Задачи по курсу случайных графов. Часть 4

Константинов Даниил Николаевич, М05-015а
dkonstantinov0@gmail.com

1. *Доказательство.* Из условия: $pn - \log n \to w(n)$, где $w(n) \to \pm\infty$. Посчитаем предел матожидания числа изолированных вершин $\lambda_0(n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0(n) = 2n(1-p)^n \approx 2n\exp(-\frac{\log n + w(n)}{n}n) \approx 2e^{-w(n)}$$

(в пределе $1 - x \approx e^{-x}$)

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0(n) = 0, \text{ если } w(n) \to \infty \ (1.1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0(n) = \infty, \text{ если } w(n) \to -\infty \ (1.2)$$

1). $w(n) \to -\infty$

Теорема 4.1, п.2 и (1.2) $\Rightarrow X(n,0) \xrightarrow{\mathrm{P}} \infty$, где $X(n,0)$ — число изолированных вершин. Следовательно, при $pn - \log n \to -\infty$: $\mathrm{P}\{X(n,0) > 0\} \to 1$, значит,

$$\mathrm{P}\{G(n,n,p) \text{ связен}\} \to 0$$

2). $w(n) \to \infty$

$$\mathrm{P}\{G(n,n,p) \text{ связен}\} = \mathrm{P}\{X(n,0) = 0\} - \mathrm{P}\{G(n,n,p) \text{ несвязен и } X(n,0) = 0\}$$

По теореме 4.1, п.1, т.к. $\lim_{n\to\infty} \lambda_0(n) = 0$, то

$$X(n,0) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \Rightarrow \mathrm{P}\{X(n,0) = 0\} \to 1.$$

Осталось показать, что $\mathrm{P}\{G(n,n,p) \text{ несвязен } | X(n,0) = 0\} \to 0$. Посмотрим на матожидание числа компонент связности (остовных деревьев) размера от 2 до n. Так как дерево - это двудольный граф, буду набирать просто из 2n вершин (даже больше получится, так как связанные вершины дерева могут лежать в одной доле).

$$\sum_{k=2}^{n} C_{2n}^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(2n-k)} \le O\left(\sum_{k=2}^{n} (2n)^k e^k k^{-5/2} p^{k-1} e^{-pk(2n-k)}\right) =$$
$$O\left(n \sum_{k=2}^{n} k^{-5/2} e^{k(1+\ln np - 2pn + kp + \ln 2)}\right)$$

Воспользуемся тем, что $kp \le np$, $np = \ln n + w(n)$, $1 + \ln 2 \ll \ln np$, и упростим степень экспоненты.

$$k(\ln np - 2pn + kp) \le k(-np + \ln np) = -k(\ln n + w(n) - \ln np) = -k(\ln n(1 + \mathrm{o}(1)) + w(n))$$

$$\sum_{k=2}^{n} C_{2n}^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(2n-k)} \le O\left(n e^{-2\ln n(1+\mathrm{o}(1))} e^{-3w(n)} \sum_{k=2}^{n} k^{-5/2}\right) =$$
$$O\left(\frac{1}{n} e^{-3w(n)} \cdot const \text{ (сход. сумма)}\right) \to 0$$

Следовательно, при условии, что изолированных вершин нет, граф с вероятностью, стремящейся к 1, не может быть связан. Значит

$$\mathrm{P}\{G(n,n,p) \text{ связен}\} \to 1$$

$\square$

2. -

3. *Доказательство.* .
(i) Воспользуемся методом 2 момента. Посчитаем матожидание числа ребер между данными множествами X_u, предполагая, что их размер как минимум u.

$$\mathrm{E}X_u = u \cdot u \cdot p = \Theta\left(n\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}\right) \to \infty$$

Посчитаем второй момент: возможны случаи: а)по две вершины в каждой доле, соединенные ребром б) одна вершина из одной доли соединена двумя ребрами с двумя вершинами из другой.

