好题分享

xzf_200906

April 25, 2025

由于本人水平低下，讲的题可能过于简单。同时本人平时没有做过什么好题，仓促之下质量可能偏低，敬请谅解，谢谢。

Statement

给定两个字符串 A 和 B，从 A 中选择一个非空回文子串 a，再从 B 中选择一个非空回文子串 b，将其拼接起来得到 ab，问可以得到多少个本质不同的串。

$|\mathsf{A}|, |\mathsf{B}| \leq 2 \times 10^5$

Definition

先介绍一些定义与前置知识。

定义

- 对于两个字符串 a, b，我们定义 ab 为将它们连接所产生的串。
- 对于两个非空回文串 p, q，若 $s = pq$，那么我们称 p, q 是 s 的一对回文分解。
- 对于回文串 p 和非空回文串 q，若 $s = pq$，那么我们称 p, q 是 s 的一对非严格回文分解。

Definition

定义

- 定义 $s[l,r]$ 为 s 从第 l 个字符到第 r 个字符构成的的子串，s_R 为 s 的反串。
- 若 $s[1,i] = s[|s|-i+1,|s|]$，则称 i 为 s 的 Border，特别地，定义 $\mathrm{border}(s)$ 为 s 在 $[1,|s|-1]$ 内的最大 Border。
- 若对于所有的 $i \in [1,|s|-d]$，都有 $s_{i+d} = s_i$，那么我们称 d 为 s 的循环节。在此基础上，若 d 整除 $|s|$，则称 d 为 s 的整循环节。且若 $d < |s|$，则称 s 是一个循环串。

Review

前置知识

- i 是 s 的 Border 等价于 $|s| - i$ 是 s 的循环节。
- 若回文串 s 存在一个长度为 i 的回文前缀，那么 i 是 s 的 Border。反之，若回文串存在一个 Border，那么该 Border 是回文串。

想必上述内容各位不难理解，下文将不再赘述。

Review

同时对于周期，我们有另外一个前置引理：

Lemma 1

如果一个串 s 存在两个循环节 x, y，且 $x + y \le |s|$，则 $\gcd(x, y)$ 也是 s 的循环节。

这个结论似乎是比较符合直觉的，不过还是证明一下。不失一般性的假设 $x < y$，且 $d = y - x$：

- 对于 $i \in [1, x]$，由于 $x + y \le |s|$，故 $s_i = s_{i+y} = s_{i+y-x} = s_{i+d}$。
- 对于 $i \in [x + 1, |s| - d]$，$s_i = s_{i-x} = s_{i-x+y} = s_{i+d}$。

故 d 也是 s 的循环节，重复进行和更相减损法类似的过程即可证明该引理。

Solution

首先有一个错误的想法是求出两个串分别的本质不同的回文子串的数量并相乘。这样的话会有一些串被计算多次。
比如 $aaa = a + aa = aa + a$。
显然被算重的串都存在多个回文分解。考虑什么样的串有两个及以上的回文分解，以及一个串的多个回文分解有什么性质。我们猜测：

Lemma 2

设 s 的所有非严格回文分解分别为 $p_1q_1, p_2q_2, \cdots p_kq_k$，且 $|p_i| < |p_{i+1}|$。则对于任意的 $i \in [1, k-1]$，$p_i = \mathrm{border}(p_{i+1})$ 或 $q_{i+1} = \mathrm{border}(q_i)$。

证明会稍后给出。

Solution

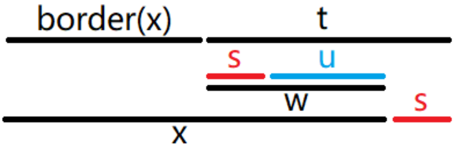
根据 Lemma 2，对于一个字符串 $s = xy$，其中 xy 是一对 s 的回文拆分，如果 s 不存在另一对回文拆分 pq 满足 $p = \mathrm{border}(x)$ 或 $y = \mathrm{border}(q)$，那么 xy 是 s 的最后一对回文拆分。考虑统计这种回文拆分的数量。我们只需要先计算出两个串各自的非空回文子串数量并相乘，再对于所有 A 的非空回文子串 x 将答案减去可以同时被 x 和 $\mathrm{border}(x)$（即回文自动机上 x 的父亲）表示的串的数量，再对 B 做一遍同样的操作，最后再把重复减去的加回来即可。

