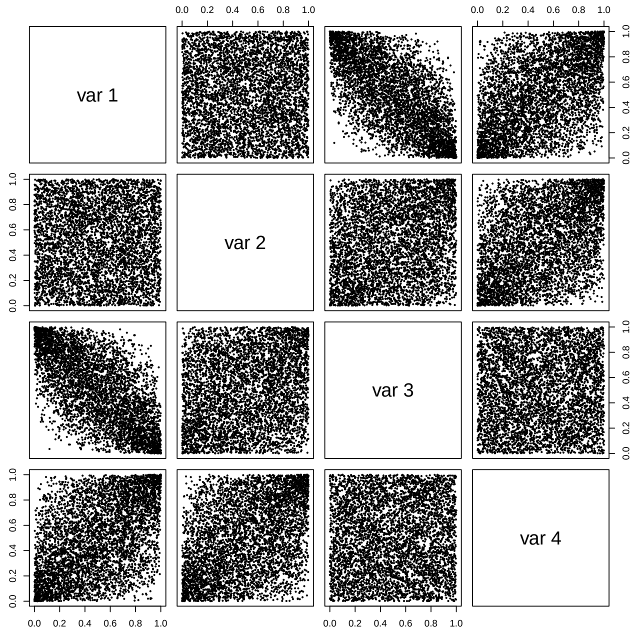
EST–24107: Tarea 3

Carlos Lezama, Marco Medina,
Emiliano Ramírez y Santiago Villarreal

Lunes, 4 de octubre de 2021

Problema 1

```
# Nuestra copula será una gaussiana, como vimos en clase,
# para poder otrogarle la estructura de dependencia que queremos.

copula_normal_4 <-
  normalCopula(c(0, 2 * (sin((
    -0.7 * pi
  ) / 6)), 2 * (sin((
    0.5 * pi
  ) / 6)), 2 * (sin((
    0.2 * pi
  ) / 6)), 2 * (sin((
    0.4 * pi
  ) / 6)), 0),
  dim = 4, dispstr = "un")

set.seed(170309)

U <- rCopula(5000, copula_normal_4)

pairs(U, pch = 16, cex = 0.5)
```



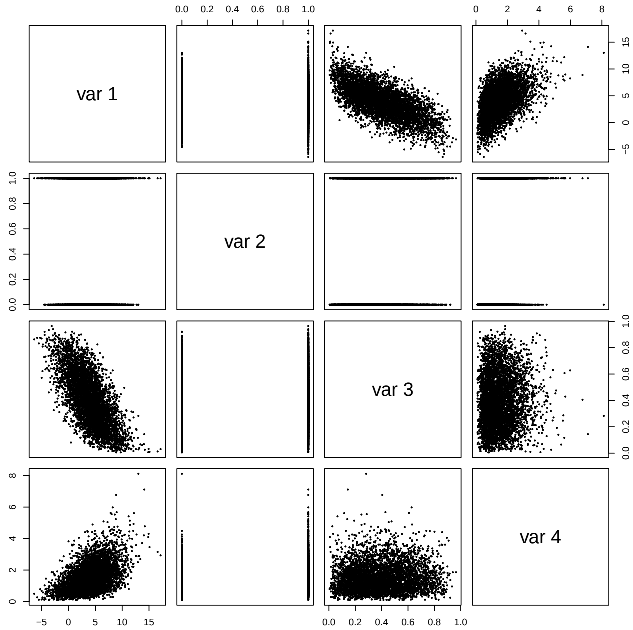

```
# Mostramos nuestra matriz de dependecia

round(cor(U, method = "spearman"), 2)
```

```
##       [,1] [,2]  [,3] [,4]
## [1,]  1.00 0.01 -0.68 0.49
## [2,]  0.01 1.00  0.21 0.42
## [3,] -0.68 0.21  1.00 0.03
## [4,]  0.49 0.42  0.03 1.00
```