$$\mathrm{E}X_u^2 = \mathrm{O}\left(u^2u^2p^2 + u \cdot u^2p^2\right) = \mathrm{O}\left(u^4p^2\right) \approx (\mathrm{E}X_u)^2 \Rightarrow DX_u = \mathrm{o}((\mathrm{E}X_u)^2)$$

Значит, $\mathrm{P}\{X_u = 0\} \to 0$. Следовательно, хотя бы одно ребро существует.
(ii) -

$\square$

4. *Доказательство.* $y_n = 2np - \ln n - 2\ln\ln n$, $2np = y_n + \ln n + 2\ln\ln n$
1) $y_n \to -\infty, n^3p^2 \to \infty \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \infty$.

$$\mathrm{E}X_n = C_n^3p^2(1-p)^{2(n-3)+1} = \mathrm{O}\left(n^3p^2e^{-2np}\right) = \mathrm{O}\left(n^3\frac{(y_n+\ln n+2\ln\ln n)^2}{n^2}e^{-y_n-\ln n-2\ln\ln n}\right)$$
$$= \mathrm{O}\left(\frac{(y_n+\ln n+2\ln\ln n)^2}{(\ln n)^2}e^{-y_n}\right) = \mathrm{O}\left((\frac{y_n}{\ln n}+1)^2e^{-y_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Второй момент ("вишни" не соединены, "вишни" соединены по ребру):

$$\mathrm{E}X_n^2 = \mathrm{O}\left(n^6p^4e^{-4np} + n^4p^3e^{-3np}\right)$$

Покажем, что $n^2pe^{-np} \gg 1$. Тогда можно будет отбросить второй член и воспользоваться методом второго момента.
Используем условие: $p = \frac{w(n)}{n^{3/2}}$, где $w(n) \to \infty$

$$n^2pe^{-np} = n^2\frac{w(n)}{n^{3/2}}e^{-1/2y_n-1/2\ln n-\ln\ln n} = \sqrt{n}w(n)e^{-\frac{1}{2}y_n}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} = \frac{w(n)}{\ln n}e^{-\frac{1}{2}y_n} =$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}y_n + \ln w(n) - \ln\ln n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ т.к.}$$

$$p = \frac{w(n)}{n^{3/2}} = \frac{y_n+\ln n+2\ln\ln n}{2n}$$
$$w(n) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\ln n\right)$$

$$\ln w(n) = \frac{1}{2}\ln n + \ln(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\ln n)$$

То есть, $w(n)$ быстрее $\ln\ln n \Rightarrow n^2 pe^{-np} \gg 1$ и можно отбросить второй член во втором моменте.
Следовательно, $DX_n = \mathrm{o}((\mathrm{E}X_n)^2)$ и из неравенства Чебышева имеем при фиксированном t:

$$\mathrm{P}\left\{X_n = t\right\} \leq \mathrm{P}\left\{|X_n - \mathrm{E}X_n| \geq \mathrm{E}X_n - t\right\} \leq \frac{DX_n}{(\mathrm{E}X_n - t)^2} \to 0.$$

Следовательно, $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \infty$.

2) $y_n \to \infty \Rightarrow \mathrm{P}\{X_n = 0\} \to 1$.
Посчитаем матожидание числа вишен.

$$\mathrm{E}X_n = C_n^3 p^2 (1-p)^{2(n-3)+1} = \mathrm{O}\left(n^3 p^2 e^{-2np}\right) = \mathrm{O}\left(n^3 \frac{(y_n + \ln n + 2\ln\ln n)^2}{n^2} e^{-y_n - \ln n - 2\ln\ln n}\right)$$
$$= \mathrm{O}\left(\frac{(y_n + \ln n + 2\ln\ln n)^2}{(\ln n)^2} e^{-y_n}\right) = \mathrm{O}\left((\frac{y_n}{\ln n} + 1)^2 e^{-y_n}\right) \leq \mathrm{O}\left(y_n^2 e^{-y_n}\right) \to 0.$$

Согласно методу 1-го момента: $\mathrm{P}\{X_n = 0\} \to 1$.

