网络流基础

Werner_Yin

Changjun High School → Peking University

yinjinrun2021@outlook.com

2024.1.29

PEKING UNIVERSITY

Preface

Section 1

二分图

定义，判定

定义

对于无向图 $G(V,E)$，如果能将 V 划分成两个非空子集 V_1,V_2，满足 V_1,V_2 导出子图没有边，那么 G 为二分图，V_1,V_2 分别为其左部和右部。

判定

如果 G 能够黑白染色，则为二分图。

最大匹配

定义

求出最大的边集 $I \subseteq E$ 满足 I 的任意两个元素没有公共点。

求法

求最大匹配的常用的算法有匈牙利算法、Dinic 算法 (后面再讲)。
需要注意的是：匈牙利算法的复杂度为 $\mathcal{O}(|V||E|)$，而 Dinic 复杂度为 $\mathcal{O}(|E|\sqrt{|V|})$，关于 Dinic 复杂度证明可以见 这里。

匈牙利算法 I

- 一个一旦成为匹配点，那么就再也不会成为非匹配点了。
- 如果最后在左边把匹配点看做 1，非匹配点看做 0，那么这个方案的字典序是最大的。
- 正确性建立在拟阵上，可以参考 2018 年集训队论文杨乾澜浅谈拟阵的一些拓展及其应用，因为不会所以就不列出了。

匈牙利算法 II

代码

```
bool match(int x) {
    if(vis[x]) return false; vis[x] = true;
    rep(i, 1, m)
        if(hav[x][i] && (!mat[i] || match(mat[i]))) return mat[i] = x,
            true;
    return false;
}
int main() {
    rep(i, 1, n) {
        if(match(i)) ans += 1;
        memset(vis, 0, sizeof vis);
    }
    cout << ans << endl;
}
```

题目 A 热身题

题面

给你一个长度为 n 的序列 D，找出字典序最小的序列 P，满足 $\min\{|P_i - i|, n - |P_i - i|\} = D_i$。

数据范围

$n \le 10^4$。

P1963 [NOI2009] 变换序列

题解

倒着来，匈牙利算法直接搞。

最小点覆盖

定义

选出最少的点覆盖所有边。

König 定理

最小点覆盖大小等于最大匹配大小。

König 定理证明

据说最小点覆盖的大小下界可以用线性规划证明，~~但是不会~~。
至于上界可以用方案构造来说明。

PEKING UNIVERSITY

最小点覆盖方案构造

- 我们从左边每个非匹配点出发，不断找增广路，并且把所有点打上标记。
- 最后最小点覆盖为：所有左侧未标记的点 + 右边打上标记的点。

方案构造的正确性证明

这个**是**一个最小点覆盖

- 如果一条边没有被覆盖，那么这条边左侧被打上了标记，而在右侧没有被打上标记。

方案构造的正确性证明

这个是一个最小点覆盖

- 如果一条边没有被覆盖，那么这条边左侧被打上了标记，而在右侧没有被打上标记。
- 这个是显然不合法的，因为一旦遍历了左侧点，所有右侧有关的点都会被打上标记。

PEKING UNIVERSITY

方案构造的正确性证明

这个最小点覆盖点数**等于**最大匹配数

我们考虑每条边

- **匹配边**：一定是左边和右边一起被标记或者一起没有被标记，于是**恰好**一个点计入了最小点覆盖中。

方案构造的正确性证明

这个最小点覆盖点数**等于**最大匹配数

我们考虑每条边

- **匹配边**：一定是左边和右边一起被标记或者一起没有被标记，于是**恰好**一个点计入了最小点覆盖中。
- **非匹配边**: 如果左边的是非匹配点，那么一定会被标记；如果右边的是非匹配点，为了证明我们的匈牙利算法没有写错，一定不能再有增广路，于是右边的点一定不会被标记。

方案构造的正确性证明

这个最小点覆盖点数**等于**最大匹配数

我们考虑每条边

- **匹配边**：一定是左边和右边一起被标记或者一起没有被标记，于是**恰好**一个点计入了最小点覆盖中。
- **非匹配边**: 如果左边的是非匹配点，那么一定会被标记；如果右边的是非匹配点，为了证明我们的匈牙利算法没有写错，一定不能再有增广路，于是右边的点一定不会被标记。

