

# Pólya原理及其应用

华东师大二附中 符文杰

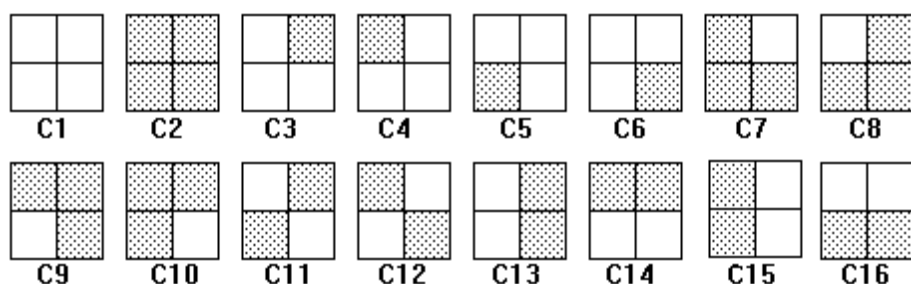
Pólya原理是组合数学中，用来计算全部互异的组合状态的个数的一个十分高效、简便的工具。下面，我就向大家介绍一下什么是Pólya原理以及它的应用。请先看下面这道例题：

## 【例题1】

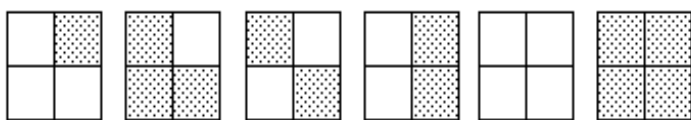
对 $2 \times 2$ 的方阵用黑白两种颜色涂色，问能得到多少种不同的图像？经过旋转使之吻合的两种方案，算是同一种方案。

## 【问题分析】

由于该问题规模很小，我们可以先把所有的涂色方案列举出来。



一个 $2 \times 2$ 的方阵的旋转方法一共有4种：旋转0度、旋转90度、旋转180度和旋转270度。(注：本文中默认旋转即为顺时针旋转) 我们经过尝试，发现其中互异的一共只有6种：C3、C4、C5、C6是可以经过旋转相互变化而得，算作同一种；C7、C8、C9、C10是同一种；C11、C12是同一种；C13、C14、C15、C16也是同一种；C1和C2是各自独立的两种。于是，我们得到了下列6种不同的方案。



但是，一旦这个问题由 $2 \times 2$ 的方阵变成 $20 \times 20$ 甚至 $200 \times 200$ 的方阵，我们就不能再一一枚举了，利用Pólya原理成了一个很好的解题方法。在接触Pólya原理之前，首先简单介绍Pólya原理中要用到的一些概念。

**群：** 给定一个集合 $G=\{a,b,c,\dots\}$ 和集合 $G$ 上的二元运算，并满足：

(a) 封闭性:  $\forall a, b \in G, \exists c \in G, a * b = c$ 。

(b) 结合律:  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ 。

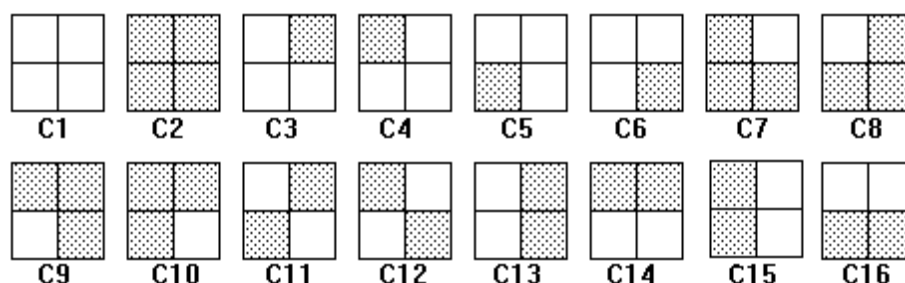
(c) 单位元:  $\exists e \in G, \forall a \in G, a * e = e * a = a$ 。

(d) 逆元:  $\forall a \in G, \exists b \in G, a * b = b * a = e$ , 记  $b = a^{-1}$ 。

