好题分享

using

2025 年 3 月 31 日

题意

N 个 OIer 头上戴着红色或者白色的帽子。每个人只能看到别人的帽子颜色，他们会根据别人的帽子颜色猜测自己头上帽子的颜色。
他们想要构造一组猜测策略，满足以下条件：

- 设有 b 人戴了白色帽子，其中至少有 $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ 人猜对自己帽子的颜色。
- 设有 c 人戴了红色帽子，其中至少有 $\lfloor \frac{c}{2} \rfloor$ 人猜对自己帽子的颜色。

请帮助他们找到一种策略，使得在 2^N 种可能的情况中都满足条件。
原题：$N \leq 18$，加强：对于任意特定局面，$O(N)$ 给出决策。

题解

传统做法比较简单，除以 2 下取整很容易想到欧拉回路，将 2^N 种状态建点，只有一位不同的状态连边，调整点的度数后跑一遍欧拉回路即可。

题解

传统做法比较简单，除以 2 下取整很容易想到欧拉回路，将 2^N 种状态建点，只有一位不同的状态连边，调整点的度数后跑一遍欧拉回路即可。
考虑加强版，将选手编号为 $0 \sim n-1$。

题解

传统做法比较简单，除以 2 下取整很容易想到欧拉回路，将 2^N 种状态建点，只有一位不同的状态连边，调整点的度数后跑一遍欧拉回路即可。

考虑加强版，将选手编号为 $0 \sim n-1$。

- 假设 0 猜 B，对于 1 来说，他知道 0 会猜 B，所以他不管怎样都会猜 C，因为在这种状态下，即使两个人都猜错也满足下取整条件。

题解

传统做法比较简单，除以 2 下取整很容易想到欧拉回路，将 2^N 种状态建点，只有一位不同的状态连边，调整点的度数后跑一遍欧拉回路即可。

考虑加强版，将选手编号为 $0 \sim n-1$。

- 假设 0 猜 B，对于 1 来说，他知道 0 会猜 B，所以他不管怎样都会猜 C，因为在这种状态下，即使两个人都猜错也满足下取整条件。
- 考虑 2，如果 0 和 1 都猜错，他自己必须要猜对，然而在没有别的信息的情况下，他不可能百分百猜对。所以我们回头，让 0 去猜 2 的颜色，这样 2 只需要在猜 0 相反的颜色，在 0 和 1 都猜错的前提下 2 一定会猜对。

题解

传统做法比较简单，除以 2 下取整很容易想到欧拉回路，将 2^N 种状态建点，只有一位不同的状态连边，调整点的度数后跑一遍欧拉回路即可。

考虑加强版，将选手编号为 $0 \sim n-1$。

- 假设 0 猜 B，对于 1 来说，他知道 0 会猜 B，所以他不管怎样都会猜 C，因为在这种状态下，即使两个人都猜错也满足下取整条件。
- 考虑 2，如果 0 和 1 都猜错，他自己必须要猜对，然而在没有别的信息的情况下，他不可能百分百猜对。所以我们回头，让 0 去猜 2 的颜色，这样 2 只需要在猜 0 相反的颜色，在 0 和 1 都猜错的前提下 2 一定会猜对。

题解

题解

- 考虑 3，如果 0 和 1 猜错 2 猜对，2 相反的颜色还卡在奇数下取整，所以 3 只能猜这个颜色。如果 $2,3$ 颜色相反，3 猜对，$0,1,2,3$ 猜测互相抵消；如果 $2,3$ 颜色相同，3 猜错，两种颜色全部回到奇数下取整，此时 4 无法准确地猜颜色。

题解

- 考虑 3，如果 0 和 1 猜错 2 猜对，2 相反的颜色还卡在奇数下取整，所以 3 只能猜这个颜色。如果 2,3 颜色相反，3 猜对，0,1,2,3 猜测互相抵消；如果 2,3 颜色相同，3 猜错，两种颜色全部回到奇数下取整，此时 4 无法准确地猜颜色。
- 但是 0,1 是知道 2,3 颜色的，如果他们看到 2,3 颜色相同，他们知道给 2,3 提供信息无法抵消他们的错误猜测，而如果某一对选手颜色相同，只要他们猜的是相反的，他们就必定一对一错，不需要在意他们接收到的信息是不是对的。所以 0,1 会去找后面第一对颜色不同的选手去和他们配合，而他们也看得到他们和 0,1 中间所有的选手对颜色相同，他们知道自己在和 0,1 配合。

题解

- 考虑 3，如果 0 和 1 猜错 2 猜对，2 相反的颜色还卡在奇数下取整，所以 3 只能猜这个颜色。如果 2, 3 颜色相反，3 猜对，0, 1, 2, 3 猜测互相抵消；如果 2, 3 颜色相同，3 猜错，两种颜色全部回到奇数下取整，此时 4 无法准确地猜颜色。
- 但是 0, 1 是知道 2, 3 颜色的，如果他们看到 2, 3 颜色相同，他们知道给 2, 3 提供信息无法抵消他们的错误猜测，而如果某一对选手颜色相同，只要他们猜的是相反的，他们就必定一对一错，不需要在意他们接收到的信息是不是对的。所以 0, 1 会去找后面第一对颜色不同的选手去和他们配合，而他们也看得到他们和 0, 1 中间所有的选手对颜色相同，他们知道自己在和 0, 1 配合。

结论

将选手两两分组，每组选手组内的猜测不同。对于某一组选手，如果他前面有奇数对异色对，尝试和最后一组选手配合；否则，尝试和后面第一对异色对配合。
如果 n 是奇数，将多余的选手视为一对异色对即可。
一组同色对必定一对一错，两组配合的异色对必定一组全对一组全错，最多会多出一组异色对，此时刚好取到奇数下取整，整个做法完全正确。