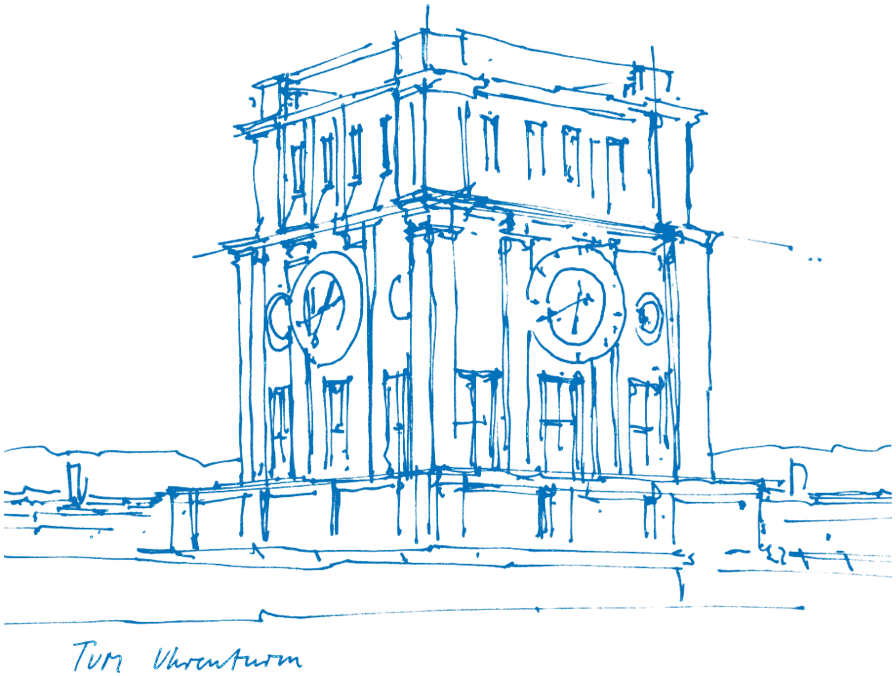
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 30. Oktober 2023



Relationen

Relationen — Relationales Produkt

Sei $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq C \times D$,
man bezeichnet $RS = \{(a, d)$ es gibt $x \in B \cap C$ mit $(a, x) \in R$ und $(x, d) \in S\}$ als relationales Produkt (Verkettung).

Induktive Definition:

$R^0 = \mathrm{Id}_A := \{(a, a) \;\; a \in A\}$

$R^1 := R$

$R^2 := RR$

$R^{k+1} := R^k R$

Relationen — Relationales Produkt

Transitive Hülle

$$R^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k$$

(Alle Pfade, die mindestens einen Schritt machen)

Reflexiv-Transitive Hülle

$$R^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} R^k = R^0 \cup R^+$$

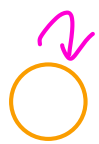
Wichtige Eigenschaften

- $(R^*)^* = (R^+)^* = (R^*)^+ = R^*$
- $(R^+)^+ = R^+$

Relationen — Eigenschaften

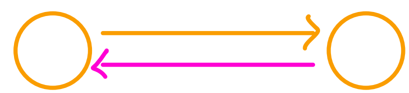
Reflexiv

– Falls $\mathrm{Id}_A \subseteq R$



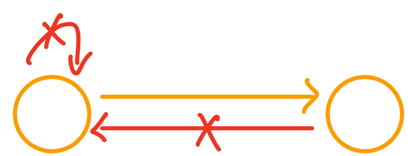
Symmetrisch

– Wann immer $(s, t) \in R$, dann auch $(t, s) \in R$



Asymmetrisch

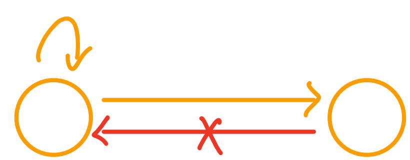
– Wann immer $(s, t) \in R$, dann auch $(t, s) \notin R$



Tipp: Id $\notin$ Asym.