则称集合  $G$  在运算  $*$  之下是一个群, 简称  $G$  是群。一般  $a * b$  简写为  $ab$ 。

**置换:**  $n$  个元素  $1, 2, \dots, n$  之间的一个置换  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$  表示 1 被 1 到  $n$

中的某个数  $a_1$  取代, 2 被 1 到  $n$  中的某个数  $a_2$  取代, 直到  $n$  被 1 到  $n$  中的某个数  $a_n$  取代, 且  $a_1, a_2, \dots, a_n$  互不相同。本例中有 4 个置换:



$$\text{转 } 0^\circ \quad a1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{转 } 90^\circ \quad a2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 & 9 & 12 & 11 & 16 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{转 } 180^\circ \quad a3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 12 & 15 & 16 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{转 } 270^\circ \quad a4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 7 & 12 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

**置换群:** 置换群的元素是置换, 运算是置换的连接。例如:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

可以验证置换群满足群的四个条件。

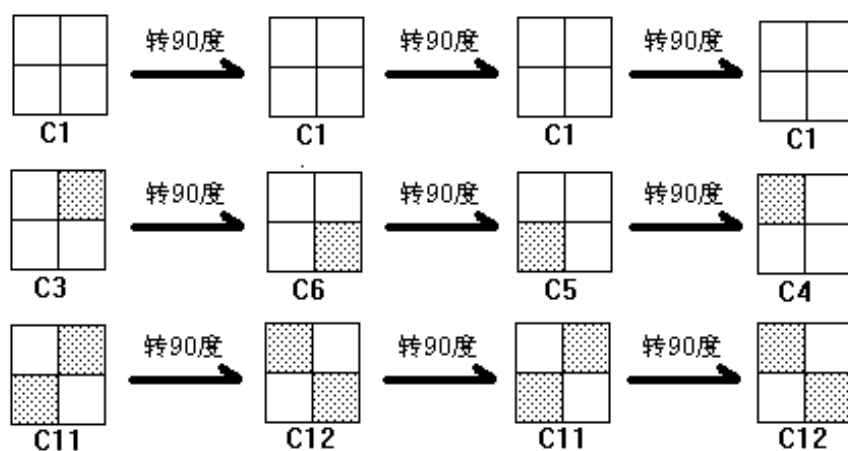
本题中置换群  $G = \{\text{转 } 0^\circ, \text{转 } 90^\circ, \text{转 } 180^\circ, \text{转 } 270^\circ\}$

我们再看一个公式:  $|E_k| \cdot |Z_k| = |G| \quad k=1 \dots n$

该公式的一个很重要的研究对象是群的元素个数，有很大的用处。

**$Z_k$  (K不动置换类):** 设 $G$ 是 $1\dots n$ 的置换群。若 $K$ 是 $1\dots n$ 中某个元素， $G$ 中使 $K$ 保持不变的置换的全体，记以 $Z_k$ ，叫做 $G$ 中使 $K$ 保持不动的置换类，简称 $K$ 不动置换类。

如本例中： $G$ 是涂色方案1~16的置换群。对于方案1，四个置换都使方案1保持不变，所以 $Z_1=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ；对于方案3，只有置换 $a_1$ 使其不变，所以 $Z_3=\{a_1\}$ ；对于方案11，置换 $a_1$ 和 $a_3$ 使方案其保持不变，所以 $Z_{11}=\{a_1, a_3\}$ 。



**$E_k$  (等价类):** 设 $G$ 是 $1\dots n$ 的置换群。若 $K$ 是 $1\dots n$ 中某个元素， $K$ 在 $G$ 作用下的轨迹，记作 $E_k$ 。即 $K$ 在 $G$ 的作用下所能变化成的所有元素的集合。

如本例中：方案1在四个置换作用下都是方案1，所以 $E_1=\{1\}$ ；方案3，在 $a_1$ 下是3，在 $a_2$ 下变成6，在 $a_3$ 下变成5，在 $a_4$ 下变成4，所以 $E_3=\{3,4,5,6\}$ ；方案11，在 $a_1$ 、 $a_3$ 下是11，在 $a_2$ 、 $a_4$ 下变成12，所以 $E_{11}=\{11,12\}$ 。

