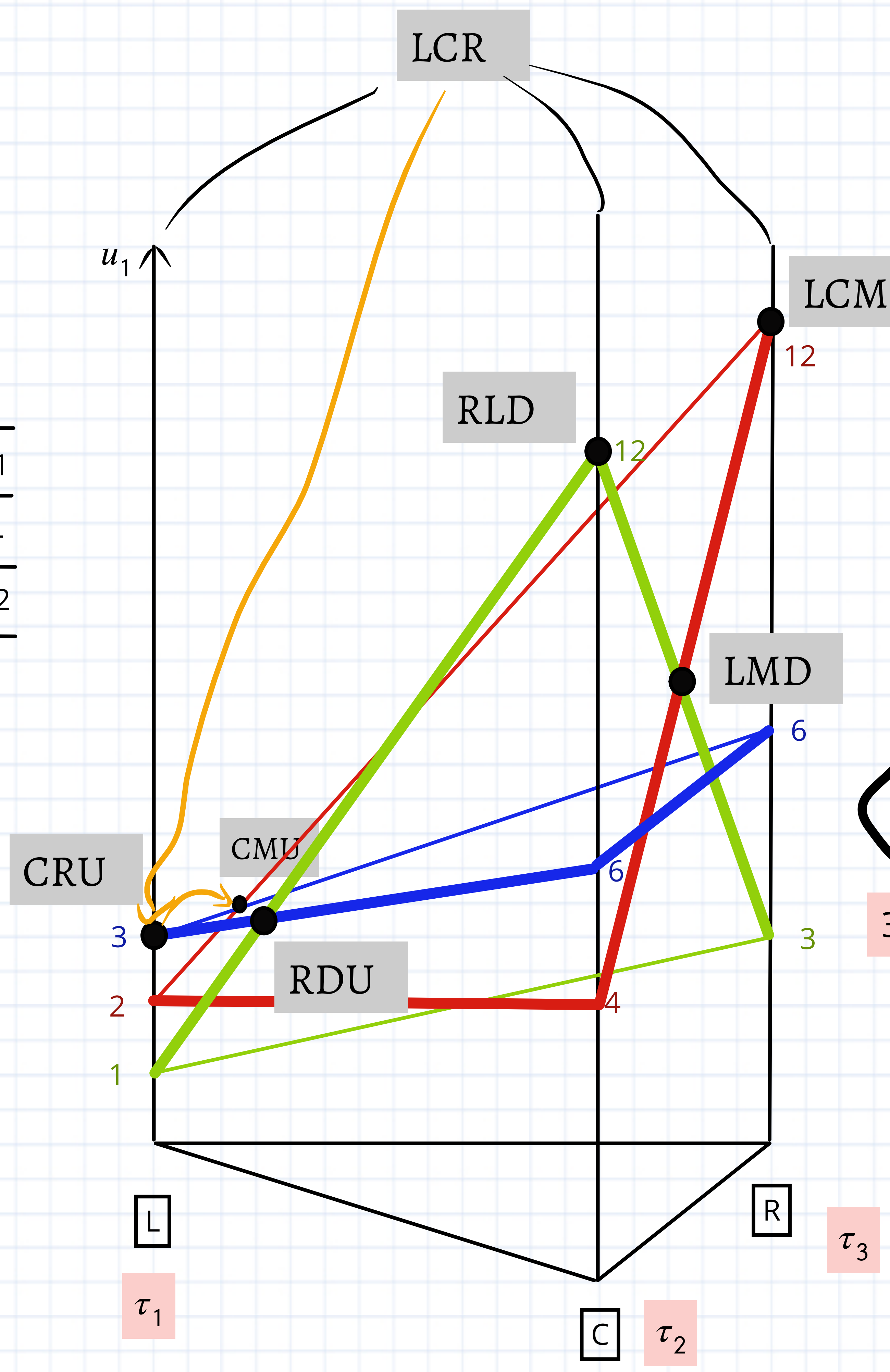