考虑如何计算同时被 x 和 $\mathrm{border}(x)$ 表示的串的数量，设 $x = \mathrm{border}(x)w$，则我们要计算满足 s 和 ws 都是 B 的非空回文子串的串 s 的数量。我们记 $t = ws$，分两种情况讨论。

Solution

Case 1: $|w| > |s|$

在这种情况下，一定存在一个非空回文串 u 满足 $w = su$，如下图。



由于 $|w|$ 是 x 的最小周期，故 w 不是循环串。我们有结论：

Lemma 3

对于非循环串 s，其至多只有一对非严格回文分解 pq，且 p 为 s 的最长非 s 回文前缀或 q 为最长回文后缀。

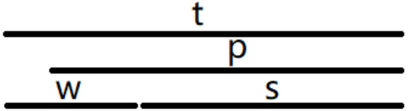
Solution

根据这个引理，我们只需要计算出 w 的回文分解 su，并查询 s 和 t 是否在 B 中作为回文子串即可。
寻找串 $w = A[l, r]$ 的最长回文后缀可以先在回文自动机上找到 $A[1, r]$ 的最长回文后缀，再从其开始倍增找到最长的不长于 w 的回文后缀即可。判断一个串是否在回文自动机中出现可以使用哈希。

Solution

Case 2：$|w| \le |s|$

在这种情况下，假设 t 的最长回文后缀为 $p \neq s$，如下图：



则 $|t| - |p|$ 为 t 的最小周期，而且 $|w|$ 也为 t 的周期。由于 $|p| > |s| \ge w$，则 $|t| - |p| + |w| \le |t|$，根据 Lemma 1，$\gcd(|t| - |p|, |w|) \le |t| - |p|$ 是 t 的一个周期，又因为 $|t| - |p|$ 是 t 的最小周期，故 $\gcd(|t| - |p|, |w|) = |t| - |p|$，即 $|t| - |p|$ 整除 $|w|$。又因为 w 是 t 的前缀，故 $|t| - |p|$ 是 w 的一个整周期，与 w 是 x 的最小周期矛盾。所以 $\text{border}(t) = s$。我们只需要对于 B 的每个非空回文子串 s，设 $s = y \cdot \text{border}(s)$，若其满足 $|y| \le |s|$，则将 y 插入哈希表中，再计算哈希表中存在多少个 w 即可。

Solution

最后再解决重复减去的问题。对于 A 的非空回文子串 $s = \text{border}(s) \cdot x$ 和 B 的非空回文子串 $t = y \cdot \text{border}(t)$，若 $x = y$ 就会多减一次，如下图：

border(s) x 或 y border(t)

所以我们将所有的 x 插进哈希表里并询问 y 在其中的出现次数即可。下面我们考虑证明 Lemma 2 和 Lemma 3。

Proof

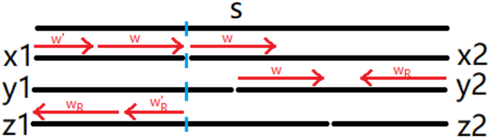
先证明若干前置引理。

Lemma 4

假设 $s = x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$，$|x_1| < |y_1| < |z_1|$ 且 x_2, y_1, y_2, z_1 均为非空回文串，则 x_1, z_2 也是回文串。

Proof

证明：设 $z_1 = y_1 w$，则由于 y_2, x_2 均为回文串，则 w_R 为 s 的后缀，w 为 x_2 的前缀。故 $x_1 w$ 是 z_1 的前缀。如下图：



由于 z_1 存在长度为 $|y_1|$ 的回文前缀，故其存在一个 $|z_1| - |y_1| = |w|$ 的循环节。同理 $x_1 w$ 也存在一个这样的循环节。所以 x_1 可以表示为 w 的一个后缀再加上若干个（可能为零个）w 的形式。记这个后缀为 w'（不一定非空）。由于 z_1 是一个回文串，故其存在前缀 w_R，也即要么 x_1 是 w_R 的前缀，要么反之。那么 x_1 必定可以表示为 $w_R w_R \cdots w'_R$ 的形式。故 $x_{1R} = w'w \cdots = x_1$，即 x_1 回文。同理可得 z_2 回文。