综上，我们发现，**只有**对于匹配边，恰好一个点被计入最小点覆盖当中，因此，最小点覆盖点数等于最大匹配数。

最大独立集

定义

选出最多的点使得两两之间没有边。

结论

最大独立集大小 $+$ 最小点覆盖大小 $= |V|$。

证明

最小点覆盖取反之后都对应了一个最大独立集。

最小边覆盖

定义

选出最多的边覆盖所有点。

结论

如果**没有孤立点**，最小边覆盖数量等于最大独立集数量。

证明

- 首先，对于最大独立集中的每个点，一条边最多只能覆盖一个点，因此最小边覆盖 $\geq$ 最大独立集。

证明

- 首先，对于最大独立集中的每个点，一条边最多只能覆盖一个点，因此最小边覆盖 $\geq$ 最大独立集。
- 我们可以用方案构造来说明最小边覆盖 $\leq$ 最大独立集，我们提取出所有最大匹配，记其数量为 m，那么共有 $2m$ 个匹配点，这可以直接用最大匹配上的边覆盖，用了 m 条边，剩下的 $|V|-2m$ 个点，我们只能一个点一条边地覆盖，那么总共要用 $m+|V|-2m=|V|-m$ 条边，

PEKING UNIVERSITY

证明

- 首先，对于最大独立集中的每个点，一条边最多只能覆盖一个点，因此最小边覆盖 $\geq$ 最大独立集。
- 我们可以用方案构造来说明最小边覆盖 $\leq$ 最大独立集，我们提取出所有最大匹配，记其数量为 m，那么共有 $2m$ 个匹配点，这可以直接用最大匹配上的边覆盖，用了 m 条边，剩下的 $|V| - 2m$ 个点，我们只能一个点一条边地覆盖，那么总共要用 $m + |V| - 2m = |V| - m$ 条边，那么我们得出关系：最小边覆盖 $\leq$ $|V| -$ 最大匹配，而最大匹配 $=$ 最小点覆盖，$|V| -$ 最大匹配 $=$ 最大独立集，也就是最小边覆盖 $\leq$ 最大独立集。

证明

- 首先，对于最大独立集中的每个点，一条边最多只能覆盖一个点，因此最小边覆盖 $\geq$ 最大独立集。
- 我们可以用方案构造来说明最小边覆盖 $\leq$ 最大独立集，我们提取出所有最大匹配，记其数量为 m，那么共有 $2m$ 个匹配点，这可以直接用最大匹配上的边覆盖，用了 m 条边，剩下的 $|V| - 2m$ 个点，我们只能一个点一条边地覆盖，那么总共要用 $m + |V| - 2m = |V| - m$ 条边，那么我们得出关系：最小边覆盖 $\leq$ $|V|$ $-$ 最大匹配，而最大匹配 $=$ 最小点覆盖，$|V|$ $-$ 最大匹配 $=$ 最大独立集，也就是最小边覆盖 $\leq$ 最大独立集。
- 综上，对于没有孤立点的二分图，最小边覆盖数量 $=$ 最大独立集数量。

Hall 定理

对于二分图，设 $f(S)$ 表示左部点集合 S 的出边，X 表示二分图左部点全集，那么该二分图存在完美匹配当且仅当 $\forall S \in X, |S| \le f(S)$。

有的时候可以用来维护匹配相关内容。

PEKING UNIVERSITY

题目 B　滑冰滑雪题

题面

滑冰俱乐部初始有 $1 \ldots n$ 号码溜冰鞋各 k 双，已知 x 号脚的人可以穿 $x \ldots x + d$ 号码的鞋子。
现在有 m 次操作，每次两个数 r, x，表示 r 号脚的人来了 x 个，x 为负表示离开。对于每次操作，输出溜冰鞋是否足够。

数据范围

$r \leq n - d, n, k, m \leq 5 * 10^5, k \leq 10^9$。

[POI2009] LYZ-Ice Skates

题解

由 Hall 定理，记前缀和为 s_i，那么我们就是要：

$$\min_{l \le r}\{k(r+d-l)-(s_r-s_l)\} \ge 0$$

这个非常好办，拆项然后线段树维护。

题目 C 人生重开

题面

有 N 名选手，在此时的榜单上，排名第 $i(1 \le i \le N)$ 的选手来自国家 A_i，并获得了 B_i 分。
在终榜上，排名第 $i(1 \le i \le N)$ 的选手来自国家 C_i，并获得了 D_i 分，已知所有人分数不会减少，但是有些选手国家有问题。
于是，你要修改国籍来避免矛盾，问最小修改次数。

