EST–24107: Tarea 4

Carlos Lezama, Marco Medina,
Emiliano Ramírez y Santiago Villarreal

Lunes, 25 de octubre de 2021

Problema 1

Sea $S ={(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)} $ el espacio de estados del proceso donde $(0,0)$ denota que la maquina 1 y la máquina 2 están apagadas, $(1,0)$ denota que la máquina 1 está prendida y la máquina 2 está apagada, y así sucesivamente.

Suponemos que los estados son independientes. Creemos que este supuesto es razonable ya que también es razonable que las máquinas sean independientes, por ende, la eficiencia de cada máquina es independiente de la otra.

Obtengamos las probabilidades de cada estado dado que la probabilidad de la máquina 1 de producir una pieza no defectuosa es 0.3 y para la máquina 2 es de 0.5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0,0) &= 0.3^2(0.5)^2 = 0.0225 \\
\mathbb{P}(1,0) &= (1-0.3^2)0.5^2 = 0.2275 \\
\mathbb{P}(0,1) &= 0.3^2(1-0.5^2) = 0.0675 \\
\mathbb{P}(1,1) &= (1-0.3^2)(1-0.5^2) = 0.6825
\end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad de que una máquina esté apagada (y por ende, su armario esté lleno) se traduce a la probabilidad de que la máquina produzca dos piezas consecutivas no defectuosas:

$$\mathbb{P}(\text{producir 2 piezas no defectuosas}) = a_i^2$$

Mientras que la probabilidad de que la máquina esté prendida simplemente es su complemento probabilístico:

$$\mathbb{P}(\text{producir al menos una pieza defectuosa}) = 1 - \mathbb{P}(\text{producir 2 piezas no defectuosas})$$

Así pues, sea X_t nuestro proceso de Markov que es mapeado al espacio de estados §. Para calcular las probabilidades de transición de nuestra matriz usamos el supuesto de independencia entre estados. Observemos que para cualquier par de eventos en §, sin perdida de generalidad pasa lo siguiente:

$$\mathbb{P}[X_t = (1,0)|X_{t-1} = (0,0)] = \frac{\mathbb{P}[X_t = (1,0)]\mathbb{P}[X_{t-1} = (0,0)]}{\mathbb{P}[X_{t-1} = (0,0)]} = \mathbb{P}[X_t = (1,0)]$$

Por tanto, nuestra matriz de transición tiene la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0225 & 0.2275 & 0.0675 & 0.6825 \\ 0.0225 & 0.2275 & 0.0675 & 0.6825 \\ 0.0225 & 0.2275 & 0.0675 & 0.6825 \\ 0.0225 & 0.2275 & 0.0675 & 0.6825 \end{pmatrix}$$

Donde cada renglón suma a uno y cada entrada es mayor o igual que cero mostrando que es una matriz de transición.

```
#matriz de transición
P <- matrix(c(rep(c(0.0225, 0.2275 , 0.0675 , 0.6825),4)),
            byrow=T, nrow=4)
n <- 500 #numero de simulaciones del proceso.
X <- NULL

#escogemos el estado 1 (0,0) que denota a las dos máquinas apagadas
#como condición inicial pues denota el inicio de la producción.
X[1] <- 1

for(i in 2:n) X[i] <- sample(1:4, 1, prob=P[X[i-1],])

#mostramos los 500 pasos de la cadena de Markov simumlada.
X

##   [1] 1 2 2 4 4 4 2 4 4 4 4 1 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 3 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4
##  [38] 4 2 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 4 2 4 2 4 4 3
##  [75] 2 4 2 3 4 4 4 2 2 4 2 4 4 2 4 4 4 4 4 4 1 4 4 2 3 4 4 4 2 4 3 3 3 2 4 4 4
## [112] 4 4 4 4 2 4 2 4 4 4 4 1 2 4 4 4 4 4 2 4 4 1 2 4 4 2 4 4 2 4 4 4 4 2 4 4 2
## [149] 4 4 2 4 4 4 2 2 4 3 4 4 3 3 1 4 4 4 4 3 1 2 4 4 4 4 2 4 2 2 4 4 4 1 2 2 4
## [186] 4 4 4 4 4 4 4 4 3 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 2 2 3 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 3 3 4 4
## [223] 4 2 2 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 4 4 2 4 4 3 4 3 3 4 4 4 4 4 2 3 2 4 4 3
## [260] 4 4 2 4 4 2 4 4 4 4 4 4 3 4 2 3 2 4 4 4 4 4 2 3 4 4 4 4 2 4 4 1 4 4 4 4 4
## [297] 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 3 4 2 4 3 2 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 2 2 4 2 2
## [334] 2 2 2 4 4 4 4 4 3 2 4 4 2 3 4 3 4 4 4 2 4 4 3 1 3 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 2 2
## [371] 1 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 3 4 4 4 2 4 4 4 4 3 4 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
## [408] 4 4 2 2 4 4 4 3 4 4 4 4 4 2 2 4 4 4 4 2 2 1 4 4 4 2 4 4 3 4 2 2 4 2 2 4 2
## [445] 2 2 2 4 4 4 2 1 4 4 4 4 2 4 2 3 4 4 4 4 2 4 2 4 4 4 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 2
## [482] 4 2 1 4 2 4 4 2 4 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4

table(X)/n

## X
##     1     2     3     4
## 0.028 0.200 0.072 0.700
```

