DP

Werner_Yin

Changjun High School → Peking University

yinjinrun2021@outlook.com

2024.1.30

Preface

Section 1

状压 DP

前置

常用的运算

```
a and b // a & b
a or b // a | b
not a // !a
a | (1 << i)
a & (1 << i), a >> i & 1
for (int x = s; ; x = (x - 1) & s) {
    // do something.
    if(x == 0) break;
}
__builtin_popcount(s)
```

注意事项

在不清楚位运算的优先顺序的时候，尽量打括号！

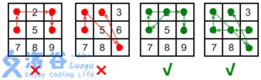
题目 A　Luogu4460 [CQOI2018] 解锁屏幕

题面

画线时还需要遵循一些规则：

1. 连接的点数不能少于 4 个。也就是说只连接两个点或者三个点会提示错误。
2. 两个点之间的联线不能弯曲。
3. 每个点只能"使用"一次，不可重复。这里的"使用"是指手指划过一个点，该点变绿。
4. 两个点之间的连线不能"跨过"另一个点，除非那个点之前已经被"使用"过。

对于最后一条规则，参见下图的解释。左边两幅图违反了该规则；而右边两幅图（分别为 $2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 6$ 和 $6 \to 5 \to 4 \to 1 \to 9 \to 2$）则没有违反规则，因为在"跨过"点时，点已经被使用过了。



现在工程师希望改进解锁屏幕，增减点的数目，并移动点的位置，不再是一个九宫格形状，但保持上述画线规则不变。

请计算新的解锁屏幕上，一共有多少满足规则的画线方案。

数据范围

$n \leqslant 19$，各点坐标不同。

Luogu4460 [CQOI2018] 解锁屏幕

题解

纯纯是帮助大家复习状压 DP 和预处理技巧的。

题目 B　Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题面

菲菲和牛牛在一块 n 行 m 列的棋盘上下棋，菲菲先手，牛牛后手。
开始时，没有任何棋子，填满棋盘时结束，一个格子可以落子当且仅当这个格子内没有棋子且这个格子的左侧及上方的所有格子内都有棋子。
每个格子上，都写有 $a_{i,j}$ 和 $b_{i,j}$，结束后，菲菲和牛牛会分别计算自己的得分：菲菲的得分是他的格子上的 $a_{i,j}$ 之和，牛牛的得分是他格子上的 $b_{i,j}$ 的和。
菲菲和牛牛都希望，自己的得分减去对方的得分得到的结果最大。现在他们想知道，在给定的棋盘上，如果双方都采用最优策略且知道对方会采用最优策略，那么，最终的结果如何？

数据范围

$1 \leq n, m \leq 10$，$0 \leq a_{i,j}, b_{i,j} \leq 10^5$。

Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题解

1. 一个合法的棋局长什么样?

Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题解

1. 一个合法的棋局长什么样?
2. 如何描述这个棋局?

Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题解

1. 一个合法的棋局长什么样?
2. 如何描述这个棋局?
3. 现在考虑进行 DP，如何处理这种双人博弈类型的 DP?

Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题解

1. 一个合法的棋局长什么样?
2. 如何描述这个棋局?
3. 现在考虑进行 DP，如何处理这种双人博弈类型的 DP?
4. 对抗性质设置状态（最小化得分，最大化得分)。

Luogu4363 [九省联考 2018] 一双木棋 chess

题解

1. 一个合法的棋局长什么样?
2. 如何描述这个棋局?
3. 现在考虑进行 DP，如何处理这种双人博弈类型的 DP?
4. 对抗性质设置状态（最小化得分，最大化得分)。
5. 可以 DP 也可以对抗记忆化搜索。

题目 C ARC058E　和風いろはちゃん

题面

若序列 $\{a_i\}$ 存在 $1 \le x < y < z < w \le n+1$ 满足 $\sum_{i=x}^{y-1} a_i = X, \sum_{i=y}^{z-1} a_i = Y, \sum_{i=z}^{w-1} a_i = Z$ 时，则称数列 a 是**好的**。

求在所有长度为 n 且 $a_i \in \mathbb{N}^+ \cap [1, 10]$ 的 10^n 个序列 a 中，有多少个序列是**好的**，答案对 10^9+7 取模。

数据范围

$3 \le n \le 40$，$1 \le X \le 5$，$1 \le Y \le 7$，$1 \le Z \le 5$。

[ARC058E] 和風いろはちゃん

题解

开始想从 n 下手，然而不太好搞，无意中看到 X, Y, Z 范围 $X+Y+Z <= 17$,范围挺像状压的，然后就有思路了。

从左往右扫 a 数组的每一位来确定答案，那状压什么呢?

