Задачи по курсу случайных графов. Часть 5

Константинов Даниил Николаевич, М05-015а
dkonstantinov0@gmail.com

1. *Доказательство.* Воспользуемся мартингалами вершинного типа и следствием 6.5 (из неравенства Азумы-Хёффдинга). У нас есть

$$Z_i = \left(I\left\{(v_1, v_i) \in E(G)\right\}, ..., I\left\{(v_{i-1}, v_i) \in E(G)\right\}\right)$$

Нужно показать, что для $X = X(Z_1, ..., Z_n)$, где X является либо числом независимости, либо кликовым числом, либо же хроматическим числом, выполняется

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}X| \geq n^{1/2+\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{n^{1+2\varepsilon}}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right) \ \forall \varepsilon > 0,$$

где c_i — ограничивающие константы. Осталось показать, что для каждой величины X выполняется, что $c_i = 1$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}X| \geq n^{1/2+\varepsilon}\right) \leq \exp\left(-\frac{n^{1+2\varepsilon}}{2\sum_{k=1}^{n} 1}\right) = \exp\left(-\frac{n^{1+2\varepsilon}}{2n}\right) \to 0.$$

1) X — число независимости $\alpha(G)$
Меняя какую-нибудь из координат функции $X(Z_1, ..., Z_n)$ на любую другую происходит следующее: мы удалили вершину и инциндентые ей ребра (могли либо уменьшить $\alpha(G)$, либо нет), затем добавили в функцию другую вершину с какими-то ребрами (то есть множество соседей для какой-то вершины). X при этом может поменяться на ± 1 (либо добавим эту вершину к независимому множеству, либо нет). Значит, $c_i = 1 \ \forall i$.
2) X — кликовое число
Рассуждение аналогично числу независимости.
3) X —хроматическое число
Пусть у нас была раскраска графа, поменяли множество соседей у одной вершины. Значит, число красок для раскраски либо не изменилось, либо нам понадобился еще один цвет, либо наоборот, можем ее покрасить в какой-нибудь из уже имеющихся. Получается, $c_i = 1 \ \forall i$. □

2. *Доказательство.* Пусть $X_n(k)$ — число независимых множеств размер k в $G(n, p)$. Тогда

$$\mathrm{E}X_n(k) = C_n^k (1-p)^{C_k^2}$$

Обозначим

$$k_\varepsilon = \frac{2}{p}\left(\ln np - \ln\ln np - \ln 2 + 1 + \varepsilon\right)$$

Нужно доказать, что

$$\mathrm{P}\left(\alpha(G(n,p)) \leq k_\varepsilon\right) \to 1,$$

или,

$$\mathrm{P}\left(\alpha(G(n,p)) \geq k_\varepsilon + 1\right) \to 0$$

Воспользуемся методом первого момента. Для этого посчитаем $\mathrm{E}X_n(k_\varepsilon + 1)$, используя оценку Стирлинга.

$$\mathrm{E}X_n(k) \sim \frac{n^k}{k!}(1-p)^{C_k^2} \sim \frac{n^k e^k}{k^k\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-p\frac{k^2}{2}\right) = \exp\left[k\left(-p\frac{k}{2} + \ln n + 1 - \ln k + \mathrm{o}(1)\right)\right]$$

$$\ln k = \ln\left(\frac{2}{p}\ln np\right) + \mathrm{o}(1) = \ln 2 - lnp + \ln\ln np + \mathrm{o}(1)$$

Подставим $k = k_\varepsilon + 1$.

$$-p\frac{k}{2} + \ln n + 1 - \ln k + \mathrm{o}(1) =$$

$$= -\ln np + \ln\ln np + \ln 2 - 1 - \varepsilon - \frac{p}{2} + \ln n + 1 - (\ln 2 - \ln p + \ln\ln np) + \mathrm{o}(1) =$$

$$= -\varepsilon - \frac{p}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Из условия, $p = p(n) = \frac{\mathrm{o}(n)}{n}$. Тогда

$$-p\frac{k}{2} + \ln n + 1 - \ln k + \mathrm{o}(1) = -\varepsilon - \frac{\mathrm{o}(n)}{n} + \mathrm{o}(1) \leq -\frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{o}(1)$$

$$k_\varepsilon \to \infty$$

$$\mathrm{E}X_n(k_\varepsilon + 1) \leq \exp\left[(-k_\varepsilon - 1)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{o}(1)\right)\right] \to 0.$$

