скане принимается решение о наличии объекта. Для принятия решения на каждом скане мы сравниваем отношение правдоподобия \mathcal{L}_i из (5) с порогом. Если порог превышен, то ставится отметка о наличии объекта. Если на N последовательных сканах не менее K отметок (обнаружений) о наличии объекта, то след интересующего объекта инициализируется. В противном случае окно смещается последовательно на один скан, и процедура повторяется. Так как $\mathcal{L}_n(X_i)$ монотонно возрастает по X_i , мы можем принимать решение о наличии объекта, сравнивая наблюдение X_i из (4) с порогом h :

$$U_i = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i \geq h, \\ 0, & \text{если } X_i < h. \end{cases}$$

Тогда, время остановки алгоритма K/N :

$$T_{K/N} = \inf \left[n \geq N : \sum_{i=n-N+1}^n U_i \geq K \right]. \quad (6)$$

Чтобы подобрать оптимальный порог, мы можем рассматривать задачу инициализации следов объектов как схему испытаний Бернулли [5], в которой «успех» и «неудача» (обнаружение или не обнаружение на каждом последовательном скане соответственно) определяются вероятностями $g_{(j)}(1)$ и $g_{(j)}(0)$ соответственно:

$$g_{(j)}(0) = 1 - g_{(j)}(1) = \Phi\left(\frac{h-j\theta}{\sigma}\right), \quad j = 0, 1, \quad (7)$$

где $\Phi\left(\frac{h-j\theta}{\sigma}\right)$, $j = 0, 1$, является функцией распределения гауссовой случайной величины:

$$\Phi\left(\frac{h-j\theta}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{h-j\theta}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \right], \quad j = 0, 1.$$

Таким образом, получена зависимость вероятности обнаружения на каждом последовательном скане от порога и параметров наблюдаемого сигнала.

Вероятность ровно K успехов в N последовательных испытаниях Бернулли

$$P_N^K = C_N^K p^K (1-p)^{N-K},$$

где C_N^K — биномиальный коэффициент, а p — вероятность «успеха» в каждом последовательном испытании Бернулли.

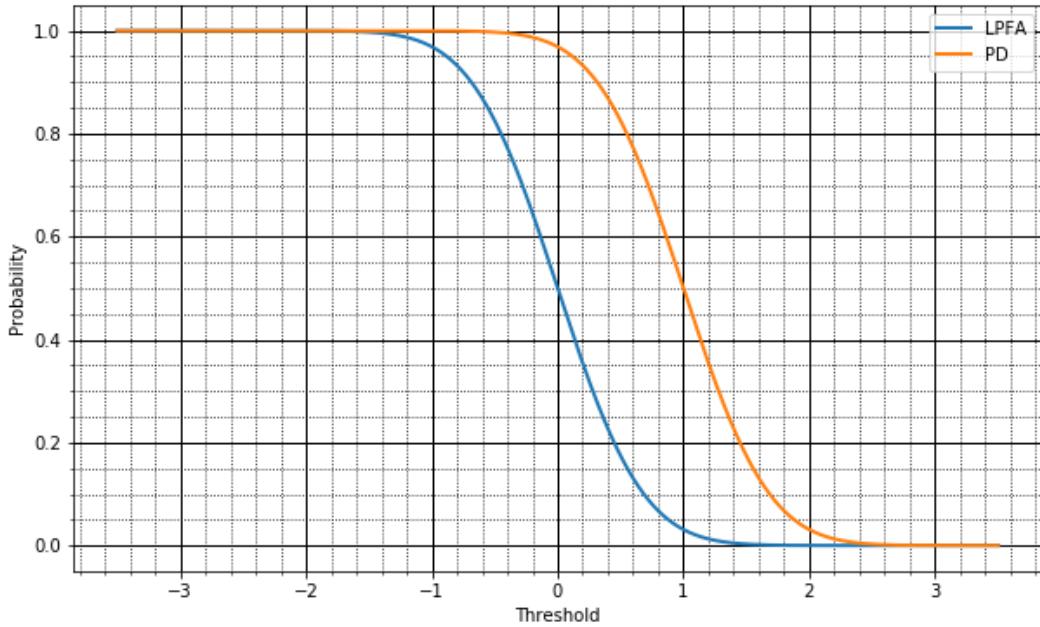
Тогда, используя (7), мы можем получить рабочие характеристики алгоритма K/N в окне $[1, N]$:

$$\mathbf{LPFA}_N^K = \sum_{z=K}^N C_N^z g_{(0)}^z(1) g_{(0)}^{N-z}(0), \quad (8)$$

и

$$\mathbf{PD}_N^K = \sum_{z=K}^N C_N^z g_{(1)}^z(1) g_{(1)}^{N-z}(0). \quad (9)$$

На рис. 1 представлен пример зависимости рабочих характеристик (LPFA и PD) алгоритма K/N от порога для $\theta = 1$.

Рис. 1. Зависимость LPFA и PD от порога для алгоритма K/N

3.2. Алгоритм движущегося среднего

Для сравнения мы предлагаем алгоритм FMA, который основан на методе последовательного обнаружения разладки. В окне фиксированной длины N считается логарифмическое отношение правдоподобия и суммируется по N последовательным сканам и сравнивается с порогом A . Если порог превышен, то принимается решение об инициализации следа интересующего нас объекта. В противном случае окно смещается последовательно на один скан, и процедура повторяется. Таким образом, алгоритм FMA не что иное, как время остановки

$$T_{FMA}^N = \inf \left[n \geq N : \sum_{i=n-N+1}^n \log(\mathcal{L}_i) \geq A \right]. \quad (10)$$

Как и в разделе 3.1, мы можем получить теоретическую оценку рабочих характеристик алгоритма FMA в окне $[1, N]$.

В гауссовском случае сумма логарифмических отношений правдоподобия в окне $[1, N]$:

$$\lambda_{1,N} = \frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N X_i - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} N. \quad (11)$$

Так как $Y(N) = \sum_{i=1}^N X_i$ — гауссовская случайная величина $\mathcal{N}(N \cdot \theta, N \cdot \sigma^2)$, то, используя данное свойство гауссовского распределения и (11), мы получаем теоретическую оценку рабочих характеристик алгоритма FMA в окне $[1, N]$:

$$\text{LPFA}_{FMA}^N = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\frac{N\theta^2}{2\sigma^2} - A}{\sqrt{2N\sigma^2}} \right) \right], \quad (12)$$

и

$$\text{PD}_{FMA}^N = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{N\theta^2}{2\sigma^2} - A}{\sqrt{2N\sigma^2}} \right) \right]. \quad (13)$$

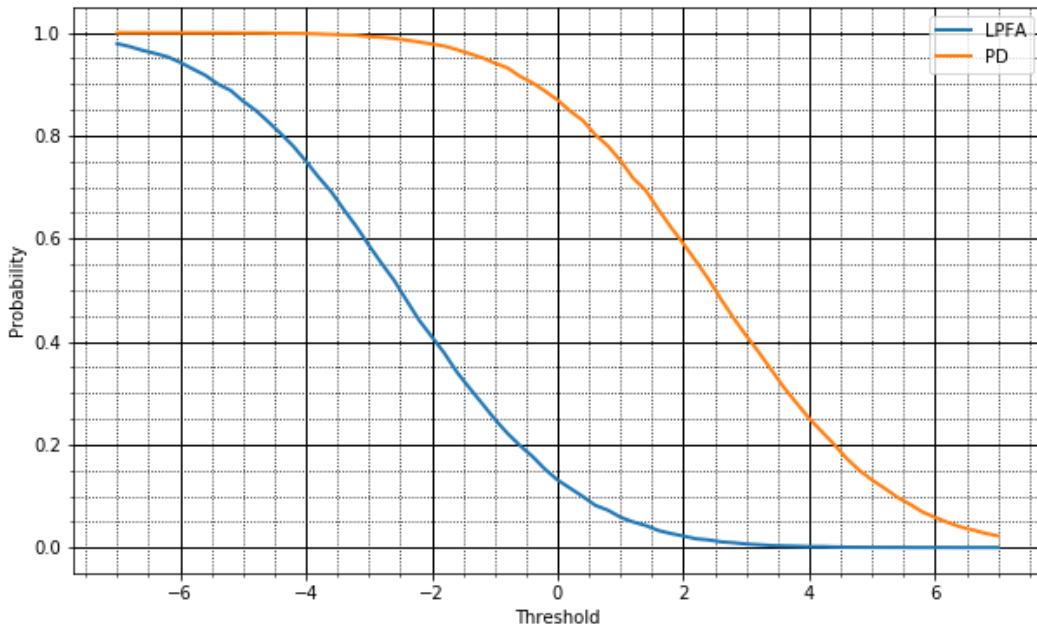


Рис. 2. Зависимость LPFA и PD от порога для алгоритма FMA

Таким образом, и для алгоритма FMA получена зависимость характеристик обнаружения в зависимости от порога и параметров наблюдаемого сигнала.

На рис. 2 представлен пример подобной зависимости рабочих характеристик (LPFA и PD) алгоритма FMA от порога для $\theta = 1$.

4. Численное сравнение алгоритма K/N и алгоритма движущегося среднего

В этом разделе сравним рабочие характеристики (**LPFA** and **PD**) алгоритмов K/N и FMA, используя метод Монте-Карло. Минимум в (3) достигается при $\nu = 0$. Максимум в (2) достигается при $\ell = N - 1$. Однако мы заинтересованы в первую очередь в том, чтобы **LPFA** не превышала заданный уровень β , и $\text{LPFA}_{K/N} \approx \text{LPFA}_{FMA}$. Поэтому, для простоты, мы будем считать **LPFA** в окне $[1, N]$.

4.1. Параметры симуляций

1. Мы заинтересованы в низком отношении сигнал-шум ($I = \theta^2/2\sigma^2$). Поэтому мы задаем, $\theta = 1$; $\sigma^2 = 1$, и в этом случае отношение сигнал-шум $I = 0.5$.
2. Заданный уровень LPFA $\beta = 0.2; 0.15; 0.1; 0.05; 0.02; 0.01; 0.001$.
3. Результаты симуляций Монте-Карло очень близки к теоретическим оценкам. Поэтому, чтобы получить характеристики, мы подбираем пороги, используя (8), (9), (12), (13).
4. Длина окна N варьируется с 5 до 15.
5. Число прогонов Монте-Карло $M = 10^6$, что более чем достаточно, чтобы получить очень точные оценки.

4.2. Моделирование

Моделируем стохастическую модель X_n , используя генератор случайных чисел в (4). Чтобы посчитать **LPFA**, в каждом прогоне Монте-Карло в наблюдении $X_n^{(i)}, n \geq 1$ ($i = 1, \dots, M$, M -число прогонов Монте-Карло) мы принимаем, что в (4) $\nu = \infty$. В каждом прогоне Монте-Карло считаем время остановки $T_{N/K}^{(i)}$ и $T_{FMA}^{(i)}$, используя (6), (10). Тогда экспериментальная оценка локальной вероятности ложной тревоги сравниваемых алгоритмов:

$$\begin{aligned}\mathbf{LPFA}_N^K &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{K/N}^{(i)} \leq N\}}, \\ \mathbf{LPFA}_{FMA} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{FMA}^{(i)} \leq N\}}.\end{aligned}$$

Чтобы вычислить **PD**, в каждом прогоне Монте-Карло в наблюдении $X_n^{(i)}, n \geq 1$ мы принимаем, что в (4) $\nu = 0$. В каждом прогоне Монте-Карло считаем время остановки $T_{N/K}^{(i)}$ и $T_{FMA}^{(i)}$, используя (6), (10). Тогда экспериментальная оценка вероятности правильного обнаружения сравниваемых алгоритмов:

$$\mathbf{PD}_N^K = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{K/N}^{(i)} \leq N\}}, \quad \mathbf{PD}_{FMA} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{1}_{\{T_{FMA}^{(i)} \leq N\}}.$$

Зависимость вероятности правильного обнаружения от локальной вероятности ложной тревоги алгоритмов K/N и FMA представлена на рис. 3.

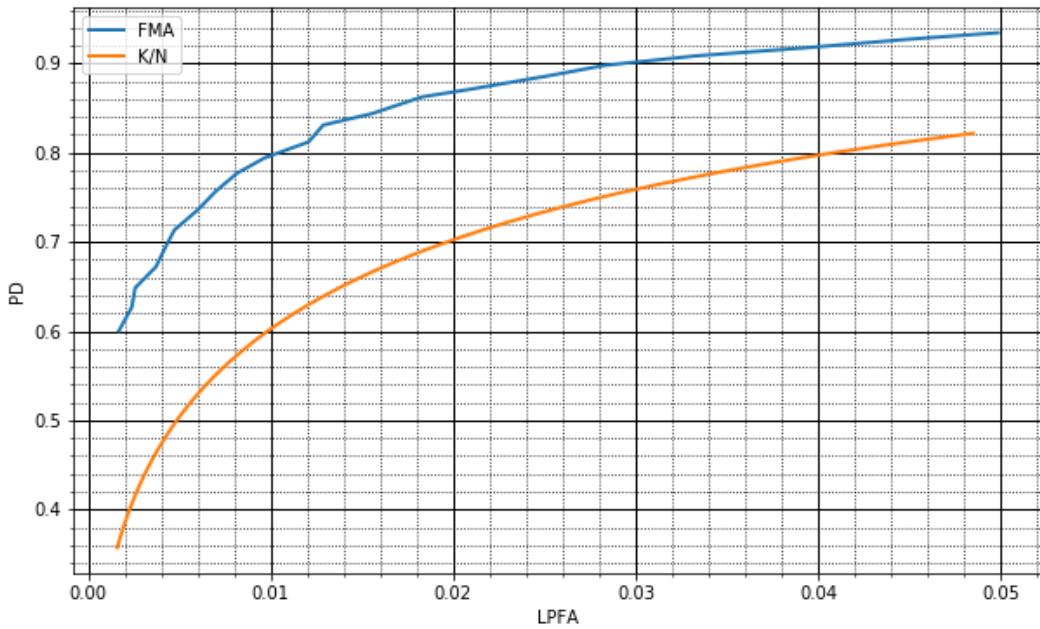


Рис. 3. Рабочие характеристики (PD vs. LPFA) алгоритмов инициализации следов объектов: K/N и FMA

Таблица 1 показывает результаты сравнения алгоритмов инициализации следов объектов: алгоритм K/N и алгоритм FMA. Видно, что рабочие характеристики алгоритма K/N заметно хуже, чем характеристики алгоритма FMA. Разница тем больше, чем меньше **LPFA**.

Т а б л и ц а 1

**Рабочие характеристики алгоритмов инициализации следов объектов:
 K/N и FMA**

Уровень β, ограничивающий LPFA							
$N = 5$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.848	0.800	0.731	0.589	0.418	0.326	0.109
PD_{FMA}	0.921	0.886	0.837	0.719	0.571	0.464	0.197
$N = 6$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.878	0.833	0.772	0.651	0.493	0.389	0.151
PD_{FMA}	0.944	0.917	0.882	0.793	0.658	0.549	0.270
$N = 7$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.908	0.876	0.814	0.708	0.543	0.439	0.179
PD_{FMA}	0.962	0.948	0.913	0.846	0.727	0.633	0.339
$N = 8$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.926	0.901	0.850	0.748	0.600	0.499	0.221
PD_{FMA}	0.976	0.964	0.940	0.885	0.782	0.690	0.402
$N = 9$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.940	0.917	0.875	0.786	0.659	0.557	0.270
PD_{FMA}	0.984	0.975	0.958	0.909	0.825	0.748	0.460
$N = 10$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.956	0.937	0.904	0.828	0.704	0.600	0.310
PD_{FMA}	0.990	0.983	0.969	0.935	0.866	0.795	0.538
$N = 11$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.966	0.949	0.919	0.855	0.737	0.643	0.351
PD_{FMA}	0.993	0.989	0.979	0.951	0.897	0.840	0.595
$N = 12$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.974	0.963	0.938	0.880	0.783	0.692	0.398
PD_{FMA}	0.995	0.992	0.985	0.963	0.917	0.876	0.646
$N = 13$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.980	0.970	0.947	0.899	0.809	0.730	0.443
PD_{FMA}	0.997	0.995	0.990	0.976	0.940	0.899	0.701
$N = 14$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.985	0.977	0.958	0.914	0.835	0.759	0.479
PD_{FMA}	0.998	0.997	0.993	0.981	0.954	0.922	0.748
$N = 15$	0.2	0.15	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
$PD_{K/N}$	0.989	0.980	0.965	0.930	0.859	0.787	0.520
PD_{FMA}	0.999	0.998	0.995	0.988	0.965	0.939	0.773

5. Заключение

Результаты показывают, что предложенная процедура инициализации следов объектов движущегося среднего демонстрирует рабочие характеристики значительно лучшие, чем процедура K/N . Кроме того, симуляции Монте-Карло демонстрируют, что формулы для теоретических оценок рабочих характеристик очень точны. Это позволяет существенно упростить процесс выбора порога для алгоритмов обнаружения. Поэтому мы рекомендуем использовать алгоритм движущегося среднего на практике. Полученные результаты имеют очень важное практическое значение.

Литература

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Bassevile M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Changepoint Detection/ ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
2. *Blackman S.S.* Multiple-Target Tracking with Radar Applications, ser. Artech House Radar Library. Dedham, UK : Artech House, 1986.
3. *Tartakovsky A.G., Brown J.* Adaptive Spatial-Temporal Filtering Methods for Clutter Removal and Target Tracking // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Oct. 2008. V. 44, N 4. P. 1522–1537.
4. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability 165. Boca Raton, London, New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2020.
5. *Tartakovsky A. G., Veeravalli V.V.* Change-Point Detection in Multichannel and Distributed Systems, ser. Statistics: a Series of Textbooks and Monographs. New York, USA, 2004. V. 173. P. 339–370.

References

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Bassevile M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Changepoint Detection/ ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
2. *Blackman S.S.* Multiple-Target Tracking with Radar Applications, ser. Artech House Radar Library. Dedham, UK : Artech House, 1986.
3. *Tartakovsky A.G., Brown J.* Adaptive Spatial-Temporal Filtering Methods for Clutter Removal and Target Tracking. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Oct. 2008. V. 44, N 4. P. 1522–1537.
4. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability 165. Boca Raton, London, New York : Chapman & Hall/CRC Press, 2020.
5. *Tartakovsky A. G., Veeravalli V.V.* Change-Point Detection in Multichannel and Distributed Systems, ser. Statistics: a Series of Textbooks and Monographs. New York, USA, 2004. V. 173. P. 339–370.

Поступила в редакцию 18.01.2021

УДК 004.932

Л. Р. Широкова, В. Н. Логинов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Анализ эффективности архитектур нейронных сетей для детекции Replay Attack в системах лицевой биометрии

Рассматриваются вопросы построения эффективной архитектуры нейросети для распознавания спуфинг-атак на систему лицевой биометрии, основанных на подмене в поле зрения камеры видеонаблюдения лица реального человека на видеоизображение лица другого человека, сформированного на экране носимого устройства. Проведен сравнительный анализ подходов к построению нейросетевых архитектур. Получены оценки метрик качества для каждого подхода.

Ключевые слова: система биометрии, видеоизображение лица.

L. R. Shirokova, V. N. Loginov

Moscow Institute of Physics and Technology

Analysis of the effectiveness of neural network architectures for Replay Attack detection in the facial biometrics system

The paper deals with the construction of an effective neural network architecture for recognizing spoofing attacks on the facial biometrics system based on the substitution of a real person's face in the field of view of a video surveillance camera for a video image of another person's face formed on the screen of a wearable device. A comparative analysis of approaches to the construction of neural network architectures is carried out. Estimates of quality metrics for each approach are obtained.

Key words: biometrics system, facial vibraimage.

1. Введение

В работе [1] рассматривается метод детекции подмен в видеопотоке системы лицевой биометрии изображения лица человека на изображение лица другого человека, сформированное на экране носимого устройства. В литературе данный вид подмен называют спуфинг-атаками типа Replay Attack. В ней предложен метод, основанный на формировании матриц, элементы которых соответствуют межкадровым изменениям в видеопотоке камеры наблюдения биометрической системы, и последующей обработке результатов анализа предобученной нейронной сетью.

Последовательность обработки видеоданных разделяется на два этапа:

- 1) Предварительная обработка видеоизображения – подготовка входных данных (матриц межкадровых разностей) для нейронной сети.
- 2) Обработка входных данных предобученной нейронной сетью и предсказание вероятности того, что видеоизображение передает реальное лицо.

При предварительной обработке данных к последовательности видеокадров применяется частотный метод построения матриц межкадровых разностей, предложенный в работе [2]. В работе [1] были получены предварительные оценки эффективности распознавания Replay Attack на одном из типов нейросетей, однако, в связи с высокими требованиями к уровню информационной безопасности биометрических систем, продолжает оставаться актуальным вопрос построения нейронных сетей, обеспечивающих наиболее высокую вероятность распознавания Replay Attack. В связи с этим, в настоящей работе приводятся результаты сравнительного анализа различных подходов к построению архитектур нейросетей, позволяющие выработать рекомендации по их практическому применению при решении задачи.

2. Нейросетевые модели

С точки зрения машинного обучения рассматривается задача бинарной классификации изображения. Соответственно, на вход подается трехмерная матрица изображения, на выход ожидается 1 число (номер класса). Подавать в нейросеть пиксели в случайном порядке нельзя, так как структура данных – изображение, подразумевает фиксированный порядок элементов в матрице. Использовать знания о структуре данных важно в любой задаче компьютерного зрения, поэтому с изображениями работают нейросети со сверточными слоями.

Существует много известных архитектур сверточных нейронных сетей для задачи классификации: AlexNet, VGG, ResNet, Inception, SqueezeNet, и др. Также возможно создать свою сеть из любого набора слоев. При проведении экспериментов были рассмотрены все перечисленные сети, в статье описаны 4 сети, которые показали устойчивые результаты при тестировании.

Итак, в настоящей работе рассмотрено 4 архитектуры нейронных сетей для классификации изображений: AlexNet [3], VGG-16 [4], SqueezeNet [5], CNN. Каждая сеть обучается на тренировочной выборке видеоизображений. Выход каждой сети соответствует необходимому решению задачи – предсказанию двух чисел: первое число – вероятность принадлежности к 0-му классу (видеоизображение лица человека, которое было получено путем съемки с экрана устройства), второе число – вероятность принадлежности к 1-му классу (видеоизображение реального лица человека). Оценка метрик качества происходит на одной и той же отложенной тестовой выборке видеоизображений.

Функцией потерь обучения сети является бинарная кросс-энтропия, оптимизатором – стохастический градиентный спуск.

2.1. VGG-16

Первой нейросетью для экспериментов была выбрана сеть VGG-16 [ссылка на статью] на фреймворке Keras.

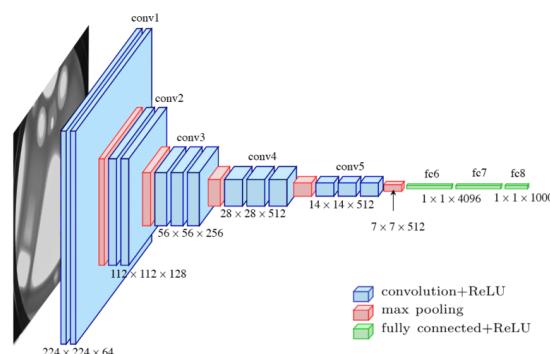


Рис. 1. Архитектура VGG-16

Для того, чтобы решать задачу классификации, последние 4 слоя нейронной сети были заменены на следующие слои: max pooling, fully connected (1024), fully connected (128), fully connected (2).

Эксперименты проводились на сети, которая была предобучена на данных ImageNet [6]. В ходе экспериментов дообучались только верхние, измененные слои, веса нижних слоев при обучении не изменялись.

2.2. AlexNet

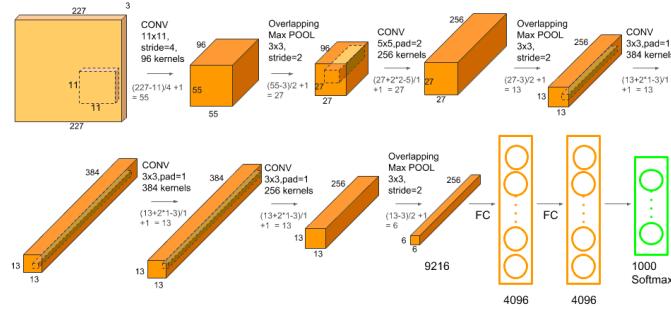


Рис. 2. Архитектура AlexNet

При обучении сети был добавлен выходной слой fully connected (2). Нейронная сеть также была предобучена на датасете ImageNet. Сеть AlexNet взята из реализации библиотеки torchvision фреймворка pytorch. Модель обучалась полностью.

2.3. SqueezeNet

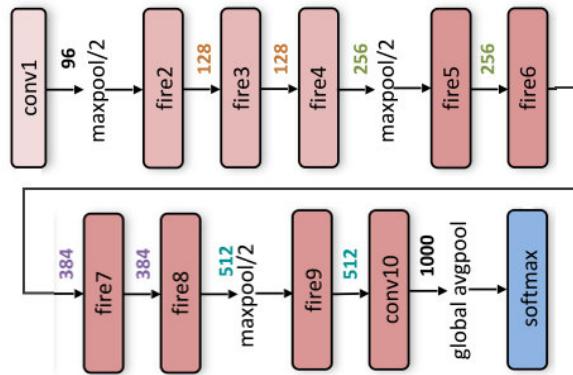


Рис. 3. Архитектура SqueezeNet

Также в экспериментах использовалась нейронная сеть SqueezeNet предобученная на ImageNet из библиотеки torchvision. При обучении сети был добавлен выходной слой fully connected (2). Модель обучалась полностью.

2.4. CNN

В данном разделе эксперименты проведены с нейронной сетью со следующим набором слоев из фреймворка pytorch.

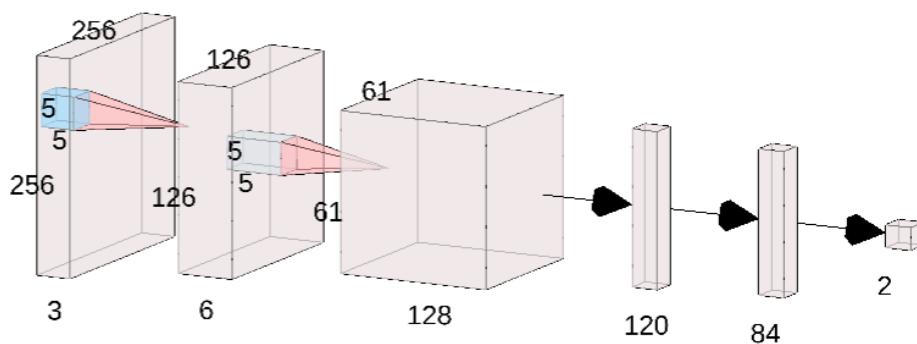


Рис. 4. CNN

Сеть состоит из следующих слоев: Conv2D, MaxPooling2D, Conv2D, MaxPooling2D, fully connected, fully connected.

2.5. Сравнение результатов предсказания моделей

В табл. 1 приведено сравнение 4-х представленных в данной работе архитектур нейронных сетей. Сравнение проводится по метрике F_1 :

$$F_1 = \frac{2 \times precision \times recall}{precision + recall}.$$

Таблица 1
Сравнение метрики качества различных архитектур

	F_1 Позитивные примеры	F_1 Негативные примеры
VGG-16	0.940	0.945
AlexNet	0.917	0.929
SqueezeNet	0.96	0.963
CNN	0.946	0.951

Анализ предоставленных данных позволяет сделать вывод о том, что все рассматриваемые модели обеспечивают приемлемое качество распознавания спуфинг-атак. Из таблицы также видно, что качество распознавания спуфинг-атак при использовании сети SqueezeNet дает наилучшие результаты.

3. Заключение

Проведено сравнение четырех различных архитектур нейронных сетей применительно к задаче распознавания спуфинг-атак подмены лица человека на изображении экрана цифрового носителя. Нейронные сети обучены на кадрах видеопотока, которые были преобразованы с помощью матричного подхода с частотной формулой [1]. Архитектура SqueezeNet достигает самых высоких показателей качества среди рассматриваемых архитектур на тестовых данных.

Литература

1. Широкова Л.Р., Логинов В.Н. Нейросетевой метод детекции видеоизображения лица в видеопотоке системы лицевой биометрии // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 4. С. 90–96.
2. Минкин В.А. ВиброИзображение. Санкт-Петербург : Реноме, 2007.

3. Krizhevsky A. One weird trick for parallelizing convolutional neural networks. arXiv preprint arXiv:1404.5997. 2014.
4. Simonyan K., Zisserman A. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition. eprint arXiv:1409.1556. 2014.
5. Forrest N. Iandola, Song Han, Matthew W. Moskewicz, Khalid Ashraf, William J. Dally, Kurt Keutzer SqueezeNet: AlexNet-level accuracy with 50x fewer parameters and <0.5MB model size. arXiv:1602.07360v4. 2016.
6. Deng J., Dong W., Socher R., Li L.-J., Li K., Fei-Fei L. Imagenet: A large-scale hierarchical image database // 2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2009. P. 248–55.

References

1. Shirokova L.R., Loginov V.N. Neural network method for detecting video images of a person in a video stream of a facial biometrics system. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 4. P. 90–96.
2. Minkin V.A. VibroImage. Sankt-Peterburg : Renome, 2007.
3. Krizhevsky A. One weird trick for parallelizing convolutional neural networks. arXiv preprint arXiv:1404.5997. 2014.
4. Simonyan K., Zisserman A. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition. eprint arXiv:1409.1556. 2014.
5. Forrest N. Iandola, Song Han, Matthew W. Moskewicz, Khalid Ashraf, William J. Dally, Kurt Keutzer SqueezeNet: AlexNet-level accuracy with 50x fewer parameters and <0.5MB model size. arXiv:1602.07360v4. 2016.
6. Deng J., Dong W., Socher R., Li L.-J., Li K., Fei-Fei L. Imagenet: A large-scale hierarchical image database. In: 2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2009. P. 248–55.

Поступила в редакцию 27.01.2021

УДК 51.74

M. V. Yashina, A. G. Tatashev, M. Ju. Fomina

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)

Аппроксимация корреляционной функции скорости транспортного средства по GPS/Glonass-данным

В настоящей работе разработан подход к анализу данных о перемещении автотранспортного средства, получаемых в результате измерений, которые проводятся с помощью спутниковой навигационной системы. При использовании предлагаемого подхода скорость автотранспортного средства рассматривается как стационарный случайный процесс, корреляционная функция которого принадлежит к одному из заданных классов. По результатам мониторинга выбирается значение параметра корреляционной функции, которое в определённом смысле наилучшим образом соответствует результатам измерений. Решается также задача в определённом смысле оптимального выбора длительности интервала усреднения получаемых в результате мониторинга значений скорости, при этом учитывается, насколько при выбранной длительности интервала усреднения выборочная полученная корреляционная функция скорости соответствует корреляционной функции из гипотетического класса при выбранном значении параметра.

Ключевые слова: спутниковые навигационные системы, мониторинг движения автомобиля, стационарный случайный процесс, статистический анализ, корреляционный анализ.

M. V. Yashina, A. G. Tatashev, M. Ju. Fomina

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)

Approximation of the vehicle speed correlation function using GPS/Glonass data

In this paper, we develop an approach to analyzing the data of the movement of vehicles obtained from measurements made by the satellite navigation system. When using the proposed approach, the vehicle speed is considered to be a stationary random process, the correlation function of which belongs to one of the specified classes. Based on the monitoring results, the value of the correlation function parameter is chosen, which, in a certain sense, best corresponds to the measurement results. We also solve the problem, in a certain sense, of the optimal choice of time averaging the resulting tracking of the speed value. In addition, we take into account that, for the chosen interval duration, the obtained correlation function of the velocity corresponds to the correlation function of the hypothetical class for the program.

Key words: satellite navigation systems, vehicle motion monitoring, stationary random process, statistical analysis, correlation analysis.

1. Введение

Мониторинг движения транспортных средств актуален для задач управления потоками, безопасности дорожного движения и корректной маршрутизации как помощь водителю. Задача состоит в том, чтобы повысить точность GPS/Glonass данных о скорости транспортного средства.

© Яшина М.В., Таташев А.Г., Фомина М.Ю., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

В настоящей работе разработан подход к описанию динамики скорости автотранспортного средства на основе анализа данных измерений скорости движущегося автотранспортного средства. Измерения проводились с использованием спутниковой навигационной системы. Принимается допущение о виде корреляционной функции случайного процесса, представляющего собой скорость транспортного средства, на котором проводились измерения. Выбирается значение параметра корреляционной функции, дающее наилучшие приближение и соответствие с эмпирической корреляционной функцией при различных интервалах усреднения.

Вопросы проведения мониторинга на автомагистралях рассматривались в работах [1]–[5]. В [1] изучались вопросы получения и анализа результатов и теории автотранспортных потоков, в том числе относящиеся к модели следования за лидером [6, 7]. В [8] рассматриваются вопросы оценки и повышения точности результатов измерений, в которых осуществляется наблюдение за движением транспортных средств с использованием спутниковых навигационных систем позиционирования.

В [1] описана информационная система, разработанная для сбора данных для анализа ошибки при передаче информации между транспортными средствами, движущимися по магистрали. Система состоит из сервера, располагающегося в облачной инфраструктуре и мобильных клиентов. Программа мобильного клиента предназначена для сбора информации об объекте, мониторинг которого проводится, и передачи собранной информации серверу, а также для получения контрольных сообщений. Между серверами и мобильными клиентами устанавливается двусторонняя связь. Имеется цепочка автомобилей, движущихся на заданном расстоянии друг от друга. На каждом автомобиле имеются смартфоны на переднем и заднем бамперах. Каждую секунду со смартфонов посыпается информация о координатах и скорости. Передаваемый трек содержит информацию о широте и долготе устройства, времени, скорости, точности измерения, модели мобильного устройства и имени транспортного средства. По данным о координатах и вычисляется расстояние между автомобилями. Особое внимание уделяется изменению расстояния между автомобилями. Это изменение рассматривается как ошибка в передаче GPS-сигнала.

2. NMEA-протокол и методы глобального позиционирования

2.1. Спутниковые навигационные системы

Система GPS (Global Positioning System) создавалась для применения в военных целях. Она начала работать в конце 80-х — начале 90-х годов, однако до 2000 года искусственные ограничения на определение местоположения существенно сдерживали её возможности использования в гражданских целях. После отмены ограничений на точность определения координат ошибка снизилась со 100 до 20 м (в последних поколениях GPS-приемников при идеальных условиях ошибка не превышает 2 м). Такие условия позволили использовать систему для широкого круга общих и специальных задач: определение точного местоположения; навигация, движение по маршруту с привязкой к карте на основании реального местоположения; синхронизация времени.

Российский аналог GPS — **ГЛОНАСС** (глобальная навигационная спутниковая система) — была развернута в 1995 году, но в связи с недостаточным финансированием и малым сроком службы спутников она не получила широкого распространения. Вторым рождением системы можно считать 2001 год, когда была принята целевая программа её развития, благодаря которой ГЛОНАСС возобновил полноценную работу в 2010 году. Сегодня на орбите работают 24 спутника ГЛОНАСС. Новейшие потребительские устройства используют GPS и ГЛОНАСС как взаимодополняющие системы, подключаясь к ближайшим найденным спутникам, это значительно увеличивает скорость и точность их работы. Сейчас на стадии разработки находятся ещё две спутниковые системы: европейская Galileo и китайская Compass.

Галилео — совместный проект Европейского союза и Европейского космического агентства, анонсированный в 2002 году. Изначально рассчитывали, что уже в 2010 году в рамках этой системы на средней околоземной орбите будут работать 30 спутников. Но этот план не был реализован в срок. Galileo введен в эксплуатацию в 2014 году. Однако полнофункциональное использование системы начнется не ранее 2020 года.

Compass — это следующая ступень развития китайской региональной навигационной системы Beidou, которая была введена в эксплуатацию после запуска 10 спутников в конце 2011 года. Сейчас она обеспечивает покрытие в границах Азии и Тихоокеанского региона, но, как ожидается, к 2020 году система станет глобальной.

Поддержка технологии глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) в электронных устройствах реализуется на базе навигационных приемников, которые могут быть выполнены в различных вариантах:

- Smart Antenna — модуль, состоящий из керамической антенны и навигационного приемника. Преимущества: компактность, не требует согласования, удешевляет разработку за счет сокращения сроков.
- MCM (Multi Chip Module) — чип, включающий все компоненты навигационного приемника.
- OEM — экранированная плата, включающая ВЧ интерфейсный процессор и процессор частот основной полосы (RF-frontend + baseband), SAW-фильтры и обвязку. Это наиболее популярное решение на данный момент. Навигационный модуль подключается к микроконтроллеру или системе на кристалле по интерфейсу UART/RS-232 или USB.

Стабилизация сигнала. Прежде чем навигационный приемник сможет выдавать информацию о местоположении, он должен обладать тремя наборами данных:

- 1) Сигналы от спутников.
- 2) Альманах — информация о приблизительных параметрах орбит всех спутников, а также данные для калибровки часов и характеристики ионосферы.
- 3) Эфемериды — точные данные параметров орбит и часов каждого спутника.

NMEA протоколы GPS

Интерфейс обмена данными большинства портативных GPS-приемников реализован по текстовому протоколу **NMEA-0183**. Этот NMEA-протокол описывает не только данные, полученные с GPS-приемников, но и измерения сонаров, радаров, электронных компасов, барометров и других навигационных устройств, использующихся на морских судах. Эти данные содержат полные навигационные измерения GPS-приемника — позицию, скорость и время.

Все NMEA-сообщения состоят из последовательного набора данных, разделенных запятыми. Каждое отдельное сообщение не зависит от других и является полностью «законченным». NMEA-сообщение включает заголовок, набор данных, представленных ASCII-символами, и поле «чекsumмы» для проверки достоверности переданной информации. Заголовок стандартных NMEA-сообщений состоит из 5 символов, из которых два первых определяют тип сообщения, а оставшиеся три — его название.

Каждое NMEA-сообщение начинается с \$, заканчивается \n «перевод строки») и не может быть длиннее 80-ти символов. Все данные содержаться в одной строке и отделены друг от друга запятыми. Информация представлена в виде ASCII-текста и не требует специального декодирования. Если данные не умещаются в выделенные 80 символов, то они «разбиваются» на несколько NMEA-сообщений. Такой формат позволяет не ограничивать

точность и количество символов в отдельных полях данных. В конце каждого NMEA-сообщения содержится поле «чексыммы», отделенное от данных символом *. При необходимости оно может использоваться для проверки целостности и достоверности каждого принятого сообщения.

NMEA-протокол описывает большой список различных сообщений, из которых можно выделить два десятка сообщений, активно использующихся в навигационной аппаратуре. В связи с большой популярностью и простотой представления данных NMEA-протокол нашел применение не только для морской аппаратуры, но и в геодезических, бытовых и авиационных GPS-приемниках.

Точность определения местоположения по GPS

Для выполнения навигационной задачи модуль должен одновременно принимать сигналы от нескольких спутников, т.е. иметь несколько **приемных каналов**. На сегодняшний день это число лежит в диапазоне от 12 до 88. Точность определения местоположения по GPS составляет в среднем 15 м, она обусловлена используемым неточным сигналом, влиянием атмосферы на распространение радиосигнала, качеством кварцевых генераторов в приемниках и пр. Но с помощью корректирующих методов возможно улучшить точность определения местоположения. Эта технология называется **Differential GPS**. Существует два метода коррекции: наземный и спутниковый DGPS.

В наземных методах коррекции наземные станции дифференциальных поправок постоянно сверяют свое заведомо известное местоположение и сигналы от навигационных спутников. На базе этой информации вычисляются корректирующие величины, которые могут быть переданы с помощью УКВ- или ДВ-передатчика на мобильные DGPS-приемники в формате **RTCM**. На основании полученной информации потребитель может корректировать процесс определения собственного местоположения. Точность этого метода составляет 1–3 метра и зависит от расстояния до передатчика корректирующей информации и качества сигнала.

Одним из основных параметров, влияющих на точность определения местоположения и стабильность приема, является **чувствительность**. Она, как правило, определяется качеством малошумящего усилителя на входе приемника и сложностью реализованных алгоритмов цифровой обработки. Типовые значения современных приемников лежат в диапазоне 143 дБм для поиска и 160 дБм для слежения.

Кроме определения местоположения ГНСС предоставляют информацию о точном времени. Как правило, все приемники имеют выход **PPS** (pulse per second, импульсов в секунду) — секундная метка (1 Гц), которая точно синхронизирована с временной шкалой UTC.

3. Метод аппроксимация корреляционной функции скорости

В настоящем разделе разработан алгоритм анализа изменения скорости автотранспортного средства на коротком участке магистрали с использованием данных, полученных в результате измерений, проводившихся на магистрали. Процесс изменения скорости на участке магистрали характеризуется стационарным случайным процессом, математическое ожидание и корреляционная функция которого оцениваются на основе данных измерений, проводившихся с помощью датчика GPS.

3.1. Описание эксперимента

В качестве входных данных для расчётов, проводимых в соответствии с разработанным алгоритмом, который будет описан в разделе 3, использовались результаты измерений, проведённых 20 февраля 2019 г. на Ленинградском проспекте г. Москвы. Маршрут, на котором производились измерения: Ленинградский пр-т, 55 —Ленинградский пр-т, 39.

В одном автобусе была произведена запись GPS треков с двух устройств, находящихся на расстоянии примерно 4 м друг от друга. Измерения проводились с 14 ч. 26 м. на протяжении промежутка времени длительностью 283 сек. Модель первого устройства: Xiaomi Redmi Note 4. Модель второго устройства: Xiaomi Mi A1. Каждую секунду записывались значения координат местоположения и скорости автобуса.

3.2. Оценка математического ожидания и корреляционной функции скорости

Предположим, что в результате измерений получено n значений скорости автотранспортного средства $v_1, v_2 \dots, v_n$. Считаем, что скорость $v(t)$ на отрезке времени $(0, T]$, на котором проводятся измерения, представляет собой стационарный случайный процесс [9]. Значения скорости фиксируются в моменты времени $i\Delta$, $i = 1, \dots, T = n\Delta$, где Δ — длительность интервала времени, через который регистрируются получаемые в результате измерений значения скорости. Пусть v_i — полученное в результате измерения значение скорости в момент времени $i\Delta$, $i = 1, \dots, n$. Пусть m, D — выборочные значения математического ожидания и дисперсии скорости; $k(\tau), \rho(\tau)$ — выборочные значения соответственно корреляционной функции и нормированной корреляционной функции при значении аргумента, равном τ . Для выборочного среднего значения имеем

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i.$$

Для того чтобы сгладить колебания значений скорости, получаемых в результате измерений, будем усреднять значения скорости по промежуткам времени длительностью $a\Delta$ (размер интервала группировки в терминологии общей теории статистики [10]). Исходная выборка v_1, \dots, v_n заменяется на выборку

$$v_i(a) = \frac{1}{a} \sum_{j=(i-1)a+1}^{ia} v_j, \quad i = 1, \dots, \left[\frac{n}{a} \right],$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

Пусть $k^*(l, a)$ — оцениваемое по результатам измерений значение корреляционной функции $k(\tau)$ при значении аргумента, равном $\tau = la\Delta$, где l — целое неотрицательное число, $0 \leq l < [n/a]$, в предположении, что оценка производится при интервале усреднения длительностью $a\Delta$.