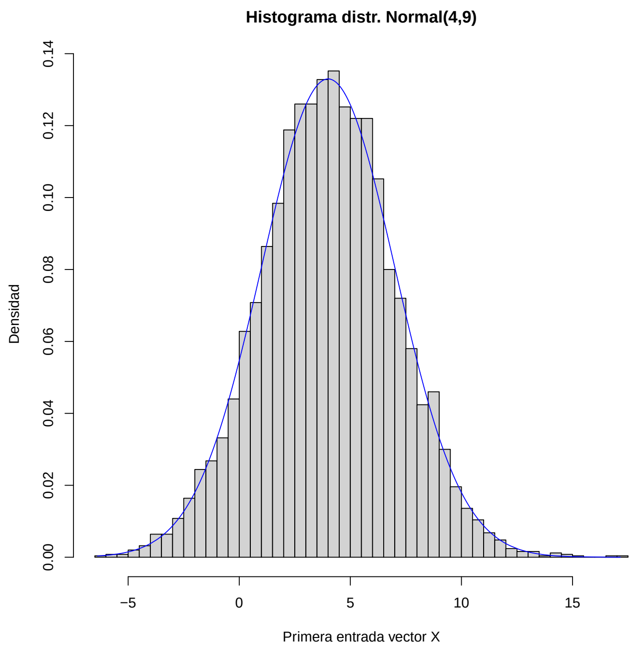
```
# Ahora generamos el vector X=(X1, X2, X3, X4) que se nos pide y
# hacemos los histogramas para ver si tienen el comportamiento deseado

X <- cbind(qnorm(U[, 1], mean = 4, sd = 3),
           qbern(U[, 2], prob = 0.6),
           qbeta(U[, 3], 2, 3),
           qgamma(U[, 4], 3, 2))

# Echamos un vistazo a como quedaron los datos de X
head(X)
```

```
##           [,1] [,2]      [,3]      [,4]
## [1,] 1.9747615    0 0.3273045 0.9259319
## [2,] 2.3592402    1 0.1785686 0.3702043
## [3,] 9.5036467    1 0.1243522 1.9143083
## [4,] 4.7806641    1 0.2422785 2.0176193
## [5,] 0.7052271    0 0.5923000 0.7799695
## [6,] 3.5411958    1 0.2535589 0.3495762
```

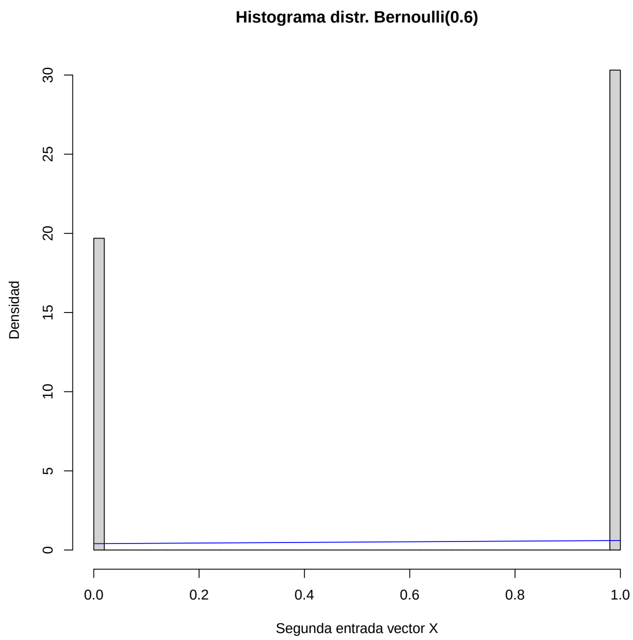
```
# Visualizamos nuestros datos
pairs(X, pch = 16, cex = 0.5)
```



