

Estimación de Área Pequeña

Equipo Investigación, CIT

2023-07-01

Table of contents

Prefacio	4
1 Introducción	5
2 Resumen	6
3 Marco de Trabajo	7
3.1 Especificación	8
3.2 Análisis y adaptación	8
3.3 Evaluación	8
4 Marco Teórico	9
4.1 Modelos de Área	9
4.2 Modelos de Unidad	11
4.3 Estimación de MSE e intervalos de Confianza	12
4.3.1 Estimacion de MSE	12
4.3.2 Estimación de intervalos de confianza	13
5 Aplicaciones	14
5.1 Pobreza Comunal	14
5.2 Uso de imágenes satelitales	14
5.3 Desigualdad comunal en Chile	14
6 Demostración Consumo Energético	15
6.1 Objetivos del Análisis	15
6.2 Convalidar variables de fuentes de datos	15
6.3 Especificaciones	16
6.4 Comparación de Modelos	16
6.5 Resultados	16
7 Recursos	17
7.1 Guías, Manuales y Seminarios	17
7.2 Blogs y Presentaciones	17
7.3 Software estadístico	17
7.4 videos	18
7.5 libros	18

7.6 Papers	18
References	19

Prefacio

El presente documento presenta la documentación general de los procesos de estimación en áreas pequeñas o desagregación de información.

1 Introducción

Uno de los insumos esenciales para el diseño de la política pública y el monitoreo del progreso de la sociedad es la disponibilidad de indicadores confiables. Esto es especialmente relevante para los objetivos de desarrollo sostenible y su pretensión de no dejar a nadie atrás. Sin embargo, la mayoría de los indicadores relevantes se construye en base a encuestas, las cuales no siempre son representativas a niveles locales o para grupos específicos de la población.

Las metodologías de estimación de área pequeña (SAE POR por sus siglas en inglés) presentan un conjunto de métodos que son usados para producir estimadores más precisos cuando los estimadores directos basados en encuestas no son confiables en áreas geográficas o dominios de estudio en los cuales los tamaños muestrales son demasiado pequeños, o incluso ausentes, y así entregar estimaciones válidas.

Para producir estos estimadores, en general es necesario incluir bases de datos adicionales, mediante un proceso de modelado estadístico.

Existe una basta tradición de investigación y publicaciones en este tema, desde libros, hasta la producción de guías de trabajo que entregan directrices para que estos procedimientos puedan ser utilizados por agencias estadísticas nacionales e investigadores interesados en el tema.

El presente documento pretende entregar una visión general del tema, con una perspectiva enfocada en la aplicación y la práctica de estas metodologías. Para esto se presenta un marco de trabajo aplicado que detalla el rol del investigador, el proceso de estimación general y la relación con los distintos stakeholders. Luego se presenta una revisión teórica donde se presentan los modelos lineales mixtos o de multinivel en su aplicación en estimaciones de área pequeña. Finalmente se presentan ejemplos prácticos de estas metodologías.

2 Resumen

Las metodologías de estimación de área pequeña buscan aumentar la precisión de las estimaciones de indicadores basados en encuestas cuando los datos no son suficientes para representar de manera confiable territorios o grupos de población donde no se cuenta con información suficiente.

Estos métodos se basan en usar información adicional para “darle más fuerza” a los indicadores directos. Es así que existen principalmente dos familias de métodos, basados en información agregada a nivel de área, o a nivel de unidad. En un contexto de estimación de características de hogares a nivel de comuna, los modelos de área usarán información adicional agregada a nivel de comuna, mientras que los modelos de unidad usarán datos a nivel de hogar.

Se presenta también un marco de trabajo con guías generales de buenas prácticas para estas estimaciones, con un foco en la relación del investigador con los stakeholders.

Además, se revisa a grandes rasgos las metodologías estadísticas más usadas, correspondiendo a modelos lineales mixtos o multinivel. Estos presentan la particularidad de poder modelar efectos fijos y aleatorios para distintos niveles de anidamiento o agregación. Con esto disminuye el efecto nocivo de variables omitidas.

Finalmente se mencionan aplicaciones notables de la metodología, con objeto de poner en contexto y alentar una revisión más detallada del tema.