Luego, la proporción del tiempo que pasa cada una de las máquinas apagadas es la siguiente:

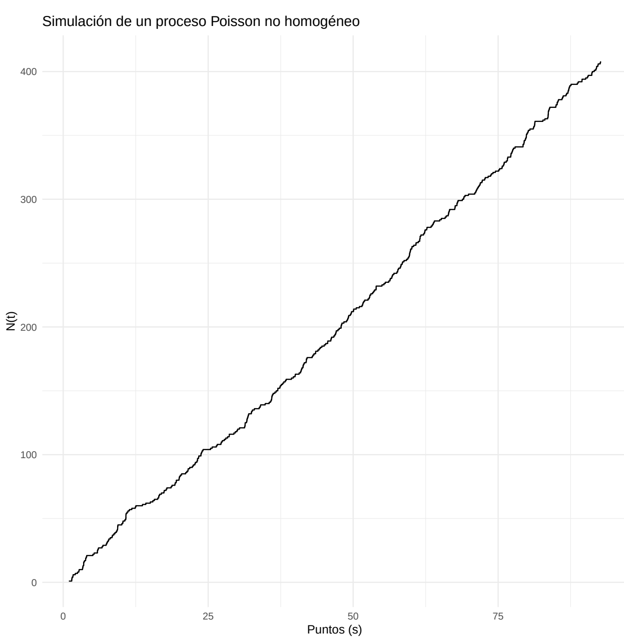
Proporción de tiempo que pasa la máquina 2 apagada es del 23.6%.

Proporción de tiempo que pasa la máquina 1 apagada es del 10.2%
.

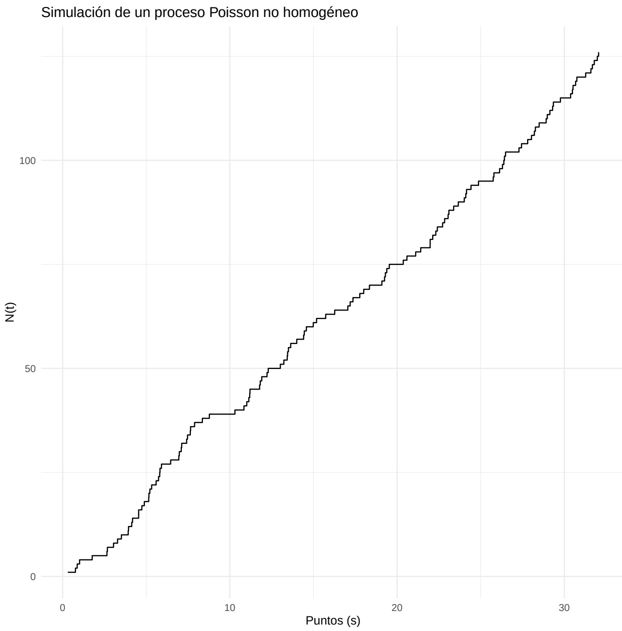
Problema 2

```
lambda.t <- function(t, n) {
  x <- paste('', '{', 0, '< t & t <=', 1, '}',
             sep = '')
  for (i in seq(2, n, 2)) {
    x <- paste(x,
               paste('', '{', i, '< t & t <=', i + 1, '}',
                     sep = ''),
               sep = '|')
  }
  return(ifelse(eval(parse(text = x)), 3, 5))
}

inhomogeneousPoisson <- function(n) {
  s <- cumsum(rexp(n, 5))
  u <- runif(n)
  points <- s[u <= lambda.t(s, n) / 5]
  count <- 1:length(points)
  df <- data.frame(points, count)
  return(df)
}
```

a)



b)



c)

