好题分享

lzc

P10717 简单的树上问题

有一个 n 个节点的树，有 k 个属性，其中第 i 个节点初始时获得 j 属性的概率为 $p_{i,j}$。两个获得属性 k 的节点会把其最短路径上所有点带上 k 属性。
假设第 i 个点获得的属性集合为 S_i，求 $\prod a_{i,S_i}$ 的期望，对 998244353 取模。
$1 \le n \le 100$，$1 \le k \le 8$。

P10717 简单的树上问题

看到 $k \le 8$，不难想到状压。
对于某一个属性，在一个子树内共有三种状态：

- 在该子树内没有一个点有这个属性。
- 在该子树内有一个点有这个属性，子树的根节点有这个属性。
- 在该子树内有一个点有这个属性，但子树的根节点没有这个属性。（即，所有有该属性的点一定在这个子树内部）

不妨在进行树形 dp，每个属性是这三种状态之一，不妨分别记录为 $0/1/2$。

P10717 简单的树上问题

考虑转移。对于子树内的每个节点，如果有多个 2 或同时有 2 或 1，显然不合法。其他情况均合法。

将某个位置某个属性 $1 \to 2$ 的操作称之为封口，即这个子树外的点都被钦定不含该属性。

注意到，当我们想要封口时，要么有至少两个 1，要么这个位置必须最初就有这个属性。

也就是说，我们要记录子树 1 数量有 $0, 1, \geq 2$ 的情况。（当然，1 数量为 0 的情况就是 0 状态或 2 状态）

转移时每个维度新加一个 3 状态表示选了 ≥ 2 个 1 的情况。通过一定枚举即可发现每个维度各有 8 种转移，总复杂度 $O(n8^k)$。

P10717 简单的树上问题

将转移写成矩阵的形式：（(i,j) 表示 i 与 j 转移到哪个状态）

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & / \\ 2 & / & / \\ 3 & 3 & / \end{bmatrix}$$

可以用以下 6 个矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即可 $O(6^k)$ 转移子树。

P10717 简单的树上问题

另一种优化的想法如下。不妨钦定一些属性，子树中这些属性只能选 $0/1$。
此时，对于其他的属性，我们分别设 $0,1,2$ 三种状态表示子树对应属性都是 0，子树对应属性有且仅有一个 1，子树对应属性有且仅有一个 2。
此时，有 5 种转移：$0,0 \to 0$，$0,1 \to 1$，$0,2 \to 2$，$1,0 \to 1$，$2,0 \to 2$。
对于钦定了的属性，不妨设为 3 状态，每个子树内通过 FWT 计算出属性选 0 或 1 的总和计入 3 状态。FWT 复杂度为 $O(4^k \times k)$。3 状态可以直接转移（可以理解为 $3,3 \to 3$），转移复杂度为 $O(6^k)$。
这样的好处是，上文中 3 状态在每一位其实是 3 状态减去 0 和 1 状态，可以使用 FWT $O(4^k \times k)$ 得到转移后的情况。

P10717 简单的树上问题

进行完上述转移后，我们还需要带上 a_{i,S_i}，$p_{i,j}$ 的贡献并维护新加入的属性与“封口”的属性。
对于每个属性，由于我们需要先加入属性，乘上 a_{i,S_i} 的贡献，再封口，不妨先钦定是否初始这个点就有这个属性。用 3 状态表示这里“可以封口”的方案。同样可以 FWT $O(4^k \times k)$ 转移。
$0/2$ 表示这个点没有对应属性，$1/3$ 表示这个点有对应属性。于是就可以乘上 a_{i,S_i} 的贡献。
再次之后，我们需要把刚在“可以封口”的方案确定是否封口，即转移到 0 或 1，也可以 FWT $O(4^k)$ 转移。
总复杂度 $O(n(6^k + 4^k \times k))$。