好题分享

MarSer020

Changjun High School

2025.4.28

P6646

有 n 个商品，m 个种类，每个商品有种类 a_i，价格 c_i。
对于第 j 个种类，最少购买 l_j 个，最多购买 r_j 个该种类的商品。
求出前 k 便宜的方案所需的价钱，如果没有这样的方案，输出 -1。
有相同钱数，但是具体方案不相同的，算作两种方案。
$1 \le n, m, k \le 2 \times 10^5$

P6646

考虑第 k 小问题的经典套路：我们维护一个堆，每次从中取出权值和最小的方案，然后将这个方案能转移到的所有更大的方案放进堆中。

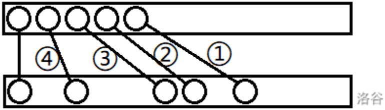
那么我们只需要保证我们的转移不重不漏即可。

P6646

考虑 $m = 1$ 的情况：

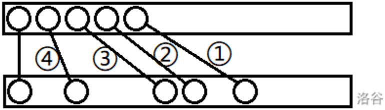
P6646

考虑 $m = 1$ 的情况：
$l = r$ 时，将所有商品按价格从小到大排序，那么最小的权值就是选择前 l 个。
转移时将最大的未移动的位置向右移动任意个，但不允许跨越已选择的位置。



P6646

考虑 $m = 1$ 的情况：
$l = r$ 时，将所有商品按价格从小到大排序，那么最小的权值就是选择前 l 个。
转移时将最大的未移动的位置向右移动任意个，但不允许跨越已选择的位置。



容易发现这样可以做到不重不漏。

P6646

每次枚举向右移动的位数太不优了，我们只允许每次向右移动一位，那么就需要额外记录一个当前正在移动的物品。

P6646

每次枚举向右移动的位数太不优了，我们只允许每次向右移动一位，那么就需要额外记录一个当前正在移动的物品。
即：记录三元组 (pre, pos, lim) 表示当前还没有被移动过的前缀长度，正在移动的物品位置，以及当前物品最右可以移动到的位置。转移有两种：

- $(pre, pos, lim) \to (pre, pos+1, lim)$
- $(pre, pos, lim) \to (pre-1, pre+1, pos)$

P6646

每次枚举向右移动的位数太不优了，我们只允许每次向右移动一位，那么就需要额外记录一个当前正在移动的物品。
即：记录三元组 (pre, pos, lim) 表示当前还没有被移动过的前缀长度，正在移动的物品位置，以及当前物品最右可以移动到的位置。转移有两种：

- $(pre, pos, lim) \to (pre, pos + 1, lim)$
- $(pre, pos, lim) \to (pre - 1, pre + 1, pos)$

对于 $l \neq r$ 的情况，增加转移 $(x - 1, x, +\infty) \to (x, x + 1, +\infty)$ 即可。

P6646

考虑 $m \geq 1, l = r = 1$ 的情况：

P6646

考虑 $m \geq 1, l = r = 1$ 的情况：
设当前考虑到第 i 种商品，选择了第 p_i 小的数，那么一种转移为每次 $i \leftarrow [i, n], p_i \leftarrow p_i + 1$。
这种转移方法最大的问题在于无法确定当前的 i 应当转移到哪个位置，所以需要 $O(n)$ 枚举。

P6646

考虑 $m \geq 1, l = r = 1$ 的情况：
设当前考虑到第 i 种商品，选择了第 p_i 小的数，那么一种转移为每次 $i \leftarrow [i, n], p_i \leftarrow p_i + 1$。
这种转移方法最大的问题在于无法确定当前的 i 应当转移到哪个位置，所以需要 $O(n)$ 枚举。
那么我们钦定转移时 i 只能转移到 i 或 $i + 1$，并添加新转移：如果当前 $p_i = 2$，那么可以进行 $p_i \leftarrow 1, i \leftarrow i + 1, p_i \leftarrow p_i + 1$。观察到这样仍然是不重不漏的。
为了保证每次转移后变大，将种类按照 $a_{i,2} - a_{i,1}$ 排序即可。

P6646

回到原题。
对每个种类 i 跑 $m = 1$ 的做法，可以得到若干种最小的方案。
将每个方案视作一个物品，那么题目就被转化为了 $m \geq 1, l = r = 1$ 的情况。直接跑上述做法即可。
时间复杂度 $O(n \log n)$。

End.