Antisymmetrisch

– Wann immer $(s, t) \in R$ und $(t, s) \notin R$, dann gilt immer $s = t$

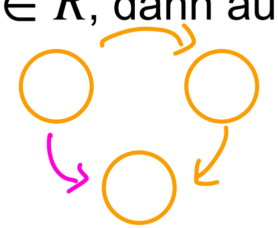


Tipp: Id erlaubt

Man betrachtet hier nur Asym. zwischen Paaren mit verschiedenen Elem.

Transitiv

– Wann immer $(s, t) \in R$ und $(t, u) \in R$, dann auch $(s, u) \in R$



Aufgaben

Aufgabe 2.1

Wir betrachten die Grundmenge $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Bestimmen Sie alle Lösungen $X, Y \subseteq \Omega$ für das folgende Mengengleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad X = \Omega \setminus (X \triangle Y) \\ &\text{(II)} \quad Y = Y \cap \{a, b\} \end{aligned}$$

$Y = Y \cap \{a, b\}$

→ Fallunterscheidung (Oder Intuition)

$a \in Y$, $b \in Y$

$c \notin Y$, $d \notin Y$

Beweis siehe Aufgabe 1.3 b)

$Y \subseteq \{a, b\}$

$X = \Omega \setminus (X \triangle Y)$

$\overline{X \triangle Y} = (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap X)$ Beweis nächste Folie

$\underline{X} = (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap \underline{X})$

$\overline{X} \cap \overline{Y} = \emptyset \Rightarrow \overline{X \cup Y} = \emptyset \Rightarrow \underline{X \cup Y = \Omega}$

$X = X \cap Y \Rightarrow \underline{X \subseteq Y}$

$Y = \Omega$

Widerspruch!

Daher keine Lösung

$$
\begin{aligned}
\overline{X \triangle Y} &= \overline{(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)} \\
&= \overline{X \setminus Y} \cap \overline{Y \setminus X} && \text{De Morgan} \\
&= (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{Y} \cup X) && \text{Def. } \setminus \\
&= ((\overline{X} \cup Y) \cap \overline{Y}) \cup ((\overline{X} \cup Y) \cap X) && \text{Distributivität} \\
&= ((\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap \overline{Y})) \cup ((\overline{X} \cap X) \cup (Y \cap X)) && \text{Distributivität} \\
&= ((\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup \emptyset) \cup ((Y \cap X) \cup \emptyset) && \text{Trivial} \\
&= (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap X) && \text{Trivial}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.2

Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei $\Sigma^\omega = \{(s_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid s_i \in \{a, b\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge aller Folgen mit Komponenten aus $\{a, b\}$.

Man kann sich eine solche Folge als unendliche Zeichenfolge (stream) vorstellen, wobei s_i das i-te Zeichen von links ist.

Für eine natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}_0$ sei $A_i = \{(s_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \Sigma^\omega \mid s_i = a\}$ die Teilmenge von Folgen aus Σ^ω, welche als i-te Komponente das Zeichen a haben, m.a.W. A_i besteht aus allen unendlichen Wörtern, die an der i-ten Position ein a stehen haben. Entsprechend sei B_i definiert.

Unter Verwendung der Mengen A_i, B_i kann man dann z.B. einen Mengenterm angeben, der gerade die Menge aller unendlichen Wörter enthält, in denen mindestens einmal auf ein a direkt ein b folgt:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} (A_i \cap B_{i+1}) \qquad \{\Sigma^{i-1} a \Sigma^*\} \cap \{\Sigma^i b \Sigma^*\} = \{\Sigma^{i-1} ab \Sigma^*\}$$

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \{\Sigma^{i-1} ab \Sigma^*\}$$

$\Sigma^\omega = \{(S_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mid$ An jeder Stelle steht entw. a oder b$\} = \{\varepsilon, \Sigma, \Sigma^2, \dots\} = \Sigma^*$

$A_i = \{\Sigma^{i-1} a \Sigma^*\}$ = Alle Wörter, die a an der i-Stelle steht.

$B_i = \{\Sigma^{i-1} b \Sigma^*\}$ = Alle Wörter, die b an der i-Stelle steht.

a) K sei die Teilmenge von Σ^ω, die genau aus den unendlichen Wörtern besteht, die mindestens ein a enthalten.

