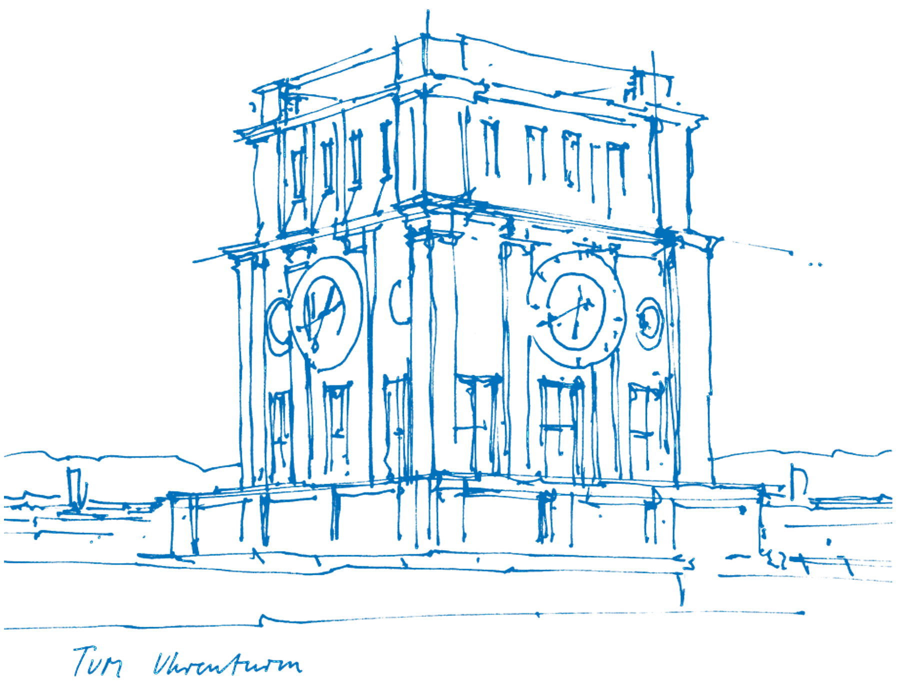
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 20. November 2023



Induktionsbeweis

Induktionsbeweis — Idee

Base Case:
Die Annahme muss für Basis gelten.

Induktionsschritt:
Wenn die Annahme für k gilt, dann müsste sie auch für $k + 1$ gelten.

Durch diese Rekursion wird es gezeigt, dass die Annahme für jeden möglichen Wert gelten müsste.

Induktionsbeweis — Bestandteile

Induktionsbasis
− Die Behauptung gilt für den ersten möglichen Wert(en)

Induktionsschritt
− Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert

Induktionsannahme
− Was nimmt man an?

Induktionsbehauptung
− Was will man beweisen? (Normalerweise die Annahme mit $k + 1$)

Induktionsbeweis
− Der Eigentliche Beweis

I. Basis $n = \min(n)$

I. Schritt

I. Annahme Zu Zeigen

I. Behauptung Zu Zeigen mit $n+1$

I. Beweis Bestätigung der Behauptung

Tipp: Man sollte die gegebene Formel möglichst so umformen, dass sie sich auf I.A. bezieht.

Graphentheorie

Graphentheorie — Gerichteter Graph

$G = (V, E)$ besteht aus

- Knotenmenge V
- Kantenmenge $E \subseteq V \times V$

Endlichkeit

- Ein Graph $G = (V, E)$ ist endlich, falls V endlich ist

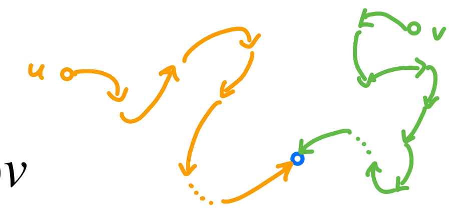
Graphentheorie — Zusammenhang

Zusammenhangskomponente

– Die Menge aller Knoten, die sich untereinander erreichen können

Zusammenhängend

– $\forall u, v \in V \,.\, u(E \cup E^{-1})v$

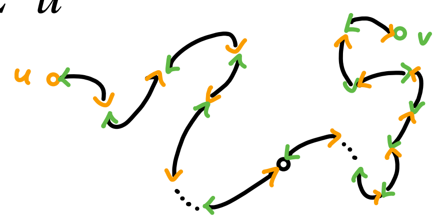


– Besitzt G GENAU eine Zusammenhangskomponente, so ist G zusammenhängend

$\exists$ ein Pfad $(u_0, u_1, \dots, u_\ell)$, wobei $V = \{u_0, u_1, \dots, u_\ell\}$

Stark Zusammenhängend

– $\forall u, v \in V \,.\, uE^*v$ und vE^*u



Aufgabe

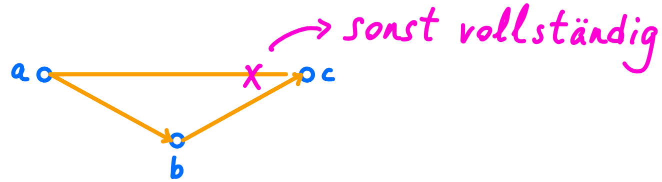
Aufgabe 5.1

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender einfacher endlicher Graph mit mindestens 3 Knoten, der nicht vollständig ist.