本例中的数据，也完全符合这个定理。如本例中：

$$\begin{aligned} |E_1| \cdot |Z_1| &= 1 \times 4 = 4 = |G| \\ |E_3| \cdot |Z_3| &= 4 \times 1 = 4 = |G| \\ |E_{11}| \cdot |Z_{11}| &= 2 \times 2 = 4 = |G| \end{aligned}$$

限于篇幅，这里就不对这个定理进行证明。

接着就来研究每个元素在各个置换下不变的次数的总和。见下

表:

置换\元素j a <sub>i</sub>	1	2	.....	16	D(a <sub>i</sub> )
a <sub>1</sub>	S <sub>1,1</sub>	S <sub>1,2</sub>	.....	S <sub>1,16</sub>	D(a <sub>1</sub> )
a <sub>2</sub>	S <sub>2,1</sub>	S <sub>2,2</sub>	.....	S <sub>2,16</sub>	D(a <sub>2</sub> )
a <sub>3</sub>	S <sub>3,1</sub>	S <sub>3,2</sub>	.....	S <sub>3,16</sub>	D(a <sub>3</sub> )
a <sub>4</sub>	S <sub>4,1</sub>	S <sub>4,2</sub>	.....	S <sub>4,16</sub>	D(a <sub>4</sub> )
Z <sub>j</sub>	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	.....	Z <sub>16</sub>	$\sum_{j=1}^{16}   Z_j   = \sum_{j=1}^4 D(a_j)$

其中

$$S_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{当 } a_i \notin Z_j, \text{即 } j \text{ 在 } a_i \text{ 的变化下变动了} \\ 1 & \text{当 } a_i \in Z_j, \text{即 } j \text{ 在 } a_i \text{ 的变化下没有变} \end{cases}$$

D(a<sub>j</sub>) 表示在置换a<sub>j</sub>下不变的元素的个数

如本题中:涂色方案1在a<sub>1</sub>下没变动, S<sub>1,1</sub>=1; 方案3在a<sub>3</sub>变动了, S<sub>3,3</sub>=0;  
在置换a<sub>1</sub>的变化下16种方案都没变动, D(a<sub>1</sub>)=16; 在置换a<sub>2</sub>下只有1、2这两种方案没变动, D(a<sub>2</sub>)=2。

一般情况下, 我们也可以得出这样的结论:  $\sum_{j=1}^n | Z_j | = \sum_{i=1}^s D(a_i)$

我们对左式进行研究。

不妨设N={1, ....., n}中共有L个等价类, N=E<sub>1</sub>+ E<sub>2</sub>+.....+E<sub>L</sub>,  
则当j和k属于同一等价类时, 有 | Z<sub>j</sub> | = | Z<sub>k</sub> | 。所以

$$\sum_{k=1}^n | Z_k | = \sum_{i=1}^L \sum_{k \in E_i} | Z_k | = \sum_{i=1}^L | E_i | \cdot | Z_i | = L \cdot | G |$$

这里的L就是我们要求的互异的组合状态的个数。于是我们得出:

$$L = \frac{1}{| G |} \sum_{k=1}^n | Z_k | = \frac{1}{| G |} \sum_{j=1}^s D(a_j)$$

利用这个式子我们可以得到本题的解 L=(16+2+4+2)/4=6 与前面枚举得到的结果相吻合。这个式子叫做Burnside引理。

但是，我们发现要计算 $D(a_j)$ 的值不是很容易，如果采用搜索的方法，总的时间规模为 $O(n \times s \times p)$ 。(n表示元素个数，s表示置换个数，p表示格子数，这里n的规模是很大的) 下一步就是要找到一种简便的 $D(a_j)$ 的计算方法。先介绍一个循环的概念：

循环：记

$$(a_1 a_2 \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

称为 $n$ 阶循环。每个置换都可以写若干互不相交的循环的乘积，两个循环 $(a_1 a_2 \cdots a_n)$ 和 $(b_1 b_2 \cdots b_n)$ 互不相交是指 $a_i \neq b_j, i, j=1, 2, \dots, n$ 。例如：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (13)(25)(4)$$