□

5. -

6. *Доказательство.* Пусть τ_1 — первый момент времени, когда пропала последняя изолированная вершина в $\{\tilde{G}(n,m)\}$, τ_{pm} — первый момент времени, когда появилось совершенное паросочетание в $\{\tilde{G}(n,m)\}$. Очевидно, что $\tau_1 \leq \tau_{pm}$. Возьмем моменты времени:

$$m_1 = \left\lfloor \frac{n}{2}(\ln n - \ln\ln\ln n) \right\rfloor$$
$$m_2 = \lfloor n \ln n \rfloor$$

Воспользуемся асимпт. эквивалентностью моделей и перейдем к биномиальной. Тогда

$$p_1 = \frac{\ln n - \ln\ln\ln n}{n}$$
$$p_2 = \frac{2\ln n}{n}$$

Знаем, что с вероятностью, стремящейся к 1 выполняются:

- $G(n, p_2)$ связен (теорема про связность) и обладает совершенным паросочетанием (следствие из теоремы 4.9 про свойство PM)
- $\tilde{G}(n, m_1)$ состоит из гиган. компоненты и изолированных вершин, число которых меньше $\ln n$ (из задачи 2) и, следовательно, не обладает соверш. паросочетанием.

Так как свойства для $G(n, p_2)$ монотонные, то они выполняются и для процесса. Значит, $\mathrm{P}\{m_1 < \tau_1 \leq m_2\} \to 1$.
Из доказательства теоремы 4.6 знаем, что ребер между изолированным вершинами почти наверняка не будет в промежутке времени $(m_1 + 1, ..., m_2)$ (то есть "вишни" среди изолированных не будет). Также, в момент времени $t = m_2$ в графовом процессе уже есть совершенное паросочетание (с вероятностью, стремящейся к 1). Значит,

если покажем, что в любом индуцированном двудольный подграфе $G(n,m)$ нет множества вершин (состоящего строго больше, чем из одной вершины), нарушающего теорему Холла в заданном промежутке времени, то задача будет решена (т.е. в нашей гигаг. компоненте всегда есть паросочетание, покрывающее все вершины, и добавление изолированных вершин не портит картину, а значит с добавлением последней изолированной вершины появится совершенное паросочетание). Будем использовать утверждения задачи 7.
Пусть A — событие того, что такое множество S нашлось. Тогда (все пояснения и обозначения по уравнению см. в 8 задаче (ее я просто раньше делал)). Проверим для $|S| = 2$ ("вишня", X — число "вишен"):

$$\mathrm{E}X = \mathrm{O}\left(n^3 p^2 e^{-2np}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{n^3 \log^2 n \log^2 n}{n^2 n^2}\right) \to 0.$$

Теперь для $|S| \geq 3$:

$$\mathrm{P}\left\{\mathrm{A}\right\} \leq \sum_{s=3}^{\lceil\frac{n}{4}\rceil} C_n^s C_{n-s}^{s-1} \left(C_s^2\right)^{s-1} p^{2(s-1)} (1-p)^{s(n-(s-1))} <$$

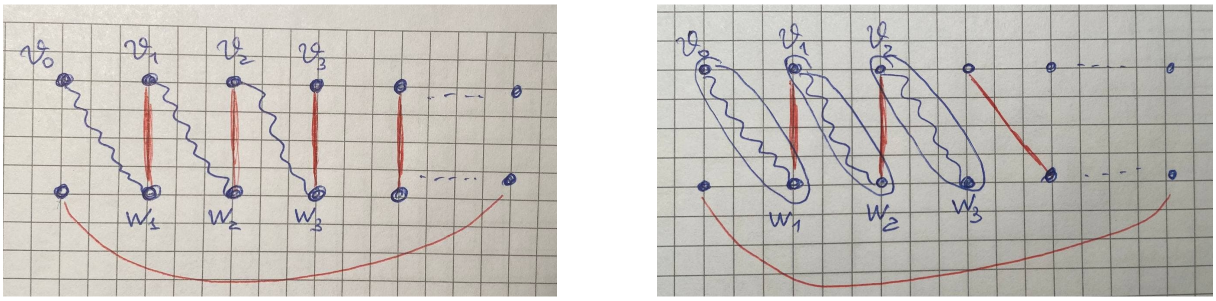
$$< \sum_{s=3}^{\lceil\frac{n}{4}\rceil} \left(\frac{ne}{s}\right)^s \left(\frac{ne}{s}\right)^{s-1} s^{2(s-1)} \left(\frac{2\ln n}{n}\right)^{2s-2} \exp\left(-\frac{\ln n}{2}s + \frac{\ln\ln\ln n}{2}s\right) <$$

