

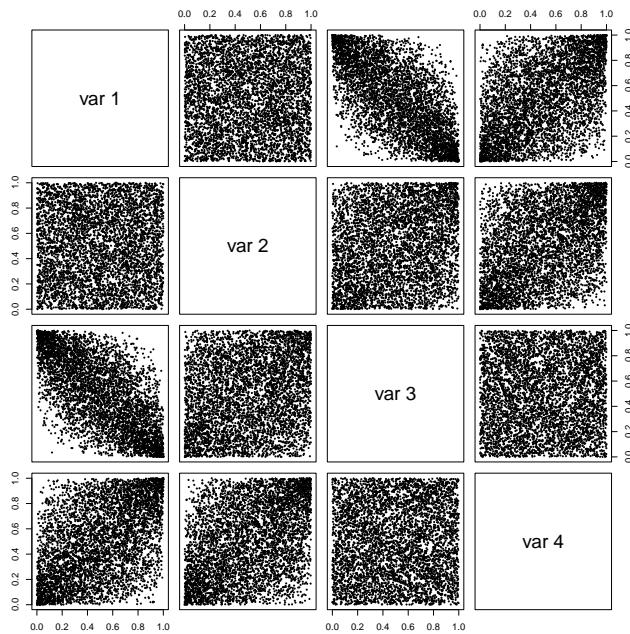
EST-24107: Tarea 3

*Carlos Lezama, Marco Medina,
Emiliano Ramírez y Santiago Villarreal*

Lunes, 4 de octubre de 2021

Problema 1

```
# Nuestra copula será una gaussiana, como vimos en clase,  
# para poder otorgarle la estructura de dependencia que queremos.  
  
copula_normal_4 <-  
  normalCopula(c(0, 2 * (sin((  
    -0.7 * pi  
  ) / 6)), 2 * (sin((  
    0.5 * pi  
  ) / 6)), 2 * (sin((  
    0.2 * pi  
  ) / 6)), 2 * (sin((  
    0.4 * pi  
  ) / 6))), 0),  
  dim = 4, dispstr = "un")  
  
set.seed(170309)  
  
U <- rCopula(5000, copula_normal_4)  
  
pairs(U, pch = 16, cex = 0.5)
```



Mostramos nuestra matriz de dependencia

```
round(cor(U, method = "spearman"), 2)

##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]  1.00  0.01 -0.68  0.49
## [2,]  0.01  1.00  0.21  0.42
## [3,] -0.68  0.21  1.00  0.03
## [4,]  0.49  0.42  0.03  1.00
```

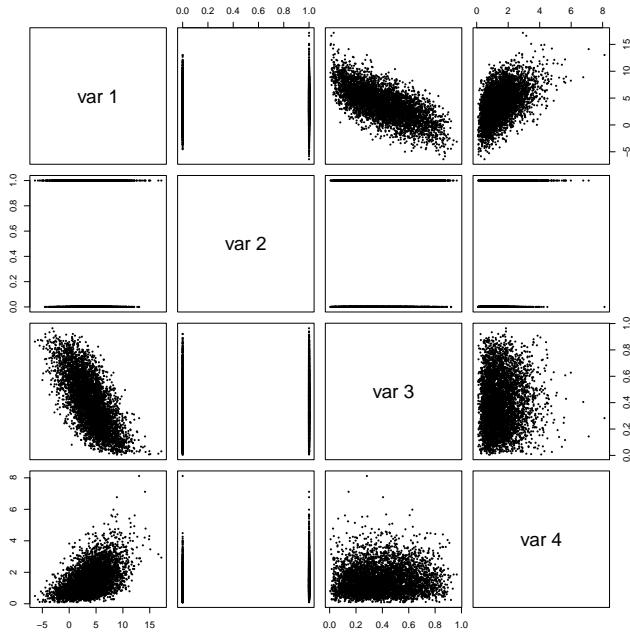
Ahora generamos el vector $X=(X_1, X_2, X_3, X_4)$ que se nos pide y
hacemos los histogramas para ver si tienen el comportamiento deseado

```
X <- cbind(qnorm(U[, 1], mean = 4, sd = 3),
            qbern(U[, 2], prob = 0.6),
            qbeta(U[, 3], 2, 3),
            qgamma(U[, 4], 3, 2))
```