数据范围

B_i 互不相同，D_i 互不相同，保证存在方案，$N \le 2 \times 10^5$。

「JOISC 2016 Day 4」最差记者 2

Hall 定理 + 线段树维护一下，交给大家了吧。

Section 2

网络流

算法介绍

求解问题

想象一些**有向**的水管，每个水管都有**固定的流量上限**，有源点可以出水，有汇点可以收水，问汇点单位时间最多可以收到多少水。

求解思路

对于原始网络，原来的一条边 (u, v, w)，我们有一条对应的**反向边**，就是 $(v, u, 0)$，代表着反悔操作。

算法介绍

求解问题

想象一些**有向**的水管，每个水管都有**固定的流量上限**，有源点可以出水，有汇点可以收水，问汇点单位时间最多可以收到多少水。

求解思路

对于原始网络，原来的一条边 (u, v, w)，我们有一条对应的**反向边**，就是 $(v, u, 0)$，代表着反悔操作。
我们在原始网络上面整一个残量网络。

算法介绍

求解问题

想象一些**有向**的水管，每个水管都有**固定的流量上限**，有源点可以出水，有汇点可以收水，问汇点单位时间最多可以收到多少水。

求解思路

对于原始网络，原来的一条边 (u, v, w)，我们有一条对应的**反向边**，就是 $(v, u, 0)$，代表着反悔操作。
我们在原始网络上面整一个残量网络。
每次我们要在网络上面整一条从 S 到 T 的 **可行的流**，也就是增广路。
每次找到增广路的时候，对于在增广路上面的每一条边 (u, v, w), 假设增广路的流量为 c，那么我们让这条边的残量流量 $-c$，其反向边残量流量 $+c$。

算法介绍

求解问题

想象一些**有向**的水管，每个水管都有**固定的流量上限**，有源点可以出水，有汇点可以收水，问汇点单位时间最多可以收到多少水。

求解思路

对于原始网络，原来的一条边 (u, v, w)，我们有一条对应的**反向边**，就是 $(v, u, 0)$，代表着反悔操作。
我们在原始网络上面整一个残量网络。
每次我们要在网络上面整一条从 S 到 T 的 **可行的流**，也就是增广路。
每次找到增广路的时候，对于在增广路上面的每一条边 (u, v, w), 假设增广路的流量为 c，那么我们让这条边的残量流量 $-c$，其反向边残量流量 $+c$。
直到不存在增广路。

最大流

FF

一直用 DFS 找增广路，复杂度为 $\mathcal{O}(m \times \text{最大流量})$

EK

FF 的改进版本，使用 BFS 找增广路，增广路的长度为 $\mathcal{O}(n)$，最多有 $\mathcal{O}(m)$ 条（不紧）增广路，每次查找的复杂度为 $\mathcal{O}(m)$，最后的复杂度为 $\mathcal{O}(nm^2)$

Dinic

应用比较广泛，先用 BFS 对于最短路进行 DAG 分层，然后 DFS 一次进行多路增广，每一次分层 + 增广的复杂度为 $\mathcal{O}(nm)$，而每次进行增广后，增广路的长度 **必须增加**，于是要增广 $\mathcal{O}(n)$ 次，最后的复杂度为 $\mathcal{O}(n^2m)$，~~但是根本跑不满~~。

代码?

自己过板子。

最小割定理

最小割

一个有向图，边有边权（一般为正），要求割去权值和最小的边集使得源点和汇点不连通。

最小割定理

最小割 = 最大流（证明不作要求）

构造

跑完网络流算法后，我们在残量网络上面再搞一次 BFS，把仍然和源点联通的点构成的集合视为 S，对于每条边，如果两端一段在 S，另一端不在 S，那么就属于最小割中的边集。

题目 D　节点控制

题面

给你一个高速公路网，每个点有一个控制代价，同时告诉你运输的起点和终点。
你可以控制若干节点，使得所有从初始节点出发到终止节点的路径必须经过你控制的节点。
求最小控制代价。

数据范围

$1 \le n \le 200, 1 \le m \le 2 \times 10^4$，$1 \le a, b \le n, a \ne b$，$1 \le c \le 10^7$，$1 \le x < y \le n$

