Задачи по курсу случайных графов. Часть 6

Константинов Даниил Николаевич, М05-015а
dkonstantinov0@gmail.com

1. *Доказательство.* Из теоремы Спенсера и Шела следует, что $\forall \alpha > 0$, α — иррациональное, $G(n, n^{-\alpha})$ подчиняется закону 0 или 1. Значит, у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(n, n^{-\alpha}), G(m, m^{-\alpha}), k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.
   Понятно, что при $p = 1 - n^{-\alpha}$ получаем дополнение к графу $G(n, n^{-\alpha})$ почти наверняка (т.е. в графе $G(n, 1 - n^{-\alpha})$ ребра смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в $G(n, n^{-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к 1 и наоборот. Небольшое пояснение: для проведения ребер в графах $G(n, n^{-\alpha})$ и $G(n, 1 - n^{-\alpha})$ можно использовать одну ассиметричную монетку).
   Нам же нужно показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре $\mathrm{EHR}(G(n, 1 - n^{-\alpha}), G(m, 1 - m^{-\alpha}), k)$. Но раз графы $G(n, n^{-\alpha})$ и $G(m, m^{-\alpha})$ были $k-$элементарно эквивалетны, то и их дополнения должны быть $k-$элементарно эквивалетны (раз они были $k-$элементарно эквивалетны для любого k, то их геометрическая структура подобна, а значит и дополнения к этой структуре подобны. Или если весь граф был раскрашен в красные ($p = n^{-\alpha}$) и синие ($p = n^{1-\alpha}$) ребра, то у нас сначала были красные, а затем мы перешли к синим, причем на красных Консерватор выигрывал). Из чего следует, что граф $G(n, 1 - n^{-\alpha})$ подчиняется закону 0 или 1. □

2. *Доказательство.* Путь доказательства аналогичен доказательству теоремы 1 (Глебский, Коган, Легонький, Толанов, Фагин). Нужно показать, что для данного k Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре EHR(G(n, p(n)), G(m, p(m)), k). Для этого воспользуемся леммой, по которой нужно показать, что граф $G(n, p(n))$ обладает свойством расширения уровня $k - 1$.
   (я понимаю, что нам не давали теорему про то, что у Консерватора есть выигрыш. стратегия в игре из k шагов тогда и только тогда, когда граф подчиняется $k-$закону 0 или 1, но вроде как она следует из доказательства общей теоремы)
   Воспользуемся методом первого момента и покажем что вероятность того, что $G(n, p)$ не обладает свойством расширения уровня $k - 1$ стремится к нулю.
   Пусть $A = \{v_1, ..., v_a; u_1, ..., u_{k-1-a} : \text{ попарно различны } \}$. (я пропущу 2 промежуточных шага в следующих рассуждениях, которые аналогичны доказательству с лекции)
   $$\mathrm{P}\left(G(n,p) \text{ не обладает свойством расширения уровня } k-1\right) \leq$$
   $$\leq \sum_{0 \leq a \leq k-1} \sum_{A} (1 - p^a(1-p)^{k-1-a})^{n-(k-1)} \leq C_n^{k-1} 2^{k-1} (1 - p^{k-1})^n \leq n^{k-1} 2^{k-1} e^{-n^{1-(k-1)\alpha}} =$$
   $$= \exp\left((k-1)\ln n + (k-1)\ln 2 - n^{1-(k-1)\alpha}\right) \to 0,$$
   т.к. $1 - (k-1)\alpha > 0$ по условию и $p^a(1-p)^{s-a} \geq p^s$ при $n \to \infty$ и $p \to 0$. □

3. -

4. *Доказательство.* Для начала запишем формулу для данного свойства:
   $$\phi = \forall x \forall y \exists z (x \sim z) \wedge (y \sim z)$$
   (конечно, по хорошему нужно еще добавить запрещающие условия на то, что z может совпасть с x или y, или x и y могут совпасть, но я это опущу как маловероятные события) Хочу показать, что
   $$\mathrm{P}\left(G(n,p) \vDash \phi\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\exists x, y \forall z \neg((x \sim z) \wedge (y \sim z))\right) = 1 - C_n^2 (1-p^2)^{n-2} \approx 1 - n^2 \exp(-np^2)$$

Пусть $\hat{p} = n^{-1/2}$ — пороговая вероятность. Тогда при $p = n^{-1/2+\varepsilon/2} >> \hat{p}$, $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}\left(G(n,p) \vDash \phi\right) \approx 1 - \exp\left(2\ln n - n^{\varepsilon}\right) \to 1.$$

Тепер посмотрим на случай, когда $p = \mathrm{o}(\hat{p}) = n^{-1/2-\varepsilon/2}$.
Пусть X_n — число вишен (то есть штук, в которых 2 вершины имеют какого-то соседа). Покажем, что в этом случае их не может быть больше, чем C_n^2, тем самым получая, что существует 2 вершины, не имеющие соседа. Воспользуемся неравенством Маркова:

$$\mathrm{P}\left(X_n \geq C_n^2\right) \leq \frac{\mathrm{E}X_n}{C_n^2} = \Theta\left(\frac{C_n^3 p^2}{c_n^2}\right) = \Theta\left(np^2\right) = \Theta\left(n^{-\varepsilon}\right) \to 0$$

Значит, пороговой вероятностью для свойства ϕ является функция $n^{-1/2}$.

□

5. *Доказательство.* .