Для соответствующих оценок имеем

$$k^*(l, a) = \frac{1}{\left[\frac{n}{a} \right] - l} \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{a} \right] - l} (v_i(a) - m)(v_{i+l}(a) - m)$$

(здесь корреляционная функция скорости оценивается усреднением по произведениям отклонений скорости от выборочного среднего на интервалах $((i-1)a\Delta, ia\Delta)$ и $((i+l-1)a\Delta, (i+l)a\Delta)$ при интервале усреднения, равном $a\Delta$; число таких пар интервалов равно $[n/a] - l$, так как последней такой парой, принадлежащей всему интервалу измерений, является пара $(([n/a] - l - 1)a\Delta, ([n/a] - l)a\Delta)$ и $(([n/a] - 1)a\Delta, [n/a]a\Delta)$),

$$D(a) = k(0, a),$$

$$\rho^*(l, a) = \frac{k^*(l, a)}{D(a)}.$$

3.3. Оценка параметра корреляционной функции скорости в предположении, что корреляционная функция принадлежит заданному классу

Сделаем допущение, что нормированная корреляционная функция скорости принадлежит одному из следующих классов:

$$\rho(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau^2},$$

$$\rho(\tau, \beta) = e^{-\beta|\tau|},$$

$$\rho(\tau, \beta) = e^{-\beta|\tau|}(1 + \beta|\tau|).$$

При заданном классе и заданных значениях β и a средняя квадратическая погрешность приближения $F(\beta, a)$ вычисляется по формуле

$$F(\beta, a) = \sqrt{\frac{1}{\left[\frac{n}{2a}\right]} \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2a}\right]} (\rho^*(i, a) - \rho(i a \Delta))^2}. \quad (1)$$

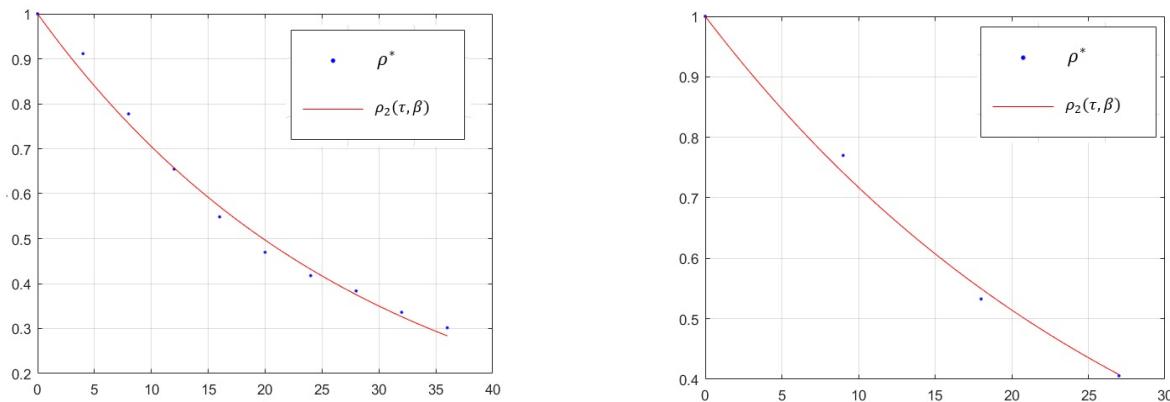
Будем подбирать оптимальный параметр β для каждого класса ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 методом наименьших квадратов. Критерий оптимальности — средняя квадратическая погрешность приближения $F(\beta, a)$, вычисляемая по формуле (1) для каждой пары a и β . Результаты подбора сведены в табл. 1. Ввиду того, что класс $\rho_1(\tau, \beta)$ плохо аппроксимирует эмпирическую нормированную корреляционную функцию ρ^* (здесь $F(\beta, a) > 0.5$ для $\forall \beta, a$), результаты для данного класса опускаются.

Т а б л и ц а 1
Средняя квадратичная оценка погрешности для двух классов функций при различных значениях a, β

a	$\rho_2(\tau, \beta)$		$\rho_3(\tau, \beta)$	
	β	$F(\beta, a)$	β	$F(\beta, a)$
2	0.0359	0.0213	0.0764	0.0716
3	0.0355	0.0205	0.0831	0.0657
4	0.0350	0.0204	0.0821	0.0638
5	0.0345	0.0207	0.0813	0.0605
6	0.0342	0.0215	0.0833	0.0507
7	0.0343	0.0245	0.0845	0.0446
8	0.0334	0.0183	0.0800	0.0550
9	0.0332	0.0167	0.0825	0.0441
10	0.0320	0.0188	0.0780	0.0378

По результатам оценки погрешности для двух классов функций, можно заключить, что класс $\rho_2(\tau, \beta)$ аппроксимирует эмпирическую корреляционную функцию ρ^* с лучшим приближением.

При выборе оптимального интервала усреднения значений скорости помимо оценки погрешности следует учитывать количество точек на исследуемом временному отрезке, так как выбор большого интервала усреднения приводит к потери информации о динамике скорости автотранспортного средства, рис. 1. Таким образом, несмотря на меньшую погрешность при $a = 9$, предпочтительней выбрать интервал усреднения, равный четырём секундам, т.к. исследуемый временной отрезок достаточно мал и составляет всего 40 с.

Рис. 1. Аппроксимация ρ^* при интервалах $a = 4$ и $a = 9$ соответственно

4. Заключение

Предположим, что имеются данные о координатах точек нахождения автотранспортного средства в последовательные равнодistantные моменты времени. Например, значения координат фиксировалось с помощью спутниковой навигационной системы через интервалы времени длительностью 1 с. По этим значениям координаты определяются значения скорости данного автотранспортного средства в секундных интервалах. Из-за колебаний погрешности в определении значения координаты полученные значения скорости будут скачкообразно изменяться. Эти колебания можно сгладить, усредняя получаемые значения скорости, объединяя соседние интервалы большей длительности. Получаемые в результате усреднения значения скорости более точно аппроксимируют реальную динамику скорости автотранспортного средства. В настоящей работе разработан подход к выбору интервала усреднения, в соответствии с которым эмпирическая корреляционная функция скорости должна хорошо аппроксимироваться корреляционной функцией из гипотетического класса при соответствующим образом выбранном значении параметра.

Литература

1. Yashina M.V., Dotkulova A.S., Susoev N.P., Fomina M.J. Incommunication measurements for model validation of the follow-the-leader model // 2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. 2019. P. 1–7.
2. Буслаев А.П., Городничев М.Г., Яшина М.В. Интеллектуальные системы: SSHD-мониторинг многополосного движения и автоматическая обработка информации о трафике: учебное пособие. Москва : МТУСИ, 2012. С. 100.
3. Buslaev A.P., Yashina M.V., Volkov M.M. Algorithmic and software aspects of information system implementation for road maintenance management // International Conference on Dependability and Complex Systems. 2015. P. 65–74.
4. Volkov M.M., Yashina M.V. Modern information and communication approaches to traffic monitoring // Recent advances in mathematics. Proceedings of the 2015 International Conference on Pure Mathematics, Applied Mathematics and Computational Methods. 2015. P. 167–169.
5. Buslaev D.A., Yashina M.V., Tatashev A.G., Susoev N.P. Algorithm for Improving of Geo-Location Accuracy in Distributed Monitoring Mobile Systems of Traffic Flow Characteristics // 2020 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. 2020. P. 1–6.

6. Greenshields D.B. A study in highway capacity // Proceed. Highway Research Board. 1934. V. 14. P. 448–477.
7. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations // Physical review E. 2000. V. 62, N 2. P. 1805–1824.
8. Haigen Min, Xin Wu, Chaoyi Cheng, Xiangmo Zhao. Kinematic and dynamical vehicle model-assisted global positioning method for autonomous vehicles with low-cost GPS/camera/in-vehicle sensors // Sensors. 2019. V. 19. P. 5430.
9. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов. Москва : Наука, 1982. 128 с.
10. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. 5-е изд. Москва : Финансы и статистика, 2006. 656 с.

References

1. Yashina M.V., Dotkulova A.S., Susoev N.P., Fomina M.J. Incommunication measurements for model validation of the follow-the leader model. 2019 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. 2019. P. 1–7.
2. Buslaev A.P., Gorodnichev M.G., Yashina M.V. Intellektual'nye sistemy: SSHD-monitoring mnogopolosnogo dvizheniya i avtomaticheskaya obrabotka informacii o trafike. Uchebnoe posobie. Moscow : MTUSI, 2012. P. 100. (in Russian).
3. Buslaev A.P., Yashina M.V., Volkov M.M. Algorithmic and software aspects of information system implementation for road maintenance management. International Conference on Dependability and Complex Systems. 2015. P. 65–74.
4. Volkov M.M., Yashina M.V. Modern information and communication approaches to traffic monitoring. Recent advances in mathematics. Proceedings of the 2015 International Conference on Pure Mathematics, Applied Mathematics and Computational Methods. 2015. P. 167–169.
5. Buslaev D.A., Yashina M.V., Tatashev A.G., Susoev N.P. Algorithm for Improving of Geo-Location Accuracy in Distributed Monitoring Mobile Systems of Traffic Flow Characteristics. 2020 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. 2020. P. 1–6.
6. Greenshields D.B. A study in highway capacity. Proceed. Highway Research Board. 1934. V. 14. P. 448–477.
7. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. Physical review E. 2000. V. 62, N 2. P. 1805–1824.
8. Haigen Min, Xin Wu, Chaoyi Cheng, Xiangmo Zhao. Kinematic and dynamical vehicle model-assisted global positioning method for autonomous vehicles with low-cost GPS/camera/in-vehicle sensors. Sensors. 2019. V. 19. P. 5430.
9. Rozanov Yu.A. Vvedenie v teoriyu sluchajnyh processov. Moscow : Nauka, 1982. P. 128. (in Russian).
10. Eliseeva I.I., YUzbashev M.M. Obshchaya teoriya statistiki. 5-e izd. Moscow : Finansy i statistika, 2006. P. 656. (in Ruassian).

УДК 535.3

B. A. Астапенко, С. В. Сахно, Е. В. Сахно

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Обобщение принципа спектроскопического соответствия на временную зависимость квантовых переходов

Обобщается общеизвестный принцип спектроскопического соответствия для временной зависимости квантовых переходов путем сравнения зависимости энергии электромагнитного импульса от времени, поглощенного двухуровневой системой и классическим линейным осциллятором. Формулы для зависимостей, упомянутых выше, получены для двух случаев: систем с релаксацией и без нее. Показано, что в первом случае результаты для квантовых и классических систем в точности совпадают. Если релаксация достаточно велика, заметна разница между двумя временными зависимостями поглощенной энергии.

Ключевые слова: принцип спектроскопического соответствия, квантовый переход, двухуровневая система, классический линейный осциллятор.

V. A. Astapenko, S. V. Sakhno, E. V. Sakhno

Moscow Institute of Physics and Technology

Generalization of the spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions

In this work, we generalize the well-known spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions by comparing the time dependence of the energy of an electromagnetic pulse absorbed by the two-level system and classical linear oscillator. Formulas for the above-mentioned dependences are derived for two cases, viz. systems with and without relaxation. It is shown that in the first case the results for quantum and classical systems coincide exactly. If the relaxation is sufficiently large, there is a noticeable difference between two time dependences of absorbed energy.

Key words: spectroscopic correspondence principle, quantum transition, two-level system, classical linear oscillator

1. Введение

Спектроскопический принцип соответствия между классическим и квантовым подходом в описании взаимодействия между электромагнитным полем и атомом заключается в следующем [1]: атом представляется в виде набора классических осцилляторов (т.н. осцилляторов перехода), отвечающих дипольно-разрешенным переходам между состояниями дискретного спектра. Собственные частоты этих осцилляторов равны боровской частоте перехода между заданными состояниями, а отклик на электромагнитное воздействие пропорционален безразмерной величине – силе осциллятора перехода. С помощью принципа соответствия можно количественно описать ряд важных радиационных процессов и атомных характеристик, не прибегая к формализму квантовой механики. Так, например, выводится выражение для динамической поляризуемости атома [2], а также формулы для

сечения рассеяния света [3] и для сечения фотопоглощения излучения в дискретном атомном спектре.

Более общий принцип соответствия между классической и квантовой механикой состоит в следующем: квантово-механические формулы получаются из классических, если в последних фурье-образы физических величин заменить на матричные элементы операторов, отвечающих данным величинам, вычисленных на частотах, равных частотам переходов между квантовыми состояниями [4].

Оба вышеуказанные принципа не рассматривают временной зависимости квантового перехода, которая в настоящее время становится физически измеримой величиной в связи с развитием экспериментальных методов аттосекундной физики, таких как: self-referenced attosecond photoelectron interferometry [5], an interferometric technique combining high temporal and spectral resolution [6], the combination of transient absorption and ion mass spectroscopy with attosecond resolution [7].

Экспериментально и теоретически исследуются следующие фотопроцессы с аттосекундным времененным разрешением: фотоионизация хиральных молекул [5], атомов гелия [8], неона [6] и криптона [7], динамика электронов в многоэлектронных атомах [9], динамика фотовозбуждения атома водорода [10], динамика формирования резонанса Фано [11–13].

Вследствие этого обобщение принципа соответствия между классической и квантовой физикой на временную зависимость квантового перехода становится актуальным вопросом, которому и посвящена данная работа.

2. Обобщение принципа спектроскопического соответствия для временной зависимости квантовых переходов

Рассмотрим принцип соответствия путем сравнения временной зависимости энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором — $\varepsilon_{clas}(t)$, и осциллятором перехода в квантовой двухуровневой системе — $\varepsilon_{quant}(t)$ к заданному моменту времени t . Полагаем, что классический осциллятор имеет элементарный заряд и массу, равную массе электрона. Для простоты считаем, что сила осциллятора ДС равна единице: $f_0 = 1$.

В атомных единицах $\hbar = e = m_e = 1$ для энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором к моменту времени t , имеем (см. Приложение 1):

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') v(t') = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} E(\omega') \frac{i\omega' \exp(-i\omega't')}{\omega'^2 - \omega_0^2 + 2i\omega'\gamma}. \quad (1)$$

Здесь $E(t')$ — напряженность электрического поля в ЭМИ, $E(\omega')$ — его фурье-образ, ω_0 — собственная частота классического осциллятора, равная частоте перехода в ДС, γ — константа релаксации классического осциллятора, равная спектральной ширине линии в ДС, $v(t')$ — скорость осциллятора в заданный момент времени. Предполагается, что $E(t \rightarrow -\infty) = 0$ и $\varepsilon(t \rightarrow -\infty) = 0$ для классического осциллятора и ДС. Отметим, что интеграл по частоте в правой части равенства (1) представляет собой скорость классического осциллятора в момент времени t' .

Для энергии, поглощенной квантовой ДС к заданному моменту времени, можно получить в рамках первого порядка теории возмущений следующее выражение:

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega' G(\omega') \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega't') dt' \right|^2, \quad (2)$$

где $G(\omega')$ — спектральная форма линии дипольно-разрешенного перехода в ДС. Формула (2) выводится аналогично тому, как это было сделано в статье [10] при выводе вероятности возбуждения радиационного перехода между состояниями дискретного спектра (см. Приложение 2).

3. Предел больших времен

Получим сначала выражения для поглощенной энергии за все время действия импульса при $t \rightarrow \infty$. Физически данное условие соответствует временам, много большим длительности ЭМИ. В квантовом случае возбуждения ДС результат непосредственно вытекает из формулы (2):

$$\varepsilon_{quant}(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega' G(\omega') |E(\omega')|^2. \quad (3)$$

Выражение для энергии, поглощенной классическим осциллятором за все время действия импульса, следует из (1). После ряда алгебраических преобразований имеем

$$\varepsilon_{clas}(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} |E(\omega')|^2 \frac{4\omega'^2\gamma}{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega'^2\gamma^2}. \quad (4)$$

Заметим, что формулы (3) и (4) совпадают, если форма линии в выражении (3) равна

$$\tilde{G}_{osc}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{4\omega^2\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}. \quad (5)$$

Функцию $\tilde{G}_{osc}(\omega)$ назовем *осцилляторной* формой линии. В пределе

$$\gamma \ll \omega_0 \quad (6)$$

$\tilde{G}_{osc}(\omega)$ совпадает с лоренцевской формой линии

$$G_L(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (7)$$

Как известно, форма линии (7) отвечает однородному уширению спектральной линии, вызванному, например, спонтанным излучением. Таким образом, имеется соответствие между энергией, поглощенной классическим осциллятором за все время действия ЭМИ, с энергией, поглощенной квантовой ДС, а именно: эти энергии совпадают, если выполняется условие (6). Заметим, что в случае возбуждения переходов в дискретном атомном спектре неравенство (6) выполняется с большим запасом. Так, например, для перехода 1s–2p в атоме водорода, когда ширина линии обусловлена спонтанным излучением, отношение $\omega_0/\gamma \approx 10^7$.

4. Случай отсутствия релаксации/нулевой ширины спектральной линии ($\gamma = 0$)

Получим из (1) формулу для поглощенной классическим осциллятором энергии в случае $\gamma = 0$. Выражая согласно определению фурье-образ напряженности электрического поля через функцию $E(t)$, имеем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^\infty dt'' E(t'') \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i\omega' \exp(-i\omega'(t' - t''))}{\omega'^2 - \omega_0^2 - 2i\omega'\gamma}. \quad (8)$$

Интеграл по частоте в правой части равенства (8) можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. В пределе $\gamma \rightarrow 0$ этот интеграл равен

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i\omega' \exp(-i\omega'(t' - t''))}{\omega'^2 - \omega_0^2 - 2i\omega'\gamma} = \theta(t' - t'') \cos[\omega_0(t' - t'')], \quad (9)$$

где $\theta(\tau)$ — тета-функция Хэвисайда.

Подставляя правую часть равенства (9) в формулу (8), находим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{clas}(t) &= \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' E(t'') \cos[\omega_0(t' - t'')] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{t'} dt'' E(t'') \cos[\omega_0(t' - t'')] = \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^t dt' E(t') \exp(i\omega_0 t') \right|^2.\end{aligned}\quad (10)$$

При переходе ко 2-му равенству в (10) было использовано то обстоятельство, что подынтегральная функция симметрична относительно перестановки переменных интегрирования: $t' \leftrightarrow t''$.

В квантовом случае, в пределе $\gamma \rightarrow 0$, спектральная форма линии становится равной дельта-функции Дирака:

$$G_L(\gamma \rightarrow 0) \rightarrow \delta(\omega_0 - \omega). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (2), получаем

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega_0 t') dt' \right|^2. \quad (12)$$

Из сравнения формул (10) и (12) следует, что в пределе нулевой ширины линии (для ДС) или в отсутствие релаксации (для классического осциллятора) выражения для временной зависимости поглощенной энергии ЭМИ в классическом и квантовом случаях совпадают.

5. Временная зависимость поглощенной энергии в общем случае ($\gamma \neq 0$)

Проведем в общем случае ($\gamma \neq 0$) численное сравнение временной зависимости энергии, поглощенной классическим осциллятором (по формуле (1)) и квантовой ДС (по формуле (2)) для ЭМИ с гауссовской огибающей:

$$E(t) = E_0 \exp(-t^2/2\tau^2) \cos(\omega t). \quad (13)$$

Здесь E_0 , τ и ω — амплитуда, длительность и несущая частота ЭМИ.

Рассмотрим возбуждение ДС с двумя формами спектральной линии (5) и (7). В расчетах полагаем, что $E_0 = 0.03$, $\omega_0 = 0.375$. Данное значение собственной частоты отвечает переходу 1s–2p в атоме водорода (в атомных единицах).

Результаты вычислений приведены на рис. 1–4 для различных констант релаксации γ и параметров ЭМИ.

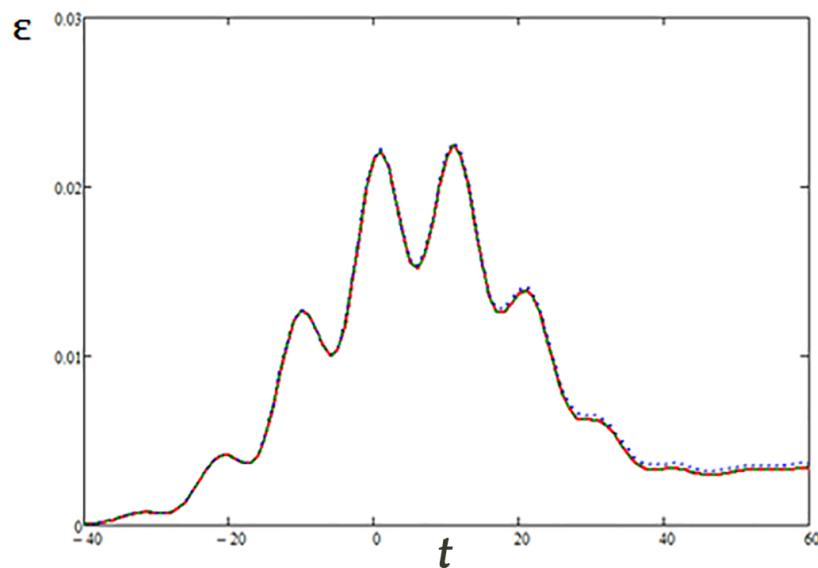


Рис. 1. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-3}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 20$

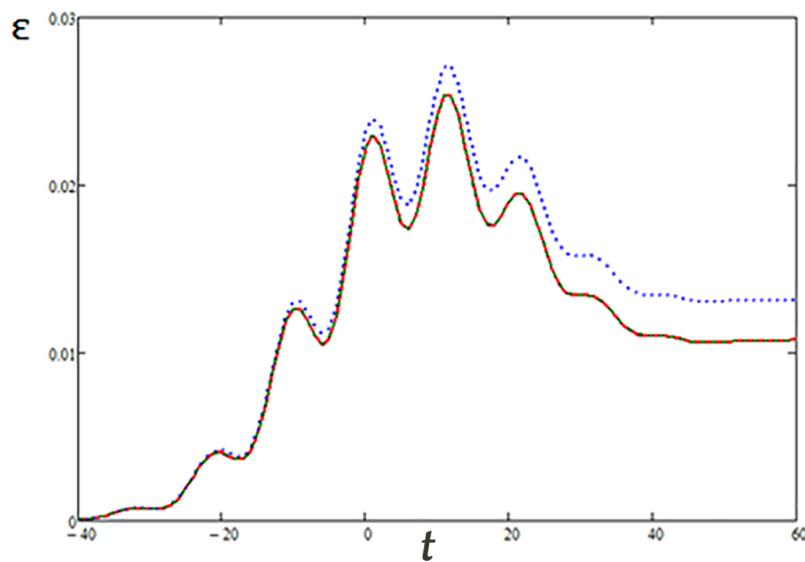


Рис. 2. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 20$

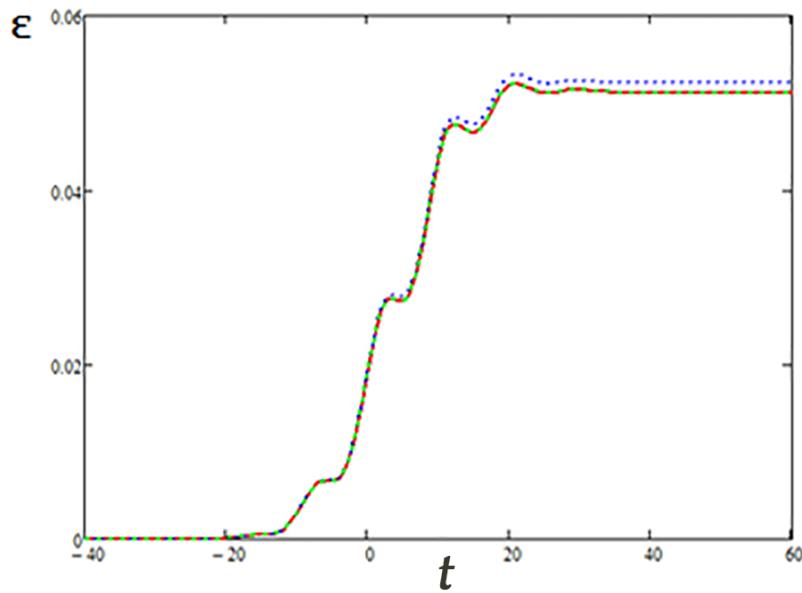


Рис. 3. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.25$, $\tau = 8$

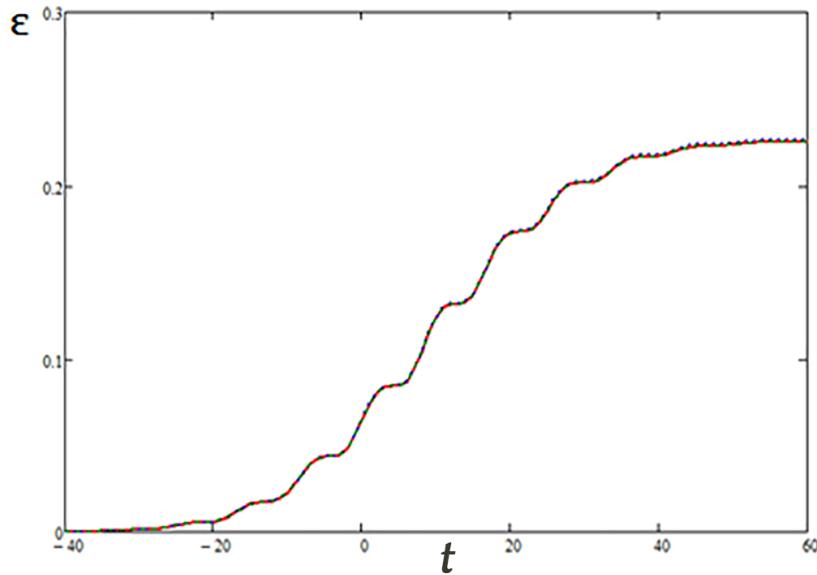


Рис. 4. Временная зависимость поглощенной энергии ЭМИ: сплошная кривая – для классического осциллятора, пунктир – для ДС с лоренцевской формой спектральной линии, штриховая кривая – для ДС с «осцилляторным» профилем спектральной линии; $\gamma = 10^{-2}$, $\omega = 0.35$, $\tau = 20$

Из приведенных рисунков видно, что для достаточно малых констант релаксации/ширины линии – $\gamma < 10^{-3}$ – все три кривые практически совпадают. Для больших значений γ возникает отличие временной зависимости поглощенной энергии ДС с лоренцевским контуром от двух других кривых. Это различие тем больше, чем больше отстройка несущей частоты ЭМИ от собственной частоты системы и уменьшается с укорочением ЭМИ. Кривая, соответствующая «осцилляторному» спектральному контуру всегда совпадает с кривой для классического осциллятора.

Приложение 1

Для энергии ЭМИ, поглощенной классическим осциллятором к моменту времени t , имеем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t \dot{x}(t') E(t') dt'. \quad (1.1)$$

Решение уравнения для гармонического осциллятора имеет следующий вид (см., например, [14]):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\omega') \exp(-i\omega't)}{\omega_0^2 - \omega'^2 - 2i\gamma\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \quad (1.2)$$

Из формулы (1.2) вытекает выражение

$$\dot{x}(t) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' E(\omega') \exp(-i\omega't)}{\omega_0^2 - \omega'^2 - 2i\gamma\omega'} \frac{d\omega'}{2\pi}. \quad (1.3)$$

Подставляя формулу (1.3) в (1.1), получаем

$$\varepsilon_{clas}(t) = \int_{-\infty}^t dt' E(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} E(\omega') \frac{i\omega' \exp(-i\omega't')}{\omega'^2 - \omega_0^2 + 2i\omega'\gamma}. \quad (1.4)$$

Приложение 2

Вероятность фотовозбуждения в заданный момент времени под действием поля $E(t)$ (предполагаем, что $E(t \rightarrow \pm\infty) = 0$ в дипольном приближении и первом порядке теории возмущения) имеет следующий вид [15]:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \langle \hat{d}(t') \hat{d}(t'') \rangle E(t') E(t''). \quad (2.1)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по начальному состоянию мишени. В формуле (2.1) используется коррелятор дипольных моментов (КДМ), который для стационарной системы может быть представлен в виде [16]:

$$\langle \hat{d}(t') \hat{d}(t'') \rangle = K(t', t'') = K(t'' - t'). \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$W(t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' K(t'' - t') E(t') E(t''). \quad (2.3)$$

Фурье-образ КДМ имеет следующий вид [16]:

$$K(t'' - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t'' - t')) K(\omega). \quad (2.4)$$

Далее используем связь КДМ с сечением фотовозбуждения [16]:

$$K(\omega) = \frac{c}{2\pi\omega} \sigma(\omega). \quad (2.5)$$

Применяя простые преобразования:

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega(t' - t'')) \frac{\sigma(\omega)}{\omega} E(t') E(t'') \quad (2.6)$$

и

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \exp(-i\omega(t'' - t')) E(t') E(t''), \quad (2.7)$$

получаем следующую формулу:

$$W(t) = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \left| \int_{-\infty}^t \exp(i\omega t') E(t') dt' \right|^2. \quad (2.8)$$

Из формулы (2.8) следует выражение для дифференциальной вероятности поглощения, которая обусловлена монохроматической составляющей на частоте ω :

$$\frac{dW(t)}{d\omega} = \frac{c}{4\pi^2} \frac{\sigma(\omega)}{\omega} \left| \int_{-\infty}^t \exp(i\omega t') E(t') dt' \right|^2. \quad (2.9)$$

Для дифференциальной энергии, поглощаемой на частоте ω , имеем

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \omega \frac{dW}{d\omega}. \quad (2.10)$$

Тогда для полной энергии получаем

$$\varepsilon = \int \frac{d\varepsilon}{d\omega} d\omega = \int \omega \frac{dW}{d\omega} d\omega. \quad (2.11)$$

Далее, в формулу (2.11) подставляем (2.9), при этом учитываем явное выражение для сечения фотовозбуждения мишени $\sigma(\omega)$ [16]:

$$\sigma(\omega) = \frac{2\pi^2}{c} G(\omega), \quad (2.12)$$

где $G(\omega)$ – спектральная форма линии.

Тогда получаем итоговую формулу:

$$\varepsilon_{quant}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega' G(\omega') \left| \int_{-\infty}^t E(t') \exp(i\omega' t') dt' \right|^2. \quad (2.13)$$

Заключение

Таким образом, на примере исследования временных зависимостей поглощения энергии ЭМИ классическим осциллятором и квантовой ДС показано, что с точностью до учета различия формы спектральной линии (существенной только для больших констант релаксации) эти зависимости совпадают. Тем самым принцип соответствия между классической и квантовой физикой обобщен на временную эволюцию квантового перехода.

Другой важный вывод из проведенных расчетов заключается в том, что для больших частотных отстроек и длинных импульсов временная зависимость поглощенной энергии имеет форму кривой с явно выраженным максимумом. В противоположном пределе максимум исчезает, и временная зависимость становится монотонной. Качественно наличие максимума во временной зависимости поглощенной энергии можно объяснить тем, что при больших частотных отстройках и длинных импульсах электромагнитное поле и осциллятор в течение второй половины длительности импульса колеблются в противофазе, так что поле тормозит осциллятор, и его энергия уменьшается.

Литература

1. Bohr N., Kramers H.A., Slater J.C. The Quantum Theory of Radiation // Phil. Mag. 1924. V. 47. P. 785–802.
2. Kramers H.A. The law of dispersion and Bohr's theory of spectra // Nature. 1924. V. 113. P. 673–676.
3. Kramers H.A., Heisenberg W. Über die Streuung von Strahlung durch Atome // Zeitschrift für Physik. 1925. V. 31. P. 681–708.
4. Rosmej F.B., Lisitsa V.S., Astapenko V.A. Plasma Atomic Physics // Springer, Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics. 2020. V. 104.
5. Beaulieu S., Comby A., Clergerie A. [et al.]. Attosecond-resolved photoionization of chiral molecules // Science. 2017. V. 358. P. 1288–1294.
6. Isinger M., Squibb R.J., Bustos D. [et al.]. Photoionization in the time and frequency domain // Science. 2017. V. 358. P. 893–896.
7. Hütten K., Mittermair M., Stock S. [et al.]. Ultrafast quantum control of ionization dynamics // EPJ Web of Conferences. 2019. V. 205. 06001.
8. Argenti L., Pazourek R., Feist J. [et al.]. Photoionization of helium by attosecond pulses: Extraction of spectra from correlated wave functions // Physical Review. 2013. V. 87. 053405.
9. Nicolaides C.A. Attosecond-Resolved Electron Dynamics in Many-Electron Atoms: Quantitative Theory and Comparison with Measurements // Appl. Sci. 2018. V. 8. 533.
10. Астапенко В.А. Аттосекундная динамика фотовозбуждения атома водорода ультракороткими лазерными импульсами // ЖЭТФ. 2020. Т. 157. С. 67–73.
11. Golovinski P.A., Yakovets A.V., Astapenko V.A. Linear build-up of Fano resonance spectral profiles // Applied Physics B. 2018. 124:111.
12. Kaldun A., Blättermann A., Donsa S. [et al.]. Observing the ultrafast buildup of a Fano resonance in the time domain // Science. 2016. V. 354. P. 738–740.
13. Gruson V., Barreau L., Jiménez-Galan Á. [et al.]. Attosecond dynamics through a Fano resonance: Monitoring the birth of a photoelectron // Science. 2016. V. 354. P. 734–737.
14. Astapenko V.A. Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with matter. Springer, 2013.
15. Клышко Д.Н. Фотоны и нелинейная оптика. Москва : Наука, 1980.
16. Astapenko V.A. Simple formula for photoprocesses in ultrashort electromagnetic field // Physics Letters A. 2010.

References

1. Bohr N., Kramers H.A., Slater J.C. The Quantum Theory of Radiation. Phil. Mag. 1924. V. 47. P. 785–802.
2. Kramers H.A. The law of dispersion and Bohr's theory of spectra. Nature. 1924. V. 113. P. 673–676.
3. Kramers H.A., Heisenberg W. Über die Streuung von Strahlung durch Atome. Zeitschrift für Physik. 1925. V. 31. P. 681–708.
4. Rosmej F.B., Lisitsa V.S., Astapenko V.A. Plasma Atomic Physics. Springer, Springer Series on Atomic, Optical and Plasma Physics. 2020. V. 104.
5. Beaulieu S., Comby A., Clergerie A., et al., Attosecond-resolved photoionization of chiral molecules. Science. 2017. V. 358. P. 1288–1294.

6. Isinger M., Squibb R.J., Busto D., et al., Photoionization in the time and frequency domain. Science. 2017. V. 358. P. 893–896.
7. Hütten K., Mittermair M., Stock S., et al., Ultrafast quantum control of ionization dynamics. EPJ Web of Conferences. 2019. V. 205. 06001.
8. Argenti L., Pazourek R., Feist J., et al., Photoionization of helium by attosecond pulses: Extraction of spectra from correlated wave functions. Physical Review. 2013. V. 87. 053405.
9. Nicolaides C.A. Attosecond-Resolved Electron Dynamics in Many-Electron Atoms: Quantitative Theory and Comparison with Measurements. Appl. Sci. 2018. V. 8. 533.
10. Astapenko V.A. Attosecond Dynamics of Photoexcitation of the Hydrogen Atom by Ultrashort Laser Pulses. JETP. 2020. V. 157. P. 67–73.
11. Golovinski P.A., Yakovets A.V., Astapenko V.A. Linear build-up of Fano resonance spectral profiles. Applied Physics B. 2018. 124:111.
12. Kaldun A., Blättermann A., Donsa S., et al., Observing the ultrafast buildup of a Fano resonance in the time domain. Science. 2016. V. 354. P. 738–740.
13. Gruson V., Barreau L., Jiménez-Galan Á., et al., Attosecond dynamics through a Fano resonance: Monitoring the birth of a photoelectron. Science. 2016. V. 354. P. 734–737.
14. Astapenko V.A. Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with matter. Springer, 2013.
15. Klyshko D.N. Photons and Nonlinear Optics. Moscow : Nauka, 1980.
16. Astapenko V.A. Simple formula for photoprocesses in ultrashort electromagnetic field. Physics Letters A. 2010.

Поступила в редакцию 28.09.2020

УДК 533.9.072

*Йе Хлаинг Тун, Аунг Чжо У, М. Н. Васильев, Хтет Ко Ко Зау,
Зин Мин Маунг, Яр Зар Аунг*

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Управление электростатической зарядкой твердых тел в каналах, заполненных электронно-пучковой плазмой

Экспериментально исследована электростатическая зарядка макроскопических твердых тел, размещенных в цилиндрическом канале, заполненном холодной сильнонеравновесной плазмой. Плазма генерировалась инжекцией тонкого электронного пучка вдоль оси канала. В качестве плазмообразующих газов использовались воздух, кислород и инертные газы. Измерялась величина потенциала тел простейшей геометрии (сфера, диск) относительно заземленных элементов конструкции рабочей камеры экспериментальной установки; эксперименты проводились в неподвижной плазме и в плазменных потоках. Установлено, что на величину заряда, накапливаемого твердым телом, влияют химический состав и давление плазмообразующего газа, мощность инжектируемого электронного пучка, скорость плазменного потока, а также угол падения электронного пучка на поверхность тела (для мишеней в форме диска).

Ключевые слова: электронно-пучковая плазма, электростатическая зарядка твердых тел, плазменные потоки в каналах.

*Ye Hlaing Tun, Aung Kyaw Oo, Vasiliev M. N, Htet Ko Ko Zaw, Zin Min Maung,
Ya Zar Aung*

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)

Control of electrostatic charging of solids in channels filled with electron beam plasma

Electrostatic charging of macroscopic solids placed in a cylindrical channel filled with cold strongly nonequilibrium plasma is experimentally studied. Plasma is generated by injection of a thin electron beam along the channel axis. Air, oxygen and noble gases are used as plasma-generating gases. The value of the potential of bodies of the simplest geometry (sphere, disk) is measured relative to the grounded parts of the experimental setup; the experiments are carried out in both stationary plasma and plasma flows. The value of the charge accumulated by solids is found to depend on the chemical composition and pressure of the plasma-generating gas, the power of the injected electron beam and the plasma flow velocity, and on the angle of the electron beam incidence on the surface (for bodies in the form of a disk).

Key words: electron beam plasma, electrostatic charging of solids, plasma flows in channels.

1. Введение

Электростатика – одна из главных проблем эксплуатации техники, работающей в условиях открытого космоса. В настоящее время наиболее изученными являются процессы, приводящие к электростатической зарядке космических летательных аппаратов (КЛА)

© Йе Хлаинг Тун, Аунг Чжо У, Васильев М. Н, Хтет Ко Ко Зау, Зин Мин Маунг, Яр Зар Аунг, 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

под воздействием факторов космического полета, в первую очередь – облучения быстрыми электронами солнечного ветра. Этой проблематике посвящено множество работ [1, 2].

Непрерывный поток плазмы солнечного происхождения, падающий на поверхность КЛА, вызывает появление и накопление электростатического заряда забортными элементами конструкции, а также их дифференциальную зарядку, приводящую к электрическим разрядам по поверхности из-за высокой разности потенциалов между различными зонами этих конструкций. Последнее обстоятельство может спровоцировать аномальное поведение электроники КЛА. Перечисленные явления достаточно хорошо изучены и экспериментально, и теоретически, найдены способы нейтрализации электростатического заряда КЛА как интегрального, так и локального [3].

Значительно меньшее внимание уделялось исследованию внутренних электрофизических процессов в бортовых плазмотехнических системах, в которых имеет место контакт неравновесной плазмы с поверхностью твердого тела. В самой общей постановке физическая задача ставится следующим образом: неравновесная плазма заполняет некоторый контейнер, внутри которого могут располагаться какие-либо макроскопические тела. Очевидно, что и стенки контейнера, и объекты, которые в нем находятся, могут накапливать электростатический заряд, что во многом определяет плазменные процессы в таких системах. Экспериментальному исследованию этих процессов посвящена настоящая работа.

2. Постановка экспериментов

В наших экспериментах холодная сильнонеравновесная плазма возбуждалась внутри цилиндрического канала, заполненного плазмообразующим газом, инжекцией тонкого непрерывного пучка быстрых электронов вдоль оси цилиндра (ось z). В канале могли располагаться макроскопические тела простейшей геометрии, которые имитировали элементы внутренней оснастки реальной плазмотехнической системы. Эксперименты могли проводиться как в неподвижной плазме, так и в плазменном потоке. В последнем случае вдоль канала организовывалась продувка плазмообразующего газа. Варианты постановки экспериментов (см. рис. 1а, б):

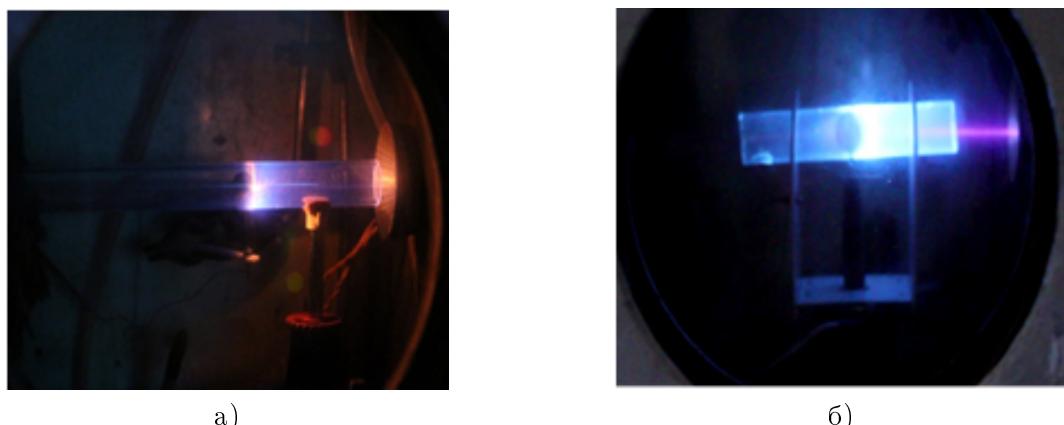


Рис. 1. а) Генерация электронно-пучковой плазмы внутри кварцевой трубки со сферическим теплом, установленным на ее оси, $D = 22$ мм, $d = 9$ мм; б) генерация электронно-пучковой плазмы внутри кварцевой трубки с установленным внутри нее диском, $D = 22$ мм, $d = 18$ мм

- Материал канала: металл или диэлектрик.
- Твердое тело, размещаемое внутри канала: материал – металлы или углерод (графит), форма – сфера или диск.
- Режимы течения плазмы в канале: неподвижная плазма, плазменный поток с продольной или тангенциальной подачей плазмообразующего газа.

Для создания плазмы внутри канала использовался генератор электронно-пучковой плазмы, подробно описанный в нашей предыдущей работе [4]. В этом генераторе, кроме состава плазмообразующего газа, могли варьироваться:

- Давление плазмообразующего газа P_m в диапазоне 0,1–10 Торр.
- Ток электронного пучка I_b в диапазоне 0–20 мА.
- Скорость плазменного тока (w) в диапазоне 0–200 м/с.
- Угол поворота диска в плоскости, перпендикулярной оси инжекции электронного пучка (φ) от 0 до $\pi/2$.

Диапазон варьирования энергии быстрых электронов был весьма ограниченным $E_b = 25 - 30$ кэВ, и, следовательно, интегральная мощность, вкладываемая в газ, в стенки канала и в расположенные в нем объекты, практически полностью определялась величиной тока электронного пучка.

