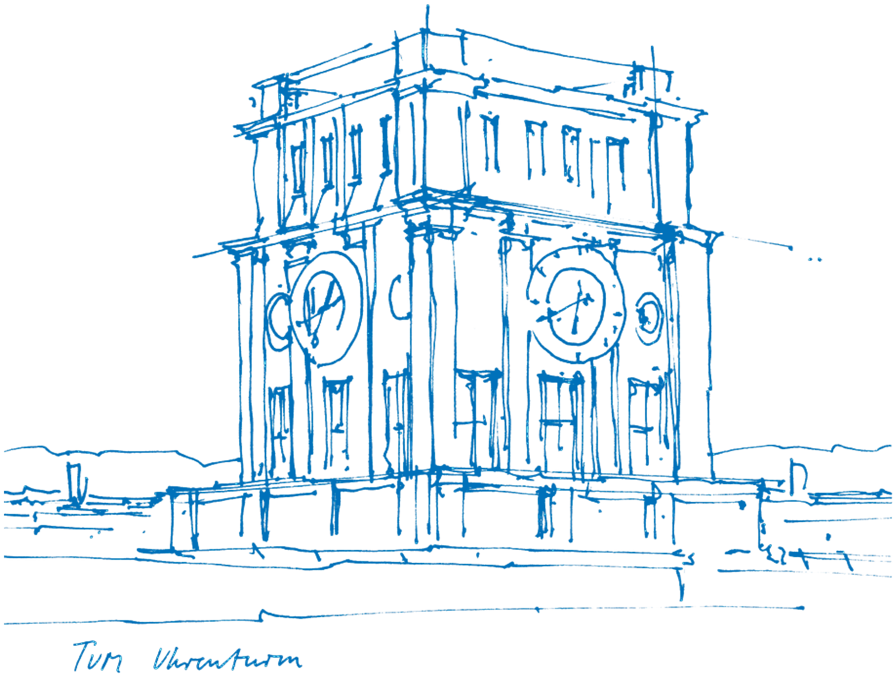
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 4. Dezember 2023



Prüfungsanmeldung freigeschaltet!!!

Graphentheorie — Eulertour/Eulerpfad

In einem Eulertour/Eulerpfad wird jede Kante genau einmal besucht.

- Jeder Knoten in einem einfachen zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ mit einem geraden positiven Knotengrad besitzt eine Eulertour.

Graphentheorie — Eulertour/Eulerpfad

Auf Eulertour prüfen:
Alle Knoten haben einen geraden positiven Knotengrad: WENN der Graph ZUSAMMENHÄNGEND ist, dann hat er eine Eulertour.

Sonst hat der Graph keine Eulertour.

Auf Eulerpfad prüfen:
Alle Knoten oder alle außer 2 Knoten haben einen geraden positiven Knotengrad: WENN der Graph ZUSAMMENHÄNGEND ist, dann hat er einen Eulerpfad.

Sonst hat der Graph keine Eulerpfad.

Aufgabe

Aufgabe 7.1

(a) Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Baum mit genau $n \geq 2$ Knoten und aufsteigend sortierter Gradsequenz $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Zeigen Sie:

(i) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

(ii) $d_1 = d_2 = 1$.

(i)

① Induktion oder Theorie

(ii)

VL-Skript Abschnitt 143

3 Eigenschaften

1.
2.
3.

Aufgabe 7.1

(b) Zeigen Sie: jede aufsteigend sortierte Gradsequenz $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ mit $n \geq 2$, $d_1 = d_2 = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ lässt sich durch einen Baum realisieren.

Zu Zeigen

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach $n \geq 2$. Nehmen Sie für den Induktionsschritt an, dass, sollte die gegebene Folge durch einen Baum realisierbar sein, es dann auch stets einen Baum mit dieser Gradfolge gibt, in dem ein Knoten vom maximalen Grad stets ein Blatt als Nachbarn hat.

Basis :

Schritt

Annahme :

Behauptung :

Beweis :

Wir untersuchen ein Wort w, das: - alle Wörter $\in \Sigma^k$ enthält
- Länge $|\Sigma|^k + k - 1$ hat

Aufgabe 7.2

Sei Σ ein endliches Alphabet und $k > 1$ beliebig aber fest. Zeigen Sie: Es gibt ein Wort $w \in \Sigma^*$ der Länge $|w| = |\Sigma|^k + k - 1$, welches jedes Wort der Länge k genau einmal als Faktor enthält, d.h. für jedes $u \in \Sigma^k$ gibt es $x, y \in \Sigma^*$ mit $w = xuy$.

Geben Sie speziell für $\Sigma = \{a, b\}$ und $k = 3$ ein solches Wort an.

Hinweis : Konstruieren Sie einen geeigneten Graphen mit Knotenmenge $V = \Sigma^{k-1}$.

Fürs Fall

$k = 3$ und $\Sigma = \{a, b\}$

Graph:

Knoten:

Beispielwort:

Allgemein

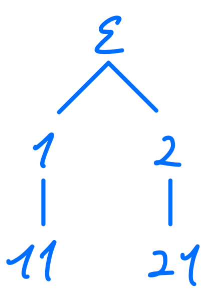
Aufgabe 7.3

Wir betrachten folgende Regeln, um eine Menge von *zulässigen* endlichen Wurzelbäume (V, E) mit $V \subseteq \{1,2\}^*$, $E \subseteq \{(u, u1), (u, u2) \mid u \in \{1,2\}^*\}$ und Wurzel ε zu konstruieren:

- Der Baum $(\{\varepsilon\}, \emptyset)$ ist *zulässig*.
- Ist $T_1 = (V_1, E_1)$ ein *zulässiger* Baum, dann auch T mit $V = \{1u \mid u \in V_1\} \cup \{\varepsilon\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1)\} \cup \{(1u, 1v) \mid (u, v) \in E_1\}$.
- Sind $T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2)$ zwei *zulässige* Bäume, dann auch T mit $V = \{11u \mid u \in V_1\} \cup \{2u \mid u \in V_2\} \cup \{\varepsilon, 1\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1), (1, 11), (\varepsilon, 2)\} \cup \{(11u, 11v) \mid (u, v) \in E_1\} \cup \{(2u, 2v) \mid (u, v) \in E_2\}$.