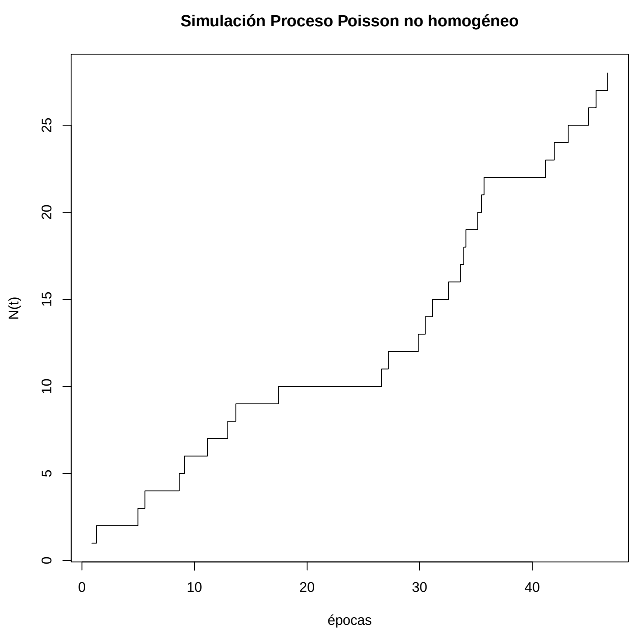
```
fr <- NULL
N <- 10000

for (i in 1:N) {
  x <- inhomogeneousPoisson(10)

  fr <- c(fr, ifelse(sum(x$points[x$count > 2] > 1.25 &
                           x$points[x$count > 2] <= 3) > 0, 1, 0))
}
sum(fr) / N
```

```
## [1] 0.897
```

Problema 3

Simulamos un proceso Poisson no homógeno con parámetro de intensidad $\lambda(t) = |\sin(t)|$.

```
lambdat <- function(t)(abs(sin(t)))

poisson_nohomogeneo <- function(lambdat, n){
  lambda <- 1
  TT <- rexp(n, lambda)
  s <- cumsum(TT)
  u <- runif(n)
  ss <- s[u <= lambdat(s)/lambda]
  Ns <- 1:length(ss)

  plot(ss, Ns, type = "s", xlab = "épocas", ylab = "N(t)",
       main = "Simulación Proceso Poisson no homogéneo")

  return(list(epocas = ss, cuenta = Ns))
}

x <- poisson_nohomogeneo(lambdat, 50)
```



Problema 4

Sabemos que tasas de 3 y 4 por día implican tasas de 1/8 y 1/6 por hora, respectivamente.

Así pues, definimos $N_t^{(1)} \sim \mathcal{P}(1/8)$, $N_t^{(2)} \sim \mathcal{P}(1/6)$ y $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ tal que $N_t \sim \mathcal{P}(7/24)$.

Como $\mathbb{E}(N_t) = \mathrm{Var}(N_t) = \lambda \cdot t$, para $t = 8$,
$\mathbb{E}(N_8) = \mathrm{Var}(N_8) = 7/3$.

- $P(N_1 = 2) = \dfrac{(7/24)^2}{2!} e^{-7/24} = 0.0317742.$

Sean $p_1 = 0.011$ y $p_2 = 0.005$ las respectivas probabilidades de fallo, podemos definir

$$P(N_t^{(1)} = k) = \frac{e^{-\lambda_1 p_1 t}(\lambda_1 p_1 t)^k}{k!}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

tal que $N_t^{(1)} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 p_1)$. De forma análoga, $N_t^{(2)} \sim \mathcal{P}(\lambda_2 p_2)$.

Así pues, $\{N_t, t \geq 0\}$ con $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ es un proceso Poisson tal que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \mathcal{P}(0.0022083)$.