我们定义最后我们找的的满足条件的数组中 $[x, w-1]$ 为我们**需要的部分**（当然，一个数组可以有多个这种部分），如图(即有颜色的部分）。

而匹配的部分为 $[x, y-1]$ 或者 $[x, z-1]$, 即黄色部分 或者 黄色 + 蓝色的部分

我们要记录的是，所有可能的 需要的部分 剩下未匹配上的末尾和的可能值。

这个值一定十分小（$X+Y+Z <= 17$),状压一下就行了。

复杂度 $O(2^{X+Y+Z}nt)$, 其中 $t = 10$。

题目 D Luogu7324 [WC2021] 表达式求值

题面

定义二元操作符 <：对于两个长度都为 n 的数组 A, B（下标从 1 到 n），$A<B$ 的结果也是一个长度为 n 的数组，记为 C。则有 $C_i = \min(A_i, B_i)$ $(1 \le i \le n)$。类似定义二元操作符 >。
现在有 m（$1 \le m \le 10$）个长度均为 n 的整数数组 $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$。给定一个待计算的表达式 E，E 中只包含 < 和 > 两种操作符（运算优先级相同）(当然有括号和哪个数组)。
特殊地，表达式 E 中还可能出现操作符 ?，它表示该运算符可能是 < 也可能是 >。你的任务就是求出这 2^t 个结果值（每个结果都是一个数组）中所有的元素的和。对 10^9+7 取模后的值。

数据范围

$1 \le n \le 5 \times 10^4$，$1 \le m \le 10$，$|S| \le 5 \times 10^4$，$1 \le (A_i)_j \le 10^9$。

Luogu7324 [WC2021] 表达式求值

题解

1. 先建立表达式树，这样可以解决没有问号情况。

Luogu7324 [WC2021] 表达式求值

题解

1. 先建立表达式树，这样可以解决没有问号情况。
2. 基本操作：每个位置分开计算贡献，同时计算值 $\geqslant x$ 的方案数。

Luogu7324 [WC2021] 表达式求值

题解

1. 先建立表达式树，这样可以解决没有问号情况。
2. 基本操作：每个位置分开计算贡献，同时计算值 $\geqslant x$ 的方案数。
3. 然后就有了 $\mathcal{O}(nm|S|)$ 做法了。

Luogu7324 [WC2021] 表达式求值

题解

1. 先建立表达式树，这样可以解决没有问号情况。
2. 基本操作：每个位置分开计算贡献，同时计算值 $\geqslant x$ 的方案数。
3. 然后就有了 $\mathcal{O}(nm|S|)$ 做法了。
4. 实际上有效的 nm 只有 2^m，于是就有了 $\mathcal{O}(2^m|S| + n\text{poly}(m))$ 做法了。

Section 2

数位 DP

题目 E　CF55D Beautiful numbers

题面

一个数字 x 是美丽的，当且仅当 $x \in \mathbb{Z}^+$ 并且对于 x 的每一个非零位上的数 y，都有 $y|x$。
你需要帮助他算出在区间 $[l, r]$ 中有多少个数是美丽的。
t 组数据。

数据范围

$1 \le t \le 10, 1 \le l \le r \le 9 \times 10^{18}$，保证 l, r 都是整数。

CF55D Beautiful numbers

题解

1. 这个题目有两类必须记录：
   1. 哪些数出现了。
   2. 这个数 $\bmod 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 的余数。

CF55D Beautiful numbers

题解

1. 这个题目有两类必须记录:
   1. 哪些数出现了。
   2. 这个数 $\bmod 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 的余数。
2. 尝试简化信息。

CF55D Beautiful numbers

题解

1. 这个题目有两类必须记录：
   1. 哪些数出现了。
   2. 这个数 $\bmod 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 的余数。
2. 尝试简化信息。
3. 实际上可以只记录这个数 $\bmod 5, 7, 8, 9$ 的余数，如果你追求极致，可以只记录 $\bmod 7, 8, 9$ 的，至于 5，我们可以在最后一位进行判断。

CF55D Beautiful numbers

题解

1. 这个题目有两类必须记录：
   1. 哪些数出现了。
   2. 这个数 $\bmod 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 的余数。
2. 尝试简化信息。
3. 实际上可以只记录这个数 $\bmod 5, 7, 8, 9$ 的余数，如果你追求极致，可以只记录 $\bmod 7, 8, 9$ 的，至于 5，我们可以在最后一位进行判断。
4. 而“哪些数出现了”中，我们可以只记录 $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ 的出现情况（为什么不记录 $6?$），使用状压记录。

CF55D Beautiful numbers

题解

1. 这个题目有两类必须记录:
   1. 哪些数出现了。
   2. 这个数 $\bmod 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 的余数。
2. 尝试简化信息。
3. 实际上可以只记录这个数 $\bmod 5, 7, 8, 9$ 的余数，如果你追求极致，可以只记录 $\bmod 7, 8, 9$ 的，至于 5，我们可以在最后一位进行判断。
4. 而“哪些数出现了”中，我们可以只记录 $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ 的出现情况（为什么不记录 6?），使用状压记录。
5. 复杂度大大降低 $\mathcal{O}(t \times len_n \times 2560 \times 10 \times 2^7)$。

题目 F Gym104460A Digit Mode

Statement

Let $m(x)$ be the *mode* of the digits in decimal representation of positive integer x. The *mode* is the **largest** value that occurs **most** frequently in the sequence. For example, $m(15532) = 5, m(25252) = 2, m(103000) = 0$.

Given a positive integer n. Output the value of $\left(\sum_{i=1}^{n} m(x)\right) \bmod (10^9 + 7)$.

Constraints

$1 \leqslant n < 10^{50}$.