3 Marco de Trabajo

El trabajo de Tzavidis et al. (2018) entrega un marco de trabajo basado en la interacción con usuarios y con la parsimonia como principio rector. Este luego se encuentra simplificado en la web de la ONU para la producción de estimaciones SAE [SAE4SDG](#)

Relación con Stake holders

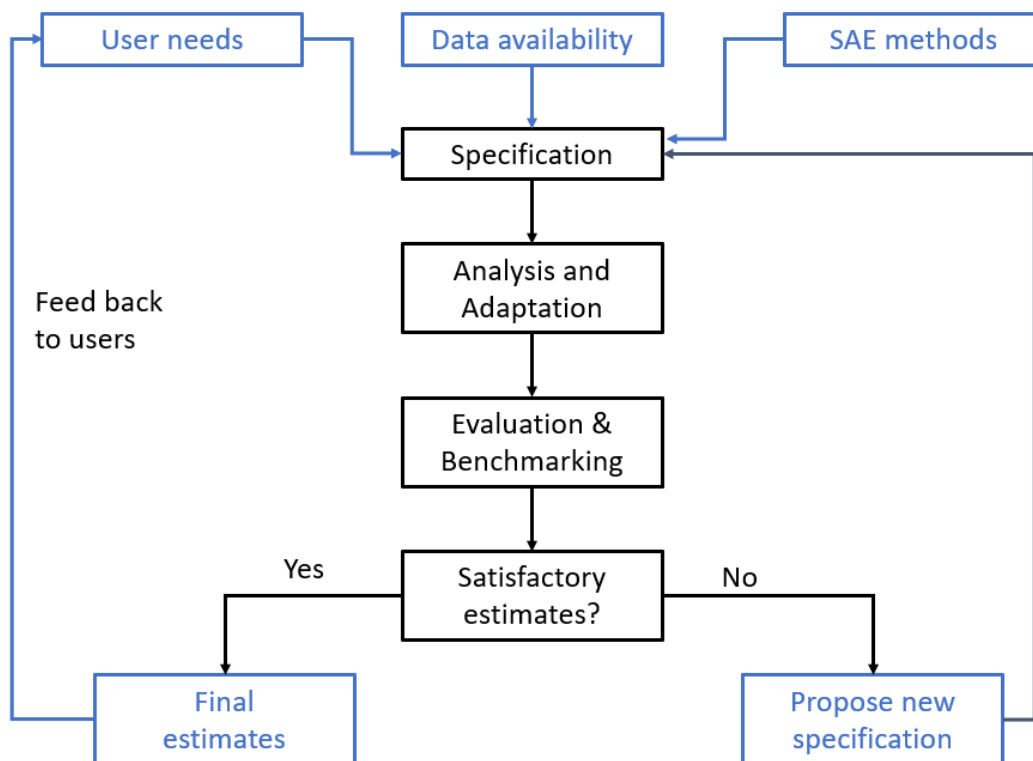


Figure 3.1: Flujo de Trabajo SAE

3.1 Especificación

Entrada:

- Necesidades de usuarios
- Disponibilidad de Datos
- Métodos SAE

Flujo de decision

Salida:

- Objetivos de estimación y geografías
- Elección inicial de métodos y software

3.2 Análisis y adaptación

- Estimaciones preliminares

3.3 Evaluación

- Responder la pregunta ¿son satisfactorios los resultados?

Si la respuesta es negativa se vuelve a la etapa de especificación

Si la respuesta es positiva se generan estimaciones finales y se calculan medidas de incertidumbre

4 Marco Teórico

El término area pequeña se relaciona no solo a un espacio geográfico sino también puede hacer referencia a un subgrupo específico de la población. El objetivo es entonces estimar las características de esta area o subgrupo, y el problema viene de que la información disponible para realizar una estimación directa entrega resultados muy variables o poco confiables. Esto último debido a un tamaño muestral pequeño (pocas observaciones).

Para solucionar esto y mejorar la precisión de las estimaciones directas de las encuestas, se usa información suplementaria relevante como por ejemplo datos de areas relacionadas y co-variantes de otras fuentes. Suele usarse el término “prestar fuerza” en este contexto.

Respecto de los modelos usados destacan los modelos multinivel o lineales mixtos, destacando el trabajo de Sugawara and Kubokawa (2020) por entregar una revisión y resumen de aplicaciones en contexto de estimaciones de areas pequeñas. Los resultados que entregan son basados en modelos y son llamados BLUP por ser los mejores predictores lineales no sesgados, según las siglas en inglés (*Best Linear Unbiased Predictors*). Siendo la ventaja de este enfoque el permitir acotar (disminuir la variabilidad de) los resultados en areas pequeñas hacia una cantidad estable construida mediante la combinación de datos.

