Задачи по курсу случайных графов. Часть 3

Константинов Даниил Николаевич, М05-015а
dkonstantinov0@gmail.com

1. *Доказательство.* Докажем, что

$$\frac{L^{(t)}}{\log n} \xrightarrow{\text{P}} \gamma = \frac{1}{\alpha}, \alpha = c - 1 - \log c$$

Пусть X_k — количество древесных компонент размера k, $k = \mathrm{O}(\log n)$. $p = c/n$. Для оценивания факториалов используется формула Стирлинга и оценку на k.

$$\mathrm{E}X_k = C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)+C_k^2-k+1} \approx$$
$$\approx \frac{n^k}{k!} k^{k-2} \frac{p^k}{p} e^{-npk} = \frac{c^k}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^k}{k^{5/2}} \frac{n}{c} e^{-ck} = \frac{ne^{-\alpha k}}{\sqrt{2\pi} k^{5/2} c}$$

Если $k = \frac{1}{\alpha}(\log n + (1 + \frac{5}{2}) \log\log n)$:

$$EX_k \approx \frac{ne^{-\log n - \frac{5}{2}\log\log n - \log\log n}}{\sqrt{2\pi} c} (\frac{1}{\alpha}\log n)^{-5/2} = A \cdot (\log n)^{-6} \to 0, A = const$$

Значит, $\mathrm{P}\{X_k > 0\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (метод 1го момента).
Пусть теперь $k = \frac{1}{\alpha}(\log n - (1 + \frac{5}{2}) \log\log n)$. Тогда

$$EX_k \approx \frac{ne^{-\log n + \frac{5}{2}\log\log n + \log\log n}}{\sqrt{2\pi} c} (\frac{1}{\alpha}\log n)^{-5/2} = A \cdot \log n \to \infty$$

Рассмотрим второй факториальный момент.

$$\mathrm{E}X_k(X_k - 1) = C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)+C_k^2-k+1} C_{n-k}^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-2k)+C_k^2-k+1} \approx (\mathrm{E}X_k)^2$$

Значит, $DX_k = \mathrm{o}((\mathrm{E}X_k)^2)$.

$$\mathrm{P}\{\left|\frac{X_k - \mathrm{E}X_k}{\log n}\right| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX_k}{\log^2 n \varepsilon^2} = \frac{\mathrm{o}(\log^2 n)}{\varepsilon^2 \log^2 n} \to 0, n \to \infty$$

Следовательно, $\gamma = \frac{1}{\alpha}$. □

2. *Доказательство.* Пусть X_n— количество унициклических компонент в случайном графе, а $U_n(k)$ — количество унициклических компонент размера k. Нужно показать, что $\mathrm{E}X_n \to 0$ при $n \to \infty$, тогда по методу 1го момента $\Rightarrow \mathrm{P}\{X_n = 0\} \to 1$.

$$EX_n = \sum_{k=3}^{n} EU_n(k) = \sum_{k=3}^{n} C_n^k C(k,k) p^k (1-p)^{k(n-k)+C_k^2-k}$$

Оценка для $C(k,k)$:

$$C(k,k) = \frac{1}{2}(k-1)! \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \approx \frac{(k-1)!}{2} e^k$$

$$
\begin{aligned}
EX_n \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{(k-1)!}{2} e^k p^k e^{-pkn+pk^2/2} \leqslant \\
\leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{(w(n))^k}{k} e^{-w(n)k+k+\frac{w(n)}{n}k^2/2} \approx \\
\approx \sum_{k=3}^{n} \exp(-w(n)k + \frac{w(n)}{n}k^2/2 + k\log w(n)) = \\
= \sum_{k=3}^{n} \exp\left(w(n)k\left(-1 + k/(2n) + \log w(n)/w(n)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Очевидно, $A(n,k) = -1 + k/(2n) + \log w(n)/w(n) < 0$, $A(n,k) \geqslant -1$. Значит

$$
EX_n \leqslant \sum_{k=3}^{n} \exp(-w(n)k) = \frac{e^{-3w(n)}}{1-e^{-w(n)}} \leqslant e^{-3w(n)} \to 0, n \to \infty
$$