3. Цель и задачи экспериментального исследования

Целью исследования было изучение влияния условий, в которых проводились эксперименты, на процессы зарядки металлических тел, контактирующих с неподвижным облаком или потоком электронно-пучковой плазмы. Если в работе [4] основное внимание уделялось эффектам, связанным с составом и давлением плазмообразующего газа, то в настоящей работе изучалась роль термогазодинамических процессов на поверхности тела и влияние геометрических параметров, характеризующих постановку эксперимента. При этом исследовалось влияние нагрева тела в электронно-пучковой плазме на накопление им электростатического заряда, а также возможность управления этим процессом за счет интенсивности обдува тела потоком плазмы. К геометрическим параметрам, характеризующим постановку экспериментов, относятся соотношение размера (диаметра D) канала и диаметра d размещенного в нем сферического тела, расстояние z между поверхностью тела и точкой инжекции электронного пучка, а также угол падения электронного пучка на поверхность диска, φ .

4. Экспериментальные результаты

Под воздействием электронного пучка на находящемся в плазме твердом теле может накапливаться отрицательный электрический заряд, что проявляется как возникновение некоторой разности потенциалов между телом и «землей». Было установлено, что при включении пучка абсолютная величина разности потенциалов возрастает от нуля до некоторого ΔU за время одного порядка со временем выхода I_b на стационарное значение, определяемое характеристиками системы управления генератором электронного пучка. Если условия эксперимента (мощность пучка и давление газа в канале) таковы, что возможен нагрев мишени, то по мере разогрева мишени разность потенциалов продолжает плавно расти выше ΔU , достигая, в конце концов, некоторого нового стационарного значения ΔU_{\max} .

На рис. 2а представлена зависимость, характеризующая рост отношения $\Delta U/(\Delta U)_0$, при увеличении температуры мишени T_s , где $(\Delta U)_0$ – разность потенциалов между мишенью и «землей» при $T_s \approx 100$ С. Условия эксперимента: $E_b = 25$ кэВ, $I_b = 10$ мА, $z = 200$ мм, мишень – стальной шар диаметром 9 мм. В качестве измерительного прибора использовался цифровой вольтметр В7-35 с входным сопротивлением $10 \pm 0,5$ МОм. Измерения проводились вплоть до таких температур мишени, когда рост функции $\Delta U/(\Delta U)_0 = f(T_M)$ становился слабым: для гелия это $T_M \approx 500$ °С, а для аргона и воздуха – $T_M \approx 300$ °С. Температура мишени измерялась вольфрам-рениевой термопарой ВР 5/20. Расстояние z отсчитывалось от точки инжекции электронного пучка в контейнер.

Рис. 2б показывает, как установившееся значение ΔU_{\max} зависит от условий эксперимента. В качестве примера на этом рисунке приведены графики зависимости разности потенциалов ΔU_{\max} между мишенью в виде стального шара диаметром 18 мм и заземленным корпусом рабочей камеры экспериментальной установки как функция статического

давления в канале P_m и расстояния между мишенью и точкой инжекции электронного пучка z . При уменьшении давления в канале ΔU_{\max} почти обратно пропорционально $(P_m)^{1/2}$. Сначала при достаточно высоких давлениях ($2,0 < P_m < 5,0$ Торр) наблюдается медленный рост ΔU_{\max} ; при дальнейшем понижении P_m разность потенциалов ΔU_{\max} начинает быстро нарастать и при $P_m < 0,5$ Торр рост разности потенциалов приобретает лавинообразный характер. На рис. 2б видно также, что по мере приближения тела к точке инжекции пучка его потенциал возрастает.

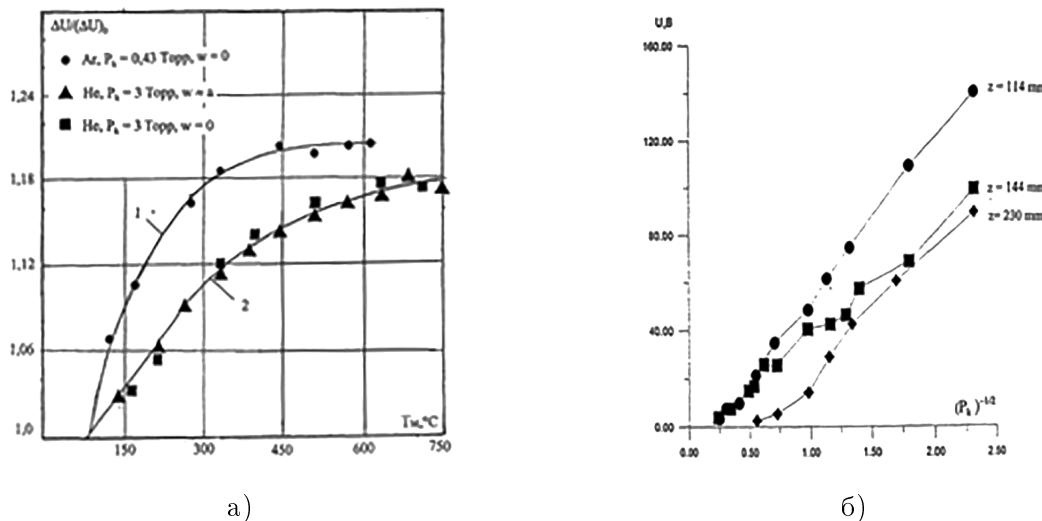


Рис. 2. а) Влияние температуры мишени на величину потенциала стальной сферы диаметром 9 мм, в электронно-пучковой плазме аргона (кривая 1) и гелия (кривая 2): $E_b = 25$ кВ, $I_b = 10$ мА, $z = 150$ мм; б) зависимость потенциала диска диаметром 18 мм от давления в канале на различных расстояниях z . Плазмообразующий газ – воздух, $I_b = 10$ мА, $E_b = 25$ кВ, $\varphi = \pi/2$

В исследованном диапазоне значений тока инжектируемого пучка ($I_b = 1 \div 20$ мА) ΔU_{\max} пропорционален I_b , что соответствует результатам, которые были нами ранее получены в экспериментах с телами, находящимися в свободном плазменном объеме, когда $D \gg d$.

Таблица 1
Максимальные и минимальные значения потенциала медного диска ($d = 18$ мм),
вращающегося в электронно-пучковой плазме воздуха и кислорода при
давлениях $P_m = 1$ Торр и $P_m = 3,0$ Торр; ток пучка $I_b = 1$ мА

	$U_{\max}(B)$ при $\varphi = 90^\circ$		$U_{\min}(B)$ при $\varphi = 0^\circ$	
	$P_m = 1,0$ Торр	$P_m = 3,0$ Торр	$P_m = 1,0$ Торр	$P_m = 3,0$ Торр
Воздух	4,7	0,7	0,2	0,2
Кислород	3,1	0,6	0,3	0,1

Таблица 2
Зависимость потенциала мишени (médный диск $d = 18$ мм) от угла ее поворота
 φ для электронно-пучковой плазмы воздуха: $I_b = 1$ мА, $P_m = 1,0$ Торр

φ , град	0	15	30	45	60	75	90
U_{\max} , В	4,7	4,5	3,4	2,5	1,2	0,6	0,3
U/U_{\max}	1,0	0,95	0,75	0,53	0,25	0,12	0,06

Табл. 1 и 2 характеризуют зависимость потенциала мишени в виде диска от угла падения электронного пучка на ее поверхность φ . Диск был установлен внутри диэлектри-

ческого контейнера, как показано на рис. 1б, и мог поворачиваться, чтобы исследовать зависимость $\Delta U_{\max}(\varphi)$.

Данные табл. 1 и 2 показывают, что

- Величина потенциала, накапливаемого мишенью в виде плоского диска, которая помещена в контейнер, заполненный электронно-пучковой плазмой, зависит от угла между осью инжекции пучка и плоскостью мишени φ . Когда $\varphi = 90^\circ$ величина потенциала ΔU_{\max} максимальна. При уменьшении φ потенциал мишени немонотонно уменьшается, достигая своего минимального значения, когда $\varphi = 0^\circ$. Тот факт, что в последнем случае этот потенциал не равен нулю, объясняется зарядкой мишени электронами, которые падают на нее под углом, не равном нулю. Такими электронами являются электроны, отраженные стенкой канала и электроны, рассеянные в столкновениях с молекулами плазмообразующего газа.

- Максимальная (при $\varphi = 90^\circ$) и минимальная (при $\varphi = 0^\circ$) величина потенциала зависят от химического состава плазмообразующего газа и его давления. В экспериментах с воздухом и кислородом установлено, что в исследованном диапазоне P_m максимальные величины потенциала диска в плазме воздуха выше, чем в плазме кислорода, а минимальные величины потенциала практически одинаковы. Увеличение давления плазмообразующего газа приводят к уменьшению и максимальной, и минимальной величины потенциала в плазме обоих газов.

Табл. 3 иллюстрирует эффект влияния движения электронно-пучковой плазмы на электростатическую зарядку тела, помещенного в плазменный поток. Эксперименты проводились с металлическими сферами, установленными на оси кварцевой трубы (как показано на рис. 1), вдоль которой продувался воздух. Ток инжектируемого пучка варьировался в диапазоне 0,5–1,5 mA, а давление газа в канале поддерживалось постоянным $P_m = 1,6$ Торр. Из данных, приведенных в таблице для расхода газа через канал $G = 2$ л/мин ($w \approx 10$ м/с), следует, что при всех токах пучка потенциал сферы в потоке плазмы примерно в 2 раза ниже, чем потенциал сферы в неподвижном плазменном облаке. Обнаруженный эффект требует специального исследования и объяснения, поскольку он может оказаться весьма важным при проектировании плазмотехнических систем проточного типа.

Таблица 3

Влияние обдува сферы ($d = 9$ мм) потоком электронно-пучковой плазмы воздуха, на ее электростатическую зарядку в канале $D = 22$ мм, $P_m = 1.6$ Торр

G (л/мин)	P_m (Торр)	I_b (mA)	ΔU (В)
0	1.6	0.5	14
0	1.6	1	24
0	1.6	1.5	32
2	1.6	0.5	8
2	1.6	1	10
2	1.6	1.5	14

5. Выводы

1. Экспериментально исследована электростатическая зарядка макроскопических тел в плазме различных газов, возбуждаемой электронным пучком внутри диэлектрического контейнера.

2. Получены зависимости, характеризующие влияние условий генерации плазмы на величину потенциала U металлической сферы (мишени), находящейся в диэлектрической трубке, вдоль которой инжектируется тонкий непрерывный электронный пучок. При этом установлено, что на величину потенциала существенным образом влияют

- давление плазмообразующего газа;

- сила тока пучка;
- расстояние между мишенью и точкой инжекции пучка.

3. Нагрев мишени приводит к некоторому (незначительному) повышению величины потенциала мишени U по сравнению с потенциалом холодной мишени.

4. Аналогичные результаты получены и для мишеней в виде диска. Для таких мишеней было выявлено влияние угла φ между осью инжекции пучка и плоскостью диска на величину потенциала U . При нормальном падении пучка потенциал U оказывался на порядок выше, чем при скользящем падении пучка.

5. Выводы 2–4 качественно справедливы для всех газов, использовавшихся в наших экспериментах (воздух, кислород, гелий), однако количественные эффекты для разных газов оказались различными.

6. Установлено, что обдув потоком электронно-пучковой плазмы существенно влияет на электростатическую зарядку твердого тела: при прочих равных условиях потенциал тела в плазменном потоке значительно ниже, чем в неподвижном плазменном облаке.

Работа поддержанна РФФИ, грантами 20-02-00501 и Аспирант № 19-38-90009.

Литература

1. *Buhler C.R., Clements J.S., Calle C.I.* 2012 Electrostatics studies for the 2008 Hubble Repair Mission // Proc. 2012 Joint Electrostatics Conf. Cambridge, ON.
2. *Hanna R., Paulmier T., Molinie P., Belhaj M., Dirassen B., Payan D., Balcon N.* Radiation induced conductivity in space dielectric materials // J. Appl. Phys. 2014. N 115. P. 033713.
3. *Бабкин Г.В., Беседина Т.В., Божко И.Д., Морозов Е.П., Савичев В.В. [и др.]*. Электризация высокоорбитальных космических аппаратов // Обзор по материалам зарубежной печати под ред. доктора технических наук С.Д. Гришина. ЦНИИМАШ, 1985. Сер. 11, № 28.
4. *Йе Хлаинг Хтун, Аунг Чжо У, Васильев М.Н.* Генерация приповерхностной электронно-пучковой плазмы // VIII Международный симпозиум по теоретической и прикладной плазмохимии. 10–15 сентября 2018 г., Иваново, Россия. Сборник трудов. С. 154–156.

References

1. *Buhler C.R., Clements J.S., Calle C.I.* 2012 Electrostatics studies for the 2008 Hubble Repair Mission. Proc. 2012 Joint Electrostatics Conf. Cambridge, ON.
2. *Hanna R., Paulmier T., Molinie P., Belhaj M., Dirassen B., Payan D., Balcon N.* Radiation induced conductivity in space dielectric materials. J. Appl. Phys. 2014. N 115. P. 033713.
3. *Babkin G.V., Besedina T.V., Bozhko I.D., Morozov E.P., Savichev V.V., et al.*, Electrization of high-orbit spacecraft. Review based on the materials of foreign press, edited by S.D. Grishin. TsNIIMASH, 1985. Ser. 11, N 28.
4. *Ye Hlaing Htun, Aung Kyaw Oo, Vasiliiev M.N.* Generation of near-surface electron-beam plasma. VIII International Symposium on Theoretical and Applied Plasma Chemistry. September 10-15, 2018, Ivanovo, Russia Proceedings. P. 154–156.

Поступила в редакцию 21.12.2020

УДК 621.396

H. B. Kхyonг

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Обоснование возможности применения посадочного радиолокатора для обнаружения метеообразований

В настоящее время одной из актуальных задач для обеспечения посадки самолетов является задача распознавания и классификации различных видов опасных явлений погоды. При решении задач синтеза и анализа систем радиолокационного распознавания необходимо использовать математические и компьютерные модели отраженного сигнала. Поэтому были разработаны математическая и компьютерная модели отраженного сигнала от метеообразования. Данные позволяют оценить способности обнаружения облаков в зоне ответственности локатора на базе измерения энергических характеристик принимаемого сигнала.

Ключевые слова: посадочный радиолокатор, математическая модель, компьютерная модель, интенсивность осадков, энергические характеристики сигнала, обработка сигналов, радиолокационная отражаемость, рассеивающая площадь, интенсивность.

N. V. Khuong

Moscow Institute of Physics and Technology

Justification of the possibility of using a landing radar to detect meteorological formations

Currently, one of the urgent tasks for ensuring the landing of an aircraft is the task of recognizing and classifying various types of dangerous weather phenomena. When solving problems of synthesis and analysis of radar recognition systems, it is necessary to use mathematical and computer models of a reflected signal. Therefore, a mathematical and computer model of a reflected signal from meteoformation is developed. The data allows us to evaluate the ability to detect clouds in the dispersive area of the radar based on measuring the energy characteristics of a received signal.

Key words: landing radar, mathematical model, computer model, precipitation intensity, signal energy characteristics, signal processing, radar reflectivity, dispersive area, intensity.

1. Введение

При работе посадочного радиолокатора (ПРЛ) на аэродроме часто сталкиваются с переотражением радиолокационных сигналов не только от целей (самолетов), но и от местных объектов и различных видов метеообразований (МО), что, как правило, приводит к появлению пассивных помех и, следовательно, ухудшению эффективности обработки полезной радиолокационной информации от целей. Для некоторых задач ПРЛ, например таких, как получение общей картины метеообстановки и их характеристик в зоне наблюдения, прием отраженного сигнала от гидрометеоров является важной задачей ПРЛ.

Цель работы состоит в разработке математической и компьютерной моделей радиолокационных отражений от различных видов метеообразований, способных обеспечить объективную проверку правильности алгоритма первичной обработки информации, а также использование модели для оценивания способности обнаружения облаков, дождей и снегов в зоне ответственности локатора.

© Кхыонг Н. В., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

2. Математическая модель сигнала, отраженного от метеообразований

В посадочном радиолокаторе используется передающий модуль с антенной, который облучает всю зону действия ПРЛ в режиме постоянного излучения. Для приёма используются две цифровые АФАР (для измерения углов глиссады и курса), каждая из которых имеет набор плоских диаграмм направленности (набор лучей). Таким образом, каждая цель облучается передатчиком непрерывно, а две приёмные ФАР (каждая из которых имеет свой набор плоских ДН) производят угловые измерения курса и глиссады. Взаимное расположение ДН передающей и приёмных антенн представлено на рис. 1.

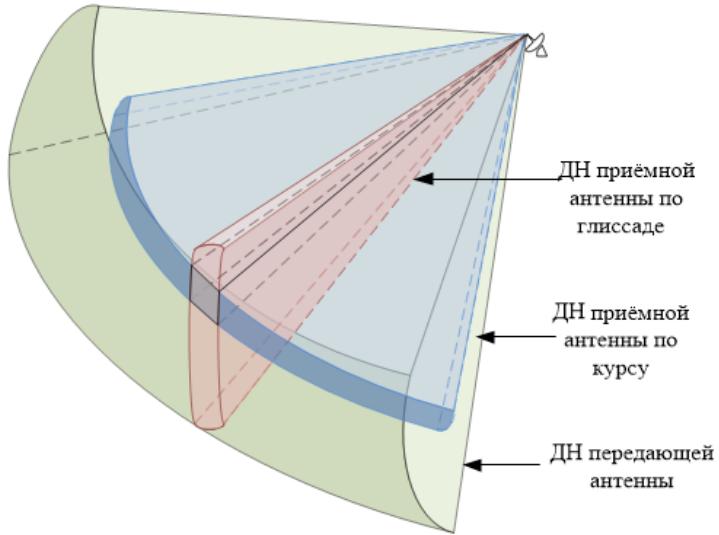


Рис. 1. Расположение диаграммы направленности ПРЛ

В качестве зондирующего сигнала в ПРЛ предлагаются выбрать конкретный ЛЧМ-сигнал. Для получения полной информации как о дальности, так и о скорости, а также для повышения дальности действия до соответствующего требуемого максимального значения (40 км) выполняется в одной секунде непрерывное повторение 77 периодов развертки ЛЧМ-сигнала. При этом предполагается, что несущая частота $f_0 = 9520$ МГц, частота девиации сигнала $\Delta F = 5$ МГц, время развертки одного периода $\tau = 1,3 \cdot 10^{-3}$ секунды и начальная фаза каждого нового периода повторения ЛЧМ-сигнала равна нулю и постоянна от периода к периоду (рис. 2).

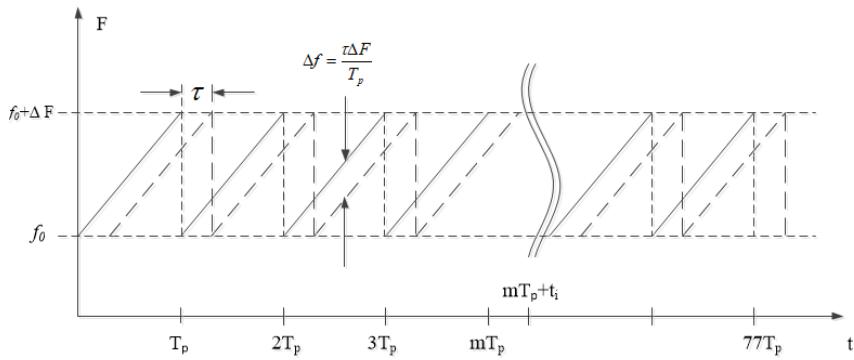


Рис. 2. Общий вид структуры зондирующего сигнала ПРЛ

При излучении зондирующих сигналов ПРЛ создает сигнал, который имеет вид

$$S(t) = ae^{j(2\pi f_0 t + \pi \Delta F t^2)}, 0 \leq t \leq \tau, \quad (1)$$

где a – амплитуда сигнала.

В метеорадиолокации принято рассматривать МО как множественные радиолокационные цели, состоящие из совокупности гидрометеоров. Размер этих частиц достаточно мал по сравнению с длиной волны $d \ll 0,06\lambda = 0,18$ см, чтобы считать их для МРЛ точечными целями. Так как отраженный от одиночной цели сигнал копирует форму излучаемого сигнала со случайными амплитудами a_i и фазами φ_i , отраженный сигнал от i -й частицы имеет вид

$$S_i(t) = a_i e^{j(2\pi f_0(t-\tau_i) + \pi \Delta F(t-\tau_i)^2 + \varphi_i(t))} e^{j2\pi \Delta f_i(t-\tau_i)}, \quad (2)$$

где Δf_i – сдвиг доплеровской частоты от i -й частицы.

Сигнал $S(t)$ на входе приемника радиолокатора в разрешаемом объеме является суммой отраженных сигналов от всех отдельных частиц:

$$S(t) = \sum_i^N a_i e^{j(2\pi f_0(t-\tau_i) + \pi \Delta F(t-\tau_i)^2 + \varphi_i(t))} e^{j2\pi \Delta f_i(t-\tau_i)}. \quad (3)$$

Выборочное значение суммарной мощности эхосигнала, осредненной по время развертки одного периода $\tau = 1,3 \cdot 10^{-3}$ с, имеет вид

$$\overline{P}_\tau(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_i^N a_i^2 \right) + \operatorname{Re} \sum_i \sum_k a_i a_k e^{j\Psi_i(t-\tau_i)} e^{j\Psi_k(t-\tau_k)} e^{j2\pi \Delta f_{ik}(t-\tau_{ik})}, \quad (4)$$

где

$$\Psi_i(t - \tau_i) = (2\pi f_0(t - \tau_i) + \pi \Delta F(t - \tau_i)^2 + \varphi_i(t)), \quad (5)$$

$$\Psi_k(t - \tau_k) = (2\pi f_0(t - \tau_k) + \pi \Delta F(t - \tau_k)^2 + \varphi_k(t)). \quad (6)$$

В приведенном выражении (4) учитывается суммарная мощность двух слагаемых. Первое слагаемое является постоянной величиной, не зависящей от относительного положения метеообразований в разрешаемом объеме V_s , и несет информацию об отражающих энергетических свойствах метеообразований в целом. Данная величина представляет наибольший интерес для нас в радиолокационной метеорологии.

Вторая часть выражения (4) – это флюктуирующая часть мгновенной мощности, которая зависит от взаимного расположения метеочастиц и несет информацию о случайном перемещении метеочастиц друг относительно друга. Причинами флюктуаций могут быть хаотические перемещения метеообразований относительно местонахождения нашего посадочного радиолокатора вследствие выпадения метеообразований, турбулентности, ветра или других факторов. Форма и длительность флюктуаций зависят от формы и длительности зондирующего сигнала. При многократном накоплении мощности (77 периодов) при периодическом облучении сигнала среднее значение второго слагаемого суммы устремится к нулю. Тогда на входе приемника средняя накопленная мощность сигнала, отраженного от всех метеочастиц в этом объеме, равна

$$\overline{P}_\tau = \frac{1}{2} \left(\sum_i^N a_i^2 \right). \quad (7)$$

В дальнейшем рассмотрим, как среднее накопленное значение мощности отраженного сигнала \overline{P}_τ связано с метеорадиолокационными параметрами и эффективной площадью рассеяния МО.

Уравнение метеорадиолокации атмосферных образований

Предположим, что если R – расстояние до данной метеоцели (осадки, облака, снег, град), то плотность потока мощности зондирующих сигналов ПРЛ создается в месте расположения метеоцели:

$$\Pi = \frac{PG}{4\pi R^2}, \quad (8)$$

где P — мощность передатчика ПРЛ; G — коэффициент усиления передающей антенны; Π — плотность потока мощности.

$$G = \frac{4\pi S_{eff}^t}{\lambda^2}, \quad (9)$$

где S_{eff}^t — эффективная площадь передающей антенны; λ — длина волны излучаемого сигнала.

Эффективные площади приемной и передающей антенн определялись по следующим формулам:

$$\begin{aligned} S_{eff}^{rc} &= \gamma S_{rc}, \\ S_{eff}^{rg} &= \gamma S_{rg}, \\ S_{eff}^t &= \gamma S_t, \end{aligned} \quad (10)$$

где S_t — геометрическая площадь передающей антенны; S_{rc} и S_{rg} — геометрическая площадь приемной антенны по курсу и глиссаде; γ — коэффициент использования поверхности антенн.

Из-за воздействия электромагнитной энергии облучаемое метеообразование становится вторичным излучателем. Мощность его будет выражаться следующим соотношением:

$$P_r = \Pi \sigma = \frac{P\gamma S_r}{\lambda^2 R^2} \sigma. \quad (11)$$

При условии, что метеорологические цели (облака и осадки) являются непоглощающими изотропными отражателями, отраженная от них мощность, приходящаяся на выход приемной антенны с эффективной площадью, будет выражаться таким образом:

$$P_r = \frac{P\gamma_2 S_r S_t}{4\pi \lambda^2 R^4} \sigma. \quad (12)$$

Формула (12) представляет собой общее уравнение радиолокации для различных целей (ракета, беспилотная аппаратура, самолет, корабль, облако и т. д.), находящихся в зоне ответственности локатора. В метеорадиолокации целями являются протяженности и объемы облаков и осадков, поэтому необходимо считать множественность целей и наличие затухания (ослабления) k при распространении электромагнитных волн в зоне ответственности локатора.

Облака и осадки состоят из совокупности капель и кристаллов в некотором объеме и воспринимаются как единая цель. Мощность принятого сигнала радиолокационной станцией определяется как сумма от всех частиц в разрешаемом объеме и будет записана следующим образом:

$$\overline{P}_r = \frac{P\gamma^2 S_r S_t T_s}{4\pi \lambda^2 R^4} V_s \sum_i^N \sigma_i, \quad (13)$$

где V_s — разрешающий объем; σ_i — эффективная площадь рассеяния i -й частицы.

На основании изложенного можно утверждать, что рассеивающая площадь единицы объема метеорологической цели, состоящей из одинаковых частиц, равна произведению числа этих частиц на рассеивающую площадь одной частицы. Тогда суммарная рассеивающая площадь всех капель в единице объема облака или осадков описывается в виде

$$\sigma_0 = \sum_d N(d) \sigma(d, \lambda), \quad (14)$$

где $\sigma(d, \lambda)$ – рассеивающая площадь частицы диаметром d для длины волны λ , $N(d)$ – число частиц диаметром d в единице объема.

Метеообразованием является протяженная цель, поэтому при определении мощности отраженных сигналов от них, в отличие от других целей (самолет, корабль), необходимо вводить величину так называемого коэффициента заполнения k_f . Он представляет собой отношение объема зондирующего импульса в пространстве, заполненного частицами облаков и осадков, ко всему объему импульса [2, 5]. Величина коэффициента заполнения в общем случае зависит от геометрических размеров облучаемых зон облаков и осадков и геометрических размеров зондирующего импульса.

Если мы имеем ПРЛ с шириной диаграммы направленности θ и φ с длительностью зондирующего сигнала $\tau = 0,0013$ с, то протяженность сигнала локатора в пространстве по дальности составит $c\tau = 0,0013 \cdot 3 \cdot 10^5 = 400$ км, а если за время накопления $T_s = 0,1$ с, то протяженность сигнала локатора в пространстве по дальности составит $cT_s = 30\,000$ км (c – скорость распространения радиоволн). Видно, что протяженность сигнала локатора слишком велика по сравнению с размером облаков. В реальных условиях, особенно при наблюдении метеорологических объектов сигналами с большой длительностью, разрешаемый объем пространства, который увеличивается по мере роста расстояния, может оказаться лишь частично заполненным отражающими частицами. Соответствующее уменьшение ЭПР метеорологического объекта учитывают с помощью коэффициента заполнения $0 < k_f < 1$.

Рассеянный от этого объема сигнал будет возвращаться к радиолокатору не из всего объема, а из его части, равной $cT_s/2$. На рис. 3 представлены ДН одного луча антенн по глиссаде (верхний), имеющей набор 16 лучей, и по курсу (нижний) с набором 32 луча.

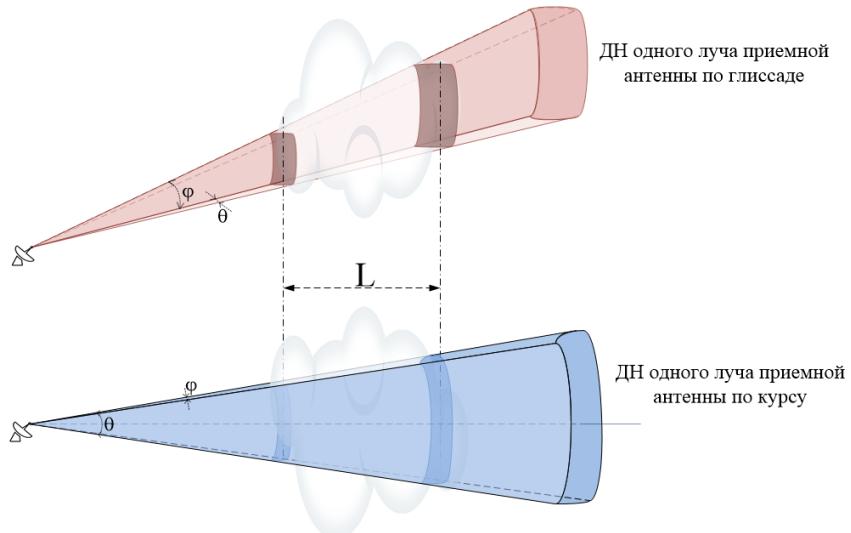


Рис. 3. Отражающий объем облака одного луча

Как известно, в нашем ПРЛ применяются антенны с узкой ДН, поэтому величина радиолокационного объема V_s локатора определяется выражением [4]:

$$V_s = \frac{\pi \theta \varphi R^2 c \tau}{16 \ln 2}, \quad (15)$$

где θ и φ – ширина ДН антенны по уровню половинной (3 дБ) мощности в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Ширина ДН одного луча по курсу $\theta = 1,2^\circ$ и $\varphi = 10^\circ$, а по глиссаде $\theta = 35^\circ$ и $\varphi = 0,6^\circ$.

Эффективная площадь рассеяния отражающего объема МО имеет вид

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{\pi^6 \theta \varphi R^2 c T_s}{16 \lambda^4 \ln 2} \sum_d N(d) \sigma(d, \lambda). \quad (16)$$

С учетом (14), (15) и (16) можно записать уравнение радиолокации атмосферных метеообразований для нашего ПРЛ в течение всего времени накопления отраженных сигналов T_s следующим образом:

$$\overline{P_r} = \frac{\pi^5 P \gamma^2 \theta \varphi S_r S_t c \tau T_s k k_3}{64 \lambda^2 R^2 \ln 2} \sum_d N(d) \sigma(d, \lambda). \quad (17)$$

Опираясь на перечисленные выше параметры, можно оценить мощность шумов, при которой будет выполняться требование технических заданий ПРЛ по дальности обнаружения метеообразования:

$$P_{\text{ш}} = \frac{k S T_s L}{N} = -180 \text{ дБ.} \quad (18)$$

Разделив обе части уравнения (17) на $P_{\text{ш}}$ (соответственно уровень шумов приемного устройства или минимальная мощность принимаемого сигнала), а также объединив технические параметры ПРЛ в одну постоянную величину Π_m , получим уравнение радиолокации метеообразований в сокращенном виде с учетом способа измерений мощностей отраженных сигналов:

$$\frac{\overline{P_r}}{P_{\text{ш}}} = \Pi_m \sum_d N(d) \sigma(d, \lambda) k k_3, \quad (19)$$

где величина

$$\Pi_m = \frac{\pi^5 P \gamma^2 \theta \varphi S_r S_t c T_s^2}{64 P_{\text{ш}} \lambda^6 \ln 2} \quad (20)$$

называется метеорологическим потенциалом радиолокатора.

Параметры нашего посадочного радиолокатора (ПРЛ) представлены в табл. 1.

Таблица 1
Параметры ПРЛ

Параметр	Единица	Значение
P ,	Вт	100
T_s	С	0,1
λ	М	0,03
S_t	М^2	0,01
S_{rg}	М^2	0,192
S_{rc}	М^2	0,27
γ		0,9
θ	Градус	0,6
φ	Градус	1,2
$P_{\text{ш}}$	дБ	-180
Π_m^g	дБ	311
Π_m^c	дБ	313

В табл. 1 представлены постоянные значения Π_m ПРЛ, которые определяют их энергетический потенциал и позволяют сравнивать различные метеолокаторы с точки зрения их эффективности для метеорологических наблюдений [1]. Чем больше потенциал, тем лучше станция приспособлена для метеонаблюдений.

Коэффициент, учитывающий ослабление радиоволн, определяемый через коэффициенты ослабления в осадках k_{oc} , облаках k_{obl} и атмосферных газах k_g и выраженный в децибелах на километр, определяется соотношением

$$k = 10^{-0,2 \int_0^R (k_{oc} + k_{obl} + k_g) dR}. \quad (21)$$

Процесс обнаружения радиолокационного сигнала, отраженного метеообразованием, сводится к обнаружению полезного сигнала на фоне шумов путем сравнения отношения средней мощности полезного сигнала и шумов с порогом на выходе приемника ПРЛ. Ниже мы рассмотрим некоторые модели метеообразований, соответствующие различным видам облаков и осадков.

А. Математическая модель радиолокационных отражений от слоистообразной облачности без осадков

Известно, что спектр маленьких частиц в облаках, не дающих осадки, с диаметрами меньше 60 мкм описывается гамма-распределением, плотность которого имеет вид

$$n(d) = \frac{N}{\Gamma(\alpha + 1)\beta^{\alpha+1}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\alpha} e^{-\frac{d}{2\beta}}, \quad (22)$$

где $n(d)$ – функция распределения частиц по размерам, N – концентрация частиц, d – диаметр частицы, Γ – гамма-функция, α – параметр формы распределения, β – параметр масштаба распределения.

В табл. 2 представлены характеристики некоторых типов облаков.

Т а б л и ц а 2
Параметры ПРЛ

Тип облаков	Концентрация (см^{-3})	Водность (гм^{-3})	$\Delta H(M)$	г(мкм)
Stratus (St I)	440	0,22	700	4,2
Stratocumulus (Sc I)	350	0,14	750	4,1
Nimbostratus (Ns)	280	0,5	2500	5,6
Altocstratus (As)	430	0,28	500	4,9
Cumulonimbus (Cb)	72	2,5	3000	28,4
Cumulus (Cu)	300	1	750	7,5

Функция плотности распределения дает представление о том, какие частицы количественно преобладают в кубическом объеме облака при разных видах облаков. Полученная характеристика представлена на рис. 4.

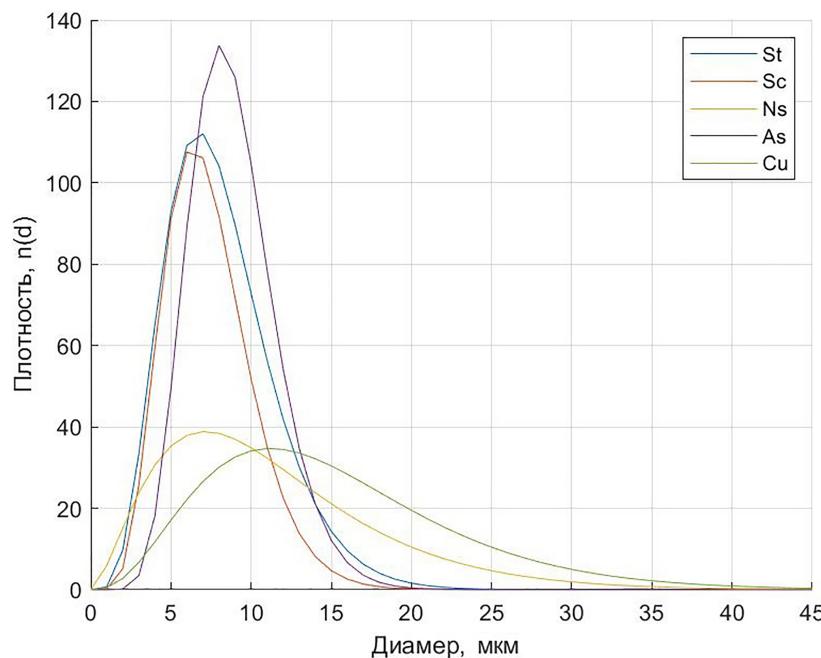


Рис. 4. Отражающий объем облака одного луча

Этот вид функции распределения частиц облака получен в результате обработки и анализа большого материала [11]. На рис. 4 показано, что большинство частиц этих видов облаков имеет диаметр от 5 Мкм до 25 Мкм. Для таких малых сферических частиц с диаметром намного меньше длины электромагнитной волны ($d \ll 0,06\lambda = 0,18$ см) рассеянная энергия излучается почти изотропно и по рэлеевскому условию ЭПР отдельного гидрометеора описывается следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{\pi^5}{\lambda^4} d^6 \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2. \quad (23)$$

Удельная площадь обратного рассеяния η в единице объема МО определяется по формуле

$$\eta = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{V_s}. \quad (24)$$

Радиолокационной отражаемостью Z_d , $\text{мм}^6/\text{м}^3$, называется величина, характеризующая отражающие свойства единичного объема метеообразований. Она может интерпретироваться как сумма возведенных в шестую степень диаметров частиц, находящихся в единице объема V_s :

$$Z_d = \sum_{i=1}^N d_i^6 \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 = \frac{\lambda^4}{\pi^5} \eta, \quad (25)$$

где d_i – диаметры отражающих частиц; $\left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2$ – комплексный показатель преломления частиц (для воды $0,93 \pm 0,004$ и для льда $0,197$). При одинаковых размерах радиолокационная отражаемость ледяной частицы почти в 5 раз меньше, чем у водяной частицы.

В соответствии с уравнением (4), величина радиолокационной отражаемости Z_d имеет следующие особенности:

- радиолокационная отражаемость метеорологического объекта не зависит от длины волны λ ;
- радиолокационная отражаемость метеорологического объекта не зависит от каких-либо технических характеристик локатора, используемого для радиометеорологического зондирования атмосферы.

Уравнение радиолокации атмосферных метеообразований для нашего ПРЛ в течение всего времени накопления отраженных сигналов записывается следующим образом:

$$\frac{\bar{P}_r}{P_{\text{ш}}} = \Pi_m \frac{N_0 d^6}{R^2} \left| \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right|^2 k k_3. \quad (26)$$

Очевидно, что уравнение (26) для отношения мощности принимаемого сигнала к шуму выражает одну особенность метеорадиолокационной информации, а именно его сильную зависимость от размеров частиц в метеорологическом объекте (шестая степень). Увеличение диаметра метеообразования в два раза приводит к увеличению мощности принятого сигнала в 64 раза или дальности обнаружения в восемь раз.

На рис. 5а, б представлены соответствующие результаты математического моделирования для разных видов облаков (а) и моделирования в Matlab с экспериментальными данными на ПРЛ.

Как видно из приведенных на рис. 5а, б зависимостей, отношение мощностей принимаемого сигнала и шума оказывается меньше порога (равен 20 дБ). Таким образом, приведенные исследования подтверждают, что данный посадочный радиолокатор не может обнаруживать слоистообразные облака без осадков, имеющие маленькие частицы.

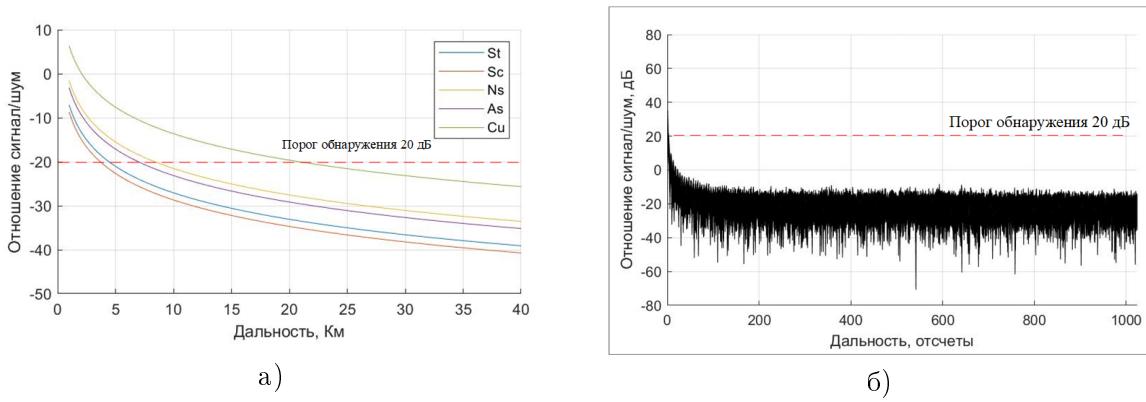


Рис. 5. Зависимость отношения мощности сигнала к мощности шума от дальности:
а) по математической модели, б) по результатам обработки реальных данных

Б. Математическая модель радиолокационных отражений от дождевых осадков

Зона облака с осадками характеризуется различными параметрами: структурой, размерами, скоростью перемещения, формой. Для анализа и разработки точной модели отражений от них по радиолокационным методам измерения необходимы детальные сведения о распределении гидрочастицы по размерам. Наибольшее распространение в научном исследовании по осадкам нашло распределение $n(x, y, z, t, d)$, являющееся функцией распределения частиц осадков в единице объема по диаметру d , месту падения осадков (x, y, z) и по времени t :

$$n(x, y, z, t, d) = N(t)f(d). \quad (27)$$

Соответствующая интенсивность осадков тоже зависит от времени и места выпадения:

$$I(x, y, z, t) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} d^3 n(x, y, z, t, d) [v(d) - v_v(x, y, z, t)] d(d), \quad (28)$$

где $v(d)$ – скорость падения частицы, $v(x, y, z, t)$ – вертикальная скорость воздушных потоков.

Для упрощения научных экспериментальных расчетов рассмотрим модель, в которой осадки из облаков однородны по пространству и времени, и вертикальные скорости отсутствуют $v(x, y, z, t) = 0$. Тогда отражаемость осадков Z и интенсивность I зависят от распределения частиц по размерам и записываются таким образом:

$$Z = N(t) \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} f(d) d^6 d(d), \quad (29)$$

$$I = N(t) \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} v(d) f(d) d^3 d(d). \quad (30)$$

При изучении многочисленных исследований о макро- и микроструктуре МО предлагает $v(d) = d^\beta$ (β – параметр, зависящий от размеров частиц) и показывает, что их распределение удовлетворительно описывается следующим выражением:

$$n(d) dd \approx N(t) d^\beta e^{-\gamma d} d(d), \quad (31)$$

Представленное выражение (31) широко применяется для капель дождя и снега, и если пронормировать его с использованием гамма-функции Γ , то мы получим выражение согласно А. Г. Горелику и А. Б. Шупляцкому:

$$n(d) = N(t) \frac{\gamma^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \frac{d^\beta}{\bar{d}^{\beta+1}} e^{-\gamma \frac{d}{\bar{d}}}. \quad (32)$$

Подставив выражение (32) в формулы (29) и (30), получим

$$Z = N(t) \frac{\Gamma\beta + 7}{\Gamma\beta + 1} \left(\frac{\bar{d}}{\gamma} \right)^6, \quad (33)$$

$$I = N(t) \frac{\Gamma 2\beta + 3}{\Gamma\beta + 1} \left(\frac{\bar{d}}{\gamma} \right)^{6+\beta}. \quad (34)$$

Связь между отражаемостью Z и интенсивностью I осадков установлена через формулу

$$Z = A(t) I^b, \quad (35)$$

где A и b – эмпирически определяемые величины.

