Graph

Werner_Yin

Changjun High School → Peking University

yinjinrun2021@outlook.com

2024.1.29

Preface

希望大家听得开心。

Section 1

并查集

几个小常识

1. 当并查集按秩合并时，复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。

几个小常识

1. 当并查集按秩合并时，复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。
2. 当并查集**同时**按秩并且路径压缩的时候，复杂度为 $\mathcal{O}(m\alpha(n))$。

北京大学 PEKING UNIVERSITY

几个小常识

1. 当并查集按秩合并时，复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。
2. 当并查集**同时**按秩并且路径压缩的时候，复杂度为 $\mathcal{O}(m\alpha(n))$。
3. 用栈并且按秩合并可以实现可撤销并查集，但是要注意使用按秩合并，且不能路径压缩。

题目 A　JOISC 2014 交朋友

这个世界有 $N \leq 10^5$ 个国家, 有 M 个连接两个国家的有向边, 边 (a, b) 代表现在国家 a 向国家 b 派遣了大使。

作为两国友好关系的开端，两国之间需要进行「友好条约缔结会议」会议。为了让 p 和 q 进行会议, 必须存在一个 x 满足有边 (x, p) 和边 (x, q), 而且在会议后添加两条边 (p, q) 和 (q, p) (存在则不添加)。

请你求出**反复选择**两个国家, 促使它们其进行会议后, 图上最多会有多少条边。

定义 to_x 代表 x 出边的集合。

显然，对于每个 x，to_x 中的城市两两是友好国家，就可以算是**友好城市群**了。

然后我们发现，如果 (x, y) 是友好国家，那么 $\forall z \in to_y, (x, z)$ 也是友好国家，因此最后再次用并查集合并维护友好城市群就行了。

`https://loj.ac/s/1245763`

Section 2

DFS 生成树

概况

DFS 生成树**一个重要的性质**：非树边只有返祖边，没有横叉边。

有的时候，DFS 生成树在构造方面比较好用。

题目 B Classical Maximization Problem

You are given $2n$ distinct points on a plane. Point i has integer coordinates (x_i, y_i).

Points i and j are a friendly pair if either $x_i = x_j$ or $y_i = y_j$.

Form n pairs of points. Every point must belong to exactly one pair. The number of friendly pairs among your n pairs must be maximized.

$n \leq 10^5, -10^9 \leqslant x_i, y_i \leqslant 10^9$, multiple test cases.

Classical Maximization Problem

1. 考虑答案的上界。

Classical Maximization Problem

1. 考虑答案的上界。
2. 尝试使用经典建图方式：对于一个 (x_i, y_i) 在 x_i 对应的点和 y_i 对应的点之间连一条边。
3. 对于每个连通块单独考虑，答案上界就是 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。

Classical Maximization Problem

1. 考虑答案的上界。
2. 尝试使用经典建图方式：对于一个 (x_i, y_i) 在 x_i 对应的点和 y_i 对应的点之间连一条边。
3. 对于每个连通块单独考虑，答案上界就是 $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$。
4. 使用 DFS 生成树进行构造 & 证明。

题目 C　JOISC 2014 电压

JOI 公司的某个实验室中有着复杂的电路。电路由 $N \le 10^5$ 个节点和 $M \le 2 \times 10^5$ 根细长的电阻组成。节点编号为 $1 \sim N$ 。

每个节点可设定为两种电平之一：高电平或者低电平。每个电阻连接两个节点，只有一端是高电平，另一端是低电平的电阻才会有电流流过。两端都是高电平或者低电平的电阻不会有电流流过。

试求：有多少个电阻，可以通过调节各节点的电压，使得「没有电流流经该电阻，且其他 $M-1$ 根电阻中都有电流流过」。

原问题等价于问有多少边满足删了该边使得整个图为二分图且删边可以使得图不连通或者不删会成为非二分图。

原问题等价于问有多少边满足删了该边使得整个图为二分图且删边可以使得图不连通或者不删会成为非二分图。

首先建出 dfs 生成树，然后通过差分可以求出每条边有多少个奇环和偶环经过，于是有两种情况：

1. 删掉非 dfs 生成树边，只有当奇环个数为 1 的时候，可以删去该边
2. 删掉 dfs 生成树边，当所有奇环经过该边并且没有偶环经过该边的时候可行。

简单讨论即可。

`https://loj.ac/s/1250377`

Section 3

最小生成树

Boruvka 算法

讲一个稍微冷门的最小生成树算法，在某些领域有奇特效果。

Boruvka 算法

每次每个联通块找到最小的连向其他联通块的边，然后合并。
这样每次会使点集缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，会重复 $\mathcal{O}(\log n)$ 次，复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$。

