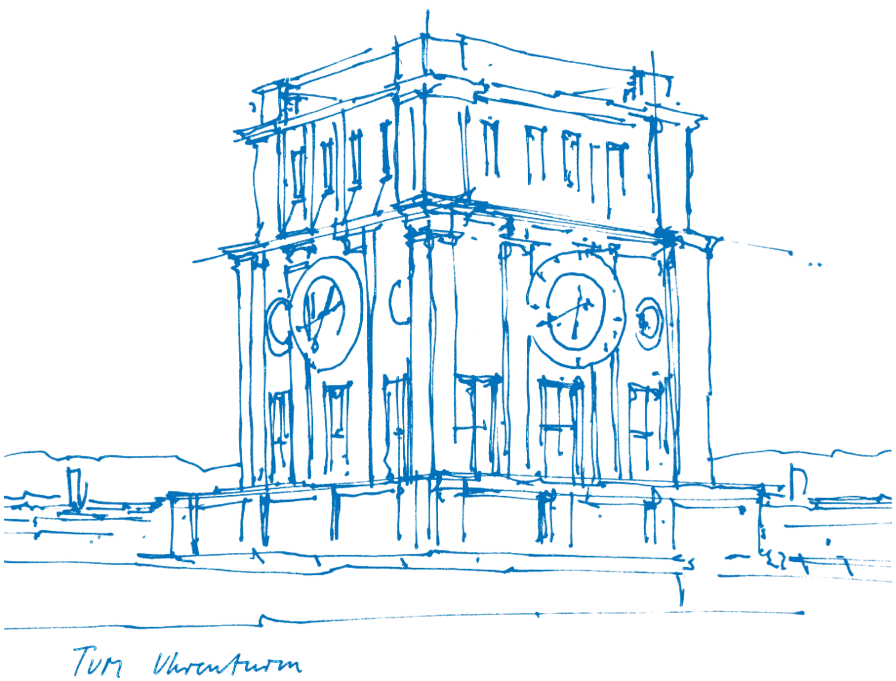
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 8. Januar 2023



Logik

Logik — Aussagenlogik

Vokabular

- true, false
- p, q, r, s, t
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- $()$

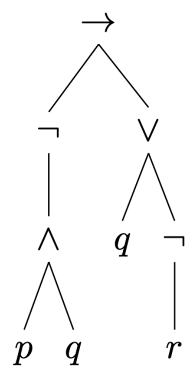
Regeln

- **True** und **false** sind Formeln
- Eine Aussagenvariable ist eine Formel
- Ist F eine Formel, dann ist auch $\neg F$ eine Formel
- Sind F und G Formeln, dann sind $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ und $(F \rightarrow G)$ ebenfalls Formeln

Also $F ::=$ true false p $\neg F$ $(F \vee F)$ $(F \wedge F)$ $(F \rightarrow F)$ mit $p \in V$

Logik — Syntaxbaum

Beispiel: $(\neg(p \land q) \to (q \lor \neg r))$



Bindungsregeln

- $\neg$ bindet stärker als $\land$
- $\land$ bindet stärker als $\lor$
- $\lor$ bindet stärker als $\to$

Logik — Erfüllbarkeit

- Gültig: Jede Belegung evaluiert zu **true**, also Tautologie
- Erfüllbar: Es gibt mindestens eine Belegung, die zu **true** evaluiert
- Unerfüllbar: Es gibt keine Belegungen, die zu **true** evaluiert, also Widerspruch

Logik — Äquivalenz

1, Idempotenz

$F \wedge F = F \quad F \vee F = F$

2, Kommutativität

$F \wedge G = G \wedge F \quad F \vee G = G \vee F$

3, Assoziativität

$(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H) \quad (F \vee G) \vee H = F \vee (G \vee H)$

4, Absorption

$F \wedge (F \vee G) = F \quad F \vee (F \wedge G) = F$

5, Distributivität

$F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \quad F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Logik — Äquivalenz