Gym104460A Digit Mode

Solution

1. 数位 DP 的一个重要本质：限制的脱离。

Gym104460A Digit Mode

Solution

1. 数位 DP 的一个重要本质：限制的脱离。
2. 枚举脱离限制的位置，然后剩下的部分可以任意安排，于是可以对于每个数字是答案的方案进行计算。

题目 G　Luogu5342 [TJOI2019] 甲苯先生的线段树

题面

给出 d, a, b，代表目前有一颗深度为 d 的满二叉树，上面钦定两个点 a, b，接着有两种问题：

1. 问 a, b 的简单路径上的点权之和。
2. 问**还有**多少对点的问题 1 的答案和当前 a, b 答案一样。

数据范围

$d \leq 50, T \leq 10$。

Luogu5342 [TJOI2019] 甲苯先生的线段树 I

题解

问题一显然直接算即可，假设其答案为 s。
问题二比较复杂，我们先考虑该点对是一条链的情况。

Luogu5342 [TJOI2019] 甲苯先生的线段树 I

题解

问题一显然直接算即可，假设其答案为 s。
问题二比较复杂，我们先考虑该点对是一条链的情况。
假设从 x 开始，向下延伸 i 的长度（包括 x），假设一直左走，那么答案就是：

$$(1+2+4+\dots+2^{i-1})x=(2^i-1)x$$

如果在距离底端点 $j(1\le j\le i)$ 的时候右走一次，那么贡献就是 $(2^0+2^1+\dots 2^{j-2})x=(2^{j-1}-1)x$。

Luogu5342 [TJOI2019] 甲苯先生的线段树 II

题解

如果一直往右儿子走，那么答案就是 $(2^i-1)x+\sum_{j=0}^{i-1}(2^j-1)x$，由一直左走的答案，可知 $x \le \left\lfloor \frac{s}{2^i-1} \right\rfloor$，这个就是 x 的上界了。

但是同时将 $x = \left\lfloor \frac{s}{2^i-1} \right\rfloor - 1$ 带入，我们可以发现，一直往右走都达不到 s，于是当确定了 i 后，x 最多一解，然后 check 一下即可。

Luogu5342 [TJOI2019] 甲苯先生的线段树 III

题解

考虑该点对是两条向下的链，设一条向左的长度为 i, 另一条向右的长度为 j，也可以得到一堆式子，解了之后也可以发现 x 最多一解，但是问题就是途中突然转向的方式有很多种，每次的贡献都是 $2^t - 1$ 的形式于是可以枚举贡献次数，就转化成了若干个 2^t 构成一个数的方案数，这个可以直接数位 DP 解决。

Section 3

树形 DP

题目 H　CERC2021L Systematic salesman

题面

给定一棵 N 个叶子的二叉树，你要拜访所有的叶子，任意两个叶子之间有一个 $\mathcal{O}(1)$ 可以计算出来的距离，同时拜访顺序为：
假设当前在二叉树上节点为 x，你要选择先拜访左半边还是右半边，然后先拜访你选择的部分，再拜访另一部分。**重复下去。**
保证每个节点左右儿子子树大小之差不超过 1，求出最小拜访代价（距离之和）。

数据范围

$N \leqslant 1000$，6s。

PEKING UNIVERSITY

CERC2021L Systematic salesman

题解

1. 首先有一个 DP，记 $f(x, y, z)$ 表示在以 x 为根的二叉树中，进入节点为 y，出来节点为 z 的最小代价。状态数 $\mathcal{O}(n^3)$，转移复杂度为 $\mathcal{O}(n^5)$。

CERC2021L Systematic salesman

题解

1. 首先有一个 DP，记 $f(x, y, z)$ 表示在以 x 为根的二叉树中，进入节点为 y，出来节点为 z 的最小代价。状态数 $\mathcal{O}(n^3)$，转移复杂度为 $\mathcal{O}(n^5)$。
2. 观察一下会发现状态数实际上是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，转移复杂度是 $\mathcal{O}(n^4)$。(x 是冗余的)
3. 此时就是转移的复杂度不能接受了。

CERC2021L Systematic salesman

题解

1. 首先有一个 DP，记 $f(x, y, z)$ 表示在以 x 为根的二叉树中，进入节点为 y，出来节点为 z 的最小代价。状态数 $\mathcal{O}(n^3)$，转移复杂度为 $\mathcal{O}(n^5)$。
2. 观察一下会发现状态数实际上是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，转移复杂度是 $\mathcal{O}(n^4)$。(x 是冗余的)
3. 此时就是转移的复杂度不能接受了。
4. 考虑我们们转移在干什么，枚举了一条路径是 $\mathbf{x} \to z \to t \to \mathbf{y}$。有没有办法进行拆解?

CERC2021L Systematic salesman

题解

1. 首先有一个 DP，记 $f(x, y, z)$ 表示在以 x 为根的二叉树中，进入节点为 y，出来节点为 z 的最小代价。状态数 $\mathcal{O}(n^3)$，转移复杂度为 $\mathcal{O}(n^5)$。
2. 观察一下会发现状态数实际上是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，转移复杂度是 $\mathcal{O}(n^4)$。(x 是冗余的)
3. 此时就是转移的复杂度不能接受了。
4. 考虑我们转移在干什么，枚举了一条路径是 $\mathbf{x} \to z \to t \to \mathbf{y}$。有没有办法进行拆解?
5. 再设 $g(x, t)$ 用来枚举 z，这个也是一个 $\mathcal{O}(n^3)$ 转移的 DP，然后 $f(x, y)$ 来枚举 t 就可以使得转移是 $\mathcal{O}(n^3)$。

题目 I　CF718D Andrew and Chemistry

题面

给你一个有 n 个点的树。当每一个点的度不超过 4 时这棵树是合法的。现在让你再添加一个点，在树仍然合法的情况下，一共有多少种树。当两棵树同构时视作同一种。保证输入的树是合法的。