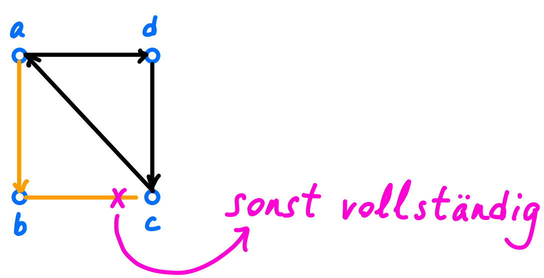
Zeigen Sie, dass es dann $a, b, c \in V$ mit $\{a, b\} \in E$ und $\{b, c\} \in E$ und $\{a, c\} \notin E$ gibt.

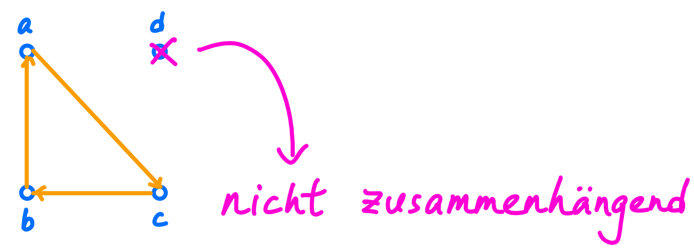
Veranschaulichung

$|V| = 3$



$|V| = 4$





Beweis

Wegen Unvollständigkeit : $\exists\, u,v \in V$ mit $u \neq v$ und $\{u,v\} \notin E$

unterschiedliche Knoten

sonst : Alle Paaren verknüpfen sich miteinander $\longrightarrow$ Vollständigkeit

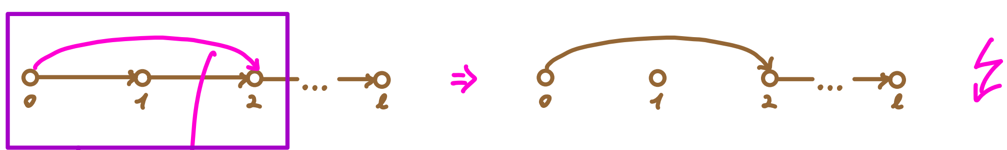
Wegen Zusammenhang : $\exists$ ein Pfad $(u_0, u_1, \dots, u_\ell)$ mit $u_0 = u$ und $u_\ell = v$

Sonst : nicht zusammenhängend

Beweis durch Widerspruch

Wir nehmen an : $(u_0, u_1, \dots, u_\ell)$ ist der kürzeste Pfad von u nach v

Wäre $\{u_0, u_2\} \in E$, wäre dann $(u_0, u_2, \dots, u_\ell)$ ein kürzerer Pfad. Widerspruch



$\{0,2\}$ darf nicht existieren

$\{u_0, u_1\} \in E$

$\{u_1, u_2\} \in E$

$\{u_0, u_2\} \notin E$ $\square$

Aufgabe 5.2

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

Gliedern Sie den jeweiligen Beweis korrekt in Induktionsbasis, -schritt, -annahme und -behauptung.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{n(n+1)}{2} \overset{\text{zu zeigen}}{=} \sum_{k=0}^{n} k$$

Basis : Für $n = \min(n) = 0$ gilt $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k = \sum_{k=0}^{n} k$

Schritt :

Annahme : Wir nehmen an, dass $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Behauptung : Wir wollen zeigen, dass die Annahme ebenso für $n+1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beweis :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$$ Auflösung Term $n+1$

Wir haben angenommen, dass die beiden Termen gleich sind

$$\stackrel{\text{I.A.}}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$ I.A.

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2}$$ Arithmetik

$$= \frac{n^2+3n+2}{2}$$ Arithmetik

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ $\frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Bewiesen! $\square$

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

Gliedern Sie den jeweiligen Beweis korrekt in Induktionsbasis, -schritt, -annahme und -behauptung.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{\text{zu zeigen}}{=} \sum_{k=0}^{n} k^2$$

Basis: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{n=0}{=} \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k^2 \overset{n=0}{=} \sum_{k=0}^{n} k^2$

Schritt: Annahme: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{k=0}^{n} k^2$

Behauptung: $\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} k^2$

Beweis: $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{I.A.}$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1\right) \qquad \text{Arithmetik}$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6n+6}{6}\right) \qquad \text{Arithmetik}$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) \qquad \text{Arithmetik}$$

$$= (n+1)\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right) \qquad \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \square \qquad \text{Arithmetik}$$

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

Gliedern Sie den jeweiligen Beweis korrekt in Induktionsbasis, -schritt, -annahme und -behauptung.

(c) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \overset{\text{zu zeigen}}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k := 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

Basis: $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \overset{n=0}{=} \frac{1-x^{0+1}}{1-x} = 1 = \sum_{k=0}^{0} x^k \overset{n=0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k$

Schritt: Annahme: $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$

Behauptung: $\frac{1-x^{n+1+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k$

Beweis: $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1}$

$$\overset{I.A.}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \qquad \text{I.A.}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \qquad \text{Arithmetik}$$

$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \qquad \text{Arithmetik}$$

$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \quad \square \qquad \text{Arithmetik}$$

Fragen?