Получили,

$$\mathrm{P}\left(\alpha\left(G\left(n,p\right)\right) \geq k_\varepsilon + 1\right) \leq \mathrm{E}X_n(k_\varepsilon + 1) \to 0$$

$\square$

3. *Доказательство.* .
   1) $\chi(G) \leq D(G) + 1$
   Создадим список вершин графа G: на каждом шаге удаляем вершину, со степенью не более, чем $D(G)$ (они всегда существуют, так как граф k-вырожденный) и затем делаем обращение списка (первая удаленная вершина становится последней). Значит, каждая вершина v имеет не более $D(G)$ соседей, которые уже встретились перед v. Красим эту вершину либо в $D(G) + 1$ цвет, если все $D(G)$ соседей встретились, либо в какой-нибудь из уже имеющихся цветов (применили жадный алгоритм к нашему списку вершин). Получили раскраску графа G, используя не более $D(G) + 1$ цветов.

   2) $D(G) \leq 2m(G)$
   Пусть это не так, т.е. $D(G) > 2m(G)$. Значит, нашелся подграф H, такой, что минимальная степень его вершин равна $D(G)$. Более того, возьмем такой H, который является минимальным по количеству вершин внутри из возможных и оценим его плотность. В нем есть точно не меньше чем $D(G) + 1$ вершин, которые могут быть соединены как-нибудь между другом другом (но из каждого идет точно не меньше $D(G)$ ребер). Оценим плотность такого графа снизу (так как ребер может быть больше):

$$\rho(H) \geq \frac{D(G) + (D(G) - 1) + (D(G) - 2) + \ldots + 1}{D(G) + 1} = \frac{(D(G) + 1)/2 \cdot D(G)}{D(G) + 1} = \frac{D(G)}{2}$$

   Получаем

$$m(G) \geq \rho(H) \geq \frac{D(G)}{2} > m(G)$$

   Противоречие.

$\square$

4. *Доказательство.* .

(a) Воспользуемся методом первого момента, и посчитаем матожидание числа графов F, у которых $v(F) \le \frac{n}{2\ln^2 np}$ и $m(F) > \frac{np}{\ln^2 p}$. Заметим, что F не обязательно будет строго сбаланисованным, тогда выделим в нем подграф H с максимальной плотностью $\rho(H) = m(F)$, и посчитаем матожидание только таких графов. Если окажется, что количество таких графов асимптотически стремится к нулю, по понятно, что и графов F не будет, тем самым получив то, что нам нужно.
Пусть X_n — число таких строго сбалансированных графов, что $v(G) \le \frac{n}{2\ln^2 np}$ и $\rho(H) = \frac{e(H)}{v(H)} > \frac{np}{\ln^2 np}$.
Заметим, что свойство обладать определенной плотностью - возрастающее свойство. Следовательно, можем перейти в равномерную модель и затем воспользоваться следствием 1.2 (про наследовании свойств из равномерной модели в биномиальную).

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{v=2}^{n/(2\ln^2 np)} C_n^v \sum_{m=v\cdot np/\ln^2 np}^{C_v^2} \frac{C_{C_v^2}^m}{C_{C_n^2}^m} \le \sum_{v=2}^{n/(2\ln^2 c_0)} C_n^v \sum_{m=v\cdot c_0/\ln^2 np}^{v^2/2} \frac{C_{C_v^2}^m}{C_{C_n^2}^m}$$