Echamos un vistazo a como quedaron los datos de X
head(X)

```
##      [,1] [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] 1.9747615   0 0.3273045 0.9259319
## [2,] 2.3592402   1 0.1785686 0.3702043
## [3,] 9.5036467   1 0.1243522 1.9143083
## [4,] 4.7806641   1 0.2422785 2.0176193
## [5,] 0.7052271   0 0.5923000 0.7799695
## [6,] 3.5411958   1 0.2535589 0.3495762
```

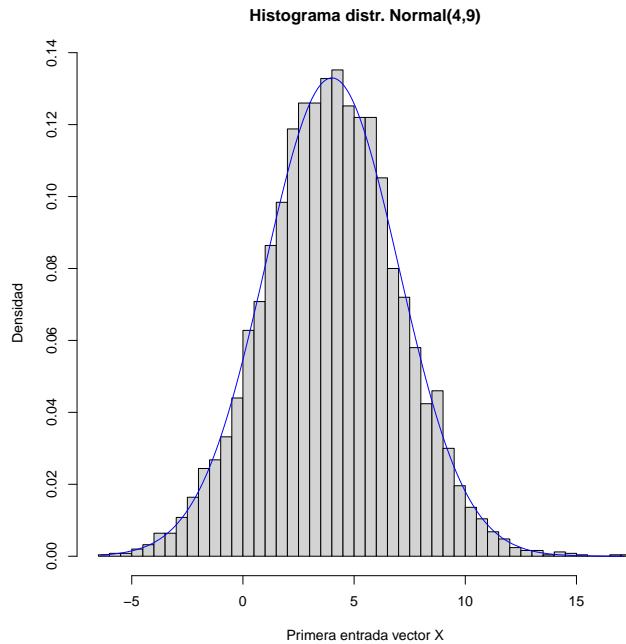
```
# Visualizamos nuestros datos
pairs(X, pch = 16, cex = 0.5)
```



```
# Graficamos los histogramas y agregamos densidades con
# las distribuciones deseadas para ver la aproximación
```

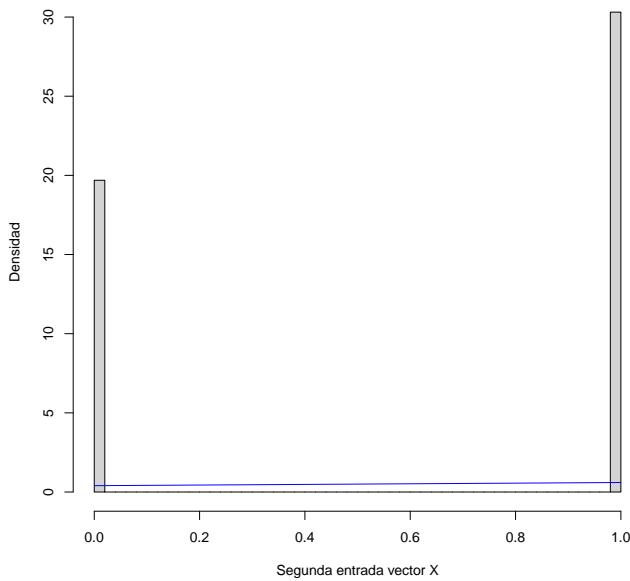
```
par(mfrow = c(1, 1))
hist(
  X[, 1],
  prob = T,
  breaks = 50,
  main = "Histograma distr. Normal(4,9)",
  xlab = "Primera entrada vector X",
  ylab = "Densidad"
)

points(sort(X[, 1]), dnorm(sort(X[, 1]), 4, 3), type = "l", col = "blue")
```



```
hist(  
  X[, 2],  
  prob = T,  
  breaks = 50,  
  main = "Histograma distr. Bernoulli(0.6)",  
  xlab = "Segunda entrada vector X",  
  ylab = "Densidad"  
)  
  
points(sort(X[, 2]),  
      dbern(sort(X[, 2]), prob = 0.6),  
      type = "l",  
      col = "blue")
```

