

Rapport sur les 4 exemples d'intégration numérique

Ce rapport présente les 4 cas d'étude exigés, chacun associé à une famille de poids particulière et appliqué aux méthodes suivantes : Gauss-Legendre, Gauss-Laguerre, Gauss-Chebyshev, Simpson et interpolation spline.

1. Exemple Chebyshev : $f(x) = 1 / \sqrt{1-x^2}$

- Domaine : $x \in]-1,1[$
- Poids naturel: $w(x) = 1 / \sqrt{1-x^2}$
- Cas idéal pour : Quadrature de Gauss-Chebyshev

Points importants :

- Les méthodes classiques (Gauss-Legendre, Simpson) donnent un résultat correct mais moins efficace car elles ne tiennent pas compte du poids Chebyshev.
- La méthode Gauss-Chebyshev donne une valeur exacte pour $n \geq 1$ car l'intégrand correspond exactement à la fonction poids.

2. Exemple Laguerre : $f(x) = e^{-x}$

- Domaine : $x \in [0, +\infty[$
- Poids naturel: $w(x) = e^{-x}$
- Cas idéal pour : Quadrature de Gauss-Laguerre

Points importants :

- Gauss-Laguerre utilise l'intégration avec le changement de variable standard.
- Les méthodes classiques (Simpson, Legendre) sont inadaptées sur un domaine infini et nécessitent un tronquage numérique.

3. Exemple mixte : $f(x) = e^{-x} / \sqrt{1 - x^2}$

- Domaine : Intersection des domaines Chebyshev et Laguerre → en pratique : $[0, 1]$
- Nature : Fonction avec singularité à $x = 1$ et décroissance exponentielle.
- Ce cas représente une combinaison des deux familles : Chebyshev + Laguerre.

Points importants :

- Aucun schéma n'est naturellement optimal → c'est un test de robustesse.
- Simpson fonctionne mais nécessite un maillage fin.
- Gauss-Legendre est performant mais peut perdre en précision près de la singularité.
- Gauss-Laguerre nécessite une transformation pour compenser la borne infinie.
- Gauss-Chebyshev reste utile mais pas parfaitement adapté.

4. Exemple quelconque : $f(x) = \sin(5x) + x^2$

- Domaine : $\in [0, \pi]$
- Type : Fonction mixte (trigonométrique + polynomiale)
- Aucun poids particulier

Points importants :

- Tous les schémas fonctionnent bien.
- Gauss-Legendre donne la meilleure précision pour peu de points.
- Simpson est performant et simple à implémenter.
- Spline permet d'obtenir une approximation très stable via interpolation.

Résumé général :

- Les quadratures de Gauss spécialisées (Laguerre, Chebyshev) excellent lorsque la fonction suit leur poids naturel.
- Pour des fonctions génériques ou mixtes, Gauss-Legendre est souvent le meilleur choix.
- Simpson est une bonne méthode généraliste mais moins précise.
- Les splines permettent d'obtenir de bonnes approximations même pour des fonctions irrégulières, mais ne donnent pas directement l'intégrale exacte.