$$< \sum_{s=3}^{\lceil\frac{n}{4}\rceil} n e^{2s-1} 2^{2s-2} (\ln n)^{2s-2} \frac{(\ln\ln n)^{s/2}}{(\ln n)^{s/2}} <$$

$$< \frac{n}{(\ln n)^2} \sum_{s=3}^{\lceil\frac{n}{4}\rceil} \left(\frac{4e^2 (\ln n)^{3/2} \sqrt{\ln\ln n}}{\sqrt{n}}\right)^s = \mathrm{O}\left(\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\right) \to 0$$

Следовательно, моменты времени совпадают. □

7. *Доказательство.* Построим множество S, удовл. условиям (i)-(iii).
Алгоритм: так как в G нет совершенного паросочетания (СП), то выделим максимальное паросочетание M'. Если M' не связано (можно выделить несвязанные компоненты), то возьмем его минимальную по количеству ребер связную часть M (иначе, $M = M'$), такую, что существует вершина v_0, не входящая в M, но имеющая ребро с кем-то из M. Если такой точки нет, значит, реализуется тривиальный случай.
Тривиальный случай: если существует изолированная вершина, то кладем ее в наше множество S (все три свойства автоматически выполняются).
В S кладем нашу $v_0 \in V_1$(для определенности) и все вершины, до которых можно добраться по следующему маршруту: из v_0 первое ребро не принадлежит M, второе принадлежит M, третье не принадлежит и т.д. (см. рис. 1a). Я буду обозначать вершины, которые лежат в одной доле с v_0 через $v_i \in V_1 (i = 1, ..., m)$, из другой доли — $w_i \in V_2 (i = 1, ..., m)$.
(i) По построению, $|S| = |N(S)| + 1$.
(ii) Пусть $|S| > \frac{n}{2}$, тогда $|N(S)| \geq \frac{n}{2}$. Пусть G' — индуцированный двудольный подграф, такой что $V_1' = V_1 \backslash S$, а $V_2' = V_2 \backslash N(S)$. Так как размеры $|V_1'| \neq |V_2'|$ ($|V_1| = |V_2| = n$ и $|S| \neq |N(S)|$), в G' нет совершенного паросочетания (разные размеры долей) и $|V_1'| < |V_1|$, следовательно мы изначально взяли не минимальную часть паросочетания M'.



а) б)

Рис. 1: красные ребра принадлежат M, синие — нет

(iii) По построению, любая вершина w_i (это как раз множество соседей S) имеет не менее двух соседей в S, кроме, быть может, последней w_m. Однако такого не может быть, так как, если бы такая ситуация была возможно, то мы смогли бы увеличить наше паросочетание, используя v_0 (обведены, см. рис. 2б), а оно минимально. $\square$