В реальных условиях, как правило, осадки облаков вообще неоднородны по времени и пространству, следовательно, зависимости интенсивности (34) и отраженности (33) от среднего диаметра капель и концентрации нежесткие и также изменяются по времени и пространству. Поэтому принимаем, что интенсивности I и отраженности Z связаны выражением (35), а параметры A и b нельзя считать постоянными ни во времени, ни в пространстве.

Таблица 3
Параметры ПРЛ

Z	Место наблюдения	Предел	Авторы	Примечания
257. $I^{1,55}$	Эльбрус, Россия	—	Литвинов	367 спектров в 7 дождях
600. $I^{1,8}$	Эльбрус, Россия	—	Литвинов	Снежинки в течение 20 мин
209. $I^{1,69}$	Киев, Украина	—	Мучник	88 спектров дождя
290. $I^{1,41}$	Гавайские острова	0,28–127	Блангард	28 спектров дождя
200. $I^{1,6}$	Оттава, Канада	0,15–35	Векслер	250 спектров дождя
2150. $I^{1,8}$	Япония	—	Иман	Снег в течение 1 : 40
2000. I^2	Монреаль, Канада	> 0,16	Гани	Снег в течение 10 дней

В табл. 3 представлены эмпирические связи не только для дождей, но и для снегопадов, которые получены от многих авторов чисто экспериментальным путем, когда одновременно измеряются интенсивности осадков, определяются число и распределение частиц по диаметрам, позволяющие определить величину Z . Для наших умеренных широт лучше всего подходит формула

$$Z = 200I^{1,6}, \quad (36)$$

где радиолокационная отражаемость Z измеряется в $\text{мм}^6/\text{м}^3$, а интенсивность дождя I – в $\text{мм}/\text{час}$.

Теперь можно выразить уравнение радиолокации атмосферных метеообразований для нашего ПРЛ в течение всего времени накопления отраженных сигналов через интенсивность дождевых осадков следующим образом:

$$\frac{\bar{P}_r}{P_{\text{ш}}} = \Pi_{\text{м}} \frac{200I^{1,6}}{R^2} k k_3. \quad (37)$$

Анализ зависимостей, приведенных на рис. 5 и 6, наглядно показывает, что чем больше интенсивности осадков, тем выше уровень мощности принимаемого сигнала. Из рис. 6 также видно, что отношение мощности сигнала к мощности шума значительно больше при наличии облаков с осадками в ЗО ПРЛ, чем при наличии слоистообразных облаков без

осадков. Следовательно, ПРЛ способен обнаруживать облака с осадками в своей ЗО при дальности до 40 км и I больше 0,75 мм/ч, при дальности 30 км и $I = 0,5$ мм/ч и при дальности 17 км и $I = 0,25$ мм/ч.

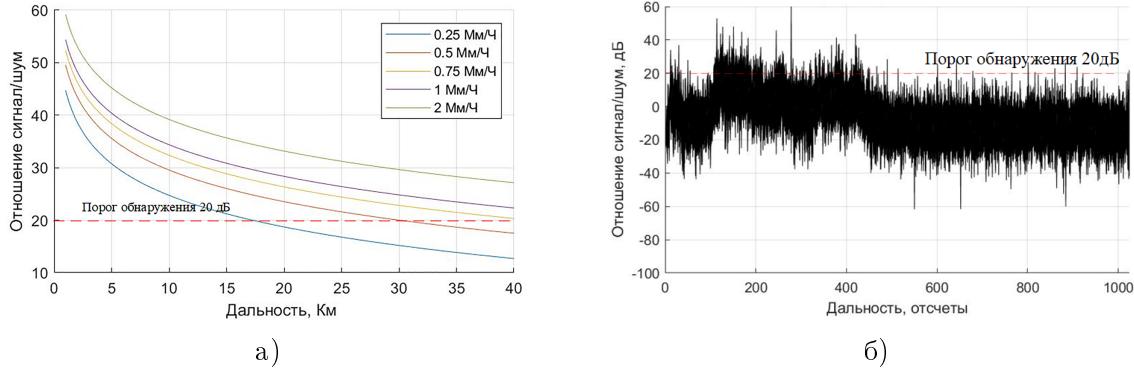


Рис. 6. Зависимость отношения мощности сигнала к мощности шума от дальности: а) по математической модели, б) по результатам обработки реальных данных

В. Математическая модель радиолокационных отражений от снеговых осадков

В отличие от дождевых облаков снеговые могут быть как слоистыми, так и кучевыми облаками. Снег может быть в сухом виде при температуре меньше 0 °C, в тающем при температуре больше 0 °C и в комбинированном виде. Для общей связи радиолокационной отражаемости снега Z с его интенсивностью I по табл. 3 воспользуемся формулой

$$Z = 2000I^2. \quad (38)$$

Уравнение радиолокации атмосферных метеообразований для нашего ПРЛ в течение всего времени накопления отраженных сигналов записывается следующим образом:

$$\frac{\bar{P}_r}{P_{\text{III}}} = \Pi_m \frac{2000I^2}{R^2} k k_3. \quad (39)$$

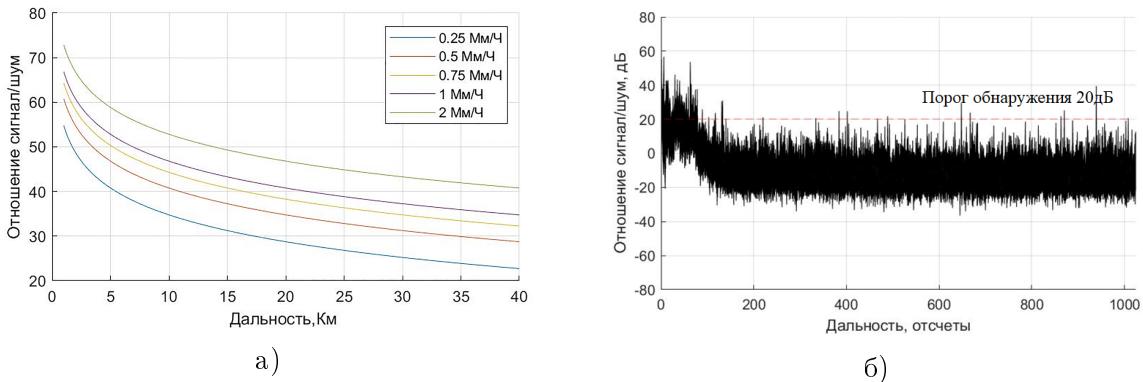


Рис. 7. Зависимость отношения мощности сигнала к мощности шума от дальности: а) по математической модели, б) по результатам обработки реальных данных

Из сравнения выражений (37) и (39) для дождевых и снеговых осадков можно сделать вывод о том, что величина радиолокационной отражаемости Z снега больше, чем дождя. Анализируя результаты численного моделирования зависимостей, приведенных на рис. 6а и 7а, можно сказать, что вид кривых не изменяется при одинаковых значениях интенсивности осадков, а значения уровня мощности принимаемого сигнала для снега больше, чем для дождя.

3. Заключение

Таким образом, по результатам математического моделирования и обработки реальных отражений от МО, полученных при натурных испытаниях ПРЛ, можно сделать вывод о том, что ПРЛ, разработанный с применением описанных системотехнических решений, способен выполнять обнаружение дождевых и снеговых облаков в его ЗО. Данный факт позволяет использовать полученные от ПРЛ данные для предупреждения конечного потребителя информации об опасных метеорологических явлениях. Обнаружение же слоистых облаков без осадков (Ci, Cs, St и Sc) и тумана в ближней зоне невозможно.

Разработанная математическая модель может быть успешно применена для расширения функционала перспективных ПРЛ в части обеспечения потребителя метеорологической информацией, при использовании на этапе проектирования и формирования тактико-технических характеристик, предъявляемых к ПРЛ.

Литература

1. Боровиков А.М., Костарев В.В., Мазин И.П., Смирнов В.И., Черников А.А. Радиолокационные измерения осадков / под ред. А.М. Боровикова и В.В. Костарева. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1967. 72 с.
2. Степаненко В.Д. Радиолокация в метеорологии. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1966. 350 с.
3. Брылёв Г.Б., Гашина С.Б., Низдоиминога Г.Л. Радиолокационные характеристики облаков и осадков. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1986. 234 с.
4. Battan L.Dzh. Radar in meteorology / пер. с английского. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1979. 231 с.
5. Doviak R., Zrnich D. Doppler radars and meteorological observations. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1988. 512 с.
6. Руководящий документ РД 52.04.321-91. Руководство по производству наблюдений и применению информации с неавтоматизированных радиолокаторов МРЛ-1, МРЛ-2, МРЛ-5. Санкт-Петербург : Гидрометеоиздат, 1993. 357 с.

References

1. Borovikov A.M., Kostarev V.V., Mazin I.P., Smirnov V.I., Chernikov A.A. Radar measurements of precipitation. under the editorship of A.M. Borovikov and V.V. Kostarev. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1967. 72 p. (in Russian).
2. Stepanenko V.D. Radar in meteorology. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1966. 350 p. (in Russian).
3. Brylyov G.B., Gashina S.B., Nizdoyminoga G.L. Radar characteristics of clouds and precipitation. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1986. 234 p. (in Russian).
4. Battan L.Dzh. Radar in meteorology. translation from english. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1979. 231 p. (in Russian).
5. Doviak R., Zrnich D. Doppler radars and meteorological observations. Leningrad : Gidrometeoizdat, 1988. 512 p. (in Russian).
6. Guidance document RD 52.04.321-91. Guidelines for the production of observations and the use of information from non-automated radars MRL-1, MRL-2, MRL-5. Sankt-Petersburg : Gidrometeoizdat, 1993. 357 p. (in Russian).

УДК 535.3

С. В. Сахно¹, Ю. А. Кротов², А. В. Яковец¹¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)²НИИ «Полюс» им. М. Ф. Стельмака

Особенности фотопоглощения на «core-shell» наночастицах в различных матрицах при наличии плазмонных резонансов

Работа посвящена исследованию особенностей поглощения электромагнитного излучения на сферических наночастицах с металлическим ядром и полупроводниковым покрытием в спектральном диапазоне, охватывающем плазмонные резонансы наносфер из вещества ядра и покрытия. Расчет проведен в рамках дипольного приближения и модели Друде для диэлектрической проницаемости для различных матриц и геометрических параметров наночастицы. Показано, что спектр поглощения содержит два пика, отвечающих плазмонным резонансам вещества ядра и покрытия. Установлено, что с изменением отношения радиуса ядра к радиусу наночастицы, а также диэлектрической проницаемости матрицы положение высокочастотного пика заметно смещается, в то время как низкочастотный максимум остается практически неизменным.

Ключевые слова: наночастицы с покрытием, фотопоглощение, плазмонный резонанс, модель Друде.

S. V. Sakhno¹, Yu. A. Krotov², A. V. Yakovets¹¹Moscow Institute of Physics and Technology²Joint Stock Company «Polyus Research Institute of M. F. Stelmakh»

Features of photoabsorption on «core-shell» nanoparticles in various matrices in the presence of plasmon resonances

The work is devoted to the study of the features of absorption of electromagnetic radiation on spherical nanoparticles with a metal core and a semiconductor coating in the spectral range covering the plasmon resonances of nanospheres from the substance of the core and coating. The calculation is carried out within the framework of the dipole approximation and the Drude model for the dielectric constant for various matrices and geometric parameters of a nanoparticle. It is shown that the absorption spectrum contains two peaks corresponding to plasmon resonances of the core and coating matter. It is found that with a change in the ratio of the core radius to the nanoparticle radius, as well as the dielectric constant of the matrix, the position of the high frequency peak shifts noticeably, while the low frequency maximum remains practically unchanged.

Key words: coated nanoparticles, photoabsorption, plasmon resonance, Drude model.

1. Введение

В работе рассматриваются особенности поглощения электромагнитного излучения на сферических наночастицах, состоящих из ядра с радиусом b и диэлектрической проницаемостью ϵ_c и сферического слоя с внешним радиусом a и диэлектрической проницаемостью ϵ_s (см. рис. 1). Для краткости мы в дальнейшем будем называть эти наночастицы «core-shell» наночастицами. Предполагается, что однородные наночастицы с диэлектрическими

© Сахно С. В., Кротов Ю. А., Яковец А. В., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

проницаемостями ядра и сферической оболочки имеют плазмонные резонансы в оптическом диапазоне длин волн.

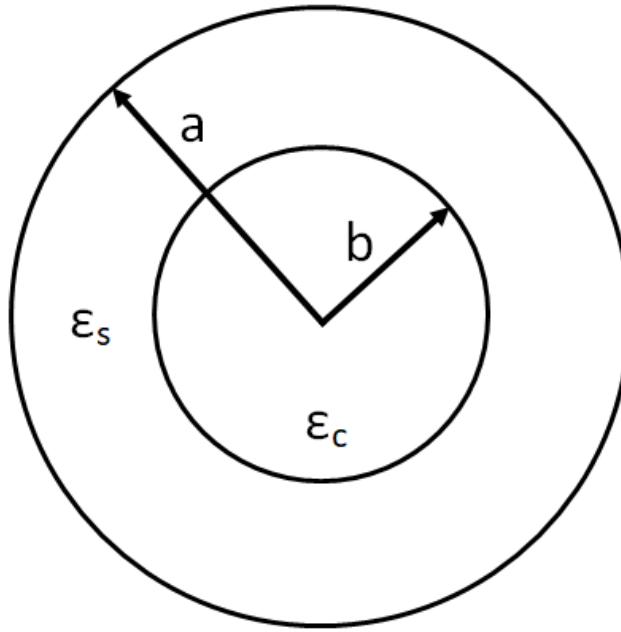


Рис. 1. Сферическая «core-shell» наночастица

2. Метод расчета

Выражение для спектрального сечения фотопоглощения на полупроводниковой наночастице в дипольном приближении (длина волны излучения много больше размера наночастицы) может быть найдено с помощью оптической теоремы [1]:

$$\sigma_{abs}(\omega) = \frac{4\pi\omega\sqrt{\epsilon_m}}{c} \text{Im}\alpha(\omega), \quad (1)$$

где ω – частота излучения, ϵ_m – диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещена наночастица, c – скорость света в вакууме, $\alpha(\omega)$ – динамическая поляризуемость наночастицы. В случае «core-shell» наночастицы эффективная динамическая поляризуемость имеет вид [2]:

$$\alpha(\omega) = a^3 \frac{(\epsilon_s - \epsilon_m)(\epsilon_c + 2\epsilon_s) + q^3(2\epsilon_s + \epsilon_m)(\epsilon_c - \epsilon_s)}{(\epsilon_s + 2\epsilon_m)(\epsilon_c + 2\epsilon_s) + q^3(2\epsilon_s - 2\epsilon_m)(\epsilon_c - \epsilon_s)}. \quad (2)$$

Здесь для краткости введен параметр $q = b/a$. Очевидно, что для $q = 0$ или 1 наночастица становится однородной с диэлектрической проницаемостью ϵ_s или ϵ_c .

В данной работе пренебрегаем частотной зависимостью диэлектрической проницаемости матрицы в интересующем нас спектральном диапазоне $\epsilon_m = const$.

Предполагаем далее, что диэлектрические проницаемости вещества ядра и оболочки описываются с помощью формулы Друде [1]:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (3)$$

где ϵ_∞ – высокочастотная диэлектрическая проницаемость вещества, γ – константа релаксации, ω_p – плазменная частота.

Для конкретности рассмотрим далее случай, когда ядро частицы серебряное, а покрытие состоит из окиси цинка ZnO.

Соответствующие параметры для диэлектрической проницаемости, входящие в формулу (3), приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вещество/параметр	ω_p , эВ	ε_∞	γ , эВ
Ag	9.1	3.7	0.018
ZnO	0.71	3.7	0.029

В случае однородной наносферы частота, отвечающая плазмонному резонансу, дается выражением:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\varepsilon_\infty + 2\varepsilon_m} - \gamma^2}. \quad (4)$$

При выводе формулы (4) была использована модель Друде (3) для диэлектрической проницаемости вещества. Для серебра и оксида цинка частоты плазмонного резонанса, вычисленные по формуле (4), с использованием данных табл. 1 и $\varepsilon_m = 1$ равны:

$$\omega_{res}(Ag) = 3.812 \text{ эВ}, \omega_{res}(ZnO) = 0.296 \text{ эВ}. \quad (5)$$

3. Результаты и обсуждение

Используем теперь формулы (1) – (3) для расчета сечения фотопоглощения наночастицы Ag/ZnO в спектральном диапазоне, охватывающем резонансные частоты (5). В расчетах предполагаем $a = 5$ нм. На рисунке 1 изображен спектр поглощения рассматриваемой наночастицы для различных значений параметра q и фиксированного значения диэлектрической проницаемости матрицы $\varepsilon_m = 1$. На всех нижеприведенных рисунках абсцисса измеряется в электронвольтах, а ордината в квадратных нанометрах.

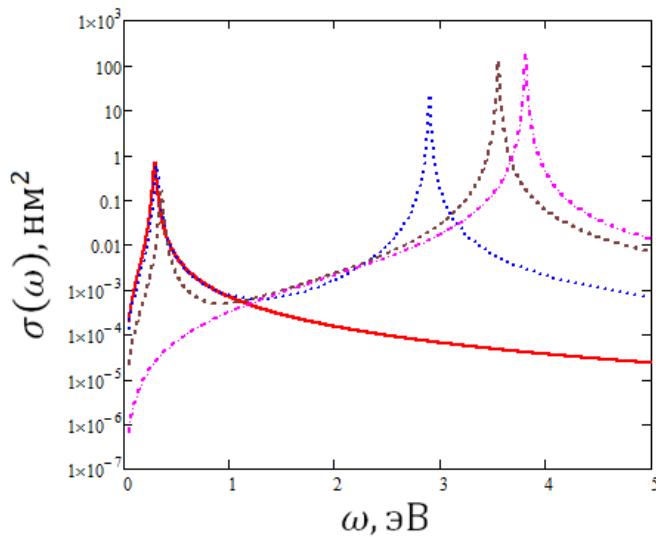


Рис. 2. Спектр фотопоглощения для сферической «core-shell» наночастицы Ag/ZnO для различных значений параметра q : сплошная кривая – $q = 0$, пунктир – $q = 0.5$, штриховая кривая $q = 0.9$, штрих-пунктир – $q = 1$; $\varepsilon_m = 1$

Из приведенного рисунка видно, что при значении параметра $q = 0$ (в пределе однородной наночастицы из оксида цинка) имеется один максимум с частотой, равной второму значению частоты из формулы (5). В противоположном случае $q = 1$ реализуется предел однородной серебряной наночастицы, когда также имеет место единственная резонансная частота, равная 3.812 эВ.

Данные предельные случаи легко проследить аналитически с помощью формулы (2). Действительно, для $q = 0$ из (2) имеем

$$\alpha(\omega, q = 0) = a^3 \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_m}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_m}. \quad (6)$$

Если же $q = 1$, то

$$\alpha(\omega, q = 1) = a^3 \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_m}{\varepsilon_c + 2\varepsilon_m}. \quad (7)$$

Таким образом, при $q = 0$ поляризуемость (6) отвечает однородной наночастице с диэлектрической проницаемостью оболочки, а формула (7) описывает поляризуемость однородной сферической наночастицы с диэлектрической проницаемостью ядра. Отметим, что формула, аналогичная (6) –(7) получается из выражения (2), если $\varepsilon_c = \varepsilon_s$.

В промежуточных случаях $q = 0.5, 0.9$ сечение фотопоглощения «core-shel» наночастицы имеет два максимума: низкочастотный и высокочастотный, которые располагаются между значениями резонансных частот однородных наночастиц (5). При этом положение низкочастотного максимума очень близко к частоте, отвечающей плазмонному резонансу однородной наночастицы из оксида цинка. Высокочастотный плазмонный максимум сильно зависит от параметра q и может существенно отличаться от своего однородного предела (серебряной наночастицы).

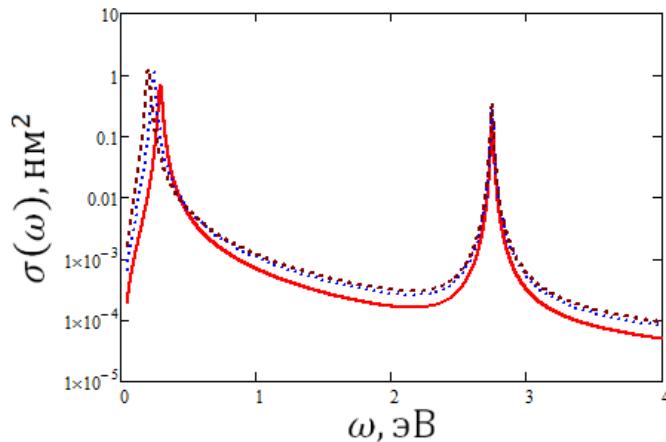


Рис. 3. Спектр фотопоглощения фотопоглощения наночастицы Ag/ZnO для $q = 0.1$ и различных значениях диэлектрической проницаемости матрицы: сплошная кривая – $\varepsilon_m = 1$, пунктир – $\varepsilon_m = 2.25$, штриховая кривая – $\varepsilon_m = 4$

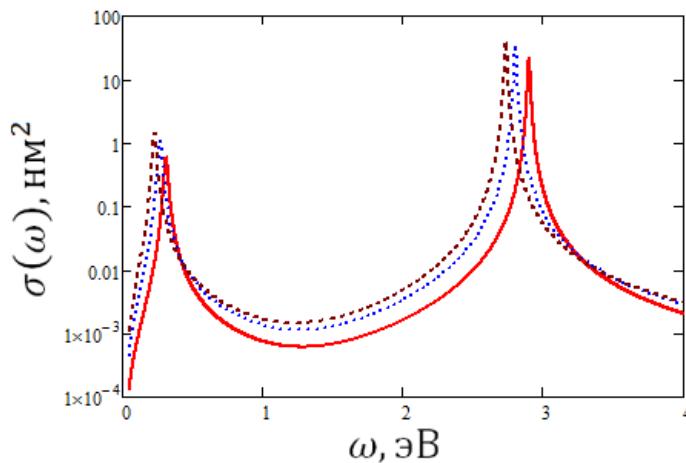
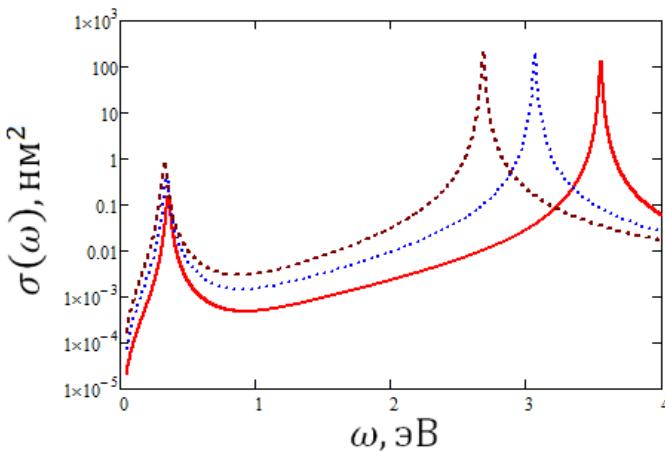


Рис. 4. То же, что на рис. 3 для $q = 0.5$

Рис. 5. То же, что на рис. 3 для $q = 0.9$

На рисунках 3–5 изображены спектры фотопоглощения наночастицы Ag/ZnO для различных величин диэлектрической проницаемости матрицы и разных значений параметра q .

Как видно из приведенных рисунков, сдвиг плазмонных максимумов с изменением диэлектрической проницаемости матрицы возрастает с ростом параметра q для высокочастотного резонанса. Положение низкочастотных плазмонных максимумов слабо зависит как от диэлектрической проницаемости матрицы, так и от величины параметра q .

4. Заключение

В дипольном приближении теоретически исследованы особенности фотопоглощения электромагнитного излучения наночастицами, состоящими из сферического ядра и оболочки, помещенными в различные матрицы. Рассмотрен спектральный диапазон, в котором проявляются плазмонные резонансы для однородных сферических наночастиц из вещества ядра и оболочки. Анализ проведен в рамках модели Друде для диэлектрической проницаемости. Рассмотрен случай серебряного ядра и оболочки из оксида цинка. Показано, что спектр фотопоглощения содержит два плазмонных максимума, отвечающих вкладу ядра и оболочки в рассматриваемый процесс. Проанализирована зависимость положения плазмонных максимумов от диэлектрической проницаемости матрицы ϵ_m и параметра q , равного отношению радиуса ядра наночастицы к ее внешнему радиусу. Установлено, что высокочастотный плазмонный максимум существенно смещается при изменении величин ϵ_m и q , в то время как низкочастотный пик слабо зависит от этих параметров.

Полученные результаты могут быть использованы при разработке оптических сенсоров [3, 4] на базе «core-shell» наночастиц с различными веществами ядра и оболочки, так же с различной величиной геометрического параметра q .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00235 А.

Литература

1. Астапенко В.А. Взаимодействие излучения с атомами и наночастицами. Москва : Интеллект, 2010. 492 с.
2. Chettiar U.K., Engheta N. Internal homogenization: Effective permittivity of a coated sphere // Optics Express. 2012. V. 20, N 21.
3. Сахно С.В., Храмов Е.С., Яковец А.В., Сахно Е.В. Влияние геометрической формы полупроводниковой наночастицы ИТО на чувствительность оптического плазмонного сенсора // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 1. С. 61–66.

4. Astapenko V.A., Manuilovich E.S., Sakhno S.V., Khramov E.S., Sakhno E.V. Optical plasmon sensor based on ITO nanoparticles // Engineering and Telecommunication (EnT-MIPT). 2018. DOI 10.1109/EnT-MIPT.2018.00019

References

1. Astapenko V.A. Interaction of radiation with atoms and nanoparticles. Moscow : Intellekt, 2010. 492 p. (in Russian).
2. Chettiar U. K., Engheta N. Internal homogenization: Effective permittivity of a coated sphere. Optics Express. 2012. V. 20, N 21.
3. Sakhno S.V., Khramov E.S., Yakovets A.V., Sakhno E.V. The influence of the geometric shape of an ITO semiconductor nanoparticle on the sensitivity of an optical plasmon sensor. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 1. P. 61–66. (in Russian).
4. Astapenko V.A., Manuilovich E.S., Sakhno S.V., Khramov E.S., Sakhno E.V. Optical plasmon sensor based on ITO nanoparticles. Engineering and Telecommunication (EnT-MIPT). 2018. DOI 10.1109/EnT-MIPT.2018.00019

Поступила в редакцию 20.11.2020

УДК 539.3

Н. С. Бондаренко

Донецкий национальный университет

Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе $\{1,0\}$ -аппроксимации

Рассматривается задача статики для ортотропной пластины на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данного подхода искомые и заданные функции представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты. Фундаментальное решение задачи для случая плоского напряжённого состояния получено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье. Проведены численные исследования влияния упругих постоянных ортотропного материала на обобщённые перемещения.

Ключевые слова: ортотропная пластина, сосредоточенная сила, плоское напряжённое состояние, полиномы Лежандра, преобразование Фурье.

N. S. Bondarenko

Donetsk National University

Determination of generalized displacements in an orthotropic plate under the action of concentrated force based on the $\{1,0\}$ -approximation

We consider the problem of statics for an orthotropic plate based on the generalized theory in the version $\{1,0\}$ -approximation. Within the framework of this approach, the sought and specified functions are presented as Fourier series in Legendre polynomials in the thickness coordinate. The fundamental solution of the problem for the case of a plane stress state is obtained using the twodimensional integral Fourier transform. Numerical studies of the effect of elastic constants of an orthotropic material on generalized displacements are carried out.

Key words: orthotropic plate, concentrated force, plane stress state, Legendre polynomials, Fourier transform.

1. Введение

Тонкостенные элементы конструкций, изготовленные из современных композиционных материалов, широко применяются в объектах различного назначения, в том числе повышенного уровня ответственности при сложном нагружении. Об актуальности решения задач статики для пластин и оболочек свидетельствуют публикации последних лет [1, 2]. Использование композиционных материалов, обладающих резкой анизотропией упругих свойств, обуславливает актуальность построения уточнённых теорий пластин и оболочек, учитывающих явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием.

В настоящей работе для сведения трёхмерной задачи статики ортотропной пластины к двумерной используется обобщённая теория в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Выбранный

© Бондаренко Н. С., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

подход является наиболее приемлемым для решения поставленной задачи, поскольку он не основан на каких-либо гипотезах, а использует метод И. Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от толщинной координаты [3]. Преимуществом данного подхода является возможность рассматривать не только тонкие пластины, но пластины средней и большой толщины. При этом решение задачи может быть получено с произвольной, наперёд заданной точностью в зависимости от числа удерживаемых слагаемых в разложениях заданных и искомых функций. Из публикаций последних лет, использующих обобщённую теорию пластин и оболочек, в рамках которой искомые и заданные функции раскладываются в ряды Фурье по полиномам Лежандра, следует отметить статьи [4, 5].

В работе построено фундаментальное решение уравнений статики $\{1,0\}$ -аппроксимации для случая безмоментного напряжённого состояния ортотропной пластины. Необходимость решения такой задачи обусловлена важной ролью, которую играют фундаментальные решения при исследовании различных граничных задач механики тонкостенных элементов конструкций, в том числе и находящихся под действием сосредоточенных силовых воздействий.

2. Постановка задачи

Рассмотрим ортотропную пластину толщиной $2h$ в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z . В качестве исходной взята система уравнений $\{1,0\}$ -аппроксимации. В рамках данного приближения компоненты напряжённо-деформированного состояния представляются в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра P_k от толщинной координаты z таким образом [3]:

- компоненты вектора перемещений:

$$u_x = uP_0 + h\gamma_x P_1, \quad u_y = vP_0 + h\gamma_y P_1, \quad u_z = w_0 P_0,$$

где $u, v, w_0, \gamma_x, \gamma_y$ — обобщённые перемещения пластины, из которых u, v, w_0 являются аналогами перемещений точек срединной поверхности, а γ_x, γ_y — аналогами углов поворота нормали;

- компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{2h} P_0 + \frac{3M_x}{2h^2} P_1 (x \rightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{S_{xy}}{2h} P_0 + \frac{3H_{xy}}{2h^2} P_1, \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_{x0}}{2h} (P_0 - P_2) (x \rightarrow y), \quad \sigma_z = 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты разложений в ряды по полиномам Лежандра являются обобщёнными усилиями и моментами, из которых N_x, N_y, S_{xy} являются аналогами мембранных усилий; M_x, M_y, H_{xy} — изгибающих и крутящего моментов; Q_{x0}, Q_{y0} — перерезывающих сил;

- компоненты вектора объёмной силы:

$$F_x = \frac{q_x}{2h} P_0 + \frac{3m_x}{2h^2} P_1 (x \rightarrow y), \quad F_z = \frac{q_z}{2h} P_0.$$

В безразмерной системе координат $x_1 = x/h, x_2 = y/h, x_3 = z/h$, определённой с точностью до полутолщины пластины h , система уравнений статики на базе обобщённой теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации для ортотропных пластин имеет вид [3]:

- соотношения упругости в перемещениях

$$N_1 = B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu_{xy} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right), \quad N_2 = B_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu_{yx} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad S_{12} = B_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N_x}{Eh}, \quad N_2 = \frac{N_y}{Eh}, \quad S_{12} = \frac{S_{xy}}{Eh}, \quad E = \sqrt{E_x E_y}, \\ B_1 &= \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \frac{2}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad B_2 = \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \frac{2}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad B_{12} = \frac{2G_{xy}}{E}, \end{aligned}$$

E_x, E_y — модули Юнга для направлений x, y соответственно; G_{xy} — модуль сдвига, характеризующий изменение угла между главными направлениями x и y ; ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечные изменения (первый индекс указывает направление изменения, второй — направление действия силы, вызывающей это изменение);

- уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} = -q_1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1} = -q_2, \quad (2)$$

где $q_1 = q_x/E$, $q_2 = q_y/E$.

Пусть на пластину действует сосредоточенная сила. Математической моделью сосредоточенных воздействий в механике является дельта-функция Дирака. Она стоит на месте функций нагрузки в правых частях разрешающих уравнений. Фундаментальные решения системы (1), (2) имеют определённый механический смысл — это решения задач о действии сосредоточенных сил на пластину [6]. Поэтому компоненты вектора объёмной силы берём в виде

$$q_j(x_1, x_2) = q_j^* \delta(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

где $\delta(x_1, x_2)$ — двумерная дельта-функция Дирака, $q_j^* = \text{const}$.

3. Определение обобщённых перемещений

Подставляя соотношения упругости в перемещениях (1) в уравнения равновесия (2), получим уравнения равновесия в перемещениях, которые с учётом правых частей (3) имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(B_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u + (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = -q_1^* \delta(x_1, x_2), \\ & (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) v = -q_2^* \delta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Применим к системе (4) двумерное интегральное преобразование Фурье [7]:

$$\begin{aligned} & (B_1 \xi_1^2 + B_{12} \xi_2^2) \tilde{u} + (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \xi_1 \xi_2 \tilde{v} = \frac{q_1^*}{2\pi}, \\ & (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left(\frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 \xi_2^2 + B_{12} \xi_1^2 \right) \tilde{v} = \frac{q_2^*}{2\pi}. \end{aligned}$$

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, найдём трансформанты обобщённых перемещений:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 q_1^* \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + B_{12} q_1^* \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right\}, \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ B_1 q_1^* \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) + B_{12} q_1^* \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \quad \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \\ \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \sigma_1^2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + \sigma_2^2 \xi_2^2)}, \\ \sigma_{1,2}^2 &= \frac{1}{2\nu_{yx}} \left\{ \nu_{xy} (E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx}) \mp \sqrt{\nu_{xy}^2 (E_x/G_{xy} - 2\nu_{yx})^2 - 4\nu_{xy}\nu_{yx}} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Методику обращения покажем на примере первой из функций (6). Заметим, что

$$\tilde{\Phi}_0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left\{ \sigma_2^2 \tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_2) - \sigma_1^2 \tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_1) \right\},$$

где

$$\tilde{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2; \sigma_k) = \frac{1}{\xi_1^2 + \sigma_k^2 \xi_2^2} \quad (k = 1, 2).$$

Для нахождения оригинала функции $\tilde{\Psi}_1$ применим к ней формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [7]:

$$\Psi_1(x_1, x_2; \sigma_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\}}{\xi_1^2 + \sigma_k^2 \xi_2^2} d\xi_1 d\xi_2. \quad (7)$$

В двойных интегралах (7) выполним такие замены переменных в пространствах оригиналов и трансформант:

$$\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \frac{\eta_2}{\sigma_k}, x_1 = y_1, x_2 = \sigma_k y_2. \quad (8)$$

Выделим в интегралах (7) чётные и нечётные части и перейдём в полярные системы координат по формулам

$$y_1 = r \cos \varphi, y_2 = r \sin \varphi, \eta_1 = \rho \cos \theta, \eta_2 = \rho \sin \theta, \quad (9)$$

тогда

$$\Psi_1 = \frac{2}{\pi \sigma_k} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{\rho} \cos(r\rho \cos \varphi \cos \theta) \cos(r\rho \sin \varphi \sin \theta) d\rho. \quad (10)$$

Применяя разложение Якоби–Ангера [8]:

$$\cos(x \cos \varphi \cos \theta) \cos(x \sin \varphi \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi \cos 2n\theta$$

и учитывая значения интегралов от тригонометрических функций

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta d\theta = \begin{cases} \pi/2, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

преобразуем функцию (10) к виду

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho.$$

Чтобы вычислить данный интеграл, используем понятие конечной части (f.p.) от расходящегося интеграла [9]:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} f.p. \int_0^{\infty} \frac{J_0(r\rho)}{\rho} d\rho = \frac{1}{\sigma_k} \int_0^{\infty} \ln \rho J_1(r\rho) d\rho = -\frac{1}{\sigma_k} \ln \frac{\gamma r}{2}, \quad (11)$$

где $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$ — константа Эйлера.

Вернёмся в (11) к переменным x_1, x_2 согласно формулам (9) и (8), тогда окончательное выражение для функции Ψ_1 примет такой вид:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_k} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_k^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_k} (k = 1, 2),$$

а оригиналом первой из функций (6) является

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\sigma_2 \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_2^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_2} - \sigma_1 \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_1} \right). \quad (12)$$

Аналогично определяются оригиналы других функций (6):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{\gamma \sqrt{\sigma_2^2 x_1^2 + x_2^2}}{2\sigma_2} \right), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\arctan \frac{\sigma_2 x_1}{x_2} - \arctan \frac{\sigma_1 x_1}{x_2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, оригиналы обобщённых перемещений на основании (5) имеют вид

$$u = \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ \frac{\nu_{xy}}{\nu_{yx}} B_1 q_1^* \Phi_1(x_1, x_2) + B_{12} q_1^* \Phi_0(x_1, x_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \Phi_2(x_1, x_2) \right\},$$

$$v = \frac{1}{2\pi B_1 B_{12}} \left\{ B_1 q_1^* \Phi_0(x_1, x_2) + B_{12} q_1^* \Phi_1(x_1, x_2) - (\nu_{xy} B_1 + B_{12}) q_2^* \Phi_2(x_1, x_2) \right\}, \quad (14)$$

где функции $\Phi_0 - \Phi_2$ определяются по формулам (12), (13).

4. Анализ результатов численных исследований

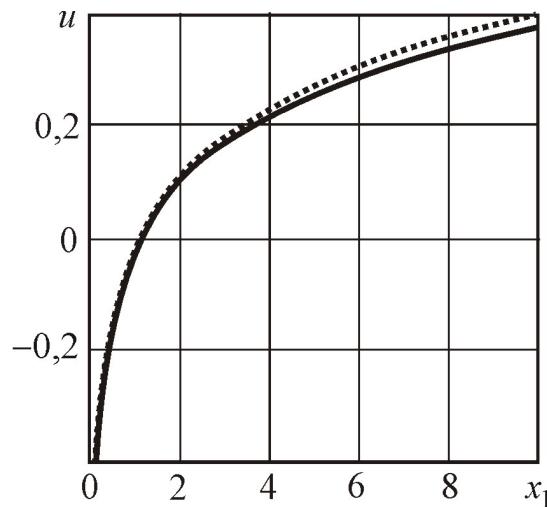
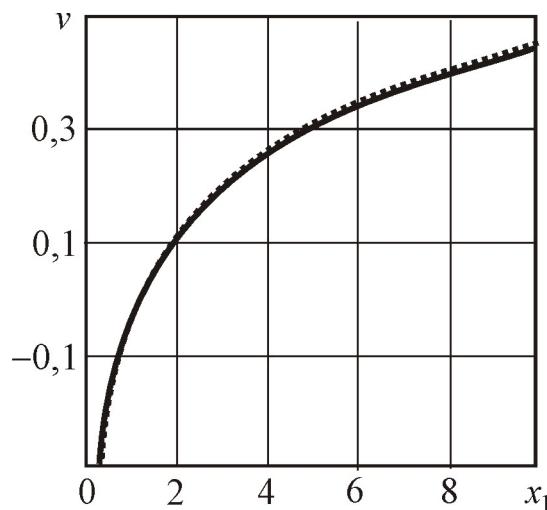
Численные исследования проведены для реальных ортотропных материалов: стеклопластиков типа С1-19-55 и С1-10-65 [10]. Данные для указанных материалов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Данные для ортотропных материалов

Стеклопластик	ν_{xy}	ν_{yx}	$E_x, \text{МН/м}^2$	$G_{xy}, \text{МН/м}^2$
С1-19-55	0,128	0,161	$2,5 \cdot 10^4$	$4,3 \cdot 10^3$
С1-10-65	0,122	0,17	$3,25 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^3$

Для исследования влияния упругих констант на обобщённые перемещения в ортотропной пластине (14) при сосредоточенных силовых воздействиях положим $q_1^* = q_2^* = 1$. Результаты расчётов представлены на рис. 1, 2 в виде графиков изменения обобщённых перемещений u , v вдоль оси абсцисс ($x_2 = 0$). Сплошные линии соответствуют стеклопластику С1-10-65, а пунктирные — С1-19-55.

Рис. 1. Обобщённое перемещение u Рис. 2. Обобщённое перемещение v

Из данных графиков (рис. 1, 2) можно заметить, что с увеличением модуля сдвига G_{xy} обобщённые перемещения u и v возрастают.

5. Выводы

На основании проведённых исследований можно сделать такие выводы:

1. Впервые построено фундаментальное решение уравнений статики для случая безмоментного напряжённого состояния ортотропных пластин на базе обобщённой теории в варианте {1,0}-аппроксимации при действии сосредоточенной силы.
2. Проведены численные исследования, демонстрирующие влияние упругих постоянных ортотропного материала на обобщённые перемещения, возникающие при безмоментном напряжённом состоянии ортотропных пластин.

Литература

1. Коренева Е.Б. Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14 (1). Р. 71–77.
2. Савин С.Ю., Ивлев И.А. Анализ устойчивости ортотропных прямоугольных пластин с использованием коэффициента формы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, вып. 12 (111). С. 1333–1341.
3. Пелех Б.Л., Лазъко В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. Киев : Наукова думка, 1982.
4. Зеленський А.Г. Фундаментальні розв'язки визначальної системи диференціальних рівнянь математичної теорії пластин // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. 2018. № 1. С. 13–29.
5. Tuchapskyy R.I. Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the {m,n}-approximation method // Journal of Mathematical Sciences. 2017. 226, N 1. P. 52–68.
6. Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений / под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. Киев : А.С.К., 1998.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва : Издательство иностранной литературы, 1955.
8. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. Донецк : ДонГУ, 1980.
9. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. Москва : Мир, 1982.
10. Максимук О.В., Махніцький Р.М., Щербина Н.М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. Львів : Національна академія наук України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2005.

References

1. Koreneva E.B. Method of compensating loads for solving of anisotropic medium problems. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. 14 (1). P. 71–77. (in Russian).
2. Savin S.Y., Ivlev I.A. Stability analysis of orthotropic rectangular plates using the form factor. Vestnik MGSU. 2017. V. 12, N 12 (111). P. 1333–1341. (in Russian).
3. Pelekh B.L., Lazko V.A. Laminated anisotropic plates and shells with stress concentrators. Kiev : Scientific thought, 1982. (in Russian).

4. *Zelenskiy A.G.* Fundamental solutions of the defining system of differential equations of the mathematical theory of plates. Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences. 2018. N 1. P. 13–29. (in Ukrainian).
5. *Tuchapskyy R.I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the {m,n}-approximation method. Journal of Mathematical Sciences. 2017. 226, N 1. P. 52–68.
6. Mechanics of composites. V. 7. Stress Concentration. Ed. by A.N. Guz, A.S. Kosmodamiansky, V.P. Shevchenko. Kiev : A.S.K., 1998. (in Russian).
7. *Sneddon I.* Fourier transform. Moscow : Foreign literature publishing house, 1955. (in Russian).
8. *Khizhnyak V.K., Shevchenko V.P.* Mixed problem in the theory of plates and shells: a tutorial. Donetsk : DonGU, 1980. (in Russian).
9. *Lukasevich S.* Local loads in plates and shells. Moscow : Mir, 1982. (in Russian).
10. *Maksimuk O.V., Makhnitsky R.M., Shcherbina N.M.* Mathematical modeling and methods of construction of thin composite structures. Lviv : National Academy of Sciences of Ukraine. Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics them. Ya.S. Pidstrigachya of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2005. (in Ukrainian).

