Analysis für Informatik [MA0902]

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt Nummer ....

Rückgabe in Übungsgruppe ...

Student*in	Vorname	Nachname	Matrikelnummer
1	Malte	Bai	03752839
2	Yann Marius	Müller	03738057
3	Francesca	Frederick	03763243
4	Chengjie	Zhou	03756877

——— vom Korrektor auszufüllen ———

Punkte	Sinnvoll bearbeitet

TU München, Zentrum Mathematik
WS 2022/2023

Prof. Dr. Silke Rolles
Dr. Diana Conache

Analysis für Informatik [MA0902]
Blatt 1

Ausgabe: 18. Oktober 2022
Abgabe: bis 25. Oktober 2022, 18 Uhr in Moodle

Hausaufgabe 1.1. (4 Punkte) Eine *Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass die folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(N2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (absolute Homogenität)

(a) Zeigen Sie, dass eine Norm stets nichtnegativ ist, d.h. es gilt $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Hinweis: Betrachten Sie $\|x - x\|$.

(b) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \,, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,.$$

Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.
Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Satz 2.1) um (N2) nachzuweisen.

(c) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird. Wird durch $\sum_{i=1}^{n} x_i$ auch eine Norm definiert? Warum?

(d) Zeigen Sie, dass durch die Vorschrift

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

(e) Zeichnen Sie die Mengen $B_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$, $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = 1\}$ und $B_\infty := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass es mehrere sinnvolle Arten gibt, die *Länge* eines Vektors in $\mathbb{R}^n$ zu definieren.

Weitere Organisatorische Hinweise:

1. Sie können das Forum für Studierende in moodle benutzen, um Partner für die Hausaufgaben Gruppe zu finden.
2. Man muss nicht immer in der gleichen Gruppe abgeben, aber bitte **immer** die Namen der Mitglieder der Gruppe auf dem Deckblatt angeben!
3. Bitte verwenden Sie das Forum in moodle auch für organisatorische Fragen. Bitte in *frag.jetzt* nur **inhaltliche** Fragen stellen, nichts zu Aufzeichnungen.
4. Es werden schnellst möglich noch weitere Termine für Online Übungen eingetragen. Es werden auf jeden Fall auch Online Übungen geben.
5. Aufzeichnungen der Vorlesung oder Übungen sind verboten! Dazu ist auch die Verbreitung der Materialien aus moodle verboten. Diese liegen unter dem Urhebeschutz der Dozenten!

Analysis für Informatik

BLATT 1

1

a) $\|x - x\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\|$

Da $x - x = 0$, gilt es $\|x - x\| = 0$

$\|x\| + \|-x\| \geq 0$

$\|x\| + |-1| \; \|x\| \geq 0$ (N3)

$2 \|x\| \geq 0$

$\|x\| \geq 0$

QED

b)

(N1) $\|x\|_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = 0 \Rightarrow \forall x_j .\ x_j = 0 = \|x\|_2$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = 0 \Rightarrow \|x\|_2 = 0$

(N2) $$\begin{aligned}\|x+y\|_2 &= \sqrt{<x+y, x+y>} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2x_j y_j + y_j^2} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{j=1}^{n} 2x_j y_j + \sum_{j=1}^{n} y_j^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j} \\ &= \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2<x,y>} \\ &\leq \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2} \quad \text{(cauchy-schwarz)} \\ &= \sqrt{(\|x\|_2 + \|y\|_2)^2} \\ &= \|x\|_2 + \|y\|_2\end{aligned}$$

(N3) $$\begin{aligned}\|\lambda x\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\lambda x_j)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda^2 x_j^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1} x_j^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x^2} = |\lambda| \cdot \|x\|_2\end{aligned}$$

QED

c)

(N1) $x = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |0| = 0 = \|x_1\|$

$\|x_1\| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow x = 0$

(N2) $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i|$ (Dreiecksungleichung)

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$

$= \|x\|_1 + \|y\|_1$

(N3)

$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|$

$= |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$= |\lambda| \, \|x\|_1$

QED

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

N3

$$\|\lambda x\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \lambda \cdot \|x\| \neq |\lambda| \cdot \|x\| \quad | : \|x\|$$

$$\lambda \neq |\lambda| \quad \lightning$$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i$ ist keine gültige Norm!

d)

(N1) $\|x\|_\infty = 0 \iff \forall x_i \in \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.\ x_i = 0$

(N2) Bestimme ein k sodass

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= |x_k + y_k| \\ &\leq |x_k| + |y_k| && \text{(Dreiecksgleichung auf } \mathbb{R}\text{)} \\ &\leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty && \text{Da } \|x\|_\infty = \max\{x_1 \dots x_n\}, \\ & && \text{gilt es } |x_k| \leq \|x_\infty\| \end{aligned}$$

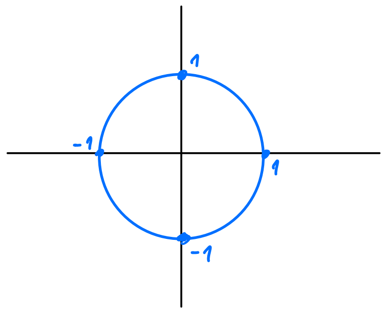
(N3)

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_\infty &= \max\{|\lambda x_1| \dots |\lambda x_n|\} \\ &= |\lambda| \cdot \max\{|x_1| \dots |x_n|\} \\ &= |\lambda|\, \|x\|_\infty \end{aligned}$$

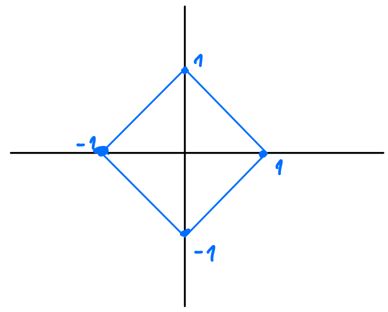
QED

e)

B_2



B_1



B_3