□

3. *Доказательство.* Метод 1 Пусть $X_n(k)$— число циклов в $G(n,p)$ длины k. Тогда (знаем, что существуют только унициклические и древесные компоненты размер $\mathrm{O}(\log n) = A(n)$),

$$
\mathrm{E}X_n = \sum_{k=3}^{A(n)} \frac{(n)_k}{k!} \frac{(k-1)!}{2} p^k = \sum_{k=3}^{A(n)} \frac{(n)_k}{2k} p^k = \sum_{k=3}^{A(n)} \frac{(n)_k}{n^k} \mathrm{c}^k \frac{1}{2k}
$$

(выбрали k вершин, после чего выбираем последовательно цепочку цикла, делим пополам так как два раза посчитали инвертированные циклы)
Оценка для $(n)_k$, $k = \mathrm{O}(\log n)$

$$
(n)_k \approx n^k
$$

$$
\mathrm{E}X_n = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{A(n)} \frac{c^k}{k}
$$

Покажем равномерную сходимость ряда.

$$
\mathrm{E}X_n \approx \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{A(n)} \frac{c^k}{k} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k} c^k = \frac{1}{2} \frac{c^3}{1-c} \text{ (по условию 'c' фиксировано)}
$$

Посчитаем факториальный момент X_n через индикаторы графов.

$$
\mathrm{E}(X_n)_r = \sum_{i_1,\dots i_s \in \{1 \dots t(n)\}} \mathrm{E}(I_{H_{i_1}} \cdot \ldots \cdot I_{H_{i_s}}) = \sum_{H_{i_1},\dots,H_{i_s} : H_{i_w} \neq H_{i_q}} \mathrm{E}(I_{H_{i_1}} \cdot \ldots \cdot I_{H_{i_s}}) = \mathrm{E}'_1 + \mathrm{E}'_2
$$

E'_1 — графы, в которых нет общих вершин. E'_2 — графы, имеющие больше 1 общей вершины. Очевидно, что $\mathrm{E}'_2 = \mathrm{o}(1)$, т.к. графова структура такова, что в ней присутствуют только унициклические и древесные компоненты связности (ну и еще что-то, чего очень мало). Значит, если у нас цикл размера k_i, то с вероятностью, стремящейся к 1, он лежит в унициклической компоненте размера k_i, значит больше ни с

кем пересекаться не может.
Посчитаем E_1'.

$$\mathrm{E}_1' = \left(\sum_k C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k\right) \left(\sum_k C_{n-k}^k \frac{(k-1)!}{2} p^k\right) \dots \left(\sum_k C_{n-k(r-1)}^k \frac{(k-1)!}{2} p^k\right) \sim$$

$$\sim \left(\sum_k \frac{\mathrm{c}^k}{2k}\right)^r = \beta^r \quad (1)$$

Значит, согласно методу моментов, наша случайная величина имеет распределение Пуассона с параметров β.

Метод 2 (если теорему 3.5 можно использовать)
Пусть X_n— число циклов в $G(n,p)$. Согласно следствию 3.3: при $np \to c \in (0,1)$ число циклов = числу унициклических компонент.
Из теоремы 3.5 про число унициклических компонент размера $k(U_n(k))$: $U_n(k) \to Pois(\lambda), \lambda = \frac{1}{2k}(ce^{-c})^k \sum_{j=0}^{k-3} \frac{k^j}{j!} \sim \frac{(ce^{-c})^k}{2k} e^k$, где $U_n(k)$ — независимые случайные величины для любых k.

$$X_n = \sum_{k=3}^{\infty} U_n(k) \xrightarrow{d} Pois(\sum_{k=3}^{\infty} \lambda_k = \Lambda).$$

Посчитаем Λ.

$$\Lambda = \sum_{k=3}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(ce^{-c})^k e^k}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(e^{-c+\log c+1})^k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{ak}}{k} = \frac{1}{2} S(a)$$

$$a = -c + \log c + 1 < 0$$

Очевидно, этот ряд сходится.
Посчитаем его производную:

$$S'(a) = \sum_{k=3}^{\infty} e^{ak} = \frac{e^{3a}}{1-e^a}$$

Этот ряд равномерно сходится, как и любая геометрическая прогрессия. Теперь проинтегрируем его, учитывая, что $S(a \to -\infty) \to 0$.