Поступила в редакцию 24.12.2020

УДК 533.6.011.8

С. Л. Горелов^{1,2}, В. Л. Нгуен²¹Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа

Для тела вращения со степенной образующей и плоским затуплением вычисляется сила сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа на основе нескольких локальных моделей. Решением вариационной задачи определяется степень в образующей тела минимального сопротивления и радиус затупления в зависимости от удлинения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: гиперзвуковой поток, локальные модели, аэродинамическое сопротивление тела вращения, вариационная задача.

S. L. Gorelov^{1,2}, V. L. Nguyen²^{1,2}Central Aerohydrodynamic Institute named after professors N. E. Zhukovsky²Moscow Institute of Physics and Technology

Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in the hypersonic rarefied gas flow

We calculate for a rotational body with the degree of the generatrix, the resistive force in the hypersonic rarefied gas flow using several local models. The order of the generatrix of a body with a minimal resistance and the blunted radius depending on the elongation in a wide range of Reynolds numbers are determined by solving the variational problem.

Key words: hypersonic flow, local models, aerodynamic resistance of a rotational body, variational problem.

1. Введение

Построение тела, оптимального по одной из интегральных характеристик движения (сопротивлению или теплоотдаче), является актуальной проблемой механики. Интерес к этой области науки обусловлен нуждами авиационно-космической промышленности и связан с необходимостью совершенствования ракетной и авиационной техники.

Решения задач оптимизации формы тела по интегральным характеристикам движения возможны лишь при наличии соотношений, явно связывающих силы, действующие на поверхности контакта среды и тела, с формой его поверхности. Параметры среды при обтекании тела находятся из решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Задача оптимизации формы тела в такой постановке, базирующейся на точных уравнениях такого рода, для большинства сред практически не разрешима. В этих случаях естественно искать упрощения, позволяющие найти приближенное решение. В первую очередь они делаются для сил, действующих на поверхности тела, для которых используются формулы, полученные из приближенных моделей.

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, широкое распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности

© Горелов С. Л., Нгуен В. Л., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Эта зависимость может включать в себя скорость движения и характеристики среды, которые считаются постоянными. Примером такой зависимости является формула Ньютона, используемая в гиперзвуковой аэродинамике для оценочных расчетов распределения давления на поверхности тела или зависимости, полученные из модели свободномолекулярного движения для сильно разреженных газов. Использование таких формул позволяет записать силы, действующие на тело, в виде интегралов по поверхности, и методами вариационного исчисления они могут быть исследованы на экстремум.

Классическая задача построения тела вращения минимального сопротивления с использованием формулы Ньютона решалась во многих работах [1–6]. Были заработаны эффективные численные методы решения таких задач [7]. В связи с развитием космической техники появился интерес к оптимальным задачам высокоскоростной аэродинамики на больших высотах в разреженном газе [8–10].

Дальнейшее упрощение таких задач связано с использованием целевых функций данного вида зависящих от некоторого количества параметров, по которым и производится оптимизация [11–13]. В частности, широкое распространение получила степенная целевая функция [14, 15]. В данной работе использование целевой степенной функции вместе с локальными методами [15–18] (формулы свободномолекулярной аэродинамики, формула Ньютона, формулы локального метода гиперзвуковой аэродинамики) позволило свести вариационную задачу минимизации функционала (сопротивление тела вращения) к задаче поиска экстремума функции от одной или двух переменных. Решаются задачи об определении формы затупленных тел вращения в гиперзвуковом потоке разреженного газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

2. Форма тела вращения минимального сопротивления большого удлинения

Задано тело вращения длиной L и радиусом основания R . Требуется определить форму образующей $x(r)$, такую, при которой это тело имеет минимальное сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. Скорость газа V_∞ направлена вдоль оси вращения Ox . θ – угол между внутренней нормалью n и вектором скорости.

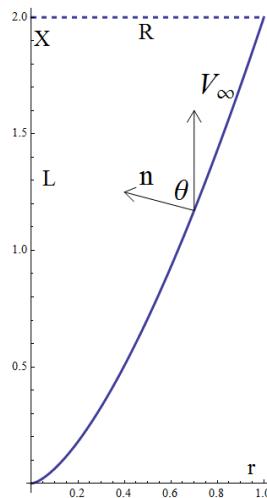


Рис. 1. Схема обтекания тела вращения

Cp и $C\tau$ – нормальная и касательная аэродинамические силы, действующие на элемент поверхности ds , отнесенные к скоростному напору $\rho V_\infty^2/2$ (ρ – плотность газа) и площади этого элемента. Тогда коэффициент сопротивления Cx (аэродинамическая сила, действующая на тело вдоль вектора скорости, отнесенная к скоростному напору и характерной площади, в данном случае – это площадь основания, то есть πR^2) будет равен

$$Cx = \frac{2}{R^2} \int_0^R (Cp \cdot \cos \theta + C\tau \cdot \sin \theta) r \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2} dr. \quad (1)$$

Здесь

$$\cos \theta = \left(1 + \left(\frac{dx}{dr}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (2)$$

Рассмотрим два случая применения локальных методов: формула Ньютона и свободномолекулярное приближение. В случае формулы Ньютона

$$Cp = 2 \cos^2 \theta, \quad C\tau = 0.$$

Уравнение (1) запишется следующим образом (линейные размеры отнесены к R):

$$Cx = 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + (dx/dr)^2} dr. \quad (3)$$

Будем рассматривать случай большого удлинения, то есть $dx/dr \sim L/R = \lambda \gg 1$. В интегrale (3) пренебрегаем единицей по сравнению с квадратом производной. Если подынтегральную функцию обозначить $F(r, dx/dr)$, то уравнение Эйлера [4] будет иметь вид $\frac{\partial}{\partial u} F(r, u) = C$, $u = dx/dr$, и при $x(0) = 0$, $x(R) = L$ решение будет иметь вид

$$x = L \left(\frac{r}{R}\right)^{4/3}. \quad (4)$$

Или в безразмерном виде $x = \lambda \cdot r^{4/3}$. Коэффициент сопротивления равен

$$Cx = \frac{27}{16\lambda^2}. \quad (5)$$

В свободномолекулярном высокоскоростном приближении [16, 17]

$$\begin{aligned} Cp &= 2 \cos^2 \theta + z \cos \theta, \quad z = \sqrt{\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma}, \\ C\tau &= 2 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $t_w = T_w/T_0$ – температурный фактор, T_w – температура поверхности тела, T_0 – температура торможения, γ – показатель адиабаты. Уравнение (1) запишется в виде

$$Cx = 2 + 2z \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 + (dx/dr)^2}} dr. \quad (7)$$

При больших удлинениях, используя уравнение Эйлера, получаем

$$x = \lambda \cdot r^{3/2}. \quad (8)$$

Коэффициент сопротивления равен

$$Cx = 2 + \frac{8z}{9\lambda}. \quad (9)$$

Свободномолекулярное приближение и приближение Ньютона в некотором смысле можно считать предельными случаями разреженности газа: свободномолекулярное приближение – это сильно разреженный газ, а приближение Ньютона – это сплошная среда. Отметим, что форма тела вращения минимального сопротивления при большом удлинении представляет собой степенную функцию, причем величина степени зависит от разреженности газа.

3. Тела вращения произвольного удлинения

Как уже отмечалось, форма тела вращения минимального сопротивления при большом удлинении представляет собой степенную функцию, причем величина степени зависит от разреженности газа. Естественно для произвольных удлинений в качестве целевой выбрать степенную функцию

$$x = L(r/R)^\beta. \quad (10)$$

В этом случае задачу можно сформулировать так: найти величину β , такую, чтобы коэффициент сопротивления был минимален при заданной величине λ . В случае модели Ньютона уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется в виде гипер-

геометрической функции $F[a, b, c, d]$:

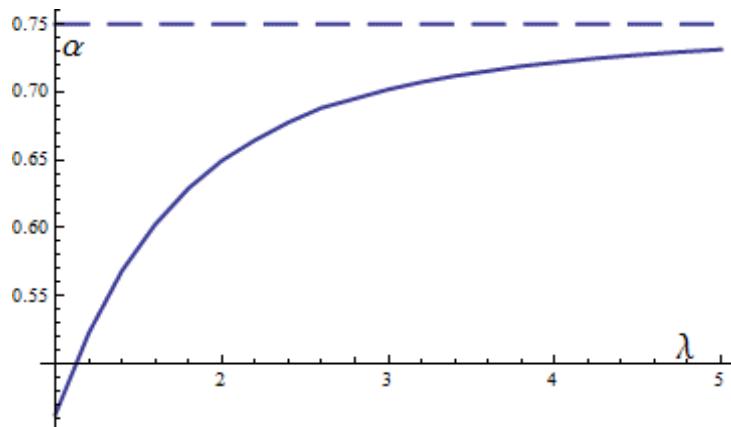
$$Cx = 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + (\lambda\beta r^{\beta-1})^2} dr = 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right). \quad (11)$$

Таким образом, задача вариационного исчисления свелась к поиску минимума функции одной переменной. В табл. 1 представлены величины β и Cx в зависимости от удлинения λ . Заметим, что во многих работах ось вращения — это ось Ox . В этом случае величина показателя степени в степенной функции $\alpha = \beta^{-1}$. В табл. 1 также представлена величина α .

Таблица 1

λ	1	3	5	7	9	10	15	20
β	2.16	1.42	1.362	1.35	1.344	1.342	1.337	1.336
α	0.463	0.704	0.734	0.741	0.744	0.745	0.749	0.749
Cx	0.803	0.17	0.064	0.034	0.018	0.017	0.0075	0.0042

На рис. 2. изображена зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от удлинения λ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к $\alpha = 3/4 = 0.75$, как получено в п. 1 для случая больших удлинений.

Рис. 2. Зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от величины удлинения λ

В случае свободномолекулярной модели, используя (7) и (10), коэффициент сопротивления выражается уравнением

$$Cx = 2 + 2z \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 + (\lambda\beta r^{\beta-1})^2}} dr = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\beta^2\lambda^2\right). \quad (12)$$

В табл. 2 представлены величины β, α и Cx в зависимости от удлинения λ .

Таблица 2

λ	1	3	5	7	9	10	15	20
β	2.868	1.681	1.571	1.539	1.525	1.52	1.51	1.506
α	0.349	0.595	0.636	0.65	0.656	0.658	0.662	0.664
Cx	2.182	2.083	2.052	2.038	2.029	2.084	2.018	2.013

На рис. 3. изображена зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от удлинения λ . При больших удлинениях эта зависимость стремится к $\alpha = 2/3 = 0.667$, как получено в п. 1 для больших удлинений в свободномолекулярном случае.

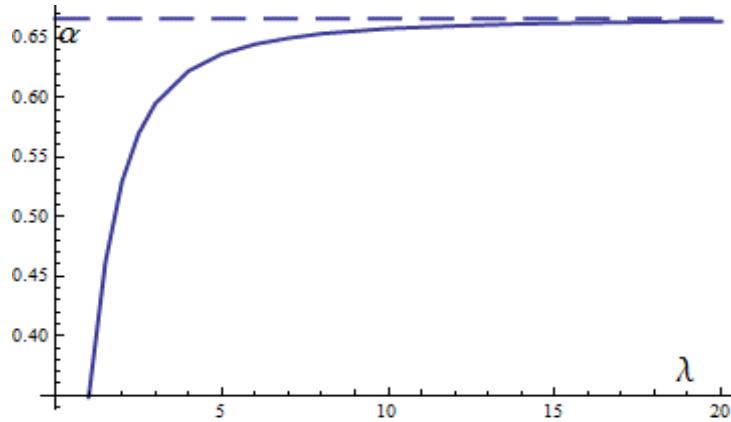
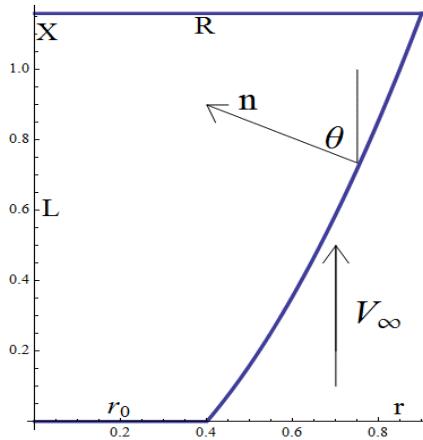
Рис. 3. Зависимость $\alpha = \beta^{-1}$ от величины удлинения λ , $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$ 

Рис. 4. Схема обтекания тела с плоским торцом

4. Затупленные тела вращения большого удлинения

Известно [1], что тела вращения с плоским торцом имеют меньшее сопротивление, чем тела без затупления. Задано тело вращения длиной L , радиусом основания R и плоским торцом с радиусом r_0 . Требуется определить форму образующей $x(r)$ и величину r_0 , такие, при которых это тело имеет минимальное сопротивление в гиперзвуковом потоке газа. В случае формулы Ньютона для торца $Cp = 2$, а для образующей $Cp = 2 \cos^2 \theta$. Уравнение для величины коэффициента сопротивления запишется в виде

$$Cx = 2 \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 + \frac{4}{R^2} \int_{r_0}^R \frac{r}{1 + (dx/dr)^2} dr. \quad (13)$$

Пренебрегая в (13) единицей по сравнению с квадратом производной из уравнения Эйлера, получаем так же, как в п. 1

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^{4/3} - r_0^{4/3}}{R^{4/3} - r_0^{4/3}}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнение для коэффициента сопротивления имеет вид (величина r_0 отнесена к R , $\lambda = L/R$):

$$Cx = 2r_0^2 + \frac{27}{16\lambda^2} (1 - r_0^{4/3})^3. \quad (15)$$

При больших λ величины r_0 , при которых достигается минимум Cx , представлены в табл. 3. Там же дано сравнение значений Cx для тел с затуплением и значений Cx_0 без затупления.

Величины r_0 зависят от значений удлинения λ . Для больших удлинений можно приближенно записать эту зависимость в виде $r_0 = 2.19/\lambda^3$. На рис. 5 показана эта зависимость.

Таблица 3

λ	5	6	7	8	9	10
r_0	0.0173	0.0101	0.00637	0.00427	0.003	0.00219
Cx	0.0672	0.04677	0.0344	0.02635	0.02082	0.01687
Cx_0	0.0675	0.04687	0.03444	0.02637	0.02083	0.016875

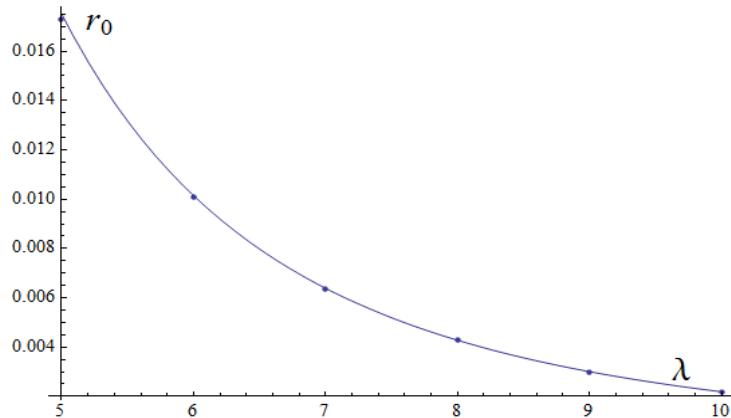


Рис. 5. Зависимость r_0 от удлинения λ в случае модели Ньютона. Точки – точные значения, линия – приближенная зависимость

Несмотря на то, что величина радиуса затупления мала, значение коэффициента сопротивления затупленного тела вращения меньше, чем в случае отсутствия затупления (хотя разница очень небольшая).

Аналогично рассмотрим свободномолекулярную модель газа. Используя уравнения (1), (6), (7), получим

$$Cx = 2 + z \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 + \frac{2z}{R^2} \int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{1+r'^2}} dr. \quad (16)$$

Вычисляя минимум интеграла в уравнении (16), так же, как в п. 1 получаем

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^{3/2} - r_0^{3/2}}{R^{3/2} - r_0^{3/2}}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (17)$$

Уравнение для коэффициента сопротивления имеет вид (величина r_0 отнесена к R , $\lambda = L/R$):

$$Cx = 2 + zr_0^2 + \frac{8z}{9\lambda} (1 - r_0^{3/2})^2. \quad (18)$$

При больших λ величины r_0 , при которых достигается минимум Cx в свободномолекулярном случае, представлены в табл. 4, $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$. Там же дано сравнение значений Cx для тел с затуплением и значений Cx_0 без затупления.

Таблица 4

λ	5	6	7	8	9	10
r_0	0.069	0.048	0.0358	0.0275	0.021	0.017
Cx	2.052	2.044	2.037	2.032	2.0295	2.026
Cx_0	2.053	2.0443	2.038	2.033	2.0296	2.0267

Так же, как и в случае модели Ньютона, наличие затупления уменьшает величину коэффициента сопротивления. Величины r_0 зависят от значений удлинения λ . Для больших удлинений можно приближенно записать эту зависимость в виде $r_0 = 0.0011 + 1.687/\lambda^2$. На рис. 6 показана эта зависимость.

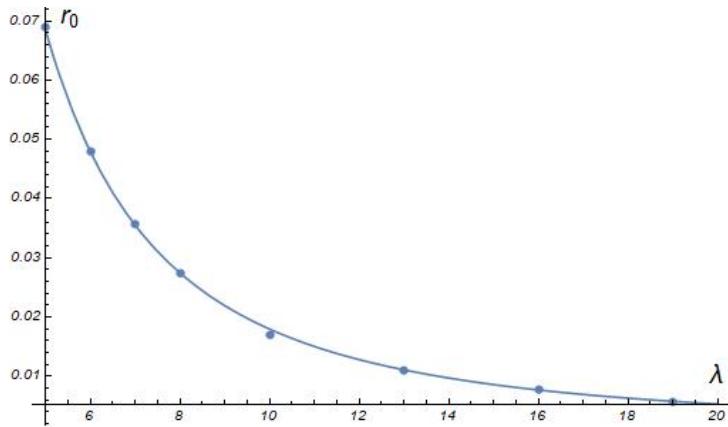


Рис. 6. Зависимость r_0 от удлинения λ в свободномолекулярном случае, $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$. Точки – точные значения, линия – приближенная зависимость

5. Затупленные тела вращения произвольного удлинения

Для модели Ньютона запишем уравнение (13) в виде

$$\begin{aligned} Cx &= 2r_0^2 + 4 \int_0^1 \frac{r}{1 + \left(\frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta} r^{\beta-1}\right)^2} dr - 4r_0^2 \int_0^1 \frac{r}{1 + \left(\frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} r^{\beta-1}\right)^2} dr = \\ &= 2r_0^2 + 2F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta}{1-r_0^\beta}\right)^2\right) - 2r_0^2 F\left(1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, -\left(\frac{\lambda\beta r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $F(a, b, c, d)$ – гипергеометрическая функция. Таким образом, вариационная задача свелась к поиску минимума функции (19) по двум переменным β и r_0 при заданном удлинении λ .

В табл. 5 представлены результаты расчетов величин β , $\alpha = \beta^{-1}$ и r_0 в зависимости от удлинения λ , при которых достигается минимум Cx и, для сравнения, величины Cx_0 при тех же удлинениях, но без затупления ($r_0 = 0$).

Т а б л и ц а 5

λ	β	α	r_0	Cx	Cx_0
1	1.571	0.636	0.352	0.75	0.803
2	1.448	0.691	0.123	0.321	0.33
3	1.399	0.715	0.0498	0.165	0.167
4	1.375	0.727	0.0293	0.0982	0.0986
5	1.362	0.734	0.0131	0.0645	0.0646
6	1.355	0.738	0.00786	0.0454	0.0455
7	1.349	0.741	0.00507	0.0336	0.0337
8	1.346	0.743	0.00346	0.0259	0.0259
9	1.344	0.744	0.00246	0.0205	0.0205
10	1.342	0.745	0.00181	0.0167	0.0167
15	1.337	0.748	0.00055	0.00746	0.00746
20	1.335	0.749	0.00023	0.00421	0.00421

При малых удлинениях величина радиуса затупления велика, а коэффициент сопротивления существенно меньше, чем без затупления. Начиная с $\lambda = 8$, несмотря на затупление, коэффициент сопротивления становится практически одинаковым в обоих случаях.

6. Затупленные тела вращения – локальный метод для гиперзвуковых течений

Для оценочных расчетов сил, действующих на тело при его высокоскоростном движении в газе, распространение получили формулы, найденные из локальных моделей. В основе этих моделей лежит предположение, что каждый элемент поверхности тела взаимодействует со средой независимо от других участков тела и сила, действующая на него, зависит лишь от ориентации элемента относительно направления движения. Эта зависимость включает в себя скорость движения и характеристики среды. Наибольшего распространения получила локальная модель из [17–18], в которой коэффициенты давления и трения равны

$$Cp = p_0 \cos^2 \theta + p_1 \cos \theta, \quad C\tau = \tau_0 \cos \theta \sin \theta. \quad (20)$$

Функции p_0 , p_1 , τ_0 зависят от числа Re_0 , температурного фактора t_w и показателя степени адиабаты γ :

$$\begin{aligned} p_0 &= 2, \quad p_1 = z \exp [-(0.125 + 0.078t_w) Re_0], \quad z = \sqrt{\pi t_w \frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\ \tau_0 &= \frac{5.23}{[s + 6.88 \exp(0.0072s - 0.000016s^2)]^{1/2}}, \quad s = Re_0 \left(\frac{3}{4}t_w + \frac{1}{4}\right)^{-2/3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $t_w = T_w/T_0$ – температурный фактор, T_w – температура поверхности тела, T_0 – температура торможения $T_0 = T_\infty (1 + S^2(\gamma - 1)/\gamma)$, γ – показатель адиабаты, $Re_0 = \rho_\infty V_\infty R/\mu(T_0)$, ρ_∞ , V_∞ , T_∞ – плотность, скорость и температура невозмущенного потока газа, $\mu(T_0)$ – коэффициент вязкости в зависимости от температуры торможения. Задано тело вращения длиной L и радиусом основания R . Требуется определить форму образующей $x(r)$, такую, при которой это тело имеет минимальное сопротивления в гиперзвуковом потоке газа. Скорость газа V_∞ направлена вдоль оси вращения Ox . θ – угол между внутренней нормалью n и вектором скорости (рис. 4). Для затупленного степенного тела образующая имеет вид

$$x(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < r_0, \\ L \frac{r^\beta - r_0^\beta}{R^\beta - r_0^\beta}, & r_0 < r < R. \end{cases} \quad (22)$$

Сопротивление тела складывается из сопротивления плоского торца Cx_1 с радиусом затупления r_0 и поверхности вращения Cx_2 :

$$\begin{aligned} Cx_1 &= (p_0 + p_1) \frac{r_0^2}{R^2}, \\ Cx_2 &= \tau_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) + \frac{2}{R^2} (p_0 - \tau_0) \int_{r_0}^R \frac{r}{1+x'^2} dr + \frac{2}{R^2} p_1 \int_{r_0}^R \frac{r}{\sqrt{1+x'^2}} dr. \end{aligned}$$

Используя гипергеометрическую функцию $F[a, b, c, d]$, можно записать (величина r_0 отнесена к R и удлинение $\lambda = L/R$):

$$\begin{aligned} Cx &= Cx_1 + Cx_2 = \tau_0 + (p_0 + p_1 - \tau_0) r_0^2 + \\ &+ (p_0 - \tau_0) \left\{ F \left[1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left(\frac{\beta\lambda}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] - r_0^2 F \left[1, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left(\frac{\beta\lambda r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] \right\} + \\ &+ p_1 \left\{ F \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left(\frac{\beta\lambda}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] - r_0^2 F \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\beta-1}, \frac{\beta}{\beta-1}, - \left(\frac{\beta\lambda r_0^{\beta-1}}{1-r_0^\beta} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Задача свелась к нахождению минимума функции Cx по двум переменным β и r_0 при фиксированных параметрах λ , Re_0 , t_w , γ . В табл. 6 даны значения β , r_0 , Cx – коэффициент сопротивления с затуплением r_0 и Cx_0 – коэффициент сопротивления без затупления в зависимости от удлинения λ для разных чисел Re_0 . Расчеты проводились для температурного фактора $t_w = 0.1$ и $\gamma = 1.4$.

Таблица 6

Re = 1.0					Re = 10.0				Re = 100.0			
λ	β	r_0	Cx	Cx_0	β	r_0	Cx	Cx_0	β	r_0	Cx	Cx_0
1	1.66	0.396	1.99	2.0	1.588	0.357	1.4	1.43	1.577	0.352	0.967	1.01
2	1.54	0.166	1.88	1.88	1.46	0.128	1.16	1.17	1.46	0.123	0.612	0.62
3	1.5	0.082	1.83	1.83	1.41	0.053	1.08	1.08	1.4	0.05	0.483	0.485
4	1.48	0.046	1.8	1.8	1.39	0.026	1.04	1.04	1.37	0.024	0.428	0.428
5	1.47	0.029	1.79	1.79	1.38	0.015	1.02	1.02	1.36	0.013	0.4	0.41
6	1.47	0.02	1.78	1.78	1.38	0.009	1.005	1.005	1.35	0.008	0.384	0.385
7	1.47	0.014	1.77	1.77	1.37	0.006	0.997	0.997	1.35	0.005	0.375	0.375
8	1.47	0.011	1.77	1.77	1.37	0.004	0.992	0.992	1.35	0.003	0.368	0.368
9	1.47	0.008	1.76	1.76	1.37	0.003	0.988	0.988	1.34	0.002	0.364	0.364
10	1.47	0.007	1.76	1.76	1.37	0.002	0.986	0.986	1.34	0.002	0.361	0.361
15	1.47	0.003	1.75	1.75	1.37	0.001	0.978	0.978	1.34	0.0005	0.353	0.353
20	1.48	0.001	1.75	1.75	1.37	0.0004	0.976	0.976	1.34	0.0002	0.35	0.35

Таблица 7

Свободномолекулярный случай					Локальная модель $Re_0 = 0.1$			
λ	$\beta_{\text{см}}$	$r_{0\text{см}}$	$Cx_{\text{см}}$	$Cx_{0\text{см}}$	$\beta_{\text{лок}}$	$r_{0\text{лок}}$	$Cx_{\text{лок}}$	$Cx_{0\text{лок}}$
1	1.77	0.468	2.174	2.182	1.74	0.449	2.149	2.157
2	1.64	0.235	2.114	2.117	1.62	0.217	2.082	2.085
3	1.59	0.132	2.082	2.083	1.57	0.119	2.047	2.048
4	1.56	0.082	2.064	2.064	1.55	0.073	2.028	2.028
5	1.54	0.056	2.052	2.052	1.53	0.049	2.015	2.016
6	1.53	0.04	2.044	2.044	1.52	0.034	2.007	2.007
7	1.53	0.03	2.037	2.038	1.52	0.026	2.	2.
8	1.52	0.023	2.033	2.033	1.51	0.02	1.996	1.996
9	1.52	0.018	2.029	2.029	1.51	0.016	1.992	1.992
10	1.52	0.015	2.026	2.026	1.5	0.013	1.989	1.989
15	1.51	0.007	2.018	2.018	1.5	0.006	1.981	1.981
20	1.5	0.004	2.013	2.013	1.5	0.003	1.976	1.976

Таблица 8

Локальная модель $Re_0 = 10000$					Модель Ньютона			
λ	$\beta_{\text{лок}}$	$r_{0\text{лок}}$	$Cx_{\text{лок}}$	$Cx_{0\text{лок}}$	$\beta_{\text{н}}$	$r_{0\text{н}}$	$Cx_{\text{н}}$	$Cx_{0\text{н}}$
1	1.57	0.352	0.772	0.824	1.57	0.352	0.75	0.803
2	1.45	0.123	0.351	0.36	1.45	0.123	0.321	0.33
3	1.4	0.05	0.198	0.2	1.4	0.05	0.165	0.167
4	1.37	0.024	0.132	0.133	1.37	0.024	0.098	0.099
5	1.36	0.013	0.099	0.099	1.36	0.013	0.064	0.065
6	1.35	0.008	0.081	0.081	1.35	0.008	0.045	0.045
7	1.35	0.005	0.069	0.069	1.35	0.005	0.037	0.037
8	1.35	0.003	0.061	0.061	1.35	0.003	0.026	0.026
9	1.34	0.002	0.056	0.056	1.34	0.002	0.02	0.02
10	1.34	0.002	0.052	0.052	1.34	0.002	0.017	0.017
15	1.34	0.0	0.043	0.043	1.34	0.0	0.007	0.007
20	1.34	0.0	0.04	0.04	1.34	0.0	0.004	0.004

В табл. 7 представлены данные сравнения расчетов величин β и r_0 , при которых коэффициент сопротивления минимален в свободномолекулярном случае и в случае расчетов локальным методом для малых чисел Re_0 .

В табл. 8 представлены аналогичные данные сравнения расчетов для больших чисел Re_0 и расчетов с помощью формулы Ньютона.

7. Заключение

Сравнение показывает, что результаты расчетов по свободномолекулярной модели газа и локальной модели при малых числах Re_0 близки. Отличие в Cx составляет не более 2%. И в том и другом случае при больших удлинениях величины $\beta \rightarrow 1.5$. Результаты расчетов величин β и r_0 по модели Ньютона и локальной модели при больших числах Re_0 совпадают. Отличие в величинах Cx получается в результате того, что в локальной модели учитывается трение, а в модели Ньютона нет. Особенное влияние трения сказывается при больших удлинениях.

Во всех локальных моделях течения для тел вращения со степенной образующей наличие затупления уменьшает величину аэродинамического сопротивления. Особенно этот эффект проявляется при малых удлинениях. При удлинениях $\lambda > 6$ радиус затупления стремится к нулю и затупление практически не влияет на сопротивление.

Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Москва : Наука, 1989, 688 с.
2. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Москва : Физматгиз, 1959. 220 с.
3. Крайко А.Н., Пудовкин Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. Москва : Янус-К, 2001. 132 с.
4. Миеле А. Теория оптимальных аэродинамических форм. Москва : Мир, 1969. 508 с.
5. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. Москва : Машиностроение, 1975. 328 с.
6. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О телах наименьшего сопротивления, движущихся в средах при наличии закона локальности // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 95–106.
7. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Москва : Наука, 1973. 240 с.
8. Перминов В.Д., Солодкин Е.Е. Осесимметричные тела с минимальным сопротивлением при заданном тепловом потоке к поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т II, № 6. С. 32–40.
9. Гусев В.Н., Ерофеев А.И., Климова Т.В., Перепухов В.А., Рябов В.В., Толстых А.И. Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1855. С. 43.
10. Бунимович А.И., Якунина Г.Е. Исследование форм поперечного контура конического пространственного тела минимального сопротивления, движущегося в разреженном газе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 112–117.
11. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. № 64, вып. 2. С. 199–310.
12. Аргучинцева М.А., Пилогин Н.Н. Оптимизация формы пространственного тела по радиационному тепловому потоку // ТВТ. 2002. Т. 40, вып. 4. С. 603–616.

13. Таковицкий С.А. Аналитическое решение задачи минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части в рамках локальной линеаризации // ПММ. 2018. Т. 82, вып. 6. С. 775–782.
14. Благосклонов В.И., Гродзовский Г.Л. Осесимметричное обтекание тел вращения степенной формы при сверхзвуковых скоростях набегающего потока // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. V, № 6. С. 6–22.
15. Горелов С.Л., Нгуен Ван Лам. Тело вращения минимального аэродинамического сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МАИ. 2020. № 113.
16. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Москва : Наука, 1967. 440 с.
17. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.
18. Николаев В.С. Аппроксимационные формулы для локальных аэродинамических характеристик тел типа крыла в вязком гиперзвуковом потоке в широком диапазоне параметров подобия // Ученые записки ЦАГИ. 1981. Т. XII, № 4. С. 143–150.

References

1. Newton. I. Mathematical principles of natural philosophy. Moscow : Nauka, 1989. 688 p. (in Russian).
2. Chyernyi G.G. Gas flow at high supersonic speed. Moscow : Fizmatgiz, 1959. 220 p. (in Russian).
3. Kraiko A.N., Pudovkin D.E., Yakunin G.E. The theory of aerodynamic forms close to optimal. Moscow : Janus-K, 2001. 132 p. (in Russian).
4. Miele A. Theory of optimal aerodynamic forms. Moscow : Mir, 1969. 508 p. (in Russian).
5. Lunev V.V. Hypersonic aerodynamics. Moscow : Mechanical Engineering, 1975. 328 p. (in Russian).
6. Ostapenko N.A., Yakunina G.E. On bodies of least resistance moving in environment in the presence of the law of locality. Izv. RAS. MZHG. 1992. N 1. P. 95–106. (in Russian).
7. Chernusko F.L., Banichuk N.V. Variational Problems of Mechanics and Control. Moscow : Nauka, 1973. 240 p.
8. Perminov V.D., Solodkin E.E. Axisymmetric bodies with minimum resistance at specified heat flow to the surface. Scholarly Notes. 1971. V. II, N 6, P. 32–40. (in Russian).
9. Gusev V.N., Erofeev A.I., Klimova T.V., Perepukhov V.A., Ryabov V.V., Tolstykh A.I. Theoretical and experimental studies of a hypersonic rarefied gas flow around bodies of a simple shape. Trudy TsAGI. 1977. I. 1855. P. 43. (in Russian).
10. Bunimovich A.I., Yakunina G.E. Study of the shapes of the transverse contour of a conical spatial body of minimal resistance moving in a rarefied gas. Izv. USSR Academy of Sciences. MZHG. 1986. N 5. P. 112–117. (in Russian).
11. Yakunina G.E. To the construction of optimal spatial forms in the framework of the local interaction model. PMM. 2000. N 64, I. 2. P. 199–310. (in Russian).
12. Arguchintseva M.A., Pilyugin N.N. Optimization of the shape of a spatial body in terms of radiation heat flux. TVT. 2002. V. 40, I. 4. P. 603–616. (in Russian).
13. Takovitsky S.A. Analytical solution of the problem of minimizing the wave drag of an axisymmetric bow in the framework of local linearization. Prikl. 2018. V. 82, N 6. P. 775–782. (in Russian).

14. *Blagosklonov V.I., Grodzovsky G.L.* Axisymmetric flow around bodies of rotation of a power-law shape at supersonic free-stream velocities. Uchenye zapiski TsAGI. 1974. N 6. P. 6–22. (in Russian).
15. *Gorelov S.L., Nguyen Van Lam.* Rotational body of the minimal aerodynamic resistance in a hypersonic rarefied gas flow, Trudy MAI. 2020. N 113. (in Russian).
16. *Kogan M.N.* The dynamics of rarefied gas. Moscow : Nauka, 1967. P. 440. (in Russian).
17. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic flow of rarefied gas. Trudy TsAGI. 1977. V. 1833. P. 6–10. (in Russian).
18. *Nikolaev V.S.* Approximate formulas for the local aerodynamic characteristics of wing-type bodies in a viscous hypersonic flow in a wide range of similarity parameters. TsAGI Scientific Papers. 1981. V. XII. N 4. P. 143–150. (in Russian).

Поступила в редакцию 30.09.2020

УДК 532.546.2

И. Н. Завьялов, А. А. Быков, А. А. Бычков

ООО НГЦ-МФТИ

Определение относительной фазовой проницаемости при фильтрации жидкости со степенной реологией

В современной нефтяной отрасли получили чрезвычайно широкое распространение жидкости со степенной реологией, при этом на практике измерения относительных фазовых проницаемостей (ОФП) проводятся на жидкостях с ньютоновской реологией. Таким образом, становится актуальной задача получения ОФП двухфазной фильтрации для случая, когда одна из жидкостей имеет степенную реологию при наличии ОФП для двух ньютоновских жидкостей. Основным предположением, которое используется в настоящей работе, является то, что фильтрация разных жидкостей происходит по капиллярам разного радиуса. В результате было получено дифференциальное уравнение, решение которого должно позволить оценивать ОФП для двухфазной фильтрации при условии, что одна из жидкостей имеет степенную реологию.

Ключевые слова: относительные фазовые проницаемости (ОФП), капиллярная модель пористой среды, степенная реологическая модель.

I. N. Zavialov, A. A. Bykov, A. A. Bychkov

Oil & Gas Center of MIPT

Calculation of the relative phase permeabilities in the case of filtration of power law fluids in porous media

At present oil industry often use liquids of power-law rheology for effective hydrofracturing. But to practice measurement of relative permeability as rule carry out for newtonian liquids. Therefore the problem of calculation of relative phase permeability in case two-phase filtration for power-law fluid using RPP for newtonian mixtures getting actual. The main suppose this work - the filtration of liquid in occurs capillars of different diameter. As a result the differential equation was obtained, the solution of which may allow to evaluate the RPP for two-phase filtration, provided that one of the fluids has a power-law rheology.

Key words: relative phase permeabilities (RPP), capillary models for porous media, power-law rheological model.

1. Введение

В настоящее время нефтяная отрасль становится все более и более технологической, появляется множество новых подходов по увеличению нефтеотдачи пластов. Большинство современных технологий предполагают закачивание в пласт жидкостей со степенной реологией, однако процесс фильтрационного течения жидкостей со степенной реологией на сегодняшний день недостаточно изучен. Например, для расчётов процесса двух- или многофазной фильтрации следует знать относительные фазовые проницаемости (ОФП) всех флюидов. Обычно для пластовых пород ОФП определяются экспериментально, но результаты, полученные с помощью жидкостей с ньютоновской реологией, не могут быть напрямую применены для жидкостей с неньютоновской реологией. Кроме того, эксперименты по

© Завьялов И. Н., Быков А. А., Бычков А. А., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

определению ОФП горной породы на практике крайне трудоемки и дороги и проводятся весьма ограниченно. Данное положение делает актуальной теоретически-прикладную задачу о расчете ОФП для жидкости со степенной реологией на основе экспериментально полученных ОФП жидкостей с ньютоновской реологией.

Сами по себе ОФП крайне сложны для изучения. Даже однофазную проницаемость горной породы достаточно сложно предсказать по ее типу и пористости [1]. Для этого проводятся численные и экспериментальные исследования, где основной целью ставится предсказание ОФП для различных жидкостей по структуре пористого скелета [2, 3]. В настоящей работе сделана попытка создания математической модели, которая позволит численно производить оценки ОФП степенных жидкостей по известным ОФП для ньютоновских жидкостей.

2. Фильтрация ньютоновской жидкости в системе капилляров

Общая идея для теоретического описания ОФП известна уже довольно давно и предполагает рассмотрение пористой среды как пучка капилляров различного радиуса [4]. Каждая из жидкостей течет только через некоторую часть всех капилляров, причем если жидкость смачивает породу, то она занимает часть капилляров меньшего радиуса, чем некоторый критический радиус, а жидкость, которая не смачивает или хуже смачивает породу, занимает капилляры с радиусом больше, чем некоторый критический радиус. Далее будем называть критический радиус граничным радиусом r_g . Очевидно, что четкого граничного радиуса не существует, но в данной работе полагается, что он есть. Распределение капилляров по диаметрам и основные идеи получения требуемого выражения наглядно представлены на рис. 1.

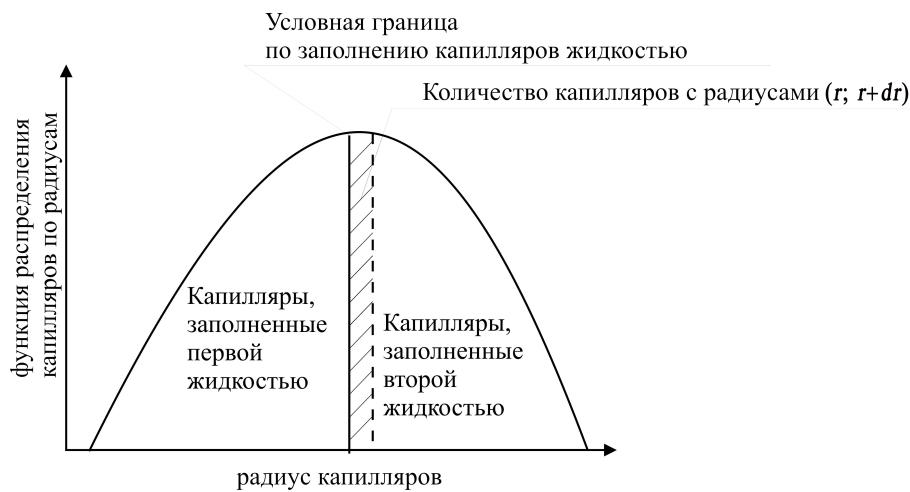


Рис. 1. Иллюстрация основной идеи по определению ОФП

Допустим, что первая жидкость занимает все капилляры с радиусами меньше чем r_g . При увеличении концентрации жидкости № 1 некоторое количество капилляров dN окажется задействованным в ее фильтрации и изменение общего расхода Q жидкости может быть определено как

$$dQ = q(r)dN, \quad (1)$$

где $q(r)$ — расход через один капилляр радиуса r . Предполагая, что средний поток через каждый капилляр подчиняется закону Пуазейля, получим

$$dQ = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\mu l} dN, \quad (2)$$

где l — длина капилляров, ΔP — перепад давления между концами капилляров. С другой стороны, возможно рассматривать течение через среду с точки зрения закона Дарси:

$$Q = \frac{K k_r A \Delta P}{\mu L}, \quad (3)$$

где L — длина образца, K — его абсолютная проницаемость, k_r — относительная фазовая проницаемость жидкости № 1, A — площадь сечения образца.

Дифференцируя (3), получим

$$dQ = \frac{KA\Delta P}{\mu L} dk_r, \quad (4)$$

Тогда подставив (4) в (2), получим

$$Kdk_r = \frac{\pi r^4 L}{8Al} dN, \quad (5)$$

Выразим приращение dN через приращение объема dV , занимаемого жидкостью № 1. Так как в рассматриваемой модели поры имеют цилиндрическую форму, то

$$dV = \pi r^2 l dN, \quad (6)$$

где V — объем пористой среды, через которую происходит фильтрация смачивающего флюида. Подставим (6) в (5):

$$Kdk_r = \frac{r^2 L}{8Al} dV, \quad (7)$$

По определению, насыщенность флюида S есть отношение объема, через который происходит его фильтрация, к суммарному поровому объему

$$S = \frac{V}{V_p} = \frac{V}{\varphi AL}, \quad (8)$$

где V_p — суммарный поровый объем образца, φ — пористость образца. Таким образом, подставив (8) в (7):

$$Kdk_r = \frac{r^2 \varphi L^2}{8l^2} dS. \quad (9)$$

Введем новую характеристику t — извилистость канала

$$t = \frac{l}{L} \quad (10)$$

и подставим в (8):

$$Kdk_r = \frac{r^2 \varphi}{8t^2} dS, \quad (11)$$

откуда получаем связь между насыщенностью и граничным значением радиуса капилляров, занимаемых смачивающей фазой (жидкость № 1):

$$r_g(S) = \sqrt{\frac{8Kt^2}{\varphi} \frac{dk_r}{dS}}. \quad (12)$$

3. Фильтрация жидкости со степенной реологией в системе капилляров

Прежде чем привести расчет ОФП для неильтоновской жидкости со степенной реологией, разрешим вопрос — какие капилляры она занимает? Капилляры с радиусами больше или меньше r_g ? Здесь возможно воспользоваться наиболее практически распространенным случаем, когда степенная жидкость представляет собой некоторой гель на водной основе. Предположим, что смачивающие свойства породы для степенной жидкости близки к свойствам воды. Также предположим, что горная порода гидрофильтра, следовательно, степенная жидкость занимает капилляры с радиусами $r < r_g$. В противоположном случае, вывод формул остается аналогичным и рассматриваться в рамках данной статьи не будет.

