Rapport détaillé sur les 4 exemples d'intégration numérique

Ce rapport présente les 4 cas d'étude exigés, chacun associé à une famille de poids particulière

et appliqué aux méthodes suivantes : Gauss-Legendre, Gauss-Laguerre, Gauss-Chebyshev, Simpson

et interpolation spline.

----

1. Exemple Chebyshev : $f(x) = 1 / \sqrt{1 - x^2}$

• Domaine : $x \in [-1, 1]$

• Poids naturel : $w(x) = 1 / \sqrt{1 - x^2}$

• Cas idéal pour : Quadrature de Gauss-Chebyshev

• Remarque : L'intégrale $\int_{-1}^{1} (1 / \sqrt{1 - x^2})\, dx = \pi$

Points importants :

- Les méthodes classiques (Gauss-Legendre, Simpson) donnent un résultat correct mais moins efficace

car elles ne tiennent pas compte du poids Chebyshev.

- La méthode Gauss-Chebyshev donne une valeur exacte pour $n \geq 1$ car l'intégrand correspond exactement

à la fonction poids.

----

2. Exemple Laguerre : $f(x) = e^{-x}$

• Domaine : $x \in [0, +\infty[$

• Poids naturel : $w(x) = e^{-x}$

• Cas idéal pour : Quadrature de Gauss-Laguerre

• Remarque : L'intégrale $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$

Points importants :

- Gauss-Laguerre utilise l'intégration avec le changement de variable standard.

- Les méthodes classiques (Simpson, Legendre) sont inadaptées sur un domaine infini et nécessitent

un tronquage numérique.

----

3. Exemple mixte : $f(x) = e^{-x} / \sqrt{1 - x^2}$

• Domaine : Intersection des domaines Chebyshev et Laguerre → en pratique : [0, 1)

• Nature : Fonction avec singularité à x = 1 et décroissance exponentielle.

• Ce cas représente une combinaison des deux familles : Chebyshev + Laguerre.

Points importants :

- Aucun schéma n'est naturellement optimal → c'est un test de robustesse.

- Simpson fonctionne mais nécessite un maillage fin.

- Gauss-Legendre est performant mais peut perdre en précision près de la singularité.

- Gauss-Laguerre nécessite une transformation pour compenser la borne infinie.

- Gauss-Chebyshev reste utile mais pas parfaitement adapté.

----

4. Exemple quelconque : $f(x) = \sin(x)$

• Domaine : $x \in [0, \pi]$

• Aucun poids particulier

• L'intégrale exacte : $\int_{■}^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$

Points importants :

- Tous les schémas fonctionnent bien.

- Gauss-Legendre donne la meilleure précision pour peu de points.

- Simpson est performant et simple à implémenter.

- Spline permet d'obtenir une approximation très stable via interpolation.

Résumé général :

- Les quadratures de Gauss spécialisées (Laguerre, Chebyshev) excellent lorsque la fonction suit leur poids naturel.
- Pour des fonctions génériques ou mixtes, Gauss-Legendre est souvent le meilleur choix.
- Simpson est une bonne méthode généraliste mais moins précise.
- Les splines permettent d’obtenir de bonnes approximations même pour des fonctions irrégulières, mais ne donnent pas directement l’intégrale exacte.