Luogu4662 [BalticOI 2008] 黑手党

题解

把点化成边进行建图，就是最小割问题了。

概述

通过构造一张图，然后在上面求出最小割，解决以下问题：

现在有一堆物品，你可以选择任意一些物品，每个物品选择会有一定贡献，如果某些物品一起选择也会有一定的贡献，求贡献最大值。

题目 E 文理分科

题面

一个 $n \times m$ 的矩阵，每个格子代表一个同学。选择科目的时候会获得满意值：

1. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了文科，则他将获得 $art_{i,j}$ 的满意值，否则得到 $science_{i,j}$ 的满意值。
2. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了文科，并且他相邻的同学全部选择了文科，则他会更开心，所以会增加 $same\_art_{i,j}$ 的满意值。
3. 如果第 i 行第 j 列的同学选择了理科，并且他相邻的同学全部选择了理科，则增加 $same\_science_{i,j}$ 的满意值。

大家应该如何选择，才能使所有人的满意值之和最大。

数据范围

$n, m \leq 100$，读入数据均 ≤ 500。

Luogu4313 文理分科

题解

见板书。

题目 F Vote

题面

幼儿园里有 n 个小朋友打算通过投票来决定睡不睡午觉。
对他们来说，这个问题并不是很重要，于是他们决定发扬谦让精神。
虽然每个人都有自己的主见，但是为了照顾一下自己朋友的想法，他们也可以投和自己本来意愿相反的票。
我们定义一次投票的冲突数为好朋友之间发生冲突的总数加上和所有和自己本来意愿发生冲突的人数。
我们的问题就是，每位小朋友应该怎样投票，才能使冲突数最小？

数据范围

对于 100% 的数据，$2 \leq n \leq 300$，$1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$。

Luogu2057 [SHOI2007] 善意的投票 / [JLOI2010] 冠军调查

题解

也是板子。

题目 G PVZ 题

题面

给出一个 $n \times m$ 的网格图，每个点有一个植物，每个植物有其价值 P (可能为负数)，然后有其保护位置（植物不死，僵尸就不能到那里)，现在僵尸只能从某一行最后一列开始进攻并且吃掉植物，最大化僵尸最后的收益。

数据范围

$n \leq 20, m \leq 30$。

PEKING UNIVERSITY

[NOI2009] 植物大战僵尸

题解

最大权闭合子图板子。
考虑先拓扑排序，删掉那些永远不可能吃的位置，如果最后某个植物和 S 联通，那么就是会被吃，否则与 T 联通，就不被吃。

- $P \geq 0$: $ans \leftarrow ans + P,\ (S, x, 0), (x, T, P)$
- $P < 0$: $(S, x, -P), (x, T, 0)$

题目 H 科幻题

题面

现有 n 个太空站位于地球与月球之间，且有 m 艘公共交通太空船在其间来回穿梭。每个太空站可容纳无限多的人，而太空船的容量是有限的，第 i 艘太空船只可容纳 h_i 个人。每艘太空船将周期性地停靠一系列的太空站，例如 $(1, 3, 4)$ 表示该太空船将周期性地停靠太空站 $134134134\ldots$。每一艘太空船从一个太空站驶往任一太空站耗时均为 1。人们只能在太空船停靠时上、下船。
初始时所有人全在地球上，太空船全在初始站。试设计一个算法，找出让所有人尽快地全部转移到月球上的运输方案。

数据范围

$n \leq 13, m \leq 20, k \leq 50$。

P2754 [CTSC1999] 家园 / 星际转移问题

题解

时间分层，见板书。

题目 I Jump!

题面

在一个 r 行 c 列的网格地图中有一些高度不同的石柱，第 i 行 j 列的石柱高度为 $h_{i,j}$。
一些石柱上站着一些蜥蜴，你的任务是让尽量多的蜥蜴逃到边界外。
每行每列中相邻石柱的距离为 1，蜥蜴的跳跃距离是 d，即蜥蜴可以跳到**平面距离**不超过 d 的任何一个石柱上。
石柱都不稳定，每次当蜥蜴跳跃时，所离开的石柱高度减 1（如果仍然落在地图内部，则到达的石柱高度不变）。
如果该石柱原来高度为 1，则蜥蜴离开后消失，以后其他蜥蜴不能落脚。
任何时刻不能有两只蜥蜴在同一个石柱上。