数据范围

$n \leqslant 10^5$。

CF718D Andrew and Chemistry

题解

1. 题目求的就是所有度数 < 4 的节点作为根的树哈希结果总数。**当然可以不限制度数 < 4 的。**

CF718D Andrew and Chemistry

题解

1. 题目求的就是所有度数 < 4 的节点作为根的树哈希结果总数。**当然可以不限制度数 < 4 的。**
2. 介绍一种比较稳定的树 HASH 做法：因为括号序列可以很好地表示一颗树，于是我们可以考虑用**字符串 HASH** 维护整个树的括号序列，同时，为了消除子树之间顺序的影响，我们可以将其所有节点排序按照**该节点为根的子树的 HASH 值**排序，然后就可以非常好维护了。

CF718D Andrew and Chemistry

题解

1. 题目求的就是所有度数 < 4 的节点作为根的树哈希结果总数。**当然可以不限制度数 < 4 的。**
2. 介绍一种比较稳定的树 HASH 做法：因为括号序列可以很好地表示一颗树，于是我们可以考虑用**字符串 HASH** 维护整个树的括号序列，同时，为了消除子树之间顺序的影响，我们可以将其所有节点排序按照**该节点为根的子树的 HASH 值**排序，然后就可以非常好维护了。
3. 处理出以每个点为根的树哈希值可以使用**换根 DP**。有一种比较方便处理的换根 DP 方法。这个题主要就是介绍换根 DP 的，因为我不喜欢某种最大值、次大值、次次大值形态的换根 DP 写法。
4. 记得双哈希。
5. 代码。

题目 J ARC121F Logical Operations on Tree

题面

给定一颗 n 个点的树，要往每个点上写 0 或 1，每条边上写 and 或 or。可以每次选择一条边，把这条边两端的点缩成一个点，并将上面的数改成原来点的 and 或者 or，若最终可以缩成一个 1，则填写方案是合法的。求合法方案数，取模。

$n \leq 10^5$

ARC121F Logical Operations on Tree

题解

1. 先缩 AND 再缩 OR，如果合法一定是存在一个 AND 起来都是 1 的连通块。
2. 简单树形 DP 即可（$(f(i,j,k)$ 表示考虑以 i 为根的子树，i 连通块是否 AND 为 1，是否存在其他连通块为 $1)$。

Section 4

期望 DP

概率与期望 I

概率的定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率。这里 $P(A)$ 是一个集合函数，$P(A)$ 要满足下列条件：

1. $P(A) \geq 0$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. 设 A_1 $A_2 \ldots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$。

期望的定义

$E(X = x_i) = p_i$，有 $E(X) = \sum p_i x_i$。

概率与期望 II

性质

1. $E(aX + bY) = a * E(X) + b * E(Y)$
2. 方差的期望：$D(X) = P(X^2) - P(X)^2$，同时有 $D(aX + b) = a^2 D(X)$。

题目 K Luogu1850 [NOIP2016 提高组] 换教室

题面

牛牛要上 n 个时间段的课，第 i 个时间段在 c_i 号教室，可以申请换到 d_i 号教室，申请成功的概率为 p_i，至多可以申请 m 节课进行交换。第 i 个时间段的课上完后要走到第 $i+1$ 个时间段的教室，给出一张图 v 个教室 e 条路，移动会消耗体力，申请哪几门课程可以使他因在教室间移动耗费的体力值的总和的期望值最小，也就是求出**最小的期望路程和**。

数据范围

保证 $1 \leq n \leq 2000$，$0 \leq m \leq 2000$，$1 \leq v \leq 300$，$0 \leq e \leq 90000$。
保证来拿痛。

Luogu1850 [NOIP2016 提高组] 换教室

题解

1. 先求出任意两点之间的最短路。

Luogu1850 [NOIP2016 提高组] 换教室

题解

1. 先求出任意两点之间的最短路。
2. 考虑记 $f(i, cnt, lst)$ 表示考虑了前 i 个时间段，已经有 cnt 次申请了，第 i 个时间段申请状态为 $lst \in \{0, 1\}$ 的最小期望路程和。
3. 转移的时候枚举这个时间段是否申请，简单计算。

代码

https://gitee.com/yinjinrun/code-public-2/blob/master/Luogu/P1850.cpp

题目 L CF24D Broken robot

题面

给出一个 $n \times m$ 的矩阵区域，一个机器人初始在第 x 行第 y 列，每一步机器人会等概率地选择停在原地，左移一步，右移一步，下移一步，如果机器人在边界则不会往区域外移动，问机器人到达最后一行的期望步数。$(1,1)$ 是木板的左上角，(n,m) 是木板的右下角。

数据范围

$1 \leq n, m \leq 10^3$，$1 \leq x \leq n$，$1 \leq y \leq m$。

CF24D Broken robot

题解

1. 设 $f(x, y)$ 表示从 x, y 出发到达最后一行的期望步数，那么 $f(n, *) = 1$，尝试列出状态转移方程。

CF24D Broken robot

题解

1. 设 $f(x, y)$ 表示从 x, y 出发到达最后一行的期望步数，那么 $f(n, *) = 1$，尝试列出状态转移方程。
2. $$\begin{cases} f_{i,1} = \frac{1}{3} \times (f_{i+1,1} + f_{i,2} + f_{i,1}) + 1 \\ f_{i,j} = \frac{1}{4} \times (f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) + 1 \\ f_{i,m} = \frac{1}{3} \times (f_{i,m} + f_{i,m-1} + f_{i+1,m}) + 1 \end{cases}$$