   (a) Возьмем полный двудольный подграф $K_{k,k}$ на $2k$ вершинах. Он строго сбалансирован, его плотность $\rho = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2}$. Значит, по теореме Боллобаша число копий $K_{k,k}$ в $G(n, n^{-2/k})$ стремится по распределению к случ. величине, распределенной по Pois($\frac{1}{aut(K_{k,k})}$). Как следствие

   $$\mathrm{P}\left(\text{в } G(n, n^{-2/k}) \text{ нет копий } K_{k,k}\right) \to e^{-1/aut(K_{k,k})}$$

   Очевидно, что свойство содержать $K_{k,k}$ является выразимым на языке 1го порядка и его кванторная глубина равна $2k$ (по одному квантору на вершину).

   (b) Воспользовавшись результатом 2й задачи, при $\alpha < 0.5$ граф $G(n, n^{-\alpha})$ удовлетворяет 3-закону 0 или 1. Если же $1 > \alpha \geq 0.5$, то рассмотрим следующие случаи:

      i. Заметим, что $p = n^{-1}$ — пороговая вероятность для появления треугольника, а значит, в структуре нашего графа почти наверняка он присутствует. Значит, с такой штукой Консерватор справится.

      ii. $p = n^{-3/2}$ — пороговая вероятность для вишни, так что она у нас тоже есть.

      iii. Теперь предположим, что Новатор выбрал 2 вершины u и v: тогда возможны варианты: а) когда есть вершина, соединенная с одной из них, б) есть вершина, не соединенная ни с кем из них.
      а) Запишем свойство, выражающая эту конфигурацию:

      $$\phi = \exists z \left(u \sim z \wedge v \nsim z \vee u \nsim z \wedge v \sim z\right)$$

      $$\neg\phi = \forall z \neg \left(u \sim z \wedge v \nsim z \vee u \nsim z \wedge v \sim z\right)$$

      Использую оценку:

      $$1 + x \leq e^x$$

      $\mathrm{P}\left(G(n,p) \vDash \neg\phi\right) = \left(1 - 2p(1-p)\right)^{n-2} = \left(1 - 2p + 2p^2\right)^n \leq e^{-np+np^2} = e^{-n^{1-\alpha}+n^{1-2\alpha}} \to 0,$
      т.к. при $1 > \alpha \geq 0.5 \Rightarrow -n^{1-\alpha} + n^{1-2\alpha} \to -\infty$.
      Значит, такая вершина есть.
      б)

      $$\phi = \exists z \left(u \nsim z \wedge v \nsim z\right)$$

$$\neg\phi = \forall z \neg\left(u \nsim z \wedge v \nsim z\right)$$

$$\mathrm{P}\left(G(n,p) \vDash \neg\phi\right) = \left(1-(1-p)^2\right)^{n-2} = \left(2p-p^2\right)^n \leq 2^n p^n e^{-0.5pn} = e^{n\ln 2 + n\ln p - 0.5np} =$$

$$= \exp\left(n\ln 2 - \alpha n \ln n - 0.5n^{1-\alpha}\right) \to 0$$

Следовательно, и такая вершина сущесвует.
Тем самым все варианты разобраны, следовательно, у Консерватора всегда есть возможность ответить Новатору.

□

6. *Доказательство.* Хотим построить строго сбалансированный граф G с определенной плотностью $\rho \in [1, 3/2)$ — рациональное число. Пусть:

$$\rho = \frac{e(G)}{v(G)} = \frac{v(G)-1+r}{v(G)},$$

где $0 \leq r \leq v(G)/2+1$.
Для начала подберем подходящее число вершин графа $v(G)$ и число ребер $e(G)$: $v(G) \leq e(G) \leq C^2_{v(G)}$, чтобы получить нужную плотность (это можно сделать, так как плотность является рациональным числом). Далее, два случая:
1) $r = 1$. Тривиальный случай с плотностью $= 1$. Нужно просто построить цикл на всех вершинах.
2) $r \geq 2$. На $(v(G)-1)$ вершине построим цикл (строго сбалансированный граф с единичной плотностью) и проведем оставшиеся r ребер от последней вершины ко всем из множества $T_G(r)$ (учитывая, что мы занумеровали вершины графа от 1 до $v(G) = n+1$):

$$T_G(r) = \{t : (t-1)r > t \cdot r \ (\mathrm{mod\ n})\},$$

где t пробегает по всем $(v(G)-1)$ вершинам. Замечание: $|T_G(r)| = r$.
Докажем, что мы получили строго сбалансированный граф.
Введем функцию

$$f(H) = (v(H)-1)\frac{e(G)}{v(G)-1} - e(H)$$

$$f(G) = 0$$

Понятно, что если $f(H) > 0$ для любого подграфа H из G, то G — строго сбалансированный граф
Теперь посмотрим на то, что может быть внутри графа G. Если его индуцированному графу H не принадлежит последняя вершина, то это максимум цикл с плотностью 1, а значит его плотность меньше плотности G. Если же последняя вершина принадлежит H, то графу H ($n' = v(H)-1$) принадлежит не больше, чем $\lfloor n'r/n+1 \rfloor + n' - 1$ ребер (первая часть ребер от последней вершины, оставшиеся $n'-1$ — максимальное число от неполного цикла на n' вершинах). Замечание: для получения чего-то по плотности большего чем G, нужно набирать вершины подряд, надеяся получить как минимум по 2 ребра за каждую вершину. Из этого следует оценка на ребра из множества $T_G(r)$.

$$f(H) = (v(H)-1)\frac{n+r}{n} - e(H) > n' + \frac{n'r}{n} - (\frac{n'r}{n} + n') = 0$$

Значит, построенный граф является строго сбалансированным. □