Упорядочим оценки: $V_{(1)} > V_{(2)} > V_{(3)} > V_{(4)} > \ldots > V_{(N)}$

Т.к. $V_i \sim Unif([0,1]) \Rightarrow V_{(i)} \sim Beta(N-i+1, i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}V_{(i)} = \frac{N-i+1}{N+1},$$

где $V_{(i)}$ – $i^{я}$ порядковая статистика

В случае $N=3$ добавим $4^{го}$ игрока с $V_{(4)}=0$

(a) VCG: одноместную занимает агент с оценкой $V_{(1)}$,

двухместную делят агенты с оценками $V_{(2)}$ и $V_{(3)}$.

Определим платежи по VCG:

$$\underbrace{m_1}_{\text{платёж } V_{(1)}} = V_{(2)} + \frac{2}{3}\left[V_{(3)} + V_{(4)}\right] - \frac{2}{3}\left[V_{(2)} + V_{(3)}\right] = \frac{1}{3}V_{(2)} + \frac{2}{3}V_{(4)}$$

$$m_2 = V_{(1)} + \frac{2}{3}\left[V_{(3)} + V_{(4)}\right] - \left(V_{(1)} + \frac{2}{3}V_{(3)}\right) = \frac{2}{3}V_{(4)}$$

$$m_3 = \frac{2}{3}V_{(4)}$$

$\exists$ π – прибыль продавца.

$$\mathbb{E}\pi = \mathbb{E}\left[m_1 + m_2 + m_3\right] = \frac{1}{3}\mathbb{E}V_{(2)} + 2\mathbb{E}V_{(4)}$$

$$N=3: \mathbb{E}V_{(4)} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$N \geq 4: \mathbb{E}\pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{N-1}{N+1} + 2 \cdot \frac{N-3}{N+1} = \frac{7N-19}{3(N+1)} \Bigg|_{N=3} = \frac{1}{6}$$

Так как оценка $V_{(1)}$ в расчётах платежей не вылезает в формулу, то мы можем организовать этот аукцион через восходящий.
(в конце восходящего аукциона будут выявлены все правдивые оценки, кроме $V_{(1)}$ — так как он всегда может называть $V_{(2)} + \varepsilon$.)

(Б) Введём новое мн-во альтернатив:

обслуживание 2х комнат — потребую

1) Если все расселяются, то $\pi = \frac{1}{3}V_{(2)} + 2V_{(4)} - 2C > 0$

$$\Rightarrow C < \frac{1}{6}V_{(2)} + V_{(4)} \quad \text{или} \quad C < \frac{7N-19}{6(N+1)}$$

2) Если не заселяем в одноместную.

$\Rightarrow V_{(1)}$ и $V_{(2)}$ селятся в двухместную.

$$m_1 = \frac{2}{3}\left[V_{(2)} + V_{(3)}\right] - \frac{2}{3}V_{(2)} = \frac{2}{3}V_{(3)}$$

$$m_2 = \frac{2}{3}V_{(3)}$$

обслуживание 1й комнаты

$$\Rightarrow \pi = \frac{4}{3}V_{(3)} - C > 0 \Rightarrow C < \frac{4}{3}V_{(3)}, \text{ или}$$

$$C < \frac{4}{3} \cdot \frac{N-2}{N+1}$$

3) Если не заселяем в двухместную.

$\Rightarrow V_{(1)}$ селится в одноместную.

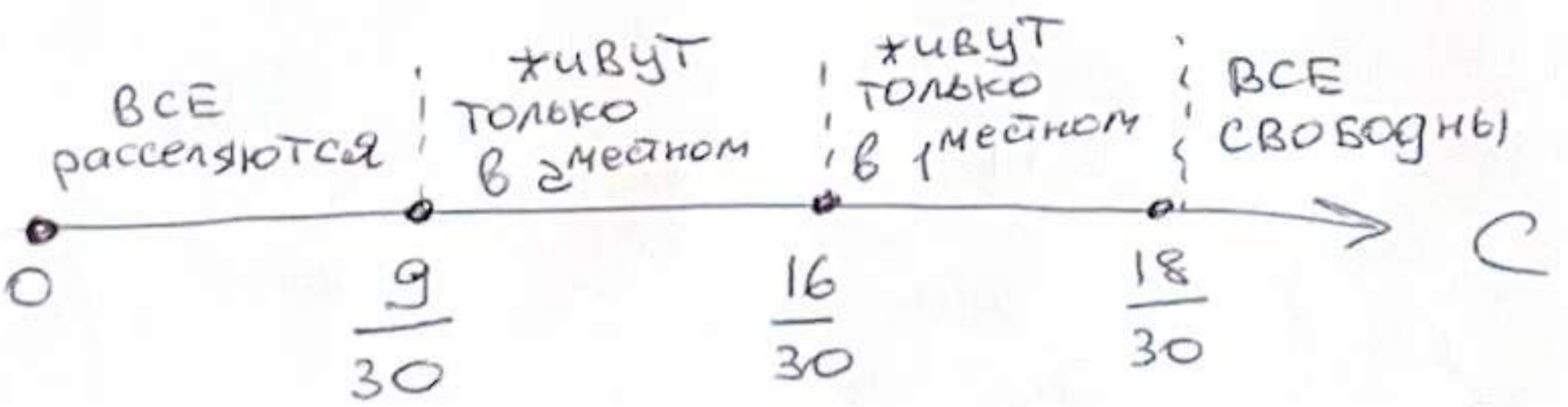
обслуживание одной комнаты

$$m_1 = V_{(2)} \Rightarrow \pi = V_{(2)} - C > 0$$

$$\Rightarrow C < \frac{N-1}{N+1}$$

4). Никто не заселяется иначе.

пример. $N=4$



Мн-во альтернатив задано таким образом, что дефицита не будет.

$V_i \sim Unif([0,1])$ — оценки участников

$V_{(i)}$ — порядковая статистика: $V_{(1)} \geq V_{(2)} \geq V_{(3)}$.