Beispiele

$\varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow$



$\rightarrow$

$\varepsilon + $

$T_1 \quad T_2 \rightarrow$

$T_2 \quad T_1 \rightarrow$

Aufgabe 7.3

Wir betrachten folgende Regeln, um eine Menge von *zulässigen* endlichen Wurzelbäume (V, E) mit $V \subseteq \{1,2\}^*$, $E \subseteq \{(u, u1), (u, u2) \mid u \in \{1,2\}^*\}$ und Wurzel ε zu konstruieren:

- Der Baum $(\{\varepsilon\}, \emptyset)$ ist *zulässig*.
- Ist $T_1 = (V_1, E_1)$ ein *zulässiger* Baum, dann auch T mit $V = \{1u \mid u \in V_1\} \cup \{\varepsilon\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1)\} \cup \{(1u, 1v) \mid (u, v) \in E_1\}$.
- Sind $T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2)$ zwei *zulässige* Bäume, dann auch T mit $V = \{11u \mid u \in V_1\} \cup \{2u \mid u \in V_2\} \cup \{\varepsilon, 1\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1), (1, 11), (\varepsilon, 2)\} \cup \{(11u, 11v) \mid (u, v) \in E_1\} \cup \{(2u, 2v) \mid (u, v) \in E_2\}$.

ε

1 in T_1: ε

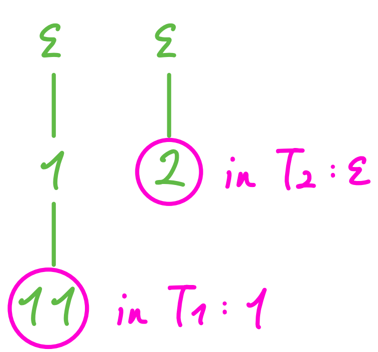
$1\,T_1$: Ein 1 vor jedem Knoten von T_1 hinzufügen

$\Rightarrow T_{k+1} =$

Aufgabe 7.3

Wir betrachten folgende Regeln, um eine Menge von *zulässigen* endlichen Wurzelbäume (V, E) mit $V \subseteq \{1,2\}^*$, $E \subseteq \{(u, u1), (u, u2) \mid u \in \{1,2\}^*\}$ und Wurzel ε zu konstruieren:

- Der Baum $(\{\varepsilon\}, \emptyset)$ ist *zulässig*.
- Ist $T_1 = (V_1, E_1)$ ein *zulässiger* Baum, dann auch T mit $V = \{1u \mid u \in V_1\} \cup \{\varepsilon\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1)\} \cup \{(1u, 1v) \mid (u, v) \in E_1\}$.
- Sind $T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2)$ zwei *zulässige* Bäume, dann auch T mit $V = \{11u \mid u \in V_1\} \cup \{2u \mid u \in V_2\} \cup \{\varepsilon, 1\}$ und $E = \{(\varepsilon, 1), (1, 11), (\varepsilon, 2)\} \cup \{(11u, 11v) \mid (u, v) \in E_1\} \cup \{(2u, 2v) \mid (u, v) \in E_2\}$.



$\downarrow$ $11T_1$:

Ein 11 vor jedem Knoten von T_1 hinzufügen

$\downarrow$ $2T_2$:

Ein 2 vor jedem Knoten von T_2 hinzufügen

$\Rightarrow T_{k+2} =$

a) kommt danach :)

Sei $N(k)$ die Anzahl der *zulässigen* Bäume, **in denen jeder Pfad von der Wurzel ε zu einem Blatt genau die Länge k hat**.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Rechenvorschrift an, die $N(k+1)$ mittels der Werte $N(1), \ldots, N(k)$ bestimmt.

T_{k+2} :

Sei $N(k)$ die Anzahl der *zulässigen* Bäume, **in denen jeder Pfad von der Wurzel** ε **zu einem Blatt genau die Länge** k **hat**.

(a) Bestimmen Sie $N(k)$ für $k = 0, 1, 2, 3$ explizit, indem Sie die entsprechenden zulässigen Bäume zeichnen.

Base Cases $\begin{cases} N(0) = \\ N(1) = \end{cases}$

$N(2) =$

$=$

$=$

$N(3) =$

$=$

$=$

Sei $N(k)$ die Anzahl der *zulässigen* Bäume, **in denen jeder Pfad von der Wurzel ε zu einem Blatt genau die Länge k hat**.

(c) Zeigen Sie mittels geeigneter Induktion, dass $N(k) \geq 2^{(k-4)^2}$ für alle $k \geq 4$ gilt.

Gegeben: $N(k+2) = N(k+1) + N(k) \cdot N(k+1)$

$\Rightarrow$ Zweistufig

Basis:

Schritt: Sei $k \geqslant 6$ beliebig fixiert

Annahme:

Behauptung:

Beweis :

Fragen?