Esto último deriva principalmente por la estructura de los modelos multinivel donde la observación se explica tanto por parametros comunes, efectos aleatorios y errores residuales. Es así como el efecto de acotar viene por el modelamiento del efecto aleatorio, y la combinación de información se expresa en los parámetros comunes. Mayor detalle de la estimación de estos modelos y su implementación en R puede encontrarse en la web mediante una simple búsqueda en google, sin embargo destaca el siguiente [tutorial](#) por su parsimonia y profundidad.

A continuación se describen la aplicación de modelos básicos basados en modelos multinivel, el modelo de area de Fay-Herriot y el modelo de unidad de Errores Anidados, además de revisar la forma de cálculo de las medidas de incertidumbre, siguiendo el trabajo de Sugawara and Kubokawa (2020).

4.1 Modelos de Área

[Referencia Wiki](#)

La mayoría de los datos públicos se reportan en datos agregados o promedios para ciudades o regiones. El modelo de Fay-Herriot (FH) es un modelo multinivel para estimar las medias reales

de area $\theta_1, \dots, \theta_m$ basado en estadísticas promedios a nivel de area, denotadas por y_1, \dots, y_m donde y_i es un estimador directo de θ_i para $i = 1, \dots, m$. Notar que y_i es un estimador crudo de alta varianza. Debido a que el tamaño muestral para calcular y_i en la practica es pequeño, se usa información adicional. Siendo x_i un vector de características conocidas con un término de intercepto, el modelo FH viene dado por:

$$y_i = \theta_i + \epsilon_i \quad \theta_i = x_i^t \beta + \nu_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Con β un vector de coeficientes de regresion, ϵ_i y ν_i son repectivamente errores de muestreo y efectos aleatorios, los cuales se distribuyen de forma independiente como $\epsilon \sim N(0, D_i)$ y $\nu_i \sim N(0, A)$. Donde D_i es la varianza de y_i dado θ_i , la cual se asume conocida, y A es un parametro de varianza desconocido. El supuesto de D_i conocido parece restrictivo pero puede estimarse con data a priori.

El mejor predictor de θ_i bajo perdida cuadratica es la expectativa condicional:

$$E[\theta_i | y_i] = \gamma_i y_i + (1 - \gamma_i) x_i^t \beta$$

Donde $\gamma_i = A / (A + D_i)$ es conocido como un coeficiente de acotamiento. Es decir que genera un equilibrio basado en las varianzas respectivas de la estimación directa y la varianza de los datos auxiliares.

Siguiendo la formulación propuesta, β puede estimarse por minimos cuadrados generalizados (GLS):

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_i x_i^t}{A + D_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{x_i y_i}{A + D_i} \right)$$

Al reemplazar β con $\hat{\beta}$ se obtiene el mejor predictor lineal no sesgado (BLUP):

$$\tilde{\theta}_i = \gamma_i y_i + (1 - \gamma_i) x_i^t \hat{\beta}_{GLS}$$

Ya que $\hat{\beta}_{GLS}$ se construye a partir de todos los datos, el estimador de regresion $x_i^t \hat{\beta}_{GLS}$ es mucho más estable que los estimadores directos y_i .

En la práctica, la varianza de efectos aleatorios A es desconocida y debe ser reemplazada en γ_i y $\hat{\beta}_{GLS}$ por un estimador basado en la muestra, lo que genera el mejor predictor lineal no sesgado empirico (EBLUP).

4.2 Modelos de Unidad

[Referencia wiki](#)

Cuando existen datos disponibles a nivel de unidad (por ejemplo a nivel de hogares) se puede usar un analisis más profundo. Sea y_{i1}, \dots, y_{yn_i} una muestra a nivel de unidad de la area i -esima para $i = 1, \dots, m$ y seav x_{i1}, \dots, x_{yn_i} los vectores fijos de covariantes con o sin el intercepto, el modelo de error anidado se describe como:

$$y_{ij} = x_{ij}^t \beta + \nu_i + \epsilon_{ij}, \quad j = 1, \dots, N_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Donde ν_i y ϵ_{ij} son efectos aleatorios y el terminos de error y son independientes y distribuidos como $\nu_i \sim N(0, \tau^2)$ y $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, β es un vector de coeficientes de regresion desconocidos, y τ^2 y σ^2 son parametros de varianza desconocidos.

