省队集训好题分享

谭熙

2025 年 4 月 14 日

目录

loj6703

定义一个序列 a 的权值为 $\prod_{i=1}^{|a|}(a_i+i)$
给你一个长度为 n 的序列 v，求其所有非空子序列权值之和。
答案对 998244353 取模。
$1 \le n \le 10^5$

n^2

先考虑一个比较暴力的做法，设 $f_{i,j}$ 表示考虑到 v_i，当前子序列长度为 j 的答案之和。
转移是显然的 $f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i-1,j-1}(v_i + j)$
答案即是 $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{n,i}$。

改变 dp 状态

这个转移看上去不是很美观，我们翻转第二维。
变成 $f_{i,j} = f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j}(v_i + i - j)$。
设 $b_i = v_i + i$，转移式变成 $f_{i,j} = f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j}(b_i - j)$。

组合意义

发现这个式子和第二类斯特林数很像，思考其组合意义。
即 n 个带编号的球，可以放进盒子，也可以不放进盒子，如果不放进盒子，一个方案的权值为 $(-1)^{|S|-k}\prod\limits_{u\notin S} b_u$，其中 S 为放进盒子的小球集合，k 为盒子数量。
考虑枚举 $|S|$，求出 $\sum\limits_{m=0}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\left\{ {m \atop k} \right\})(\sum\limits_{|S|=m}\prod\limits_{u\notin S} b_u)$。
$\sum\limits_{|S|=m}\prod\limits_{u\notin S} b_u = [x^{n-m}]\prod(1+b_i x)$，考虑怎么求 $\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\left\{ {m \atop k} \right\}$。

组合意义

$\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\left\{{m \atop k}\right\} = (-1)^m\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k\left\{{m \atop k}\right\}$。
先忽略前面的 $(-1)^m$，最后再乘回来就行。
$\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k\left\{{m \atop k}\right\}$ 即把 m 个带编号的球放进若干个盒子里，一个方案的权值为所有盒子权值之积，每个盒子的权值都是 -1。
由于把球放进若干个盒子是集合划分问题，所以考虑 EGF，一个盒子的 EGF 为 $(-1)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$，即 $1-e^x$。
所以若干个盒子的 EGF 就是 $exp(1-e^x)$，写一个多项式 exp 即可。
总复杂度 $n\log^2 n$。