$$\int \frac{e^{3a}}{1-e^a} da = \int \frac{u^2}{1-u} du = -\int (u + \frac{1}{u-1} + 1) du = -\frac{1}{2} e^{2a} - e^a - \log(1-e^a) + C,$$

$$C \to 0$$

Значит,

$$\Lambda = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} e^{2a} - e^a - \log(1-e^a))$$

□

4. (a) X_n — число ребер в гигантской компоненте. Докажем, что $\Theta_1 = \frac{c}{2}\beta(1-\beta)$

Доказательство. Знаем, что

$$\frac{|C_1|}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} \beta$$

Рассмотрим граф $G = G(n,m)$, в котором присутствует гигантская. Имеем ребра: $e_1, \dots, e_m$. Рассмотрим вероятность того, что $\mathrm{P}\{e = e_m \in C_1\}, e = (x,y)$. Пусть G' — граф, полученный из G удалением ребра e. Значит, $G' = G(n, m-1) \Rightarrow \exists$ гигантская компонента C_1' и оставшиеся компоненты имеют порядок $\mathrm{O}(\log n)$. Значит, вероятность того, что e — ребро гиган.компоненты $C_1 = \mathrm{o}(1)$ плюс вероятность того, что вершины x или y принадлежат C_1'

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{e \notin C_1 || C_1'| \approx \beta n\} = \mathrm{P}\{e \cap C_1' = \varnothing | |C_1'| \approx \beta n\} = \\ \mathrm{P}\{x \notin C_1' || C_1'| \approx \beta n\} \mathrm{P}\{y \notin C_1' || C_1'| \approx \beta n\} = \\ (1 - \frac{|C_1'|}{n})(1 - \frac{|C_1'| - 1}{n}) \approx (1-\beta)^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\{e \in C_1\} = 1 - (1-\beta)^2 + \mathrm{o}(1) \approx \beta(2-\beta)$$

$$\mathrm{E}X_n = C_n^2 p\beta(1-\beta) \approx \frac{n^2 p}{2}\beta(1-\beta) \to \frac{cn}{2}\beta(1-\beta)$$

(выбрали 2 вершины, провели между ними ребро с вероятностью)
Докажем концетрацию X_n вокруг своего матожидания.

$$\mathrm{P}\{|X_n - \mathrm{E}X_n| \geqslant tn\} \leqslant \frac{DX_n}{t^2 n^2}$$

Пусть C_1'' — гигантская компонента в графе, полученном из G удалением ребер e_i, e_j. Тогда,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{e_i, e_j \subseteq \mathrm{C}_1\} = \mathrm{o}(1) + \mathrm{P}\{e_i \cap C_1'' \neq \varnothing | e_j \cap C_1'' \neq \varnothing\} \mathrm{P}\{e_j \cap C_1'' \neq \varnothing\} = \\ = (1 + \mathrm{o}(1)) \mathrm{P}\{e_j \subseteq C_1\} \mathrm{P}\{e_i \subseteq C_1\} \approx \beta^2(2-\beta)^2\end{aligned}$$

Значит, $\mathrm{E}X_n^2 \approx (\mathrm{E}X_n)^2 \Rightarrow DX_n = \mathrm{o}((\mathrm{E}X_n)^2) = \mathrm{o}(n^2)$. Что и требовалось доказать. □

(b) Y_n — число ребер в 2-ядре C_2. Докажем, что $\Theta_2 = \frac{c}{2}\beta^2$

Доказательство. Рассмотри граф $G = G(n,m)$. Пусть G' получен из G удалением ребра e_1 и C_1' — гигантская компонента графа G'. Значит, $e_1 = (x,y) \subseteq C_2 \Leftrightarrow$ вершины $e_1 \in C_1'$ или e_1 содержится в какой-нибудь маленькой компоненте (вероятность этого события $\mathrm{o}(1)$).

$$\mathrm{P}\{e_1 \subseteq C_2\} = \mathrm{o}(1) + \mathrm{P}\{x \in C_1\} \mathrm{P}\{y \in C_1\} \approx \beta^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}Y_n = C_n^2 p \beta^2 \approx \frac{nc\beta^2}{2}$$

□

Концентрация доказывается аналогично пункту а.