Histograma distr. Bernoulli(0.6)

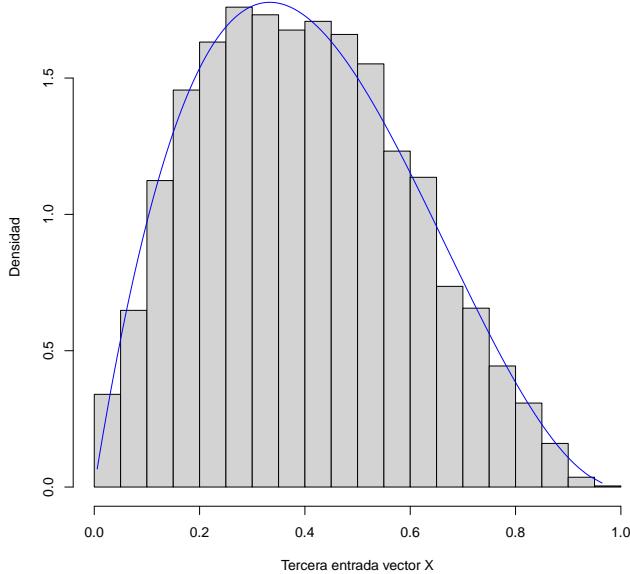


```

hist(
  X[, 3],
  prob = T,
  main = "Histograma distr. Beta(2,3)",
  xlab = "Tercera entrada vector X",
  ylab = "Densidad"
)

points(sort(X[, 3]), dbeta(sort(X[, 3]), 2, 3), type = "l", col = "blue")
  
```

Histograma distr. Beta(2,3)

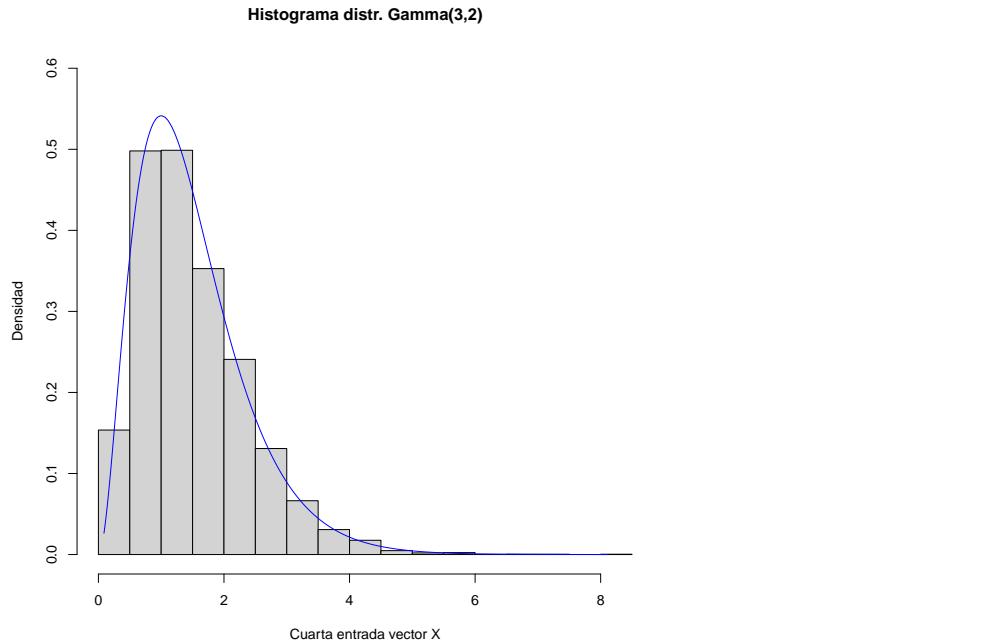


```

hist(
  X[, 4],
  prob = T,
  main = "Histograma distr. Gamma(3,2)",
  xlab = "Cuarto entrada vector X",
  ylab = "Densidad",
  ylim = c(0, 0.6)
)

points(sort(X[, 4]), dgamma(sort(X[, 4]), 3, 2), type = "l", col = "blue")