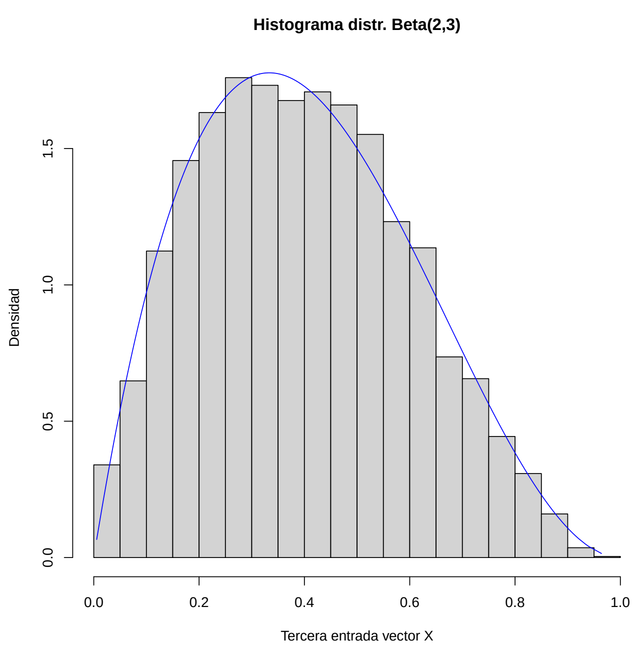

```
# Graficamos los histogramas y agregamos densidades con
# las distribuciones deseadas para ver la aproximación

par(mfrow = c(1, 1))
hist(
  X[, 1],
  prob = T,
  breaks = 50,
  main = "Histograma distr. Normal(4,9)",
  xlab = "Primera entrada vector X",
  ylab = "Densidad"
)

points(sort(X[, 1]), dnorm(sort(X[, 1]), 4, 3), type = "l", col = "blue")
```



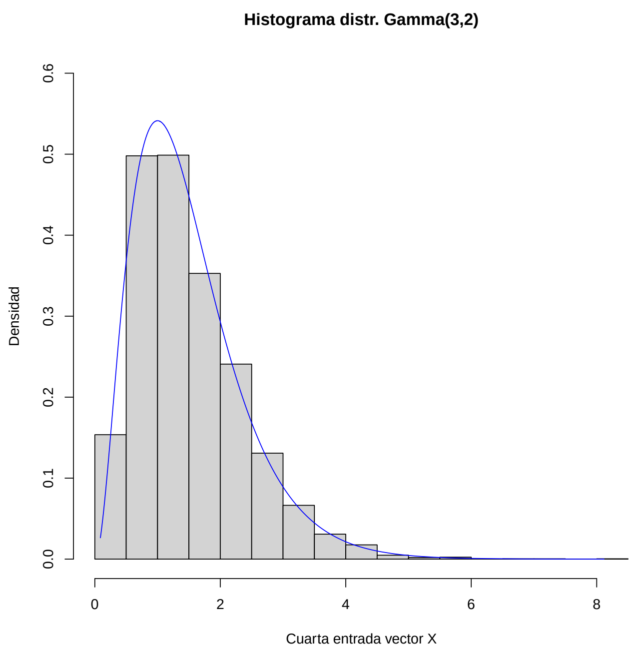

```r
hist(
  X[, 2],
  prob = T,
  breaks = 50,
  main = "Histograma distr. Bernoulli(0.6)",
  xlab = "Segunda entrada vector X",
  ylab = "Densidad"
)

points(sort(X[, 2]),
       dbern(sort(X[, 2]), prob = 0.6),
       type = "l",
       col = "blue")
```




```r
hist(
  X[, 3],
  prob = T,
  main = "Histograma distr. Beta(2,3)",
  xlab = "Tercera entrada vector X",
  ylab = "Densidad"
)

points(sort(X[, 3]), dbeta(sort(X[, 3]), 2, 3), type = "l", col = "blue")
```



```r
hist(
  X[, 4],
  prob = T,
  main = "Histograma distr. Gamma(3,2)",
  xlab = "Cuarta entrada vector X",
  ylab = "Densidad",
  ylim = c(0, 0.6)
)

points(sort(X[, 4]), dgamma(sort(X[, 4]), 3, 2), type = "l", col = "blue")
```




```r
# Revisemos si nuestro vector cumple con
# la estructura de dependencia que queríamos imponer
cor(X, method = "spearman")

##              [,1]        [,2]        [,3]       [,4]
## [1,]  1.000000000 0.007917661 -0.68478800 0.49383317
## [2,]  0.007917661 1.000000000  0.17071203 0.34176481
## [3,] -0.684788000 0.170712034  1.00000000 0.02937377
## [4,]  0.493833167 0.341764813  0.02937377 1.00000000

# No es exactamente igual a la estructura ideal que queremos,
# sin embargo se acerca mucho.
```

