计数

黄洛天

THU，IIIS

April 27, 2025

一些要讲的东西

- 生成函数
- 状压图计数，dag 计数
- 线性代数
- 两类斯特林数、伯努利数、欧拉数

生成函数

最新版大纲仍然把 fft ban 了，所这个东西考察方向会非常有限。

前置知识：

- https://oi-wiki.org/math/poly/intro/
- https://oi-wiki.org/math/poly/ogf/
- https://oi-wiki.org/math/poly/egf/

生成函数

数列	生成函数	封闭形式
$\langle 1,1,1,1,\dots\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$	$\frac{1}{1-x}$
$\langle 1,c,c^2,c^3,\dots\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} c^k x^k$	$\frac{1}{1-cx}$
$\left\langle \binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{n}\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$	$(1+x)^n$
$\left\langle 1,n,\binom{n+1}{2},\binom{n+2}{3},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$	$\frac{1}{(1-x)^n}$
$\left\langle \binom{0}{n},\binom{1}{n},\binom{2}{n},\binom{3}{n},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{n} x^k$	$\frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$
$\left\langle \binom{\alpha}{0},\binom{\alpha}{1},\binom{\alpha}{2},\binom{\alpha}{3},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$	$(1+x)^\alpha$
$\left\langle 0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$\ln(1+x)$
$\left\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k$	$\ln\frac{1}{1-x}$
$\left\langle 1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\dots\right\rangle$	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$	e^x

生成函数

给定一个数列 a_n，怎么求它的生成函数封闭形式呢！
任意数列是做不了的，比如一个经典例子

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} & n \leq M \\ 0 & n > M \end{cases}$$

斐波那契数列

往往我们能得到一个 a 关于自己的地推式，比如经典例子斐波那契数列。

$$a_n = \begin{cases} n & n \leq 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 1 \end{cases}$$

可以直接写出式子 $A(x) = A(x)(x + x^2) + x$。进而得到 $A(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$

斐波那契数列

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
&= \frac{x}{(x-x_0)(x-x_1)} \\
&= \frac{a}{x-x_0} + \frac{b}{x-x_1}
\end{aligned}
$$

其中 x_0 和 x_1 是 $1-x-x^2$ 的解。显然后面两项可以转化为前面学过的封闭性是，进而得到斐波那契数列的通项公式。

斐波那契数列

用同样的方法，对于所有形如 $a_n = ua_{n-1} + va_{n-2}$ 的地推都可以做了。

递推长度为常数的时候，方法也是类似的。

小练习

求:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n-i}$$

广义二项式定理

当组合数上指标不为整数时定义组合数:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$$

有广义二项式定理:

$$(a+b)^{\alpha} = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{n}{i} a^i b^{\alpha-i}$$

范德蒙德卷积

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$

下降幂二项式定理

$$(x+y)^{\underline{k}} = \sum_{i=0^k} \binom{k}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{k-i}}$$

卡特兰数

卡特兰数：长度为 $2n$ 的合法括号序列个数。
求卡特兰数通项公式。

自然数幂和

找到多项式 $S_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i^k$

斯特林数

第一类斯特林数:

$$S_1(0,0) = 1$$

$$S_1(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

第二类斯特林数:

$$S_2(0,0) = 1$$

$$S_2(n,k) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$$

斯特林数

一些组合意义:

第一类斯特林数:

- 有 k 个置换环的排列个数。
- 有 k 个前缀最大值的排列。

第二类斯特林数:

- n 个不同的球放进 k 个相同的盒子，且盒子非空。

斯特林数

一些有用的式子:

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$$

斯特林数

注意到，把最后一个式子里的下降幂堪称组合数，对最后一个式子做二项式反演可以得到：

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i} x^i}{i!(k-i)!}$$

这提供了快速算单项的方法。

uoj 540

https://uoj.ac/problem/540

CF1097G

https://www.luogu.com.cn/problem/CF1097G

P5320

https://www.luogu.com.cn/problem/P5320

有标号 dag 计数

令 f_n 表示有多少个有标号 dag，g_n 要求若联通，求 f 和 g。

P10221

https://www.luogu.com.cn/problem/P10221

P6789

https://www.luogu.com.cn/problem/P6789

线性代数

前置知识：
求行列式

矩阵树定理

对于一个无向图 $G = (V, E)$，令

$$A_{x,y} = \begin{cases} deg_u & u = v \\ -1 & (u, v) \in E \\ 0 & \texttt{Otherwise} \end{cases}$$

令 $A^{(i)}$ 表示 A 删掉第 i 行和第 i 列的矩阵，则生成树个数为 $\det(A^{(i)})$。

矩阵树定理

对于一个有向图 $G=(V,E)$，令

$$A_{x,y}=\begin{cases} outdeg_u & u=v \\ -1 & (u,v)\in E \\ 0 & \texttt{Otherwise} \end{cases}$$

以 rt 为根的外向生成树个数为 $\det(A^{(rt)})$。
内向生成树同理。

P4208

https://www.luogu.com.cn/problem/P4208

P5296

https://www.luogu.com.cn/problem/P5296

小练习

给一个矩阵 A，求 $\{\bigoplus_{i=1}^{n} A_{i,p_i} | \texttt{P is a permutation}\}$。
满足 $n \leq 50, A_{i,j} < 1024$。

谢谢大家!