EST–24107: Tarea 1

Carlos Lezama, Marco Medina, Emiliano Ramírez y Santiago Villarreal

Jueves, 26 de agosto de 2021

Problema 1

Con el fin de comprobar la propiedad de falta de memoria de una distribución exponencial

$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s)$.

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

definimos la siguiente función:

```
exponential_memoryless <- function(N, lambda) {
    t <- sample(1:10, N, replace = TRUE) # t
    s <- sample(1:10, N, replace = TRUE) # s

    # P(X > t + s | X > t)
    prob.1 <- (1 - pexp(t + s, lambda)) / (1 - pexp(t, lambda))

    # P(X > s)
    prob.2 <- 1 - pexp(s, lambda)

    return(tibble(prob.1, prob.2, almost.equal(prob.1, prob.2)))
}
```

que produce dos vectores aleatorios t y s de tamaño N para calcular $P(X > t + s \mid X > t)$ y $P(X > s)$. Finalmente, devuelve una matriz con las probabilidades calculadas y corrobora que se cumpla la igualdad en cada una de las N simulaciones con una columna lógica `TRUE` o `FALSE`.

Ahora bien, simulamos 100 y 1,000,000 de eventos, imprimiendo una matriz con probabilidades en las que no se cumple la igualdad.

```
lambda <- 1 / 3 # Parámetro
r.1 <- exponential_memoryless(100, lambda) # 100 simulaciones
r.2 <- exponential_memoryless(1000000, lambda) # 1 000 000 simulaciones

r.1[r.1[, 3] == FALSE, ]
```

```
## # A tibble: 0 x 3
## # ... with 3 variables: prob.1 <dbl>, prob.2 <dbl>,
## #   almost.equal(prob.1, prob.2) <lgl>
```

```
r.2[r.2[, 3] == FALSE, ]
```

```
## # A tibble: 0 x 3
## # ... with 3 variables: prob.1 <dbl>, prob.2 <dbl>,
## #   almost.equal(prob.1, prob.2) <lgl>
```

Nótese que la igualdad se cumple en todos los casos, corroborando que:

$$\begin{aligned} P(X > t + s \mid X > t) &= \frac{P\left(X > t + s, X > t\right)}{P(X > t)} \\ &= \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} \\ &= \frac{1 - F_X(t + s)}{1 - F_X(t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= P(X > s). \end{aligned}$$

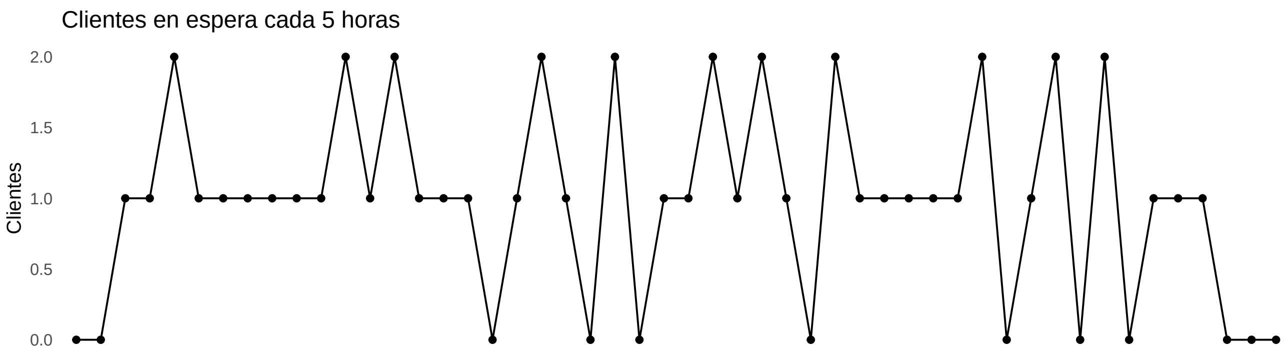
Problema 4

Simulamos la posible llegada de un cliente $Y \sim \text{Bernoulli}(0.9)$ tal que dicho cliente llega $(X \mid Y = 1) = 5 + u_1$, donde $u_1 \sim P(\text{llegada})$. Finalmente, para determinar el tiempo de salida u_3, necesitamos $u_2 \sim P(\text{tiempo de consulta})$ tal que $u_3 = u_1 + u_2$.