Problema 2

Problema 3

1. Mostrar que cuando $\theta \to \infty$, $C^{Fr}(u_1, u_2) \to min\{u_1, u_2\}$, donde C^{Fr} es la cópula de Frank.

Primero, supongamos que $u_2 > u_1$. Sabemos que la cópula de Frank tiene la siguiente forma analítica para el caso bivariado:

$$\begin{aligned}
C^{Fr}(u_1, u_2) &= -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u_1} - 1\right)\left(e^{-\theta u_2} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1} \right) \\
&= -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{e^{-\theta u_1 - \theta u_2} - e^{\theta u 1} - e^{\theta u_2} + 1}{e^{-\theta} - 1} \right)
\end{aligned}$$

Cuando $\theta \to \infty$ entonces $e^{-\theta} - 1 \approx -1$, por lo que

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(1 - e^{-\theta u_1 - \theta u_2} + e^{\theta u 1} + e^{\theta u_2} - 1 \right) \\
&\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(-e^{-\theta u_1 - \theta u_2} + e^{\theta u 1} + e^{\theta u_2} \right) \\
&\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1} (-e^{-\theta u 2} + 1 + e^{-\theta u_2} e^{\theta u 1}) \right) \\
&\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1} (-e^{-\theta u 2} + 1 + e^{-\theta (u_2 - u_1)}) \right)
\end{aligned}$$

ya que $u_2 > u_1$, $-e^{-\theta u 2} + 1 + e^{-\theta(u_2 - u_1)} \to 1$ cuando $\theta \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\approx -\frac{1}{\theta} \log \left(e^{-\theta u_1} \right) \\
&\approx u_1 = min\{u_1, u_2\}
\end{aligned}$$

Por tanto, cuando $\theta \to \infty$, $C^{Fr}(u_1, u_2) \to min\{u_1, u_2\}$ ■

Problema 4

Probar que la cópula de Clayton converge a la cópula de comonoticidad cuando $\theta \to \infty$.

Notemos que la cópula de Clayton la podemos escribir como:

$$\exp[\ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta]$$

Calculamos entonces el límite cuando $\theta \to \infty$ aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\theta\to\infty} \ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1} \cdot [-u_1^{-\theta} \ln u_1 + -u_2^{-\theta} \ln u_2] = \lim_{\theta\to\infty} -\frac{\sum_i u_i^{-\theta} \ln u_i}{\sum_i u_i^{-\theta} - 1}$$

Sea $u_m = \min\{u_1, u_2\}$, suponemos que $u_m \neq 0$. Dividimos y multiplicamos por u_m^{θ}.

$$\implies \lim_{\theta\to\infty} -\frac{\sum_i u_i^{-\theta} \ln u_i}{\sum_i u_i^{-\theta} - 1} = \lim_{\theta\to\infty} -\frac{\sum_i (u_m/u_i)^{\theta} \ln u_i}{\sum_i (u_m/u_i)^{\theta} - 1}$$

Notemos que si $u_i \neq u_m$, entonces $u_m/u_i < 1$, por lo que $\lim_{\theta\to\infty}(u_m/u_i)^{\theta} = 0$. Si $u_i = u_m$, entonces $u_m/u_i = 1$ y $\lim_{\theta\to\infty}(u_m/u_i)^{\theta} = 1$.

$$\implies \lim_{\theta\to\infty} -\frac{\sum_i (u_m/u_i)^{\theta} \ln u_i}{\sum_i (u_m/u_i)^{\theta} - 1} = -\frac{\ln u_m}{-1} = \ln u_m$$

Por lo que si tomamos el límite completo:

$$\lim_{\theta\to\infty} \exp\{\ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta\} = \exp\left\{\lim_{\theta\to\infty} \ln(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta\ \right\} = \exp\left\{\ln u_m\right\} = u_m$$

Supongamos ahora que $u_m = 0$, en ese caso:

$$\lim_{\theta\to\infty} [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1]^{\frac{1}{\theta}} = 0$$

Por lo tanto, la cópula de Clayton converge a la cópula de comonoticidad cuando $\theta \to \infty$.

Problema 5

Problema 6

Mostrar que la densidad conjunta correspondiente a la cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern es no negativa.