Idee: $\Sigma^* a \Sigma^*$, also an irgendeiner Stelle muss ein a auftauchen, sonst braucht man nicht berücksichtigen.

$$\{\Sigma^* a \Sigma^*\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \underbrace{\{\Sigma^{i-1} a \Sigma^*\}}_{A_i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$$

Intuition!

b) L sei die Teilmenge von Σ^ω, die genau aus den unendlichen Wörtern besteht, die ab einem gewissen Punkt nur noch aus as bestehen.

Idee : $\Sigma^* a^*$, also nach irgendeiner Stelle dürfen nur as auftauchen.

$$\{\Sigma^* a^*\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{\Sigma^{i-1} \underline{a}^*\} = \underline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} \{\Sigma^{j-1} a \Sigma^*\}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} A_j$$

$$a^* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \{\Sigma^{i-1} a \Sigma^*\}$$

Intuition : $|w| = 3$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \{a\Sigma\Sigma\} \\ a_2 = \{\Sigma a \Sigma\} \\ a_3 = \{\Sigma\Sigma a\} \end{array}\right\} a_1 \cap a_2 \cap a_3 = \{aaa\}$$

c) M sei die Teilmenge von Σ^ω, die die genau aus den unendlichen Wörtern besteht, die unendlich viele as enthalten.

Idee: Alle Wörter, die endlich viele as enthalten, sind im folgenden Gestalt:

$$\Sigma^* b^\infty$$

Hier dürften noch as auftauchen.

|b| ist unendlich, also keine as hier, daher ist |a| endlich.

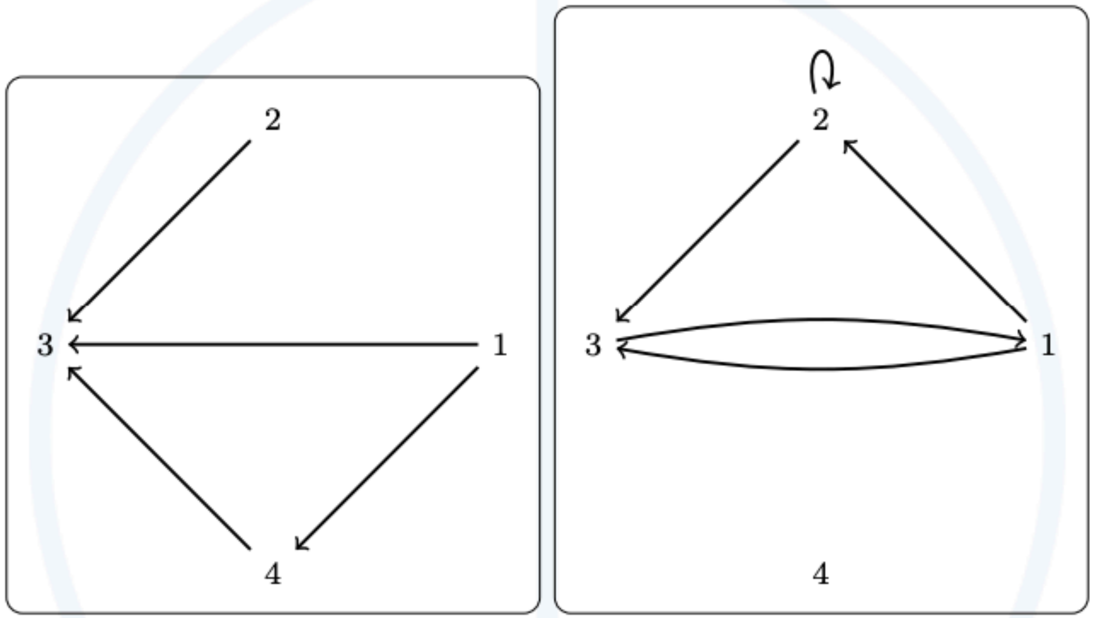
$$\{\Sigma^* b^*\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{\Sigma^{i-1} b^*\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} \{\Sigma^{j-1} b \Sigma^*\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} B_j$$

Wir suchen allen Wörtern mit unendlichen as:

$$\mathcal{L} = \Sigma^w \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} B_j$$

Aufgabe 2.3

Gegeben sind die folgenden beiden Relationen R (links) und S (rechts) über der Grundmenge $[4]$ in graphischer Darstellung:



(a) Stellen Sie das Ergebnis der folgenden relationalen Ausdrücke jeweils graphisch dar. Verwenden Sie stets die folgende Anordnung für die Knoten:

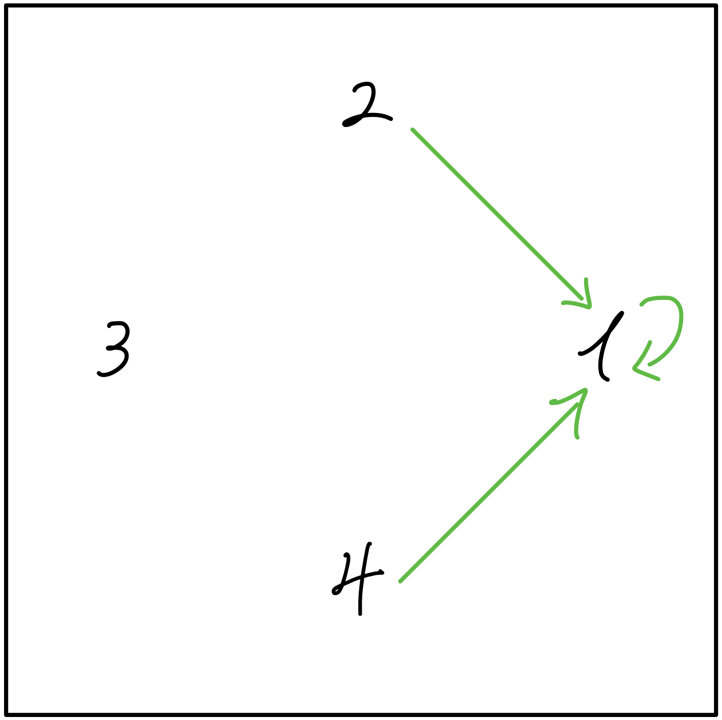
$R = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (4,3) \}$

