Mathe Nacht Lösung

Aufgabe 18 – 28 (Graphentheorie)

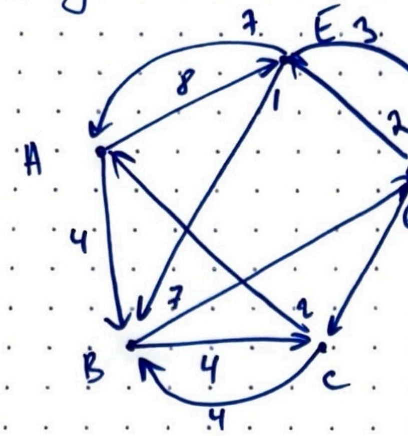
Chengjie „Jay" Zhou

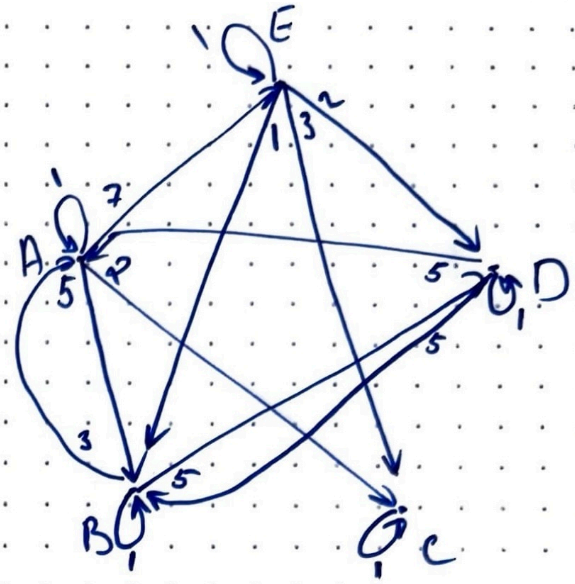
Julian Pins

Stefan Shushpanov

Kontakt gerne per Zulip!

Aufgabe 18





Aufgabe 19

Die einzig mögliche Gradmenge ist $\{2,2,3,3\}$

als o  - einzig möglicher Graph bis Isomorph.

Aufgabe 20

a) $(1,2,3,4,5,5)$

$(0,1,2,3,4)$ - fail

b) Gradsumme - ungerade => fail

c) $d_4 = 4 > n-1 = 3$ => fail

d) $(1,2,2,3,3,3)$

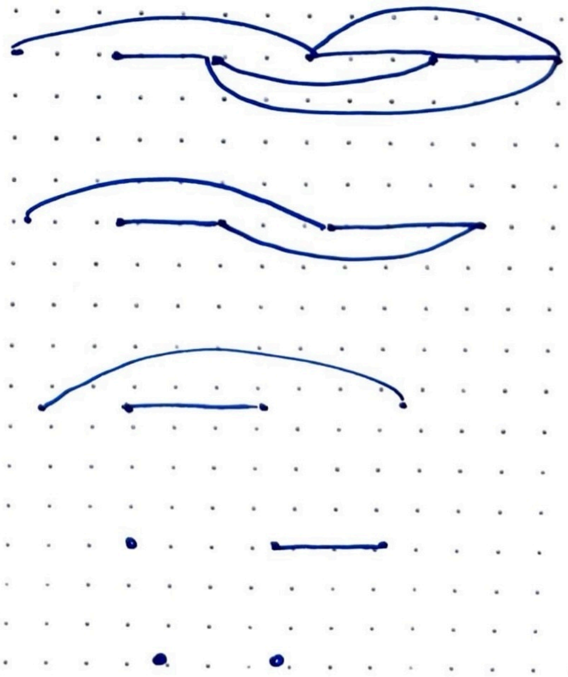
$(1,1,2,2,2)$

$\Downarrow$

$(1,1,1,1)$

$(0,1,1)$

$(0,0)$



$\Uparrow$

Aufgabe 21

a) Gradsumme - ungerade $\Rightarrow$ der Graph existiert nicht

b) $(2,2,3,5,5,5)$

$(1,1,2,4,4)$

$(0,0,1,3)$ - fail $\Rightarrow$ der Graph existiert nicht

c) $(4,4,5,5,5,5)$ $\Rightarrow$ $|E| = \frac{28}{2} = 14$ $\quad |V| = 6$

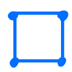
$|E| = 14 > 12 = 3|V| - 6$ $\lightning$ $\Rightarrow$ der Graph exist. nicht