Знаем: $\mathbb{E} V_{(i)} = \frac{n-i+1}{n+1}$ (т.к. $V_{(i)} \sim Beta(n-i+1, i)$)

(a) Найдём равновесие.

$\exists$ 1й игрок решает, какую ставку „b" сделать, при условии, что его оценка $= x$ и его соперники придерживаются стратегии $\beta(x)$.

$$\mathbb{P}\{1^{\text{й}} \text{ победил}\} = \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}\{\max\{\beta(y), \beta(z)\} < b\}}_{\text{случай } N=3} + \frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}\{\beta(y) < b\}}_{\text{случай } N=2} \ominus$$

$$\ominus \{\beta - \text{монот. ф-я}\} = \frac{1}{2}\mathbb{P}\{\beta(\max\{y,z\}) < b\} + \frac{1}{2}\mathbb{P}\{\beta(y) < b\} =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{F_3(\beta^{-1}(b))}_{\text{распределение } \max\{y,z\}} + \frac{1}{2}\underbrace{F_2(\beta^{-1}(b))}_{\text{равномерное распред.}} = \frac{1}{2}(\beta^{-1}(b))^2 + \frac{1}{2}\beta^{-1}(b)$$

$$F_{max}(x) = (F_{\xi_1}(x))^n = \{n=2\} = x^2, \; F_{\xi_i} \sim Unif([0,1])$$

(сделал смесь распределений).

Тогда: $\underbrace{(x-b)}_{\text{выигрыш } 1^{\text{го}} \text{ игрока}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\beta^{-1}(b))^2 + \beta^{-1}(b)\right]}_{\text{вероятн. победы}} \to \max$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Big| \; -\frac{1}{2}(\beta^{-1}(b))^2 - \frac{1}{2}\beta^{-1}(b) + \frac{x-b}{2} \cdot \frac{2\beta^{-1}(b)+1}{\beta'(\beta^{-1}(b))} = 0$$

Ищем равновесие $\Rightarrow b = \beta(x)$.

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{x-\beta(x)}{2} \cdot \frac{2x+1}{\beta'(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta'(x) \cdot (x^2+x) + \beta(x)(2x+1) = 2x^2 + x$$

Решаем:

ОДУ: $\beta'(x)(x^2+x) + \beta(x)(2x+1) = 0 \implies \beta(x) = \frac{C(x)}{x(x+1)}$

$\Rightarrow \beta(x) = \frac{4x^2+3x}{6(x+1)}$ (опустил выкладки)

$\beta(0) = 0$

равновесная стратегия

(б) ~~[illegible]~~

Посчитаем, сколько устроитель заработает, если участники знали бы, сколько их.

$\boxed{\text{Аукцион } 1^{й} \text{ цены}}$

<u>N = 2.</u> $\Rightarrow$ (лекция) $\beta(x) = \frac{x}{2}$

$$\mathbb{E}\Pi_2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}V_{(1)}^{N=2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

<u>N = 3</u>.

Аналогичное рассуждение пункту а, только берём не смесь распределений, а распределение $\max\{y, z\}$.

$$(x-b)F(\beta^{-1}(b)) \to \max, \text{ где } F(x) = x^2 - \text{ функция распределения максимума}$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\Big| \; -(\beta^{-1}(b))^2 + 2(x-b)\frac{\beta^{-1}(b)}{\beta'(\beta^{-1}(b))} = 0$$

Р-ние: $b = \beta(x) \Rightarrow -x^2 + 2(x-\beta(x))\frac{x}{\beta'(x)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\beta'(x) + 2\beta(x) = 2x \\ \beta(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \beta(x) = \frac{2}{3}x$$

$$\mathbb{E}\Pi_3 = \frac{2}{3}\mathbb{E}V_{(1)}^{N=3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}\Pi_{3\,\text{знают}} = \cancel{\mathbb{E}}\ \frac{1}{2}\mathbb{E}\Pi_2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Pi_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0{,}42$$

$\Pi_{\text{не знают}}$ — прибыль устроителя, когда участники не знают, сколько их.

$$V_{(1)}^{N=2} \sim \underbrace{\frac{1}{B(2,1)}x}_{\text{плотность вероятн.}} \quad ; \quad V_{(1)}^{N=3} \sim \frac{1}{B(3,1)}x^2$$

$B(2,1)$, $B(3,1)$ — бета-ф-ии.

$$B(2,1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad ; \quad B(3,1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ξ — случ. велич., ~~[illegible]~~

$$\xi \sim \frac{1}{2}V_{(1)}^{N=2} + \frac{1}{2}V_{(1)}^{N=3} = \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot 3x^2 = x + \frac{3}{2}x^2 = p_\xi(x)$$

$$\mathbb{E}\Pi_{\text{не знают}} = \mathbb{E}\left[\beta(\xi)\right]$$

$$\beta(x) = \frac{4x^2+3x}{6(x+1)}$$

$$\mathbb{E}\Pi_{\text{не знают}} = \int_0^1 \frac{4x^2+3x}{6(x+1)}\left(x+\frac{3}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{72}\left(25+\ln(64)\right) \approx 0.40.$$

$\Rightarrow$ выгодно сообщить. Устроитель может заплатить за это не больше

≈ 0.02 у.е. (тенге).