$S = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1) \}$

1) RS

2) SR

RS

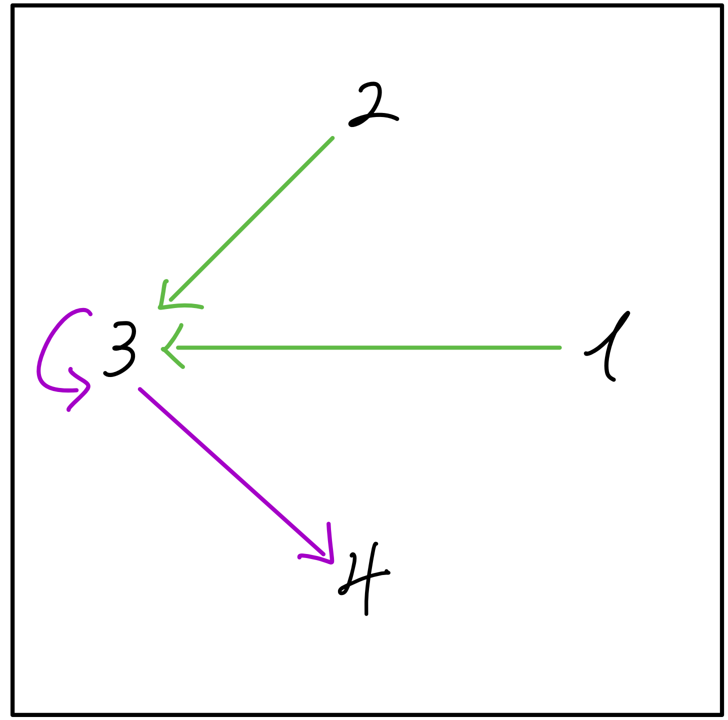


$R = \{(1,3),(1,4),$
$(2,3),$
$(4,3)\}$

$S = \{(1,2),(1,3),$
$(2,2),(2,3),$
$(3,1)\}$

$\Rightarrow RS = \{(1,1),(2,1),(4,1)\}$

SR



$S = \{(1,2),(1,3),$
$(2,2),(2,3),$
$(3,1)\}$

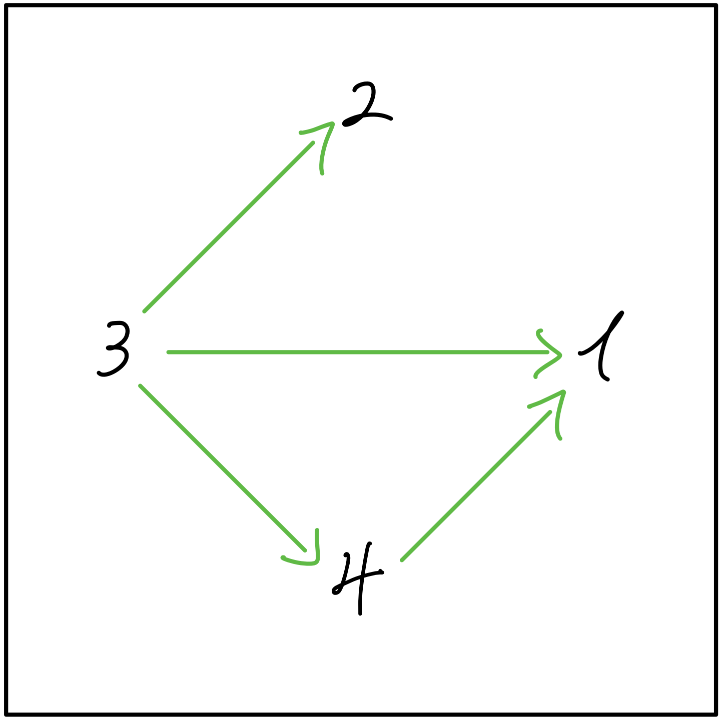
$R = \{(1,3),(1,4),$
$(2,3),$
$(4,3)\}$

$\Rightarrow SR = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,4)\}$

