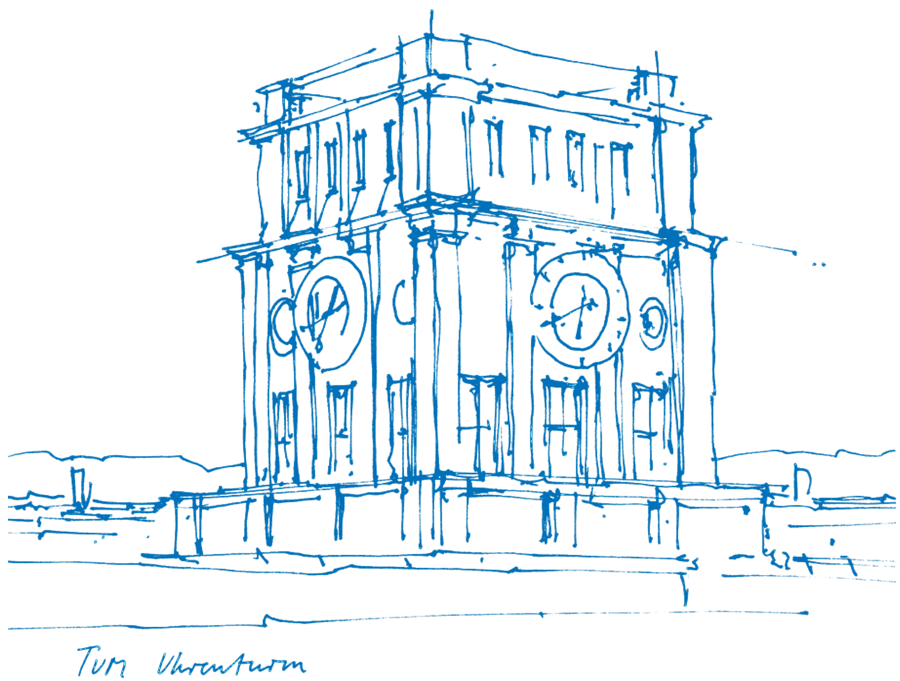
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 22. Januar 2023

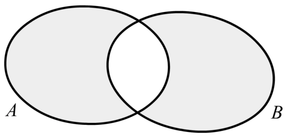


Kombinatorik

Kombinatorik — Allgemeinregeln

Summenregel (Siebformel mit 2 Mengen)

- $A \cup B = |A| + |B| - |A \cap B|$



Produktregel

- $A \times B = |A| \cdot |B|$

Kombinatorik — Schubfachprinzip

— aka. Pigeonhole-Prinzip

— $|A| = \sum_{b \in B} f^{-1}(b) \leqslant \max_{b \in B} f^{-1}(b) = |B|$

— $\max_{b \in B} f^{-1}(b) \geqslant \dfrac{|A|}{|B|}$

Es gibt mindestens $\left\lceil \dfrac{|A|}{|B|} \right\rceil$ Elemente aus A, die den gleiche Wert von b aus B nimmt.

Bsp:

40 Personen $\rightarrow$ mind. $\left\lceil \frac{40}{12} \right\rceil = 4$ Personen haben im gleichen Monat Geburtstag

Kombinatorik — Formelsammlung

k-mal Ziehen aus n Bälle mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \} \quad \Rightarrow \quad n^k$$

k-mal Ziehen aus n Bälle ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid |\{ s_1, \dots, s_k \}| = k \} \quad \Rightarrow \quad A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k-mal Ziehen aus n Bälle ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < \dots < s_k \} \quad \Rightarrow \quad B_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

k-mal Ziehen aus n Bälle mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leqslant \dots \leqslant s_k \} \quad \Rightarrow \quad C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Summe von k natürliche Zahlen muss gleich n sein

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + \dots + s_k = n \} \quad \Rightarrow \quad D_{n,k} = \binom{n+k-1}{n}$$

k-mal Ziehen von max. n Kugeln mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + \dots + s_k \leqslant n \} \quad \Rightarrow \quad E_{n,k} = \binom{n+k}{n}$$

Aufteilung k Geschenke in n Päckchen, jedes Päckchen enthält mind. 1 Geschenk

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid |\{ s_1, \dots, s_k \}| = n \} \quad \Rightarrow \quad F_{n,k} = n! \cdot S_{k,n}$$

Aufteilung n Euro unter k Kindern, jedes Kind erhält mind. 1 Euro

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + \dots + s_k = n \} \quad \Rightarrow \quad G_{n,k} = \binom{n-1}{k-1}$$

Aufteilung n Euro in k Päckchen, jedes Päckchen enthält mind. 1 Euro

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + \dots + s_k = n,\ s_1 \leqslant \dots \leqslant s_k \} \Rightarrow P_{n,k}$$

$$P_{n,k} := P_{n-1,k-1} + P_{n-k,k}$$

$$\underset{\text{für } n>0}{P_{n,0} := 0} \quad \underset{\text{für } k>n}{P_{n,k} := 0} \quad P_{n,n} := 1$$