```



```

# Revisemos si nuestro vector cumple con
# la estructura de dependencia que queríamos imponer
cor(X, method = "spearman")

##          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] 1.0000000000 0.007917661 -0.68478800 0.49383317
## [2,] 0.007917661 1.0000000000 0.17071203 0.34176481
## [3,] -0.684788000 0.170712034 1.00000000 0.02937377
## [4,] 0.493833167 0.341764813 0.02937377 1.00000000

# No es exactamente igual a la estructura ideal que queremos,
# sin embargo se acerca mucho.

```

Observamos los histogramas de las distribuciones marginales para corroborar que tienen las distribuciones consideradas.

Problema 2

Problema 3

1. Mostrar que cuando $\theta \rightarrow \infty$, $C^{Fr}(u_1, u_2) \rightarrow \min\{u_1, u_2\}$, donde C^{Fr} es la cópula de Frank.

Primero, supongamos que $u_2 > u_1$. Sabemos que la cópula de Frank tiene la siguiente forma analítica para el caso bivariado:

$$\begin{aligned} C^{Fr}(u_1, u_2) &= -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \\ &= -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{e^{-\theta u_1 - \theta u_2} - e^{\theta u_1} - e^{\theta u_2} + 1}{e^{-\theta} - 1} \right) \end{aligned}$$

Cuando $\theta \rightarrow \infty$ entonces $e^{-\theta} - 1 \approx -1$, por lo que

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(1 - e^{-\theta u_1 - \theta u_2} + e^{\theta u_1} + e^{\theta u_2} - 1 \right) \\ &\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(-e^{-\theta u_1 - \theta u_2} + e^{\theta u_1} + e^{\theta u_2} \right) \\ &\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1}(-e^{-\theta u_2} + 1 + e^{-\theta u_2} e^{\theta u_1}) \right) \\ &\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1}(-e^{-\theta u_2} + 1 + e^{-\theta(u_2 - u_1)}) \right) \end{aligned}$$

ya que $u_2 > u_1$, $-e^{-\theta u_2} + 1 + e^{-\theta(u_2 - u_1)} \rightarrow 1$ cuando $\theta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1} \right) \\ &\approx u_1 = \min\{u_1, u_2\} \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $\theta \rightarrow \infty$, $C^{Fr}(u_1, u_2) \rightarrow \min\{u_1, u_2\}$ ■

Problema 4

Probar que la cópula de Clayton converge a la cópula de comonotidad cuando $\theta \rightarrow \infty$.

Notemos que la cópula de Clayton la podemos escribir como:

$$\exp[\ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta]$$

Calculamos entonces el límite cuando $\theta \rightarrow \infty$ aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1} \cdot [-u_1^{-\theta} \ln u_1 - u_2^{-\theta} \ln u_2] = \lim_{\theta \rightarrow \infty} -\frac{\sum_i u_i^{-\theta} \ln u_i}{\sum_i u_i^{-\theta} - 1}$$

Sea $u_m = \min\{u_1, u_2\}$, suponemos que $u_m \neq 0$. Dividimos y multiplicamos por u_m^θ .

$$\implies \lim_{\theta \rightarrow \infty} -\frac{\sum_i u_i^{-\theta} \ln u_i}{\sum_i u_i^{-\theta} - 1} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} -\frac{\sum_i (u_m/u_i)^\theta \ln u_i}{\sum_i (u_m/u_i)^\theta - 1}$$

Notemos que si $u_i \neq u_m$, entonces $u_m/u_i < 1$, por lo que $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (u_m/u_i)^\theta = 0$. Si $u_i = u_m$, entonces $u_m/u_i = 1$ y $\lim_{\theta \rightarrow \infty} (u_m/u_i)^\theta = 1$.