题目 D　CF1550F Jumping Around

数轴上顺次有 n 个点 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。

有一只小青蛙，初始时在 a_s 处。小青蛙有两个参数：步长 d 和灵活程度 k。其中，步长 d 是确定的，而灵活程度 k 是可以调整的。

小青蛙可以从某个点跳到另一个点。但这是有要求的：小青蛙能从 a_i 跳到 a_j，当且仅当 $d - k \leq |a_i - a_j| \leq d + k$。

给定 $a_1, \ldots, a_n$ 和 d。你需要回答 q 次询问，每次询问给定一个灵活程度 k 和一个下标 i，你需要回答：此时的小青蛙能否跳到 a_i?

保证 $1 \leq n, q \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq s, i \leq n$，$1 \leq a_i, d, k \leq 10^6$，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。

考虑 Boruvka 算法，我们把两个联通块联通所需要的最小灵活度称为边权，每次对于每个联通块找到最小边，然后构建最小生成树。

考虑 Boruvka 算法，我们把两个联通块联通所需要的最小灵活度称为边权，每次对于每个联通块找到最小边，然后构建最小生成树。

最后在最小生成树上 DFS 一遍，就可以找到从根节点到达一个点所需要的最小灵活度。

https://codeforces.com/contest/1550/submission/122686170

Section 4

最短路

最短路

想必大家都会，直接上题目了。

PEKING UNIVERSITY

题目 E　JOI 2021 Final 机器人

$N \le 2 \times 10^5$ 个路口, M 条路 (双向), 第 $i(1 \le i \le M)$ 条路连接路口 A_i 和 B_i，无重边，路 i 的颜色为 $C_i(1 \sim M)$，可能有路颜色相同。

有一款机器人，告诉这个机器人一种颜色, 机器人就会找到这种颜色的路（这条路的一端是机器人所在的路口），经过这条路到达相邻的路口。如果有多于一条满足情况, 机器人会停下。

目前机器人在路口 1。请通过告诉机器人颜色, 使其移动到路口 N。可以预先改变某些道路的颜色，将路 i 改成任意一种 1 到 M 闭区间中的颜色需要花费 P_i 日元。

给定路口和道路的信息, 计算最小总花费, 无解输出 -1。

建立虚点方便转移

考虑最短路，(x, y) 边的颜色唯一，那么边权为 0，否则边权为 P。

当然还有一种情况，改掉其他同样颜色的边，边权也可以为 $tot_{C_i} - P$。

建立虚点方便转移

考虑最短路，(x, y) 边的颜色唯一，那么边权为 0，否则边权为 P。

当然还有一种情况，改掉其他同样颜色的边，边权也可以为 $tot_{C_i} - P$。

你以为就完了，其实还有。

我们发现连着走两条颜色相同的边，是只要改一条边的，也就是如果先改一条边的颜色，然后走一步把所有其他的边颜色全部改掉，这两步，第一步是白嫖不要钱的。

这个可以建立一个虚点，进入这个点的一步边权为 0，代表白嫖，出来的这一步要付正常价格的钱。

https://loj.ac/s/1319330

题目 F　CF1209F Koala and Notebook

定义一条路径的权值为路径上所有边的编号直接相连所得到的十进制数字的大小。

求 1 到每个点的最短路 $\bmod 10^9+7$。

$n, m \leq 100000$

拆点 + 非显式建边

拆点 + 非显式建边

首先，把将一条边拆成位数个点 + 边，这样每条边上就只有 $0 \sim 9$ 的数了。

然后 dijkstra，只要保证距离位数相同点的距离顺序不变就行了，换一下枚举顺序就行了。

`https://codeforces.com/contest/1209/submission/121089740`

Section 5

Tarjan Family

Subsection 1

Tarjan

题目 G　Luogu2272 [ZJOI2007] 最大半连通子图

题面

一个有向图 $G=(V,E)$ 称为半连通的 (Semi-Connected)，如果满足：$\forall u,v\in V$，满足 $u\to v$ 或 $v\to u$，即对于图中任意两点 u,v，存在一条 u 到 v 的有向路径或者从 v 到 u 的有向路径。
若 G' 是 G 的导出子图，且 G' 半连通，则称 G' 为 G 的半连通子图。
若 G' 是 G 所有半连通子图中包含节点数最多的，则称 G' 是 G 的最大半连通子图。
给定一个有向图 G，请求出 G 的最大半连通子图拥有的节点数 K，以及不同的最大半连通子图的数目 C。由于 C 可能比较大，仅要求输出 C 对 X 的余数。