数据范围

$1 \le r, c \le 20$，$1 \le d \le 4$，$1 \le h \le 3$。

Luogu2472 [SCOI2007] 蜥蜴

题目 J Luogu3227 [HNOI2013] 切糕

题面

将切糕视作一个长 P、宽 Q、高 R 的长方体点阵。(x, y, z) 有一个非负的不和谐值 $v(x, y, z)$。一个合法的切面满足以下两个条件：

1. 切面是一个函数 $f(x, y)$，对于所有 $(x, y)(x \in [1, P], y \in [1, Q])$，我们需指定一个切割点 $1 \le f(x, y) \le R$。
2. 相邻纵轴上的切割点不能相距太远。对于所有的 $1 \le x, x' \le P$ 和 $1 \le y, y' \le Q$，若 $|x - x'| + |y - y'| = 1$，则 $|f(x, y) - f(x', y')| \le D$，其中 D 是给定的一个非负整数。

可能有许多切面 f 满足上面的条件，找出总的切割点上的不和谐值最小的那个。

数据范围

$1 \le P, Q, R \le 40, 0 \le D \le R$，且给出的所有的不和谐值不超过 1000。

Luogu3227 [HNOI2013] 切糕

题解

1. 考虑利用最小割进行建图。

Luogu3227 [HNOI2013] 切糕

题解

1. 考虑利用最小割进行建图。
2. 考虑如何刻画第二个要求。

题目 K Luogu2766 最长不下降子序列问题

题面

给定正整数序列 $x_1 \ldots, x_n$。

1. 计算其最长不下降子序列的长度 s。
2. 如果每个元素只允许使用一次，计算从给定的序列中最多可取出多少个长度为 s 的不下降子序列。
3. 如果允许在取出的序列中多次使用 x_1 和 x_n（其他元素仍然只允许使用一次），则从给定序列中最多可取出多少个**不同的**长度为 s 的不下降子序列。

数据范围

$1 \leqslant n \leqslant 500$。

Luogu2766 最长不下降子序列问题

题目 L 数学构造题

题面

为了提高智商，ZJY 开始学习线性代数。
她的小伙伴菠萝给她出了这样一个问题：给定一个 $n \times n$ 的矩阵 B 和一个 $1 \times n$ 的矩阵 C。求出一个 $1 \times n$ 的 01 矩阵 A，使得 $D = (A \times B - C) \times A^{\mathsf{T}}$ 最大，其中 A^{T} 为 A 的转置，输出 D。

数据范围

$1 \leq n \leq 500$。

P3973 [TJOI2015] 线性代数

题解

注意到 A 是一个 01 矩阵，那么可以代表选或者不选，因此 B 的意义就是 i,j 同时选的收益，C 的意义就是 i 的代价，接着就是最大权闭合子图了。

题目 M 最小路径覆盖

题面

给定有向图 $G=(V,E)$ 。设 P 是 G 的一个简单路（顶点不相交）的集合。如果 V 中每个定点恰好在 P 的一条路上，则称 P 是 G 的一个路径覆盖。P 中路径可以从 V 的任何一个定点开始，长度也是任意的，特别地，可以为 0。G 的最小路径覆盖是 G 所含路径条数最少的路径覆盖。设计一个有效算法求一个 DAG（有向无环图）G 的最小路径覆盖。

数据范围

对于 100% 的数据，$1 \leq n \leq 150$，$1 \leq m \leq 6000$。

Luogu2764 最小路径覆盖问题

题解

1. 初始方案：每条路径就是每个点。
2. 考虑调整初始方案。

Luogu2764 最小路径覆盖问题

题解

1. 初始方案：每条路径就是每个点。
2. 考虑调整初始方案。
3. 拆点，分为入点 u 和出点 $u+n$。
4. 对于原图边 (u, v)，有边 $(u, v+n, 1)$；同时有边 $(S, u, 1), (u+n, T, 1)$。

题目 N 集合题

题面

有一个大小为 $n \leq 300$ 的全集，每个元素是一个数，有 n 个子集。题目保证任意 k 个子集的并的大小 $\geqslant k$ 。
每个子集有一个可正可负的权值，你需要选出一些子集使得这些子集并的大小等于子集个数，且所选子集的权值和最小。可以为空集。