6, Doppelnegation

$\neg\neg F = F$

7, De Morgan

$\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G \quad \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G$

8, Trivial

$F \wedge \neg F = \text{false} \quad F \vee \neg F = \text{true}$

9, Dominanz

$F \wedge \text{false} = \text{false} \quad F \vee \text{true} = \text{true}$

10, Identität

$F \wedge \text{true} = F \quad F \vee \text{false} = \quad F$

Logik — Überführung

- $p \to q \equiv \neg p \lor q$
- $p \oplus q \equiv (p \lor q) \land \neg(p \land q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p) \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$
- $\text{ITE}(p, q, r) := ((p \to q) \land (\neg p \to r))$

Logik — Normalform

Konjunktive Normalform (KNF)

$\bigwedge_{i=1}^{m} (\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j})$

Beispiel: $\neg p \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee q)$

Disjunktive Normalform (DNF)

$\bigvee_{i=1}^{m} (\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j})$

Beispiel: $r \vee (\neg p \wedge q)$

Für jede Formel F gibt es eine Formel in KNF und in DNF

Aufgaben

Aufgabe 10.1

Wir betrachten die folgenden Formeln über den aussagenlogischen Variablen q, t, p, s, r:

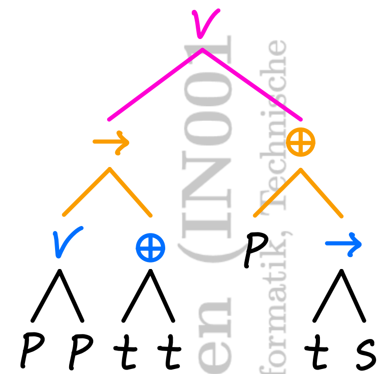
$$
\begin{aligned}
F_1 &:= ((p \lor p) \to (t \oplus t)) \lor (p \oplus (t \to s)) \\
F_2 &:= ((q \lor t) \to (p \lor t)) \lor (q \land (t \leftrightarrow p)) \\
F_3 &:= \neg(s \leftrightarrow t) \oplus ((q \leftrightarrow t) \to \neg s)
\end{aligned}
$$

(a) Zeichnen Sie für jede der Formel $(F_1, F_2, \ldots, F_6)$ den entsprechenden Syntaxbaum und stellen Sie sowohl die Wahrheitstabelle als auch das KV-Diagramm auf. Halten Sie sich **immer** für die Wahrheitstabelle und das KV-Diagramm **strikt** an die Darstellung aus der Vorlesung. Für die Wahrheitstabelle gelten folgende Ausnahmen:

- Auf die Wiederholung der Wahrheitswerte unter den Variablen der Formel kann verzichtet werden.
- Im Fall binärer Operatoren müssen die rechten Teilformeln nur dann ausgewertet werden, wenn der Wahrheitswert noch nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 10.1

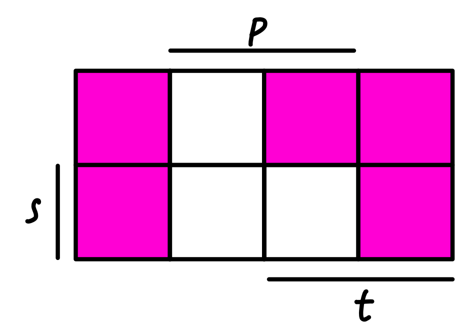
Wir betrachten die folgenden Formeln über den aussagenlogischen Variablen q, t, p, s, r:



$$F_1 := ((p \vee p) \rightarrow (t \oplus t)) \vee (p \oplus (t \rightarrow s))$$
$$F_2 := ((q \vee t) \rightarrow (p \vee t)) \vee (q \wedge (t \leftrightarrow p))$$
$$F_3 := \neg(s \leftrightarrow t) \oplus ((q \leftrightarrow t) \rightarrow \neg s)$$