4

(a) $V_{(i)}$ – i-я порядковая статистика

$$\mathbb{E}\pi = 0 + \tau \cdot \mathbb{P}\{V_{(n)} > \tau,\ V_{(1)} \dots V_{(n-1)} < \tau\} +$$

$$+ \mathbb{E}[V_{(n-1)} \mid V_{(n-1)} > \tau]$$

$$\mathbb{P}\{V_{(n)} > \tau,\ V_{(1)} \dots V_{(n-1)} < \tau\} = C_n^{n-1} \cdot \underbrace{\tau^{n-1}}_{<\tau} \cdot \underbrace{(1-\tau)}_{V_{(n)} > \tau}$$

$$V_{(n-1)} \sim n(n-1)(x^{n-2} - x^{n-1})$$

$$\mathbb{E}[V_{(n-1)} \mid V_{(n-1)} > \tau] = \int_\tau^1 n(n-1)(x^{n-1} - x^n)\,dx = (n-1)(1-\tau^n) - \frac{n(n-1)}{n+1}(1-\tau^{n+1}).$$

$$\mathbb{E}\pi = n \cdot \tau^n(1-\tau) + (n-1)(1-\tau^n) - \frac{n(n-1)}{n+1}(1-\tau^{n+1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = 0: \quad n \cdot [n\tau^{n-1} - (n+1)\tau^n] + (n-1)(-n\tau^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}\tau^n = 0$$

$$n^2\tau^{n-1} - n(n+1)\tau^n - n(n-1)\tau^{n-1} + n(n-1)\tau^n = 0$$

$$n^2 - n(n+1)\tau - n(n-1) + n(n-1)\tau = 0$$

$$n^2 - \cancel{n^2\tau} - n\tau - \cancel{n^2} + \cancel{n} + \cancel{n^2\tau} - n\tau = 0$$

$$-2n\varepsilon + n = 0 \Rightarrow 2\varepsilon = 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$$

(б) $\mathbb{E}\Pi = 0 \cdot \mathbb{P}\{V_{(n)} < \tau\} + \mathbb{E}\left[\beta(V_{(n)}) \mid V_{(n)} > \tau\right]$

$$\beta(x) = \frac{n-1}{n}x$$

$$\mathbb{E}\left[V_{(n)} \mid V_{(n)} > \tau\right] = \int_{\tau}^{1} x n x^{n-1} dx = n \cdot \frac{1-\tau^{n+1}}{n+1}$$

$$\mathbb{E}\Pi = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\left(1-\tau^{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}\left(1-\tau^{n+1}\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}\Pi}{\partial \tau} = \frac{n-1}{n+1}(n+1)\left(-\tau^{n}\right) = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

5 задача

а) Пусть S — это продавец, B - покупатель, с которым он собирается вступить в сговор, $V_{(i)}$ — i-я порядковая статистика среди ставок (имеет бета-распределение). Что могут сделать участники сговора?
Замечание. 1. Конверты, в которых покупатели отправляют свои ставки, видит только организатор/продавец. Тогда приведу два возможных договора между B и S:
1.

- Если B выигрывает, то он заплатит $0.5(V_{(1)} + V_{(2)})$.
(Вероятность того, что B выигрывает $= z^{N-1} \to 0$, где z — ставка B, N — число покупателей)
- Иначе, S сообщает всем, что вторая ставка по старшинству $V_{(2)} = V_{(1)} - \varepsilon$, тогда B может подтвердить эту информацию и они делят каким-нибудь образом делят выигрыш (например, S забирает $V_{(2)} + \epsilon$, остальное — m_B — достаётся B)

Будет ли B участвовать в сговоре?
Запишем условие на участие B в сговоре (π_B - его выигрыш в сговоре, z — его ставка):

$$\pi_B = z^{N-1} \cdot 0.5(V_{(1)} + V_{(2)}) + (1 - z^{N-1}) \cdot m_B > z^N \cdot V_{(2)}$$
$$z^{N-1} \cdot 0.5(V_{(1)} - V_{(2)}) + (1 - z^{N-1}) \cdot m_B > 0$$

Значит, участвовать в сговоре выгодно.
Будут ли остальные менять свои стратегии, если узнают о сговоре?
Есть вариант байкотировать такой аукцион. Если же варианта этого нет, то наш аукцион по сути превратился в аукцион первой цены (выплата = ставке), а значит, стратегия "честно назвать свою оценку v_i" заменяется стратегией "назвать $\frac{N-1}{N}v_i$"(тем самым, уменьшая свой будущий платеж).

Будет ли потеря эффективности от сговора (при условии, что все узнали про сговор и все равно участвуют)?
При условии, что N достаточно большое, имеем, что B скорее всего не выигрывает, а значит общая прибыль B и S становится равной $\frac{N-1}{N}EV_{(1)} = \frac{N-1}{N}\frac{N}{N+1} = \frac{N-1}{N+1} = EV_{(2)}$. Следовательно, продавцу уже невыгодно вступать в сговор.

2.
Такой сговор: B всегда ставит $v_B = 1$, платит при этом $V_{(1)}^{N-1}$ (максимальная оценка среди оставшихся агентов (изменилось распределение)), и $(V_{(1)}^{N-1} - v_B^*)$ ему компенсирует продавец (v_B^* — его истинная оценка). В данном случае все зависит от v_B^*, причем если предположить, что в среднем $v_B^* = 0.5$ (её матожидание), то:

$$\pi_B = 0(\text{ получил предмет})$$

$$\pi_S = \mathrm{E}v_B^* - (1 - \mathrm{E}V_{(1)}^{N-1}) = 0.5 - 1 + \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{2N},$$

где $\mathrm{E}V_{(1)}^{N-1}$ — первая порядковая статистика среди N - 1 игроков, имеющих равномерно распределенную оценку на $[0,1]$.
Хотим, чтобы выполнялось следующее (иначе продавцу сговор будет не выгоден):

$$\frac{N-2}{2N} > \frac{N-1}{N+1} = \mathrm{E}V_{(2)}^{N}$$

Очевидно, не выполнено. Тем не менее, если у продавца есть опция выбрать игрока с большой оценкой v_B^*, то такой сговор будет выгоден и продавцу, и покупателю.