8. *Доказательство.* Пусть $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$ — некая пороговая вероятность. Проверим, является ли она пороговой для для $Q_1 = \{G(n,n,p)$ обладает совершенным паросочетанием$\}$ и $Q_2 = \{$в $G(n,n,p)$ нет изолированных вершин$\}$.
1) $p = \text{o}(\hat{p})$. Пусть $p = \frac{\ln n - \ln\ln n}{n}$ (Что даже больше о малого, но не пересекает границу $\hat{p}$, и так как свойства Q_1 и Q_2 монотонные, то если покажем, что вероятности событий стремятся к $0(1)$, то все это будет верно и для $\text{o}(\hat{p})$).
Из доказательства для задачи 1 следует, что при $p = \frac{\ln n - \ln\ln n}{n}$ число изолированных вершин стремится к бесконечности с вероятностью, стремящейся к 1, а значит с такой же вероятностью не выполняются для $G(n,n,p)$ свойства Q_1 и Q_2.
2) $p = w(\hat{p})$. Пусть $p = \frac{\ln n + \ln\ln n}{n}$ (из тех же соображений).
Из доказательства для задачи 1 следует, что при данном p число изолированных вершин по вероятности стремится к 1, а значит и вероятностью события Q_2 стремится к 1. Проверим теперь наличие совершенного паросочетания (СП) для нашего графа, используя результат 7-ой задачи.
Пусть событие A — существует ли такое множество S, что нарушает теорему Холла.
Обозначение: $s = |S|$.

- $s = 1$.
  В этом случае S — это изолированная вершина, а их быть не может.
- $s = 2$.
  Здесь у S по свойству из номера 7 (ii) всего один сосед, значит, это "вишня". Пусть X_n — число "вишен", тогда

$$\mathrm{E}X_n = C_n^3 p^2 (1-p)^{2(n-3)+1} = \mathrm{O}\left(n^3 p^2 e^{-2np}\right) =$$
$$= \mathrm{O}\left(n^3 \left(\frac{\ln n + \ln\ln n}{n}\right)^2 \left(\frac{\ln n + \ln\ln n}{n}\right)^2\right) \to 0$$

  По методу 1-го момента $\Rightarrow$ почти наверняка "вишен" нет.
- $s \geq 3$.
  Знаем, что если S существует, то оно удовлетворяет (i) $|N(S)| = s-1$, (ii) $s \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ и (iii) любая вершина из $N(S)$ имеет не менее двух соседей. Тогда:
  - C_n^s — выбираем S (i)
  - C_n^{s-1} — выбираем $N(S)$ (ii)

– $\left(C_s^2\right)^{s-1}$ — выбор минимального числа ребер внутри (iii)

Используем:

$$C_n^k \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$

$$s \leq \frac{n}{2} + 1$$

$$\ln \ln n \leq \ln n \text{ (для } p^{2(s-1)}\text{)}$$

Тогда

$$\mathrm{P}\{\mathrm{A}\} \leq \sum_{s=3}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} C_n^s C_n^{s-1} \left(C_s^2\right)^{s-1} p^{2(s-1)}(1-p)^{s(n-(s-1))} <$$

$$< \sum_{s=3}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(\frac{ne}{s}\right)^s \left(\frac{ne}{s-1}\right)^{s-1} s^{2(s-1)} \left(\frac{\ln n + \ln n}{n}\right)^{2s-2} \exp\left(-\frac{\ln n}{2}s - \frac{\ln \ln n}{2}s\right) <$$

$$< \sum_{s=3}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \frac{n}{s} e^{2s-1} 2^{2s-2} (\ln n)^{2s-2} \frac{1}{(\ln n)^{s/2} (\ln \ln n)^{s/2}} <$$

$$< \frac{n}{(\ln n)^2} \sum_{s=3}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(\frac{4e^2 (\ln n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right)^s = \mathrm{O}\left(\frac{(\ln n)^{5/2}}{\sqrt{n}}\right) \to 0$$

(оценили сумму по порядку первого члена $s = 3$).
Следовательно, условие теоремы Холла не нарушаются и свойство Q_1 выполняется, а значит пороговые вероятности для Q_1 и Q_2 совпадают и $\hat{p} = \frac{\ln n}{n}$.