数据范围

对于 100% 的数据，$N\le 10^5$，$M\le 10^6$，$X\le 10^8$。

Luogu2272 [ZJOI2007] 最大半连通子图

模板题。缩点后就是求 DAG 上最长链以及方案。DP 解决。

Subsection 2

割点与桥

总结

稍微改一改就行了。

`tarjin` 在无向图和有向图不同应用中的差异：

当用于无向图的割点时： `dfn[x] <= low[y]` 不需要判断 `vis[y]` （无向图无返祖边）,和是否 `(x -> y) == (y -> x)` ,但是要注意如果 `x` 是钦定的根节点，那么至少要存在两个 `y` 才可以判定。

当用于无向图的割边时： `dfn[x] < low[y]` (因为有可能有重边),并且要判断 `(x -> y) != (y -> x)` (处理重边，如果重边存在，那么该边一定不是割边）。

当用于有向图的缩点时： `dfn[x] == low[x]` ，注意要判断 `!dfn[y]` 才可以 `dfs(y)` ， `vis[y]` 才可以 `low[x] = min(low[x],dfn[y])` 。

图: 之前自己在 Luogu 写的笔记，懒得转码了，忽略 typo

具体实现可以过一过模板题目。

对于点双联通的问题更多则涉及圆方树，后面讲。

Subsection 3

2-SAT

概述

建立逻辑推理关系，就是一个有向图，然后缩点。

题目 H　Luogu4782 【模板】2-SAT 问题

题面

有 n 个布尔变量 $x_1 \sim x_n$，另有 m 个需要满足的条件，每个条件的形式都是「x_i 为 `true` / `false` 或 x_j 为 `true` / `false`」。比如「x_1 为真或 x_3 为假」、「x_7 为假或 x_2 为假」。
2-SAT 问题的目标是给每个变量赋值使得所有条件得到满足。

数据范围

$n, m \leq 10^6$。

PEKING UNIVERSITY

Luogu4782 【模板】2-SAT 问题

题解

注意逆否命题的运用。
$A \rightarrow B \Leftrightarrow\ !B \rightarrow\ !A$。
这样建边，然后缩点。
注意 TARJAN 实际上的 SCC 序号是一个倒着的拓扑序，可以直接根据每个点所属编号进行解的确定。

题目 I 2023 ICPC 网络赛 Round2 C Covering

题面

给定一个长度为 n 的序列，需要选择若干个下标：
$1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n$，满足：

1. 原序列中任意两个相邻下标必须选一个
2. 并且对于任意 $i < j$，$(a_i, a_{i+1}) \neq (a_j, a_{j+1})$

数据范围

$n \leqslant 10^6, a_i \leqslant 10^9$。

2023 ICPC 网络赛 Round2 C Covering

题解

对于限制1， $\neg i$ 向 $i-1, i+1$ 连边。

对于限制2，实际上把所有相同的 (a_i, a_{i+1}) 分成了若干个集合，每个集合内，如果选了 i ，则集合内其他所有点都不能选。暴力建边 n^2 ，前缀和优化下即可。

特殊的， 1 一定要选， n 一定不能选，只需要将 $\neg 1$ 连向 1 ， n 连向 $\neg n$ 。

Subsection 4

圆方树

利用 Tarjan 将无向图重构成树的一种方式。

1. 点双连通：任意两不同点之间都有至少两条点不重复的路径。
2. 圆点：原图中每个点。
3. 方点：代表每个点双连通分量，连接其包含的每个圆点。

可以看出，每个整个树是圆点和方点交错连接的。

而原图中任意两个点之间的路径在圆方树上就有美妙的性质。

题目 J CF487E Tourists

题面

Cyberland 有 n 座城市，m 条双向道路连接这些城市。
在每一个城市，都有纪念品售卖，第 i 个城市售价为 w_i。
每一个游客的游览路径都有固定起始城市和终止城市，且不会经过重复的城市，求出每一个游客在所有合法的路径中能购买的最低售价。
两种操作：询问和修改 w_i。

