Задачи по курсу случайных графов. Часть 2

Константинов Даниил Николаевич, 5 курс ФПМИ
dkonstantinov0@gmail.com

1. Пусть $\Gamma(n) = \{1, ..., n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n, p)$ для свойства содержать тройку (x, y, z) — решение уравнения $x + y = z$.

Доказательство. Пусть X_n — количество троек $(x, y, z) : x + y = z$ в $\Gamma(n, p)$.
Пусть также $f(n)$ — все такие тройки (x, y, z) в $\Gamma(n)$.

$$f(n) = \Theta(n^2)$$

(нужно выбрать два числа - n^2). Пусть

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{если i-я тройка есть в } \Gamma(n,p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $X_n = \sum_{i=1}^{f(n)} I_i$. $\mathrm{E}X_n = f(n)p^3 = \Theta(n^2p^3) \Rightarrow$ при $p = \mathrm{o}(n^{-2/3})$ $\mathrm{E}X_n \to 0 \Rightarrow$ $\mathrm{P}(X_n = 0) \to 1$. (метод 1го момента)
Теперь используем метод 2го момента, чтобы показать, что $\mathrm{P}(X_n = 0) \to 0$. Нужно, чтобы $VarX_n = \mathrm{o}((\mathrm{E}X_n)^2)$.

$$VarX_n = Var(\sum_{i=1}^{f(n)} I_i) = \sum_{i=1}^{f(n)}(VarI_i) + \sum_i \sum_j cov(I_i, I_j) = \sum_i \sum_j cov(I_i, I_j) \leqslant \sum_i \sum_j \mathrm{E}(I_iI_j).$$

Если (I_i, I_j) не имеют общих чисел, то их ковариация равна 0. Если 2 общих числа, то таких троек $\mathrm{O}(n^2)$ (выбираем 2 элемента, оставшиеся — однозначно), $E(I_iI_j) = p^4$. Если же у них один общий элемент, то таких пар (I_i, I_j) $\Theta(n^3)$ и $E(I_iI_j) = p^5 \Rightarrow$ $VarX_n = \mathrm{O}(n^3p^5 + n^2p^4)$.

$$\mathrm{P}(X_n = 0) \leqslant \frac{VarX_n}{(\mathrm{E}X_n)^2} = \mathrm{O}(\frac{1}{np} + \frac{1}{n^2p^2}) \to 0 \text{ при } p = w(n^{-2/3}) \text{ и } n \to \infty.$$

Ответ: $\hat{p} = n^{-2/3}$ □

2. Пусть $\Gamma(n) = \{1, ..., n\}$. Найдите пороговую вероятность в $\Gamma(n, p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k.

Доказательство. Пусть X_k — количество арифметических прогрессий длины k в $\Gamma(n, p)$. Всего таких прогрессий в $\Gamma(n)$ — $f(n, k) = \Theta(n^2)$ (любая а.п. однозначно определяется первыми двумя членами). Пусть

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{если i-я арифметическая прогрессия длины k есть в } \Gamma(n,p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $X_n = \sum_{i=1}^{f(n,k)} I_i$. $\mathrm{E}X_n = f(n, k)p^k = \Theta(n^2p^k) \Rightarrow$ при $p = \mathrm{o}(n^{-2/k})$ $\mathrm{E}X_n \to 0 \Rightarrow$ $\mathrm{P}(X_n = 0) \to 1$. (метод 1го момента)
Теперь будем использоваться метод 2го момента. Аналогично задаче 1

$$VarX_n = \sum_i \sum_j cov(I_i, I_j) \leqslant \sum_i \sum_j \mathrm{E}(I_iI_j).$$