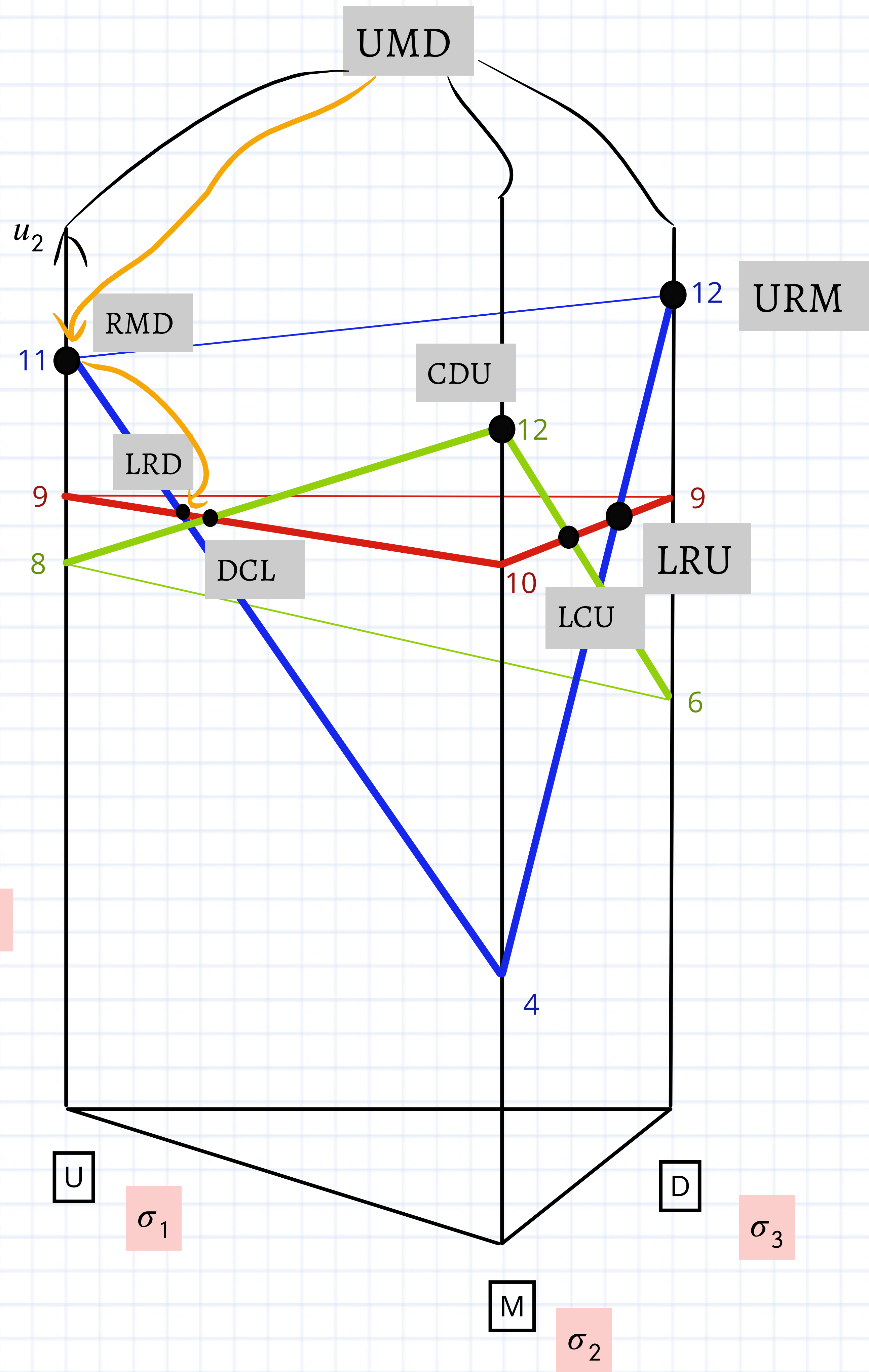
№1

