Guilty

Problem

给出 n 个有标号的球和 m 个有标号的盒子，第 i 个盒子不能放入超过 a_i 个球，你需要求出将球放入盒子的方案数；数据保证 a_i 互不相同。

$n,m \leq 2500$

Solution

我们等价于计算：$n!\prod(\sum_j^{a_i}\frac{x^j}{j!})[x^n]$

设置阈值 L，对于前 $a_i \leq L$ 的 a_i 暴力计算，复杂度 $\mathcal{O}(nL^2)$

对于 $a_i > L$ 的情况，我们有放入了大于 L 个球的盒子数不超过 $\frac{n}{L}$ 个，考虑如果我们确定了这些球数，则可以考虑为球数分配盒子的方案数，这个部分通过从大到小依次确定累乘即可（考虑假定某种球数 v 有 t 个盒子持有，则对应的盒子方案数为 $\frac{pre_v(pre_v-1)...(pre_v-t+1)}{t!}$，其中 pre_v 表示大于 v 的可用盒子数）。则此时剩余的盒子数均可视为球数上限等同 L 的盒子。假定放入了大于 L 个球的盒子数有 t 个，对应的方案数（以及确定盒子和球对应关系的方案）可以写为生成函数 $F_t(x)$，则我们只需要计算 $F_t(x)(\sum_j^L\frac{x^j}{j!})^{m_L-t}$，其中 m_L 表示大于 $a_i > L$ 的盒子数。

这类卷积共计需要做 $\frac{n}{L}$ 次，总体复杂度 $\frac{n^3}{L}$，从而需要预处理出 $(\sum_j^L\frac{x^j}{j!})^{m_L-n/L}...(\sum_j^L\frac{x^j}{j!})^{m_L}$。

记 $G(x)=\sum_j^L\frac{x^j}{j!}$，考虑 $(G(x)^k)'=kG'(x)G(x)^{k-1}=k(G(x)-\frac{x^L}{L!})G(x)^{k-1}$

从而设 $A(x)=G(x)^k$ 有 $A'(x)=kA(x)-\frac{kx^L}{L!}G(x)^{k-1}\Rightarrow kA(x)[x^n]=(n+1)A(x)[x^{n+1}]=kA(x)[x^n]-\frac{kx^L}{L!}G(x)^{k-1}[x^n]$，从而这个部分我们可以 $\mathcal{O}(n^2)$ 的推出。

另一边，考虑计算 $F_t(x)$ 的过程，考虑转移 $F_{t,L}(x)$ 的过程，其通过 $F_{t,L+1}(x),F_{t-u,L+1}(x)$ 进行转移，此时对于每个 x^j，转移复杂度取决于 t,u 的枚举量，注意到 t,u 的枚举总量总是 n/j 的，从而总体枚举量为：

$$\sum_{k\geq L}(\frac{n}{k})^2$$

$$n^2\int_L^n\frac{1}{x^2}\sim\frac{n^2}{L}$$

从而这个部分的复杂度不超过 $\mathcal{O}(\frac{n^3}{L})$

取 $L = n^{2/3}$ 可以得到最优复杂度为 $\mathcal{O}(n^{7/3})$，如果实现不精细复杂度会变为 $\mathcal{O}(n^{7/3}\ln n)$