Основное отличие жидкости со степенной реологией заключается в формуле для определения вязких поверхностных сил:

$$\tau = H \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^n, \quad (13)$$

где H — коэффициент консистенции жидкости, n — степенной коэффициент. Теперь необходимо повторить рассуждения, сделанные для ньютоновской жидкости. Выражение для потока степенной жидкости через капилляр с радиусом r имеет вид

$$q(r) = \frac{\pi r^3}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{r \Delta P}{2lH} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (14)$$

Изменение расхода степенной жидкости при вовлечении в фильтрацию dN капилляров с радиусами r составит

$$dQ(r) = q(r)dN = \frac{\pi r^3}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{r \Delta P}{2lH} \right)^{\frac{1}{n}} dN. \quad (15)$$

Скорость фильтрации степенной жидкости через среду, представляющую собой пучок капилляров, легко может быть получена из (15) подстановкой в качестве r эквивалентного радиуса

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{8kt^2}{\varphi}}. \quad (16)$$

Использование эквивалентного радиуса для перехода к фильтрационно-емкостным параметрам k и φ пористой среды в рамках капиллярной модели было приведено в работе [5] для определения эффективной скорости деформаций степенной жидкости. Строго говоря, данный переход с использованием эквивалентного радиуса не является правомерным для описания реальной пористой среды ввиду ее сложной структуры, однако необходимо отметить, что само описание реальной пористой среды как набора капилляров уже является идеализацией. Поэтому использование концепции эффективного радиуса в рассматриваемой работе является допустимым. В этом случае для скорости фильтрации через пористую среду в капиллярной модели получим выражение

$$u = \frac{\varphi n}{3n + 1} \left(\frac{8k}{\varphi} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\Delta P}{2HL} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (17)$$

Однако обычно вводится кажущаяся вязкость μ_{nn} так, чтобы запись закона Дарси для степенной жидкости и ньютоновской не отличалась

$$\frac{k}{\mu_{nn}} \frac{\Delta P}{L} = \frac{\varphi n}{3n + 1} \left(\frac{8k}{\varphi} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \left(\frac{\Delta P}{2HL} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (18)$$

Откуда получаем выражение для кажущейся вязкости

$$\mu_{nn} = \left(k \frac{3n + 1}{\varphi n} \right) \left(\frac{\varphi}{8k} \right)^{\frac{n+1}{2n}} (2H)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^{1 - \frac{1}{n}}. \quad (19)$$

Тогда скорость Дарси степенной жидкости для капиллярной модели равна

$$u = \frac{k}{\mu_{nn}} \frac{\Delta P}{L}. \quad (20)$$

Теперь для практического применения следует ввести в рассмотрение остаточную водонасыщенность S_i , причем предполагается, что остаточная водонасыщенность совпадает с остаточной насыщенностью для жидкости со степенной реологией:

$$k \longrightarrow Kk_{rnn}(S), \quad (21)$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi(S - S_i). \quad (22)$$

Данный подход для перехода к многофазной фильтрации, также приводится в работе [5].

Закон Дарси для фильтрации степенной жидкости с кажущейся вязкостью имеет вид

$$Q = \frac{Kk_{rnn}(S)A\Delta P}{\mu_{nn}(S)L}. \quad (23)$$

Выражение для вязкости μ_{nn} согласно (18), (20) и (21) имеет вид

$$\mu_{nn} = \left(K k_{rnn}(S) \frac{3n+1}{\varphi(S-S_i)n} \right) \left(\frac{\varphi(S-S_i)}{8Kk_{rnn}(S)} \right)^{\frac{n+1}{2n}} (2H)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^{1-\frac{1}{n}}. \quad (24)$$

Тогда, дифференцируя выражение (23) по насыщенности S получаем

$$\frac{dQ}{dS} = \frac{KA\Delta P}{L} \frac{d}{dS} \left(\frac{k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}(S)} \right) \quad (25)$$

или

$$dQ = \frac{KA\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} dS. \quad (26)$$

Приравняв (15) и (25) получим

$$\frac{KA\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} dS = \frac{\pi r^3}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{r\Delta P}{2lH} \right)^{1/n} dN. \quad (27)$$

Используя выражения (5) и (7), получим связь приращения насыщенности с приращением количества капилляров:

$$dS = \frac{\pi r^2 l}{\varphi A L} dN. \quad (28)$$

Тогда

$$\frac{KA\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{\pi r^2 l}{\varphi A L} dN = \frac{\pi r^3}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{r\Delta P}{2lH} \right)^{1/n} dN, \quad (29)$$

$$\frac{K\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{1}{\varphi} \frac{l}{L} = \frac{r}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{r\Delta P}{2lH} \right)^{1/n}. \quad (30)$$

Подставим выражение зависимости $r_g(S)$ из (9) для ньютоновской жидкости в (29), предполагая, что вид $r(S)$ для неニュтоновской жидкости такой же как и для ньютоновской

$$\frac{K\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{1}{\varphi} \frac{l}{L} = \frac{t \sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}} \Delta P}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{t \sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}} \Delta P}{2lH} \right)^{1/n}. \quad (31)$$

Так как извилистость $t = l/L$, то

$$\frac{K\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{1}{\varphi} \frac{l}{L} = \frac{\frac{l}{L} \sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}} \Delta P}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{\frac{l}{L} \sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}} \Delta P}{2lH} \right)^{1/n} \quad (32)$$

откуда

$$\frac{\Delta P}{L} \frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \frac{8}{\varphi} \frac{dk_r}{dS}}}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{\sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}} \Delta P}{2H} \frac{L}{L} \right)^{1/n}. \quad (33)$$

Напомним, k_r — ОФП ньютоновской жидкости. Далее

$$\frac{k'_{rnn}(S)\mu_{nn}(S) - \mu'_{nn}(S)k_{rnn}(S)}{\mu_{nn}^2(S)} \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \frac{8}{\varphi} \frac{dk_r}{dS}}}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{\sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}}}{2H} \right)^{1/n} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n-1}. \quad (34)$$

Полученное выражение может быть упрощено исключением из рассмотрения производной кажущейся вязкости:

$$\mu_{nn}' = \mu_{nn} \frac{n-1}{2n} \left(\frac{(S-S_i)k_{rnn}' - k_{rnn}}{(S-S_i)k_{rnn}} \right). \quad (35)$$

Подставив в (34) выражение для вязкости (35), получим

$$\left(k'_{rnn}(S) - \frac{n-1}{2n} \left(\frac{(S-S_i)k_{rnn}' - k_{rnn}}{(S-S_i)k_{rnn}} \right) \right) \frac{1}{\varphi \mu_{nn}(S)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \frac{8}{\varphi} \frac{dk_r}{dS}}}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{\sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{Kdk_r}{dS}}}{2H} \right)^{1/n} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n-1}. \quad (36)$$

Или

$$\left(\frac{n+1}{2n} k'_{rnn}(S) + \frac{n-1}{2n} \frac{k_{rnn}}{(S - S_i)} \right) \frac{1}{\varphi \mu_{nn}(S)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \frac{8}{\varphi} \frac{dk_r}{dS}}}{\frac{1}{n} + 3} \left(\frac{\sqrt{\frac{8}{\varphi} \frac{K dk_r}{dS}}}{2H} \right)^{1/n} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)^{1/n-1}, \quad (37)$$

где

$$\mu_{nn} = \left(\frac{3n+1}{n} \right) (Kk_{rnn}(S))^{\frac{n-1}{2n}} (\varphi(S - S_i))^{\frac{1-n}{2n}} \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{n+1}{2n}} [2H]^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\Delta P}{L} \right]^{1-\frac{1}{n}}. \quad (38)$$

Данное дифференциальное уравнение необходимо решить относительно $k_{rnn}(S)$ и тогда будет получено ОФП для неильтоновской жидкости по ОФП для ньютоновской жидкости, но с теми же свойствами смачиваемости. В заключение отметим, что если для горной породы имеются данные по относительной фазовой проницаемости (ОФП) ньютоновских жидкостей, то возможно получить ОФП для степенных жидкостей решив дифференциальное уравнение (37), полученное в предположении: порода может быть представлена как набор капилляров с некоторым распределением по радиусу; капилляры, занимаемые степенной жидкостью, соответствуют капиллярам занимаемой водой при тех же концентрациях; остаточная водонасыщенность совпадает с остаточной насыщенностью степенной жидкости.

Литература

1. Martins-Costa M.L., Angulo J.A.P., da Costa Mattos H. Modeling the connection between porosity and permeability: a mixture theory approach // Journal of Porous Media. 2017. V. 20. N 5.
2. Kadet V. V., Galechyan A.M. Accounting for Fluid Rheology in the Hydrophobization Model of Relative Permeability Hysteresis // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017. V. 58. N 6. P. 1004–1012.
3. Kadet V. V., Galechyan A.M. Percolation modeling of relative permeability hysteresis // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2014. V. 119. P. 139–148.
4. Fatt, I., Dykstra, H. Relative Permeability Studies // Society of Petroleum Engineers. 1951. September 1.
5. Floriancic M., Bertsch P., Jimenez-Martinez J., Andrade J.S.Jr., Holzner M. Determination of the Effective Viscosity of Non-newtonian Fluids // Flowing Through Porous Media. Front. Phys. 2019. 7:71. doi: 10.3389/fphy.2019.00071.

References

1. Martins-Costa M.L., Angulo J.A.P., da Costa Mattos H. Modeling the connection between porosity and permeability: a mixture theory approach. Journal of Porous Media. 2017. V. 20. N 5.
2. Kadet V. V., Galechyan A.M. Accounting for Fluid Rheology in the Hydrophobization Model of Relative Permeability Hysteresis. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017. V. 58. N 6. P. 1004–1012.
3. Kadet V. V., Galechyan A.M. Percolation modeling of relative permeability hysteresis. Journal of Petroleum Science and Engineering. 2014. V. 119. P. 139–148.
4. Fatt, I., Dykstra, H. Relative Permeability Studies. Society of Petroleum Engineers. 1951. September 1.
5. Floriancic M., Bertsch P., Jimenez-Martinez J., Andrade J.S.Jr., Holzner M. Determination of the Effective Viscosity of Non-newtonian Fluids. Flowing Through Porous Media. Front. Phys. 2019. 7:71. doi: 10.3389/fphy.2019.00071.

УДК 531.36

A. B. Карапетян¹, M. A. Муницина^{2,3}¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)³Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН

Динамика волчка тип-топ при вязком трении

Простейшей моделью волчка тип-топ является неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с геометрическим центром. В настоящей работе предполагается, что со стороны плоскости на шар действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта с плоскостью. При некотором классе начальных условий приводятся приближенные уравнения, описывающие его динамику.

Ключевые слова: вязкое трение, неоднородный шар, устойчивость.

A. V. Karapetyan¹, M. A. Munitsyna^{2,3}¹Lomonosov Moscow State University²Moscow Institute of Physics and Technology³V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

Tip-top dynamics in viscous friction

The simplest model of a tippe-top is an nonhomogeneous dynamically symmetric ball, the center of mass of which lies on the axis of dynamic symmetry, but does not coincide with the geometric center. In the present work, approximate equations that describe the dynamics of a tip-top under a certain class of initial conditions for a model of viscous friction are obtained. Qualitative analysis is supplemented by quantitative estimates.

Key words: viscouse friction, tip-top, stability.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости. Пусть r – радиус шара, s – расстояние между его геометрическим центром O и центром масс S ($s \neq 0$). Будем считать, что прямая SO с единичным ортом $e = \overline{SO}/s$ является осью динамической симметрии шара, а A и C – его экваториальный и осевой моменты инерции.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента шара, условие постоянства единичного вектора восходящей вертикали γ и условие безотрывности движения, отнесенные к главным центральным осям инерции шара, имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] &= -mg\boldsymbol{\gamma} + N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, & \mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] &= [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}] + \mathbf{M}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] &= 0, & (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m – масса шара, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости его центра масс и угловой скорости, $\mathbf{r} = s\mathbf{e} - r\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ – радиус-вектор и скорость нижней точки шара соответственно, g – ускорение свободного падения, $N \geq 0$ – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\mathbb{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции шара, \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент трения.

При заданной модели трения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N) \quad (2)$$

система (1) замкнута относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и N . Локальный анализ рассматриваемой модели волчка представлен в работах [1, 2], а глобальный качественный анализ – в работах [3–5]. Численные исследования в рамках поликомпонентного сухого трения проводились в [6]. Сравнительный анализ различных моделей проведен в [7]. В работе [8] представлен метод обобщенных диаграмм Смейла [9, 10] в задаче о движении волчка тип-топ на вязкоупругой плоскости.

При $\mathbf{M} = 0$ система (1) имеет первый интеграл, представляющий собой линейную комбинацию проекций кинетического момента на вертикаль и на ось динамической симметрии шара (интеграл Желле [11])

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{Cr}(\mathbb{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k = \text{const}, \quad (3)$$

а при $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ – интеграл энергии

$$H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\mathbb{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) = h = \text{const}, \quad (4)$$

интеграл вида

$$\omega_3 = \text{const}, \quad (5)$$

выражающий постоянство проекции кинетического момента шара и на ось динамической симметрии, а также интеграл вида

$$V(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = ([\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}], [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}]) = v^2 = \text{const}, \quad (6)$$

выражающий постоянство величины проекции скорости центра масс на опорную плоскость. В общем случае система (1) допускает энергетическое соотношение

$$\dot{H} = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad (7)$$

и на ее решениях справедливы равенства

$$\dot{K} = -\frac{1}{Cr}(\mathbf{M}, \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$\dot{V} = \frac{([\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}], [\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}])}{m}. \quad (9)$$

Заметим, что в случае отрыва шара от плоскости ($N = 0$) для описания его динамики следует положить $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ в первых трех уравнениях (1), отбросив последнее уравнение. При этом для отслеживания возвращения на контакт следует рассматривать также уравнение

$$\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (10)$$

где z – высота над плоскостью нижней точки шара (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$).

1.1. Абсолютно гладкая плоскость

Рассмотрим случай абсолютно гладкой плоскости $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$. Наличие интегралов (3)–(6) и геометрического интеграла

$$\Gamma(\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \quad (11)$$

позволяет понизить порядок системы (1) до единицы.

При $k \neq \omega_3(\pm 1 - s/r)$ получим

$$\frac{1}{2}(A + ms^2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + W(\theta) = h - \frac{mv^2}{2}, \quad (12)$$

где θ – угол нутации ($\sin \theta \neq 0$ при $k \neq \omega_3(\pm 1 - s/r)$), а $W(\theta)$ – эффективный потенциал вида

$$W(\theta) = \frac{1}{2}C\omega_3^2 + \frac{C^2(kr - (r \cos \theta - s)\omega_3)^2}{2A \sin^2 \theta} + mg(r - s \cos \theta).$$

Функция $W(\theta)$ имеет на промежутке $\theta \in (0, \pi)$ одну критическую точку $\theta = \arccos x$, являющуюся точкой строгого локального минимума и определяющуюся равенством

$$\frac{(k - (x - b)\omega_3)^2}{a(1-x^2)^2} x - \frac{k - (x - b)\omega_3}{a(1-x^2)} \omega_3 - c = 0. \quad (13)$$

Здесь a , b и c – параметры шара

$$a = \frac{A}{C} \in [1/2, +\infty], \quad b = \frac{s}{r} \in (0, 1), \quad c = \frac{mgs}{C} \in (0, +\infty).$$

Критической точке $W(\theta)$ соответствуют решения уравнений движения шара на абсолютно гладкой плоскости вида

$$\begin{aligned} v_1 &= v(\cos \omega t \cos \omega_0 t - \sin \omega t \cos \theta \sin \omega_0 t), \\ v_2 &= v(-\cos \omega t \sin \omega_0 t - \sin \omega t \cos \theta \cos \omega_0 t), \\ v_3 &= v \sin \omega t \sin \theta, \\ \omega_1 &= \omega \sin \theta \sin \omega_0 t, \\ \omega_2 &= \omega \sin \theta \cos \omega_0 t, \\ \omega_3 &= \text{const}, \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \omega_0 t, \\ \gamma_2 &= \sin \theta \cos \omega_0 t, \\ \gamma_3 &= \cos \theta, \\ N &= mg, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\omega = \frac{k - (x - b) \omega_3}{a(1 - x^2)}, \quad \omega_0 = \omega_3 - \omega x. \tag{15}$$

Они определяют устойчивые регулярные прецессии вокруг центра масс, равномерно прямо-линейно движущегося вдоль плоскости. При этом величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу шара.

При $k = \omega_3(\pm 1 - s/r)$ соответствующие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \text{const}, \\ v_1 &= v \sin \omega_3 t, \quad v_2 = v \cos \omega_3 t, \quad v_3 = 0, \quad N = mg, \end{aligned} \tag{16}$$

которым соответствуют равномерные вращения шара вокруг вертикально расположенной оси симметрии, равномерно движущейся вдоль плоскости. Решения (16) всегда устойчивы при наименшем расположении центра масс шара ($\theta = 0$), а при наивысшем расположении центра масс ($\theta = \pi$) устойчивы при выполнении неравенства $\omega_3^2 \geq 4Amgs/C^2$ [12].

1.2. Плоскость с трением скольжения

Рассмотрим случай плоскости с вязким трением скольжения

$$\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = 0. \tag{17}$$

Тогда из рассмотренных в предыдущем параграфе стационарных движений реализуются только те, на которых проскальзывание отсутствует. Это равномерные вращения вокруг неподвижной вертикальной оси симметрии ((16) при $v = 0$) и регулярные прецессии вокруг неподвижного центра масс ((14) при $v = 0$), параметры которых полностью определяются постоянной интеграла Желле [4]:

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos y, \quad \omega_0 = -b\omega, \quad \omega = \frac{k}{a(1-y^2) + (y-b)^2}, \\ k^2 &= c \frac{(a(1-y^2) + (y-b)^2)^2}{b - (1-a)y}, \end{aligned} \tag{18}$$

и справедливо равенство

$$\omega_3^2 = \frac{(b-y)^2 c}{(a-1)y + b}. \tag{19}$$

Полный параметрический анализ устойчивости этих решений и соответствующие диаграммы Смейла представлены в [3–4]. В частности, если параметры шара удовлетворяют равенствам

$$1 + b > a > \frac{1-b}{8} \left(7 + b\sqrt{1+14b+b^2} \right), \tag{20}$$

то вращения с наименшим расположением центра масс ($y = 1$) устойчивы при $\omega^2 < \omega_+^2$ ($k^2 < k_+^2$), а с наивысшим ($y = -1$) – при $\omega^2 > \omega_-^2$ ($k^2 > k_-^2$), где

$$\omega_{\pm}^2 = c \frac{(1 \mp b)^2}{a \mp (1-b)}, \quad k_{\pm} = \omega_{\pm}(\pm 1 - b),$$

а прецессии всегда устойчивы. Соответствующая диаграмма Смейла представлена на рис. 1.

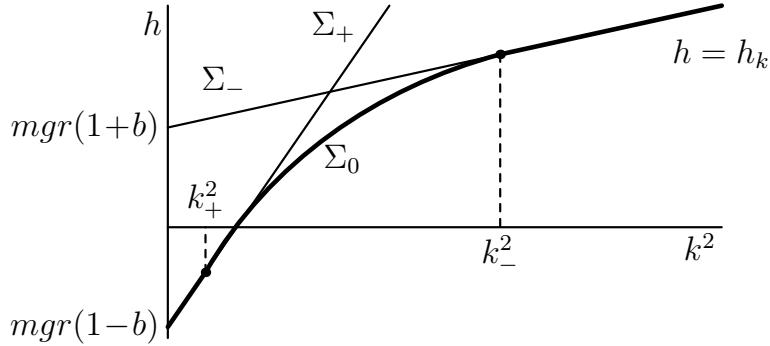


Рис. 1

Множества Σ_{\pm} и Σ_0 соответствуют вращениям $y = \pm 1$ и прецессиям соответственно, жирным кривым соответствуют устойчивые движения. В случае (20) каждому значению k соответствует ровно одно устойчивое движение, точные выражения для соответствующей зависимости $h = h_k(k)$ представлены в [3].

Все точки плоскости (k^2, h) , принадлежащие множеству $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_-$, инвариантны относительного фазового потока системы (1), а все остальные ($h > h_k$) эволюционируют вдоль прямой $k = \text{const}$ в сторону уменьшения h [13]. Это обстоятельство позволяет дать глобальный качественный анализ динамики шара [4]. Например, если в начальном положении ось шара почти вертикальна, центр масс близок к наименшему положению, а начальная угловая почти сонаправлена с осью и достаточно велика (так, что k больше бифуркционного значения k_-), начальное положение точки на плоскости (k^2, h) лежит в окрестности Σ_+ правее прямой $k^2 = k_-^2$. Следовательно, при движении шара эта точка будет двигаться вдоль прямой $k^2 = \text{const}$ в сторону уменьшения h до тех пор, пока не достигнет множества Σ_- . Таким образом, в процессе движения ось динамической симметрии шара перевернется к вертикальному положению с наивысшим расположением центра масс, и шар будет равномерно вращаться вокруг нее. Аналогичным образом определяется финальное движение шара при любых начальных условиях.

Для исследования описанных переходных процессов заметим, что при $M = 0$ на решениях системы (1) справедливо равенство

$$\dot{\omega}_3 = \frac{r}{C}([\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}], \mathbf{e}_3). \quad (21)$$

Откуда в предположении о малости трения следует, что ω_3 является медленной переменной, а приближенное уравнение, описывающее ее изменение, может быть получено подстановкой вместо быстрых переменных соответствующих периодических или почти периодических решений исходной системы, найденных в предположении о постоянстве медленной переменной [14,15], т.е. соответствующих стационарным движениям шара на абсолютно гладкой плоскости.

Например, если начальные условия лежат в окрестности неустойчивых вращений, то в качестве порождающих решений можно выбрать (14) с учетом (15), (13). Тогда из (21) полагая $v = 0$ получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= -\kappa \frac{r^2}{A} \Phi(\omega_3), \\ \Phi(\omega_3) &= (b-x)k + \left(a(1-x^2) + (b-x)^2\right)\omega_3, \end{aligned} \quad (22)$$

где при $\omega_3 \neq k\sigma_{\pm}$, $\sigma_{\pm} = (\pm 1 - b)^{-1}$ зависимость $x = x(\omega_3)$ определяется равенствами (13), а при $\omega_3 = k\sigma_{\pm}^k$ следует положить $x = \pm 1$ ($\dot{\omega}_3 = 0$).

В силу соотношений (1) справедливо неравенство $\omega_3/k \geq \sigma_-$, откуда следует, что функция $\Phi(\omega_3)$ не меняет знак. Кроме того, она обращается в ноль только в точках $\omega_3 = k\sigma_{\pm}$, и

решение (22) стремится к $k\sigma_{\pm}$ при начальных условиях $\omega_3(0) \gtrless k\sigma_+$ ($\omega_3(0) \leq k\sigma_+$) в случае $k > 0$ ($k < 0$).

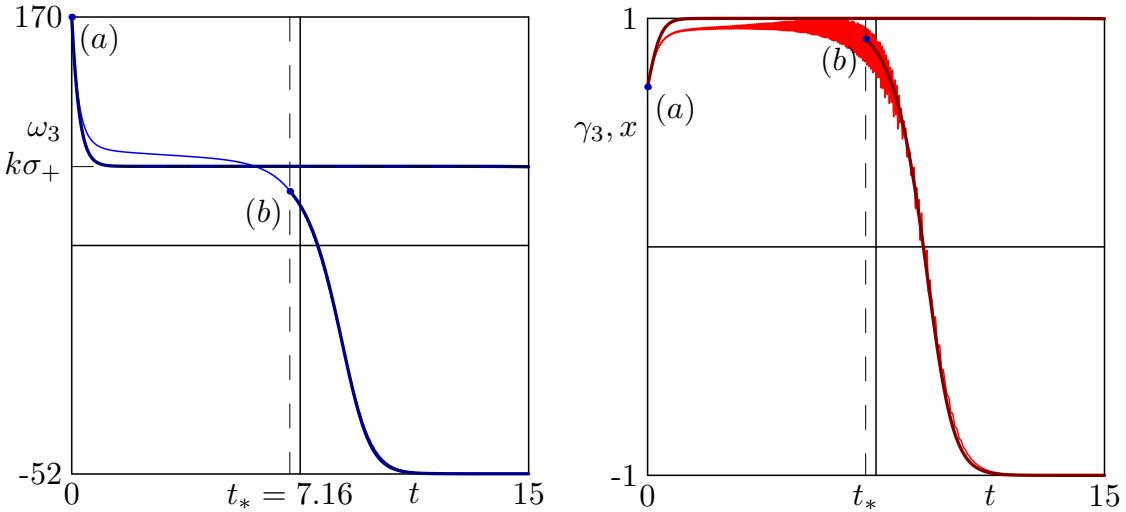


Рис. 2

На рис. 2 представлены результаты численного интегрирования уравнений движения шара с параметрами (соответствующих условиям (20))

$$a = 1, \quad b = 1/3, \quad c = 300 \text{ } c^{-1} \quad (23)$$

на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0.1 \text{ кг/с}$ при начальных условиях

$$\mathbf{v}(0) = 0, \quad \gamma_3(0) = 0.7, \quad \gamma_1(0) = 0, \quad \omega_3(0) = 170 \text{ рад/с}, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \quad (24)$$

(начальное значение $\gamma_2(0)$ определяется геометрическим интегралом) – зависимость от времени проекции угловой скорости шара на ось динамической симметрии ω_3 и косинуса угла нутации γ_3 (тонкие кривые). Начальные условия (24) соответствуют начальному положению точки плоскости (k^2, h) выше прямой Σ_+ и правее бифуркационного значения k_-^2 . Как и следовало ожидать, в численном эксперименте наблюдается переход к неустойчивым вращениям с наименшим расположением центра масс с последующим переходом к устойчивым вращениям с наивысшим расположением центра масс.

Жирными кривыми на рис. 2 обозначены численные решения приближенного уравнения (22) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \omega_3(0) &= 170 \text{ рад/с}, & (a) \\ \omega_3(t_*) &= 85 \text{ рад/с}, & (b) \end{aligned} \quad (25)$$

и соответствующего закона изменения косинуса угла нутации. Начальные условия (25a) соответствуют (24), а соответствующее решение (22) – переходу к неустойчивому вращению. Значение t_* определялось из условия равенства (25b) при численном интегрировании уравнений движения шара с начальными условиями (24). Решение (22) с начальными условиями (25b) соответствует последующему переходу от неустойчивого вращения к устойчивому.

Рассмотрим теперь случай, когда начальные условия находятся не только в окрестности окрестности неустойчивых вращений (16) (при $v = 0$), а в окрестности любых решений (14) (с учетом (15), (13)), отличных от (18). В этом случае из равенства (9) можно заключить, что при малом трении v так же, как и ω_3 является малой величиной, что позволяет построить соответствующее приближенного уравнение.

Из (21), (9) получим

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\kappa \frac{v}{m} - \kappa \frac{r}{ma} \Phi(\omega_3) \frac{\cos \omega t}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \dot{\omega}_3 &= -\kappa \frac{r}{C} v \sqrt{1 - x^2} \cos \omega t - \kappa \frac{r^2}{A} \Phi(\omega_3), \end{aligned} \quad (26)$$

где величина ω определяется первым равенством (15), т.е.

$$\omega = \begin{cases} \frac{-\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)+k^2}-k}{2a(bx-1)}, & \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_-, \sigma_+), \\ \frac{\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)+k^2}-k}{2a(bx-1)}, & \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_+, +\infty). \end{cases} \quad (27)$$

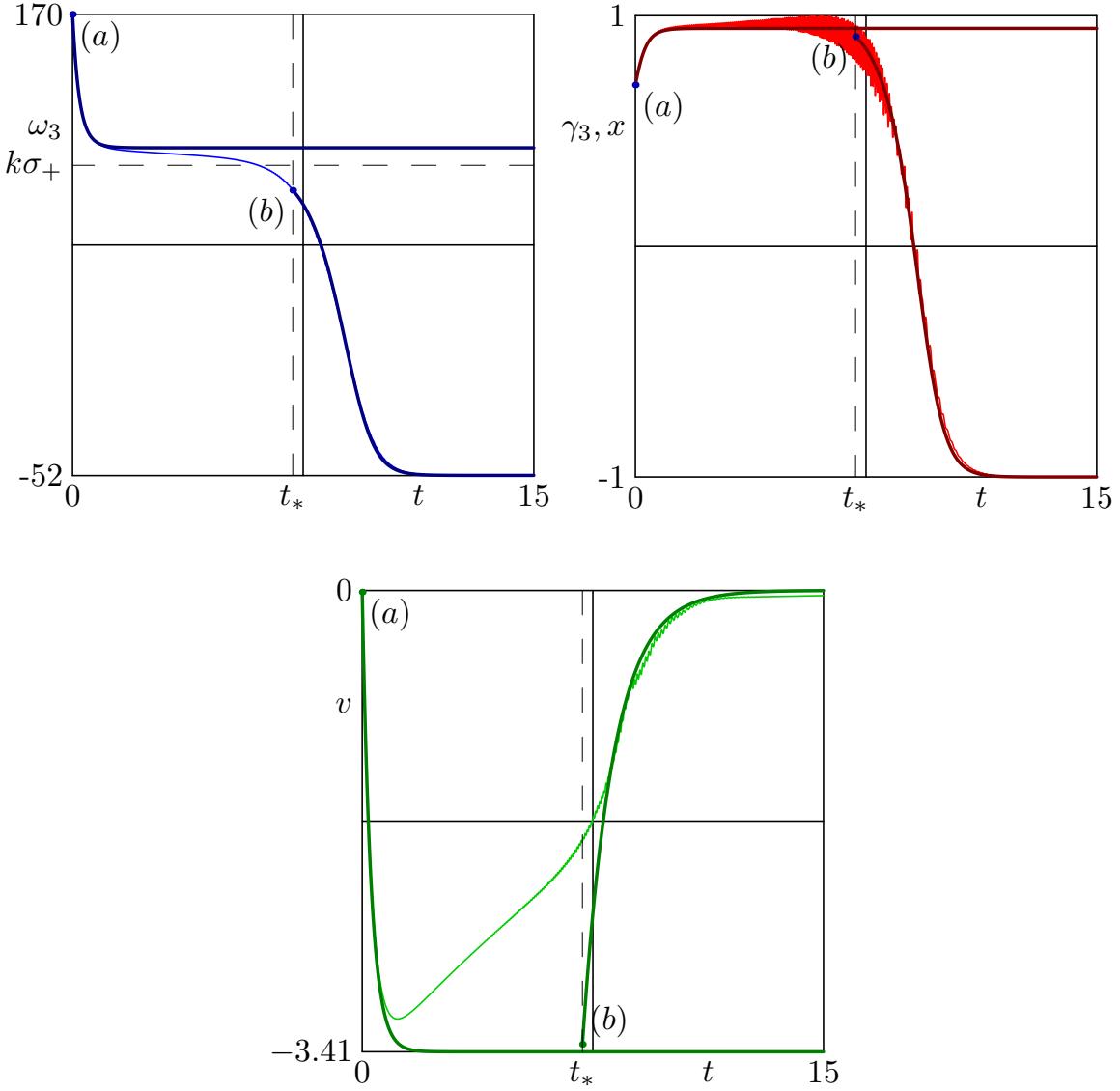


Рис. 3

Из равенства (27) при движении в области $\omega_3/k < \sigma_+$ следует, что абсолютная величина ω достаточно велика и ωt является быстрой величиной. Осредняя уравнение (26) по времени, получим то же уравнение (21) и равенство $\dot{v} = -\kappa v/m$. Таким образом, на основании перехода от множества Σ_+ к множеству Σ_- , величина v экспоненциально стремится к нулю, не оказывая влияния на изменение ориентации шара. Если же начальная точка плоскости (k^2, h) лежит выше множества σ_+ и правее прямой $k^2 = k_-^2$, то величина ω достаточна мала, вследствие чего величина v оказывает влияние на изменение ω_3 . Этим объясняется отклонение решения уравнений (22) от решения полной системы уравнений. На рис. 3 представлены решения системы (26) при начальных условиях $v(0) = 0$ м/с, (25а)

и системы (26) при начальных условиях $v(t_*) = -3.4$ м/с, (25b), а также соответствующие решению полных уравнений движения шара величины.

В заключение заметим, что учет момента трения верчения [16] позволяет описать рассматриваемый переходной процесс без задержки на неустойчивом вращении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».

Литература

1. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения в её учет в теории волчка // Проблемы гирокопии. Москва : Мир, 1967. С. 60–77.
2. Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin : Springer, 1971 = Магнус К. Гирокоп. Теория и применение. Москва : Мир, 1974. 526 с.
3. Карапетян А.В. Качественное исследование волчка на плоскости с трением // ПММ. 1991. Т. 55, № 4. С. 698–701.
4. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т 43, № 3. С. 33–41.
5. Карапетян А.В. Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. Москва : Физматлит, 2013. С. 184–210.
6. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Механика твердого тела. 2005. Т. 40, № 6. С. 157.
7. Зобова А.А. Различные модели трения в динамике двусферического волчка // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 2. С. 21–28.
8. Zobova A.A., Karapetyan A.V. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. Карапетян А.В. Качественный анализ динамики диссипативных систем с симметрией на основе метода обобщенных диаграмм Смейла // Современные проблемы математики и механики. Том 2. Механика. Выпуск 2. Москва : Изд-во МГУ, 2009. С. 192–200.
10. Карапетян А.В. Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. 10-й Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Секц. 1. Аналитическая механика. Казань, 2012. Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247–258.
11. Jellet J.H. A treatise on the theory of friction. Dublin; London : Macmillan, 1872. 230 p.
12. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45, № 3. С. 504–511.
13. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. Москва : Эдиториал УРСС, 1988. 165 с.
14. Моргунов Б.И. Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва : МГУ, 1971. 508 с.
15. Блехман И.И. Вибрационная механика. Москва : Физматлит, 1994. 400 с.

- 16.** *Munitsyna M.A.* Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84, вып. 4. С. 426–434.

References

1. *Kontesy P.* The relationship between sliding friction and spinning friction into account in theory spinning top. Gyroscopy problems. Moscow : Mir, 1967. P. 60–77. (in Russian).
2. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971 = *Magnus K.* Gyroscope. Theory and application. Moscow : Mir, 1974. 526 p.
3. *Karapetyan A. V.* Qualitative investigation of the dynamics of a top on a plane with friction. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1991. V. 55, N 4. P. 698–701. (in Russian).
4. *Karapetyan A. V.* Global qualitative analysis of Tippe-top dynamics. Mechanics of Solids. 2008. V. 43, N 3. P. 33–41. (in Russian).
5. *Karapetyan A. V.* Invariantnye mnozhestva mehanicheskikh sistem s simmetriej. Problemy ustojchivosti i upravleniya. Sbornik nauchnyh statej, posviashchennyj 80letiju akademika Vladimira Mefod'evicha Matrosova. Moscow : Fizmatlit, 2013. P. 184–210. (in Russian).
6. *Klimov D.M., Zhuravlev V.P.* On the dynamics of the thompson top (tippe top) on the plane with real dry friction. Mechanics of Solids. 2005. V. 40, N 6. P. 117. (in Russian).
7. *Zobova A. A.* Various friction models in two-sphere top dynamics. Izvestiya RAS. Mechanics of Solids. 2013. V. 48, N 2. P. 21–28. (in Russian).
8. *Zobova A. A., Karapetyan A. V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns. Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. *Karapetyan A. V.* Kachestvennyj analiz dinamiki dissipativnyh sistem s simmetriej na osnove metoda obobshchennyh diagramm Smejla. Sovremennye problemy i tematiki i mehaniki. Tom 2. Mehanika. Vypusk 2. Moscow : Izd-vo MGU, 2009. P. 192–200. (in Russian).
10. *Karapetyan A. V.* Obobshchennye diagrammy Cmejla i ih primenenie k zadacham dinamiki sistem s treniem. Analiticheskaia mehanika, ustojchivost' i upravlenie: Tr. 10-j Mezhdunar. CHetaevskoj konf. T. 1. Sekc. 1. Analiticheskaia mehanika. Kazan, 2012. Kazan : Izd-vo Kazan. gos. tehn. un-ta, 2012. P. 247–258. (in Russian).
11. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. Dublin; London : Macmillan, 1872. 230 p.
12. *Karapetyan A. V.* On stability of steady state motions of a heavy solid body on an absolutely rough horizontal plane. Applied Mathematics and Mechanics. 1981. V. 45, N 3. P. 504–511. (in Russian).
13. *Karapetyan A. V.* Stability of steady motions. Moscow : Editorial URSS, 1998. 165 p. (in Russian).
14. *Morgunov B.I. Volosov V.M.* Metod osredneniiia v teorii nelinejnyh kolebatel'nyh sistem. Moscow : MGU, 1971. 508 p. (in Russian).
15. *Blehman I.I.* Vibracionnaia mehanika. Moscow : Fizmatlit, 1994. 400 p. (in Russian).
16. *Munitsyna M.A.* Transition processes in tippe-top dynamics. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2020. V. 84. N 4. P. 426–434. (in Russian).

УДК 531.36

M. A. Munitsyna

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН

Динамика кельтского камня при малом трении

Рассматривается задача о движении кельтского камня на плоскости с вязким трением. Определяются такие параметры задачи, при которых в течение движения возможна смена направления вращения.

Ключевые слова: вязкое трение, кельтский камень, устойчивость.

M. A. Munitsyna

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

Celt dynamics in the case of low friction

The problem of the motion of a Celt on a plane with viscous friction is considered. The parameters of the problem at which the direction of rotation can be changed during the movement are determined.

Key words: viscouse friction, celt, stability.

Введение

Хорошо известно [1], что при вращении кельтского камня вокруг вертикальной оси направление этого вращения может изменяться в процессе движения. В большинстве работ, посвященных этому свойству, рассматривается неголономная постановка задачи (см., например, [2, 3]). Однако, например, в работе [4] указывается на физическую необоснованность данной постановки.

В настоящей работе продолжается исследование [2], в котором предполагается, что со стороны плоскости на камень действует сила классического вязкого трения. Эта модель трения позволяет провести не только численные [5], но и аналитические исследования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого выпуклого твердого тела на неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть \mathbf{v} – скорость центр масс тела, $\boldsymbol{\omega}$ – его угловая скорость, а $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор восходящей вертикали. Тогда радиус-вектор точки контакта тела и плоскости определяется равенством $\boldsymbol{\gamma} = -\text{grad } f(\mathbf{r})/|\text{grad } f(\mathbf{r})|f(\mathbf{r}) = 0$ – уравнение поверхности тела, а скорость этой точки имеет вид $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$.

Будем считать, что на тело действуют сила тяжести $-mg\boldsymbol{\gamma}$, нормальная компонента реакции опорной плоскости $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ и сила вязкого трения $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{u}$. Уравнения движения тела, записанные в главных центральных осях тела ($\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – соответствующий тензор инерции), имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = (N - mg)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}], \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (3)$$

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (1) выражает теорему о движении центра масс тела, (2) – теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс, (3) – условие постоянства вектора восходящей вертикали, а (4) – условие контакта тела с плоскостью.

Заметим, что если в процессе движения величина N изменит знак с положительного на отрицательный, то произойдет отрыв тела от опорной плоскости. В этом случае в качестве уравнений движения следует рассматривать (1)–(3), положив в них $N = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ и добавив к ним уравнение $\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})$ (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$). В случае же контакта тела с плоскостью из системы (1)–(4) определяется величина нормальной реакции

$$N = m(g + ([\mathbf{r}, \dot{\omega}] + [\dot{\mathbf{r}}, \omega], \boldsymbol{\gamma}) + ([\omega, \mathbf{r}], [\omega, \boldsymbol{\gamma}])) , \quad (5)$$

что позволяет считать систему (1)–(3) замкнутой относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Будем считать, что положительная полуось Ox_3 перпендикулярна поверхности тела. Тогда система (1)–(3) с учетом (5) имеет решения вида

$v_1 = v_2 = v_3 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega$ ($\omega \in R$), (6) на которых величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу тела. Им соответствуют равномерные вращения тела вокруг перпендикулярной его поверхности главной оси инерции, совпадающей с вертикалью. Уравнение поверхности тела при $\gamma_3 = 1$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}) = x_3 + a_3 - \frac{(x_1 \cos \delta + x_2 \sin \delta)^2}{2a_1} - \frac{(x_1 \sin \delta - x_2 \cos \delta)^2}{2a_2} + O_3(x_1, x_2), \quad (7)$$

где a_1 , a_2 – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке контакта, a_3 – высота центра масс, δ – угол между векторами главных кривизн и главными осями. Рассматриваемое тело является кельтским камнем [2], если выполнены соотношения $A_1 \neq A_2$, $a_1 \neq a_2$, $\delta \neq 0$ ($\text{mod } \pi/2$).

Хорошо известны [2, 3] условия устойчивости решений (6) в случае неголономной постановки задачи, одним из которых является отрицательное направление вращения. В случае произвольного коэффициента вязкого трения линеаризованные уравнения возмущенного движения системы в окрестности решений (6) довольно громоздки [2] и аналитический анализ условий устойчивости затруднителен. Однако соответствующие области устойчивости при фиксированных параметрах задачи могут быть построены численно [5].

2. Движения в окрестности устойчивых равновесий

Будем считать, что параметры кельтского камня таковы, что соответствующие (6) равновесия устойчивы, т.е. без ограничения общности будем считать, что выполнены соотношения [2]:

$$a_1 > a_2 > a_3, \quad J_1 < J_2 < J_3. \quad (8)$$

Тогда при любом коэффициенте вязкого трения в некоторой окрестности значения $\omega_3 = 0$ существует область устойчивости вращений (6). Например, для кельтского камня с параметрами

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.0706 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad A_2 = 0.443 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad A_3 = 0.49 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \\ a_1 &= 0.74 \text{ м}, \quad a_2 = 0.0666 \text{ м}, \quad a_3 = 0.00765 \text{ м}, \quad m = 0.1 \text{ кг}, \quad \delta = 0.7 \end{aligned} \quad (9)$$

этая область представлена на рис. 1.