CF24D Broken robot

题解

1. 设 $f(x,y)$ 表示从 x,y 出发到达最后一行的期望步数，那么 $f(n,*)=1$，尝试列出状态转移方程。
2. $$\begin{cases} f_{i,1} = \frac{1}{3} \times (f_{i+1,1} + f_{i,2} + f_{i,1}) + 1 \\ f_{i,j} = \frac{1}{4} \times (f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) + 1 \\ f_{i,m} = \frac{1}{3} \times (f_{i,m} + f_{i,m-1} + f_{i+1,m}) + 1 \end{cases}$$
3. 是不是很难转移？我们每一行的 DP 值都依赖下一行的以及——还没有求出来的同一行的 DP 值。

CF24D Broken robot

题解

1. 设 $f(x, y)$ 表示从 x, y 出发到达最后一行的期望步数，那么 $f(n, *) = 1$，尝试列出状态转移方程。
2. $$\begin{cases} f_{i,1} = \frac{1}{3} \times (f_{i+1,1} + f_{i,2} + f_{i,1}) + 1 \\ f_{i,j} = \frac{1}{4} \times (f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) + 1 \\ f_{i,m} = \frac{1}{3} \times (f_{i,m} + f_{i,m-1} + f_{i+1,m}) + 1 \end{cases}$$
3. 是不是很难转移？我们每一行的 DP 值都依赖下一行的以及——还没有求出来的同一行的 DP 值。
4. 怎么办？这个就是一个解方程，一行一行的求解，每次高斯消元即可。

CF24D Broken robot

题解

1. 设 $f(x,y)$ 表示从 x,y 出发到达最后一行的期望步数，那么 $f(n,*)=1$，尝试列出状态转移方程。
2. $$\begin{cases} f_{i,1} = \frac{1}{3} \times (f_{i+1,1} + f_{i,2} + f_{i,1}) + 1 \\ f_{i,j} = \frac{1}{4} \times (f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j}) + 1 \\ f_{i,m} = \frac{1}{3} \times (f_{i,m} + f_{i,m-1} + f_{i+1,m}) + 1 \end{cases}$$
3. 是不是很难转移？我们每一行的 DP 值都依赖下一行的以及——还没有求出来的同一行的 DP 值。
4. 怎么办？这个就是一个解方程，一行一行的求解，每次高斯消元即可。
5. 如果在考试的时候你忘记了，可以尝试多次迭代，不保熟。

题目 M　Luogu6689 序列

题面

小 C 钦定了括号序列 S 的长度 N。S 初始时全为（。
他初始设定了一个参数 K，并按照如下流程随机，直到 $K=0$：

1. 在 $[1,N]$ 的范围内**均匀随机**一个整数，把 S 这一位上的括号取反 (左括号变右括号，右括号变左括号)。
2. 如果本次操作使得（的数量减少了，使 K 的值减 1。

小 C 想请你求出，在经过上述操作后，S 中**最长合法括号子序列**（不要求连续）在模 998244353 意义下期望有多长。

数据范围

$1 \le N, K \le 5000$。

Luogu6689 序列

题解

1. 我们发现，所有 ）个数相同的序列概率是一样的，于是可以简单 DP 得出。

Luogu6689 序列

题解

1. 我们发现，所有 ）个数相同的序列概率是一样的，于是可以简单 DP 得出。
2. 然后考虑固定了 ）个数的最长合法括号子序列长度怎么算，考虑有 i 个右括号，把（当做 $+1$，）当做 -1 后最小的前缀和为 j，那么最长合法括号子序列长度为 $2i+2j$。(考虑每个右括号，有 $-j$ 个无法配对)

PEKING UNIVERSITY

Luogu6689 序列

题解

1. 我们发现，所有 ）个数相同的序列概率是一样的，于是可以简单 DP 得出。
2. 然后考虑固定了 ）个数的最长合法括号子序列长度怎么算，考虑有 i 个右括号，把（ 当做 $+1$，）当做 -1 后最小的前缀和为 j，那么最长合法括号子序列长度为 $2i+2j$。(考虑每个右括号，有 $-j$ 个无法配对)
3. 这个方案数就是用类似于卡塔兰数的反射容斥计算即可。

题目 N　ZJOI2015 地震后的幻想乡

题面

给出一张联通图，n 个点，m 条边，每条边的边权为 $[0,1]$ 均匀分布实数，表示其被修复的时间点。
求**使得所有点联通的最早时间**的期望。

数据范围

保证没有自环、重边，$n \le 10$，$m \le n(n-1)/2$，$n, m \ge 1$。

Hint

对于 n 个 $[0,1]$ 之间的随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$，第 k 小的那个的期望值是 $\frac{k}{n+1}$。

ZJOI2015 地震后的幻想乡

题解

1. **结合提示**，考虑暴力怎么写？

ZJOI2015 地震后的幻想乡

题解

1. **结合提示**，考虑暴力怎么写?
2. 枚举 m 条边大小相对情况，然后用 `Kruskal` 求出“最小生成树”的边数为 k，那么当前情况答案就是 $\frac{k}{m+1}$。
3. 如何优化?

