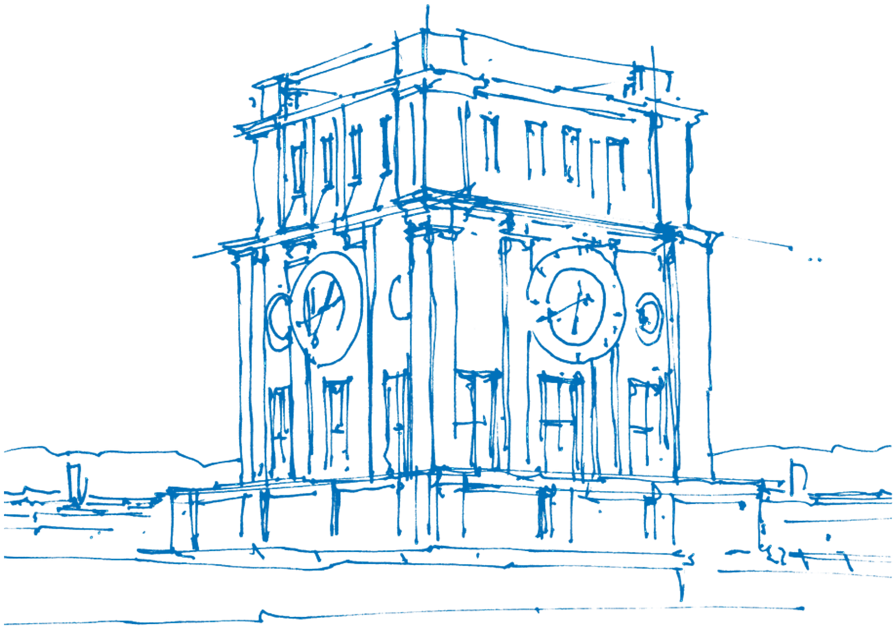
# Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 29. Januar 2023



TUM Uhrenturm

# Kombinatorik — Stirling Zahl

Stirling Zahl 1. Art

- $s_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen in Zyklenschreibweise von $n$ Elementen mit genau $k$ Zyklen an.
- $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$
- $s_{0,0} = 1$, $s_{n,0} = 0$, $s_{n,n} = 1$

\# Permutionen über [N],
welche in je $\lambda_i$ viele Zykel der Länge i zerfallen

$$\frac{N!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_N! \cdot 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots N^{\lambda_N}}$$

Stirling Zahl 2. Art

- $S_{n,k}$ gibt die Anzahl der Partitionen einer $n$-elementigen Menge in $k$ nichtleere Klassen an.
- $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1m,k}$
- $S_{0,0} = 1$, $S_{n,0} = 0$, $S_{n,n} = 1$

\# Äquiv.relationen über [N],
welche genau $\lambda_i$ viele i-elementige Äquiv.klassen besitzt

$$\frac{N!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_N! \cdot (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \dots (N!)^{\lambda_N}}$$

# Kombinatorik — Verteilung: Die Goldene Tabelle

| $k$ Bälle $\rightarrow n$ Urnen | Pro Urne Beliebig viele Bälle (Beliebig) | Pro Urne Höchstens 1 Ball (Injektiv) | Pro Urne Mindestens 1 Ball (Surjektiv) | Pro Urne Genau 1 Ball (Bijektiv) |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Bälle unterscheidbar, Urnen unterscheidbar | $n^k$ | $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $n! \cdot S_{k,n}$ | $k!$ |
| Bälle gleich, Urnen unterscheidbar | $\binom{n+k-1}{k}$ | $\binom{n}{k}$ | $\binom{k-1}{n-1}$ | $1$ |
| Bälle unterscheidbar, Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$ | $1$ | $S_{k,n}$ | $1$ |
| Bälle gleich, Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$ | $1$ | $P_{k,n}$ | $1$ |

# Aufgaben

**Aufgabe 13.1**

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(a) Wie viele solche Einteilungen gibt es, wenn man allein daran interessiert ist, wie viele Gruppen es einer bestimmten Größe gibt?