b) Случай, когда участники не знают о сговоре.
Не заключая сговор, продавец получает в среднем $\frac{N-1}{N}\mathrm{E}V_{(1)}^{N} = \frac{N-1}{N+1}$. Чтобы продавцу было выгодно участвовать в сговоре, можно неким образом изменить стратегию ставки с помощью одного покупателя. Для этого нечестный покупатель может сообщить всем, что его распределение отличается от заданного в условии - например, его функция распределения его оценки равна $x^\alpha, \alpha = 3$ (например). Тогда стратегия будет $\beta(x) = \frac{N-1}{N}x$ изменится на стратегию $\beta(x) = \frac{N+1}{N+2}x$ (нашли равновесие, в котором вероятность победы участника не из сговора равна $x^{n-2+3} = x^{n+1}$). Понятно, что параметр α можно неограниченно увеличивать, тем самым увеличивая прибыль S и B. Заметим, что на матожидание $V_{(1)}^{N}$ мы никак не влияем (дальше можно указать, сколько продавец должен будет отдать покупателю B, но это уже тривиально).
Если же участники узнали о таком сговоре, им следует придерживаться старой стратегии $\beta(x) = \frac{N-1}{N}x$, тем самым сговор станет неэффективным.

c) При условии, что организаторам известны распределения оценок участников, им нужно запросить списки сделанных ставок, оценить по ним плотность распределения (параметрическим/непараметрическим методом - какой нибудь ядерной оценкой) и сравнить со своими предположениями.
Либо, исходя из того, что они что-нибудь знают про финансовое состояние людей, участвующих в аукционе (какой-нибудь опрос при регистрации), сделать некое предположение на распределение (например, парето/бета), и провести анализ на аномальные отклонения от него.

A, Б — картины

$0 < \delta < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha, \beta < 1$

	Ц (ценитель)	Бог (богач)
А+Б	2	2+δ
А	α	2
Б	β	2

		суммарное благосостояние
(а) Ц – А+Б, Бог – ∅	⇒	2
Ц – А, Бог – Б	⇒	$(2+\alpha) \in (2.5; 3)$
Ц – Б, Бог – А	⇒	$(2+\beta) \in (2.5; 3)$
Ц – ∅, Бог – А+Б	⇒	$(2+\delta) \in [2, 2.5)$

Нужно отдать наиболее ценную ($\max(\alpha,\beta)$) картину ценителю, а оставшуюся — богачу.

(б) Предполагаем, что участники не знают про оценки друг друга, и что они хотят максимизировать своё благосостояние.

Так как обоим участникам выгодно купить обе картины сразу, то и заявки будут соответствующие. Значит, цена будет повышаться до тех пор, пока $p_1+p_2 \le 2$. Получаем ситуацию, когда $p_1+p_2 > 2$.

Если $p_1 > \alpha$ и $p_2 > \beta$ ⇒ богач забирает обе картины, и ($p_1+p_2 < 2+\delta$)

$\sum$ благосостояние < 2.5.

$\exists\, p_1 < \alpha$, $p_2 > \beta$ (без ограничения общности) и $p_1+p_2 > 2$, $p_1+p_2 < 2+\delta$.

$\exists\, W(Ц)$ – корзина ценителя.

$W(Ц) = \{A\}$, $W(Бог) = \{A, Б\}$ ⇒ p_1 повышается.

$p_1+p_2 < 2+\delta \rightarrow$ 1). $p_1 > \alpha$ ⇒ богач забирает обе картины

2) $p_1+p_2 > 2+\delta$ ⇒ никто уже не ставит ⇒ $p_1 \downarrow$ и $p_2 \downarrow$.

$p_1 + p_2 > a + \delta$:

1). $p_1 > a, p_2 > a \Rightarrow p_1 \downarrow$ и $p_2 \downarrow$

2). $p_1 \leq a, p_2 > a \Rightarrow p_2 \downarrow$ $\quad (W(\text{бог}) = \{A\}, W(Ц) = \varnothing)$

3). $p_1 > a, p_2 \leq a \Rightarrow p_1 \downarrow$

4). $\alpha < p_1 \leq a, b < p_2 \leq a$

$\Rightarrow W(Ц) = \varnothing, W(\text{бог}) = \min\{p_1, p_2\} \Rightarrow \max\{p_1, p_2\} \downarrow$

5). $p_1 < \alpha, \beta < p_2 \leq a$.

$\Rightarrow W(Ц) = \{A\}, W(\text{бог}) = \{A\} \Rightarrow p_1 \uparrow, p_2 \downarrow$.

$\Rightarrow$ нет равновесия.

Есть ~~а~~ единственный исход, в к-ром богач забирает обе картины. (и то, он зависит от α, β, γ).

в) $\exists$ был достигнут оптимальный общеcтв. исход. $\exists$ $\alpha < \beta$.

Знаем, что в оптимальном исходе ценитель (заплатил p_2) забрал B, а богач (заплатил p_1) – A.

Значит, имеем необходимое условие: $\begin{cases} \alpha < p_1 \leq a \\ p_2 \leq \beta \\ p_1 + p_2 > a + \delta \end{cases}$

Из последнего: $p_1 > a + \delta - p_2 \geq a + \delta - \beta > 1$ $\quad (\min(\overset{0}{\delta} - \overset{1}{\beta}) = -1$

$p_1 > 1 > \beta \geq p_2 \Rightarrow$ богач должен был ставить на картину B, а он этого не делал $\Rightarrow$ противоречие.

г) Используем ~~комбинаторный аукцион~~.

механизм VCG.

Оба участника отправляют свои ставки для $\forall$ подмн-ва картин.

$v_1(\{A\}) = \alpha$, $v_1(\{Б\}) = \beta$, $v_1(\{A, Б\}) = 2$ ← учитель

$v_2(\{A\}) = v_2(\{Б\}) = 2$, $v_2(\{A, Б\}) = 2 + \delta$ ← богач

~~P~~ механизм: $\sum v_i(T_i) \to \max\limits_{T_i}$, T_i – подмн-ва картин.

] $\alpha > \beta$.

Максимум достигается при $T_1 = \{A\}$, $T_2 = \{Б\}$.

$p_1 = 2 + \delta - 2 = \delta$

$p_2 = 2 - \alpha$.