数据范围

$1 \le n, m, q \le 10^5$。

CF487E Tourists

模板题。

1. 建立圆方树，方点上的权值为该点双的最小售价。

CF487E Tourists

模板题。

1. 建立圆方树，方点上的权值为该点双的最小售价。
2. 然后一次询问就是两点的路径上最小值。树剖可以解决。当然在修改的时候有点小问题，会被菊花图形状的圆方树卡掉。

CF487E Tourists

模板题。

1. 建立圆方树，方点上的权值为该点双的最小售价。
2. 然后一次询问就是两点的路径上最小值。树剖可以解决。当然在修改的时候有点小问题，会被菊花图形状的圆方树卡掉。
3. 每次更新一个点只更新父亲节点，查询的时候处理一下就对了。

题目 K　Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏

题面

战略游戏的地图由 n 个城市以及 m 条连接这些城市的双向道路构成，保证联通。
现在小 C 已经占领了其中至少两个城市，小 Q 可以摧毁一个小 C 没占领的城市。只要在摧毁这个城市之后能够找到某两个小 C 占领的城市 u 和 v，使得从 u 出发沿着道路无论如何都不能走到 v，小 Q 就赢。
q 局，数出有多少个城市摧毁之后能够让小 Q 赢下这一局游戏。

数据范围

$1 \leq T \leq 10$，$2 \leq n \leq 10^5$ 且 $n-1 \leq m \leq 2 \times 10^5$，$1 \leq q \leq 10^5$，$\sum |S| \leq 2 \times 10^5$。

PEKING UNIVERSITY

Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏

两种做法。

Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏 I

题解 I

根据无向图的套路，首先扣出 DFS 生成树。然后依次考虑每个点，维护该节点能到达的最浅的祖先节点深度 $mndep_x$，和整个以该节点为根的子树能到达的最浅的祖先节点深度 mna_x。

对于每次询问，可以建立虚树，显然，只有在虚树上的点或者在虚树边上的点才有可能造成贡献。

Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏 I

题解 I

根据无向图的套路，首先扣出 DFS 生成树。然后依次考虑每个点，维护该节点能到达的最浅的祖先节点深度 $mndep_x$，和整个以该节点为根的子树能到达的最浅的祖先节点深度 mna_x。

对于每次询问，可以建立虚树，显然，只有在虚树上的点或者在虚树边上的点才有可能造成贡献。

对于一个点 x，如果 $mna_x \geq dep_{fa_x}$，那么我们称这个点被 fa_x 困住了，于是答案就是：

1. 所有在虚树**边**上（不严格）点中被困住的点。
2. 虚树节点中并且不属于 $|S|$ 的点且可以困住一个儿子的点（该儿子必须是一个 $|S|$ 中的点的祖先）。

第一个可以直接前缀和，第二个在扫的时候处理一下即可。

Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏 II

题解 II

1. 建立圆方树。

Luogu4606 [SDOI2018] 战略游戏 II

题解 II

1. 建立圆方树。
2. 答案就是点集形成的虚树中圆点的数量。

仙人掌上的圆方树

仙人掌

任意一条边至多只出现在一条简单回路的无向连通图称为仙人掌。

圆方树在仙人掌上的应用

基本上就是一个找环并处理的工具，将问题分为树形和环状问题。

题目 L 仙人掌上最短路：Luogu5236 【模板】静态仙人掌

题面

给你一个有 n 个点和 m 条边的仙人掌图，和 q 组询问每次询问两个点 u, v，求两点之间的最短路。

数据范围

$1 \le n, q \le 10000$，$1 \le m \le 20000$，$1 \le w \le 10^5$，时限为 300ms。

仙人掌上最短路：Luogu5236 【模板】静态仙人掌

题解

1. 建立圆方树。注意在仙人掌上，每个方点就是代表一个环。

仙人掌上最短路：Luogu5236 【模板】静态仙人掌

题解

1. 建立圆方树。注意在仙人掌上，每个方点就是代表一个环。
2. 因此从 $x \to t \to y$（t 表示方点）可以通过 x, y 在环上的位置确定长度。

仙人掌上最短路：Luogu5236 【模板】静态仙人掌

题解

1. 建立圆方树。注意在仙人掌上，每个方点就是代表一个环。
2. 因此从 $x \to t \to y$（t 表示方点）可以通过 x, y 在环上的位置确定长度。
3. 将每个圆点点权设为从该点到方点父亲的距离。方点点权设为 0。
4. 询问就是路径求和，特殊处理 LCA 的情况即可。