Aufzählung

| Drei | Vier | Fünf | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | Mit 3 Fünfer-Gruppen bleiben noch 4 Kinder übrig<br>Einzige Möglichkeit: 1 Vierer-Gruppe |
| 3 | 0 | 2 | Mit 2 Fünfer-Gruppen bleiben noch 9 Kinder übrig<br>Einzige Möglichkeit: 3 Dreier-Gruppen |
| 2 | 2 | 1 | Mit 1 Fünfer-Gruppen bleiben noch 14 Kinder übrig<br>Einzige Möglichkeit: 2 Dreier-Gruppen und 2 Vierer-Gruppen |
| 1 | 4 | 0 | Mit 3 Fünfer-Gruppen bleiben noch 4 Kinder übrig<br>2 Möglichkeiten: 4 Vierer-Gruppen und 1 Dreier-Gruppe<br>1 Vierer-Gruppe und 5 Dreier-Gruppe |
| 5 | 1 | 0 | |

### Aufgabe 13.1

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(b) Wie viele solche Einteilungen gibt es, wenn man die Gruppen anhand ihrer Mitglieder unterscheidet und noch zusätzlich jeder Gruppe einen eindeutigen Gruppenname zuordnet?

| $\xi$ (Partition) | | |
|---|---|---|
| $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ |
| Drei | Vier | Fünf |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 4 | 0 |
| 5 | 1 | 0 |

# Äquiv.relationen über [N], welche genau $\lambda_i$ viele $i$-elementige Äquiv.klassen besitzt

$$\frac{N!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_N! \cdot (1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\ldots(N!)^{\lambda_N}}$$

$$\Rightarrow \frac{19!}{\lambda_3!\,\lambda_4!\,\lambda_5! \cdot (3!)^{\lambda_3}(4!)^{\lambda_4}(5!)^{\lambda_5}}$$

$$\sum_{(\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\xi}\left(\underbrace{\frac{19!}{\lambda_3!\,\lambda_4!\,\lambda_5! \cdot (3!)^{\lambda_3}(4!)^{\lambda_4}(5!)^{\lambda_5}}}_{\#\text{ Äquiv.relationen zu } \lambda \text{ (Varianten)}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=3}^{5}\lambda_i\right)!}_{\text{Zuordnung von Namen}}\right)$$

## Aufgabe 13.1

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(c) Zum Mittagessen wird jede Gruppe von Kindern an einen eigenen runden Tisch gesetzt.

Wie viele mögliche Sitzordnungen für die Kinder gibt es, wenn es nur entscheidend ist, wer die jeweiligen linken und rechten Sitznachbarn sind?



| $\xi$ (Partition) | | |
|---|---|---|
| $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\lambda_5$ |
| Drei | Vier | Fünf |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 4 | 0 |
| 5 | 1 | 0 |

\# Permutionen über [N], welche in je $\lambda_i$ viele Zykel der Länge $i$ zerfallen

$$\frac{N!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_N! \cdot 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots N^{\lambda_N}}$$

$$\Rightarrow \frac{19!}{\lambda_3!\,\lambda_4!\,\lambda_5! \cdot 3^{\lambda_3} 4^{\lambda_4} 5^{\lambda_5}}$$

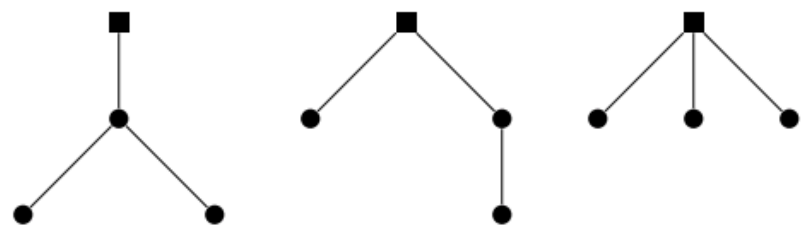
$$\sum_{(\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)\in\xi} \frac{19!}{\lambda_3!\,\lambda_4!\,\lambda_5! \cdot 3^{\lambda_3} 4^{\lambda_4} 5^{\lambda_5}}$$

13.2

(a) Wie viele Wurzelbäume der Höhe $\leq 3$ gibt es mit genau $n+1$ Knoten ($n \in \mathbb{N}$), wenn isomorphe Wurzelbäume identifiziert, d.h. nur einmal gezählt werden?

**Bemerkung:** Nach Vorlesung ist die Höhe eines Wurzelbaums die Länge eines längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt **plus** 1.

