Analysis für Informatik [MA0902]

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt Nummer ....

Rückgabe in Übungsgruppe ...

Student*in	Vorname	Nachname	Matrikelnummer
1	Malte	Bai	03752839
2	Yann Marius	Müller	03738057
3	Francesca	Frederick	03763243
4	Chengjie	Zhou	03756877

——— vom Korrektor auszufüllen ———

Punkte	Sinnvoll bearbeitet

ANALYSIS

BLATT 2

a) $$\frac{5n^2+3n+8}{(n+4)^2+\sqrt{\pi n}} = \frac{5n^2+3n+8}{n^2+8n+16+\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{n^{-2}}{n^{-2}} = \frac{5+3/n+8/n^2}{1+8/n+16/n^2+\sqrt{\pi}/n^{3/2}}$$

$$\to \frac{5}{1} = \boxed{5}$$

b) Fall 1 : $q = 0$ $\lim_{n \to \infty} 0^n = 0$ Konvergenz

Fall 2 : $q = 1$ $\lim_{n \to \infty} 1^n = 1$ Konvergenz

Fall 3 : $q = -1$ $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ existiert nicht Divergenz

Fall 4 : $q > 1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} (1 + q - 1)^n$$
$$= \lim_{n \to \infty} (1 + (q-1))^n$$
$$\geq \lim_{n \to \infty} 1 + n(q-1)$$
$$= \infty$$

Divergenz

Fall 5 : $q < -1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} (1 + q - 1)^n$$
$$= \lim_{n \to \infty} (1 + (q-1))^n$$
$$\geq \lim_{n \to \infty} 1 + n(q-1)$$
$$= -\infty$$

Divergenz

Fall 6 : $0 < |q| < 1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1+p}\right)^n$$
$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(1+p)^n}$$
$$\leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+np}$$
$$= 0$$

$$q^n - \varepsilon \leq 0$$
$$q^n \leq \varepsilon$$

Konvergenz

c) $n \cdot q^n = \frac{n}{q^{-n}} \xrightarrow{L.H.} \frac{n}{-\ln(q) \cdot q^{-n}}$

$= -\frac{1}{\ln(q)} \cdot q^n \to -\frac{1}{\ln(q)} \cdot 0 = \boxed{0}$

Konvergenz

Aus Teil b kann man die Schlussfolgerung herausziehen, dass $q^n = \varepsilon$, solange $0 < |q| < 1$

d) $\lim_{n \to \infty} \sqrt{b_n} = \lim_{n \to \infty} b_n^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{n \to \infty} b_n\right)^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}$

Konvergenz

Da b_n zu einer nichtnegativen Zahl $\varepsilon > 0$ konvergiert, kann man dann daraus schließen, dass $\sqrt{b_n}$ zu einer nichtnegativen Zahl $\sqrt{\varepsilon} > 0$ konvergiert. Daher ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = n$ stetig, weshalb es gilt, dass

$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty}(x_n))$

e) $\lim_{n \to \infty} b_n \cdot c_n = \lim_{n \to \infty} b_n \cdot \lim_{n \to \infty} c_n = 0 \cdot \varepsilon = 0$ Konvergenz