то, что максимизировал механизм

в ~~равно~~

$$p_i = \max_{\{T_j\}_{j \neq i}} \sum_{j \neq i} v_j(T_j) - \sum_{j \neq i} v_j(T_j^*)$$

(a) пример

(когда выгодно подать неправильный набор мн-в)

$M = \{A, B, C, D, E\}$

$W_{1,\{B,C\}} = 1 \Rightarrow \frac{W_{1,\{B,C\}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$

$W_{2,\{A,B,C\}} = 5 \Rightarrow \frac{W_{2,\{A,B,C\}}}{\sqrt{|\{A,B,C\}|}} \approx \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.9$

$W_{2,\{A\}} = 3 \Rightarrow \frac{W_{2,\{A\}}}{1} = 3$

Если сообщают честно, то:

$$\frac{W_{2,\{A\}}}{1} > \frac{W_{2,\{A,B,C\}}}{\sqrt{3}} > \frac{W_{1,\{B,C\}}}{\sqrt{2}}$$

платёж 2$^{\text{го}}$

$\Rightarrow$ 2$^{\text{му}}$ достанется A, 1$^{\text{му}}$ — B и C. $p_2 \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 5 = 2.9$

Если же 2$^{\text{й}}$ игрок изменит $W_{2,\{A\}} = 3$ на $W_{2,\{A,D\}}$, то:

$$\frac{W_{2,\{A,B,C\}}}{\sqrt{3}} > \frac{W_{2,\{A,D\}}}{\sqrt{2}} > \frac{W_{1,\{B,C\}}}{\sqrt{2}}.$$

$\Rightarrow$ 2$^{\text{й}}$ агент получит набор $\{A,B,C\}$, к-рый ему более выгоден, чем просто $\{A\}$.

полезность 2$^{\text{го}}$

$p_2 \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 3 \approx 3.67 \Rightarrow u_2 = 5 - 3.67 > 3 - 2.9$

P.S. $p_i = \frac{v_k^* \cdot \sqrt{|S_i^*|}}{\sqrt{|S_k^*|}}$ — как на лекции (цена)

8 задача

Будем называть первый онлайн-аукцион "online второй — "offline".

a) Может быть больше, не более чем в 2 раза.
Приведём пример, когда достигается граница 2. Пусть U_g — суммарное общественное благосостояние для "online" , U_s — "offline".
Имеем следующие запросы: $(1, 2, a), (1, 1, a - \varepsilon), (2, 2, \varepsilon)$. Тогда $U_g = a + \varepsilon$, $U_s = a + a - \varepsilon$.
$$\frac{U_s}{U_g} = \frac{2a - \varepsilon}{a + \varepsilon} \to 2, \text{ при } \varepsilon \to 0$$
Покажем, что $\frac{U_s}{U_g} \leq 2$ всегда.

Доказательство. Когда отношение может быть больше? Тогда, когда механизмы выдали товары различным агентам. Понятно, что это может произойти только в следующем случае: если в "offline" механизме был выбрал агент i, который не был выбрал "online" механизмом. Пусть запрос i-го был — (a_i, d_i, w_i). Значит, в этом промежутке всегда существовали агенты с типом $w'_i \geq w_i$, которых выбирал "online" механизм. Заметим, что эти агенты так же должны попасть и в "offline" решение, так как они максимизируют суммарное благосостояние. Введем обозначения:

- X — сумма типов тех агентов, которые присутствуют в решении обоих механизмов,
- b — сумма типов тех, кто был выбран только в "offline" аукционе,
- b' — сумма типов агентов, выбранных только в "online" механизме.

Заметим, что $X \geq b \geq b'$ (если $X < b$, то, так как множество агентов из X и b не пересекаются, значит, "online" механизму было бы выгодно брать только агентов из b, а он этого не сделал. Такого не могло быть). Тогда,
$$U_s = X + b,$$
$$U_g = X + b',$$
Имеем,
$$\frac{U_s}{U_g} = \frac{X + b}{X + b'} = \frac{1 + b/X}{1 + b'/X} \leq \frac{1 + 1}{1} = 2$$
□

b) Рассмотрим следующий пример: $(1, 3, a), (1, 2, b), (2, 2, c), (3, 3, d)$, $a > b > c > d$. Тогда "online" решение — это выдать предметы агентам с типами a, b, d, "online" решение — b, c, a (порядок важен). Посчитаем платежи (R_g — сумма платежей "online" , R_s — "offline").
$$R_g = d + c + 0$$

(не очень понятно, сколько должен платит агент с типом d в данной ситуации — либо 0, либо d. В любом случае, это не повлияет на ответ)
Посчитаем теперь платежи по VCG:

$$R_s = [a+c+d-(a+c)]+[a+b+d-(a+d)]+[b+c+d-(b+c)] = d+b+d = 2d+b$$

Тогда,

$$\frac{R_s}{R_g} = \frac{b+2d}{d+c} \to \infty \text{ в силу произвольности b}$$

N агентов.

	C	D
C	1,1	−1,2
D	2,−1	0,0

(а) Найдём равновесие (при каких δ стоит всегда играть „C")

$$\underbrace{2}_{\text{ход „D"}} + \left(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 0\right)\delta + 0\cdot\delta^2 + \ldots < 1 + \delta + \delta^2 + \ldots$$

← сходили 2 раза подряд „D".

↑ половина игроков, которая не знала про его ход

Замечание. После 1^го хода „D" не имеет смысла ходить „C", можем только всё испортить.

$$2 + \delta + 0\cdot\delta^2 + \ldots < \frac{1}{1-\delta} \iff \delta^2 + \delta - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta > \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$ ← при таких δ следует играть всегда „C".