Aufteilung n Euro in k Päckchen, jedes Päckchen enthält beliebig viel Euro

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + \dots + s_k = n \} \quad \Rightarrow \quad H_{n,k} = P_{n+k,k}$$

Kombinatorik — Urnenmodelle

n Bälle k Ziehen	geordnet	ungeordnet
Ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Kombinatorik — Verteilung: Die Goldene Tabelle

k Bälle $\to$ n Urnen	Pro Urne Beliebig viele Bälle (Beliebig)	Pro Urne Höchstens 1 Ball (Injektiv)	Pro Urne Mindestens 1 Ball (Surjektiv)	Pro Urne Genau 1 Ball (Bijektiv)
Bälle unterscheidbar, Urnen unterscheidbar	n^k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n! \cdot S_{k,n}$	$k!$
Bälle gleich, Urnen unterscheidbar	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$	1
Bälle unterscheidbar, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$	1	$S_{k,n}$	1
Bälle gleich, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$	1	$P_{k,n}$	1

Kombinatorik — Rechenregeln Binomialformeln

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i} = (a+b)^n \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

b)

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad k \leq n$$

c)

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$$

d)

Aufgaben

Aufgabe 12.1

(a) Bestimmen Sie $\left|[6]^5\right|$.

(b) Bestimmen Sie $\left|\{(s_1, \ldots, s_{13}) \in \mathbb{N}^{13} \mid s_1 + \ldots + s_{13} = 17\}\right|$

(c) Bestimmen Sie $\left|\{(|f^{-1}(1)|, \ldots, |f^{-1}(13)|) \mid f\colon [17] \to [13]\}\right|$

(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Urne mit 22 unterschiedlichen Bällen 13 Bälle ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reichenfolge zu wählen?

(e) Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Urne mit 22 unterschiedlichen Bällen 6 Bälle ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reichenfolge zu wählen?

a) k-mal Ziehen aus n Bälle mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

($k = 5$, $n = 6$)

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \} \Rightarrow n^k = 6^5$$

b) Aufteilung n Euro unter k Kindern, jedes Kind erhält mind. 1 Euro

($n = 17$, $k = 13$)

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + \dots + s_k = n \} \Rightarrow G_{n,k} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{17-1}{13-1}$$

c) k-mal Ziehen von genau n Kugeln mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

($k = 17$, $n = 13$)

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq \dots \leq s_k \} \Rightarrow C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{13+17-1}{17}$$

d) k-mal Ziehen aus n Bälle ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

($k = 13$, $n = 22$)

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid |\{ s_1, \dots, s_k \}| = k \} \Rightarrow A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{22!}{(22-6)!}$$

e) k-mal Ziehen aus n Bälle ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

($k = 6$, $n = 22$)

$$\{ (s_1, \dots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < \dots < s_k \} \Rightarrow B_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \binom{22}{6}$$

Aufgabe 12.2

(a) Zeigen Sie für $n, m, k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

Versuchen Sie auch, einen Beweis durch ein geeignetes zweistufiges Ziehungsexperiment zu geben.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \cdot \frac{m!}{(m-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-m)!\,(m-k)!\,k!}$$

gleich

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!\,(n-m)!} = \frac{n!\,(n-k)!}{(n-m)!\,(m-k)!\,k!\,(n-k)!}$$

Ziehungsexperiment: $A \subseteq B \subseteq C$

$|A| = k$

$|B| = m$

$|C| = n$

Man zieht erstmal $\underset{m \text{ aus } n}{B \subseteq C}$ dann $\underset{k \text{ aus } m}{A \subseteq B}$ $\quad \binom{m}{k}\binom{n}{m}$

Man zieht erstmal $\underset{k \text{ aus } n}{A \subseteq C}$ dann $\underset{m-k \text{ aus } n-k}{B/A \subseteq C/A}$ $\quad \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Binomischen Formel für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}}}_{A} = \underbrace{\boxed{\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}}}_{B} = 2^{n-1}$$

Bsp:

$n = 6$ (gerade)

$$A = \sum_{k=0}^{\overset{\lfloor 6/2 \rfloor}{3}} \binom{6}{2k} = \binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6}$$

$$B = \sum_{k=0}^{\overset{\lfloor (6-1)/2 \rfloor}{2}} \binom{6}{2k+1} = \binom{6}{1} + \binom{6}{3} + \binom{6}{5}$$

$n = 5$ (ungerade)

$$A = \sum_{k=0}^{\overset{\lfloor 5/2 \rfloor}{2}} \binom{6}{2k} = \binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}$$

$$B = \sum_{k=0}^{\overset{\lfloor (5-1)/2 \rfloor}{2}} \binom{6}{2k+1} = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \stackrel{b)^*}{=} 2^n$$

$$A - B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \boxed{\cdot 1^{n-k}}$$

keinen Einfluss, $\Rightarrow$ nur fürs Anwenden der Regel

$$\stackrel{a)^*}{=} (1 + (-1))^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = B$$

$$\Rightarrow \quad A = B = 2^{n-1} \qquad \square$$

Induktion geht auch!