Proof

Lemma 5

若一个串 s 存在两对非严格回文分解，那么其是一个循环串。

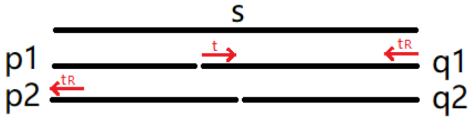
证明：假设 s 的两对非严格回文分解为 p_1q_1 和 p_2q_2，且 $|p_1| < |p_2|$，那么：

- 设 $p_1t = p_2$，那么由于 p_2 存在一个长度为 $|p_2| - |t|$ 的回文前缀 p_1，那么 p_2 存在长度为 $|t|$ 的循环节。同理，q_1 也存在一个长度为 $|t|$ 的循环节。由于这两个串覆盖了整个串 s，那么 s 也存在一个长度为 $|t|$ 的循环节。
- 并且由于 p_2, q_1 为回文串，那么 t_R 同时为 s 的前后缀，也即 s 存在一个长度为 $|s| - |t|$ 的循环节。

由 Lemma 1，s 也存在一个长度为 $\gcd(|t|, |s| - |t|) = \gcd(|t|, |s|)$ 的循环节，所以 s 是一个循环串。

Proof

放一张图片以方便理解：



Lemma 3

对于非循环串 s，其至多只有一对非严格回文分解 pq，且 p 为 s 的最长非 s 回文前缀或 q 为最长回文后缀。

证明：由 Lemma 5，s 至多只有一对非严格回文分解。设其为 pq，且 s 的最长最长非 s 回文前缀为 a，最长回文后缀为 b，$s = ax = yb$。假设 $a \neq p, b \neq q$，则 $|y| < |p| < |a|$。并且显然 a, b 非空。根据 Lemma 4 可以证明 x, y 是回文串。则 s 存在不止一对非严格回文分解，矛盾。故假设不成立，引理成立。

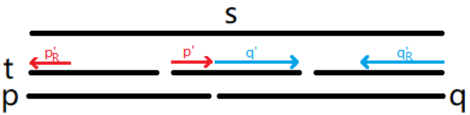
Proof

Lemma 6

对于一个循环串 s，设其最小整循环节为 d，则若 s 存在非严格回文分解，那么 s 存在恰好 $\frac{|s|}{d}$ 个非严格回文分解。

证明：设 s 的一对非严格回文分解为 pq，$t = s[1, d]$，则由于 d 是 s 最小的循环节，则 t 不可能是循环串，也即至多存在一对非严格回文分解。

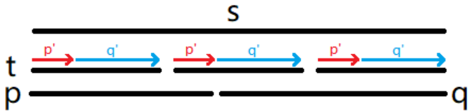
Proof



根据定义，s 由若干个 t 拼接组成。我们找到其中被 q 覆盖的段中最靠左的（如上图中间）。我们称 p' 为这一部分被 p 覆盖的子串，q' 同理。由图可知 p', q' 均为回文串且 q' 非空。则我们得到了 t 的一组非严格回文分解。对于另一组非严格回文分解 xy，同理得到 x'，如果 $x' \neq t'$，则我们可以得到 t 的另一组非严格回文分解，与前面的讨论矛盾。所以 $x' = t'$。而这样的位置至多只有 $\frac{|s|}{d}$ 个。

Proof

而对于这 $\frac{|s|}{d}$ 个可能的分解，记它们分别为 $p_1q_1, p_2q_2, \cdots p_{\frac{|s|}{d}}q_{\frac{|s|}{d}}$。假设 t 的唯一一组非严格回文分解为 $p'q'$，那么每个 p_i 都是形如 $p'q'p'\cdots q'p'$ 的形式，如下图。由于 p', q' 都是回文串，不难得出 p_i 也是回文串。同理可得每个 q_i 都是回文串。所以这 $\frac{|s|}{d}$ 个分解均合法，则引理得证。