*Beispiel*: Bis auf Isomorphie gibt es folgende Wurzelbäume der Höhe $\leq 3$ mit 4 Knoten (Wurzel als Quadrat):





Wurzel

$n + 1 - 1 = n$ Knoten auf Teilbäume verteilt

ohne Wurzel

Da die Teilbäume Höhe 2 besitzen, hat jeder Teilbaum ein Wurzel. Die sonstige Knoten sind sowohl Kindern, als auch Blätter. Daher hat jeder Teilbaum bis auf Isomorphie nur 1 Variante, weshalb wir nur auf die Anzahl der Knoten pro Teilbaum aufpassen sollen.

Aufteilung $n$ Euro in $k$ Päckchen, jedes Päckchen enthält mind. 1 Euro $\Rightarrow P_{n,k}$

Fälle 0 bis $n$ Teilbäume $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = P_{2n,n}$

13.2

(b) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bezeichnen $n \in \mathbb{N}$ unterschiedlich große Scheiben: die Scheibe $S_j$ darf auf die Scheibe $S_i$ genau dann gelegt werden, wenn $j < i$ gilt. Es darf immer höchstens eine Scheibe direkt auf einer anderen Scheibe liegen (siehe unten).

Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, die $n$ Scheiben zu $k \in \mathbb{N}$ Türmen zu stapeln? Die Reihenfolge der Türme ist egal.

*Beispiel*: Für $n = 4$ und $k = 2$ gibt es **unter anderem** folgende Möglichkeiten:



Umformulieren: $n$ Scheiben in $k$ nicht leere Stapeln partitionieren

→ Reihenfolge gibt es schon: Die Scheiben werden nach Größe sortiert

⇒ Stirling-Zahl 2. Art

– $S_{n,k}$ gibt die Anzahl der Partitionen einer $n$-elementigen Menge in $k$ nichtleere Klassen an.

⇒ $S_{n,k}$

## Aufgabe 13.3

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Meerschweinchen 23 Meerschweinchenzüchtern zuzuordnen, wenn

(a) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?

(b) nur Meerschweinchen unterschieden werden, Meerschweinchenzüchter jedoch nicht?

(c) nur Meerschweinchenzüchter unterschieden werden, Meerschweinchen jedoch nicht?



| k Bälle 42<br>23 → n Urnen | Pro Urne<br>Beliebig viele Bälle<br>(Beliebig) | Pro Urne<br>Höchstens 1 Ball<br>(Injektiv) | Pro Urne<br>Mindestens 1 Ball<br>(Surjektiv) | Pro Urne<br>Genau 1 Ball<br>(Bijektiv) |
|---|---|---|---|---|
| Bälle unterscheidbar<br>Urnen unterscheidbar | $n^k$ | $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $n! \cdot S_{k,n}$ | $k!$ |
| Bälle gleich<br>Urnen unterscheidbar | $\binom{n+k-1}{k}$ | $\binom{n}{k}$ | $\binom{k-1}{n-1}$ | $1$ |
| Bälle unterscheidbar<br>Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$ | $1$ | $S_{k,n}$ | $1$ |
| Bälle gleich<br>Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$ | $1$ | $P_{k,n}$ | $1$ |

a) $P_{42,23}$

b) $\sum_{i=0}^{23} S_{42,i}$

c) $\binom{42+23-1}{23}$

## Aufgabe 13.3

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Meerschweinchen 23 Meerschweinchenzüchtern zuzuordnen, wenn

(d) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden?

(e) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?

(f) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden?

| k Bälle 42<br>23 → n Urnen | Pro Urne<br>Beliebig viele Bälle<br>(Beliebig) | Pro Urne<br>Höchstens 1 Ball<br>(Injektiv) | Pro Urne<br>Mindestens 1 Ball<br>(Surjektiv) | Pro Urne<br>Genau 1 Ball<br>(Bijektiv) |
|---|---|---|---|---|
| Bälle unterscheidbar<br>Urnen unterscheidbar | $n^k$ | $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $n! \cdot S_{k,n}$ | $k!$ |
| Bälle gleich<br>Urnen unterscheidbar | $\binom{n+k-1}{k}$ | $\binom{n}{k}$ | $\binom{k-1}{n-1}$ | $1$ |
| Bälle unterscheidbar<br>Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$ | $1$ | $S_{k,n}$ | $1$ |
| Bälle gleich<br>Urnen gleich | $\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$ | $1$ | $P_{k,n}$ | $1$ |

a) $23^{42}$

b) $23! \cdot S_{42,23}$

c) $\sum_{i=0}^{23} P_{42,i} = P_{65,23}$

# Fragen?