(b) Bestimmen Sie unter Verwendung der (a) für jede Formel, ob sie *gültig* oder *erfüllbar, aber nicht gültig* oder *unerfüllbar* ist. Geben Sie weiterhin an, ob, und wenn ja, welche der Formeln semantisch äquivalent sind.

p	t	s	$(($p$	$\vee$	$p)$	$\rightarrow$	$(t$	$\oplus$	$t))$	$\vee$	$(p$	$\oplus$	$(t$	$\rightarrow$	$s))$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1

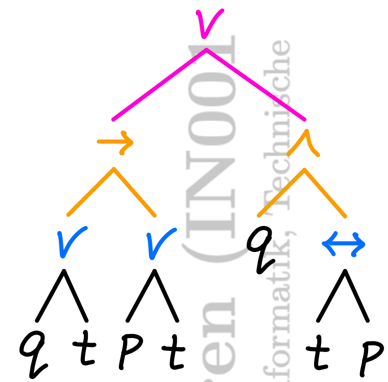


Erfüllbar ✓

Gültig ✗

Aufgabe 10.1

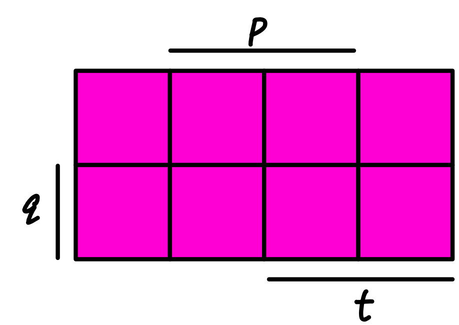
Wir betrachten die folgenden Formeln über den aussagenlogischen Variablen q, t, p, s, r:



$$F_1 := ((p \vee p) \to (t \oplus t)) \vee (p \oplus (t \to s))$$
$$F_2 := ((q \vee t) \to (p \vee t)) \vee (q \wedge (t \leftrightarrow p))$$
$$F_3 := \neg(s \leftrightarrow t) \oplus ((q \leftrightarrow t) \to \neg s)$$

(b) Bestimmen Sie unter Verwendung der (a) für jede Formel, ob sie *gültig* oder *erfüllbar, aber nicht gültig* oder *unerfüllbar* ist. Geben Sie weiterhin an, ob, und wenn ja, welche der Formeln semantisch äquivalent sind.

p	t	q	((q	$\vee$	t)	$\to$	(p	$\vee$	t))	$\vee$	(q	$\wedge$	(t	$\leftrightarrow$	p))
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