Sea la densidad conjunta correspondiente a la cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern:

$$\frac{\partial^2}{\partial uv}C(u,v) = [1+\alpha(1-u)(1-v)] - \alpha v(1-u) - \alpha u(1-v) + \alpha uv$$

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial uv}C(u,v) = 1+\alpha(2u-1)(2v-1)$$

Basta con probar que $(2u-1)(2v-1) \geq -1$ para probar que $\frac{\partial^2}{\partial uv}C(u,v) \geq 0$.

$$(2u-1)(2v-1) \geq -1 \iff \left[(2u-1) \geq \frac{-1}{(2v-1)} \wedge (2v-1) > 0\right] \vee \left[(2u-1) \leq \frac{-1}{(2v-1)} \wedge (2v-1) < 0\right]$$

Notemos que como u y v están entre 0 y 1. En el primer caso, la mayor cota inferior posible para $2u-1$ es cuando $v=1$, entonces:

$$(2u-1) \geq -1 \geq \frac{-1}{(2v-1)}$$

En el segundo caso, la menor cota superior posible para $2u-1$ es cuando $v=0$, entonces:

$$(2u-1) \leq 0 \leq \frac{-1}{(2v-1)}$$

Por lo tanto u cumple la desigualdad para todo valor de v. De manera análoga, por simetría, v cumple la desigualdad para todo valor de u. Por lo tanto $(2u-1)(2v-1) \geq -1$ y $\frac{\partial^2}{\partial uv}C(u,v) \geq 0$.

Calcular el coeficiente de correlación de Spearman

Sabemos que si tenemos $C(u,v)$, entonces podemos calcular el coeficiente de correlación de Spearman como:

$$\rho = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3 = 12\int_0^1\int_0^1 uvdC(u,v) - 3 = 3-6\int_0^1\int_0^1 \left(u\frac{\partial}{\partial u}C(u,v) + v\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)\right)dudv$$

$$\implies \rho = 3-6\int_0^1\int_0^1 uv+\alpha u(1-u)(1-v) - \alpha u^2v(1-v) + uv + \alpha(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 dudv$$

$$\implies \rho = 3 - 6\int_0^1 \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}\alpha(1-v) - \frac{1}{3}\alpha v(1-v) + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\alpha v(1-v) - \frac{1}{6}\alpha v^2 dv$$

$$\implies \rho = 3 - 6\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\alpha\right] = 3 - 6\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\alpha\right]$$

$$\therefore \rho = \frac{\alpha}{3}$$

Es decir, el coeficiente de correlación de Spearman de la cópula es función del parámetro α, tal que $\rho(\alpha) \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Calcular la tau de Kendall

Sabemos que si tenemos $C(u,v)$, entonces podemos calcular la tau de Kendall:

$$\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 1 - 4\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)\right)dudv$$

$$\implies \tau = 1 - 4\int_0^1\int_0^1 uv + \alpha u(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 - \alpha u^2 v(1-v) + \alpha u(1-u)v(1-v)$$

$$+\alpha^2 u(1-u)^2 v(1-v)^2 - \alpha^2 u(1-u)^2 - \alpha^2 u^2(1-u)v(1-v) + \alpha^2 u^2(1-u)v^2(1-v)dudv$$

OJO: notemos que los cuatro términos que incluyen a α^2 se cancelan tras la integración.

$$\implies \tau = 1 - 4\int_0^1\int_0^1 uv + \alpha u(1-u)v(1-v) - \alpha u(1-u)v^2 - \alpha u^2 v(1-v) + \alpha u(1-u)v(1-v)dudv$$

$$\implies \tau = 1 - 4\int_0^1 \frac{1}{2}v + \frac{1}{6}\alpha v(1-v) - \frac{1}{6}\alpha v^2 - \frac{1}{3}\alpha v(1-v) + \frac{1}{6}\alpha v(1-v)dv$$

$$\implies \tau = 1 - 4\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\alpha\right] = 1 - 4\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{18}\alpha\right] = \frac{2}{9}\alpha$$

$$\therefore \tau = \frac{2}{9}\alpha$$

Es decir, la tau de Kendall de la cópula es función del parámetro α, tal que $\tau(\alpha) \in (-\frac{2}{9}, \frac{2}{9})$.

Problema 7

Sabemos $\tau = 0.2$.