		1	2	3
	1 \ 2	L	C	R
1	U	3, 9	6, 8	6, 11
2	M	2, 10	4, 12	12, 4
3	D	1, 9	12, 6	3, 12



LCR	UMD
CRU	UMD
CRU	RMD
CMU	RMD
CMU	LRD

Это равновесие Нэша



Пусть $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)-$ вероятности ходов для 1 – го игрока в равновесии, (τ_1,τ_2,τ_3) – для 2 – го.

Обозначения A и B – с лекции (матрицы выигрыша для 1го и 2го игроков)

Запишем систему уравнений:

Из первой точки:

$$\tau_2 = 0,$$

$$(A\tau)_2 = (A\tau)_1 \Rightarrow 2\tau_1 + 4\tau_2 + 12\tau_3 = 3\tau_1 + 6\tau_2 + 6\tau_3$$

Из второй точки:

$$\sigma_3 = 0,$$

$$\left(\sigma^T B\right)_1 = \left(\sigma^T B\right)_3 \Rightarrow 9\sigma_1 + 10\sigma_2 + 9\sigma_3 = 11\sigma_1 + 4\sigma_2 + 12\sigma_3$$

Добавим уравнения:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

Решение:

$$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

$$(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \left(\frac{6}{7}, 0, \frac{1}{7}\right)$$

②

I \ II	L	R
U	$-10,-5$ (α)	$6,0$ (β)