CF103E Buying Sets

题解

神仙转换.jpg
有一个比较奇怪的事情，n 个子集。

CF103E Buying Sets

题解

神仙转换.jpg
有一个比较奇怪的事情，n 个子集。
我们考虑源点向每个集合连边，边权为 $\infty - w$，如果割掉就代表不选，每个集合向数连边 ∞，数向汇点连边 ∞。跑最大流，假设边权全是正的，因为有完备匹配，那么割边条数一定 $\geq n$，又边权到了 ∞，那么割边数目 $\leq n$，因此割边数目 $= n$。
因此不选的集合 $+$ 选的数字 $= n$，也就是并集大小 $=$ 集合个数。最后贡献取反即可。

题目 O　Regional development

题面

1. 给你一张有向图，以及参数 M，每条边你必须制定一个流量 w_i，满足 $1 \leqslant |w_i| < M$(负数表示反向边)。同时满足每条边的入度出度相同。
2. 不过现在已经有人给出了一个解法，只不过入度出度之差 $\bmod M = 0$。请你给出这个问题答案，无解输出 -1。

数据范围

$n \leqslant 1000, M \leqslant 1000$，边数 $\leqslant 1000$。

CERC 2021 Regional development

题解

1. 真的有无解吗？Hint：保证一定有解。

CERC 2021 Regional development

题解

1. 真的有无解吗？Hint：保证一定有解。
2. 令每个点权值为入度出度之差 $\div M$，每个联通块中，每次将一个正权值和负权值中间路径找出，全部减去 M，我们可以发现，中间点没变，但是我们离目标更近了一步。

CERC 2021 Regional development

题解

1. 真的有无解吗？Hint：保证一定有解。
2. 令每个点权值为入度出度之差 $\div M$，每个联通块中，每次将一个正权值和负权值中间路径找出，全部减去 M，我们可以发现，中间点没变，但是我们离目标更近了一步。
3. 将这个挪到网络流上即可。

最小费用最大流

EK

最基础的算法，把最大流的 BFS 改成 spfa 即可。

Dinic

在上一个 EK 基础上多路增广，但是仅有一小点优化，最坏复杂度不变。

代码

自己写。

题目 P　哈密顿回路?

题面

赛场由 N 颗行星和 M 条双向星际航路构成，要求车手们从一颗与这 N 颗行星之间没有任何航路的天体出发，访问这 N 颗行星**恰好**一次。
超能电驴有两种移动模式：高速航行模式和能力爆发模式。

1. 在高速航行模式下，超能电驴会展开反物质引擎，以数倍于光速的速度沿星际航路高速航行。在使用高速航行模式的时候，**只能从编号小的星球飞往大的星球**。
2. 在能力爆发模式下，超能电驴脱离时空的束缚，使用超能力进行空间跳跃——在经过一段时间的定位之后，它能瞬间移动到任意一个行星。

请你安排一条比赛的方案，使得能够用最少的时间完成比赛。

数据范围

$N \leq 800$，$M \leq 1.5 \times 10^4$。

Luogu2469 [SDOI2010] 星际竞速

题目 Q 武火急烹

题面

美食节共有 n 种不同的菜品，总共有 m 个厨师来制作这些菜品，第 j 个厨师制作第 i 种菜品的时间记为 $t_{i,j}$。
每个同学的等待时间为**厨师开始做菜起，到自己那份菜品完成为止**的时间总长度。换句话说，如果一个同学点的菜是某个厨师做的第 k 道菜，则他的等待时间就是这个厨师制作前 k 道菜的时间之和。**总等待时间**为**所有同学的等待时间之和。**
有 p_i 个同学点了第 i 种菜品。最小的总等待时间是多少。

数据范围

$n \le 40$，$m \le 100$，$p \le 800$，$t_{i,j} \le 1000$（其中 $p = \sum p_i$）。

Luogu2050 [NOI2012] 美食节

题目 R 餐巾

题面

一个餐厅在相继的 N 天里，第 i 天需要 r_i 块餐巾。餐厅可以购买新的餐巾，每块餐巾的费用为 p 分；或者把旧餐巾送到快洗部，洗一块需 m 天，其费用为 f 分；或者送到慢洗部，洗一块需 n 天 $(n > m)$，其费用为 s 分 $(s < f)$。
试设计一个算法为餐厅合理地安排好 N 天中餐巾使用计划，使总的花费最小。编程找出一个最佳餐巾使用计划。