5. *Доказательство.* □

6. *Доказательство.* Пусть $X_n(k)$ — количество древесных компонент фиксированного размера $k \in [c_1(n)n^{2/3}, c_2(n)n^{2/3}]$ в графе $G_n(\lambda)$. Тогда

$$X_n = \sum_{k=c_1(n)n^{2/3}}^{c_2(n)n^{2/3}} X_n(k).$$

Посчитаем матожидание $X_n(k)$:

$$\mathrm{E}X_n(k) = C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)+C_k^2-k+1}$$

Для оценки биномиального коэффициента используем формулу Стирлинга и лемму 3.6:

$$C_n^k = \frac{(n)_k}{n^k}\frac{n^k}{k!} \approx \frac{n^k e^k}{k^k\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-k^2/(2n) - k^3/(6n^2) + \mathrm{o}(1)\right)$$

$$p^{k-1} = \frac{1}{n^{k-1}}$$

$$(1-p)^{k(n-k)+C_k^2-k+1} = (1-p)^{kn-k^2/2} \approx \exp\left(-pkn + pk^2/2\right) = \exp\left(-k + k^2(2n)\right)$$

Собирая оценки, получаем

$$\mathrm{E}X_n(k) \approx \frac{n^k e^k}{n^{k-1}k^k\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-k^2/(2n) - k^3/(6n^2) - k + k^2(2n)\right) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} k^{-5/2} \exp\left(-k^3/(6n^2)\right)$$

Рассмотрим показатель экспоненты. Вспомним, что $k \in [c_1(n)n^{2/3}, c_2(n)n^{2/3}]$, тогда

$$\frac{k^3}{6n^2} = \frac{c(n)}{6} \to 0, c_1(n), c_2(0) \to 0 \Rightarrow \exp\left(-k^3/(6n^2)\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

Вычислим матожидание X_n:

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=c_1(n)n^{2/3}}^{c_2(n)n^{2/3}} \mathrm{E}X_n(k)$$

$$\mathrm{E}X_n \approx \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=c_1(n)n^{2/3}}^{c_2(n)n^{2/3}} k^{-5/2} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{k=(c_2(n)-c_1(n))n^{2/3}} \left(1 + \frac{k}{c_1(n)n^{2/3}}\right)^{-5/2} \left(c_1(n)n^{2/3}\right)^{-5/2}$$

Посмотрим на второе слагаемое в скобке и верхний предел в сумме (B).

$$\frac{k}{c_1(n)n^{2/3}} \leqslant \frac{c_2(n)-c_1(n)}{c_1(n)} \sim \beta\sqrt{2\pi}(c_1(n))^{3/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\mathrm{B} = (c_2(n)-c_1(n))n^{2/3} \sim \beta\sqrt{2\pi}(c_1(n)n^{4/15})^{5/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, c_1(n)n^{4/15} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Следовательно, сумма отлична от нуля и равна

$$\mathrm{E}X_n \sim \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\mathrm{B}} 1 \approx \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left(c_1(n)n^{2/3}\right)^{-5/2} \left(\beta\sqrt{2\pi}(c_1(n)n^{4/15})^{5/2}\right) = \beta$$

Для того, чтобы показать, что $X_n \to Pois(\beta)$, воспользуемся методом моментов и покажем, что

$$\mathrm{E}(X_n)_r \sim \mathrm{E}(X_n)^r \sim (\mathrm{E}X_n)^r \sim \beta^r$$

Знаем, что

$$\mathrm{E}(X_n(k))_r \sim (\mathrm{E}X_n(k))^r \sim \mathrm{E}(X_n(k))^r$$

(доказывается аналогично теореме 3.4 про уницикличесие компоненты + очевидно, что ковариация $X_n(k_i)$ и $X_n(k_j)$ равна 0 (так как это древесные компоненты на разном количестве вершин)).
Аналогично 3 задаче, нужно расписать через индикаторы.