D	$0,4$ (γ)	$0,0$ (δ)

Все коррелир. р-ния?

чистые р-ния: (U,R), (D,L).

$$-15\alpha+6\beta+4\gamma \to max$$

I: видит U.

$$u_I(U|U) = -10\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+6\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta};\quad u_I(D|U)=0 \;\Rightarrow\; 6\beta-10\alpha \geq 0,\quad \alpha \leq \frac{3}{5}\beta$$

I: видит D.

$$u_I(D|D)=0;\quad u_I(U|D) = -10\cdot\frac{\gamma}{\gamma+\delta}+6\cdot\frac{\delta}{\gamma+\delta} \;\Rightarrow\; 6\delta-10\gamma \leq 0,\quad \gamma \geq \frac{3}{5}\delta$$

II: видит L.

$$u_{II}(L|L) = -5\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+4\cdot\frac{\gamma}{\alpha+\gamma};\quad u_{II}(R|L)=0 \;\Rightarrow\; -5\alpha+4\gamma \geq 0,\quad \gamma \geq \frac{5}{4}\alpha$$

II: видит R.

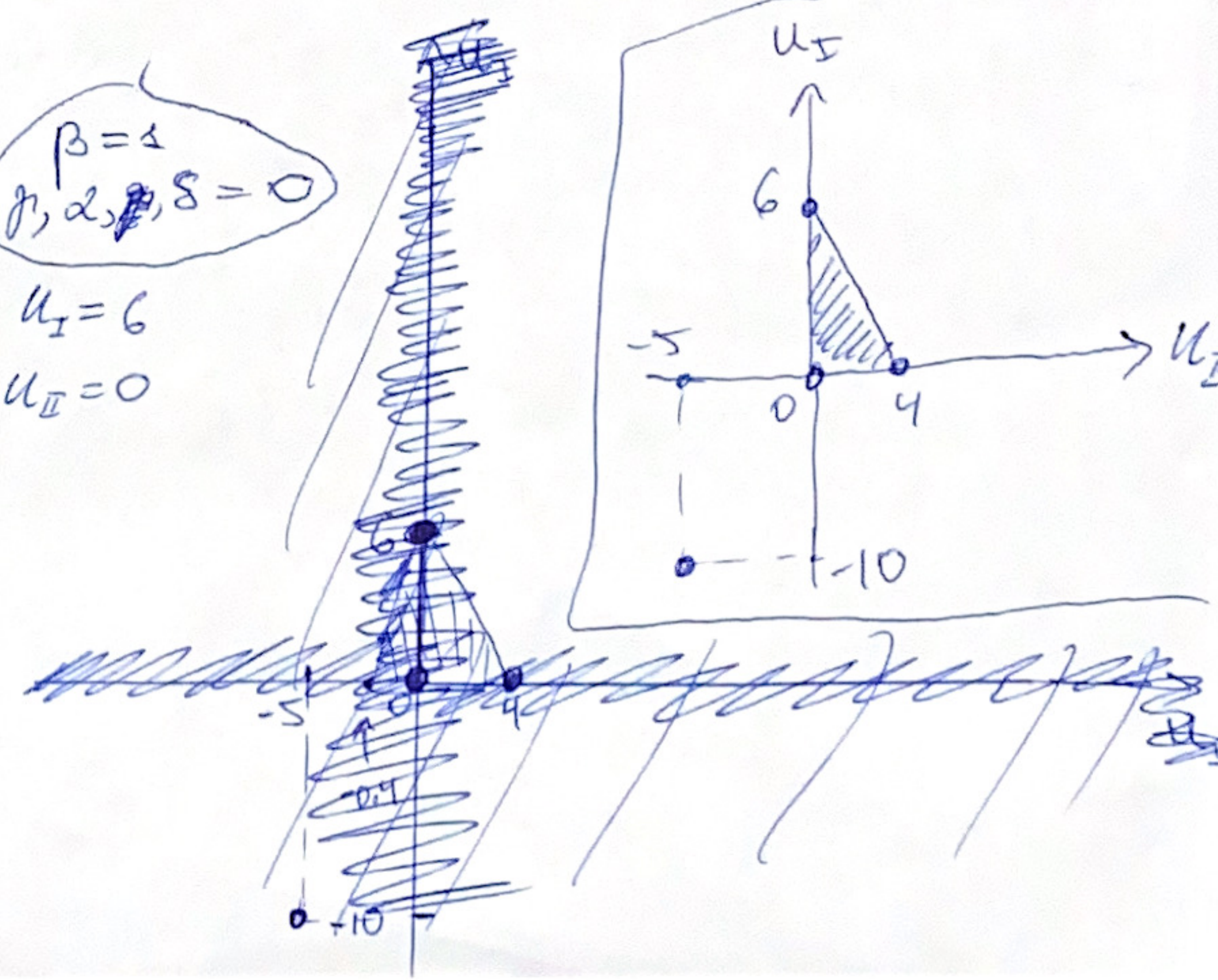
$$u_{II}(R|R)=0;\quad u_{II}(L|R) = -5\cdot\frac{\beta}{\beta+\delta}+4\cdot\frac{\delta}{\beta+\delta} \;\Rightarrow\; 0 \geq -5\beta+4\delta,\quad \beta \geq \frac{4}{5}\delta$$