$$\implies \lim_{\theta \rightarrow \infty} -\frac{\sum_i (u_m/u_i)^\theta \ln u_i}{\sum_i (u_m/u_i)^\theta - 1} = -\frac{\ln u_m}{-1} = \ln u_m$$

Por lo que si tomamos el límite completo:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \exp\{\ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta\} = \exp\{\lim_{\theta \rightarrow \infty} \ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta\} = \exp\{\ln u_m\} = u_m$$

Supongamos ahora que $u_m = 0$, en ese caso:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{\frac{1}{\theta}} = 0$$

Por lo tanto, la cópula de Clayton converge a la cópula de comonotidad cuando $\theta \rightarrow \infty$.

Problema 5

Problema 6

Mostrar que la densidad conjunta correspondiente a la cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern es no negativa.

Sea la densidad conjunta correspondiente a la cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = [1 + \alpha(1-u)(1-v)] - \alpha v(1-u) - \alpha u(1-v) + \alpha uv$$

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) = 1 + \alpha(2u-1)(2v-1)$$

Basta con probar que $(2u-1)(2v-1) \geq -1$ para probar que $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \geq 0$.

$$(2u-1)(2v-1) \geq -1 \iff \left[(2u-1) \geq \frac{-1}{(2v-1)} \wedge (2v-1) > 0 \right] \vee \left[(2u-1) \leq \frac{-1}{(2v-1)} \wedge (2v-1) < 0 \right]$$

Notemos que como u y v están entre 0 y 1. En el primer caso, la mayor cota inferior posible para $2u-1$ es cuando $v=1$, entonces:

$$(2u-1) \geq -1 \geq \frac{-1}{(2v-1)}$$

En el segundo caso, la menor cota superior posible para $2u-1$ es cuando $v=0$, entonces:

$$(2u-1) \leq 0 \leq \frac{-1}{(2v-1)}$$

Por lo tanto u cumple la desigualdad para todo valor de v . De manera análoga, por simetría, v cumple la desigualdad para todo valor de u . Por lo tanto $(2u-1)(2v-1) \geq -1$ y $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \geq 0$.

Calcular el coeficiente de correlación de Spearman

Sabemos que si tenemos $C(u, v)$, entonces podemos calcular el coeficiente de correlación de Spearman como:

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 3 - 6 \int_0^1 \int_0^1 \left(u \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) + v \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \right) dudv$$

$$\implies \rho = 3 - 6 \int_0^1 \int_0^1 uv + \alpha u(1-u)(1-v) - \alpha u^2 v(1-v) + uv + \alpha(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 dudv$$

$$\implies \rho = 3 - 6 \int_0^1 \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}\alpha(1-v) - \frac{1}{3}\alpha v(1-v) + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\alpha v(1-v) - \frac{1}{6}\alpha v^2 dv$$

$$\implies \rho = 3 - 6 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\alpha \right] = 3 - 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\alpha \right]$$

$$\therefore \rho = \frac{\alpha}{3}$$

Es decir, el coeficiente de correlación de Spearman de la cópula es función del parámetro α , tal que $\rho(\alpha) \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Calcular la tau de Kendall

Sabemos que si tenemos $C(u, v)$, entonces podemos calcular la tau de Kendall:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \right) dudv$$

$$\implies \tau = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 uv + \alpha u(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 - \alpha u^2 v(1-v) + \alpha u(1-u)v(1-v)$$

$$+ \alpha^2 u(1-u)^2 v(1-v)^2 - \alpha^2 u(1-u)^2 - \alpha^2 u^2(1-u)v(1-v) + \alpha^2 u^2(1-u)v^2(1-v) dudv$$

OJO: notemos que los cuatro términos que incluyen a α^2 se cancelan tras la integración.

$$\implies \tau = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 uv + \alpha u(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 - \alpha u^2 v(1-v) + \alpha u(1-u)v(1-v) dudv$$

$$\implies \tau = 1 - 4 \int_0^1 \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}\alpha v(1-v) - \frac{1}{6}\alpha v^2 - \frac{1}{3}\alpha v(1-v) + \frac{1}{6}\alpha v(1-v) dv$$

$$\implies \tau = 1 - 4 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\alpha \right] = 1 - 4 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{18}\alpha \right] = \frac{2}{9}\alpha$$

$$\therefore \tau = \frac{2}{9}\alpha$$

Es decir, la tau de Kendall de la cópula es función del parámetro α , tal que $\tau(\alpha) \in (-\frac{2}{9}, \frac{2}{9})$.

