好题选讲

hjxhjx

2025 年 4 月 27 日

CF1967F Next and Prev

有一个长度为 n 的排列 p，记 a 表示只保留 p 中小于等于 q 的值构成的子序列。

设 pre_i 表示最大的位置 j 使得 $a_j > a_i$ 且 $j < i$，如果不存在则为 $-\infty$；
设 nxt_i 表示最小的位置 j 使得 $a_j > a_i$ 且 $j > i$，如果不存在则为 $+\infty$。

有 k 次询问，每次询问给出 q 和 x，求出 $\sum_{i=1}^{q} \min(nxt_i - pre_i, x)$。

$1 \le n \le 3 \times 10^5$，$k \le 10^5$，时限 15s

考虑 $\min(nxt(i)-i,x)+\min(i-pre(i),x)$ 和答案有什么关系。

对于某个 x，我们按照 a 的值从大到小插入每个位置 p，每次插入时将 $[p,p+x-1]$ 打上标记（可以超过 n），最终 $[1,n+x-1]$ 全部会被标记，总共有 $n+x-1$ 个标记。考虑每次让标记个数增加了多少：

考虑 $\min(nxt(i) - i, x) + \min(i - pre(i), x)$ 和答案有什么关系。

对于某个 x，我们按照 a 的值从大到小插入每个位置 p，每次插入时将 $[p, p+x-1]$ 打上标记（可以超过 n），最终 $[1, n+x-1]$ 全部会被标记，总共有 $n+x-1$ 个标记。考虑每次让标记个数增加了多少：

$$\sum_{i=1}^{n} \max(\min(nxt(i), i+x) - \max(pre(i)+x, i), 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max(\min(nxt(i) - i, x) - \max(pre(i), i-x) + i - x, 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max(\min(nxt(i) - i, x) + \min(i - pre(i), x) - x, 0)$$

设 $f(i)=\min(nxt(i)-i,x)+\min(i-pre(i),x)$。

$$=\sum_{i=1}^{n}\max(f(i)-x,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(i)+\max(-x,-f(i))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(i)-\min(x,f(i))$$

可以发现 $\min(x,f(i))$ 其实等于 $\min(nxt_i-pre_i,x)$。

所以 $\sum\min(nxt_i-pre_i,x)=\sum f(i)-(n+x-1)$

考虑如何计算 $\min(nxt(i)-i, x)$（另一个对称）
我们从小到大插入 p 中的位置 i，每次使得前面的 nxt 和 i 取 min，后面的 nxt 全部 $+1$。

考虑如何计算 $\min(nxt(i)-i, x)$（另一个对称）
我们从小到大插入 p 中的位置 i，每次使得前面的 nxt 和 i 取 min，后面的 nxt 全部 $+1$。

将排列 p 按 B 分块，每个块维护排好序的 $nxt(i)-i$，每次插入时暴力重构当前块。对于取 min，可以仿照吉司机线段树的思路，维护一个最大值和严格次大值，如果影响到了严格次大值那么就暴力重构，否则打标记就好。总重构次数不超过 n。
对于查询，在每个块内分别二分即可。

精细实现可以做到 $O(B)$ 重构，总复杂度
$O(\frac{nk\log n}{B} + nB) = O(n\sqrt{k\log n})$。

没有发现这个奇怪性质也可以做，具体可以看洛谷题解