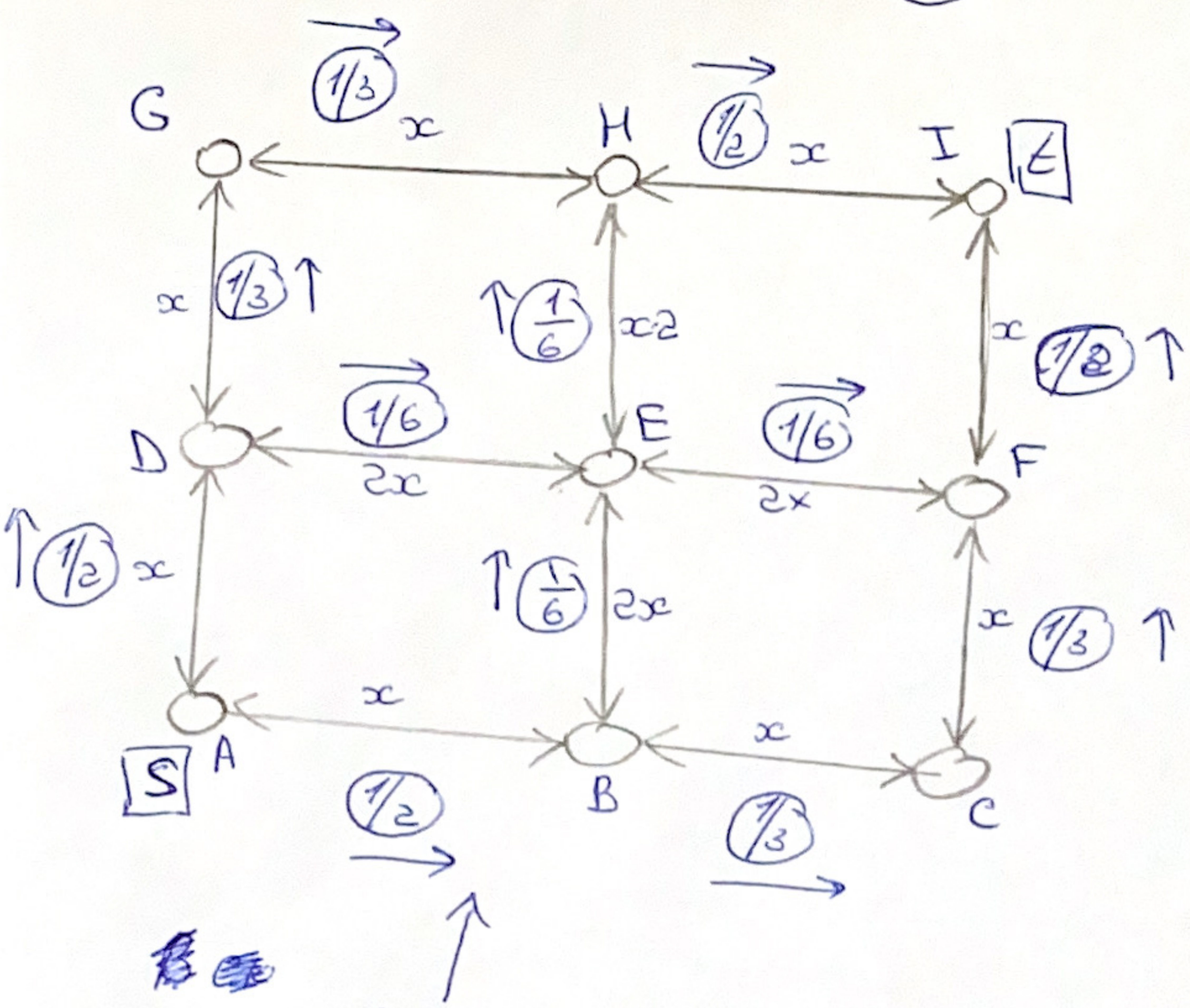
$$\begin{cases} -15\alpha+6\beta+4\gamma \to max \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=1 \\ \alpha \leq \frac{3}{5}\beta,\ \gamma \geq \frac{3}{5}\delta \\ \beta \geq \frac{4}{5}\delta,\ \gamma \geq \frac{5}{4}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta=1 \\ \gamma,\alpha,\cancel{\beta},\delta=0 \end{array}$$