□

7. Нужно показать, что максимальный размер древесной компоненте в случайном графе с параметром $p = 1/n$ ограничен снизу (причем мы знаем, что он ограничен сверху).

   Доказательство. Пусть Z — размер древесной компоненты. Покажем, что

$$\mathrm{P}\{Z \leqslant \frac{n^{2/3}}{w(n)}\} \to 0 \ \forall w(n) \to \infty \text{ при } n \to \infty$$

   Пусть X_k — количество древесных компонент размера $k \in [\frac{n^{2/3}}{w(n)}; n^{2/3}w(n)]$

$$\mathrm{E}X_k = C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)+C_2^k-k+1}$$

$$C_n^k \approx \frac{n^k}{k!} e^{-k^2(2n)-k^3/(6n^2)}$$

$$(1-p)^{k(n-k)+C_2^k-k+1} \approx e^{-k+k^2/(2n)}$$

   Соединяя все оценки и используя формулу Стирлинга, получаем, что

$$\mathrm{E}X_k = \frac{n}{\sqrt{2\pi}k^{5/2}} e^{-\frac{k^3}{6n^2}}$$

$$X = \sum_{k=n^{2/3}/w(n)}^{n^{2/3}w(n)} X_k$$

   Теперь посчитаем матожидание, используя разложение в ряд Тейлора

$$\mathrm{E}X \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=n^{2/3}/w(n)}^{n^{2/3}w(n)} \frac{n}{k^{5/2}} e^{-k^3/(6n^2)} \approx |k = xn^{2/3}| \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/w(n)}^{w(n)} \frac{nn^{2/3}}{x^{5/2}n^{5/3}} e^{-x^3/6} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/w(n)}^{w(n)} \frac{e^{-x^3/6}}{x^{5/2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/w(n)}^{w(n)} (x^{-5/2}(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{2!6^2} - ...)) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{-2}{3}((w(n))^{-3/2} - (w(n))^{3/2}) + \frac{2}{18}((w(n))^{3/2} - (w(n))^{-3/2}) + ...) \to \infty \text{ при } w(n) \to \infty$$

   Воспользуемся методом 2го момента. Так как $E(X)_2 \approx \mathrm{E}X^2 \approx (\mathrm{E}X)^2 \Rightarrow DX = o((\mathrm{E}X)^2)$ (как в задаче 1 этого задания). Значит, $\mathrm{P}\{X > 0\} \to 1$

   □

8. Не должен содержать графов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$, хотя может нужно использовать условие

   Доказательство. □

9. X_n — число циклов в $G_\lambda(n)$

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} C_n^k \frac{(k-1)!}{2} p^k$$

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{(n)_k}{k!} \frac{(k-1)!}{2} p^k = \sum_{k=3}^{n} \frac{(n)_k}{2k} p^k$$

   (выбрали k вершин, после чего выбираем последовательно цепочку цикла, делим пополам так как два раза посчитали инвертированные циклы)

(a) $\lambda < 0$

Доказательство. Пусть

$$p = \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^{4/3}} = n^{-1}(1 + \lambda n^{-1/3})$$

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{(n)_k}{n^k} \frac{1}{2k} (1 + \lambda n^{-1/3})^k$$

Используя оценку из леммы 3.6, п.1 для $k = \mathrm{o}(n^{3/4})$:

$$\frac{(n)_k}{n^k} \approx e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

и оценку для $p^k : p^k \approx \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}}\right)$

$$\mathrm{E}X_n \approx \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}} - \frac{k^2}{2n}\right)$$

Посчитаем ряд при $k > n^{1/3}$ и $k < n^{1/3}$

$$S_1(\lambda) = \sum_{k=n^{1/3}}^{n} \frac{1}{k} \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}}\right)$$

$$S_1'(\lambda) = \frac{1}{n^{1/3}} \sum_{k=n^{1/3}}^{n} \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}}\right) \approx \frac{1}{n^{1/3}} \frac{e^{\lambda}(1 - e^{\lambda n^{2/3}})}{1 - e^{\lambda/n^{1/3}}} \approx \frac{e^{\lambda}}{n^{1/3}}$$

$$\Rightarrow S_1(\lambda) \approx \frac{e^{\lambda}}{n^{1/3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Аналогично,

$$S_2(\lambda) = \sum_{k=3}^{n^{1/3}} \frac{1}{k} \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}}\right)$$

$$S_2'(\lambda) \approx \frac{e^{\frac{3\lambda}{n^{1/3}}}}{n^{1/3}}$$

$$S_2(\lambda) \approx \frac{1}{3} e^{\frac{3\lambda}{n^{1/3}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