O bien, al definir a partir de los éxitos,
$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda_1(1 - p_1) + \lambda_2(1 - p_2)) = \mathcal{P}(0.2894583)$.

Problema 5

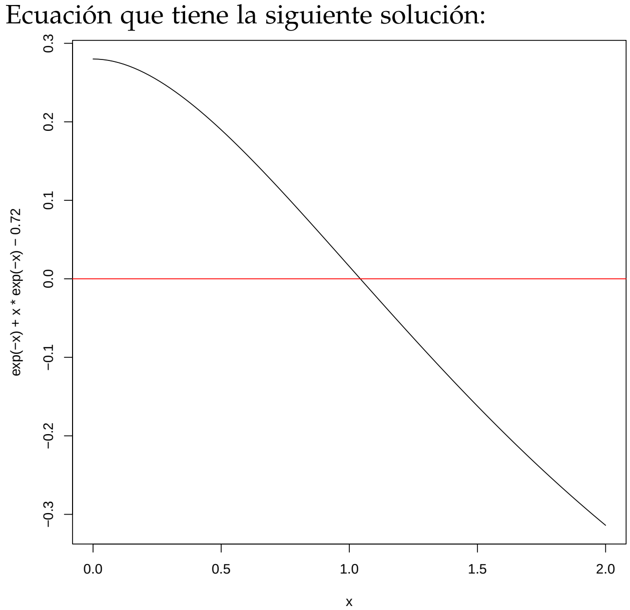
"Durante un año de 'El Niño', la probabilidad de dos o más huracanes haciendo contacto con tierra en los estados Unidos es 0.28"

Tomando en cuenta el enunciado anterior, odemos asumir que la medida de tiempo será en años, y por lo tanto t=1. Entonces, tenemos que el Proceso de Poisson que modela la llegada de huracanes de forma anual es de intensidad lambda*t con t=1.

Para encontrar la tasa lambda, sabemos que:

P(N1>=2)=0.28 syss 1-P(X<2)=0.28 syss P(X=0)+P(X=1)=0.72 syss (e^-lambda)+lambda*e^-lambda=0.72

Ecuación que tiene la siguiente solución:




```
for (i in seq(from=0,to=2,by=0.01)){
   if (exp(-i)+i*exp(-i)-0.72<0){
      print(i)
     break}
}
```

```
## [1] 1.05
```

Por lo tanto, como la tasa de intensidad tiene que ser positiva, concluimos que la tasa del proceso es menor a 1.05 y mayor a 1.04. Evaluando con métodos numéricos, resulta que lambda es 1.043.

Problema 6

Tenemos un restaurante que abre a las 12:00pm, en el que los comensales llegan a una tasa de 5 clientes por minuto, y el tiempo de permanencia sigue una distribución exponencial con media de 40 minutos.

Sea $\lambda = 5$ la tasa de arribo al restaurante por minuto y $1/\mu = 40$ el tiempo de permanencia promedio en el restaurante. Sea $C(t)$ el número de clientes en el restaurante en al tiempo t, tal que $C(t)$ sigue un proceso Poisson con tasa:

$$\delta(t) = \int_0^t \lambda S(s-t)ds = \int_0^t \lambda(1 - F(s-t))ds$$

donde $S(\cdot)$ y $F(\cdot)$ son la función de supervivencia y la función de distribución asociadas al tiempo de permanencia, que en este caso sigue una distribución exponencial.

La lógica es la siguiente: si λ clientes llegan al restaurante al tiempo s, ellos seguirán en el restaurante a la hora t si y solo su tiempo de permanencia ha sido mayor que $t - s$. De tal manera:

$$\delta(t) = \int_0^t \lambda e^{-\mu(t-s)}ds = \lambda e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s}ds = \lambda e^{-\mu t}\left[\frac{1}{\mu}(e^{\mu t} - 1)\right] = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{\mu t})$$