数据范围

$N \leqslant 2000, r_i \leqslant 10000000, p, f, s \leqslant 10000$。

北京大学 PEKING UNIVERSITY

Luogu1251 餐巾计划问题

题解

这么连边:

1. $(S, i, r_i, 0), (i+N, T, r_i, 0), (S, i+N, r_i, p)$。
2. $(i, i+m+N, \infty, f), (i, i+n+N, \infty, s)$。

题目 S 区间题

题面

给定实直线 L 上 n 个开区间组成的集合 $\mathbf{I}$，和一个正整数 k，试设计一个算法，从开区间集合 $\mathbf{I}$ 中选取出开区间集合 $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{I}$，使得在实直线 L 上的任意一点 x，S 中包含 x 的开区间个数不超过 k，且 $\sum_{z \in \mathsf{S}} |z|$ 达到最大（$|z|$ 表示开区间 z 的长度）。
这样的集合 $\mathbf{S}$ 称为开区间集合 $\mathbf{I}$ 的最长 k 可重区间集。$\sum_{z \in \mathsf{S}} |z|$ 称为最长 k 可重区间集的长度。
对于给定的开区间集合 $\mathbf{I}$ 和正整数 k，计算开区间集合 $\mathbf{I}$ 的最长 k 可重区间集的长度。

数据范围

$n \leq 300$ $k \leq 3$。

P3358 最长 k 可重区间集问题

题解

我们可以按照将方案划分为 k 个两两不相交的区间组，因此，可以考虑如下建图：

- $(S, 1, k, 0)$
- $(i, i+1, k, 0)$
- $(a_i, b_i, 1, b_i - a_i)$

然后离散化后最大费用最大流就行了。

题目 T 再来！线段题

题面

给定平面 $x-O-y$ 上 n 个开线段组成的集合 I，和一个正整数 k 。试设计一个算法，从开线段集合 I 中选取出开线段集合 $S \subseteq I$，使得在 x 轴上的任何一点 p，S 中与直线 $x=p$ 相交的开线段个数不超过 k，且 $\sum_{z \in S} |z|$ 达到最大。这样的集合 S 称为开线段集合 I 的最长 k 可重线段集。$\sum_{z \in S} |z|$ 称为最长 k 可重线段集的长度。

对于任何开线段 z，设其断点坐标为 (x_0, y_0) 和 (x_1, y_1)，则开线段 z 的长度 $|z|$ 定义为：

$$|z| = \lfloor \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} \rfloor$$

对于给定的开线段集合 I 和正整数 k，计算开线段集合 I 的最长 k 可重线段集的长度。

P3357 最长 k 可重线段集问题

题解

继续按照"Luogu3358 最长 k 可重区间集问题" 来，只要把线段映射到 x 坐标上就行了。
但是会出现一个问题，会有 (x, x) 这种线段，那么就会出问题，

P3357 最长 k 可重线段集问题

题解

继续按照"Luogu3358 最长 k 可重区间集问题" 来，只要把线段映射到 x 坐标上就行了。
但是会出现一个问题，会有 (x, x) 这种线段，那么就会出问题，这个时候，我们可以考虑**扩域**，所有 x 坐标 $\times 2$，然后设映射的区间为 (x_1, x_2)，如果 $x_1 = x_2$，那么 $x_2 \leftarrow x_2 + 1$，否则 $x_1 \leftarrow x_1 + 1$，可以发现，问题解决了。
之后就是"Luogu3358 最长 k 可重区间集问题" 的问题了。

题目 U 优化题

n 个排成一列的哨站要进行通信。第 i 个哨站的频段为 a_i。

每个哨站 i 需要选择以下二者之一：

1. 直接连接到控制中心，代价为 W
2. 连接到前面的某个哨站 j ($j < i$)，代价为 $|a_i - a_j|$。每个哨站只能被后面的至多一个哨站连接。

请你求出最小可能的代价和。

$1 \leq n \leq 1000$，$0 \leq W, a_i \leq 10^9$

提示：可以先想一想暴力建图。

[SNOI2019] 通信

考虑暴力网络流，我们把 x 拆为两个点 x, x'，如果 x 流向 T 则代表和控制中心连接，如果 x 连向 y' 那么就代表是连接 y，然后 y' 在连向 T，代表把最多向后连的限制让给 x。