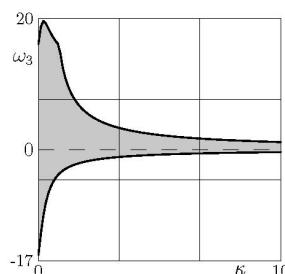


Рис. 1

Рассмотрим движение в окрестности устойчивых равновесий, считая движение безотрывным. Тогда уравнения (1)–(3) с учетом (5) допускают интеграл (4) и геометрический интеграл $(\gamma, \gamma) = 1$, позволяющие исключить переменные v_3 и γ_3 и соответствующие им уравнения. Остальные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= -\omega_2 + \Gamma_1, \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_1 + \Gamma_2, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{mg}{A_1} (\gamma_2 a_3 - b_3 \gamma_1 - b_2 \gamma_2) - \frac{\kappa a_3}{A_1} (\omega_1 a_3 + v_2) + \Omega_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{mg}{A_2} (-\gamma_1 a_3 + b_3 \gamma_2 + b_1 \gamma_1) - \frac{\kappa a_3}{A_2} (\omega_2 a_3 - v_1) + \Omega_2, \\ \dot{v}_1 &= \frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_2 - v_1) + V_1, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_1 + v_2) + V_2,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_3 &= \frac{A_1 - A_2}{A_3} \omega_2 \omega_1 + \frac{mg}{A_3} (b_3 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - (b_1 - b_2) \gamma_2 \gamma_1) + \\ &+ \frac{\kappa \omega_3}{A_3} \left(\frac{a_1 a_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) (b_1^2 + b_2^2)}{(a_1 + a_2)^2} - (b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2) (b_1 + b_2) - 2 b_3 (a_1 + a_2) \gamma_1 \gamma_2 \right) + \\ &+ \frac{\kappa b_3}{A_3} (a_3 (\omega_2 \gamma_1 + \omega_1 \gamma_2) - (v_1 \gamma_1 - v_2 \gamma_2)) + \\ &+ \frac{\kappa}{A_3} (a_3 (b_1 \omega_1 \gamma_1 + b_2 \omega_2 \gamma_2) + b_1 v_2 \gamma_1 - b_2 v_1 \gamma_2),\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$b_1 = a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta, \quad b_2 = a_1 \sin^2 \delta + a_2 \cos^2 \delta, \quad b_3 = (a_1 - a_2) \sin \delta \cos \delta,$$

а Γ_i , Ω_i и V_i ($i = 1, 2$) функции, разложения которых по степеням переменных системы (10), (11) содержит только члены не ниже второго порядка этих переменных, а Ω_3 – члены не ниже четвертого.

Система (10) в случае $\Gamma_i = 0$, $\Omega_i = 0$ и $V_i = 0$ ($i = 1, 2$) замкнута и при $\kappa = 0$ описывает малые колебания кельтского камня на абсолютно гладкой плоскости. Частоты этих колебаний ($\xi_1 > \xi_2 > 0$) являются корнями уравнения

$$A_1 A_2 \xi^4 + mg (A_1 (b_1 - a_3) + A_2 (b_2 - a_3)) \xi^2 + m^2 g^2 (a_1 - a_3)(a_3 - a_2) = 0.$$

Рассмотрим замену переменных вида

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \rho_1 \cos \varphi_2 - \frac{mg b_3}{mg (b_1 - a_3) - A_2 \xi_1^2} \rho_2 \sin \varphi_2, \\ \gamma_2 &= -\frac{mg b_3}{mg (b_2 - a_3) - A_1 \xi_2^2} \rho_1 \cos \varphi_2 + \rho_2 \sin \varphi_1, \\ \omega_1 &= \frac{mg \xi_2 b_3}{mg (b_2 - a_3) - A_1 \xi_2^2} \rho_1 \sin \varphi_2 + \xi_1 \rho_2 \cos \varphi_1, \\ \omega_2 &= \xi_2 \rho_1 \sin \varphi_2 + \frac{mg \xi_1 b_3}{mg (b_1 - a_3) - A_2 \xi_1^2} \rho_2 \cos \varphi_1,\end{aligned}$$

считая малым отклонение от равновесий ($\rho_i \ll 1$, $\omega_3/\xi_i \ll 1$ ($i = 1, 2$)) и коэффициент трения ($\kappa/(m \xi_i) \ll 1$ ($i = 1, 2$)). Тогда в системе (10), (11), записанной в новых переменных без учета слагаемых Γ_i , Ω_i , V_i ($i = 1, 2$) и Ω_3 , переменные ρ_1 и ρ_2 являются медленными, а φ_1 и φ_2 – быстрыми. Величина ω_3 при этом также является медленной переменной, т.к. в отсутствии трения решения уравнений движения выпуклого тела на гладкой плоскости являются условно-периодическими функциями времени [6] и первое слагаемое правой части (11) в среднем не меняется.

Считая нерезонансными значения ξ_1 и ξ_2 и осредняя указанные уравнения по быстрым переменным получим

$$\dot{\rho}_1 = -\alpha_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\alpha_2 \rho_2, \quad \dot{\omega}_3 = -(\beta_1 \rho_1^2 + \beta_2 \rho_2^2) \omega_3, \quad (12)$$

где постоянные коэффициенты α_i , β_i ($i = 1, 2$) определяются равенствами

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\kappa a_3^2}{2 A_{3-i}} \left(1 + \frac{m^2 g^2 b_3^2 (A_i - A_{3-i})}{A_1 A_2 \xi_1^2 \xi_2^2 - mg (A_1 \xi_2^2 (b_1 - a_3) + A_2 \xi_1^2 (b_2 - a_3)) + m^2 g^2 (a_1 - a_3)(a_3 - a_2)} \right), \\ \beta_i &= \left[(a_i^2 \cos^2 \delta + a_{3-i}^2 \sin^2 \delta) A_i^2 \xi_{3-i}^{-4} + (a_1^2 a_2^2 - 2 a_1 a_2 a_3 b_i + a_3^2 (a_i^2 \sin^2 \delta + a_{3-i}^2 \cos^2 \delta)) m^2 g^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 (a_3 (a_i^2 \cos^2 \delta + a_{3-i}^2 \sin^2 \delta) - 2 a_1 a_2 b_i) A_i \xi_{3-i}^2 g m \right] / (2 A_3 (mg (b_{3-i} - a_3) - A_i \xi_{3-i}^2)^2).\end{aligned}$$

Поскольку уравнения (12) не содержат переменных v_1 и v_2 , соответствующие уравнения не приводятся. Решая систему (12), получим

$$\begin{aligned}\rho_1(t) &= \rho_1(0) \exp(-\alpha_1 t), \quad \rho_2(t) = \rho_2(0) \exp(-\alpha_2 t), \\ \omega_3(t) &= \omega_3(0) \exp\left(-\frac{\beta_1}{2\alpha_1}(\rho_1(0)^2 - \rho_1(t)^2) - \frac{\beta_2}{2\alpha_2}(\rho_2(0)^2 - \rho_2(t)^2)\right).\end{aligned}\quad (13)$$

На рис. 2 представлены зависимости величины ω_3 от времени при интегрировании уравнений (10), (11) (серые кривые) для кельского камня с параметрами (9) на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0.4$ кг/с при начальных условиях

$$\gamma_3(0) = 0.99, \quad \gamma_1(0) = 0, \quad \omega_3(0) = \pm 15 \text{ рад/с}, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0$$

(величина $\gamma_1(0)$ определялась геометрическим интегралом) и соответствующая зависимость (13) (черные кривые).

На рис. 3 представлены те же результаты для меньшего значения начальной угловой скорости ($\omega_3(0) = \pm 1$ рад/с). Как и следовало ожидать, решение точной системы представляет собой сумму плавно меняющейся медианы, хорошо совпадающей с решением осредненной системы и быстро осциллирующей затухающей компоненты. Заметим, что изменение абсолютной величины ω_3 в решении осредненной системы не зависит от ее знака, и существенных отличий в решениях точной системы при противоположных начальных направлениях вращения не наблюдается.

Следует отметить, что возможно отклонение среднего значения точного решения от решения осредненной системы (на величину первого порядка малости). Для тех же параметров задачи отклонение наблюдается (см. рис. 4, 5) при начальных условиях

$$\gamma_3(0) = 0.97, \quad \omega_3(0) = \pm 1 \text{ рад/с}, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0,$$

где значения $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(0)$ определяются равенствами $\rho_1(0) = 0$ (рис. 4) и $\rho_2(0) = 0$ (рис. 5).

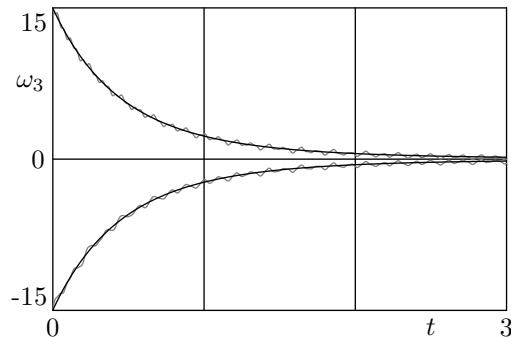


Рис. 2

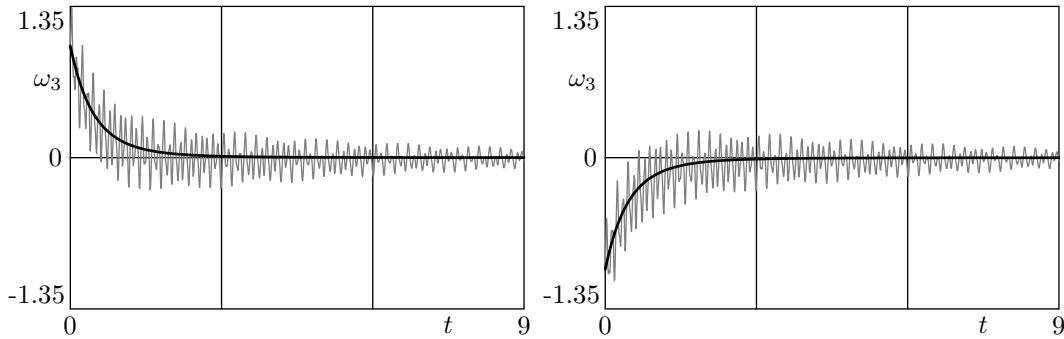


Рис. 3

Таким образом, несмотря на то, что финальное значение ω_3 решения усредненной системы (13) совпадает по знаку с начальным, соответствующее решение полной системы (10), (11) может поменять знак как с положительного на отрицательный, так и наоборот.

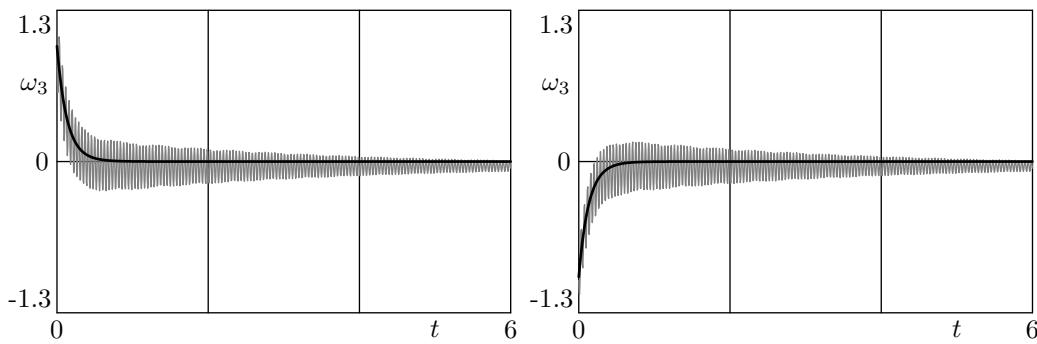


Рис. 4

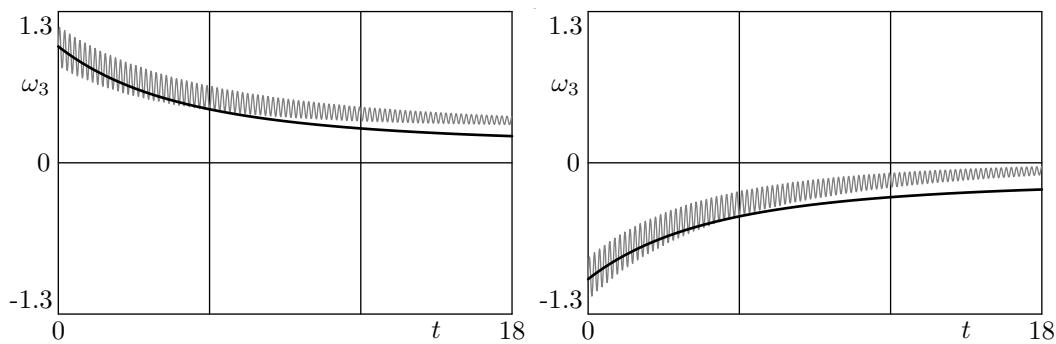


Рис. 5

Соответствующие результаты при тех же начальных условиях, что и в предыдущем случае, но при $\kappa = 1$ кг/с представлены на рис. 6.

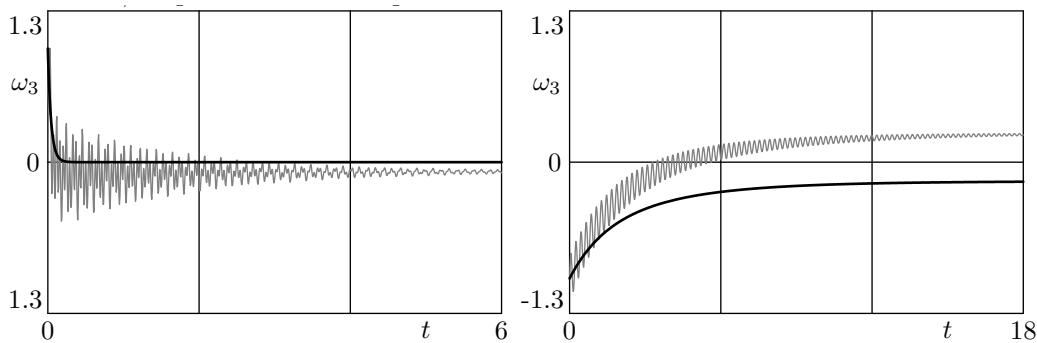


Рис. 6

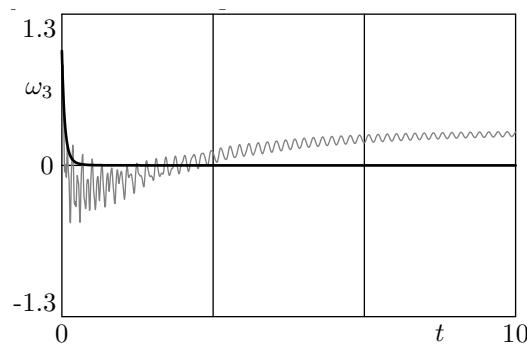


Рис. 7

Кроме того, при интегрировании точных уравнений движения (10), (11) может наблюдаться несколько смен знака не только величины ω_3 , но и ее среднего значения. Соответствующее решение при $\kappa = 3$ кг/с представлено на рис. 7.

В заключение заметим, что при выполнении неравенств (8) резонанс $\xi_1 = \xi_2$ невозможен. Но существуют такие параметры задачи, при которых величины ξ_1 и ξ_2 принимают относительно близкие значения, что позволяет при некотором классе начальных условий оценить финальное значение решения точной системы [7]. Кроме того, возможны случаи $\xi_1/\xi_2 \in Q$. Тогда осредненная система имеет аналогичный (12) вид и качественно динамика совпадает с рассмотренным случаем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».

Литература

1. Walker J. The mysterious «ratterback»: a stone spins in one direction and then reverses // Scientific american. 1979. № 10. P. 144–149.
2. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. Москва : Эдиториал УРСС , 1998. 168 с.
3. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. Москва : Наука, Физматлит, 1992. 336 с.
4. Климов Д.М., Журавлев В.Ф. Глобальное движение кельтского камня // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 8–16.
5. Муницаина М.А. Численное исследование динамики кельтского камня на плоскости с вязким трением // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 1. С. 137–142.
6. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London : Macmillan, 1884. 343 p.
7. Муницаина М.А. Динамика кельтского камня на плоскости с вязким трением // Автоматика и телемеханика (направлено в редакцию).

References

1. Walker J. The mysterious «ratterback»: a stone spins in one direction and then reverses // Scientific american. 1979. № 10. P. 144–149. (in Russian).
2. Karapetyan A. V. Stability of steady motions. Moscow : Editorial URSS, 1998. (in Russian).
3. Markeev A.P. The dynamics of the body osculating with a solid surface. Moscow : Nauka, Fizmatlit, 1992. (in Russian).
4. Klimov D.M., Zhuravlev V.P. Global motion of the celt. Izvestia RAS. Mechanics of Solids. 2008. V. 43, N 3. P. 8–16.
5. The numerical study of dynamics of the celt on a horizontal plane with viscous friction. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 1. P. 137–142. (in Russian).
6. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London : Macmillan, 1884. 343 p.
7. Munitsyna M.A. Dynamics of the celt on a horizontal plane with viscous friction. Avtomatika i Telemekhanika (sent to the editors). (in Russian).

УДК 532.517

Д. Н. Константинов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

**Описание перехода турбулентности через скачок
уплотнения на базе моделей турбулентности
класса DRSM**

Цель работы заключается в выборе оптимальной модели турбулентности класса DRSM и дальнейшей ее модификации, которая позволит правильно описывать основные характеристики турбулентности при проходе потока через прямой скачок уплотнения. Изучена сходимость численных схем, рассчитывающих систему уравнений для напряжений Рейнольдса. Произведено модифицирование модели SSG и показана необходимость моделирования корреляции «давление-дивергенция скорости» с целью правильного описания перехода турбулентности через зону сжатия. Продемонстрирована независимость напряжений Рейнольдса от формы профиля среднего поля скорости.

Ключевые слова: турбулентность, обменный член, скачок уплотнения, DRSM, SWTI.

D. N. Konstantinov

Moscow Institute of Physics and Technology

**Description of the normal shock wave-turbulence
interaction based on turbulence DRSM models**

The aim of the work is to choose the optimal differential Reynolds stress model (DRSM) and its further modification, which correctly describe the main characteristics of turbulence downstream of the interaction with a normal shock wave. The convergence of numerical schemes solving the Reynolds stress equation is studied. Modification of the SSG model is made and the necessity of modeling the «pressure-dilatation» correlation is shown to correctly describe the transition of turbulence through a compression zone. The independence of the Reynolds stresses on the shape of the profile of the mean velocity field is demonstrated.

Key words: turbulence, exchange term, shock wave, DRSM, SWTI.

1. Введение

Корректное описание усиления турбулентности при переходе через прямой скачок уплотнения на базе уравнений Рейнольдса (далее — SWTI — shock-wave turbulence interaction) — не решенная до сих пор задача. Существует множество примеров возникновения этого фундаментального явления: при сверхзвуковом обтекании самолета, ядерных взрывах и т.д. Конкретными примерами для практических задач аэродинамики являются недорасширенная струя и псевдоскачок в канале, в которых турбулентный поток проходит сложную ударно-волновую структуру.

Модели турбулентности, основанные на гипотезе Буссинеска, часто дают решение, зависящее от шага сетки h , причем коэффициент усиления может стремиться как к нулю,

так и к бесконечности при $h \rightarrow 0$ [1]. С другой стороны, дифференциальные модели для напряжений Рейнольдса (DRSM — Differential Reynolds Stress Models) могут давать сеточно-независимое решение [1], что и обуславливает их выбор в данной статье.

Первой полноценной DRSM-моделью турбулентности стала линейная модель Лаундера–Риса–Роди [2] 1975 г., получившая мировую известность и ставшая использоваться повсеместно в инженерных задачах. После 15 лет развития этой области, в 1991 году Специаль, Саркар и Гатский выпустили статью, в которой была предложена ставшая популярной квадратичная модель обменного члена [3]. В 1998 г. Крафт совместно с Лаундером предложили кубическую модель обменного члена [4], позволяющую корректно описать пристенную часть турбулентного пограничного слоя практически без эмпирических поправок. Все эти модели были предложены для несжимаемых течений. Однако в инженерных расчетах задач со скачками уплотнения, где проявляются сильные эффекты сжимаемости турбулентности, эти модели часто используются без дополнительной калибровки, что и влечет за собой грубые ошибки в финальных результатах. На данный момент существует работа 2019 г. [5], в которой предложена модификация моделей, устраняющая завышение кинетической энергии турбулентности на скачках уплотнения [1]. В настоящей работе этот недостаток будет исправлен через модификацию обменного члена и моделирование корреляции «давление-дивергенция скорости».

2. Постановка задачи

2.1. Система уравнений

В работе проводится исследование поведения турбулентности при переходе через прямой скачок уплотнения, ориентированный перпендикулярно оси x . Ищется стационарное решение одномерных дифференциальных уравнений для напряжений Рейнольдса $R_{ij} = \widetilde{u''_i u''_j}$ [1], [6] на фоне зафиксированного среднего поля скорости, соответствующего слаженному скачку. Ширина слаженного скачка определяется областью, в которой мгновенный скачок совершает колебания. Уравнения для напряжений Рейнольдса, осредненные по Фавру [7], представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\bar{\rho} R_{ij} \tilde{u}_k - \mu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} + \overline{\rho u''_i u''_j u''_k} + \overline{p' (u''_i \delta_{jk} + u''_j \delta_{ik})} \right] = \\ = -\bar{\rho} \underbrace{\left(R_{ik} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + R_{jk} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{\bar{\rho} P_{ij}} - \tau'_{ik} \frac{\partial u''_j}{\partial x_k} + \tau'_{jk} \frac{\partial u''_i}{\partial x_k} + \underbrace{2 p' \left(S''_{ij} - \frac{1}{3} d'' \delta_{ij} \right)}_{\bar{\rho} \Pi_{ij}} + \underbrace{\frac{2}{3} \overline{p' d''} \delta_{ij} - C_{ij}(\bar{u}'_\alpha)}_{\bar{\rho} W_{ij}}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $\bar{\rho}$ — плотность, u — скорость, μ — коэффициент вязкости, d — дивергенция скорости, τ'_{ij} — пульсации тензора вязких напряжений, p' — пульсации давления, $\bar{\rho} P_{ij}$ — производство напряжений Рейнольдса, δ_{ij} — символ Кронекера, S''_{ij} — пульсации тензора скоростей деформаций, $\bar{\rho} \Pi_{ij}$ — член, отвечающий за обмен энергией между пульсациями в различных направлениях (тензор с нулевым следом), $\bar{\rho} W_{ij}$ — обмен между внутренней энергией газа и энергией пульсаций (корреляция «давление-дивергенция»), $C_{ij}(\bar{u}'_\alpha)$ — функция от средних пульсаций скорости.

2.2. Физическая картина явления

В идеальных условиях скачок уплотнения занимает ширину порядка длины свободного пробега молекулы (примерно 10^{-7} м при нормальных условиях). В реальности же, скачок колеблется в пространстве под действием возмущений в набегающем потоке. Эти колебания он совершает в области, большей длины свободного пробега молекулы на несколько порядков! Значит при осреднении по времени скачок будет занимать некую конечную область (непрерывную зону сжатия). После такого осреднения поперечная и вертикальная компоненты скорости станут нулевыми, а задача станет статистически одномерной: хоть

турбулентность и является трехмерным явлением, ее статистические характеристики будут зависеть только от продольной координаты (рис. 1).

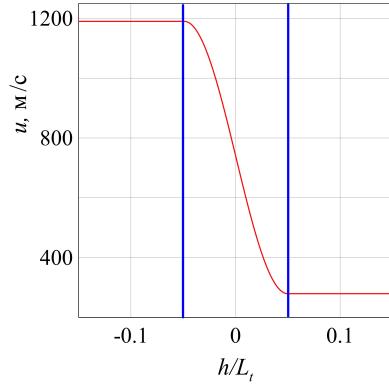


Рис. 1. Характерный профиль средней скорости в окрестности зоны сжатия. Вертикальными линиями выделена область колебаний скачка уплотнения

Задача имеет важную характерную особенность. Поток проходит область больших градиентов скорости $|d\bar{u}/dx|^{-1}$ в течение короткого времени $\tau \sim |d\bar{u}/dx|^{-1}$, поэтому всеми процессами, чьи масштабы времени намного больше τ , можно пренебречь. Это процессы диссиpации, молекулярного и турбулентного переноса.

2.3. Упрощение системы уравнений

Согласно теории RDT (rapid distortion theory – теория быстрой деформации) [8], при наложении сильных градиентов G среднего поля скорости на турбулентность, чьи масштабы времени велики по сравнению с $|G^{-1}|$, все члены, не зависящие от $\partial\tilde{u}_i/\partial x_j$, не влияют на описание течения. Настоящая задача соответствует предположениям RDT, что позволяет существенно упростить уравнения. Геометрия градиентов в задаче следующая (рис. 1):

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} d\tilde{u}/dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для тензора напряжений Рейнольдса (1) упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{xx}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} &= -2R_{xx} \frac{d\tilde{u}}{dx} + \Pi_{xx}, \\ \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x} &= -\frac{1}{2}\Pi_{xx}. \end{aligned}$$

При их выводе было учтено уравнение неразрывности $\bar{\rho}_t + (\bar{\rho}\tilde{u})_x$, что позволило исключить функцию плотности из системы. Также, так как след обменного члена равен нулю по определению и в силу инвариантности уравнений относительно преобразования поворота вокруг продольной оси следует, что $\Pi_{yy} = \Pi_{zz} = \Pi_{\tau\tau} = -1/2\Pi_{xx}$.

Сглаженный скачок занимает 5–10% от всей расчетной области в зависимости от выбранного профиля скорости. Принимается, что значения слева и справа от этой зоны соответствуют невязкому соотношению Ранкина–Гюгонио для прямого скачка [9].

На входной границе слева задается изотропная турбулентность:

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k_1\delta_{ij}.$$

Индекс 1 обозначает значение слева от области, занимаемой скачком. Правая граница является свободной (используется граничное условие сноса потока).

Для замыкания обменного члена были использованы модификации полуэмпирических моделей LRR [2], SSG [3] и TCL [4], в которых тензор скоростей деформации

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

заменен на тензор

$$\tilde{S}_{ij}^{(0)} = S_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} \delta_{ij},$$

сохраняющий нулевой след в сжимаемом течении. В сделанных выше предположениях модели приобретают вид

- LRR

$$\Pi_{xx} = \frac{8}{15} \frac{d\tilde{u}}{dx} k + \frac{9C_2 + 6}{11} \frac{2}{3} \frac{d\tilde{u}}{dx} k a_{xx}, \\ C_2 = 0.4,$$

- SSG

$$\Pi_{xx} = C_1^* \frac{d\tilde{u}}{dx} R_{xx} a_{xx} + \left(C_3 - C_3^* \sqrt{3/2} a_{xx} \right) \frac{2}{3} \frac{d\tilde{u}}{dx} k + C_4 \frac{2}{3} \frac{d\tilde{u}}{dx} k a_{xx}, \\ C_1^* = 0.9, C_3 = 0.8, C_3^* = 0.65, C_4 = 0.625,$$

- TCL

$$\Pi_{xx} = \frac{8}{15} \frac{d\tilde{u}}{dx} k + 0.6 \frac{d\tilde{u}}{dx} k \cdot \left(\frac{2}{3} a_{xx} + \frac{R_{xx}}{k} a_{xx} - a_{xx}^2 \right),$$

где $a_{ij} = (R_{ij} - (2k/3) \delta_{ij}) / k$ — тензор анизотропии напряжений Рейнольдса.

Настоящая задача в сделанных выше предположениях не имеет пространственного масштаба, поэтому все расстояния на графиках были нормированы на интегральный масштаб турбулентности $L_t = k^{3/2}/\varepsilon$ ($L_t = 1$ мм). Это было сделано для удобства сравнения с данными DNS, где было принято такое же обезразмеривание.

3. Численный метод

Решение задачи находится конечно-разностным методом. Рассматривается равномерная расчетная область с шагом сетки h . Количество узлов равно $N + 1$.

В качестве пространственной аппроксимации используются:

- для конвективных членов — upwind-схема 2 порядка аппроксимации;
- для источниковых членов — центральная разность 2 порядка.

В качестве временной аппроксимации рассматривается явная одностадийная схема (метод Эйлера) 1 порядка точности. Для шага по времени использовано конвективное условие устойчивости [10]

$$\Delta t \leq \frac{h}{\max_{i=0,N} \tilde{u}_i}.$$

Таким образом, конечно-разностная схема [11], [12] выглядит следующим образом:

$$\frac{Rxx_i^{m+1} - Rxx_i^m}{\Delta t} + \tilde{u}_i \frac{Rxx_{i-2}^m - 4Rxx_{i-1}^m + Rxx_i^m}{2h} = -2Rxx_i^m \frac{\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1}}{2h} + \Pi_{xx_i^m}, \\ \frac{Ryy_i^{m+1} - Ryy_i^m}{\Delta t} + \tilde{u}_i \frac{Ryy_{i-2}^m - 4Ryy_{i-1}^m + Ryy_i^m}{2h} = -\frac{1}{2} \Pi_{xx_i^m}.$$

Все значения размерных величин задаются в системе СИ.

4. Профиль скорости

Для задания начальных условий использованы три различных профиля среднего поля скорости:

- линейное распределение

$$u = A + Bx,$$

- синусоидальное распределение

$$u = A + B \sin(Cx + D),$$

- распределение вида гиперболический тангенс

$$u = A + B \tanh(Cx + D),$$

где A, B, C, D — константы.

Коэффициенты в профилях подобраны так, чтобы для всех профилей максимальный угол наклона графика был одинаковым (рис. 2).

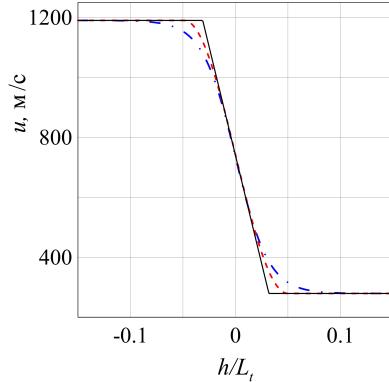


Рис. 2. Профили скорости в зоне сжатия, соответствующей скачку $M = 3.5$. Сплошная линия — линейный, пунктир — синус, штрихпунктир — гиперболический тангенс

На рис. 2 изображена часть расчетной области, содержащая зону непрерывного сжатия. При линейном распределении скачок занимает наименьшую область, при распределении вида гиперболический тангенс — наибольшую.

5. Сходимость метода

В данном разделе была исследована сходимость метода по заданному количеству точек на скачок уплотнения. Для обменного члена использовано замыкание SSG [3]. Профиль скорости внутри скачка уплотнения был взят синусоидальным.

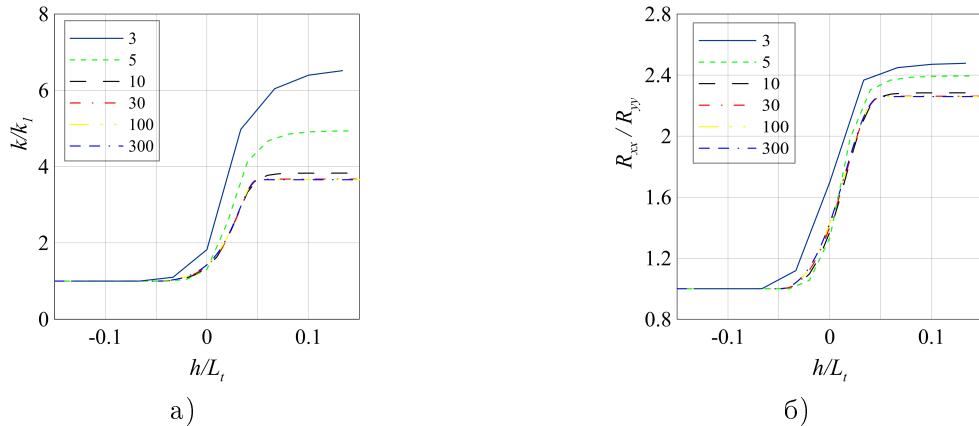


Рис. 3. Распределение кинетической энергии турбулентности (а) и анизотропии турбулентности (б) в скачке. На легенде указано количество точек, выделяемых на скачок уплотнения. Режим течения $(M, M_t) = (3.5, 0.16)$

На левом графике (рис. 3а) изображено поведение кинетической энергии турбулентности вдоль линий тока в зависимости от количества точек, выделенных на зону скачка. Как видно, при выделении на зону скачка 10 и 30 точек, расхождение в результатах минимально. Более того, графики с 30, 100 и 300 точками на зону скачка совпадают. Следовательно, при выделении на скачок более 30 точек решение перестает зависеть от густоты сетки. Аналогичную ситуацию можно наблюдать на правом графике (рис. 3б), где приведены распределения анизотропии турбулентности.

6. Независимость коэффициентов усиления R_{xx} и R_{yy} от формы профиля скорости

Рассмотрим некоторые характеристики турбулентности, полученные на одной сетке для разных профилей скорости (рис. 4). Для обменного члена использовано замыкание SSG. Видно, что значения, полученные за скачком, действительно не зависят от заданного профиля скорости.

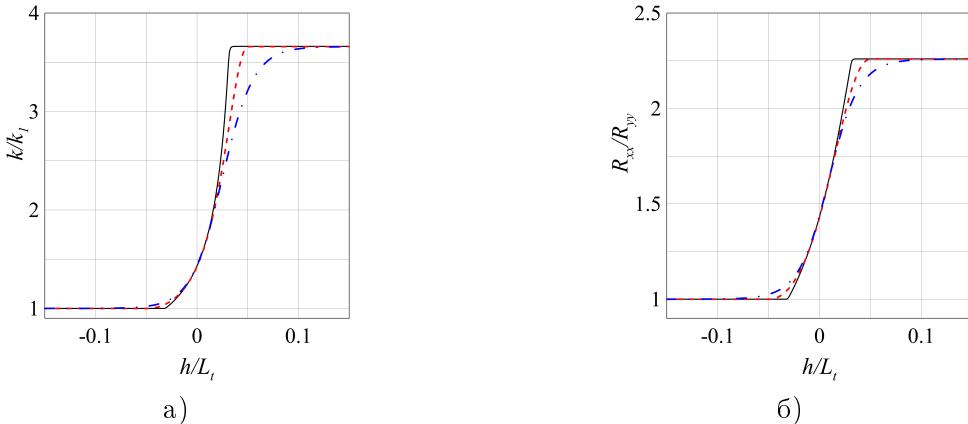


Рис. 4. Профили кинетической энергии турбулентности (а) и анизотропии пульсаций (б) вдоль линии тока. Обозначения как на рис. 2

Далее поле внутри скачка будет задаваться по синусоиде, т.к. нас интересуют лишь значения напряжений Рейнольдса за скачком уплотнения.

7. Решение по стандартным моделям LRR, SSG, TCL

В данном разделе рассмотрим решения, полученные по стандартным моделям турбулентности, и сравним их с имеющимися экспериментальными данными [13].

В данных DNS можно наблюдать сильную немонотонность профиля кинетической энергии турбулентности и анизотропии, которые из-за ошибок аппроксимации зависят от локального профиля скачка. В настоящей задаче имеет смысл использовать значения, выходящие «на полку», так как они не зависят от формы скачка.

На рис. 5а изображен профиль кинетической энергии турбулентности вдоль линий тока. Как видно из графика, все стандартные модели показывают примерно один и тот же результат, который дает расхождение с данными DNS [13] (скорректированными на эффекты диссипации) более чем в 2 раза. На рис. 5б показана анизотропия турбулентности. Все модели турбулентности предсказывают усиление анизотропии в 2.2–2.5 раза, тогда как данные DNS показывают усиление в 1.4 раза. Заметим, что модель LRR, являющаяся самой простой из рассмотренных, дает наибольшую ошибку в анизотропии, тогда как модели SSG и TCL показывают практически идентичные результаты.

Посмотрим на зависимости параметров турбулентности от числа Маха скачка уплотнения.

На рис. 6а изображен коэффициент усиления кинетической энергии. Видно, что все три стандартные модели дают практически идентичные результаты. Уже при числе Маха больше 1.5 можно наблюдать заметное расхождение с экспериментом, которое увеличивается по мере увеличения числа Маха. Аналогичная ситуация происходит на правом графике (рис. 6б), где показан коэффициент анизотропии, посчитанный за зоной скачка в зависимости от числа Маха. Здесь также значительное расхождение с данными DNS.

Из данных эксперимента (рис. 6а) видна тенденция кинетической энергии турбулентности выходить «на полку» при числе Маха больше 3, в то время как все модели турбулентности предсказывают постоянный рост k . Для анизотропии турбулентности (рис. 6б)

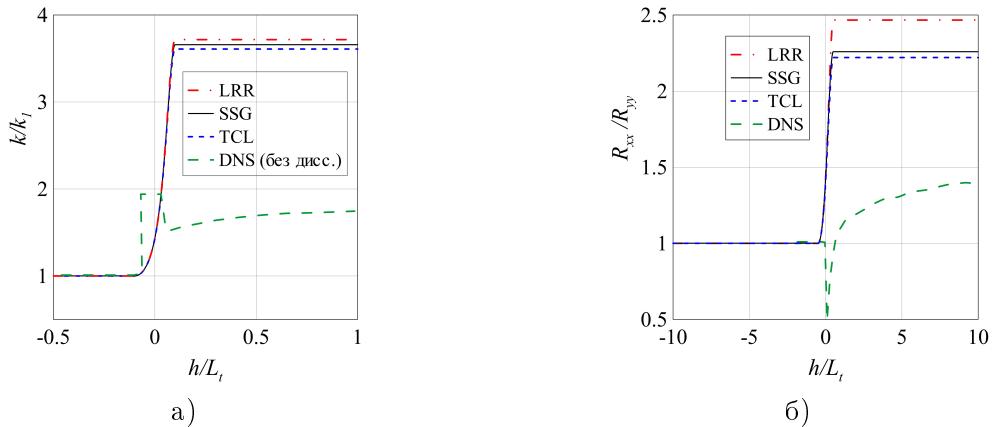


Рис. 5. Расчет по стандартным моделям кинетической энергии турбулентности (а) и анизотропии турбулентности (б) вдоль линий тока. $(M, M_t) = (3.5, 0.16)$

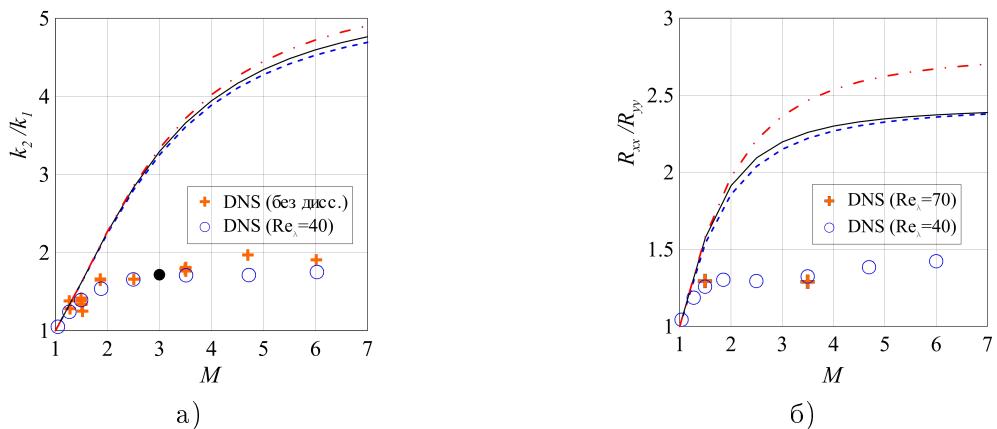


Рис. 6. Расчет по стандартным моделям коэффициента усиления кинетической энергии турбулентности (а) и анизотропии турбулентности (б) при разных числах Маха скачка. Сплошная линия — SSG, пунктир — TCL, штрихпунктир — LRR. Чёрная точка — эксперимент Барре и др. [14]. $M_t = 0.16$

стандартные модели при числе Маха больше 3 дают лишь слабый дальнейший рост анизотропии.

Таким образом, модификация DRSM-моделей в задаче SWTI необходима. Следующим шагом будет выбор замыкания для обменного члена и последующая перекалибровка модели для правильного предсказания параметров турбулентности.

8. Модификация модели

Как уже было отмечено, авторы каждой из моделей LRR [2], SSG [3] и TCL [4] не учитывали влияние дивергенции скорости на обменный член и игнорировали корреляцию «давление-дивергенция скорости». Это естественно, так как они рассматривали несжимаемое течение, а в нем дивергенция скорости равна нулю. Позже, в расчетах сжимаемых течений, традиция использовать модели без поправок на сжимаемость сохранилась. Как мы увидели в предыдущем разделе, в задаче SWTI это приводит к неприемлемым результатам расчета. Добавим в одну из рассмотренных моделей члены, зависящие от дивергенции скорости. Заметим, что тем самым мы не нарушим описание несжимаемых течений, где дивергенция скорости равна нулю.

В выражение для обменного члена следует, как минимум, добавить слагаемое, линейное относительно $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}$ и тензора анизотропии напряжений. Из соображений размерности такое

слагаемое имеет вид

$$C_{div}^1 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} k a_{ij}, C_{div}^1 = \text{const.}$$

Заметим, что если рассмотреть уравнение для кинетической энергии турбулентности $k = R_{ii}/2$,

$$\frac{\partial k}{\partial x} + \tilde{u} \frac{\partial k}{\partial x} = -R_{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\Pi_{ii}}{2}}_{\equiv 0} = - \left(k a_{xx} + \frac{2}{3} k \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = - \frac{2}{3} k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - k a_{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x},$$

то станет видно: из-за того, что обменный член является тензором с нулевым следом, внесение предложенного выше слагаемого не повлияет напрямую на описание средней кинетической энергии турбулентности.

Далее, в сжимаемых течениях след выражения $\overline{2p' S''_{ij}} = \overline{2p'd''}$ не равен нулю. Следовательно, в общем случае нужно учесть влияние $\overline{p'd''}$. В отличие от Π_{ij} , этот член попадает в уравнение для кинетической энергии турбулентности и может напрямую влиять на коэффициент усиления k на скачке.

8.1. Корреляция «давление-дивергенция»

Будем моделировать $\overline{p'd''}/\bar{\rho}$ на основании теории размерности. Размерность этого выражения равна $\text{м}^2/\text{с}^3$. Значит, модель следует составить из инвариантов определяющих величин, дающих правильную размерность. Выберем инварианты R_{ij} , имеющего размерность $\text{м}^2/\text{с}^2$ и $\partial \tilde{u}_i / \partial x_j = \text{с}^{-1}$. Если ограничиться линейными инвариантами $R_{ii} = 2k$ и $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = d\tilde{u}/dx$, то единственной возможной замыкающей моделью будет выражение

$$C_{pd} k \frac{d\tilde{u}}{dx}, C_{pd} = \text{const.}$$

При калибровке констант будем использовать модель обменного члена SSG [3]. Этот выбор обусловлен ее популярностью в инженерных расчетах.

Система уравнений, требующая калибровки, окончательно принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{xx}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial R_{xx}}{\partial x} &= -2R_{xx} \frac{d\tilde{u}}{dx} + \Pi_{xx} + C_{pd} k \frac{d\tilde{u}}{dx}, \\ \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial R_{\tau\tau}}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \Pi_{xx} + C_{pd} k \frac{d\tilde{u}}{dx}, \\ \Pi_{xx} &= 0.9 \frac{d\tilde{u}}{dx} R_{xx} a_{xx} + \left(0.8 - 0.65 \sqrt{3/2} a_{xx} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{d\tilde{u}}{dx} k + 0.625 \cdot \frac{2}{3} \frac{d\tilde{u}}{dx} k a_{xx} + C_{div}^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} k a_{xx}. \end{aligned}$$

8.2. Калибровка модели

Константы C_{div}^1 и C_{pd} будем калибровать на одном режиме с числом Маха, равным 3.5, и турбулентным числом Маха 0.16. Ожидается, что константа C_{pd} в основном будет влиять на усиление кинетической энергии турбулентности, а константа C_{div}^1 — на анизотропию напряжений Рейнольдса за скачком уплотнения.