Se nota que ν_i es un efecto aleatorio que depende del area i -esima y es comun a las observaciones en la mismas area_. Esto induce correlaciones entre las observaciones y_{ij} las cuales se expresan como $Cov(y_{ij}, y_{ij'}) = \tau^2$ para $j \neq j'$, notando que las observaciones en diferentes areas son independientes. Por tanto estas se llaman varianzas *within* y *between* (dentro y entre).

Este modelo se usa tipicamente en un marco de trabajo de modelos de pobalcion finita. Asumiento que el area i contiene N_i unidades en total, pero solo n_i son muestreadas. Por simplicidad, se asume un mecanismo de muestreo aleatorio simple (por lo que no se consideran factores de expansion). Para todas las unidades se asume un modelo de población:

$$Y_{ij} = x_{ij}^t \beta + \nu_i + \epsilon_{ij}, \quad j = i, \dots, N_i, \quad i = 1, \dots, m$$

Donde Y_{ij} son las características de la unidad j en el area i . Sin pérdida de generalidad, se asumen que se observan las primeras n_i características y el resto no son observadas. Bajo esta configuracion el promedio real de area se define como:

$$\frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij} = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij}^t \beta + \nu_i + \epsilon_{ij}) = \bar{X}_i^t \beta + \nu_i + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \epsilon_{ij}$$

En la práctica, el numero total de unidades N_i es grande aunque el numero total de unidades muestradas n_i no es grande. Por tanto el ultimo termino puede ser muy pequeño, por tanto se puede definir el parametro de la media como $\theta_i = \bar{X}_i^t \beta + \nu_i$. Y estimarlo al conocer el vector de información auiliar \bar{X}_i^t , lo cual es comun e la práctica.

El mejor de predictr de ν_i viene dado por:

$$\tilde{\nu}_i = \frac{n_i \tau^2}{\sigma^2 + n_i \tau^2} (\bar{y}_i - \bar{x}_i^t \beta)$$

Donde $\bar{y}_i = n_i^{-1} \sum_{j=i}^{n_i} y_{ij}$ y $\bar{x}_i = n_i^{-1} \sum_{j=i}^{n_i} x_{ij}$.

De forma similar al modelo FH, se puede estimar β por el estimador general de minimos cuadrados (GLS) basados en los datos muestrales. Los parámetros de varianza también se estiman de esta forma. Es así que el mejor predictor EBLUP viene dado por $\hat{\theta}_i = \bar{X}_i^t \hat{\beta}_{GLS} + \hat{\nu}_i$

4.3 Estimación de MSE e intervalos de Confianza

Una parte importante de la estimación de area pequeña es la evaluación de la confianza y precisión de los resultados. Para esto se usan los errores cuadraticos medios (MSE) y los intervalos de confianza.

4.3.1 Estimacion de MSE

Considerando una situación donde el parámetro es θ_i y $\tilde{\theta}_i$ representa la expectativa condicional de θ_i dado y_i el cual depende del parámetro desconocido Ψ . Siendo $\hat{\theta}_i$ el mejor predictor empirico de θ_i , se define el MSE de $\hat{\theta}_i$ como:

$$MSE_i(\Psi) = E[(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2]$$

Usando el hecho de que $\tilde{\theta}_i$ es la expectativa condicional de θ_i dado y_i tenemos que:

$$MSE_i(\Psi) = E[(\tilde{\theta}_i - \theta_i)^2] + E[(\hat{\theta}_i - \tilde{\theta}_i)^2] = g_{i1}(\Psi) + g_{i2}(\Psi)$$

Con $g_{i1}(\Psi)$ representando la variabilidad del mejor predictor dado Ψ y tipicamente de orden $O(1)$, mientras que $g_{i2}(\Psi)$ mide la variabilidad adicional derivada de la estimación de Ψ , tipicamente de orde $O(m_{-1}^{-1})$, en la mayoría de los casos, en general se deriva una formula de aproximacion hasta el segundo orden.

Para estimar estos elementos existen derivaciones analíticas, método de bootstrap y método de jackknife. Estos pueden profundizarse aparte. Sin embargo el método de bootstrap cuenta entre sus variantes el método de bootstrap hibrido, el cual separa los estimadores de g_{i1} y g_{i2} mediante el bootstrap paramétrico, cuyo enfoque a grandes razgos consiste en estimar Ψ mediante la simulación de muestras. Esto último implica generar realizaciones de los errores de muestreo y efectos aleatorios derivados de la estimación inicial.

4.3.2 Estimación de intervalos de confianza

Respecto de los intervalos de confianza, existen dos enfoques generales, el método analítico basado en expansión de series de Taylor y el método de bootstrap paramétrico.