PEKING UNIVERSITY

题目 M 仙人掌上直径：Luogu4244 [SHOI2008] 仙人掌图 II

题面

我们假定仙人图的每条边的权值都是 1，你的任务是求出给定的仙人图的直径。

数据范围

$n \leqslant 50000$，$m \leqslant 10000$。

仙人掌上直径：Luogu4244 [SHOI2008] 仙人掌图 II

题解

1. 考虑在树上求直径的方法：求出每个点为根的最长路和次长路。

仙人掌上直径：Luogu4244 [SHOI2008] 仙人掌图 II

题解

1. 考虑在树上求直径的方法：求出每个点为根的最长路和次长路。
2. 建立圆方树后，对于圆点的处理方法是一样的。

北京大學 PEKING UNIVERSITY

仙人掌上直径：Luogu4244 [SHOI2008] 仙人掌图 II

题解

1. 考虑在树上求直径的方法：求出每个点为根的最长路和次长路。
2. 建立圆方树后，对于圆点的处理方法是一样的。
3. 考虑环的情况，单独 DP 即可。

北京大學 PEKING UNIVERSITY

Section 6

Kruskal 重构树

题目 N　热身题:JOISC 2014 水壶

一个 H 行，W 列的地图，每个区域都是建筑物、原野、墙壁之一。

P 个区域是建筑物，坐标为 $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_P, B_P)$。

在原野上每走过一个区域都需要 1 升水。大小为 x 的水壶最多可以装 x 升水，在建筑物里可以将水壶装满。

现在给出地图和 Q 个询问，第 i 个询问包含两个整数 S_i, T_i，对于每个询问，请输出：要从建筑物 S_i 移动到 T_i，至少需要多大的水壶?

$H, W \leq 2000, P \leq 2 \times 10^5$

见板书。

代码

题目 O　ARC098D Donation

给出一个 $n \leq 10^5$ 个点 m 条边的无向连通图，每个点的标号为 1 到 n ，且有两个权值 A_i, B_i。第 i 条边连接了点 u_i 和 v_i 。

最开始时你拥有一定数量的钱，并且可以选择这张图上的任意一个点作为起始点，之后你从这个点开始沿着给定的边遍历这张图。每当你到达一个点 v 时，你必须拥有至少 A_v 元。而当你到达了这个点后，你可以选择向它捐 B_v 元（当然也可以选择不捐献），当然，你需要保证在每次捐献之后自己剩余的钱 ≥ 0 。

你需要对所有的 n 个点都捐献一次，求你一开始至少需要携带多少钱。

首先每个节点只会到一次，然后考虑时间倒流，就是到达每个节点必须要有 $c_i = a_i - b_i$ 元，之后会获得 b_i 元，对 c_i 建 `Kruscal` 生成树，就可以用树形 DP 求解。

Section 7

虚树

虚树

给定若干关键点，我们把这些点的最小联通子树只保留根 /这些点/在最小联通子树上有两个以上的子树的点的树成为虚树。

PEKING UNIVERSITY

构建方法 I

1. 首先，将所有点按照 DFS 序升序排列。
2. 维护一个单调栈，初始的时候只有一个元素，为 1。注意，这个单调栈维护的是一个深度递增的**正在延伸的树上的一条链。**
3. 接下来，考虑依次加入每个点，增量地维护目前的虚树，设当期加入的点是 x，和目前的链的末端是 y, 链的上一个末端是 z (也就是目前的虚树上有边 (z, y))，$t = \mathrm{LCA}(x, y)$)。

构建方法 II

4. 重复以下判断，直到单调栈只剩下 1 号点或者主动终止循环。
   1. $t=y$，代表目前要有边 (x,y)，直接终止循环。
   2. $dep_z \le dep_t < dep_y$，那么表示要在 (z,y) 边上开始分岔，那么连边 (t,y)，然后把单调栈上的 y 换成 t，终止循环。
   3. $dep_t < dep_z$，分岔的位置还要更上一些，那么连边 (z,y)，弹出 y，继续判断。
5. 将 x 加入单调栈中。
6. 最后将目前的链统一连边就可以了。

代码

```
void virtual_build(const vec &pot) {
    stk[top = 1] = 1;
    for(auto x : pot) {
        if(x == 1) continue;
        int lca = LCA(stk[top], x);
        while(top > 1 && L :: dep[lca] <= L :: dep[stk[top - 1]]) link(
            stk[top - 1], stk[top]), top--;
        if(top && lca != stk[top]) link(lca, stk[top]), stk[top] = lca;
        stk[++top] = x;
    }
    for(int i = 2; i <= top; i++) link(stk[i - 1], stk[i]);
}
```