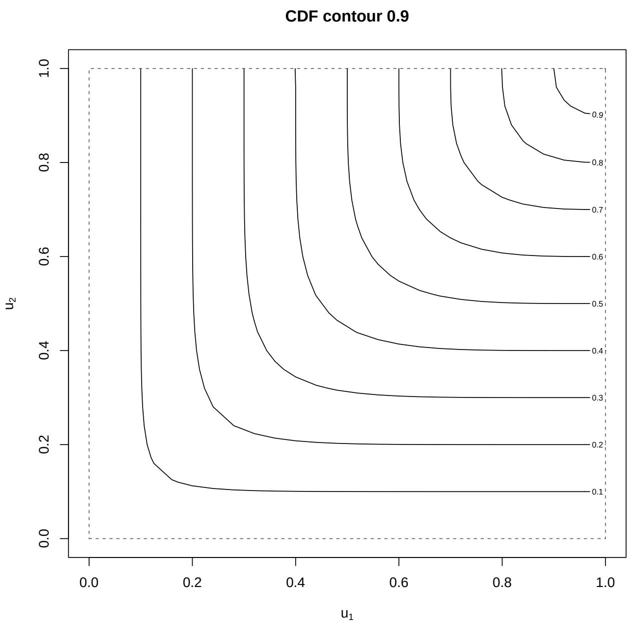
1. Cópula normal (o cualquier elíptica): $\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right) = 0.309017$.
2. Cópula de Gumbel: $\alpha = \frac{1}{1-\tau} = 1.25$.
3. Cópula de Clayton: $\alpha = \frac{2\tau}{1-\tau} = 0.5$.

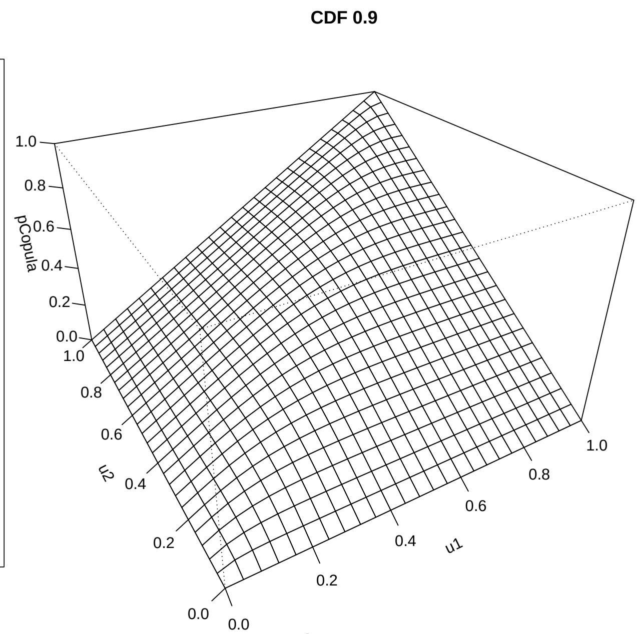
Problema 8

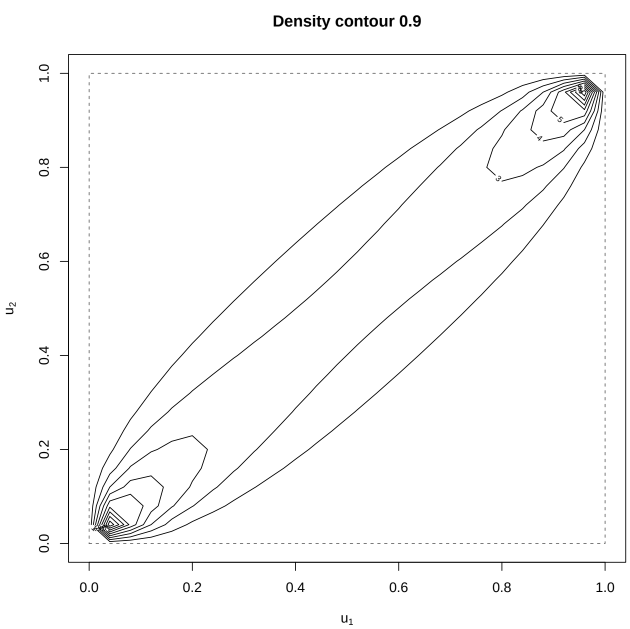
Generación de cópulas:

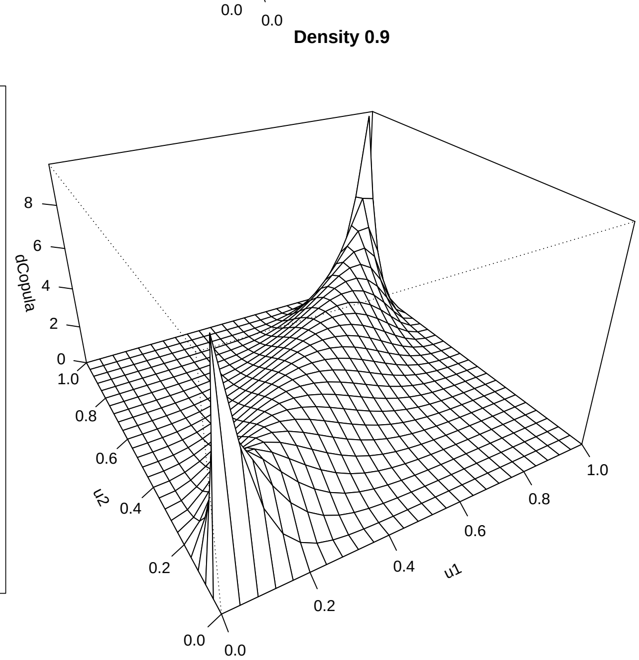
```
normCopula0.9 <- normalCopula(param = 0.9, dim = 2)
normCopula0.2 <- normalCopula(param = 0.2, dim = 2)
```

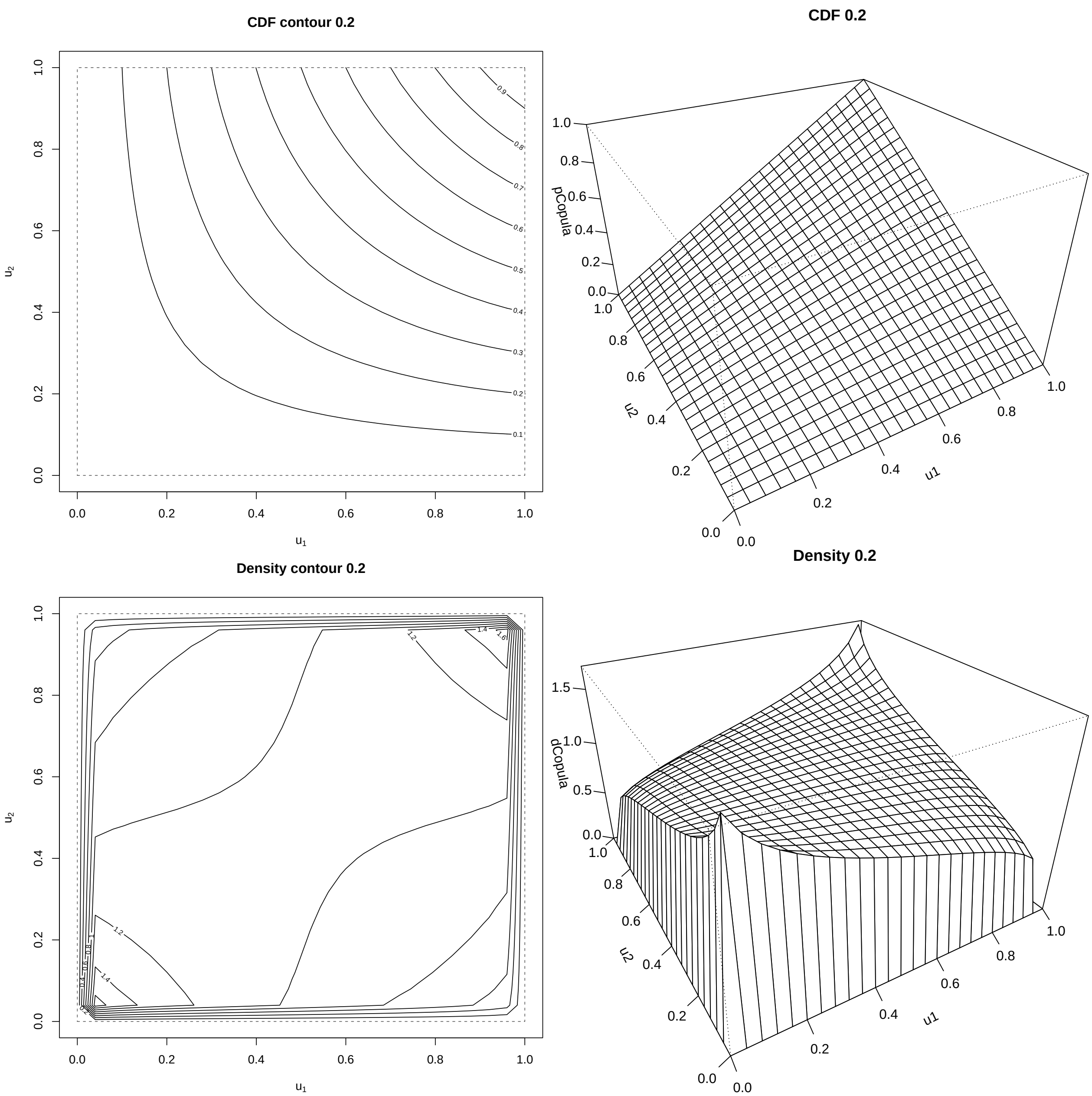
Visualización:







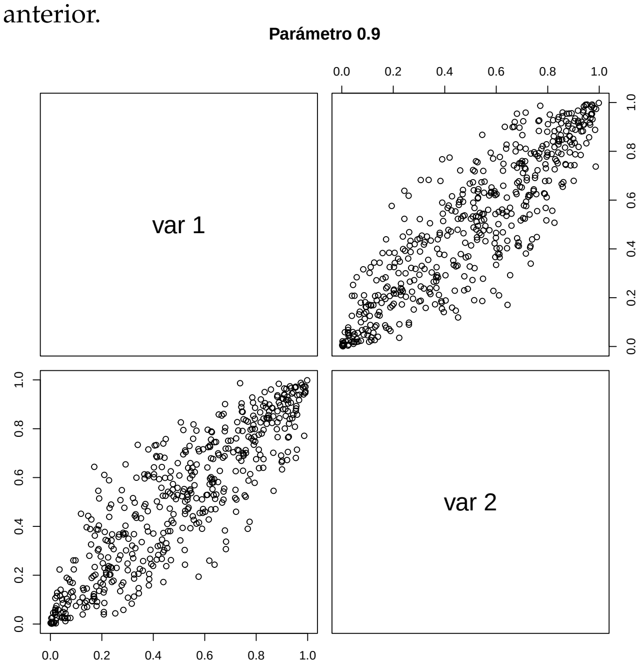


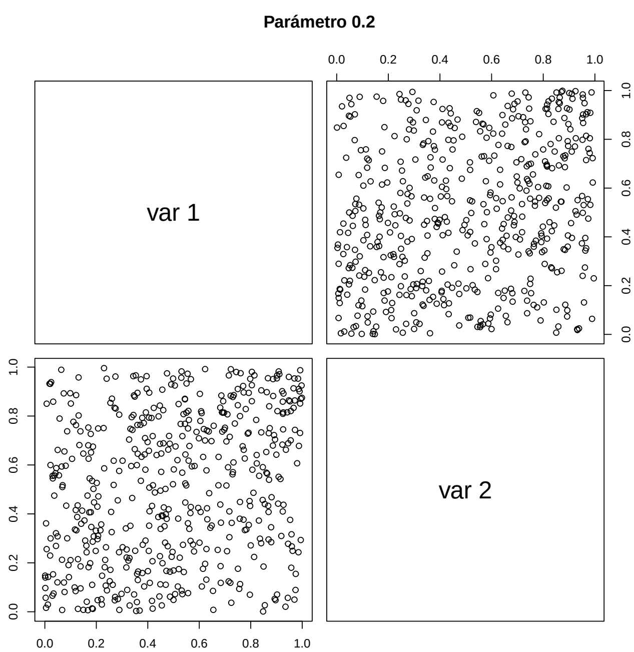


Nótese que con mayor coeficiente de correlación, más nos aproximamos a una relación lineal — fácil de observar en las curvas de nivel de la función de probabilidad acumulada. Así pues, la dependencia lineal en la cópula gaussiana está directamente relacionada con su parámetro.

Problema 9

Simulamos 500 puntos cuya distribución son las cópulas del ejercicio 8 anterior.





Como podemos observar, existe una mayor dependencia entre las marginales cuando el parámetro de normalCopula es 0.9 que cuando es 0.2.