这样的表示是唯一的。置换的循环节数是上述表示中循环的个数。例如 $(13)(25)(4)$ 的循环节数为3。

有了这些基础，就可以做进一步的研究，我们换一个角度来考虑这个问题。我们给 $2 \times 2$ 方阵的每个方块标号，如下图：

2	1
3	4

构造置换群 $G' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ ,  $|G'| = 4$ , 令 $g_i$ 的循环节数为 $c(g_i)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ )

在 $G'$ 的作用下，其中

$$g_1 \text{表示转} 0^\circ, \quad \text{即 } g_1 = (1)(2)(3)(4) \quad c(g_1) = 4$$

$$g_2 \text{表示转} 90^\circ, \quad \text{即 } g_2 = (4 \ 3 \ 2 \ 1) \quad c(g_2) = 1$$

$$g_3 \text{表示转} 180^\circ, \quad \text{即 } g_3 = (1 \ 3)(2 \ 4) \quad c(g_3) = 2$$

$$g_4 \text{表示转} 270^\circ, \quad \text{即 } g_4 = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad c(g_4) = 1$$

我们可以发现， $g_i$ 的同一个循环节中的对象涂以相同的颜色所得的图像数 $m^{c(g_i)}$  正好对应 $G$ 中置换 $a_i$ 作用下不变的图象数，即

$$2^{c(g_1)} = 2^4 = 16 = D(a_1) \quad 2^{c(g_2)} = 2^1 = 2 = D(a_2)$$

$$2^{c(g_3)} = 2^2 = 4 = D(a_3) \quad 2^{c(g_4)} = 2^1 = 2 = D(a_4)$$

由此我们得出一个结论：

设 $G$ 是 $p$ 个对象的一个置换群，用 $m$ 种颜色涂染 $p$ 个对象，则不同染色方案为：

$$L = \frac{1}{|G|} (m^{c(g_1)} + m^{c(g_2)} + \cdots + m^{c(g_s)})$$

其中 $G=\{g_1, \dots, g_s\}$   $c(g_i)$ 为置换 $g_i$ 的循环节数( $i=1 \dots s$ )

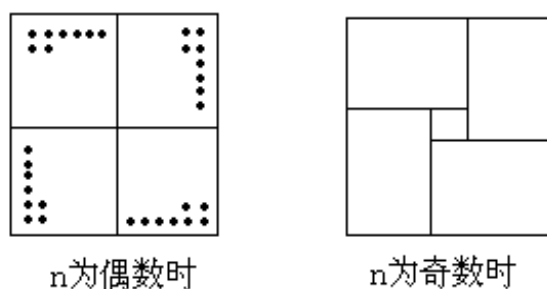
这就是所谓的Pólya定理。我们发现利用Pólya定理的时间复杂度为 $O(s \times p)$  (这里 $s$ 表示置换个数， $p$ 表示格子数)，与前面得到的Burnside引理相比之下，又有了很大的改进，其优越性就十分明显了。Pólya定理充分挖掘了研究对象的内在联系，总结了规律，省去了许多不必要的盲目搜索，把解决这类问题的时间规模降到了一个非常低的水平。

现在我们把问题改为： $n \times n$ 的方阵，每个小格可涂 $m$ 种颜色，求在旋转操作下本质不同的解的总数。

### 【问题分析】

先看一个很容易想到的搜索的方法。(见附录)

这样搜索的效率是极低的，它还有很大的改进的余地。前面，我们采用的方法是先搜后判，这样的盲目性极高。我们需要边搜边判，避免过多的不必要的枚举，我们更希望把判断条件完全融入到搜索的边界中去，消灭无效的枚举。这个美好的希望是可以实现的。



我们可以在方阵中分出互不重叠的长为 $[(n+1)/2]$ ，宽为 $[n/2]$ 的四个矩阵。当 $n$ 为偶数时，恰好分完；当 $n$ 为奇数时，剩下中心的一个格子，它在所有的旋转下都不动，所以它涂任何颜色都对其它格子没有影响。令 $m$ 种颜色为 $0 \sim m-1$ ，我们把矩阵中的每格的颜色所代表的数字顺次(左上角从左到右，从上到下；右上角从上到下，从右到左；……)