3) R^{-1}

4) R^*

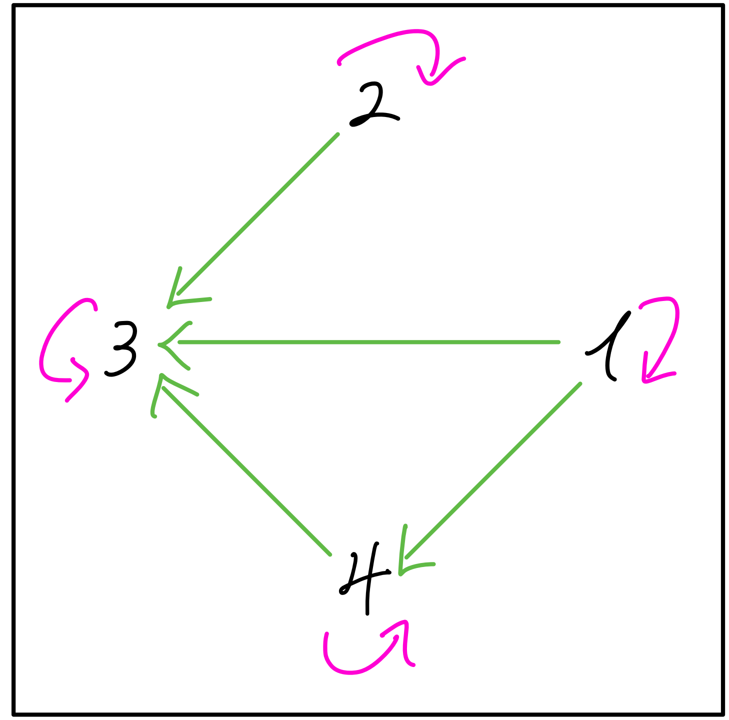
R^{-1}



$R = \{(1,3), (1,4), (2,3), (4,3)\}$

$\Rightarrow R^{-1} = \{(3,1), (4,1), (3,2), (3,4)\}$

R^*



$R = \{(1,3), (1,4), (2,3), (4,3)\}$

$\Rightarrow R^* = \{(1,3), (1,4), (2,3), (4,3)\} \cup \bigcup_{i \in V} Id_i$

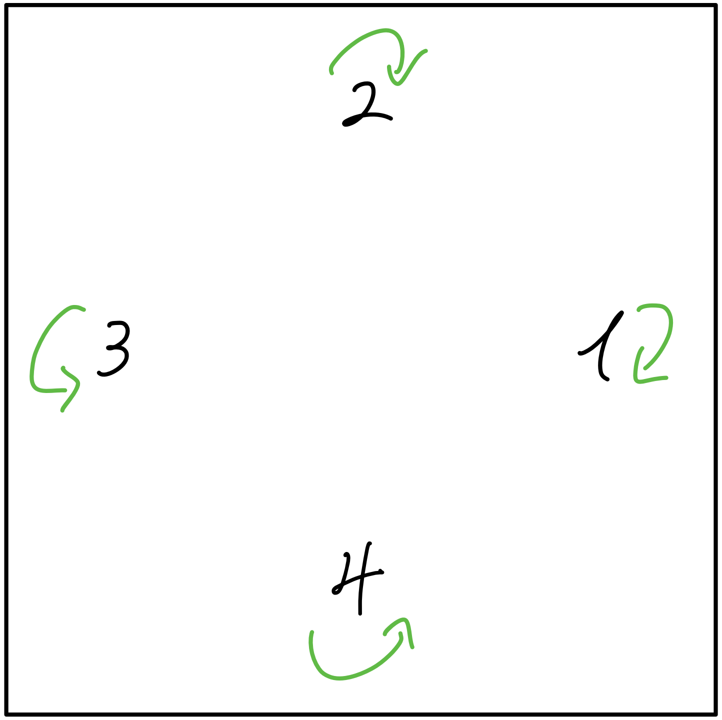
(1,3) bereits enthalten, es wird keine neue Beziehungen erzeugt

Nicht Vergessen!!!