□

9. *Доказательство.* .
(a) По сути, X_t — это сумма независимых бернулиевских величин (бросаем для каждого ребра монетку), где X_i — "успех" либо "провал" для i-го шага алгоритма (выпало ребро для вершины или нет), с параметрами $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ и $N_0 = \frac{\varepsilon n^2}{2}$.

$$X_{N_0} = \sum_{t=1}^{N_0} X_i$$

$$\mathrm{E}X_{N_0} = p \cdot N_0 = \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2}$$

$$DX_{N_0} = p(1-p)N_0 = n\frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{2}$$

Из неравенства Чебышева:

$$\mathrm{P}\left\{|X_{N_0} - \mathrm{E}X_{N_0}| \geq n^{2/3}\right\} = \mathrm{P}\left\{\left|X_{N_0} - \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2}\right| \geq n^{2/3}\right\} \leq \frac{DX_n}{n^{4/3}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) \to 0.$$

Значит,

$$\mathrm{P}\left\{\left|X_{N_0} - \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2}\right| < n^{2/3}\right\} \to 1.$$

(b) P_k — текущий набор вершин, U_k — те, которые еще не рассмотрели, D_k — мертвые вершины в момент времени k.

Пусть $|D_{N_0}| \geq \frac{n}{3}$. Рассмотрим момент времени k, когда $D_k = \frac{n}{3}$ (он точно есть, так как мы все время увеличиваем D_k максимум на 1). Из предыд. пункта знаем, что почти наверняка

$$|P_k| \leq 1 + \sum_{i=1}^{t_0} X_i \leq 1 + X_{N_0} \leq \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2} + \mathrm{O}\left(\sqrt{n}\right) < \frac{n}{3}$$

Тогда,

$$|U_k| = n - |D_k| - |P_k| \geq \frac{n}{3},$$

и на данный момент алгоритм сделал $|D_k| \cdot |U_k| \geq \frac{n^2}{9}$ шагов (ребра, которых точно нет, оценка снизу для алгоритма), что больше $N_0 = \frac{\varepsilon n^2}{2}$ в силу малости ε, а такого быть не может.

(c) Доказать, что $|P_{N_0}| \geq \frac{\varepsilon^2 n}{5}$, $k = N_0$.
Пусть $|P_{N_0}| < \frac{\varepsilon^2 n}{5}$. Так как из (b) знаем, что $|D_{N_0}| < \frac{n}{3}$, то еще есть нерасмотренные вершины. В момент времени $k = N_0$ из пункта (a) следует, что так как U_{N_0} не пусто, то

$$(1 + \mathrm{O}(1))n^{2/3} + \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2} \geq X_{N_0} \geq \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2} - n^{2/3}$$

(столько вершин было перекинуто из U_k в P_k, а затем возможно еще и в D_k)
Другими словами,

$$|P_{N_0} \cup D_{N_0}| \geq \frac{n(1+\varepsilon)\varepsilon}{2} - n^{2/3}.$$

Т.к. $|P_{N_0}| < \frac{\varepsilon^2 n}{5}$, то

$$|D_{N_0}| > \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2 n}{10} - n^{2/3}$$

Алгоритм на момент $k = N_0$ имеет оценку снизу на число шагов $= |D_k| \cdot |U_k|$ Тогда имеем:

$$N_0 = \frac{n\varepsilon^2}{2}$$

$$|U_{N_0}| = n - |D_{N_0}| - |P_{N_0}|$$

$$\begin{aligned} N_0 \geq |D_{N_0}| \cdot |U_{N_0}| > (n - |D_{N_0}| - |P_{N_0}|) \left(\frac{n\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2 n}{5} - n^{2/3}\right) > \\ > \left(n - \frac{n\varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon^2 n}{10} + n^{2/3} - \frac{\varepsilon^2 n}{5}\right)\left(\frac{n\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2 n}{10} - n^{2/3}\right) = \\ = \left(n - \frac{n\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2 n}{2} + n^{2/3}\right)\left(\frac{n\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2 n}{10} - n^{2/3}\right) = \frac{n^2\varepsilon}{2} + \frac{n^2\varepsilon^2}{20} - \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right) n^2 > \frac{n\varepsilon^2}{2} \end{aligned}$$

Противоречие.

