Simulación ITAM
12 de octubre de 2021 2021-II

Tarea 4.

La fecha de entrega es el **25 de octubre de 2021**.

Lecturas

- Introduction to simulation using R Capítulo 13
- Marc C. Bove, et. al Effect of El Niño on U.S. Landfalling Hurricanes, Revisited
- Dagpunar, Capítulo 7, Secciones 7.1-7.3

Problemas

1. Consideren este problema de Manufactura. La compañía A tiene una configuración de dos máquinas, cada una de las cuales produce un componente por hora. Cada componente puede ser probado de manera instantánea para identificar si es defectuoso o no defectuoso. Sea a_i la probabilidad de que un componente producido por la máquina i sea no defectuoso, $i = 1, 2$. Los componentes defectuosos son desechados y los no defectuosos producidos por cada máquina se almacenan en dos armarios separados. Cuando un componente está presente en cada armario, los dos se ensamblan instantáneamente y se envían. Cada armario puede mantener a lo más dos componentes. Cuando un armario está lleno, la máquina correspondiente se apaga. Se prende de nuevo cuando el armario tiene espacio para al menos un componente.

    - Modelar este proceso como una cadena de Markov.
    - Suponiendo que $a_1 = 0.3$ y $a_2 = 0.5$, generar 500 pasos de la cadena. Digan qué condiciones iniciales usaron para esa trayectoria. ¿Qué proporción del tiempo pasa cada una de las máquinas apagadas?

2. Para un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5, t \in (1,2], (3,4], \cdots \\ 3, t \in (0,1], (2,3], \cdots \end{cases}$$

    a) Grafiquen una ejemplo del proceso considerando el intervalo de tiempo [0,100].

b) Grafiquen el proceso hasta obtener 100 eventos

c) Estimen la probabilidad de que el número de eventos observados en el periodo de tiempo (1.25,3] es mayor que 2.

3. Simular un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por $\lambda(t) = |sen(t)|$.

4. Una máquina es sujeta a shocks que llegan de dos fuentes independientes. Los shocks de la fuente 1 llegan de acuerdo a un proceso Poisson con tasa de 3 por día y los de la fuente 2 a una tasa de 4 por día. ¿Cuáles son la media y varianza del número total de shocks que llegan de ambas fuentes en un turno de 8 hrs?

   - ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina se encuentre sujeta a un total de exactamente dos shocks en una hora?
   - Supongan que un shock de la fuente i puede causar que la máquina falle con probabilidad p_i, independiente de todo lo demás. Supongan que $p_1 = 0.011$ y $p_2 = 0.005$ La máquina descompuesta se reemplaza de manera inmediadta. Sea $N(t)$ el número de reemplazos de la máquina sobre el intervalo $(0, t]$. ¿Es $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso Poisson, y si lo es, ¿cuál es el parámetro?

5. Las ocurrencias de huracanes que tocan tierra durante el fenómeno meteorológico "el Niño" se modelan como un proceso Poisson (ver Bove et al (1998)). Los autores aseguran que "Durante un año de 'El Niño', la probabilidad de dos o más huracanes haciendo contacto con tierra en los estados Unidos es 0.28". Encontrar la tasa del proceso Poisson.

6. Comenzando a mediodía, los comensales llegan a un restaurante de acuerdo a un proceso Poisson a una tasa de 5 clientes por minuto. El tiempo que cada cliente pasa comiendo en el restaurante tiene una distribución exponencial con media de 40 minutos, independiente de otros clientes e independiente de los tiempos de arribo. Encuentra la distribución así como la media y varianza, del número de comensales en el restaurante a las 2:00pm. Simular el restaurante para verificar los resultados obtenidos.

7. Sea X_t que satisface la ecuación diferencial estocástica $dX_t = -\frac{1}{3}\, dt + \frac{1}{2}\, dZ_t$, donde $X_0 = 0$ y Z_t es un proceso de Wiener estándar. Definan $S_t = e^{X_t}$ así que $S_0 = 1$.

   - Encontrar la ecuación diferencial estocástica que sigue S_t
   - Simular 10 trayectorias de S_t para $t = 1, \ldots, 30$. Llamen a esas trayectorias S_t^i, $i = 1, \ldots, 10$ y grafíquenlas en la misma gráfica.
   - ¿Qué se puede concluir sobre S_t para t grande?
   - Con $n = 10$. evaluar $\bar{S}_{30} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{30}^i$.

- Simular 100 trayectorias independientes y evaluar $\bar{S}_{100}$ con la fórmula dada arriba con $n = 100$. ¿Qué se puede concluir sobre $\bar{S}_{1000}$ cuando $n \to \infty$?

8. Considerar el precio de una acción que sigue el proceso de Wiener geométrico $\frac{dS_t}{S_t} = 0.10\,dt + 0.30\,dZ_t$ donde dZ_t es un proceso de Wiener.

    - Usando $\Delta t = 1/12$ y $S_0 = 1$ simular 5,000 años del proceso $\log S_t$ y evaluar $\frac{1}{t}\log S_t$ como función de t. Noten que esta ecuación tiende a un límite p. ¿Cuál es el valor teórico de p ¿La simulación lo reproduce?
    - Evaluar $\frac{1}{t}\left(\log S_t - pt\right)^2$ como una función de t. ¿tiende a un límite?