Следовательно, $S_2 \gg S_1$ при $n \to \infty$ Вернемся к исходному матожиданию и воспользуемся разложением Тейлора и фактом, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n$$

Получаем,

$$\mathrm{E}X_n \approx \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n^{1/3}} \frac{1}{k} \exp\left(\frac{k\lambda}{n^{1/3}} - \frac{k^2}{2n}\right) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n^{1/3}} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{k\lambda}{n^{1/3}} - \frac{k^2}{2n} + ...\right) \sim \frac{1}{2} \log n^{1/3} = \frac{1}{6} \log n$$

□

(b) $\lambda = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n}$

Доказательство.

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{(n)_k}{n^k}\frac{1}{2k}$$

Используем оценку из леммы 3.6, п.1:

$$\mathrm{E}X_n \approx \sum_{k=3}^{\sqrt{n}} \frac{1}{2k}e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

При $k > \sqrt{n}$:

$$\sum_{k=\sqrt{n}}^{n} \frac{1}{k}e^{-\frac{k^2}{2n}} \ll \sum_{k=3}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k}e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

(экспонента начинает бодро убывать + можно сделать те же манипуляции, что и в пункте а)

Разложим экспоненту в ряд Тейлора.

$$\mathrm{E}X_n \approx \sum_{k=3}^{\sqrt{n}} \frac{1}{2k}e^{-\frac{k^2}{2n}} \approx \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{k^2}{2n} + \frac{1}{2!}\frac{k^4}{4n^2} + ...\right) \sim \frac{1}{2}\log\sqrt{n} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... \sim \frac{1}{4}\log n$$

□

10. $\lambda > 0$

Доказательство. Используем 2й пункт леммы 3.6:

$$\frac{(n)_k}{n^k} \approx \mathrm{O}(e^{-\frac{k^2}{2n}}) = \tilde{A}e^{-\frac{k^2}{2n}}$$

и предыдущие вычисления члена p^k, получаем,

$$\mathrm{E}X_n \approx \tilde{A}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2k}\exp\left(-\frac{k^2}{2n} + \frac{\lambda k}{n^{1/3}}\right) = A\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{n}} - \lambda n^{1/6}\right)^2\right)\exp\left(\frac{\lambda^2 n^{1/3}}{2}\right)$$

Рассмотрим сумму

$$S(\lambda) = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{n}} - \lambda n^{1/6}\right)^2\right)$$

Сделаем замену $t = \frac{k}{\sqrt{n}} - \lambda n^{1/6}$ и перейдем к интегралу. Предел снизу $a = 3n^{-1/2} - \lambda n^{1/6}$, сверху — $b = \sqrt{n} - \lambda n^{1/6}$

$$S(\lambda) \approx n^{-1/2}\int_a^b \frac{1}{t + \lambda n^{1/6}}e^{-0.5t^2}dt = \frac{1}{\lambda}n^{-2/3}\int_a^b \frac{1}{1 + \frac{t}{\lambda n^{1/6}}}e^{-0.5t^2}dt$$

Подынтегральная фукнция является интегрируемой и ограниченной на данном интервале. Используя теорему о среднем, получаем

$$S(\lambda) = c(\lambda)n^{-2/3}\cdot(b-a) = c(\lambda)n^{-2/3}(\sqrt{n} - \lambda n^{1/6} - 3n^{-1/2} + \lambda n^{1/6}) \approx c(\lambda)n^{-2/3}\sqrt{n} = c(\lambda)n^{-1/6}$$

Собирая все вместе, получаем

$$\mathrm{E}X_n \sim c(\lambda)n^{-1/6}\exp\left(\frac{\lambda^2 n^{1/3}}{2}\right)$$

□