Распишем коэффициент во второй сумме и воспользуемся Стирлингом:

$$\frac{1}{C_{C_n^2}^m} = \frac{m!(C_n^2-m)!}{(C_n^2)!} = (1+\mathrm{o}(1))\frac{m^{m+1/2}}{e^m}\frac{(n^2/2-m)!}{(n^2/2)!} =$$

$$= (1+\mathrm{o}(1))\frac{m^{m+1/2}}{e^m}\frac{(\frac{n^2}{2}-m)^{n^2/2-m+1/2}}{(\frac{n^2}{2})^{n^2/2+1/2}}e^{n^2/2-(n^2/2-m)} =$$

$$(1+\mathrm{o}(1))\frac{m^{m+1/2}(\frac{n^2}{2})^{n^2/2-m+1/2}}{(\frac{n^2}{2})^{n^2/2+1/2}}(1-\frac{2m}{n^2})^{n^2/2-m+1/2} =$$

$$(1+\mathrm{o}(1))\frac{m^{m+1/2}2^m}{n^{2m}}\exp\left(-m+\frac{2m^2}{n^2}-\frac{m}{n^2}\right)$$

$$\frac{C_{C_v^2}^m}{C_{C_n^2}^m} = \exp\left((\frac{1}{n^2}-\frac{1}{v^2})(2m^2-m)+2m\ln\frac{v}{n}\right) \sim \exp\left(2m\ln\frac{v}{n}\right)$$

(первый член по порядку намного меньше второго).
Посчитаем сумму как интеграл:

$$\int_{v\cdot c_0/\ln^2 np}^{v^2/2} \exp\left(2x\ln\frac{v}{n}\right)dx = \frac{1}{2\ln\frac{v}{n}}\exp\left(v^2\ln\frac{v}{n}\right) - \frac{1}{2\ln\frac{v}{n}}\exp\left(\frac{2vc_0}{\ln^2 np}\ln\frac{v}{n}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{2\ln\frac{n}{v}}\exp\left(\frac{2vc_0}{\ln^2 np}\ln\frac{v}{n}\right)$$

Так как $v(H) \le \frac{n}{2\ln^2 np}$, то

$$e(F) \le \frac{v^2(F)}{2} \le \frac{n^2}{8\ln^4 np}$$

Всего слагаемых во второй сумме:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{vc_0}{\ln^2 np} \approx \frac{n^2}{4\ln^4 np} \le \frac{n^2}{4\ln^4 c_0}$$

Тогда

$$\mathrm{E}X_n \le -\sum_{v=2}^{n/(2\ln^2 c_0)} C_n^v \cdot \frac{n^2}{4\ln^4 c_0}\frac{1}{2\ln\frac{v}{n}}\exp\left(\frac{2vc_0}{\ln^2 np}\ln\frac{v}{n}\right)$$

.

(b) Те же размышления, что и для пункта (a), т.е. ищем строго сбалансированные графы H: $\rho(H) > \ln^3 n$.

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{v=2}^{2\sqrt{n\ln n}} C_n^v \sum_{m=v\cdot\ln^3 n}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m p^m \leq \sum_{v=2}^{2\sqrt{n\ln n}} C_n^v \sum_{m=v\cdot\ln^3 n}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m \left(\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}\right)^m$$

.

(c)

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{v=2}^{70\sqrt{n\ln n}} C_n^v \sum_{m=v\cdot 1.45}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m p^m \leq \sum_{v=2}^{70\sqrt{n\ln n}} C_n^v \sum_{m=v\cdot 1.45}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m \left(n^{-6/7}\right)^m$$

□

5. *Доказательство.* Те же рассуждения, что и в задаче 4a + ограничим число вершин графов F сверху каким-нибудь числом. Из теоремы про размер гигантской компоненты знаем, что при $np \leq 1.001$ размер наибольшей компоненты либо меньше βn, либо меньше $const \cdot \ln n$. Возьмем $\beta = 0.01$ (потом изменить если что), чтобы условие выполнялось в обоих случаях. Тогда посчитаем матожидание строго сбалансированных графов с $\rho(H) > 1.45$ и $v(H) \leq 0.01n$.

$$\mathrm{E}X_n = \sum_{v=2}^{0.01n} C_n^v \sum_{m=v\cdot 1.45}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m p^m \leq \sum_{v=2}^{0.01n} C_n^v \sum_{m=v\cdot 1.45}^{C_v^2} C_{C_v^2}^m \left(\frac{1.001}{n}\right)^m$$

□

6. Посчитаем матожидание числа таких циклов (λ) длины ($\lfloor \ln\ln n \rfloor + 1$) и $\bar{\triangle}$.

$$\lambda = C_n^{2\ln\ln n+1} \frac{(2\ln\ln n+1)!}{2(2\ln\ln n+1)} p^{2\ln\ln n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{c^{2\ln\ln n+1}}{2\ln\ln n+1}$$