(5) <u>Замечание</u>. Информация распространяется зависимо, т.е. если мы всегда ходим „D", то каждый раз про это будут узнавать <u>только</u> игроки, до к-рых информация ещё не дошла.

$$\underbrace{2}_{\text{„D"}} + \left(2\cdot \underbrace{\frac{k-1}{k}}_{\text{не узнали}} + 0\cdot \underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{узнали}}\right)\delta + \left(2\cdot\frac{k-3}{k}+0\cdot\frac{3}{k}\right)\delta^2 + \left(2\cdot\frac{k-6}{k}+0\cdot\frac{6}{k}\right)\delta^3 +$$

$$+\left(2\cdot\frac{k-10}{k}+0\cdot\frac{10}{k}\right)\delta^4+\ldots+T_\ell\,\delta^{\ell'}+0+\ldots < \frac{1}{1-\delta}$$

треугольное число

$$T_\ell = 2\cdot\frac{k-\frac{1}{2}\ell'(\ell'+1)}{k}$$

$$\ell^* = \#\left\{n : \frac{k-\overbrace{\tfrac{1}{2}n(n+1)}^{\text{треугольное число}}}{k} > 0,\ n=1,2,3,\ldots\right\}$$

$$\ell^* = \left\lfloor\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right\rfloor \leftarrow \text{из решения ур-я } k-\tfrac{1}{2}\ell^*(\ell^*+1)=0$$

$$2\left[\left(1+\delta+\delta^2+\ldots+\delta^\ell\right)-\frac{\delta}{k}\left(1+3\delta+6\delta^{2}+10\delta^{3}+\ldots+\frac{1}{2}\ell(\ell+1)\delta^{\ell-1}\right)\right]<\frac{1}{1-\delta}$$

$$\frac{1-\delta^{\ell+1}}{1-\delta} - \frac{\delta}{k}\left(1+3\delta+6\delta^2+10\delta^3+\ldots+\frac{\ell(\ell+1)}{2}\delta^{\ell-1}\right) < \frac{1}{2(1-\delta)}$$

Решение (численное) этого неравенства даст промежуток, в к-ром выгодно всегда ходить „C".

<u>Замеч</u>. Если k - треугольное число (т.е. $\exists\, n: k=\frac{n(n+1)}{2}$), то

$$\ell = \left\lfloor\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right\rfloor - 1$$

Посмотрим, выгодно ли отклоняться одновременно.

$$\underbrace{2}_{„D"} + \left(\underbrace{1}_{„C"} \cdot \frac{k-1}{k} - 1\cdot\frac{1}{k}\right)\delta + \left(1\cdot\frac{k-2}{k} - 1\cdot\frac{2}{k}\right)\delta^2 + \ldots + \left(1\cdot\frac{1}{k} - \frac{k-1}{k}\right)\delta^{k-1} + \underbrace{0}_{„D"} < \frac{1}{1-\delta}$$

Через k периодов, очевидно, играть „C" не стоит, так как все игроки уже знают про 1й ход.

$$2 + \frac{k-2}{k}\delta + \frac{k-4}{k}\delta^2 + \ldots + \frac{2-k}{k}\delta^{k-1} < \frac{1}{1-\delta}$$

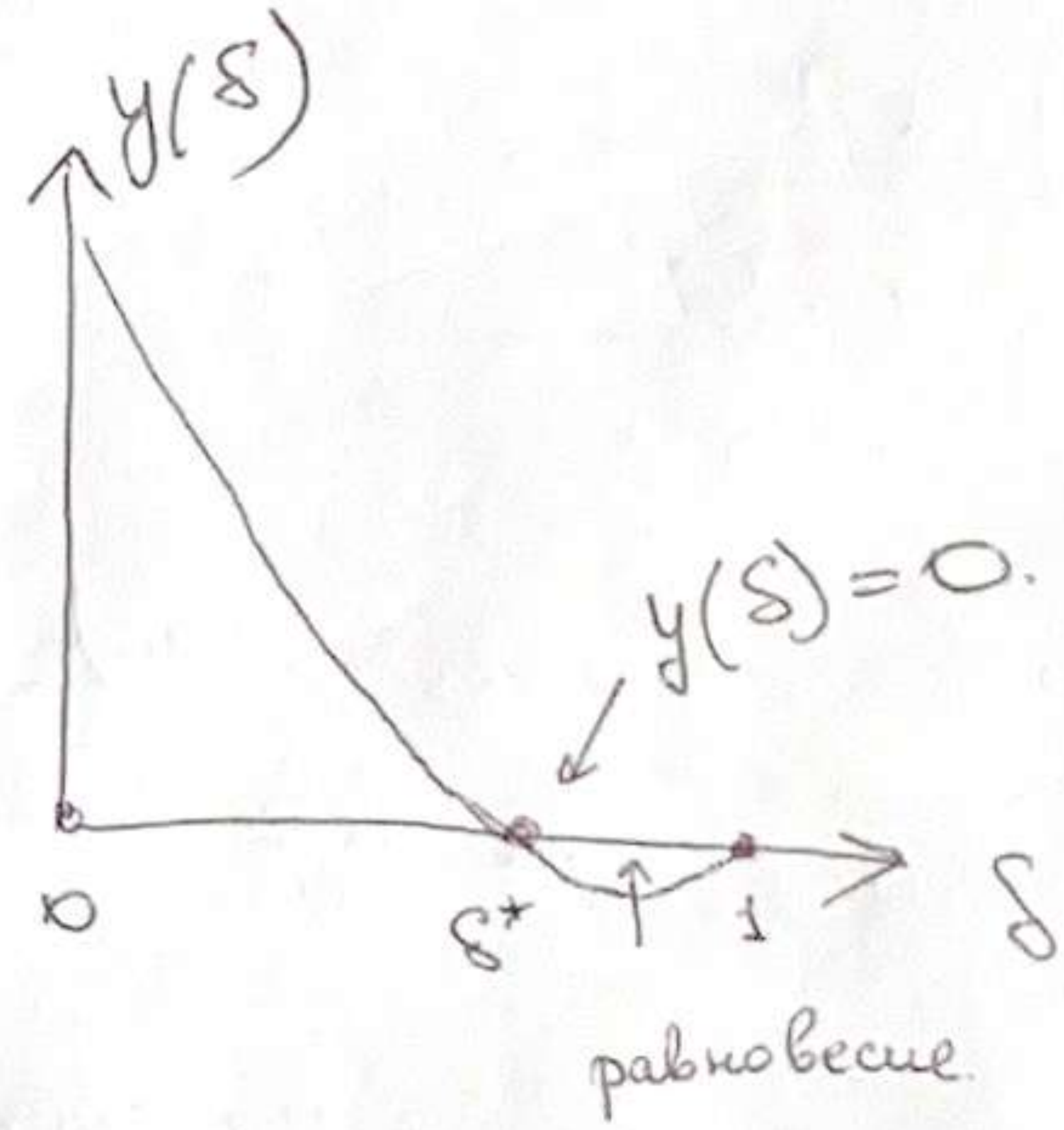
$$2 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{k-1} - \frac{1}{k}\delta\left(2 + 4\delta + 6\delta^2 + \ldots + 2(k-1)\delta^{k-2}\right) < \frac{1}{1-\delta}$$