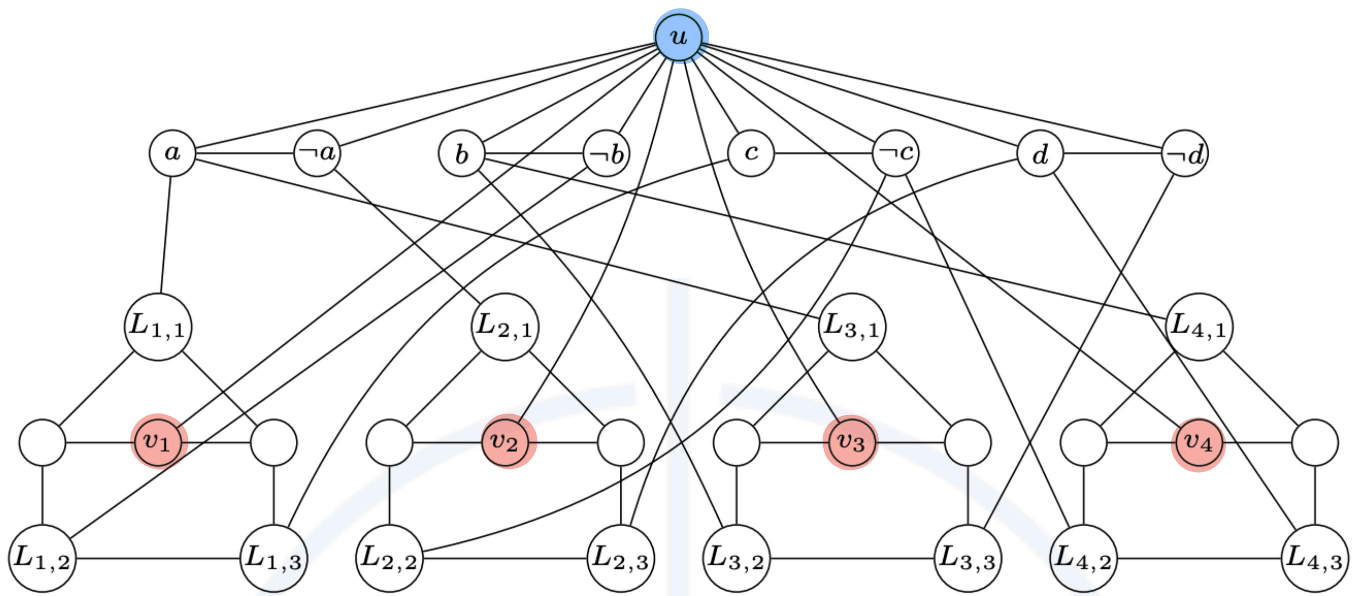


Erfüllbar ✓

Gültig ✓

Aufgabe 10.2

Zeigen Sie, dass für folgenden Graph G gilt: $\chi(G) = 3$



Hinweis: Der Graph codiert eine aussagenlogische Formel F mit $V_F = \{a, b, c, d\}$ und Literalen $L_{i,j}$. Versuchen Sie zunächst F auszulesen; überlegen Sie sich dann, wie eine erfüllende Belegung von F zu einer zulässigen Knotenfärbung von G erweitert werden kann. Verwenden Sie Grün für „wahr“, Rot für „falsch“, färben Sie den Knoten u mit Blau und alle mit v_i beschrifteten Knoten mit Rot.

entweder a oder $\neg a$

Aussagenlogik: $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg c \vee d)$

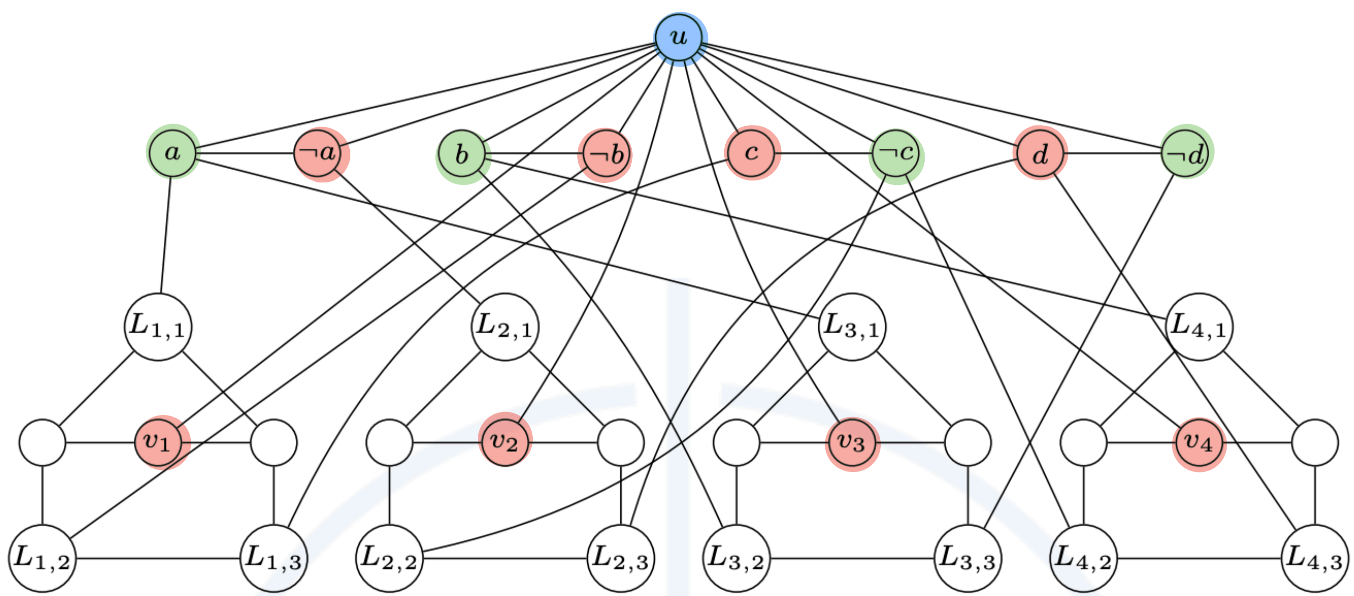
KNF $\quad L_{11} \; L_{12} \; L_{13} \quad L_{21} \; L_{22} \; L_{23} \quad L_{31} \; L_{32} \; L_{33} \quad L_{41} \; L_{42} \; L_{43}$