Por simplicidad se asume que $\theta_i|y_i \sim N(\tilde{\theta}_i(y_i, \Psi), s_i(\Psi)^2)$, donde $\tilde{\theta}_i$ y s_i^2 son expectativas condicionales y varianza de θ_i .

El método de bootstrap paramétrico se basa en generar un estadístico pivote. Se define $U_i(\Psi) = (\theta_i - \tilde{\theta}_i)/s_i(\Psi)$, luego $U_i(\Psi) \sim N(0, 1)$ con Ψ el parámetro verdadero. Se aproxima la distribución de $U_i(\hat{\Psi})$ mediante bootstrap paramétrico, es decir generar muestras bootstrap desde el modelo estimado, y se computa el estimador de bootstrap $\hat{\Psi}_{(b)}^*$ para $b = 1, \dots, B$. Luego la distribución de $U_i(\hat{\Psi})$ puede aproximarse por B realización bootstrap.

Siendo $z_{iu}^*(\alpha)$ y $z_{il}^*(\alpha)$ los $100\alpha\%$ cuantiles empíricos de la distribución simulada, el intervalo de confianza calibrado viene dado por:

$$(\hat{\theta}_i + z_{il}^*(\alpha))s_i(\Psi), \hat{\theta}_i + z_{iu}^*(\alpha))s_i(\Psi))$$

5 Aplicaciones

Este apartado presenta algunas aplicaciones notables de las metodologías de estimación de area pequeña.

5.1 Pobreza Comunal

La pobreza en Chile se mide mediante la encuesta CASEN, la cual presenta un nivel de representatibilidad a nivel de región. Para conocer el nivel de pobreza a nivel comunal se genera una estimación mediante SAE por modelos de Area, usando un conjunto de datos administrativos disponibles en el sector público. Cuando no se cuenta con información (comunidades de difícil acceso) a nivel de encuesta, se usa una metodología de imputación por conglomerados.

5.2 Uso de imágenes satelitales

Battese y otros 1988 es la primera referencia a una aplicación de modelos de unidad mediante modelos mixtos. Esta aplicación se usó para estimar el rendimiento de cosecha de un conjunto de granjas, las cuales presentan información por encuestas de una muestra de granjeros. Este dato fue complementado con información satelital de estos terrenos, usando los datos de Landsat.

5.3 Desigualdad comunal en Chile

Similar al nivel de pobreza, para estimar el nivel de desigualdad a nivel comunal en Chile se recurrió a metodologías SAE. En este caso, en vez de un modelo de Area se usó un modelo de Unidad usando los datos del censo y la encuesta CASEN. Es así que se estimó el nivel de ingreso de los hogares para calcular la desigualdad en la distribución de ingresos comunales. Estos resultados usan la metodología desarrollada para el Banco Mundial por Elbers, Lanjouw y Lanjouw de 2003, y cuyo detalle puede encontrarse en Agostini 2007.

6 Demostración Consumo Energético

El siguiente apartado presenta un ejemplo de aplicación de la metodología de estimación de area pequeña en el contexto de estimar el nivel de consumo eléctrico residencial a nivel de zona censal en Chile.

Este análisis implicó usar datos de la encuesta de caracterización de consumo energético de los hogares de Chile, realizada el 2017, que cuenta con información representativa a nivel de zona térmica, contando con 3500 hogares encuestados. Para estimar el nivel de consumo eléctrico residencial a nivel de zona censal se usó un modelo de unidad, vinculando la encuesta con los datos del censo de hogares y vivienda de 2017. La particularidad del análisis viene de que fue necesario implementar un índice de agregación intermedio entre la división político administrativa mínima (Comuna) y la unidad muestrada (los hogares), siendo este índice el nivel de zona censal. El análisis implicó entonces estimar un modelo lineal mixto a nivel de encuesta y hogares, y luego usar los parámetros estimados y la varianza de los errores, para simular censos y agregar el consumo a nivel de zona censal.

6.1 Objetivos del Análisis

El objetivo consistió en generar una estimación confiable del consumo energético de los hogares al mayor nivel de desagregación territorial posible. En este caso este nivel fue el de zona censal.