(выбрали вершины для цикла, умножили на кол-во перестановок, поделили на число автоморфизмов цикла и добавили ребер)

$$\bar{\triangle} = C_n^{2\ln\ln n+1} \frac{(2\ln\ln n+1)!}{2(2\ln\ln n+1)} p^{2\ln\ln n+1} \left[C_{n-\mathrm{o}(n)}^{2\ln\ln n} (2\ln\ln n+1) \frac{(2\ln\ln n)!}{2} p^{2\ln\ln n+1} + \right.$$

(выбрали одну общую вершину для двух циклов)

$$+ C_{n-\mathrm{o}(n)}^{2\ln\ln n-1} (2\ln\ln n+1) \frac{(2\ln\ln n-1)!}{2} p^{2\ln\ln n} +$$

(выбрали общее ребро)

$$+ C_{n-\mathrm{o}(n)}^{2\ln\ln n-1} \frac{(2\ln\ln n+1)(2\ln\ln -2)}{2} \frac{(2\ln\ln n-1)!}{2} p^{2\ln\ln n+1} +$$

(выбрали две несмежные вершины и провели все ребра)

$$+ C_{n-\mathrm{o}(n)}^{2\ln\ln n-2} (2\ln\ln n+1) 2 \frac{(2\ln\ln n-2)!}{2} p^{2\ln\ln n-1} +$$

(выбрали ребро и смежное ему)

$$+C_{n-\mathrm{o}(n)}^{2\ln\ln n-2}(2\ln\ln n+1)2\frac{(2\ln\ln n-2)!}{2}p^{2\ln\ln n-1}+...\Big]$$

(выбрали 3 смежных ребра — ребро и направление в котором будем набирать 2 оставшихся)
Подставим $p = c/n$ и используем оценку $C_n^k \approx n^k/k!$ для $k = \mathrm{o}(n^2)$:

$$\bar{\triangle} \leq \frac{c^{2\ln\ln n+1}}{2(2\ln\ln n+1)}\left[\frac{2\ln\ln n+1}{2n}c^{2\ln\ln n+1}+\frac{2\ln\ln n+1}{2n}c^{2\ln\ln n}+\frac{(2\ln\ln n+1)^2}{4n^2}c^{2\ln\ln n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\ln\ln n+1}{n}c^{2\ln\ln n-1}+\frac{2\ln\ln n+1}{n}c^{2\ln\ln n-2}+...\right]$$

Видно, что будут еще члены, полученные пересечением вершин, которые не смежны, но это все будет по порядку будет $\mathrm{o}(1/n)$, так что отбросим их из суммы.

$$\bar{\triangle} \leq \frac{c^{2\ln\ln n+1}}{2(2\ln\ln n+1)}\frac{2\ln\ln n+1}{n}c^{2\ln\ln n+1}\frac{1}{1-1/c} = \mathrm{O}\left(\frac{c^{4\ln\ln n+1}}{2n}\right)$$

По неравенству Янсона, если X — число циклов заданной длины:

$$\mathrm{P}\left(X=0\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\bar{\triangle}}\right) \leq \exp\left(-\frac{n(1+\mathrm{o}(1))}{(2\ln\ln n+1)^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Доказательство. □

7. *Доказательство.* Если $p = \mathrm{o}(1/n)$, то наш граф ацикличен с вероятностью, стремящейся к 1. Следовательно, он двудолен.
Если же $p = w(1/n)$, то в графе появляется гиг. компонента. Значит, он точно не двудолен.
Рассмотрим $p = \frac{1-\varepsilon}{n}$. В этом случае граф точно состоит из древесных и уницикличеcких компонент. Случай, когда появляются 3 цвета: у нас есть цикл нечетной длины. Я прикинул матожидание таких циклов слева и справа от границы $1/n$, у меня не получилось показать, что оно стремится к нулю.
Тем не менее, если в случае $np < c$ мы знаем, что уницикличеcкие компоненты занимают не более $\mathrm{O}(1)$ вершин, так что скорее всего нечетных циклов будет очень мало, значит в этом режиме граф двудолен. □

8. -

Доказательство. □