好题分享

liuziao

2025.4.28

AGC040E Prefix Suffix Addition

题目描述

你有一个长为 N 的序列 $x_1, x_2, \ldots, x_N$，一开始全部为 0，你现在可以以任意顺序进行任意次以下两种操作：

1. 选定整数 $k(1 \le k \le N)$ 与不下降非负序列 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，对所有 $1 \le i \le k$，令 x_i 加上 c_i。
2. 选定整数 $k(1 \le k \le N)$ 与不上升非负序列 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，对所有 $1 \le i \le k$，令 x_{N-k+i} 加上 c_i。

问最少进行多少次操作使得最后对任意 i 有 $x_i = A_i$。

$1 \le N \le 2 \times 10^5, 1 \le A_i \le 10^9$。

AGC040E Prefix Suffix Addition

首先如果只能做 1 操作，答案就是极长不降段的个数。只有 2 操作答案就是极长不升段的个数。
这启发我们将每个 A_i 拆成 a_i 和 b_i，分别表示来自 1 操作和 2 操作的贡献，答案即为：$\sum_{i=1}^{N+1}([a_i < a_{i-1}] + [b_i > b_{i-1}])$。

AGC040E Prefix Suffix Addition

考虑 dp。
设 $f_{i,j}$ 表示考虑了前 i 个数，满足 $a_i = j, b_i = A_i - j$ 的最小操作数。
直接转移是 $O(nV)$ 的，但是注意到 $f_{i,j}$ 不升，且 $f_{i,a_i} \geq f_{i,0} - 2$，所以记录一下三种 dp 值对应的区间即可。
时间复杂度：$O(n)/O(n \log V)$。

UOJ919 环环相扣

题目描述

给定一个长度为 n 的整数序列 $a_1 \sim a_n$，其中的元素两两互不相等。
有 q 次询问，每次询问给定一个区间 $[l, r]$，你要选择三个区间内互不相等的下标 x, y, z，最大化 $(a_x \bmod a_y) + (a_y \bmod a_z) + (a_z \bmod a_x)$ 的值。
只需要输出这个最大值。
$3 \le n \le 2 \times 10^6$，$1 \le q \le 8 \times 10^5$，$1 \le a_i \le 10^{18}$，$a_1 \sim a_n$ 互不相等。
强制在线。

UOJ919 环环相扣

不妨设 $a_x > a_y > a_z$，那么对于 (x, y, z) 只有两种贡献：

1. $a_x \bmod a_y + a_y \bmod a_z + a_z$
2. $a_x \bmod a_z + a_z + a_y$

对于一组询问 $[l, r]$，手玩后可发现 $[l, r]$ 内的区间最大值和次大值都必须选。

证明

先把区间的数拿出来并排序，使得 $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$，则选择 $(m-2, m-1, m)$ 可以得到一个答案下界为 $a_{m-1} + a_{m-2}$。

- 如果最终答案为 $a_x \bmod a_y + a_y \bmod a_z + a_z$，由于 $a_x \bmod a_y + a_y \bmod a_z + a_z \le \min\{a_x, 2 \cdot a_y - 1\}$，则 $x \le m-1$ 或 $y \le m-2$ 一定没上面那个优，所以 $x = m$ 且 $y = m-1$。
- 如果最终答案为 $a_x \bmod a_z + a_z + a_y$，由于 $a_x \bmod a_z + a_z + a_y \le a_x + a_y$，当 $x \ne m$ 一定达不到最优解，又因为 a_y 只出现了一次，所以 y 一定尽量取到 $m-1$。

UOJ919 环环相扣

于是 x 和 y 就固定了，设 $F(x,l,r)$ 表示将 $[l,r]$ 中的 x 和把剩下的最大值去掉后的所有 k，$a_x \bmod a_k + a_k$ 的最大值。
那么答案就是 $\max\{F(x,l,r)+a_y, F(y,l,r)+a_x \bmod a_y\}$，由于 x,y 已经确定，所以我们只需要求出 $F(x,l,r)$ 的值即可。

UOJ919 环环相扣

考虑将 $F(x,l,r)$ 拆成 $F(x,l,x-1)$ 和 $F(x,x+1,r)$。对于 $F(x,l,x-1)$，让 l 从 x 枚举到 1 可以得到一个 $O(n^2)$ 的做法。
又有个结论是如果扫到了某个 l，存在至少两个 $a_i > \frac{a_x}{2}$ 就可以停止扫描。

证明

不妨设这两个数是 a_i, a_j 且 $a_i < a_j$。

- 如果 $a_i > a_x$，与 x 为区间最大值/次大值矛盾，这个区间一定不会被询问到。
- 如果 $\frac{a_x}{2} < a_i < a_x$，则 $a_i \bmod a_x + a_x = a_i$，已经到了最大值，前面的一定不会更优。

基于这个做法暴力枚举 l 可以做到 $O(n\log V + q\log n)$，但过不了。

UOJ919 环环相扣

注意到扫描到 a_i 时，如果已经存在两个数 $\geq 2 \cdot a_i$，则 a_i 就可以删掉。这是因为如果 $a_j \geq 2 \cdot a_i$，则 $a_x \bmod a_j + a_j \geq a_j \geq 2 \cdot a_i > a_x \bmod a_i + a_i$，所以 a_i 一定不会对答案造成贡献。

于是可以在从小到大枚举 x 的过程中，维护一个栈表示目前还没删掉的数和这些数的删除标记。然后在扫描 l 的过程中，维护二号标记表示 $> \frac{a_x}{2}$ 的个数。

如果当前 $a_i \leq \frac{a_x}{2}$ 就将 i 的删除标记加 1，否则将二号标记加一。如果二号标记到了 2 就停止扫描，把栈里面删除标记为 2 的数删掉，并将 x 加到栈里。

UOJ919 环环相扣

容易证明上面那个做法的预处理复杂度为 $O(n)$。
时间复杂度：$O(n + q\log n)$。

谢谢大家！