Aussagenlogik: $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg d) \wedge (b \vee \neg c \vee d)$

Bsp: $\{a, b, \neg c, \neg d\}$ erfüllbar!

Aufgabe 10.2

Zeigen Sie, dass für folgenden Graph G gilt: $\chi(G) = 3$

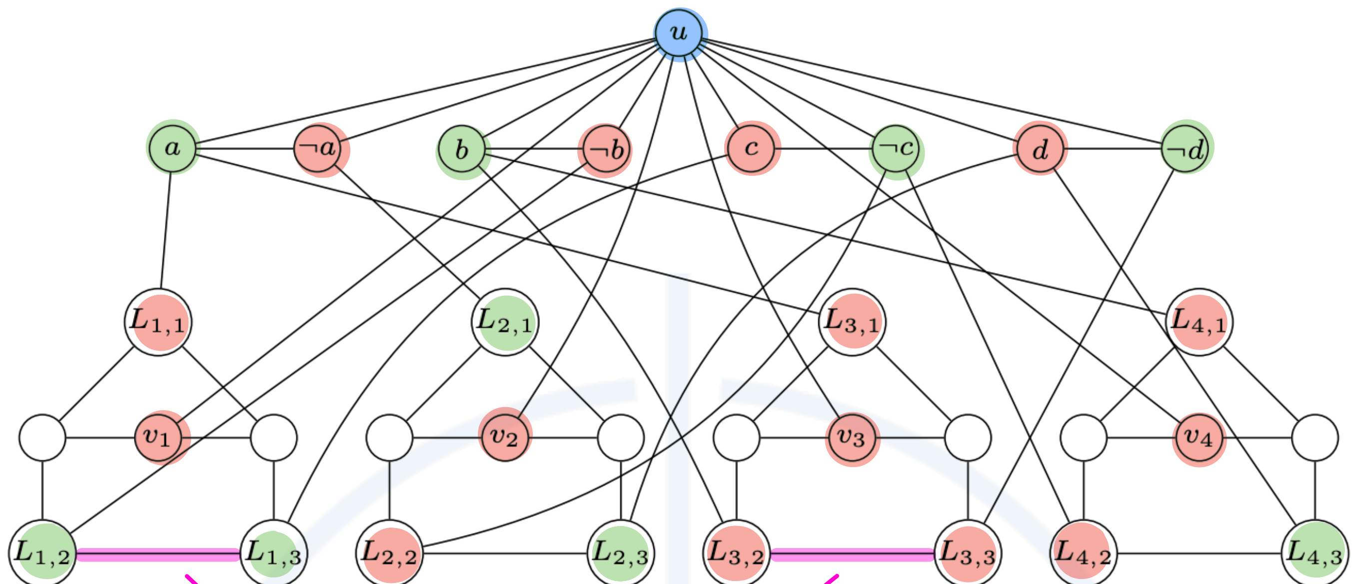


Hinweis: Der Graph codiert eine aussagenlogische Formel F mit $V_F = \{a, b, c, d\}$ und Literalen $L_{i,j}$. Versuchen Sie zunächst F auszulesen; überlegen Sie sich dann, wie eine erfüllende Belegung von F zu einer zulässigen Knotenfärbung von G erweitert werden kann. Verwenden Sie Grün für „wahr", Rot für „falsch", färben Sie den Knoten u mit Blau und alle mit v_i beschrifteten Knoten mit Rot.

Aufgabe 10.2

$\mathcal{L}$ ausfüllen

Zeigen Sie, dass für folgenden Graph G gilt: $\chi(G) = 3$



Hinweis : Der Graph codiert eine aussagenlogische Formel F mit $V_F = \{a, b, c, d\}$ und Literalen $L_{i,j}$. Versuchen Sie zunächst F auszulesen; überlegen Sie sich dann, wie eine erfüllende Belegung von F zu einer zulässigen Knotenfärbung von G erweitert werden kann. Verwenden Sie Grün für „wahr“, Rot für „falsch“, färben Sie den Knoten u mit Blau und alle mit v_i beschrifteten Knoten mit Rot.