Como $C(t)$ sigue un proceso Poisson, la media y la varianza del proceso al tiempo t son precisamente la tasa $\delta(t)$. Sea $t = 120$ (las 2:00pm):

$$\delta(200) = 5 \cdot 40(1 - e^{-\frac{1}{40}120}) \approx 190.04$$

Ahora simulamos el restaurante para calcular la media y la varianza

```r
set.seed(1231573)
# Simulamos el restaurante
t <- 120
reps <- 5000
clientes <- rep(NA, reps)
for (i in 1:reps){
  clientes[i] <- clientes_rest(t)
}
# Obtenemos la media y varianza muestral
mean(clientes)
```

```
## [1] 192.303
```

```r
var(clientes)
```

```
## [1] 191.8336
```

Problema 7

Sea $G = \log(S)$, luego

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

y usando el Lema de Ito,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

tenemos que

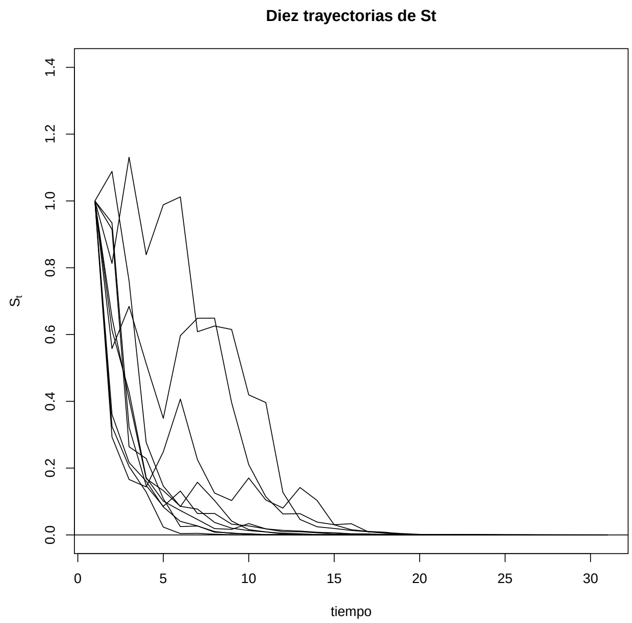
$$d\log(S) = \left(\frac{-11}{24}\right) dt + \frac{1}{2} dZ_t$$

.

Podemos concluir que $S_t \to 0$ para t grande. Asimismo, para $\bar{S}_{100}$ podemos concluir que el corte "transversal" de la trayectoria en el tiempo t es prácticamente cero.

```
#creamos función que simula proceso de Wiener generalizado
BG <- function(n, TT, a, b, S0 = 1){
  #Función para generar un proceso Browniano Geométrico
  #n es el número de puntos de partición del intervalo [0,TT]
  #a es el drift y b la volatilidad
  dt <- TT/n #incremento de los intervalos para cubrir [0,TT]
  S <- S0 #valor inicial
  for(i in 2:(n+1)){
    S <- append(S, S[i-1]*exp((a-b^2/2)*dt + b*sqrt(dt)*rnorm(1)))
  }
  return(S)
}

#Ahora definimos una matriz en blanco para almacenar ahí nuestras 10 trayectorias de St
#con t=30.

Simulaciones <- matrix(NA, nrow = 10, ncol =31)

for(i in 1:10){
  Simulaciones[i,]<-BG(30, 30, -1/3, 1/2, 1)
}


#graficamos las 10 simulaciones
```

```
plot(Simulaciones[1,], type = "l", ylim = c(0,1.4),
    main = "Diez trayectorias de St",
     xlab = "tiempo", ylab = expression(S[t]))
abline(h = 0)
for(i in 2:10){
  lines(Simulaciones[i,])
}
```




```
#Ahora evaluemos la especie de media muestral de las trayectorias
S_barra_gral=colSums(Simulaciones)
S_barra_gral=(1/10)*S_barra_gral

S_barra_30=S_barra_gral[31]
S_barra_30
```

```
## [1] 8.463988e-06
```

```
#ahora simulamos 100 trayectorias independientes

Simulaciones100 <- matrix(NA, nrow = 100, ncol =101)

for(i in 1:100){
  Simulaciones100[i,]<-BG(100, 100, -1/3, 1/2, 1)
}


#Ahora evaluemos la especie de media muestral de las trayectorias
S_barra_gral=colSums(Simulaciones100)
```

```
S_barra_gral=(1/100)*S_barra_gral
S_barra_100=S_barra_gral[101]
S_barra_100
```

```
## [1] 1.730275e-17
```