Problema 7

Sabemos $\tau = 0.2$.

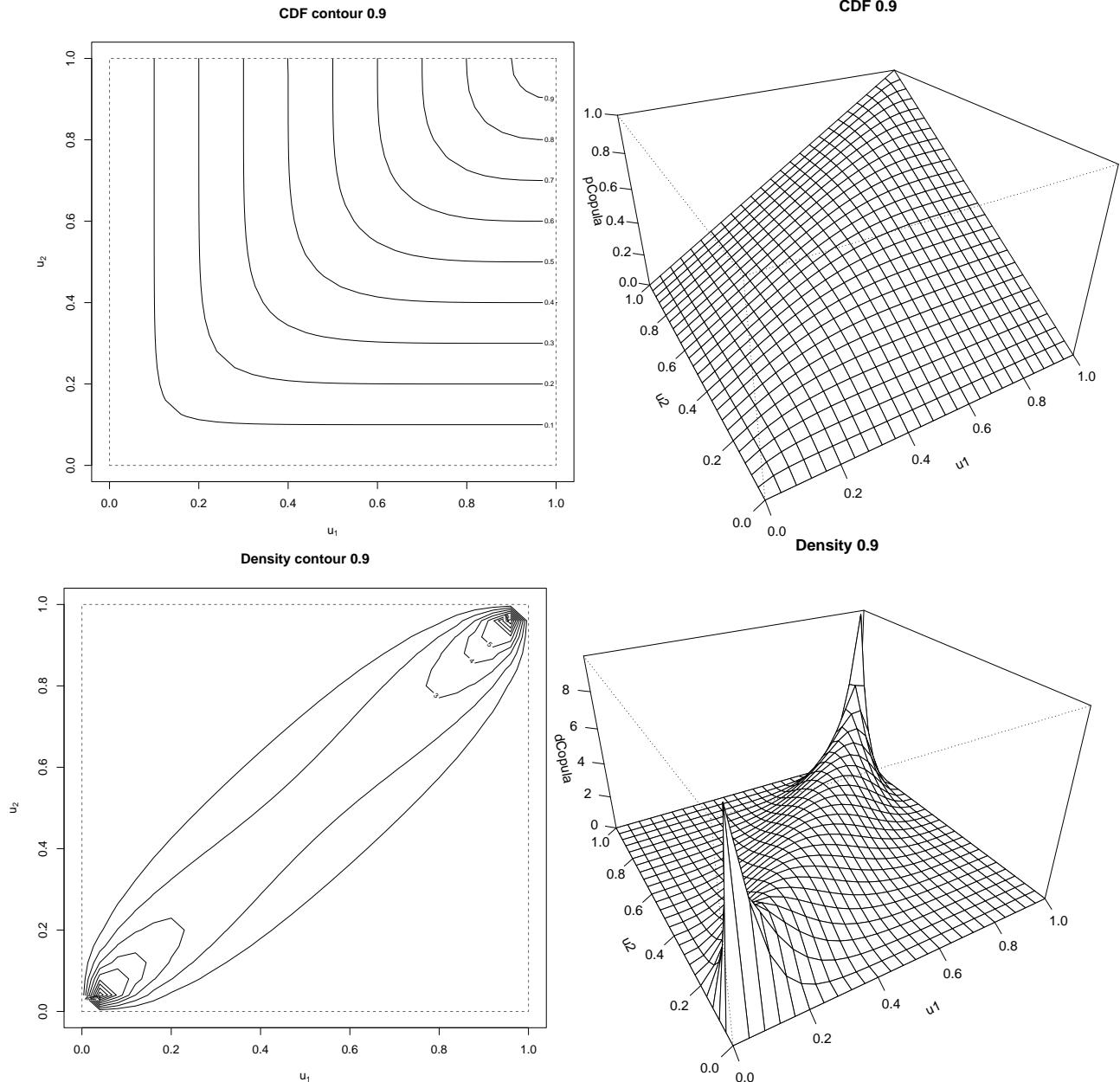
1. Cúpula normal (o cualquier elíptica): $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) = 0.309017$.
2. Cúpula de Gumbel: $\alpha = \frac{1}{1-\tau} = 1.25$.
3. Cúpula de Clayton: $\alpha = \frac{2\tau}{1-\tau} = 0.5$.

