显然题目和 r 次剩余有关。先梳理一下 r 次剩余：

- $r=1$，对于任意 $0 \le a < p$，$x^r=a$ 都仅有一个解。
- $r=2$，此时对于 $p>2$ 仅有 $(p+1)/2$ 个 a 使得 $x^r=a$ 有解，且除了 $a=0$ 外都有两个解。
- $r=3$，此时对于 $p>3$ 要分类讨论。若 $3 \mid p-1$，则仅有 $(p+2)/3$ 个 a 使得 $x^r=a$ 有解，且除了 $a=0$ 外都有三个解；否则对于每个 a 都有唯一解。

回到本题，考察哪些 b^i 是非零 r 次剩余。注意到 b^i 是 r 次剩余等价于 $b^{i \bmod r}$ 是 r 次剩余，于是分类讨论可得

$$\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{b=0}^{p-1}\left[a^r b^i \equiv 1 \pmod p\right] = \begin{cases} p-1 & r=1 \\ 1 & r=2, p=2 \\ p-1 & r=2, p>2, 2 \nmid i \\ 2p-2 & r=2, p>2, 2 \mid i \\ p-1 & r=3, p=2,3,3m+2 \\ p-1 & r=3, p=3m+1, 3 \nmid i \\ 3p-3 & r=3, p=3m+1, 3 \mid i \end{cases}$$

最后的求和是容易的，因为 $\sum_i (ti)^k = t^k \sum i^k$。