$$1 + \overbrace{\left(1 + \delta^1 + \delta^2 + \ldots + \delta^{k-1}\right)}^{„S(\delta)"} - 2\frac{\delta}{k}\overbrace{\left(1 + 2\delta + 3\delta^2 + \ldots + (k-1)\delta^{k-2}\right)}^{S'(\delta) =} < \frac{1}{1-\delta}$$

$$1 + \frac{1-\delta^k}{1-\delta} - 2\frac{\delta}{k}\cdot\frac{(k-1)\delta^k - k\delta^{k-1} + 1}{(1-\delta)^2} < \frac{1}{1-\delta}$$

$$S(\delta) = \frac{1-\delta^k}{1-\delta}; \quad S'(\delta) = \frac{(k-1)\delta^k - k\delta^{k-1} + 1}{(1-\delta)^2}$$

$$\underbrace{(2-k)\delta^{k+1} + k\delta^k + k\delta^2 - (2+2k)\delta + k}_{„y(\delta)"} < 0$$



$y(1) = 1.$

∄ Выгодно отклониться, когда

$\delta \in (0, \delta^*)$. Заметим, что $|(0, \delta^*)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

(6) Замечание: если игрок сыграл „D", то через k периодов его ход станет известен всем. (случай, когда вся информация про ходы распространяется последовательно — сначала узнаёт $\frac{1}{k}$, затем другая $\frac{1}{k}$, и т.д.)

$$\underbrace{2}_{\text{ход „D"}} + \Big(2\cdot\underbrace{\frac{k-1}{k}}_{\substack{\text{не знают}\\ \text{про его ход}}} + 0\cdot\underbrace{\frac{1}{k}}_{\text{знают}}\Big)\delta + \Big(2\cdot\frac{k-2}{k}+0\cdot\frac{2}{k}\Big)\delta^2 + \dots + \Big(2\cdot\frac{1}{k} + 0\cdot\frac{k-1}{k}\Big)\delta^{k-1} \oplus$$

$$\oplus\; 0\cdot\delta^k + \dots < \frac{1}{1-\delta}$$

$$\Updownarrow$$

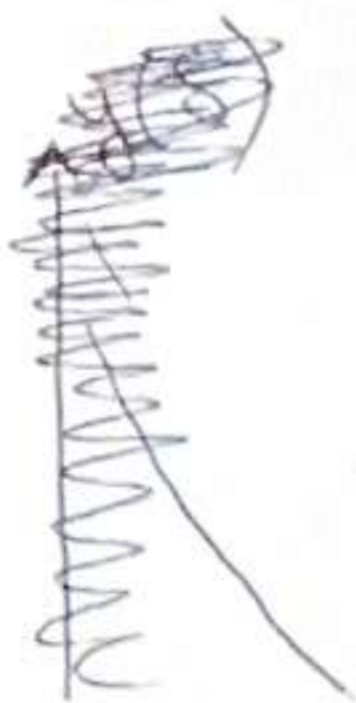
$$2\cdot\Big[\underbrace{\big(1+\delta+\delta^2+\dots\delta^{k-1}\big)}_{S(\delta)} - \frac{\delta}{k}\underbrace{\big(1+2\delta+\dots+(k-1)\delta^{k-2}\big)}_{S'(\delta)}\Big] < \frac{1}{1-\delta}$$

$$S(\delta) = \frac{1-\delta^k}{1-\delta}$$ ← сходится при $0<\delta<1$.

$$S'(\delta) = \frac{-k\delta^{k-1}(1-\delta)+(1-\delta^k)}{(1-\delta)^2} = \frac{(k-1)\delta^k - k\delta^{k-1}+1}{(1-\delta)^2}$$