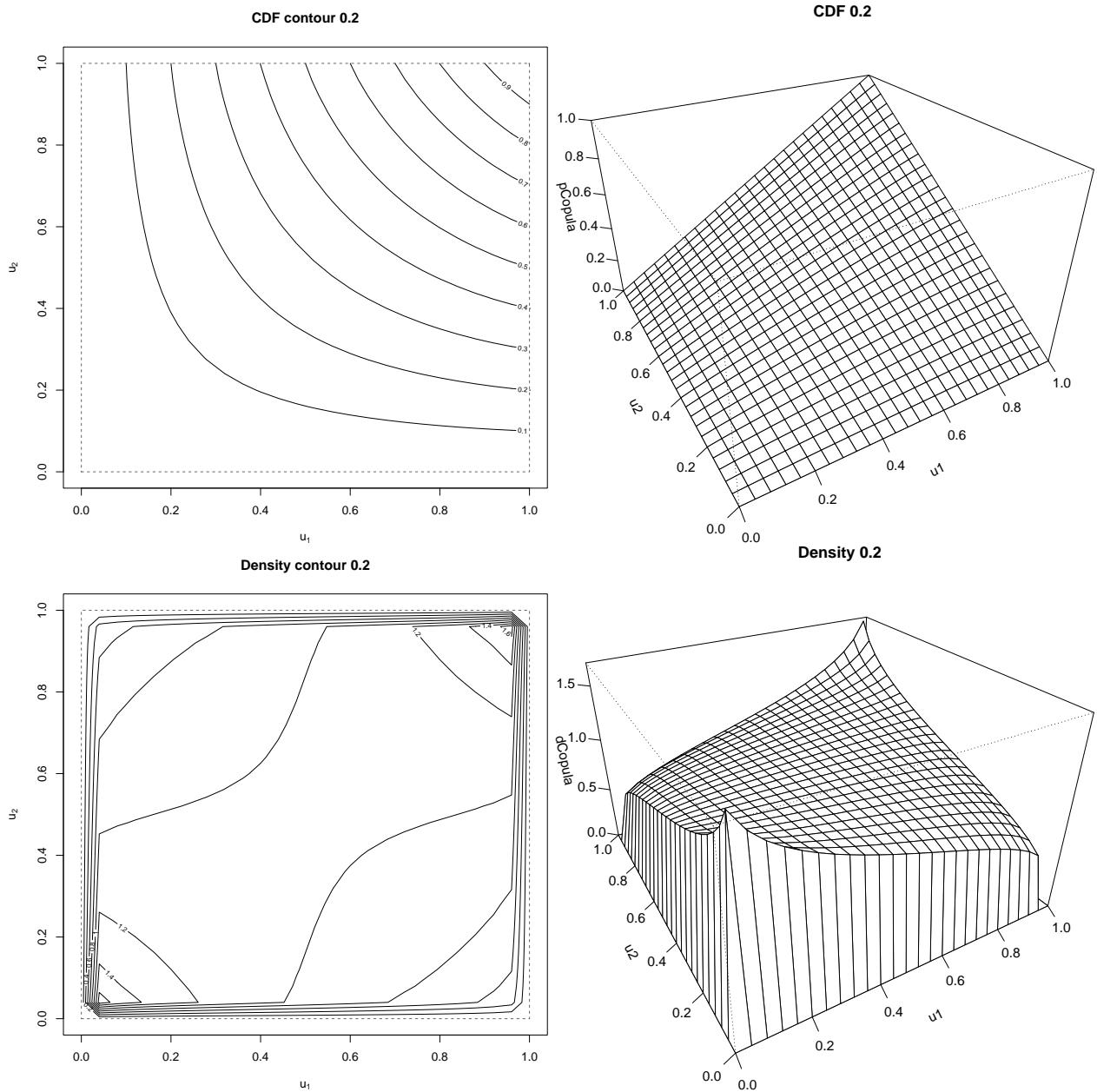
Problema 8

Generación de cópulas:

```
normCopula0.9 <- normalCopula(param = 0.9, dim = 2)
normCopula0.2 <- normalCopula(param = 0.2, dim = 2)
```

Visualización:



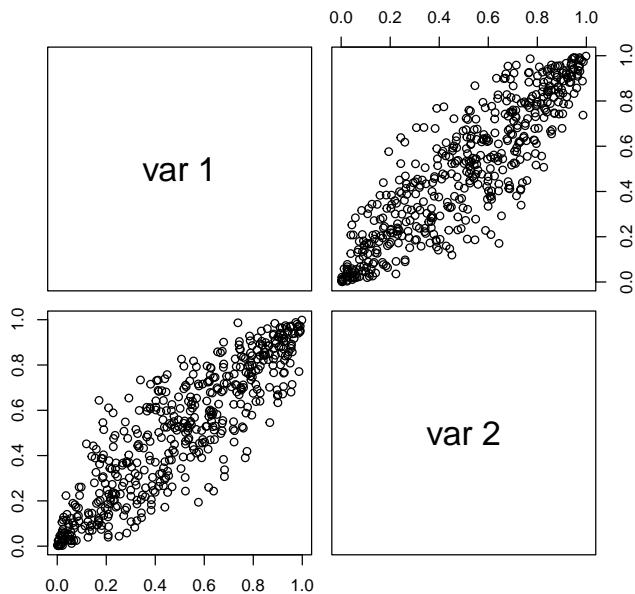


Nótese que con mayor coeficiente de correlación, más nos aproximamos a una relación lineal — fácil de observar en las curvas de nivel de la función de probabilidad