ZJOI2015 地震后的幻想乡

题解

1. **结合提示**，考虑暴力怎么写？
2. 枚举 m 条边大小相对情况，然后用 `Kruskal` 求出 “最小生成树” 的边数为 k，那么当前情况答案就是 $\frac{k}{m+1}$。
3. 如何优化？
4. 枚举这个 k，问题变成了**恰好** k 条边使得整个图联通的概率。

北京大學 PEKING UNIVERSITY

ZJOI2015 地震后的幻想乡

题解

1. **结合提示**，考虑暴力怎么写？
2. 枚举 m 条边大小相对情况，然后用 `Kruskal` 求出“最小生成树”的边数为 k，那么当前情况答案就是 $\frac{k}{m+1}$。
3. 如何优化？
4. 枚举这个 k，问题变成了**恰好** k 条边使得整个图联通的概率。
5. 恰好转为至少，就是至少 k 条边使得联通的概率 - 至少 $k-1$ 条边使得联通的概率。

ZJOI2015 地震后的幻想乡

题解

1. **结合提示**，考虑暴力怎么写?
2. 枚举 m 条边大小相对情况，然后用 `Kruskal` 求出“最小生成树”的边数为 k，那么当前情况答案就是 $\frac{k}{m+1}$。
3. 如何优化?
4. 枚举这个 k，问题变成了**恰好** k 条边使得整个图联通的概率。
5. 恰好转为至少，就是至少 k 条边使得联通的概率 - 至少 $k-1$ 条边使得联通的概率。
6. 然后就是设 $f(i,s)$ 表示使得 s 里面的点全部联通且用了 i 条边的方案数。之后就很简单了。

题目 O　Luogu4223 期望逆序对

题面

给你一个长为 n 的排列，有 k 次操作，每次随机选择两个不同的数交换，问期望逆序对数乘 $\binom{n}{2}^k$ 的结果。$\bmod 10^9+7$。

数据范围

$n \leqslant 500000, k \leqslant 10^9$。

Luogu4223 期望逆序对

题解

1. 考虑每一对数的贡献。

Luogu4223 期望逆序对

题解

1. 考虑每一对数的贡献。
2. 对于一个数对 (A, B)，只有三种位置是**重要**的，A, B 以及其他位置。因此情况只有 7 种：
$(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, C)$。

Luogu4223 期望逆序对

题解

1. 考虑每一对数的贡献。
2. 对于一个数对 (A, B)，只有三种位置是**重要**的，A, B 以及其他位置。因此情况只有 7 种：
   $(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, C)$。
3. 可以通过矩阵快速幂求出这些情况的方案数。
4. 剩下的就是对于每个 i，把他当作 B，然后对于前边所有 $j < i$，当作 A，然后贡献就是一些式子，分别讨论并累加。

Section 5

决策单调性优化

决策单调性

1. **决策单调性：**在 DP 中，如果 $i < j$，那么 $pos_i < pos_j$（其中 pos_i 表示 i 对应的决策点）
2. 如何发现决策单调性?
   1. 打表 $\rightarrow$ 发现规律!
   2. 最小化贡献时，贡献函数满足四边形不等式：$\forall a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$，满足 $w(a, c) + w(b, d) \leqslant w(a, d) + w(b, c)$。**（交叉小于包含）**

决策单调性

处理方式

我决策单调性喜欢写分治版 / 记录决策位置，于是二分队列版本大家自行了解。

```
void solve(int l, int r, int xl, int xr) {
// 处理 [l, r] 之间的问题，决策范围为 xl, xr，本次求出 mid 对应的最佳决策
    if(l > r || xl > xr) return;
    int mid = l + r >> 1, pos = xl;
    for(int j = xl; j <= xr; j++)
        if(calc(j, mid) < calc(pos, mid)) pos = j;
    f[mid] = calc(pos, mid);
    solve(l, mid - 1, xl, pos), solve(mid + 1, r, pos, xr);
}
```

题目 P　P3515 [POI2011] Lightning Conductor

题面

给定一个长度为 n 的序列 $\{a_n\}$，对于每个 $i \in [1, n]$，求出一个最小的非负整数 p，使得 $\forall j \in [1, n]$，都有 $a_j \leq a_i + p - \sqrt{|i-j|}$

数据范围

$1 \leq n \leq 5 \times 10^5$，$0 \leq a_i \leq 10^9$。

P3515 [POI2011] Lightning Conductor

题解

模板题。容易发现 DP 满足四边形不等式。

题目 Q　CF1603D Artistic Partition

题面

对于给定的正整数 $l \le r$，定义 $c(l, r)$ 为满足下列条件的正整数对 (i, j) 的数量：

1. $l \le i \le j \le r$;
2. $\gcd(i, j) \ge l$。

给定正整数 $k \le n$。对所有满足 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} = n$ 的整数序列 $(x_1, \cdots, x_{k+1})$，计算 $\sum_{i=1}^{k} c(x_i + 1, x_{i+1})$ 的最小值。你需要回答 T 组询问。

数据范围

$1 \le T \le 3 \times 10^5$，$1 \le k \le n \le 10^5$。

CF1603D Artistic Partition I

题解

1. 考虑答案的下界是什么？当 k 足够大的时候，给出一种简单的方案？

CF1603D Artistic Partition I

题解

1. 考虑答案的下界是什么？当 k 足够大的时候，给出一种简单的方案？
2. 当 $n < 2^k$ 时，令第 i 段长为 2^{i-1} 即可达到下界，因此 k 是 $\mathcal{O}(\log n)$ 级别。