Problema 8

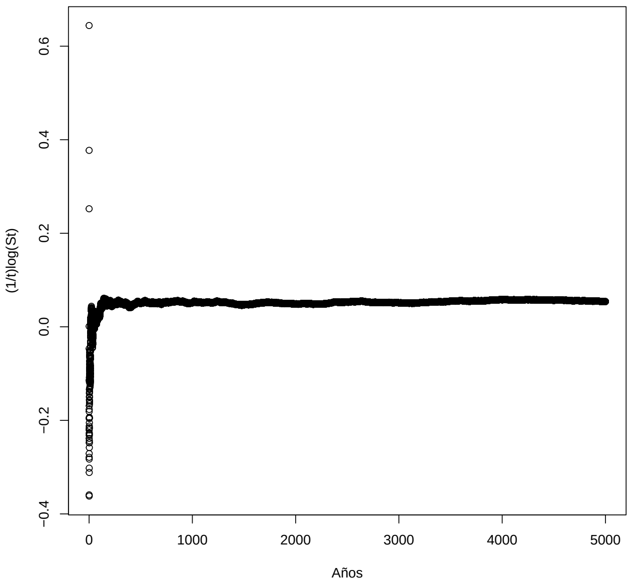
Primero se programó la función que simula un proceso de Weiner Geométtico de forma general. Después de programar la función, se hará la partición de 60,000 puntos (5000 años en términos de meses) ya que el cambio en t es de 1/12. También, sabemos que el drift del proceso es de 0.1 y la volatilidad (vol) es de 0.3

```
geo_weiner<-function(n,int,drift,vol,init){
 incremento<-int/n
 s<-init
 for (i in 2:(n+1)){
   s<-append(s,s[i-1]*exp((drift-vol^2/2)*incremento+vol*sqrt(incremento)*rnorm(1)))
 }
 return(s)
}

res<-geo_weiner(5000*12,5000,.1,.3,1)
logres<-log(res)
t<-seq(0,5000,1/12)
res1<-logres/t
res2<-(1/t)*(logres-0.055*t)^2
```

El valor teórico del límite L de la expresión (1/t)log(St) lo sabemos ya que al ser St un proceso de Weiner Geométrico, sabemos que log(St) se distribuye lognormal con media log(So)+(drift-0.5vol^2) y varianza t*vol^2. Por lo tanto, el límite L cuando t tiende a infinito es de

log(So)+(drift-0.5vol^2) = log(1)+0.1-(0.3^2)/2 = 0.055

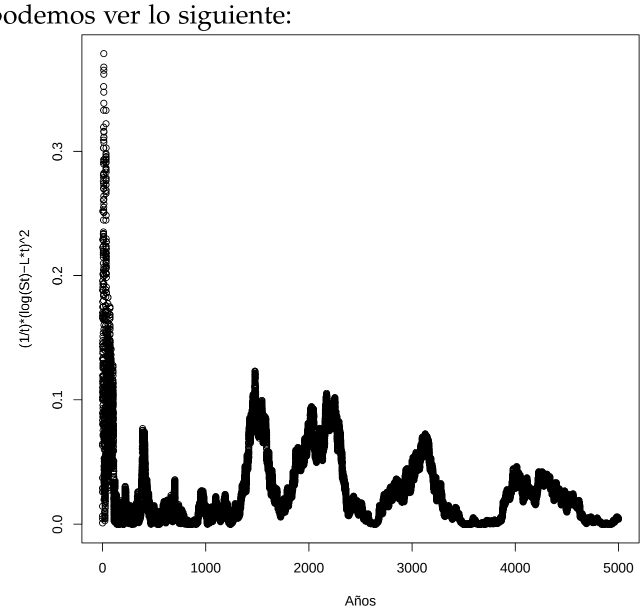
Como se puede ver en la gráfica y en las últimas entradas del vector de resultados, observamos que la simulación se acerca al límite cuando el t tiende a infinito.




```r
tail(res1)
```

```
## [1] 0.05408440 0.05408272 0.05407570 0.05407490 0.05408807 0.05408335
```

Ahora, al evaluar (1/t)(log(St)-Lt)ˆ2 y graficarlo como función de t, podemos ver lo siguiente:



Por lo tanto, la expresión tiende a un proceso de Weiner y no a un límite.