$\square$

Бред (так как свойство не монотонное)

Доказательство. Воспользуемся асимптотич. эквивалентностью моделей для монотонных свойств и перейдем к биномиальной модели графа $G(n,p)$: $p = \frac{m}{n(n-1)/2} = \frac{\ln n - w(n)}{n}$, где $w(n) = \ln\ln\ln n$.
Согласно замечанию к теореме 4.3 (о связности): граф $G(n,p)$ не связен, и содержит изолированные вершины, а также из доказательства теоремы 4.3 следует, что $G(n,p)$ состоит из гигантской компоненты размера > n/2. Эти все события являются монотонными, значит, выполняются для равномерной модели.
Покажем, что число изолированных вершин не превосходит $\ln n$ и что нет компонент связности размера от 2 до $n/2$.
Пусть X_1 — число изолированных вершин в $G(n,p)$.

$$\mathrm{E}X_1 = n(1-p)^{n-1} \approx ne^{-np} \approx \ln\ln n$$

$$I_v = \{1 \text{ если } v \in V(G) \text{ или } 0 \text{ если } v \notin V(G)\}$$

$$\mathrm{E}X_1^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{v \in V(G)} I_v\right)^2 = \sum_{v,w \in V(G)} \mathrm{E}(I_v I_w) = \sum_{v \neq w} \mathrm{P}\{I_v = 1, I_w = 1\} + \sum_{v = w} \mathrm{P}\{I_v = 1, I_w = 1\} =$$
$$= n(n-1)(1-p)^{2n-3} + n(1-p)^{n-1} = \mathrm{E}X_1 + (\mathrm{E}X_1)^2(1-p)^{-1}$$

$$DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = EX_1 + \frac{2(\mathrm{E}X_1)^2 - p(\mathrm{E}X_1)^2}{1-p} \leq EX_1 + 2(\mathrm{E}X_1)^2 p$$

$$\mathrm{P}\{X_1 \geq \ln n\} \leq \mathrm{P}\{|X_1 - \mathrm{E}X_1| \geq \ln n\} \leq \frac{EX_1 + 2(\mathrm{E}X_1)^2 p}{\ln^2 n} \to 0$$

Следовательно, $\mathrm{P}\{X_1 < \ln n\} \to 1$. Так как это монотонное свойство, то оно выполнено и для равномерной модели.
Теперь посчитаем $\mathrm{P}\{\sum_{k=2}^{n/2} X_k > 0\} \leq \mathrm{E}(\sum_{k=2}^{n/2} X_k)$ (метод 1-го момента), X_k — количество остовных деревьев размера k. Отдельно для случая 2.

$$C_n^2 p(1-p)^{2n-4} \leq \mathrm{O}\left(n^2 \frac{\ln n}{n} e^{-2pn}\right) = \mathrm{O}\left(n \ln n e^{-2\ln n}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\ln n\right) \to 0.$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{k=3}^{n/2} X_k\right) = \sum_{k=3}^{n/2} C_n^k k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)} \leq \mathrm{O}\left(\sum_{k=3}^{n/2} \frac{n^k k^{k-2}}{k^k k^{1/2}} e^k p^{k-1} e^{-pk(n-k)}\right) =$$
$$= \mathrm{O}\left(n \sum_{k=3}^{n/2} k^{-\frac{5}{2}} e^{-k(-1-\ln np + np - kp)}\right)$$

Учтем,

$$p = \frac{\ln n - w(n)}{n},\ np = \ln n + \mathrm{O}(1),\ kp \leq \frac{np}{2}$$

$$\mathrm{O}\left(n \sum_{k=3}^{n/2} k^{-\frac{5}{2}} e^{-k(-1-\ln np + np - kp)}\right) \leq \mathrm{O}\left(\sum_{k=3}^{n/2} k^{-\frac{5}{2}} e^{-k(\frac{1}{2}\ln n)}\right) \leq$$
$$\leq \mathrm{O}\left(n e^{-\frac{3}{2}\ln n} \sum_{k=3}^{n/2} k^{-\frac{5}{2}}\right) = n^{-\frac{1}{2}(1+\mathrm{o}(1))} \to 0.$$

Следовательно, по асимп. эквивалетности моделей, это же выполняется и для равномерной модели. □