CF1603D Artistic Partition I

题解

1. 考虑答案的下界是什么？当 k 足够大的时候，给出一种简单的方案？
2. 当 $n < 2^k$ 时，令第 i 段长为 2^{i-1} 即可达到下界，因此 k 是 $\mathcal{O}(\log n)$ 级别。
3. 考虑暴力转移，设 $f(k, n)$ 表示 n 分成 k 段的答案，那么有 $f(k, n) = \min_{i=1}^{n} f(k-1, i-1) + c(i, n)$。
4. 在进一步优化前，我们先尝试快速计算 $c(l, r)$。

CF1603D Artistic Partition II

题解

$$
\begin{aligned}
& c(l, r) \\
= & \sum_{i=l}^{r} \sum_{j=i}^{r} [\gcd(i, j) \geq l] \\
= & \sum_{p=l}^{r} \sum_{i=\left\lceil \frac{l}{p} \right\rceil}^{\left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor} \sum_{j=i}^{\left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor} [\gcd(i, j) = 1] \\
= & \sum_{p=l}^{r} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor} \sum_{i=1}^{j} [\gcd(i, j) = 1] \\
= & \sum_{p=l}^{r} \sum_{j=1}^{\left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor} \varphi(j)
\end{aligned}
$$

CF1603D Artistic Partition III

题解

1. 打表可以发现满足四边形不等式，然后分治 $+$ 决策单调性即可。

CF1603D Artistic Partition III

题解

1. 打表可以发现满足四边形不等式，然后分治 + 决策单调性即可。
2. 如果你真的想证明，也不是很难的：

$$A = c(a,c) + c(b,d) = \sum_{p=a}^{c} s\varphi(\lfloor \frac{c}{p} \rfloor) + \sum_{p=b}^{d} s\varphi(\lfloor \frac{d}{p} \rfloor)$$

$$B = c(a,d) + c(b,c) = \sum_{p=b}^{c} s\varphi(\lfloor \frac{c}{p} \rfloor) + \sum_{p=a}^{d} s\varphi(\lfloor \frac{d}{p} \rfloor)$$

$$B - A = -\sum_{p=a}^{b-1} s\varphi(\lfloor \frac{c}{p} \rfloor) + \sum_{p=a}^{b-1} s\varphi(\lfloor \frac{d}{p} \rfloor) \geq 0$$

题目 R　LOJ6039 「雅礼集训 2017 Day5」珠宝 / 「NAIPC2016」Jewel Thief

题面

展览中总共有 N 种珠宝，每种珠宝都只有一个，对于第 i 种珠宝，它的售价为 C_i 万元，对 Miranda 的吸引力为 V_i。
Miranda 总共可以从银行中取出 K 万元，现在她想知道，假如她最终带了 i 万元去展览会，她能买到的珠宝对她的吸引力最大可以是多少？

数据范围

$1 \le N \le 1000000, 1 \le K \le 50000, 1 \le C_i \le 300, 0 \le V_i \le 10^9$。

LOJ6039 「雅礼集训 2017 Day5」珠宝 / 「NAIPC2016」Jewel Thief

题解

1. 注意到 C_i 比较小，因此 C_i 相同的可以当做一类物品批量转移。

LOJ6039 「雅礼集训 2017 Day5」珠宝 / 「NAIPC2016」Jewel Thief

题解

1. 注意到 C_i 比较小，因此 C_i 相同的可以当做一类物品批量转移。
2. 因为贡献是凸的，因此 DP 数组在 $\pmod{C_i}$ 意义下也是凸的，可以直接决策单调性优化 DP。

题目 S　Gym102586B Evacuation

有 $1, 2 \ldots n$ 排成一列，第 i 个位置可以容纳 a_i 个人。给出一个非负整数 m，定义一个位置的代价为初始有 m 个人在这个位置上，可以让人移动到其他位置，所有人都可以被容纳的最小总移动距离。

有 q 次询问，每次给出区间 $[l, r]$，一个人走到区间外视为被容纳，问 $[l, r]$ 所有位置代价的最大值。

$n, q \le 2 \cdot 10^5$

Gym102586B Evacuation

题解

1. 首先，我们取 $mid = \frac{l+r}{2}$，如果 $x \leq mid$，那么 l 才是边界，否则 r 才是边界，从一个点出发，并且只有一个边界的情况可以通过分讨 $+$ 预处理算出。设 $g(i, r)$ 表示现在边界是 $r \geq i$，我们从 i 出发的最小代价。

Gym102586B Evacuation

题解

1. 首先，我们取 $mid = \frac{l+r}{2}$，如果 $x \leq mid$，那么 l 才是边界，否则 r 才是边界，从一个点出发，并且只有一个边界的情况可以通过分讨 $+$ 预处理算出。设 $g(i, r)$ 表示现在边界是 $r \geq i$，我们从 i 出发的最小代价。
2. 现在我们的问题是求一个 $\max_{i=x}^{y} g(i, r)$。