Proof

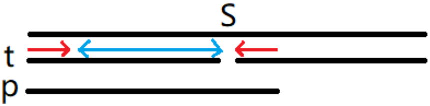
Lemma 2

设 s 的所有非严格回文分解分别为 $p_1q_1, p_2q_2, \cdots p_kq_k$，且 $|p_i| < |p_{i+1}|$。则对于任意的 $i \in [1, k-1]$，$p_i = \text{border}(p_{i+1})$ 或 $q_{i+1} = \text{border}(q_i)$。

证明：此处会给出一种求出一个串的所有非严格回文分解的方式，并在过程中说明该引理成立。
我们先求出 s 的最长非 s 的回文前缀 a 和其最长回文后缀 b（可以为 s)。设 $s = ax = yb$。
如果 x, y 中存在非回文串，则若 s 存在一对非严格回文分解 pq 满足 $p \neq a, q \neq b$，则 $|y| < |p| < |a|$。则根据 Lemma 4，x, y 均为回文串，产生矛盾。故此时 s 至多存在一对非严格回文分解，则显然满足引理。下文将认为 x, y 均为回文串。

Proof

同时如果 $a = y, b = x$，则 s 显然只有一种非严格回文分解，同样满足引理。在特判掉上述两种情况之后，a, b 必定非空。故找到次长的非 s 的回文前缀 c。记 $s = cz$，若 z 不是回文串，假设存在另一对非严格回文分解 pq（即 $p \neq a, q \neq b$），则根据 Lemma 4 可以得出 z 是回文串。故此时仅存在两个非严格回文分解。并且如果 $c = y$ 则同样只存在两个非严格回文分解。根据 Lemma 6，存在一个串 t 使得 $s = t^2$。设 $p = \mathrm{border}(a), q = \mathrm{border}(b)$。若 $p \neq y, q \neq x$，则 $|y| < |p| < |a|, |x| < |q| < |b|$。假设 $|p| \geq t$，则 t 存在一对非严格回文分解，如下图。



Proof

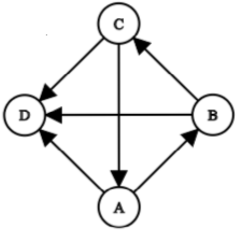
而在 Lemma 6 的证明过程中说明了 t 存在且仅存在另一对非严格回文分解。又因为 $|p| < |a|$，则这两对非严格回文分解不同，故 t 存在两对非严格回文分解，矛盾。故 $|p| < |t|$。同理 $|q| < |t|$。而在 Lemma 6 的证明过程中证明了 yx 是 t 的唯一一对非严格回文分解。根据 Lemma 2，有 y 是 t 的非 t 最长回文前缀或 x 是 t 的最长回文后缀。假设前者成立，那么 $|p| < |y|$，矛盾。后者成立同理也可导出矛盾。故假设不成立，原引理成立。

如果 $s = cz$ 满足 z 是回文串，则找到所有的长度在 $(|z|, |b|]$ 中的回文后缀。假设其中一个为 q，$s = pq$，那么根据 Lemma 4，p 也是回文串，故这些都是一组合法的回文分解，并且由于除 x, z 外剩下的回文后缀的长度都在这之中，所以这样是不漏的。并且由于除 $\langle ax, cz \rangle$ 满足 $p_i = \text{border}(i+1)$ 外其它串都满足 $q_{i+1} = \text{border}(q_i)$，故引理得证。

现在本题的所有引理均得证，那么这题就做完了。

Statement

给定一张 n 个点的竞赛图（简单有向图且满足对于任意两个点 u, v，边 $u \to v$ 和 $v \to u$ 恰好存在一条），每条边的权值为 1。保证该图不存在形如下图的子图（即存在一个三元环连向同一个点）。求任意两点之间的最短路长度之和。若 u 无法到达 v，则认为 u 到 v 的最短路长度为 $614 \times n$。



$n \leq 8000$。

Solution

考虑将竞赛图缩点。显然竞赛图缩点后也仍然是竞赛图。这就意味着对于两个强连通分量 u, v，若 u 的拓扑序在 v 之前，那么在缩完点之后的 DAG 中必定存在边 $u \to v$。更进一步地，对于 u 中的任意一个点 p 和 v 中的任意一个点 q，必定存在边 $p \to q$。
对于竞赛图，我们有一个经典结论：