6.2 Convalidar variables de fuentes de datos

El primer paso contempló el estudio de las bases de datos y diccionarios de variables del censo y la encuesta de consumo energético de hogares para identificar las preguntas similares. Una vez identificadas estas como información relacionada al nivel educativo del jefe de hogar, el tamaño del hogar, la composición de este, el estado laboral del jefe de hogar e información relacionada a la edad y al tipo de vivienda, se pasó a expresar las distintas respuestas de la base de datos en un mismo formato. Esto último implicó consolidar algunas respuestas debido a diferentes codificaciones usadas en ambas bases. Adicionalmente se generó un proceso de imputación de valores para la composición del hogar, información que no estaba reportada en la totalidad de la encuesta. Esta imputación se hizo en función del resto de variables que detallaban el nivel de consumo las cuales no estaban presentes en la base del censo.

6.3 Especificaciones

Una vez consolidadas las bases de datos para el análisis se probaron distintas especificaciones del modelo de unidad, incluyendo las variables imputadas, o transformaciones de estas (expresadas al cuadrado) y calculos del nivel de error multinivel a distinto nivel de agregación, sea comunal, regional o de zona censal.

6.4 Comparación de Modelos

Las distintas especificaciones de los modelos fueron comparadas en términos de maximizar la correlación entre las agregaciones comunales de consumo y el dato real de consumo comunal para 2017, en conjunto con minimizar el error cuadrático medio de cada especificación. Esto último calculado mediante bootstrap paramétrico.

6.5 Resultados

Los resultados fueron normalizados a nivel comunal usando los datos de energía abierta, cosa de que la suma de los consumos a nivel de zona censal dentro de cada comuna coincidieran con el dato real.

Luego se seleccionaron las areas metropolitanas de Santiago, Concepción y Valparaíso, para presentar los resultados.

7 Recursos

Esta sección detalla algunos recursos relevantes para profundizar en el tema de estimación de áreas pequeñas.

7.1 Guías, Manuales y Seminarios

- [SAE4SDG](#): Página en formato Wiki que incluye guías para el desarrollo de estimaciones de área pequeña desarrollada por el departamento de estadísticas de la ONU en el contexto de generar herramientas para el monitoreo de objetivos de desarrollo sostenible. Es un excelente punto de partida para tener una visión global del tema, además de incluir recursos, ejemplos, bases de datos y referencias a otros recursos de educación relevante.
- [Seminario SAE Chile 2022 Cepal](#): Repositorio con presentaciones de aplicaciones destacadas de SAE en Chile.

7.2 Blogs y Presentaciones

- Encuentro SAE Chile cepal

7.3 Software estadístico

- [emdi](#): “Estimating and Mapping Disaggregated Indicators” Paquete de R que destaca por su flexibilidad y por ser usado como punto de partida para generar nuevas implementaciones.
- stata

...

7.4 videos

- [Seminario CEPAL SAE 2023](#): Este seminario realizado el 2023 contiene un conjunto de presentaciones y referencias a desarrollos actuales metodológicos sobre la estimaciones de areas pequeñas, destacando la actualidad de estos además del contexto asociado a sudamérica y países en desarrollo.
- Paula Moraga

7.5 libros

- Molina y Rao
- Multilevel SAE

7.6 Papers

- Molina y Rao 2010 (Molina and Rao 2010)
- Sugawara y Kobokawa 2021 (Sugawara and Kubokawa 2020)
- Molina 2019 (Molina 2019)
- Newhouse et al 2022 (Newhouse et al. 2022)

References

- Molina, Isabel. 2019. “Desagregación de Datos En Encuestas de Hogares: Metodologías de Estimación En Áreas Pequeñas.”
- Molina, Isabel, and J. N. K. Rao. 2010. “Small Area Estimation of Poverty Indicators.” *Canadian Journal of Statistics* 38 (3): 369–85. <https://doi.org/10.1002/cjs.10051>.
- Newhouse, David Locke, Joshua D. Merfeld, Anusha Ramakrishnan, Tom Swartz, and Partha Lahiri. 2022. “Small Area Estimation of Monetary Poverty in Mexico Using Satellite Imagery and Machine Learning.” SSRN Scholarly Paper. Rochester, NY. October 3, 2022. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4235976>.
- Sugasawa, Shonosuke, and Tatsuya Kubokawa. 2020. “Small Area Estimation with Mixed Models: A Review.” *Japanese Journal of Statistics and Data Science* 3 (2): 693–720. <https://doi.org/10.1007/s42081-020-00076-x>.
- Tzavidis, Nikos, Li-Chun Zhang, Angela Luna, Timo Schmid, and Natalia Rojas-Perilla. 2018. “From Start to Finish: A Framework for the Production of Small Area Official Statistics.” *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)* 181 (4): 927–79. <https://doi.org/10.1111/rssa.12364>.