(c) wurde geskippt :)

(d) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Exkurs:

Vandermondesche Identitäten

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

$\boxed{\text{Induktion geht auch !}}$

Aufgabe 12.3

Der Nikolaus hat ingesamt 16 verschiedene Geschenke, welche alle einen ganzzahligen Wert zwischen 1 und 4000 Euro haben. Zufälligerweise haben keine zwei der 16 Geschenke denselben Wert.

Sein Problem: Er muss die Geschenke so auf zwei Kinder aufteilen, dass beide am Ende Geschenke mit demselben Gesamtwert bekommen. Dabei muss jedes Kind mindestens ein Geschenk bekommen, Geschenke dürfen nicht doppelt vergeben werden, der Nikolaus darf aber auch einige Geschenke für sich behalten.

Zeigen Sie, dass der Nikolaus stets eine Lösung finden kann.

Wie viele Teilmengen? $A = 2^{16} - \underbrace{1}_{\text{leere Menge}} = 65535$

So viele Kombinationen von Geschenken können wir an den Kindern verteilen. Was übrig bleiben behalten Nikolaus.

Wie viele mögliche Gesamtpreise für jede Aufteilungsmöglichkeit?

$$\underset{(\text{Min})}{1} \leq B \leq \underset{(\text{Max})}{\sum_{i=4000-16+1}^{4000} i} = 63896$$

$f: A \to B$ mit $|A| \to |B| \Rightarrow$ Schubfachprinzip

Laut Skript (Abschnitt 303): mind. $\frac{|A|}{|B|} = 2$ Aufteilungen haben den gleichen Gesamtpreis.

$f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow f(s_1') = f(s_2')$
mit $s_1' = s_1 \setminus (s_1 \cap s_2)$
$s_2' = s_2 \setminus (s_1 \cap s_2)$

+ Wenn nicht disjunkt: Der gemeinsame Teil geben wir Nikolaus

Aufgabe 12.4

Wir betrachten ein Gewinnspiel, bei dem jedes Los einem 6-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in [5]^6$ mit Einträgen aus $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entspricht. Die *höchste* Zahl, welche *mindestens drei Mal* auf einem gegebenen Los vorkommt, entspricht dem Gewinn; kommt jede Zahl aus $[5]$ höchstens zwei Mal auf dem Los vor, dann ist der Gewinn 0.

Beispiel: Das Los $(2, 3, 4, 3, 5, 3)$ hätte den Gewinn 3, das Los $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$ den Gewinn 0.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Lose mit Gewinn 5.

Fall 3	Fall 4	Fall 5	Fall 6
$\binom{6}{3} 4^{6-3}$ +	$\binom{6}{4} 4^{6-4}$ +	$\binom{6}{5} 4^{6-5}$ +	$\binom{6}{6} 4^{6-6}$
Aus 6 Zahlen 3 mal 5 ziehen	Aus 6 Zahlen 4 mal 5 ziehen	Aus 6 Zahlen 5 mal 5 ziehen	Aus 6 Zahlen 6 mal 5 ziehen
Die restliche Einträge dürfen jede Zahl außer 5 nehmen	Die restliche Einträge dürfen jede Zahl außer 5 nehmen	Die restliche Einträge dürfen jede Zahl außer 5 nehmen	Die restliche Einträge dürfen jede Zahl außer 5 nehmen

$$= \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 4^{6-k} = 1545$$

Aufgabe 12.4

Wir betrachten ein Gewinnspiel, bei dem jedes Los einem 6-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in [5]^6$ mit Einträgen aus $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entspricht. Die *höchste* Zahl, welche *mindestens drei Mal* auf einem gegebenen Los vorkommt, entspricht dem Gewinn; kommt jede Zahl aus $[5]$ höchstens zwei Mal auf dem Los vor, dann ist der Gewinn 0.

Beispiel: Das Los $(2, 3, 4, 3, 5, 3)$ hätte den Gewinn 3, das Los $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$ den Gewinn 0.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller Lose mit Gewinn 0.

Kein Gewinn : Wenn 1 Zahl mehr als 2 mal auftaucht

außer : 2 Zahlen tauchen 3 mal auf   Bsp.: (1,1,1,5,5,5) (2,2,2,3,3,3)

$$\overset{\Omega}{\overline{5^6}} - \overset{\text{1 Zahl taucht mehr als 2 mal auf}}{\overline{\underbrace{5 \cdot \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 4^{6-k}}_{1545}}} + \overset{\ni \text{ 2 Zahlen tauchen 3 mal auf}}{\overline{\underset{\text{Aus 5 Zahlen 2 auswählen}}{\binom{5}{2}} \underset{\text{Jede Zahl tritt 3 mal auf}}{\binom{6}{3}}}}$$

$$= 8100$$

Fragen?