$u_I=6$

$u_{II}=0$

min: $\left.\begin{array}{l}\alpha=0.23 \\ \beta=0.38 \\ \gamma=0.28 \\ \delta=0.11\end{array}\right\}$ $u_I=u_{II}=0$





(S, t, r), $r = 1$

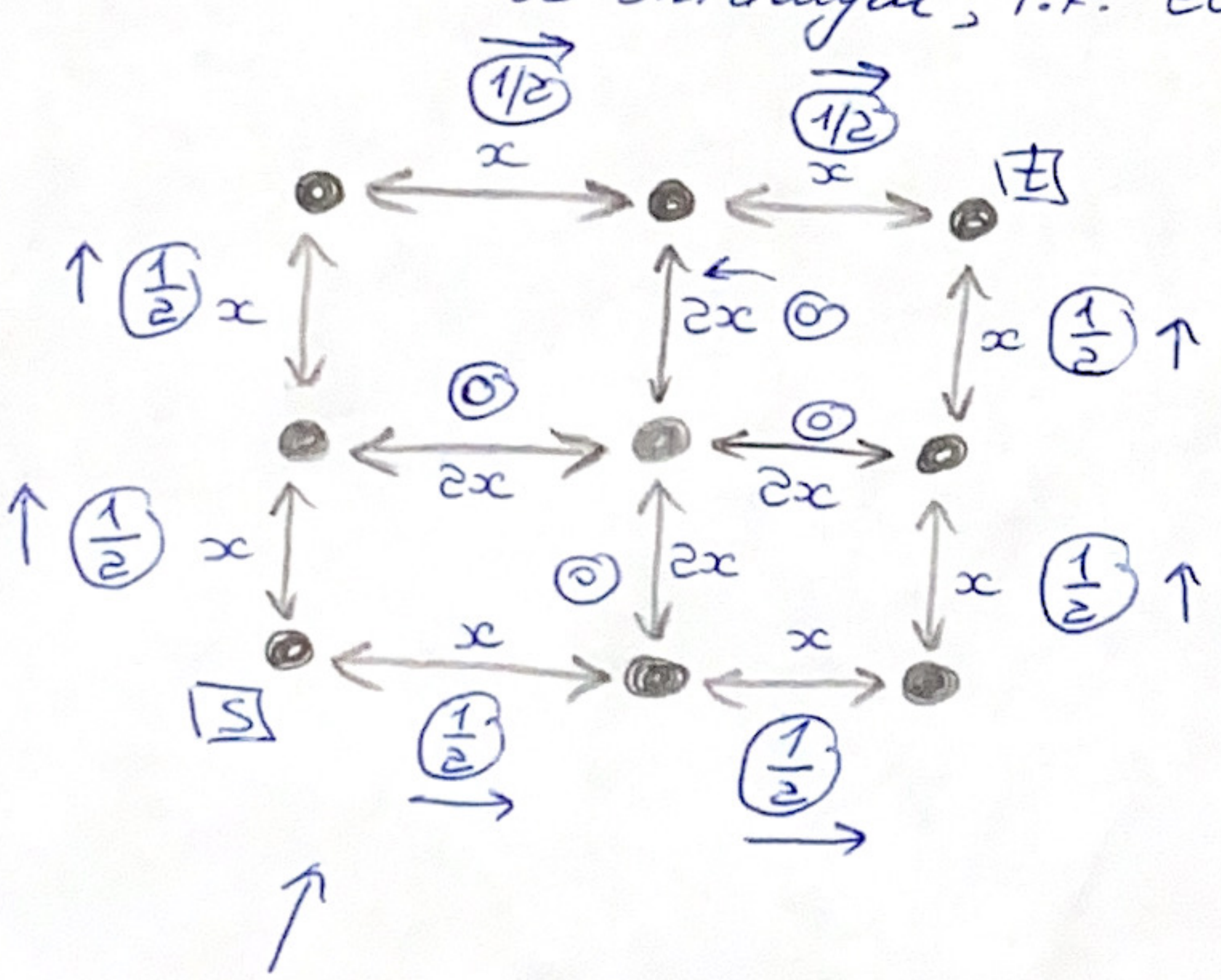
Равновесие (в кружочках части потока)

в силу симметричности сети

Пояснение: от A и в I должны приходить одинаковые части потока, причём их сумма $= 1$. Далее, на оставшихся рёбрах агенты тратят одинаковое кол-во „времени" $\Rightarrow$ любой из этих частей невыгодно „лезть" на чужое ребро (рёбер), тем самым увеличивая свои издержки.

Суммарные издержки $= 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot 2\cdot\frac{1}{6} = 4\frac{2}{3} \approx 4.67$

Это точно не оптимум, т.к. если пустить поток следующим образом, то получим:



Издержки $= 8\cdot\frac{1}{2} = 4$

~~не факт, что оптимум, но лучше решения~~

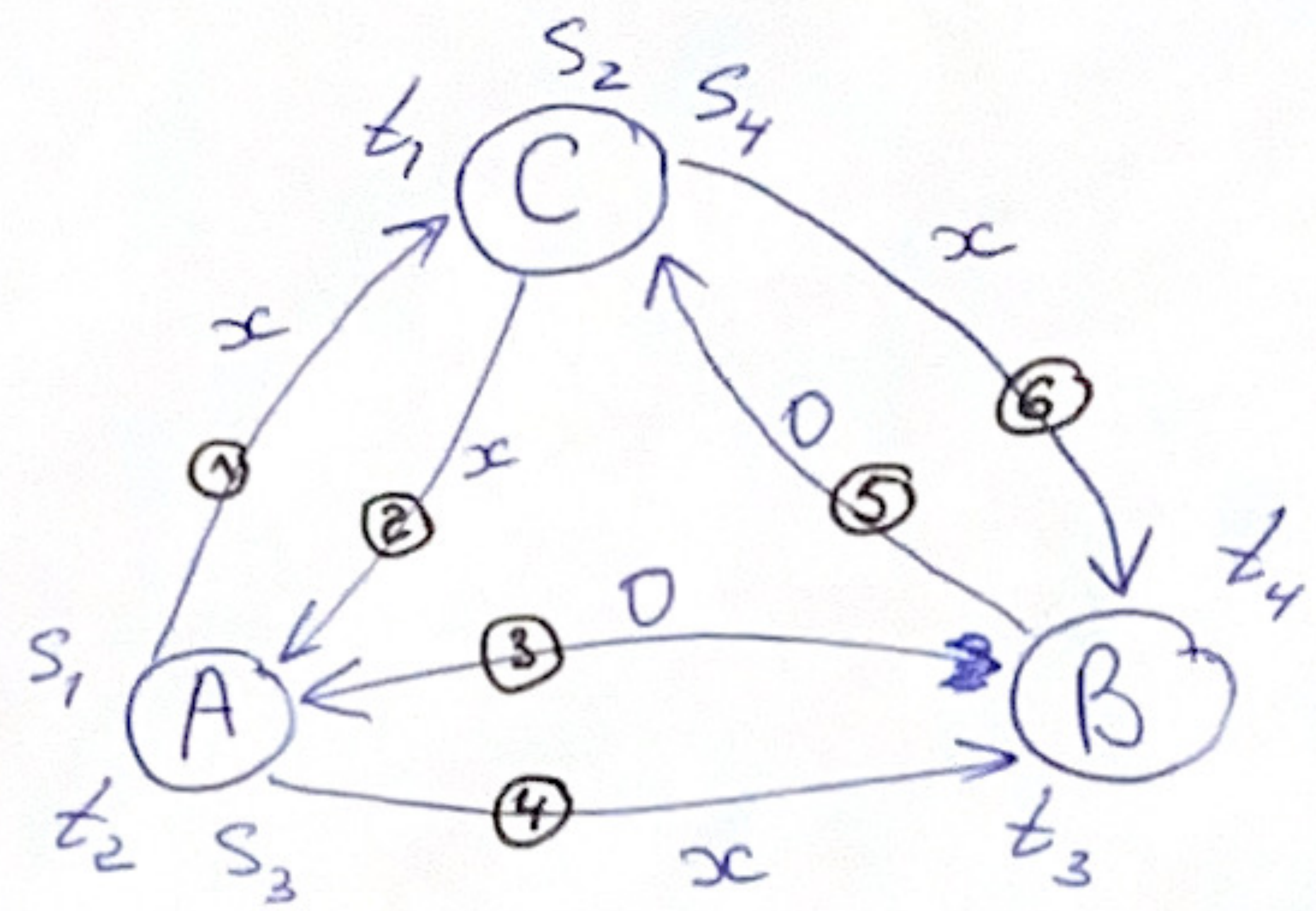
$\Rightarrow$ издержки от децентрализации $=$

$$= \frac{4\frac{2}{3}}{4} = \frac{7}{6} \text{ (как минимум)}$$

Это оптимум, т.к. поток двигается по путям с наименьшими издержками.

4

(a)



ⓘ — номер ребра

] $\tau_1 = \tau_2 = 1$

$\tau_3 = \tau_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61$

Оптимум: $\forall$ заказ едет вдоль „своего" ребра

$\Rightarrow$ суммарные издержки $= 2 + 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 3 + \sqrt{5}$

Плохое р-сие: $\forall$ заказ едет крюком

τ_i		номер ребра
1	s_1, t_1 : A – B – C	$\cancel{x+0}$
1	s_2, t_2 : C – B – A	$\cancel{x+0}$
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	s_3, t_3 : A – C – B	$\cancel{x+x}$
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	s_4, t_4 : C – A – B	$\cancel{x+x}$

Суммарные издержки:

$2\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} =$

$= 7 + 3\sqrt{5}$

потоки через ребра

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ f_4 = f_6 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$ЦА = \frac{7+3\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{(7+3\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

] алгоритм игрока: $S_t = (t) \bmod 4$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	....
S_t	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
l_1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
l_2	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
l_3	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	

природа

одинаковые

$$\min_{i\in\{1,2,3\}} \sum_{t=1}^{T} l_i^t$$

$$\Rightarrow R_T = L_T - L^E_{min} = 1 + L^E_{min} - L^E_{min} = 1$$

по $S_t = 1$, например.

$$Q_T = L_T - L^{SWAP}_{min} = L_T,$$

т.к. $L^{SWAP}_{min} = 0$ при $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$L_T = \left\lfloor \frac{T}{3} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \frac{Q_T}{R_T} = \frac{T}{3} \to +\infty, \quad T \to +\infty$$