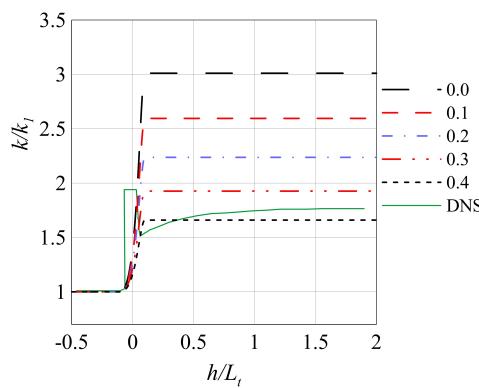


Рис. 7. Профили кинетической энергии турбулентности для различных C_{pd} . Во всех расчетах задано $C_{div}^1 = 4.9$. $(M, M_t) = (3.5, 0.16)$

Согласно экспериментальным данным [13], на данном режиме усиление кинетической энергии турбулентности k_2/k_1 равно 1.77, а значение анизотропии напряжений R_{xx}/R_{yy} за скачком уплотнения составляет 1.35.

Посмотрев на рис. 7, можно увидеть, что, как и ожидалось, константа C_{pd} сильно влияет на величину кинетической энергии турбулентности за скачком. Это позволяет легко добиться корректного значения k_2/k_1 по модифицированной модели.

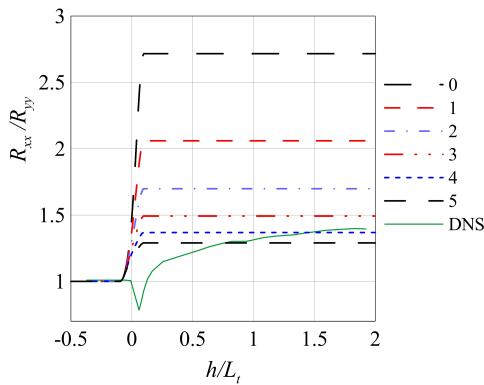


Рис. 8. Профили анизотропии турбулентности для различных C_{div}^1 . Во всех расчетах задано $C_{pd} = 0.4$. ($M, M_t = (3.5, 0.16)$)

На рис. 8 изображено поведение анизотропии турбулентности вдоль линий тока при различных C_{div}^1 . Мы видим прямое влияние этого коэффициента на значение анизотропии. Обменный член отвечает за перераспределение энергии между напряжениями Рейнольдса, а именно, в нем присутствует константа C_{div}^1 .

В результате калибровки методом покоординатного спуска [15] для модели SSG были получены следующие значения констант:

$$C_{div}^1 = 4.9, C_{pd} = 0.4.$$

Погрешность в предсказании коэффициента усиления кинетической энергии турбулентности составила менее 10%, а в предсказании анизотропии — менее 5%.

8.3. Результаты расчета по модифицированной модели

Сравним решения, полученные для стандартных моделей и модифицированной модели SSG при различных числах Маха скачка (рис. 9).

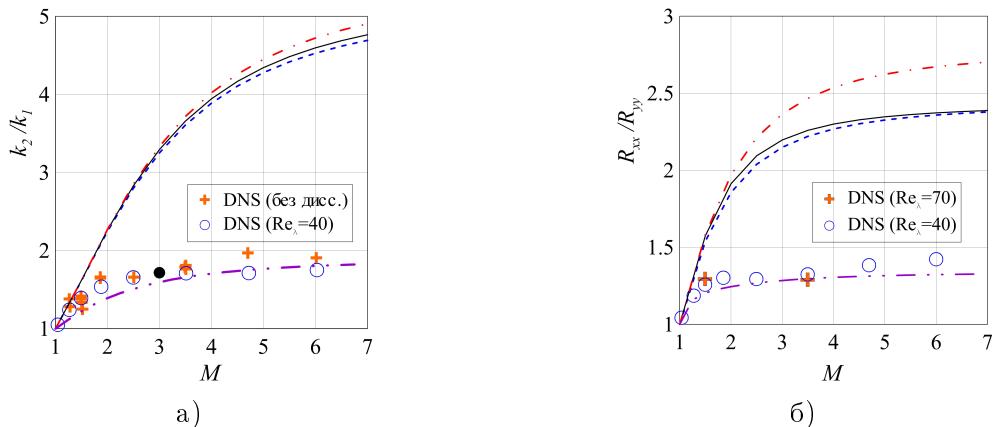


Рис. 9. Расчет по модифицированной модели SSG коэффициента усиления кинетической энергии турбулентности (а) и анизотропии турбулентности (б) при разных числах Маха скачка. Сплошная линия — SSG, пунктир — TCL, штрихпунктир — LRR, штрихпунктир с двумя точками — модифицированная модель. Чёрная точка — эксперимент Барре и др. [14]. $M_t = 0.16$

На левом графике (рис. 9а) показан коэффициент усиления кинетической энергии турбулентности как функция от числа Маха. Новая модель аппроксимирует эксперимент с погрешностью до 10% для всего диапазона значений M . На рис. 9б изображена анизотропия турбулентности в зависимости от числа Маха, которая приближает численные данные с погрешностью меньше 10%, однако при числе Маха больше 5 ошибка моделирования становится около 10%.

Данные результаты можно признать существенным уточнением модели SSG. Заметим, что калибровка проводилась только на одном режиме с числом Маха 3.5, однако этого хватило для согласования с данными DNS для всего диапазона M с точностью 10%.

9. Заключение

Настоящая работа позволяет сделать следующие выводы:

- 1) Стандартные DRSM-модели (LRR, SSG, TCL) завышают усиление кинетической энергии турбулентности на скачках с $M > 2$ как минимум в 2 раза, анизотропии — более чем в 2 раза.
- 2) Учет дивергенции скорости в обменном члене и корреляции «давление-дивергенция» позволяет достичь согласования с DNS с точностью 10%.
- 3) При расчетах течений со скачками уплотнения недостаточное (5 и менее ячеек) разрешение зоны скачка может приводить к перепроизводству кинетической энергии турбулентности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Трошину А. И. за помощь при создании настоящей работы.

Литература

1. Трошин А.И. Полуэмпирическая модель турбулентности для описания высокоскоростных слоев смешения и струй, не основанная на гипотезе Буссинеска. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Жуковский, 2015. 168 с.
2. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537–566.
3. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 245–272.
4. Craft T.J. Developments in a low-Reynolds-number second-moment closure and its application to separating and reattaching flows // Int. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 541–548.
5. Karl S., Hickey J.-P., Lacombe F. Reynolds Stress Models for Shock-Turbulence Interaction // 31st Int. Symp. Shock Waves 1. 2019. P. 511–517.
6. Cecora R.-D., Eisfeld B., Probst A., Crippa S., Radespiel R. Differential Reynolds stress modeling for aeronautics // AIAA paper 2012–0465.
7. Hanjalić K., Launder B. Modelling turbulence in engineering and the environment. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2011.
8. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000.
9. Крайко А.Н. Краткий курс теоретической газовой динамики. Москва : МФТИ, 2007.
10. Рябенъкий В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. Москва : Гостехиздат, 1956.

11. Fornberg B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids // Math. Computation. 1988. V. 51. P. 699–706.
12. Годунов С.К., Рябенъкий В.С. Разностные схемы. Москва : Наука, 1977.
13. Larsson J., Bermejo-Moreno I., Lele S.K. Reynolds-and Mach-number effects in canonical shock-turbulence interaction // J. Fluid Mech. 2013. V. 717. P. 293–321.
14. Barre S., Alem D., Bonnet J.P. Experimental study of a normal shock / homogeneous turbulence interaction // AIAA Journal 1995.
15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

References

1. Troshin A.I. A semi-empirical turbulence model for describing high-speed mixing layers and jets, which is not based on the Boussinesq hypothesis. Diss. for the degree of Cand. Techn. of Sciences. Zhukovsky, 2015. 168 p. (in Russian).
2. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 537–566.
3. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: An invariant dynamical systems approach. J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 245–272.
4. Craft T.J. Developments in a low-Reynolds-number second-moment closure and its application to separating and reattaching flows. Int. J. Heat Fluid Flow. 1998. V. 19. P. 541–548.
5. Karl S., Hickey J.-P., Lacombe F. Reynolds Stress Models for Shock-Turbulence Interaction. 31st Int. Symp. Shock Waves 1. 2019. P. 511–517.
6. Cecora R.-D., Eisfeld B., Probst A., Crippa S., Radespiel R. Differential Reynolds stress modeling for aeronautics. AIAA paper 2012-0465.
7. Hanjalić K., Launder B. Modelling turbulence in engineering and the environment. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2011.
8. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000.
9. Kraiko A.N. Short course of theoretical gas dynamics. Moscow : MIPT, 2007. (in Russian).
10. Ryabenkiy V.S., Filippov A.F. On the stability of difference equations. Moscow : Gostekhizdat, 1956. (in Russian).
11. Fornberg B. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. Math. Computation. 1988. V. 51. P. 699–706.
12. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. Difference schemes. Moscow : Nauka, 1977. (in Russian).
13. Larsson J., Bermejo-Moreno I., Lele S.K. Reynolds-and Mach-number effects in canonical shock-turbulence interaction. J. Fluid Mech. 2013. V. 717. P. 293–321.
14. Barre S., Alem D., Bonnet J.P. Experimental study of a normal shock / homogeneous turbulence interaction. AIAA Journal 1995.
15. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. Moscow : BINOM. Laboratoriya znanii, 2008. (in Russian).

УДК 519.6, 532.5.032

И. А. Максименко, А. Н. Хорин

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Течение вязкого газа в вертикальной трубе

Рассматривается течение вязкого газа в круглой трубе под действием силы тяжести. Давление считается постоянным. (Для реализации такого течения в земных условиях, при которых давление растет с высотой, необходимо либо искусственно создавать разрежение снизу (отсос воздуха насосом), либо нагнетать воздух сверху.) Для коэффициента вязкости используется формула Сазерленда, а для коэффициента теплопроводности используется формула, похожая на формулу Сазерленда и имеющая такую же точность. При надлежащем выборе входных параметров реализуется течение Пуазейлевского типа, в котором скорость, плотность и температура зависят только от расстояния до оси трубы (скорость направлена вдоль этой оси). В результате система уравнений движения вязкого газа, состоящая в общем случае из уравнений в частных производных, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Точное решение этой системы предлагается для верификации программ расчета течения вязкого газа.

Ключевые слова: точные решения, вязкий газ, уравнения Навье–Стокса, формула Сазерленда.

I. A. Maximenko, A. N. Khorin

Moscow Institute of Physics and Technology

Viscous gas flow in a vertical tube

We consider the viscous gas motion in a round tube under the gravity force. Gas pressure is supposed to be constant. (It is necessary to create a vacuum at the bottom (air suction by a pump) or air injection at the top for implementation of such a flow.) The Sutherland formula is used for the viscosity coefficient and a similar formula with the same rate of accuracy is used for the thermal conductivity coefficient. With an appropriate choice of input parameters, the Poiseuille kind flow occurs such that its velocity, density and temperature depend only on the distance to the tube axis (velocity is directed along this axis). Thus the system of motion equations, which generally consists of partial derivatives equations, turns into the system of ordinary differential equations. An exact solution to this system is suggested for verification of viscous gas flow computational packages.

Key words: exact solutions, viscous gas, Navier-Stokes equations, Sutherland formula.

1. Введение

Среди известных точных решений [1–12] уравнений движения вязкого газа до сих пор отсутствует точное решение для течения в трубе. Решению для течения в трубе, в котором используются наиболее точные (и наиболее сложные) формулы для зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры (они будут приведены ниже при постановке задачи), посвящена данная статья. Чтобы обеспечить стационарное движение вязких жидкости или газа в каналах и трубах, необходимо компенсировать потери, связанные с трением. Нужна некоторая «проталкивающая сила». Так, например, в классическом

© Максименко И. А., Хорин А. Н., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

течении Пуазейля (течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе круглого поперечного сечения) [13] такая сила создается в результате продольного перепада давления. В точном решении Пуазейля скорость направлена вдоль оси трубы и ее величина зависит только от расстояния до этой оси (от радиуса). В данной статье предпринята попытка получить точное решение для течения вязкого газа, в котором скорость также направлена вдоль оси трубы и ее величина зависит только от радиуса (течение Пуазейлевского типа). Сложность этой задачи состоит в следующем. Для такой скорости из уравнения неразрывности следует, что плотность также зависит только от радиуса. Поэтому на каждой линии тока (т.е. вдоль продольной координаты), в силу уравнения состояния, температура должна меняться вместе с давлением, и поэтому при наличии продольного градиента давления температура также будет меняться вдоль продольной координаты. Вместе с температурой будут меняться коэффициенты вязкости и теплопроводности. В итоге уравнения движения вязкого газа [13, гл. XV] при наличии продольного градиента давления не упрощаются до обычных дифференциальных уравнений (ОДУ), как это имеет место в вязкой несжимаемой жидкости в решении Пуазейля, и остаются уравнениями в частных производных, точное решение которых авторам данной статьи найти не удалось. Чтобы получить точное решение Пуазейлевского типа была использована идея статьи [12], где для плоскопараллельного течения между стенками было рассмотрено течение, в котором давление постоянно, а роль проталкивающей силы играет сила тяжести. Для этого в [12] стенки были расположены вертикально. В результате в [12] уравнения движения вязкого газа упростились и свелись к решению системы двух ОДУ второго порядка (все гидродинамические параметры зависели только от горизонтальной координаты). Для соответствующей этим уравнениям задачи Коши выполнялись условия теоремы существования и единственности решения. Поэтому, хотя точное решение упомянутого ОДУ в [12] получить не удалось, и для расчета параметров течения использовалось численное интегрирование, решение [12] считается точным решением уравнений движения. Аналогичная ситуация имеет место в задаче Блазиуса [14]. Решение задачи Блазиуса считается точным, хотя сводится к задаче Коши для ОДУ третьего порядка, общее решение которого неизвестно и в общем случае рассчитывается численным интегрированием. В данной статье также рассмотрено течение, в котором роль проталкивающей силы играет сила тяжести, и труба расположена вертикально. Давление в трубе считалось постоянным. Поэтому следует уточнить, что для реализации рассматриваемых течений в земных условиях, при которых давление растет с высотой, необходимо либо искусственно создавать разрежение снизу (отсос воздуха насосом), либо нагнетать воздух сверху.

2. Основные обозначения, постановка задачи, система ОДУ

Рассмотрим стационарное течение совершенного (закон Менделеева–Клапейрона) вязкого газа в вертикальной цилиндрической трубе круглого поперечного сечения (ось трубы параллельна вектору ускорения свободного падения \mathbf{g}). Попытаемся найти точное решение, в котором давление газа постоянно, скорость, плотность и температура изменяются только вдоль радиального направления, при этом не равная нулю скорость имеет только вертикальную компоненту (в направлении \mathbf{g}).

Введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$, в которой ось Oz совпадает с осью трубы и ее положительное направление совпадает с направлением вектора \mathbf{g} . Обозначим: r — радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы, V — скорость течения вдоль оси z , T — температура газа, ρ — плотность газа, p — давление.

Будем считать, что для коэффициента вязкости μ справедлива формула Сазерленда

$$\mu(T) = \mu^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_S}{T + T_S}, \quad (1)$$

где для воздуха $\mu^* = 1.715 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с) $T^* = 273$ К, $T_S = 111$ К. Эта формула дает погрешность менее 2% для диапазона температур 170–1900 К и давления менее 10 атм, а при температуре $T > 1500$ К отсутствует диссоциация [11].

Перейдем к формуле для коэффициента теплопроводности λ . В диапазоне температур 170–1900 К при том же давлении аналогичную точность дает формула, предложенная в монографии [15] и имеющая вид, подобный формуле Сазерленда, а именно:

$$\lambda(T) = \lambda^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_\lambda}{T + T_\lambda}, \quad (2)$$

где для воздуха $\lambda^* = 2.412 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К), $T^* = 273$ К, $T_\lambda = 194$ К. Формулу (2) будем использовать для вычисления коэффициента теплопроводности.

Движение вязкого газа описывается уравнением неразрывности, динамическими уравнениями Навье–Стокса, уравнением баланса тепла и уравнением состояния [13, гл. XV]. Если движущийся вязкий газ имеет постоянное давление $p = p_0$ и скорость, имеющую одну только ненулевую z -компоненту V в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ и сонаправленную вместе с положительным направлением оси z с вектором \mathbf{g} , а все газодинамические параметры зависят только от поперечных координат x и y , то динамическое уравнение Навье–Стокса по координате z и уравнение баланса упрощаются и принимают вид

$$(\mu V_x)_x + (\mu V_y)_y + \rho g = 0, \quad (\lambda T_x)_x + (\lambda T_y)_y + \mu(V_x^2 + V_y^2) = 0,$$

где $g = |\mathbf{g}|$. Два других динамических уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности в рассматриваемом случае выполняются тождественно. Переходя от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим r, φ, z и учитывая симметрию круглого сечения ($V_\varphi = T_\varphi = \mu_\varphi = \lambda_\varphi = 0$), имеем

$$(r\mu V')' + \rho gr = 0, \quad (r\lambda T')' + r\mu(V')^2 = 0, \quad p = \rho RT = p_0 > 0. \quad (3)$$

Здесь штрихом обозначена производная по r , R — универсальная газовая постоянная, относенная к молярной массе воздуха.

Приведем уравнения к безразмерному виду. В качестве характерных значений скорости, температуры, плотности, коэффициентов вязкости и теплопроводности выберем их значения при $r = 0$ и обозначим V_0, T_0, ρ_0, μ_0 и λ_0 соответственно, где μ_0 и λ_0 вычислены по формулам (1) и (2) для $T = T_0$, а безразмерное расстояние до оси трубы определим как $\bar{r} = r/r_0$, где $r_0 = \sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$ (в частности, при $p = 1$ атм, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с² и скорости $V_0 = 1$ м/с значение r_0 равно 0.0012 м). Заметим, что r_0 в общем случае нельзя считать характерным поперечным размером, поскольку эта величина может отличаться от радиуса трубы.

Первые два уравнения системы (3) в безразмерных переменных $\bar{V} = V/V_0$, $\bar{T} = T/T_0$, $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{V}' = \mu/\mu_0$, $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$ и $\bar{r} = r/r_0$ имеют вид

$$(\bar{r}\bar{\mu}\bar{V}')' + \frac{\bar{r}}{\bar{T}} = 0 \quad (\bar{r}\bar{\lambda}\bar{T}')' + a\bar{r}\bar{\mu}(\bar{V}')^2 = 0, \quad (4)$$

где $a = \mu_0 V_0^2 / \lambda_0 T_0$. В (4) штрихом обозначена производная по \bar{r} . В безразмерных переменных формулы (1) и (2) переходят соответственно в

$$\bar{\mu}(\bar{T}) = \bar{T}^{3/2} \frac{1 + \bar{T}_S}{\bar{T} + \bar{T}_S} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}(\bar{T}) = \bar{T}^{3/2} \frac{1 + \bar{T}_\lambda}{\bar{T} + \bar{T}_\lambda}. \quad (5)$$

Дополним (4) начальными условиями. Как функции радиуса, безразмерные скорость \bar{V} и температура \bar{T} по построению и ввиду симметрии задачи таковы, что

$$\bar{V}|_{\bar{r}=0} = \bar{T}|_{\bar{r}=0} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{V}'|_{\bar{r}=0} = \bar{T}'|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, поставлена задача Коши для двух ОДУ второго порядка (4–6). В зависимости от значений параметра a она определят различные решения. Скорость газа в этих решениях зависит от безразмерной переменной $\bar{r} = r/r_0$. Как будет видно из дальнейших вычислений, для каждого решения существует такое значение r_w , при котором скорость \bar{V} обращается в нуль. Поскольку на стенках (неподвижной) трубы в силу условия прилипания скорость газа должна быть равна нулю, получаемые решения задачи (4–6) будут описывать течение в трубе радиуса $r_w = \bar{r}_w r_0$. При этом нужно исключать те решения, в которых внутри трубы (размерная) температура \bar{T} хотя бы в одной точке выходит из диапазона 170–1000 К.

Таким образом, найдено решение системы уравнений вязкого газа через решение системы ОДУ. По аналогии с решением Блазиуса и решением [12] полученное здесь решение можно считать точным решением.

3. Результаты расчетов

Для численного решения поставленной задачи система (4) из двух ОДУ второго порядка была сведена к системе из четырех ОДУ первого порядка:

$$\bar{V}' = \bar{\vartheta}, \quad \bar{\vartheta}' = -\frac{1}{\bar{\mu}\bar{T}} - \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}\right)\bar{\vartheta}, \quad \bar{T}' = \bar{\tau}, \quad \bar{\tau}' = -a\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}\bar{\vartheta}^2 - \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\tau}, \quad (7)$$

с начальными условиями (6) следующего вида:

$$\bar{V}|_{\bar{r}=0} = \bar{T}|_{\bar{r}=0} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{\vartheta}'|_{\bar{r}=0} = \bar{\tau}'|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\bar{\mu}(\bar{T})$ и $\bar{\lambda}(\bar{T})$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, определяемые соответственно первой и второй формулами (5). Использовалась схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Расчеты производились в диапазоне осевых скоростей V_0 от 10^{-3} м/с до 1020 м/с, при $p = 101325$ Па, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с². В каждом из случаев был посчитан (размерный) радиус трубы r_w (табл. 1).

Таблица 1
Зависимость радиуса трубы r_w от осевой скорости V_0

V_0 , м/с	r_w , м	V_0 , м/с	r_w , м	V_0 , м/с	r_w , м
0.001	$8.0 \cdot 10^{-3}$	10	$7.8 \cdot 10^{-1}$	200	4.2
0.01	$2.5 \cdot 10^{-2}$	50	1.4	340	4.9
0.1	$7.8 \cdot 10^{-2}$	100	2.5	680	5.4
1	$2.5 \cdot 10^{-1}$	150	3.5	1020	6.9

Для трех различных значений осевой скорости V_0 профили безразмерных скорости \bar{V} и температуры \bar{T} изображены на рисунках 1 и 2. Для других значений V_0 профили \bar{V} и \bar{T} имеют похожий вид и расположены между профиями для осевых скоростей $V_0 = 10^{-3}$ м/с и $V_0 = 1020$ м/с. При этом, как для \bar{V} , так и для \bar{T} , профиль, соответствующий большей осевой скорости V_0 , проходит ниже профиля, соответствующего меньшей осевой скорости.

Вычисления показывают, что в случае низких осевых скоростей ($V_0 \leq 200$ м/с) профиль температуры с точностью до 2% (относительно $\bar{T}_0 = 1$) может быть рассчитан по интерполяционной формуле $\bar{T}(\bar{r}) \approx 1 - a\bar{r}^4/64$.

Вычисления также показывают, что в случае $V_0 \leq 200$ м/с температура \bar{T} меняется менее чем на 2% в диапазоне $r : 0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_w$. Следовательно, слабо изменяются и коэффициенты вязкости $\bar{\mu}$ и теплопроводности $\bar{\lambda}$, а значит, и сам газ почти не меняет своих свойств вдоль сечения трубы. Поэтому приближённый профиль скорости можно получить, полагая, что температура \bar{T} постоянна и равна 1. В этом случае первое уравнение в (4)

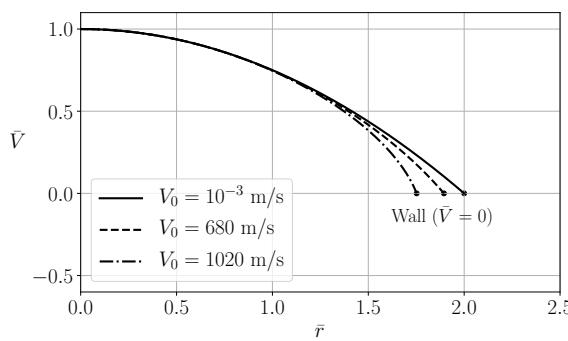


Рис. 1. Профили скорости. Точки, соответствующие стенке трубы, подписаны словом «Wall»

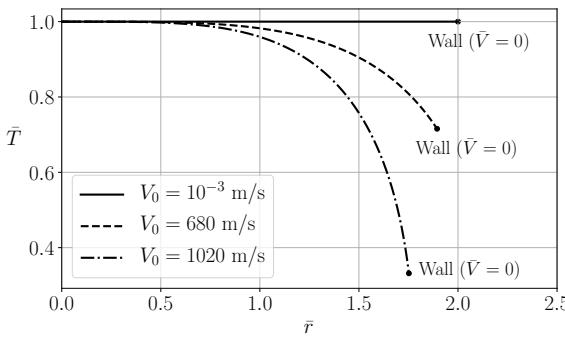


Рис. 2. Профили температуры. Точки, соответствующие стенке трубы, подписаны словом «Wall»

принимает вид $(\bar{r}\bar{V}')' = -\bar{r}$. Решением такого уравнения, с учётом начальных условий (6), будет параболический профиль скорости

$$\bar{V}(\bar{r}) \approx 1 - \bar{r}^2/4. \quad (9)$$

Расчеты показывают, что для диапазона осевых скоростей до 200 м/с решение (9) отличается от точного решения не более чем на 1% (относительно осевой скорости $\bar{V}_0 = 1$). Поэтому значение для радиуса трубы $\bar{r}_w \approx 2$, полученное из (9), дает с точностью до 1% радиус трубы в размерной форме $r_w \approx 2\sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$.

4. Верификация программ расчета течений вязкого газа

Для верификации удобно использовать точные решения, представленные через элементарные и другие известные функции (например, функции Бесселя). Найденное выше точное решение не является таковым, поскольку требует численного решения системы ОДУ. Однако, как показано выше, для осевых скоростей V_0 от 10^{-3} м/с до 200 м/с при $p = 101325$ Па, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с² и для радиуса трубы $r_w = 2\sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$ профиль скорости точного решения точностью до 1% (относительно V_0) представляется формулой

$$V(r) \approx V_0 (1 - r^2/(2r_w)^2), \quad (10)$$

а температура точного решения с точностью до 2% (относительно T_0) представляется формулой

$$T(r) \approx T_0 \left(1 - \frac{\mu_0 V_0}{64\lambda_0 T_0} \frac{r^4}{r_w^4} \right). \quad (11)$$

Значения параметров с нижним индексом 0 определены во втором разделе в тексте между формулами (3) и (4). В таком виде (в виде элементарных функций радиуса) приближенные точные решения удобно использовать для верификации численных методов расчета течений вязкого газа. При уменьшении осевой скорости V_0 ошибка приближенных формул (10) и (11) уменьшается. Так, например, для осевых скоростей 150 м/с и 100 м/с ошибка формулы (10) не превышает 0.5% и 0.2% соответственно, а ошибка формулы (11) — 1% и 0.3% соответственно.

5. Заключение

Получено точное решение Пуазейлевского типа, описывающее движение вязкого газа в вертикальной трубе. При этом использована полная система уравнений движения с наиболее точными (и сложными) формулами для расчета коэффициентов вязкости и теплопроводности. Это точное решение требует численного решения системы ОДУ. Поэтому для диапазона низких осевых скоростей ($V_0 \leq 200$ м/с) с точностью до 2% решение представлено в элементарных функциях, что удобно для верификации численных алгоритмов расчета течений вязкого газа..

Литература

1. Аристов С.Н., Грабовский В.И. Автомодельное решение уравнений Навье–Стокса для течений газа во вращающихся логарифмически-спиральных плоских каналах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1995. Т. 6. С. 44–50.
2. Аристов С.Н. Класс точных решений уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // Доклады Академии наук. 1990. Т. 313, № 6. С. 1403–1406.
3. Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Числ. и аналит. методы решения задач мех. сплош. сред. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 101–117.
4. Сидоров А.Ф. Избранные труды // Механика, математика. Москва : Физматлит, 2001. 576 с.
5. Гродзовский Г.Л. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными стенками и между двумя вращающимися цилиндрами // ПММ. 1955. Т. 19. С. 99–102.
6. Жмулин Е.М. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. II, № 4. С. 31–37.
7. Брутян М.А. Автомодельные решения типа Джейфери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII, № 6. С. 13–22.
8. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О сжимаемом течении Куэтта // Ученые записки ЦАГИ. 2018. Т. XLIX, № 1. С. 27–38.
9. Brutyan M.A., Krapivsky P.L. Exact Solutions to the Steady Navier–Stokes Equations of Viscous Heat-Conducting Gas Flow Induced by the Plane Jet Issuing from the Line Source // Fluid Dyn. 2018. V. 53, S. 2. P. 1–10.
10. Brutyan M.A., Ibragimov U.G. Selfsimilar and Nonselfsimilar Solutions of the Viscous Compressible Flow Inside a Cone. Proceedings of MIPT. 2018. V. XX, N 4. P. 113–121.
11. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378.
12. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // ПММ. 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667.
13. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003.
14. Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe : Braun, 1965. 736 p.
15. White F.M. Viscous Fluid Flow, 3-rd edn. McGraw Hill, 2006.

References

1. Aristov S.N., Grabovskiy V.I. Self-Similar Solution of the Navier–Stokes Equations for Gas Flows in Rotating Logarithmic-Spiral Plane Channels. Izvestiya RAN. Fluid and Gas Mechanics 1995. V. 6. P. 44–50. (in Russian).
2. Aristov S.N. Class of Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations for Compressible Gas. Reports of the Academy of Sciences. 1990. V. 313, N 6. P. 1403–1406. (in Russian).
3. Sidorov A.F. One Class of Solutions of Gas Dynamics and Natural Convection. Num. and Analytic Methods of Solving Problems of Solid Medium Mechanics, USC of USSR AS. Sverdlovsk, 1981. P. 101–117. (in Russian).
4. Sidorov A.F. Selected Works. Mechanics, Mathematics. Moscow : Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).
5. Grodzovskiy G.L. Viscous Gas Flow between Two Moving Parallel Walls and between Two Rotating Cylinders. Fluid Dyn. 1955. V. 19. P. 99–102. (in Russian).

6. *Zhmulin E.M.* Viscous Gas Flow between Two Moving Parallel Plates. Uch. Zap. TsAGI. 1971 V. II, N 4. P. 31–37. (in Russian).
7. *Brutyan M.A.* Selfsimilar Solutions of Jeffrey–Gamel Type for Compressible Viscous Gas Flow. Uch. Zap. TsAGI. 2017. V. XLVIII, N 6. P. 13–22. (in Russian).
8. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Concerning Compressible Couette Flo. Uch. Zap. TsAGI. 2018. V. XLIX, N 1. P. 27–38. (in Russian).
9. *Brutyan M.A., Krapivsky P.L.* Exact Solutions to the Steady Navier–Stokes Equations of Viscous Heat-Conducting Gas Flow Induced by the Plane Jet Issuing from the Line Source. Fluid Dyn. 2018. V. 53, S. 2. P. 1–10.
10. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Selfsimilar and Nonselfsimilar Solutions of the Viscous Compressible Flow Inside a Cone. Proceedings of MIPT. 2018. V. XX, N 4. P. 113–121.
11. *Khorin A.N., Konyukhova A.A.* Couette Flow of Hot Viscous Gas. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2020. V. 24, N 2. P. 365–378. (in Russian).
12. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Viscous Gas Flow between Vertical Walls. Fluid Dyn. 2018. V. 82, N 5. P. 657–667. (in Russian).
13. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Moscow : Drofa, 2003. (in Russian).
14. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe : Braun, 1965. 736 p. (in German).
15. *White F.M.* Viscous Fluid Flow, 3-rd edn. McGraw Hill, 2006.

Поступила в редакцию 13.12.2020

Сведения об авторах статей (на момент подачи статьи)

Программная реализация мониторинга психофизических свойств водителя с использованием гейминг-технологий
Доткулова Анастасия Сергеевна (аспирант, старший преподаватель, кафедра высшей математики, МАДИ, старший преподаватель, кафедра математической кибернетики и информационных технологий, МГУСИ) asoll05@inbox.ru

Оптимизация алгоритма декодирования min-sum для кодов с низкой плотностью проверок на четность
Ле Ван Шон (аспирант, кафедра мультимедийных технологий и телекоммуникаций, МФТИ) levanson09081992@gmail.com

Анализ взвешенной процедуры Ширяева–Робертса в задаче обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки
Спивак Валентин Сергеевич (студент, техник, лаборатория космической информатики, МФТИ) spivak.vs@phystech.edu
Тартаковский Александр Георгиевич (д.т.н., профессор, гл.н.с., зам. зав. лабораторией, МФТИ) agt@phystech.edu

Численное сравнение алгоритмов инициализации следов объектов
Спивак Валентин Сергеевич (студент, техник, лаборатория космической информатики, МФТИ) spivak.vs@phystech.edu
Тартаковский Александр Георгиевич (д.т.н., профессор, гл.н.с., зам. зав. лабораторией, МФТИ) agt@phystech.edu
Беренков Никита Романович (аспирант, лаборатория космической информатики, инженер, МФТИ) nikita.berenkov@phystech.edu

Анализ эффективности архитектур нейронных сетей для детекции Replay Attack в системах лицевой биометрии
Широкова Любовь Романовна (студентка, МФТИ) shirokova.lr@phystech.edu
Логинов Валерий Николаевич (к.т.н., доцент, зам. зав. кафедрой технологий цифровой трансформации, МФТИ) loginov.vn@mipt.ru

Аппроксимация корреляционной функции скорости транспортного средства по GPS/Glonass-данным
Яшина Марина Викторовна (д.т.н., к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой высшей математики, МАДИ) yash-marina@yandex.ru
Таташев Александр Геннадьевич (д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики, МАДИ) a-tatashev@yandex.ru
Фомина Мария Юрьевна (магистрант, лаборант кафедры высшей математики, МАДИ) fomina.m.yu@yandex.ru

Обобщение принципа спектроскопического соответствия на временную зависимость квантовых переходов
Астапенко Валерий Александрович (д.ф.-м.н., профессор, зам. зав. кафедрой радиоэлектроники и прикладной информатики, МФТИ) astval@mail.ru
Сахно Сергей Владимирович (с.н.с., кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики, МФТИ) s2001@list.ru
Сахно Евгения Владимировна (аспирант, кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики, МФТИ) sakho.evgeniya@gmail.com

Управление электростатической зарядкой твердых тел в каналах, заполненных электронно-пучковой плазмой
Йе Хлаинг Тун (аспирант, кафедра логистических систем и технологий, МФТИ) yehlainghtun@phystech.edu
Аунг Чжо У (аспирант, кафедра логистических систем и технологий, МФТИ) aungkyaw@phystech.edu
М.Н. Васильев (д.т.н., профессор, зав. кафедрой, МФТИ) csl@mail.mipt.ru
Хтет Ко Ко Зай (аспирант, м.н.с., кафедра логистических систем и технологий, МФТИ) htetkokozaw536@gmail.com

Зин Мин Маунг (аспирант, кафедра логистических систем и технологий, МФТИ) zinminmaung@phystech.edu

Яр Зар Аунг (аспирант, кафедра логистических систем и технологий, МФТИ) yazarayng@phystech.edu

Обоснование возможности применения посадочного радиолокатора для обнаружения метеобразований

Нгуен Ван Кхыонг (аспирант, кафедра интеллектуальных информационных радиофизических систем, МФТИ) beloza@mail.ru

Особенности фотопоглощения на «core-shell» наночастицах в различных матрицах при наличии плазмонных резонансов

Сахно Сергей Владимирович (с.н.с., кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики, МФТИ) s2001@list.ru

Кротов Юрий Александрович (к.ф.-м.н., ученый секретарь, АО «НИИ «Полюс» им. Ф.М. Стельмаха») kryuri@yandex.ru

Яковец Андрей Васильевич (к.ф.-м.н., н.с., МФТИ) andrey.yakovets@gmail.com

Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе {1,0}-аппроксимации

Бондаренко Наталья Сергеевна (к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной механики и компьютерных технологий, ДонНУ) Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com

Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа

Горелов Сергей Львович (д.ф.-м.н., доцент, ЦАГИ) gorelovsl@yandex.ru

Нгуен Ван Лам (магистрант, МФТИ) lamvqtc1990@gmail.com

Определение относительной фазовой проницаемости при фильтрации жидкости со степенной реологией

Завьялов Иван Николаевич (к.ф.-м.н., ст. преп., ФАКТ, МФТИ) zavialov.in@mpt.ru

Быков Александр Андреевич (к.т.н., доцент, ФАКТ, МФТИ) aleks-bykov@yandex.ru

Бычков Алексей Александрович (инженер, лаборатория прикладного интегрирования, МФТИ) bychkov.aa@mpt.ru

Динамика волчка тип-топ при вязком трении

Каррапетян Александр Владиленович (д.ф.-м.н., профессор, кафедра теоретической механики и мехатроники, МГУ) karapetyan@yandex.ru

Мунцицына Мария Александровна (к.ф.-м.н., доцент, кафедра теоретической механики, МФТИ, с.н.с., ИПУ РАН) munitsyna@gmail.com

Динамика кельтского камня при малом трении

Мунцицына Мария Александровна (к.ф.-м.н., доцент, кафедра теоретической механики, МФТИ, с.н.с., ИПУ РАН) munitsyna@gmail.com

Описание перехода турбулентности через скачок уплотнения на базе моделей турбулентности класса DRSM

Константинов Даниил Николаевич (студент, МФТИ) dkonstantinov0@gmail.com

Течение вязкого газа в вертикальной трубе

Максименко Иван Александрович (студент, кафедра физики полёта, МФТИ) maksimenko.ia@phystech.edu

Хорин Александр Николаевич (студент, кафедра специальных летательных аппаратов и авиационных информационно-измерительных систем, МФТИ) khorin.an@phystech.edu

Ссылки на опубликованные статьи (в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008)

- Доткулова А.С.* Программная реализация мониторинга психофизических свойств водителя с использованием гейминг-технологий // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 7–15.
Dotkulova A.S. Software implementation of monitoring the psychophysical properties of a driver using gaming technologies. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 7–15.
- Ле В.Ш.* Оптимизация алгоритма декодирования min-sum для кодов с низкой плотностью проверок на четность // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 16–23.
Le V.Sh. Optimization of the min-sum decoding algorithm for low-density parity-check codes. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 16–23.
- Спивак В.С., Тартаковский А.Г.* Анализ взвешенной процедуры Ширяева–Робертса в задаче обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 24–32.
Spivak V.S., Tartakovsky A.G. Analysis of the weighted Shiryaev-Roberts procedure in the problem of changepoint detection for models with unknown post change parameters. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 24–32.
- Спивак В.С., Тартаковский А.Г., Беренков Н.Р.* Численное сравнение алгоритмов инициализации следов объектов // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 33–41.
Spivak V.S., Tartakovsky A.G., Berenkov N.R. Numerical comparison of objects' tracks initiation algorithms. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 33–41.
- Широкова Л.Р., Логинов В.Н.* Анализ эффективности архитектур нейронных сетей для детекции Replay Attack в системах лицевой биометрии // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 42–46.
Shirokova L.R., Loginov V.N. Analysis of the effectiveness of neural network architectures for Replay Attack detection in the facial biometrics system. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 42–46.
- Яшина М.В., Таташев А.Г., Фомина М.Ю.* Аппроксимация корреляционной функции скорости транспортного средства по GPS/Glonass-данным // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 47–54.
Yashina M.V., Tatashev A.G., Fomina M.Ju. Approximation of the vehicle speed correlation function using GPS/Glonass data. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 47–54.
- Астапенко В.А., Сахно С.В., Сахно Е.В.* Обобщение принципа спектроскопического соответствия на временную зависимость квантовых переходов // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 55–64.
Astapenko V.A., Sakhno S.V., Sakhno E.V. Generalization of the spectroscopic correspondence principle on time dependence of quantum transitions. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 55–64.
- Йе Хлаинг Тун, Аунг Чжо У, Васильев М.Н., Хтет Ко Ко Зав, Зин Мин Маунг, Яр Зар Аунг.* Управление электростатической зарядкой твердых тел в каналах, заполненных электронно-пучковой плазмой // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 65–70.
Ye Hlaing Tun, Aung Kyaw Oo, Vasiliiev M.N., Htet Ko Ko Zaw, Zin Min Maung, Ya Zar Aung. Control of electrostatic charging of solids in channels filled with electron beam plasma. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 65–70.
- Нгуен Ван Кхьонг.* Обоснование возможности применения посадочного радиолокатора для обнаружения метеобразований // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 71–82.
Nguyen Van Khuong. Justification of the possibility of using a landing radar to detect meteorological formations. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 71–82.
- Сахно С.В., Кротов Ю.А., Яковец А.В.* Особенности фотопоглощения на «core-shell» наночастицах в различных матрицах при наличии плазмонных резонансов // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 83–88.
Sakhno S.V., Krotov Yu.A., Yakovets A.V. Features of photoabsorption on «core-shell» nanoparticles in various matrices in the presence of plasmon resonances. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 83–88.
- Бондаренко Н.С.* Определение обобщённых перемещений в ортотропной пластине при действии сосредоточенной силы на базе {1,0}-аппроксимации // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 89–95.
Bondarenko N.S. Determination of generalized displacements in an orthotropic plate under the action of concentrated force based on the {1,0}-approximation. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 89–95.
- Горелов С.Л., Нгуен В.Л.* Затупленное осесимметричное тело минимального сопротивления в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 96–107.
Gorelov S.L., Nguyen V.L. Blunted axisymmetric body with a minimal resistance in the hypersonic rarefied gas flow. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 96–107.

Завьялов И.Н., Быков А.А., Бычков А.А. Определение относительной фазовой проницаемости при фильтрации жидкости со степенной реологией // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 108–113.

Zavialov I.N., Bykov A.A., Bychkov A.A. Calculation of the relative phase permeabilities in the case of filtration of power law fluids in porous media. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 108–113.

Карапетян А.В., Муницина М.А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 122–127.

Karapetyan A.V., Munitsyna M.A. Tip-top dynamics in viscous friction. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 122–127.

Муницина М.А. Динамика кельтского камня при малом трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 122–127.

Munitsyna M.A. Celt dynamics in the case of low friction. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 122–127.

Константинов Д.Н. Описание перехода турбулентности через скачок уплотнения на базе моделей турбулентности класса DRSM // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 128–138.

Konstantinov D.N. Description of the normal shock wave-turbulence interaction based on turbulence DRSM models. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 128–138.

Максименко И.А., Хорин А.Н. Течение вязкого газа в вертикальной трубе // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 139–145.

Maximenko I.A., Khorin A.N. Viscous gas flow in a vertical tube. Proceedings of MIPT. 2021. V. 13, N 1. P. 139–145.

ТРУДЫ МФТИ

ТОМ 13, № 1(49)

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ №ФС 77-35274 от 10.02.2009

Подписные индексы Э88583, Э88584 в Объединённом каталоге «Пресса России»

Журнал «Труды МФТИ» входит в базу данных РИНЦ
(Российский Индекс Научного Цитирования)
и доступен в электронной библиотеке elibrary.ru.

Высшая аттестационная комиссия
Министерства образования и науки Российской Федерации
29 декабря 2015 года включила журнал «Труды МФТИ»
в обновленный Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.
Первоначально «Труды МФТИ» включены в Перечень ВАК в мае 2010 года.

В 2018 году журнал «Труды МФТИ» включен в список 771 российских журналов,
вашедших в Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science.
В соответствии с распоряжением Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р
журнал «Труды МФТИ» сохранен в Перечне ВАК с уточненными специальностями.

Редакторы и корректоры: *В. А. Дружинина, И. А. Волкова, О. П. Котова, Н. Е. Кобзева*

Компьютерная верстка: *Е. А. Казёнова*

Подписано в печать 15.03.2021. Формат 60 × 841/8.
Усл. печ. л. 18,75. Тираж 100 экз. Заказ № 57.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
Телефон: (495) 408–58–22
E-mail: zhurnaltrudy@mail.ru
Сайт: <http://mipt.ru/science/trudy/>

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного
оригинала-макета

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9
Телефон: (495) 408–84–30
E-mail: polygraph@mipt.ru