Gym102586B Evacuation

题解

1. 首先，我们取 $mid = \frac{l+r}{2}$，如果 $x \le mid$，那么 l 才是边界，否则 r 才是边界，从一个点出发，并且只有一个边界的情况可以通过分讨 + 预处理算出。设 $g(i, r)$ 表示现在边界是 $r \ge i$，我们从 i 出发的最小代价。
2. 现在我们的问题是求一个 $\max_{i=x}^{y} g(i, r)$。
3. 接着我们发现 $g(x, r) + g(x+1, r+1) \ge g(x+1\ r) + g(x, r+1)$，这个就启示我们可以决策单调性了。

Gym102586B Evacuation

题解

1. 首先，我们取 $mid = \frac{l+r}{2}$，如果 $x \leq mid$，那么 l 才是边界，否则 r 才是边界，从一个点出发，并且只有一个边界的情况可以通过分讨 + 预处理算出。设 $g(i,r)$ 表示现在边界是 $r \geq i$，我们从 i 出发的最小代价。
2. 现在我们的问题是求一个 $\max_{i=x}^{y} g(i,r)$。
3. 接着我们发现 $g(x,r) + g(x+1,r+1) \geq g(x+1\ r) + g(x,r+1)$，这个就启示我们可以决策单调性了。
4. 于是把区间切成 $\log$ 个段，然后线段树分治套个决策单调性即可。

凸优化、WQS 二分

常见问题形式

给定 n 个物品，要求**以某种条件**从中间选 m 个物品，最大化 / 最小化这些物品权值和。而通常没有 m 个的限制问题是简单的，有了限制后复杂度飙升。

条件

令 $f(i)$ 表示选 i 个物品的答案，而 $f(i)$ 是一个凸函数。

WQS 二分

把 $(i, f(i))$ 画在坐标轴上，那么我们要找到 $f(m)$ ，可以用某条斜率为 k 的直线去切这个答案曲线。
这个 k 是可以二分的，而每次求 k 切到的位置就是将每个物品权值减去 k 然后进行 DP 求值。~~写一写模板题可以了解更多细节。~~

题目 T　Luogu2619 [国家集训队] Tree I

题面

给你一个无向带权连通图，每条边是黑色或白色。让你求一棵最小权的恰好有 $need$ 条白色边的生成树。
题目保证有解。

数据范围

对于 100% 的数据，$V \le 5 \times 10^4, E \le 10^5$。
所有数据边权为 $[1, 100]$ 中的正整数。

Luogu2619 [国家集训队] Tree I

题解

容易打表发现是一个凸函数。
WQS 二分即可。

题目 U　Luogu4383 [八省联考 2018] 林克卡特树

题面

现在有一个 N 个点的树，每条边有一个整数边权 v_i，若 $v_i \geq 0$，表示走这条边会获得 v_i 的收益；若 $v_i \geqslant 0$ ，则表示走这条边需要支付 $-v_i$ 的过路费。小 L 需要控制主角 Link 切掉（Cut）树上的恰好 K 条边，然后再连接 K 条边权为 0 的边，得到一棵新的树。接着，他会选择树上的两个点 p, q，并沿着树上连接这两点的简单路径从 p 走到 q，并为经过的每条边支付过路费/ 获取相应收益。海拉鲁大陆之神 TemporaryDO 想考验一下 Link。他告诉 Link，如果 Link 能切掉合适的边、选择合适的路径从而使总收益 - 总过路费最大化的话，就把传说中的大师之剑送给他。小 L 想得到大师之剑，于是他找到了你来帮忙，请你告诉他，Link 能得到的总收益 - 总过路费最大是多少。

数据范围

$n, K \leq 3 \times 10^5$，$|v_i| \leq 10^6$。

题解

1. Cut 然后 Link K 次等价于从树上面恰好选出 $K+1$ 条不相交的路径然后使其权值之和最大。

题解

1. Cut 然后 Link K 次等价于从树上面恰好选出 $K+1$ 条不相交的路径然后使其权值之和最大。
2. 可以发现答案关于 K 是凸的，然后可以 WQS 二分；
3. 设 $f(x, 0/1/2)$（一个 `pair`）表示 x 的度数为 $0/1/2$ 的情况下（最大的权值，最大权值下路径数最多为多少），然后就可以了。

题目 V　4.5 校内考试你的世界（world） / PA2013 Raper

题面

给定两个长为 n 的数组 $\{a_i\},\{b_i\}$，求一组 $i_1,i_2,\dots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\dots,j_k$ 满足：

$$\begin{cases} 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n \\ i_1 \le j_1, i_2 \le j_2, \dots, i_k \le j_k \end{cases}$$

最大化 $\sum_{x=1}^{k} a_{i_x} + b_{j_x}$。

数据范围

$n \le 10^5, k \le 10^5, 1 \le a_i, b_i \le 10^9$。

PEKING UNIVERSITY

4.5 校内考试你的世界（world）/ PA2013 Raper

题解

1. 显然，答案是凸的（当然也可以根据费用流做法说明)。
2. 如果没有 k 的限制，那么

4.5 校内考试你的世界（world） / PA2013 Raper

题解

1. 显然，答案是凸的（当然也可以根据费用流做法说明）。
2. 如果没有 k 的限制，那么完全可以**反悔贪心**，按照 $i = 1 \to n$ 的顺序考虑每个点，每次可以加一个点 a_i，然后考虑用这个 b_i 替换掉前面的 b_i 还是单独和一个 a_i 匹配。
3. 但是有 k 的限制，于是 wqs 二分一下可以消除这个限制。

完结撒花

谢谢大家！