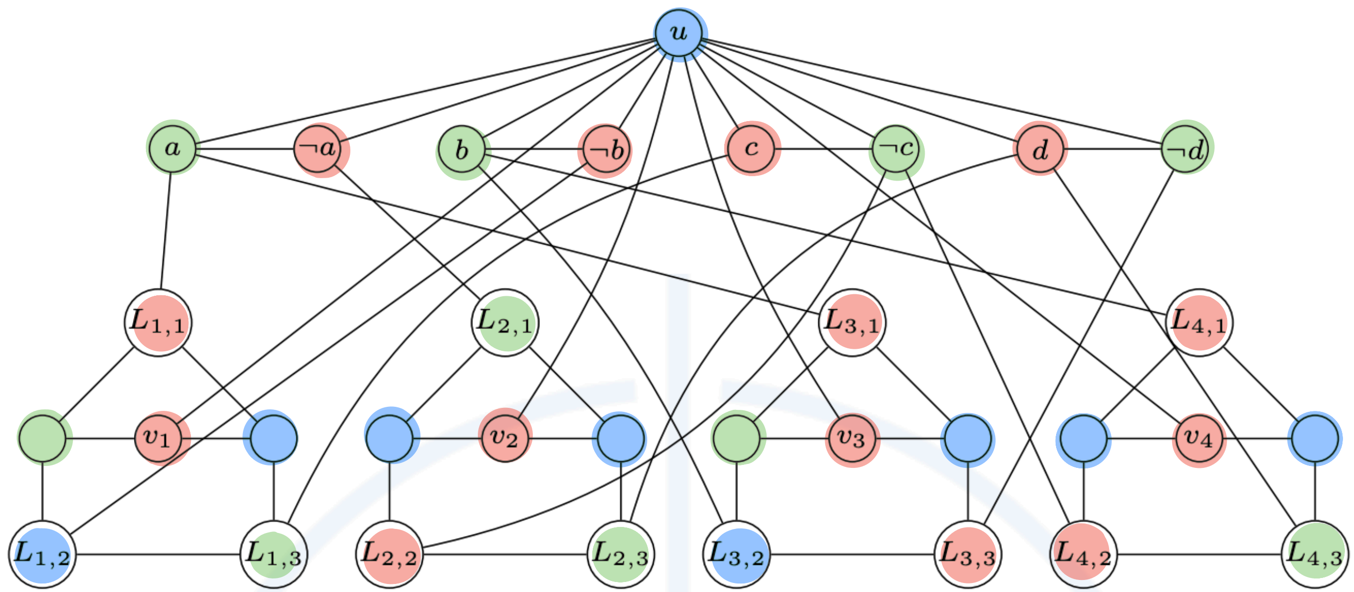
Durch blau ersetzen

Damit die Dreifarbigkeit eingehalten wird

Aufgabe 10.2

Ergänzung

Zeigen Sie, dass für folgenden Graph G gilt: $\chi(G) = 3$



Hinweis : Der Graph codiert eine aussagenlogische Formel F mit $V_F = \{a, b, c, d\}$ und Literalen $L_{i,j}$. Versuchen Sie zunächst F auszulesen; überlegen Sie sich dann, wie eine erfüllende Belegung von F zu einer zulässigen Knotenfärbung von G erweitert werden kann. Verwenden Sie Grün für „wahr“, Rot für „falsch“, färben Sie den Knoten u mit Blau und alle mit v_i beschrifteten Knoten mit Rot.

Mehrere Lösungswege !

Aufgabe 10.3

Glückwunsch, Sie wurden als Übungsleitung für die Vorlesung “Diskreter Spaß mit Flaggen” eingeteilt. ~~Zum Glück~~ Leider wissen die meisten der Studierenden die Vorlesung (und den Humor der Übungsleitung) nicht zu schätzen, weswegen sich nur die Studierenden H, L, S, R angemeldet haben.

Um eine optimale Betreuung zu garantieren, sollen die Übungsgruppen aus maximal 3 Studierenden bestehen. Sie planen daher nur zwei Termine ein, je einen Termin am Dienstag und am Mittwoch. Die Einteilung der Übungsgruppen wird durch folgende Anforderungen der Studierenden erschwert:

C_1: S kann nicht am Mittwoch.

C_2: H will nicht in eine Gruppe mit S.

C_3: R will in die Dienstagsgruppe **oder** in eine Gruppe mit H.

C_4: L will nicht allein mit S in einer Gruppe sein.

Im Folgenden soll die aussagenlogische Variable D_X den Wert 1 (“wahr”) zugewiesen bekommen, wenn $X \in \{S, H, L, R\}$ der Dienstagsgruppe zugewiesen wird. Entsprechend soll M_X beschreiben, ob der Studierende X der Mittwochsgruppe zugewiesen wurde.