排成 $m$ 进制数，然后就可以表示为一个十进制数，其取值范围为 $0 \sim m^{\lfloor n^2/4 \rfloor} - 1$ 。(因为 $\lfloor n/2 \rfloor * \lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor n^2/4 \rfloor$ ) 这样，我们就把一个方阵简化为4个整数。我们只要找到每一个等价类中左上角的数最大的那个方案(如果左上角相同，就顺时针方向顺次比较) 这样，在枚举的时候其它三个数一定不大于左上角的数，效率应该是最高的。

进一步考虑，当左上角数为 $i$ 时,  $(0 \leq i \leq R-1)$  令 $R = m^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$  可分为下列的4类：

其它三个整数均小于 $i$ ，共 $i^3$ 个。

右上角为 $i$ ，其它两个整数均小于 $i$ ，共 $i^2$ 个。

右上角、右下角为 $i$ ，左下角不大于 $i$ ，共 $i+1$ 个。

右下角为 $i$ ，其它两个整数均小于 $i$ ，且右上角的数不小于左下角的，共 $i(i+1)/2$ 个。

因此，

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=0}^{R-1} (i^3 + i^2 + i + 1 + \frac{1}{2} i(i+1)) = \sum_{i=0}^{R-1} (i^3 + \frac{3}{2} i^2 + \frac{3}{2} i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^R ((i-1)^3 + \frac{3}{2} (i-1)^2 + \frac{3}{2} (i-1) + 1) = \sum_{i=1}^R (i^3 - \frac{3}{2} i^2 + \frac{3}{2} i) \\ &= \frac{1}{4} R^2 (R+1)^2 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} R(R+1)(2R+1) + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} R(R+1) \\ &= \frac{1}{4} (R^4 + R^2 + 2R) \end{aligned}$$

当 $n$ 为奇数时，还要乘一个 $m$ 。

由此我们就巧妙地得到了一个公式。但是，我们应该看到要想到这个公式需要很高的智能和付出不少的时间。另一方面，这种方法只能对这道题有用而不能广泛地应用于一类试题，具有很大的不定性因素。因此，如果能掌握一种适用面广的原理，就会对解这一类题有很大的帮助。

下面我们就采用Pólya定理。我们可以分三步来解决这个问题。

## 1. 确定置换群

在这里很明显只有4个置换：转 $0^\circ$ 、转 $90^\circ$ 、转 $180^\circ$ 、转 $270^\circ$ 。

所以，置换群 $G=\{\text{转}0^\circ、\text{转}90^\circ、\text{转}180^\circ、\text{转}270^\circ\}$ 。