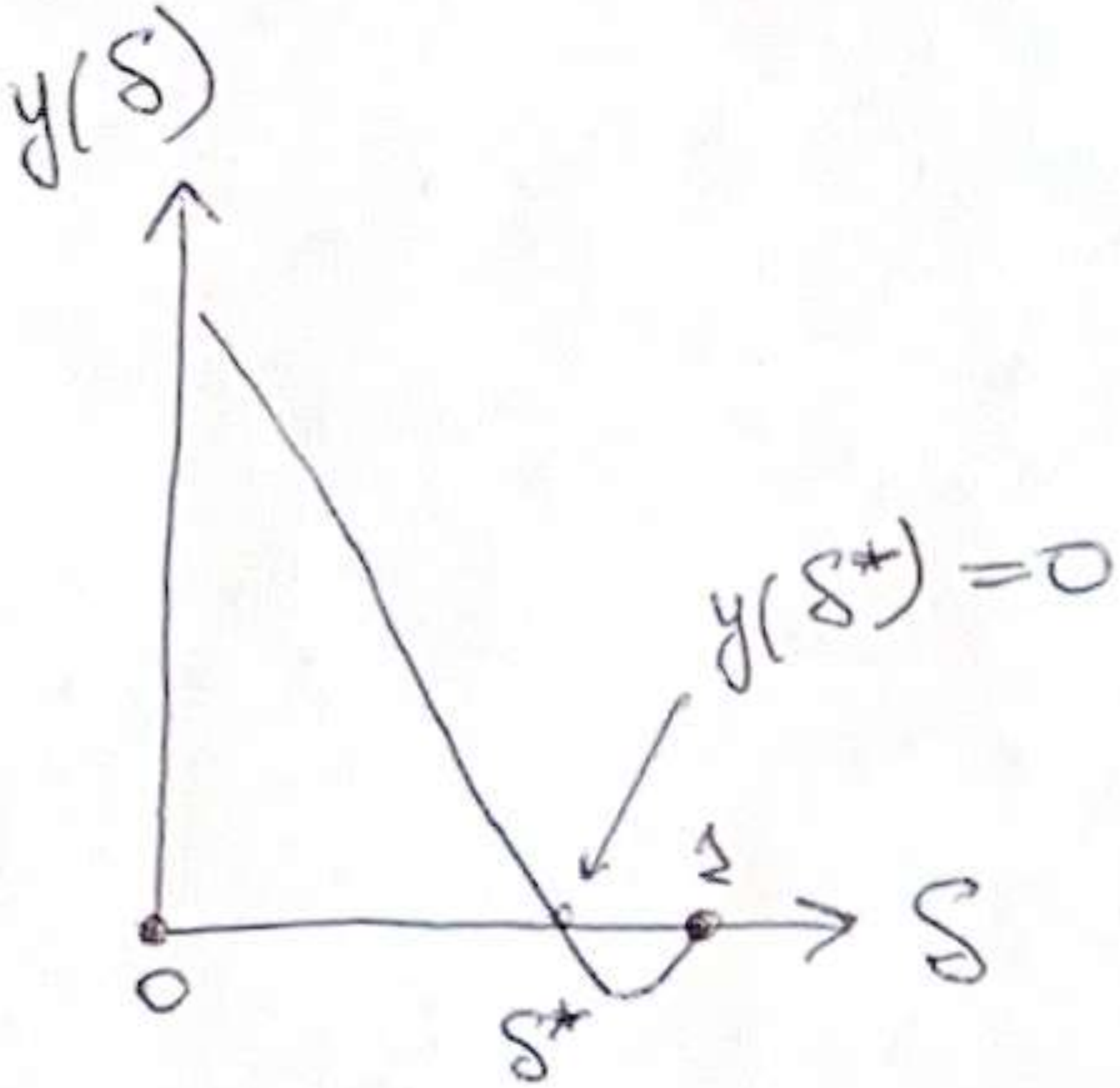
$$2\cdot\Big[\frac{1-\delta^k}{1-\delta} - \frac{\delta}{k}\cdot\frac{(k-1)\delta^k - k\delta^{k-1}+1}{(1-\delta)^2}\Big] < \frac{1}{1-\delta}$$

$$2\cdot\frac{\delta^{k+1}-(k+1)\delta+k}{k(1-\delta)} < 1;\quad 2\delta^{k+1}-(k+2)\delta+k<0$$



$$y(\delta) = 2\delta^{k+1}-(k+2)\delta+k$$

$$y(1) = 0 \quad \forall k.$$



$$k \to \infty \Rightarrow \delta^* \to 1$$

Невыгодно играть всегда „D", если $\delta \in [\delta^*; 1]$.

10 задача

Замечание. В условии задачи не указано, но на лекции упоминалось — агенты, расположенные в одном узле, имеют одинаковые издержки (то есть затраты на каждое ребро делятся поровну между всеми потребителями этого ребра). Если полезность агента меньше его суммарной платы, то он исключается из узла, следовательно, не получает сигнал.
Заметим, что игра является супермодулярной игрой (если это в будущем как-то поможет).

a) Да, верно. Рассмотрим агента j, имеющего полезность $>$ его суммарной платы. Если он уменьшит сообщенную оценку (при условии, что его узел получает сигнал), то существует вероятность того, что его исключат из узла, что ему невыгодно (выплату он никак не уменьшит). Если же его узел не получает сигнал, то он может повысить полезность, тем самым получив сигнал. Рассмотрим что происходит.
Пусть есть узел, в котором сидит n потребителей с полезностями u_i, c_e — издержки по ребру, ведущему в этот узел. Так как узел не получает сигнал, то
$$\sum_i u_i < c_e$$
Тогда существует агент $k \neq j$: $u_k < \frac{c_e}{n}$. Пусть агенту j хочется получить сигнал и повышает свою полезность ($\hat{u}_j > u_j \geq \frac{c_e}{n}$) таким образом, чтобы узел получил сигнал:
$$\sum_{i \neq j} u_i + \hat{u}_j = c_e$$
Но из-за того, что есть агент k, его отключат от узла, и через узел все равно сигнал не будет передаваться. Постоянное повышение своей полезности $\hat{u}_j$ приведёт агента j к ситуации, где ему придется платить больше своей реальной полезности u_j.
Если же у агента j полезность $<$ его суммарной платы, то повышение полезности никак не повлияет на суммарную плату, а значит не имеет смысла повышать u_j.

b) Пусть u_i — полезность i-го агента, m_i — платеж i-го агента.
1). Случай без побочных платежей.
Нет ситуации, в которой группе выгодно указать неправильные платежи.
Так как агенты при сговоре не могут совершать платежи внутри своей коалиции, то в данной задаче их действия являются независимыми (на платеж может влиять только понижение своей ставки до такой, при которой тебя исключают из узла, а значит суммарный платеж только увеличится, что никому не выгодно, если вы только не группа экстремистов), а значит по пункту (a) им не следует указывать неправильную полезность.
2). Случай с побочными платежами.
Да, такое возможно, приведём пример. Рассмотрим лист, в который сигнал не приходит. В него ведет ребро с издержками c_e, в узле сидит n агентов, причем у $n-2$ агентов $m_i = u_i = c_e/n$, у одного — $u_i = c_e/n - w$, и у второго — $u_j = c_e/n + w$. Тогда j-й может договориться с i-м так, чтобы i-й сообщил полезность $u_i + w$, а j-й ему ее компенсирует. Значит, узел получит сигнал.