Damit lässt sich Anforderung (“constraint”) C_1 wie folgt formalisieren:

$$\varphi_1 = \neg M_S$$

Die Anforderung, dass maximal drei Studenten in einer Gruppe sind, lässt sich, da es nur vier Studenten gibt, auch formulieren als “an jedem der beiden Übungstage gibt es (mindestens) einen Studenten, der nicht an der jeweiligen Gruppe teilnimmt”:

$$\varphi_a = (\neg D_S \vee \neg D_H \vee \neg D_R \vee \neg D_L) \wedge (\neg M_S \vee \neg M_H \vee \neg M_R \vee \neg M_L)$$

C_1: S kann nicht am Mittwoch.

C_2: H will nicht in eine Gruppe mit S. $\Rightarrow$ S anwesend $\rightarrow$ H abwesend

C_3: R will in die Dienstagsgruppe **oder** in eine Gruppe mit H. $\Rightarrow$ D_R $\Rightarrow$ R anwesend $\wedge$ H anwesend

C_4: L will nicht allein mit S in einer Gruppe sein. $\Rightarrow$ L $\wedge$ S anwesend $\rightarrow$ R $\vee$ H anwesend

$$\varphi_a = (\neg D_S \vee \neg D_H \vee \neg D_R \vee \neg D_L) \wedge (\neg M_S \vee \neg M_H \vee \neg M_R \vee \neg M_L)$$

(a) Formalisieren Sie entsprechend die Anforderungen C_2, C_3, C_4 als aussagenlogische Formeln $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

C_2 $\quad (D_S \rightarrow \neg D_H) \wedge (M_S \rightarrow \neg M_H)$

C_3 $\quad D_R \vee (D_R \wedge D_H) \vee (M_R \wedge M_H) \equiv D_R \vee (M_R \wedge M_H)$

C_4 $\quad ((M_L \wedge M_S) \rightarrow (M_R \vee M_H))$

$\quad \wedge ((D_L \wedge D_S) \rightarrow (D_R \vee D_H))$

C_1: S kann nicht am Mittwoch.