Lemma 1

对于点数大于 1 的强连通竞赛图，其中必定存在三元环。

Solution

证明：这样的竞赛图中必定存在一个环。显然这个环的长度不可能小于 3。我们考虑证明每个环中必定存在三元环。
考虑归纳证明，对于大小为 3 的环显然成立。假设命题对于大小为 n 的环成立，对于大小为 $\mathsf{n}+1$ 的环，取其中相邻的三个点 $\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}$。如果存在边 $\mathsf{c}\to\mathsf{a}$ 则存在三元环。否则一定存在边 $\mathsf{a}\to\mathsf{c}$。故把点 b 去掉即可得到一个大小为 n 的环。而这个环中必定存在三元环。故引理成立。
这就意味着，对于该图中的一个拓扑序不是最大的强连通分量，其大小必定为 1。否则其中必定存在一个三元环。而任取拓扑序最大的强连通分量中的一个点 p，这三个点必定都有边连向 p。则出现了不合法的子图，与题意矛盾。

Solution

我们考虑如果图中存在一个入度为 0 的节点，则把它删去。因为对于其它所有点都可以被它直接到达并且无法到达它，那么它的贡献是方便计算的。通过重复执行这个步骤直到无法执行为止，我们可以把这张图删到只有一个强连通分量。则我们只需要考虑强连通竞赛图的情况。

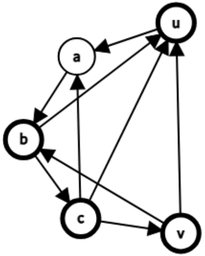
由于这张图十分稠密，我们猜测它的最短路不会太长。有引理：

Lemma 2

对于任意符合题意的强连通竞赛图，其中任意两个点的最短路的长度不超过 3。

Solution

证明：假设存在两个点之间的最短路长度大于等于 4，由于这张图强连通，我们肯定能在其最短路上找到一对最短路长度为 4 的点。设这两个点是 u, v，其最短路为 $\mathsf{u} \to \mathsf{a} \to \mathsf{b} \to \mathsf{c} \to \mathsf{u}$。由于它是最短路，所以其它边的方向都和这条路径相反。如下图。其中加粗的点构成了一张不合法的子图，不符合题意。所以假设不成立，原命题成立。



Solution

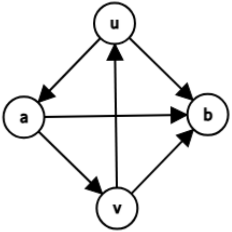
最短路长度为 1 的点对是好处理的。我们考虑找到所有最短路长度为 2 的点对，再用总点对数量减去前两者的数量即可得出最短路长度为 3 的点对数量。
考虑一种暴力的算法，对于每个点 u，枚举边 $u \to v$，统计可以通过 v 直接到达但不能通过 u 直接到达的点，取个并集即可得到答案。这个做法是 $O(n^3)$ 的，无法通过。为了优化这个算法，我们引出另外一个引理：

Lemma 3

对于任意符合题意的强连通竞赛图，如果 u 到 v 的最短路长度为 2，并且同时存在边 $u \to a, a \to v, u \to b, a \to b$，则必定存在边 $b \to v$。

Solution

证明：假设这条边不存在，则必定存在边 $v \to b$。又因为 u, v 之间的最短路长度为 2，则必定存在边 $v \to u$。则 u, v, a, b 构成的子图形如下图，不合法。



Solution

这就意味着我们只需要选取拓扑序最大的点作为中转点。所以对于每个点 u，我们可以先任取一个 u 可以直接到达的点 p，再遍历每个点 i，如果同时存在边 $u \to i, p \to i$，则将 p 修改为 i，在执行该步骤之后，p 必定在 u 可直接到达的点的导出子图的拓扑序最大的强连通分量上。我们只需要统计哪些点可以被 p 到达但不能被 u 到达即可在 $O(n^2)$ 的时间复杂度内统计所有最短路长度为 2 的点对，那么这题就做完了。

感谢大家的聆听！