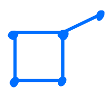
Aufgabe 22

a) $|V| = 6$ $\quad |E| = \frac{14}{2} = 7$ $\quad |V| \neq |E|+1$ $\lightning$ $\Rightarrow$ Graph-kein Baum

$\Rightarrow$ exist ein Kreis.

b) $|V| = 5$ $\quad |E| = \frac{16}{2} = 8$ $\quad |V| \neq |E|+1$ $\lightning$ $\Rightarrow$ Graph-kein Baum

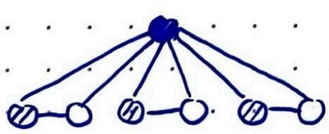
c) Gegenbeispiel 

d) Gegenbeispiel 

Aufgabe 23

a) Nicht realisierbar, da Summe der Gradfolge ungerade

b) Bis auf Isomorphie gibt es nur den Graphen

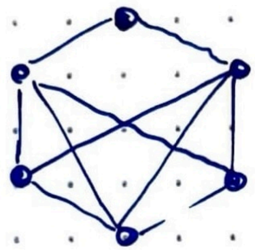


mit der Gradfolge, welcher 3-färbbar ist

c) Da es weder 6 Knoten mit einem Grad ≥ 3, noch 5 Knoten mit einem Grad ≥ 4 gibt, kann weder $K_{3,3}$ noch K_5 Minor des Graphen sein.
Der Graph ist also planar und damit nach dem Vierfarbensatz vierfärbbar

Aufgabe 27

a) Nein, da es einen Knoten mit Grad 1 gibt

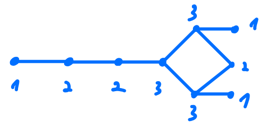
b) Ja, der Graph  besitzt seinen Umkreis als Hamiltonkreis

c) Nein, denn wenn der Graph aus zwei K_5 besteht, ist er nicht zusammenhängend und enthält damit keine Eulertour

d) Nein, denn die Gradfolge enthält ungerade Knotengrade

25

a) Vorschlag:



b) $|E| = \left(\frac{1}{3}\cdot|V|d + \frac{1}{3}|V|\cdot 2d + \frac{1}{3}|V|\cdot 3d\right)/2$

$= |V|d$

$f - |E| + |V| = 2$

$f - |V|d + |V| = 2$

$f - |V|(d-1) = 2$

$f = 2 + |V|(d-1)$

c) $|E| = |V|d$

$|E| \le 3|V| - 6$

$|V|d \le 3|V| - 6$

$|V|(d-3) \le 6$

$|V| \le -\frac{6}{d-3}$

$\forall\, |V| \in [3,\infty),\ |V| \le 0$ $\square$

26

$$|E| = \frac{3}{2}|V| \qquad 5f = 2|E|$$

$$\Rightarrow \quad 5f = 3|V|$$

$$|V| = \frac{5}{3}f \longrightarrow |E| = \frac{3}{2}|V| = \frac{5}{2}f$$

Da $f - |E| + |V| = 2$

$$f + \frac{5}{3}f - \frac{5}{2}f = 2$$

$$f = 12$$

27

Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum. Entfernt man einen Blattknoten des Spannbaums, ist der resultierende Graph noch immer zusammenhängend.

28

3-reg.

$$4 \cdot 6 + 3 \cdot n = 2|E| = 3|V|$$

$$f - |E| + |V| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad f - |E| + \frac{2}{3}|E| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad f - \frac{1}{3}|E| = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3f - |E| = 6$$

$$3 \cdot (4+n) - (12 + \frac{3}{2}n) = 6$$

$$n = 4$$