C_2: H will nicht in eine Gruppe mit S.

C_3: R will in die Dienstagsgruppe **oder** in eine Gruppe mit H.

C_4: L will nicht allein mit S in einer Gruppe sein.

$$\varphi_a = (\neg D_S \vee \neg D_H \vee \neg D_R \vee \neg D_L) \wedge (\neg M_S \vee \neg M_H \vee \neg M_R \vee \neg M_L)$$

(b) Formalisieren Sie die Anforderung, dass jeder Studierende mindestens einer Gruppe zugeteilt wird, als eine Formel φ_b.

D_x, M_x oder beide

$(D_x \vee M_x)$

$$(D_S \vee M_S) \wedge (D_H \vee M_H) \wedge (D_L \vee M_L) \wedge (D_R \vee M_R)$$

C_1: S kann nicht am Mittwoch.

C_2: H will nicht in eine Gruppe mit S.

C_3: R will in die Dienstagsgruppe **oder** in eine Gruppe mit H.

C_4: L will nicht allein mit S in einer Gruppe sein.

$$\varphi_a = (\neg D_S \vee \neg D_H \vee \neg D_R \vee \neg D_L) \wedge (\neg M_S \vee \neg M_H \vee \neg M_R \vee \neg M_L)$$

(c) Formalisieren Sie entsprechend, dass jeder Studierende höchstens einer Gruppe zugeteilt wird, als eine Formel φ_c.

D_x und M_x geht nicht

$\neg(D_x \wedge M_x)$

$\neg(D_S \wedge M_S) \wedge \neg(D_H \wedge M_H)$

$\wedge \neg(D_R \wedge M_R) \wedge \neg(D_L \wedge M_L)$

C_1: S kann nicht am Mittwoch.

C_2: H will nicht in eine Gruppe mit S.

C_3: R will in die Dienstagsgruppe **oder** in eine Gruppe mit H.

C_4: L will nicht allein mit S in einer Gruppe sein.

$$\varphi_a = (\neg D_S \vee \neg D_H \vee \neg D_R \vee \neg D_L) \wedge (\neg M_S \vee \neg M_H \vee \neg M_R \vee \neg M_L)$$

(d) Die Formel $\varphi = \varphi_a \wedge \varphi_b \wedge \varphi_c \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ beschreibt vollständig das Zuteilungsproblem, vor dem Sie stehen.

Sollte φ erfüllbar sein, so geben Sie eine erfüllende Belegung β an.

Sollte φ unerfüllbar sein, so zeigen Sie dies explizit.

φ_1 $\quad \neg M_S \Rightarrow \beta(M_S) = 0 \quad \beta(D_S) = 1$

φ_2 $\quad (D_S \rightarrow \neg D_H) \Rightarrow \beta(D_H) = 0 \quad \beta(M_H) = 1$

φ_4 $\quad ((M_L \wedge M_S) \rightarrow (M_R \vee M_H))$

$\wedge ((D_L \wedge D_S) \rightarrow (D_R \vee D_H))$

$\Downarrow$

$0 \rightarrow \ldots$

fix 1

$\Downarrow$

$(D_L \wedge 1) \rightarrow (D_R \vee 0) \quad \Rightarrow \quad D_L \rightarrow D_R$

$0 \rightarrow 0$

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 1$

Lösung

D_S	M_R	M_H	M_L
D_S	D_R	M_H	M_L
D_S	D_R	M_H	D_L

Fragen?