Así pues, para 50 pacientes:

```
N <- 50 # número de pacientes
arrival <- duration <- numeric(N)

arrived <- rbinom(N, 1, 0.9) # qué pacientes llegaron
k <- length(which(arrived == 1)) # cuántos pacientes llegaron

arrival[which(arrived == 1)] <-
    5 + sample(-2:2,
               k,
               prob = c(0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1),
               replace = TRUE)
duration[which(arrived == 1)] <-
    sample(2:9,
           k,
           prob = c(0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1),
           replace = TRUE)
```

```
arrival.time <- cumsum(arrival)

departure <- arrival.time + duration

# Clientes en espera cada 5 horas
queue.1 <- as.data.frame(table(cut(departure, breaks = seq(0, N * 5, by = 5))))
queue.2 <- as.data.frame(spline(queue.1$Var1, queue.1$Freq))
```



Problema 7

Si dos dados están cargados de tal manera que en un dado, el valor 1 aparecerá exactamente el doble de veces que los otros valores, y el otro dato está igualmente cargado hacia el 6, calculen la probabilidad p_s de que un total exactamente igual a s aparecerá en la suma de los dados, para $2 \leq s \leq 12$.

Sea D_1 el dado cargado al valor 1 y D_6 el dado cargado al valor 6. En cada dado D_i, la probabilidad de obtener el valor i es el doble de la probabilidad de obtener cualquier otro valor. Sea q la probabilidad de obtener el valor i en el dado D_i, y $q/2$ la probabilidad de obtener cualquier otro valor, por lo que:

$$\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}[D_i = k] = q + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} + \frac{q}{2} = 1 \implies \frac{7q}{2} = 1 \implies q = \frac{2}{7}$$

Entonces $\mathbb{P}[D_i = i] = \frac{2}{7}$ y $\mathbb{P}[D_i = j] = \frac{1}{7}$, para $i \neq j$.

Sea s la suma del valor de los dados D_1 y D_6. Suponiendo que D_1 y D_6 son independientes, entonces:

$\mathbb{P}[s = 2] = \mathbb{P}[D_1 = 1, D_6 = 1] = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{49}$

$\mathbb{P}[s = 3] = \mathbb{P}[D_1 = 1, D_6 = 2] + \mathbb{P}[D_1 = 2, D_6 = 1] = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{49}$

$\mathbb{P}[s=4]=\mathbb{P}[D_1=1,D_6=3]+\mathbb{P}[D_1=2,D_6=2]+\mathbb{P}[D_1=3,D_6=1]=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{49}$

$\mathbb{P}[s=5]=\mathbb{P}[D_1=1,D_6=4]+\mathbb{P}[D_1=2,D_6=3]+\mathbb{P}[D_1=3,D_6=2]+\mathbb{P}[D_1=4,D_6=1]=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{49}$

$\mathbb{P}[s=6]=\mathbb{P}[D_1=1,D_6=5]+\mathbb{P}[D_1=2,D_6=4]+\mathbb{P}[D_1=3,D_6=3]+\mathbb{P}[D_1=4,D_6=2]+\mathbb{P}[D_1=5,D_6=1]=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{49}$

$\mathbb{P}[s=7]=\mathbb{P}[D_1=1,D_6=6]+\mathbb{P}[D_1=2,D_6=5]+\mathbb{P}[D_1=3,D_6=4]+\mathbb{P}[D_1=4,D_6=3]+\mathbb{P}[D_1=5,D_6=2]+\mathbb{P}[D_1=6,D_6=1]=\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{9}{49}$

$\mathbb{P}[s=8]=\mathbb{P}[D_1=2,D_6=6]+\mathbb{P}[D_1=3,D_6=5]+\mathbb{P}[D_1=4,D_6=4]+\mathbb{P}[D_1=5,D_6=3]+\mathbb{P}[D_1=6,D_6=2]=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{6}{49}$

$\mathbb{P}[s=9]=\mathbb{P}[D_1=3,D_6=6]+\mathbb{P}[D_1=4,D_6=5]+\mathbb{P}[D_1=5,D_6=4]+\mathbb{P}[D_1=6,D_6=3]=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{49}$

$\mathbb{P}[s=10]=\mathbb{P}[D_1=4,D_6=6]+\mathbb{P}[D_1=5,D_6=5]+\mathbb{P}[D_1=6,D_6=4]=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{4}{49}$

$\mathbb{P}[s=11]=\mathbb{P}[D_1=5,D_6=6]+\mathbb{P}[D_1=6,D_6=5]=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{49}$

$\mathbb{P}[s=12]=\mathbb{P}[D_1=6,D_6=6]=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{2}{49}$

Entonces, las probabilidades para $2\leq s\leq 12$:

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	2/49	3/49	4/49	5/49	6/49	9/49	6/49	5/49	4/49	3/49	2/49