Если (I_i, I_j) не имеют общих элементов, то их ковариация $= 0$. Если (I_i, I_j) имеют ровно 1 общий элемент, то их $\mathrm{E}(I_i I_j) = p^{2k-1}$ и таких пар $\mathrm{O}(n^3)$ (выбираем 1, затем в каждую из прогрессий еще по одному следующему, остальные — однозначно определяются). Если (I_i, I_j) имеют $\geqslant 2$ общих элементов, то таких пар $\mathrm{O}(n^2)$ и $\mathrm{E}(I_i I_j) \leqslant p^k$ (так как всего прогрессий $\Theta(n^2)$, а пересечение прогрессий по $\geqslant 2$ элементам задает прогрессию). Получаем, $VarX_n = \mathrm{O}(n^3 p^{2k-1} + n^2 p^k)$.

$$\frac{VarX_n}{(\mathrm{E}X_n)^2} = \mathrm{O}(\frac{1}{np} + \frac{1}{n^2 p^k}) \to 0 \text{ при } p = w(n^{-2/k} \text{ и } n \to \infty) \Rightarrow \mathrm{P}(X_k = 0) \to 0$$

Ответ: $\hat{p} = n^{-2/k}$ □

3. Докажите следствие 1 из теоремы Прохорова.
Следствие 1. *Пусть* $\{\mathrm{P}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве* S. *Если она является плотной и любая ее слабо сходящаяся подпоследовательность слабо сходится к одной и той же вероятностной мере* Q, *то* $\mathrm{P}_n \xrightarrow{w} Q$.

Доказательство. Пусть $F \subset S$, F — любое замкнутое множество. Пусть также $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(F) = Q(F) + \varepsilon, \varepsilon > 0$. По условию, P_n — плотная $\Rightarrow$ явл. относительно компактной (по т. Прохорова + то, что она счетная) $\Rightarrow$ из нее можно излечь слабо сход. подпоследовательность P_{n_k}. По условию, $P_{n_k} \xrightarrow{w} Q$, что эквивалентно по теореме Александрова: $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_{n_k}(F) \leqslant Q(F)$. Но, т.к. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(F) = Q(F) + \varepsilon$, я могу извлечь такую P_{n_k} : $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_{n_k}(F) = Q(F) + \varepsilon/2 > Q(F)$. Получили противоречие. Значит, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}_n(F) \leqslant Q(F)$, что эквивалентно по т.Александрова $P_n \xrightarrow{w} Q$. □

4. Докажите теорему 1 о равномерной интегрируемости.
Теорема 1. (о равномерной интегрируемости) *Пусть* $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ *— неотрицательные случайные величины. Тогда* $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi \Leftrightarrow \{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ *равномерно интегрируема.*

Доказательство. .
$\Leftarrow$
По условию, $\sup\limits_n \mathrm{E}(|\xi_n I\{\xi_n > c\}|) \xrightarrow[c\to\infty]{} 0.$
Критерий слабой сходимости: $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$ для любой непрерывной ограниченной $f(x)$.
Рассмотрим непрерывную ограниченную функцию,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant c \\ c, & x > c \end{cases}$$

Значит, $Ef(\xi_n) \to Ef(\xi)$. В то же время,

$$|\mathrm{E}f(\xi_n) - \mathrm{E}\xi_n| \leqslant \mathrm{E}|f(\xi_n) - \xi_n| \leqslant \sup \mathrm{E}(|\xi_n I\{\xi_n \geqslant c\}|) \xrightarrow[c\to\infty]{} 0$$

Т.е., $\mathrm{E}f(\xi_n) \to \mathrm{E}\xi_n$. Аналогично, $|Ef(\xi_n) - E\xi| \xrightarrow[c\to\infty]{} 0$. Значит, $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$.
$\Rightarrow$
По условию, $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$.

□

5. Пусть $p \sim cn^{-k/(k-1)}, c > 0$ — фиксированная константа, а X_k — это число деревьев фиксированного размера k в $G(n,p)$. Докажите, что $X_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$ при $n \to \infty$, где $\lambda = \frac{c^{k-1}k^{k-2}}{k!}$.