## 2. 计算循环节个数

首先，给每个格子顺次编号（ $1\sim n^2$ ），再开一个二维数组记录置换后的状态。最后通过搜索计算每个置换下的循环节个数，效率为一次方级。

## 3. 代入公式

即利用Pólya定理得到最后结果。

$$L = \frac{1}{|G|} (m^{c(g_1)} + m^{c(g_2)} + \cdots + m^{c(g_s)})$$

### 【程序题解】

```
const
  maxn=10;
var
  a,b:array[1..maxn,1..maxn] of integer;{记录方阵的状态}
  i,j,m,n:integer;{m颜色数;n方阵大小}
  l,ll:longint;
procedure xz;{将方阵旋转90°}
var
  i,j:integer;
begin
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      a[j,n+1-i]:=b[i,j];
  b:=a
end;
procedure xhj;{计算当前状态的循环节个数}
var
  i,j,i1,j1,k,p:integer;
begin
  k:=0;{用来记录循环节个数，清零}
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
      if a[i,j]>0 then{搜索当前尚未访问过的格子}
      begin
        inc(k);{循环节个数加1}
        i1:=(a[i,j]-1) div n;
        j1:=(a[i,j]-1) mod n+1;{得到这个循环的下一个格子}
        a[i,j]:=0;{表示该格已访问}
        while a[i1,j1]>0 do begin
          p:=a[i1,j1];{暂存当前格的信息}
```



```

        a[i1,j1]:=0;{置已访问标志}
        i1:=(p-1) div n+1;
        j1:=(p-1) mod n+1{得到这个循环的下一个格子}
    end{直到完整地访问过这个循环后退出}
end;
l1:=1;
for i:=1 to k do l1:=l1*m;{计算m的k次方的值}
l:=l+l1{进行累加}
end;
begin
    writeln('Input m,n=');
    readln(m,n);{输入数据}
    for i:=1 to n do
        for j:=1 to n do a[i,j]:=(i-1)*n+j;{对方阵的状态进行初始化}
        b:=a;
        xhj;{计算转0°状态下的循环节个数}
        xz;{转90°}
        xhj;{计算转90°状态下的循环节个数}
        xz;{再转90°}
        xhj;{计算转180°状态下的循环节个数}
        xz;{再转90°}
        xhj;{计算转270°状态下的循环节个数}
        l:=l div 4;
        writeln(l);{输出结果}
    readln
end.

```

在上面的程序中，我暂时回避了高精度计算，因为这和我讲的内容关系不大。

如果大家再仔细地考虑一下，就会发现这个题解还可以继续优化。对n分情况讨论：

n为偶数：在转0°时，循环节为 $n^2$ 个，转180°时，循环节为 $n^2/2$ 个，转90°和转270°时，循环节为 $n^2/4$ 个。

n为奇数：在转0°时，循环节为 $n^2$ 个，转180°时，循环节为 $(n^2+1)/2$ 个，转90°和转270°时，循环节为 $(n^2+3)/4$ 个。

把这些综合一下就得到：在转0°时，循环节为 $n^2$ 个，转180°时，循环节为 $[(n^2+1)/2]$ 个，转90°和转270°时，循环节为 $[(n^2+3)/4]$ 个。(其中，方括号表示取整)于是就得到：

$$L = \frac{1}{4}(m^{n^2} + m^{\lfloor \frac{n^2+3}{4} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor} + m^{\lfloor \frac{n^2+3}{4} \rfloor})$$

这和前面得到的结果完全吻合。

经过上述一番分析，使得一道看似很棘手的问题得以巧妙的解决，剩下的只要做一点高精度计算即可。

通过这几个例子，大家一定对Pólya原理有了八九成的了解，通过和搜索方法的对比，它的优越性就一目了然了。它不仅极大地提高了程序的时间效率，甚至在编程难度上也有减无增。所以，我们在智能和经验不断增长的同时，也不能忽视了原理性的知识。智能和经验固然重要，但是掌握了原理就更加踏实。因此，我们在解题之余，也要不忘对原理性知识的学习，不停给自己充电，使自己的水平有更大的飞跃。

## 附录 (搜索方法的程序)

```
const
    maxn=10;
type
    sqtype=array[1..maxn,1..maxn] of byte;
var
    n,total,m:integer;
    sq:sqtype;
function big:boolean;(检验当前方案是否为同一等价类中最大的)
var
    units:array[2..4] of sqtype;(记录三种旋转后的状态)
    i,j,k:integer;
begin
    for i:=1 to n do
        for j:=1 to n do begin
            units[2,j,n+1-i]:=sq[i,j];
            units[3,n+1-i,n+1-j]:=sq[i,j];
            units[4,n+1-j,i]:=sq[i,j]
        end;
    big:=false;
```

```

for k:=2 to 4 do (进行比较)
  for i:=1 to n do begin
    j:=1;
    while (j<=n)and(sq[i,j]=units[k,i,j]) do inc(j);
    if j<=n then
      if sq[i,j]<units[k,i,j]
        then exit
        else break
      end;
    big:=true
  end;
end;
procedure make(x,y:byte);(枚举每个格子中涂的颜色)
var i:integer;
begin
  if x>n then begin
    if big then inc(total);
    exit
  end;
  for i:=1 to m do begin
    sq[x,y]:=i;
    if y=n then make(x+1,1) else make(x,y+1)
  end
end;
begin
  writeln('Input m,n=');readln(m,n);
  total:=0;
  make(1,1);
  writeln(total);readln
end.

```