题目 P　Luogu2495 [SDOI2011] 消耗战

题面

给定一棵 n 个点的树，每条边有一个切断 m 次询问，每次一堆点，问切断边的最小代价（使得 1 号点和这些点都不连通）

数据范围

对于 100% 的数据，$2 \le n \le 2.5 \times 10^5, 1 \le m \le 5 \times 10^5, \sum k_i \le 5 \times 10^5, 1 \le k_i < n, h_i \ne 1, 1 \le u, v \le n, 1 \le w \le 10^5$。

PEKING UNIVERSITY

Luogu2495 [SDOI2011] 消耗战

模板题。

既然你已经学会构建虚树了……

既然你已经学会构建虚树了……

那么就可以用虚树**写暴力**了！

虚树一些性质也值得我们注意，下面简单介绍两种。

题目 Q　SDOI2015 寻宝游戏

$n \leq 10^5$ 个点的树，每次更改一个点的选择状态，求所有选择的点构成的虚树边权和。

虚树边权和

对于点集 $S = \{u_0, u_1, \ldots u_{m-1}\}$ 的虚树边权和为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} dis\left(u_i, u_{(i+1) \bmod m}\right)$$

之后就是树剖 + set 维护点集了。

代码

bonus

感兴趣的同学可以做 ZJOI 2019 语言。

题目 R　BZOJ4771 七彩树

给出一个 $n \le 2 \times 10^5$ 个点的树，每个点的颜色为 c_x, 多组询问，每次询问给出 u, d，求 u 的子树内深度不超过 $dep_u + d$ 的点集中的颜色种类数，强制在线。

PEKING UNIVERSITY

BZOJ4771 七彩树

1. 虚树式差分

BZOJ4771 七彩树

1. 虚树式差分
2. 可持久化线段树

Section 8

三元环计数

三元环计数

1. 求出每个点的度数。

三元环计数

1. 求出每个点的度数。
2. 给边定向，对于一条边，度数大的向度数小的定向，度数一样则编号大的向编号小的定向，形成一个 DAG。

三元环计数

1. 求出每个点的度数。
2. 给边定向，对于一条边，度数大的向度数小的定向，度数一样则编号大的向编号小的定向，形成一个 DAG。
3. 计数时枚举 x ，对出边到达的点打标记，对于所有出边到达的点再枚举出边到达的点 z ，如果 z 上有标记，则 x, y, z 为一个三元环。

复杂度

无向图三元环计数复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。

复杂度

无向图三元环计数复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。
对于 $deg_x > \sqrt{m}$ 的点，最多 $\sqrt{m}$ 个，复杂度 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。

复杂度

无向图三元环计数复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。
对于 $deg_x > \sqrt{m}$ 的点，最多 $\sqrt{m}$ 个，复杂度 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。
对于 $deg_x \le \sqrt{m}$ 的点，枚举 $y \to z$ 的复杂度最多为 $\mathcal{O}(\sqrt{m})$，而 x 的出度和最多为 m，那么复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$。

北京大学 PEKING UNIVERSITY

另一种不错的证明

$$\sum \min\left(deg_i^2, m\right) \le \sum \sqrt{deg_i^2 m} \le \sum deg_i\sqrt{m} = m\sqrt{m}$$

题目 S CF985G Team Players

有 n 个点，编号依次为 $0, 1....n-1$。

如果一个三元组 (i, j, k) $(i < j < k)$ **两两没有边**相连，那么它的贡献为 $A*i + B*j + C*k$。

求出所有三元组的贡献和，答案对 2^{64} 取模。

将所有三元组按照两两之间的边的个数之和的答案分成几类：A_0, A_1, A_2, A_3。

考虑容斥，我们计算以下答案：

- 所有点对的结果 $S_0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$，简单 DP。
- 钦定有一条边，也就是枚举一条边，然后任取第 3 个点，计算答案 $S_1 = A_1 + 2A_2 + 3A_3$。
- 钦定一条边，然后计算所有与这两个点有边的点，动态开点线段树计算答案 $S_2 = 2A_2 + 6A_3$。
- 取三元环，$S_3 = A_3$。

之后解方程就行了。

代码

完结撒花

谢谢大家！