Доказательство. Рассмотрим r-й факториальный момент X_k.

$$X_k : C_n^k k^{k-2} p^{k-1}$$
$$X_k - 1 : C_{n-k}^k k^{k-2} p^{k-1}$$

Тогда,

$$E(X_k)_r = \prod_{i=0}^{r-1} C_{n-ki}^k k^{k-2} p^{k-1} \sim \left(\frac{n^k}{k!} k^{k-2} \left(cn^{-k/(k-1)} \right)^{k-1} \right)^r =$$
$$= \left(\frac{k^{k-2}}{k!} n^k c^{k-1} n^{-k} \right)^r = \left(\frac{k^{k-2}}{k!} c^{k-1} \right)^r = \lambda^r$$

Согласно методу моментов, $X_k \xrightarrow{d} Pois(\lambda)$

□

6. (a) Пусть $G = C_3 \sqcup C_3$ — два непересекающихся треугольника, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} \frac{1}{2} Z(Z-1)$ при $n \to \infty$, где $Z \sim Pois(c^3/6)$.

Доказательство. X_G — количество пар непересекающихся треугольников в $G(n,p)$, X_H - количество $C_3 \cup C_3$ в $G(n,p)$. X_{C_3} — количество треугольников в $G(n,p)$. $m(C_3) = \rho(C_3) = 1, aut(C_3) = 2 * 3 = 6$ и по теореме 2.6 $X_{C_3} \xrightarrow{d} Pois(\lambda), \lambda = \frac{c^3}{6}$.

$$\mathrm{P}(X_G = X_H) = \mathrm{P}(X(\text{пар пересекающ.треугольников}) = 0) = \mathrm{P}(X(L) = 0) \to 1,$$

т.к. $\mathrm{E}X_L = C_n^3 3 C_{n-3}^2 p^6 + C_n^3 3(n-3)p^5 \to 0$ при $n \to \infty$ и $np \to c$ (метод первого момента). (треугольники у которых есть либо общая вершина, либо общее ребро)

Из этого следует, что

$$\frac{X_G}{X_H} \xrightarrow{d} 1$$
$$X_H = \frac{1}{2} X_{C_3}(X_{C_3} - 1) \xrightarrow{d} \frac{1}{2} Z(Z-1)$$

(выбрали 2 неконгруэнтных треугольника из всех в случайном графе)

$$X_G = \frac{X_G}{X_H} * X_H \xrightarrow{d} \frac{1}{2} Z(Z-1)$$

(по лемме Слуцкого) □

(b) Пусть $G = C_3 \sqcup C_4$ — два непересекающихся цикла длины 3 и 4, $pn \to c > 0$. Докажите, что тогда $X_G \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$, где Z_1 и Z_2 — независимы, $Z_1 \sim Pois(c^3/6), Z_2 \sim Pois(c^4/8)$.

Доказательство. $aut(C_3) = 6$, $aut(C_4) = 8$, графы C_3 и C_4 строго сбалансированы и имеют одинаковую плотность $\Rightarrow$ по теореме 2.7 $(X_n(C_3), X_n(C_4)) \xrightarrow{d} (Z_1, Z_2)$, где Z_1 и Z_2 независимы и имеют пуассоновское распределение с $\lambda_1 = c^3/6$ и $\lambda_2 = c^4/8$.
Пусть $H = C_3 \cup C_4$ — два возможно пересекающихся циклов длины 3 и 4, L — два всегда пересекающихся цикла длины 3 и 4.

$$\mathrm{P}(X_n(G) = X_n(H)) = \mathrm{P}(X_n(L) = 0)$$

$$\mathrm{E}X_n(L) = C_n^3 3 C_{n-3}^3 p^7 + C_n^3 3 C_{n-3}^2 p^6 + C_n^4 p^5 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ при } np \to \infty$$