于是这么建图：

- $(S, x, 1, 0)$
- $(x, T, 1, W)$
- $(x, y', 1, |a_x - a_y|)$ $(x > y)$
- $(x', T, 1, 0)$

[SNOI2019] 通信

考虑暴力网络流，我们把 x 拆为两个点 x, x'，如果 x 流向 T 则代表和控制中心连接，如果 x 连向 y' 那么就代表是连接 y，然后 y' 在连向 T，代表把最多向后连的限制让给 x。

于是这么建图：

- $(S, x, 1, 0)$
- $(x, T, 1, W)$
- $(x, y', 1, |a_x - a_y|)$ $(x > y)$
- $(x', T, 1, 0)$

暴力建边很可能 T 掉，于是考虑优化。

我们可以用 CDQ + 归并处理。

最小割树

构建方法

每次 `rand` 两个点 x, y ，然后求出这两个点之间的最小割，在最小割树上连边 (x, y)，边权为最小割，然后会将整个集合分为两个小集合，递归下去不断构建即可。
构建复杂度为 $\mathcal{O}(n^3m)$。

重要性质

a, b 的最小割等于 (a, b) 在最小割树上边的最小值。

之后定义 $\lambda(a, b)$ 为 a, b 的最小割。

模板题：Luogu4897 【模板】最小割树（Gomory-Hu Tree）。

性质证明 I

性质 1

对于边 (x, y)，p, q 分别属于该边两侧的子树，则有 $\lambda(x, y) \geq \lambda(p, q)$。

如果不成立，那么割 (x, y) 的代价割不掉 (p, q)，p, x 联通，q, y 联通，于是 (x, y) 没有割掉。

北京大学 PEKING UNIVERSITY

性质证明 II

性质 2

对于任意不同的 a, b, c，$\lambda(a, b) \geq \min\{\lambda(b, c), \lambda(a, c)\}$

假设最小的是 $\lambda(a, b)$，假设 c 在割掉 (a, b) 之后和 b 联通，那么由性质 1，$\lambda(a, b) \geq \lambda(a, c)$，有因为假设 $\lambda(a, b)$ 最小，于是 $\lambda(a, b) = \lambda(a, c)$。

于是最小值至少有两个，下面就很好说明了。

性质 2 推论

对于 a, b, $\lambda(a, b) \geq \min\{\lambda(a, a_1), \lambda(a_1, a_2) \ldots, \lambda(a_t, b)\}$

综合以上结论，a, b 的最小割等于 (a, b) 在最小割树上边的最小值。

代码

```
int get(int x, int y) {
    F :: reset(); F :: setst(x, y);
    rep(i, 1, m)
        F :: link(u[i], v[i], w[i]), F :: link(v[i], u[i], w[i]);
    return F :: runit();
}

void build(int l, int r) {
    if(l == r) return; int x = p[l], y = p[r], w = get(x, y);
    G[x].eb(y, w); G[y].eb(x, w);
    top = 0, top2 = l;
    rep(i, l, r)
        if(!F :: d[p[i]]) q[++top] = p[i];
        else p[top2++] = p[i];
    int cur = r; while(top) p[cur--] = q[top--];
    build(l, cur); build(cur + 1, r);
}
```

题目 V 排列题

$n \le 100$ 个点，$m \le 1000$ 条边的带权无向图。

你需要构造一个排列，收益为 $\sum_{i=2}^{n} \operatorname{mincut}(a_{i-1}, a_i)$ 。

$\operatorname{mincut}(S, T)$ 表示图中 S 为源点，T 为汇点的最小割。

求最大的收益，并输出方案。

CF343E Pumping Stations

首先建立最小割树，然后定义两点之间距离为其在最小割树上边权的 $\min$ 值，问题就是：求一个排列，使得其路径之和最长。

因为是 $\min$ 值作为路径，因此，答案的上界就是所有边权之和，我们可以考虑构造一种方案使得答案到达上界：

- 树分治，然后每次在这个树中找到边权最小的边，对于 (x, y) 在树上的路径，如果跨过该边，那么距离就是该边权值了。
- 因为该权值最小，我们要先尽量不经过这条边，分别把分出的两个集合走完，最后在跨过这条边，刚好经过一次。

因此最后的答案是可以达到所有边权之和这一上界的。

代码

完结撒花

谢谢大家！

PEKING UNIVERSITY