acumulada. Así pues, la dependencia lineal en la cópula gaussiana está directamente relacionada con su parámetro.

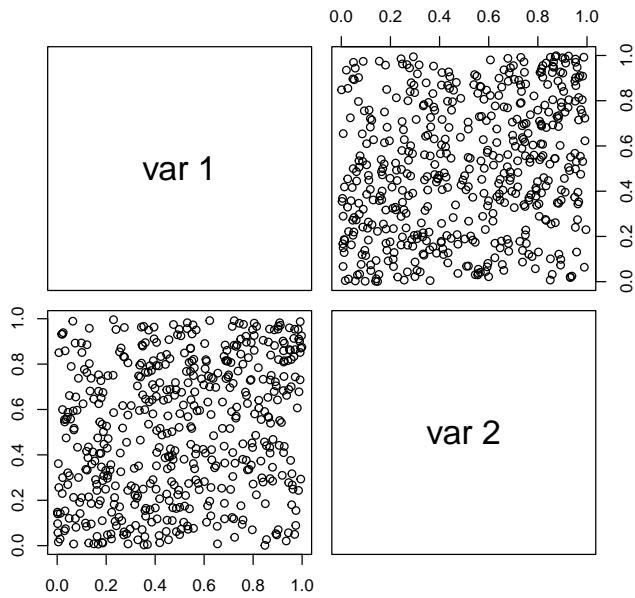
Problema 9

Simulamos 500 puntos cuya distribución son las cópulas del ejercicio 8 anterior.

Parámetro 0.9



Parámetro 0.2



Como podemos observar, existe una mayor dependencia entre las marginales cuando el parámetro de normalCopula es 0.9 que cuando es 0.2.