(выбрали у циклов общую вершину, общее ребро, 4 общих вершины) Значит, по методу первого момента,

$$\mathrm{P}(X_n(G) = X_n(H)) \to 1 \Rightarrow \frac{X_n(G)}{X_n(H)} \xrightarrow{d} 1$$

$$X_n(H) = X_n(C_3)X_n(C_4) \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$$

$$X_n(G) = \frac{X_n(G)}{X_n(H)} X_n(H) \xrightarrow{d} Z_1 Z_2$$

□

7. Пусть I_n — число изолированных ребер в случайных графе $G(n,p)$. Обозначим $w(n) = 2pn - \ln n - \ln\ln n$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(I_n > 0) = \begin{cases} 0, \text{ если } p = \mathrm{o}(n^{-2}) \text{ или } w(n) \to \infty; \\ 1, \text{ если } p = w(n^{-2}) \text{ и } w(n) \to -\infty. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Если $p \ll n^{-2}$,

$$\mathrm{E}I_n = C_n^2 \cdot 1 \cdot p(1-p)^{2(n-2)} \sim \frac{n^2}{2} p e^{-2np}$$

Из этого следает, что $EI_n \to 0 \Rightarrow \mathrm{P}(I_n > 0) \to 0$ (метод 1 момента).
Если $w(n) \to \infty$, то

$$\mathrm{E}I_n \sim \frac{n^2}{2} p e^{-(2np - \ln n - \ln\ln n)} e^{-\ln n - \ln\ln n} = \frac{np}{2\ln n} e^{-w(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{w(n)\to\infty} 0$$

Значит, $\mathrm{P}(I_n > 0) \to 0$.
2) Если $n^2 p \to \infty$ и $w(n) \to -\infty$
Из условия $w(n) \to -\infty$ следует, что $2np << \ln n + \ln\ln n$ (начиная с некоторого n), т.е. p медленнее $1/n$. Подсчитаем второй момент:

$$\mathrm{E}I_n^2 = C_n^2 \cdot p(1-p)^{2(n-2)} C_{n-2}^2 \cdot p(1-p)^{2(n-4)}$$

Воспользуемся методом второго момента:

$$\frac{DI_n}{(\mathrm{E}I_n)^2} = \frac{C_n^2 \cdot p(1-p)^{2(n-2)} C_{n-2}^2 \cdot p(1-p)^{2(n-4)} - (C_n^2 \cdot p(1-p)^{2(n-2)})^2}{(C_n^2 \cdot p(1-p)^{2(n-2)})^2} =$$

$$= \frac{C_n^2 \cdot p^2 (1-p)^{2n-12} C_{n-2}^2}{(C_n^2)^2 p^2 (1-p)^{4(n-2)}} - 1 \sim \frac{n^4/4p^2(1-p)^{2n-12}}{n^4/4p^2(1-p)^{4n-8}} - 1 = \frac{1}{(1-p)^4} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и $n^{-1} >> p >> n^{-2}$

Значит, $\mathrm{P}(I_n > 0) \to 1$ □

8. Пусть $G = C_3 + K_2$ — треугольник с одной висячей вершиной. Пусть $np \to c > 0$. Докажите, что

$$X_G \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{Z} W_i,$$

где $(W_i, i \in \mathbb{N})$ — независимые $Pois(3c)$ случайные величины, а $Z \sim Pois(c^3/6)$, также независимая с ними случайная величина.

Доказательство. Количество треугольников в $G(n,p)$: $X_n(K_3) \xrightarrow{d} Z \sim Pois(c^3/6)$, как показано в 6a. Так же в 6a показано, что никакие 2 треугольника асимпототически не пересекаются ни по вершине, ни по ребру. Следовательно, G может быть получен только если к треугольнику подсоединить ребро. Очевидно, что с.в. Y_i — "подсоединить к i-й вершине треугольника ребро" имеет распределение Pois(c), тогда с.в. $W_i = Y_1 + Y_2 + Y_3$ — "i-треугольник имеет столько подсаженных ребер" — имеет распределение (как сумма пуассоновских с.в.) Pois(3c).
В силу того, что в случайном графе почти нет пересечений треугольников, можно утверджать, что W_i независимы.

$$X_G = \sum_{i=1}^{X_n(K_3)} W_i$$

□