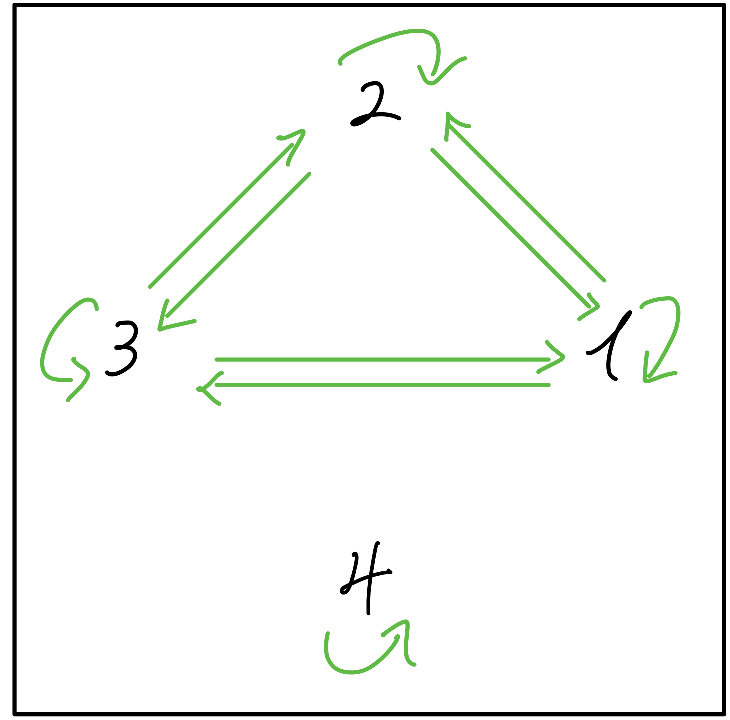
5) $(R \cap R^{-1})^*$

6) $(S \cup S^{-1})^*$

$(R \cap R^{-1})^*$



$(S \cup S^{-1})^*$



$R = \{(1,3),(1,4),(2,3),(4,3)\}$

$R^{-1} = \{(3,1),(4,1),(3,2),(3,4)\}$

$R \cap R^{-1} = \emptyset$

$(R \cap R^{-1})^* = \bigcup_{i \in V} Id_i$

$S = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1)\}$

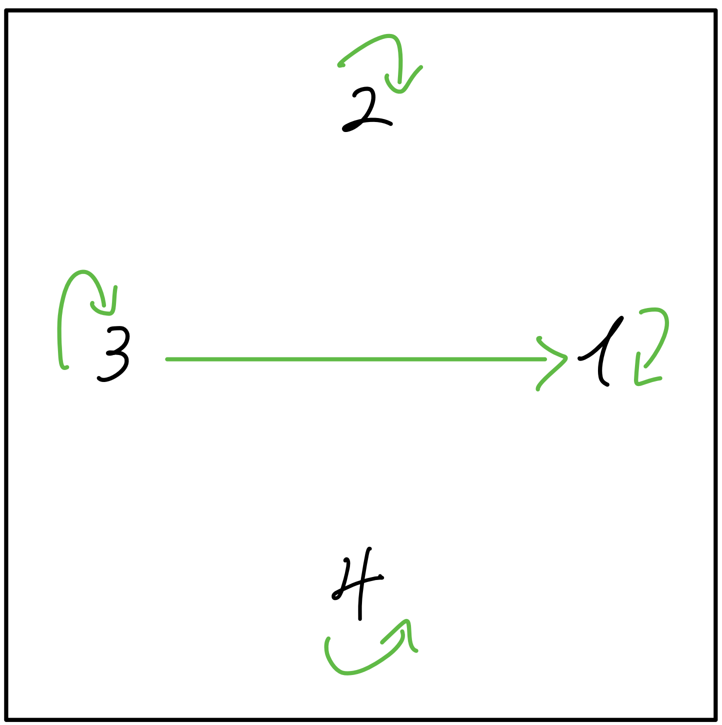
$S^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(1,3)\}$

$S \cup S^{-1} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2),(2,2)\}$

$(S \cup S^{-1})^* = (S \cup S^{-1}) \cup \bigcup_{i \in V} Id_i$

7) $(S \backslash S^2)^*$

$(S \setminus S^2)^*$



$S = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

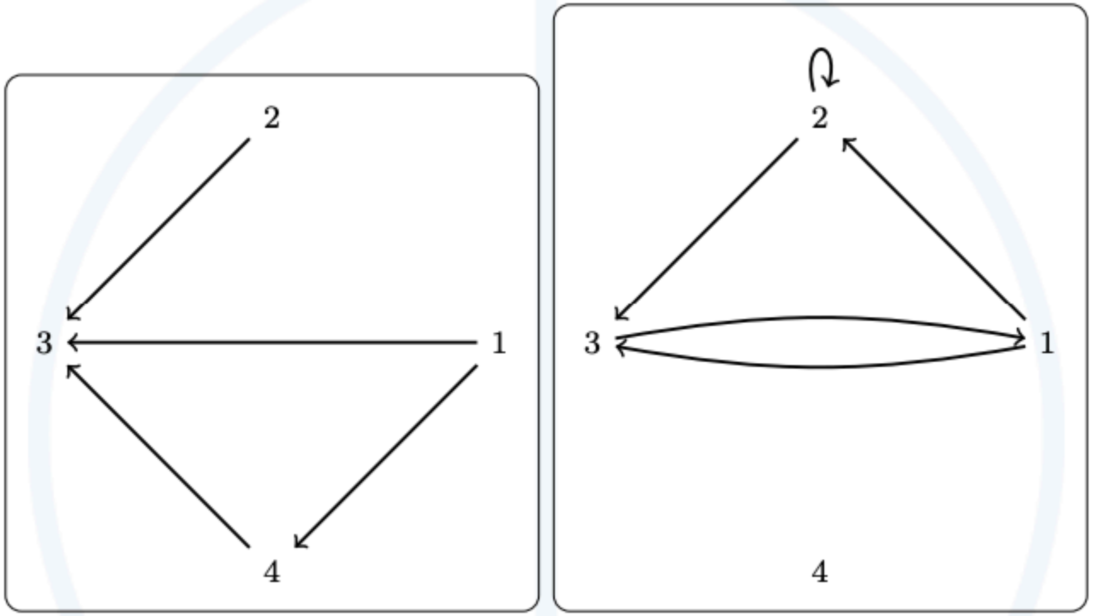
$S^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

$S \setminus S^2 = \{(3,1)\}$

$(S \setminus S^2)^* = \{(3,1)\} \cup \bigcup_{i \in V} \mathrm{Id}_i$

Aufgabe 2.3

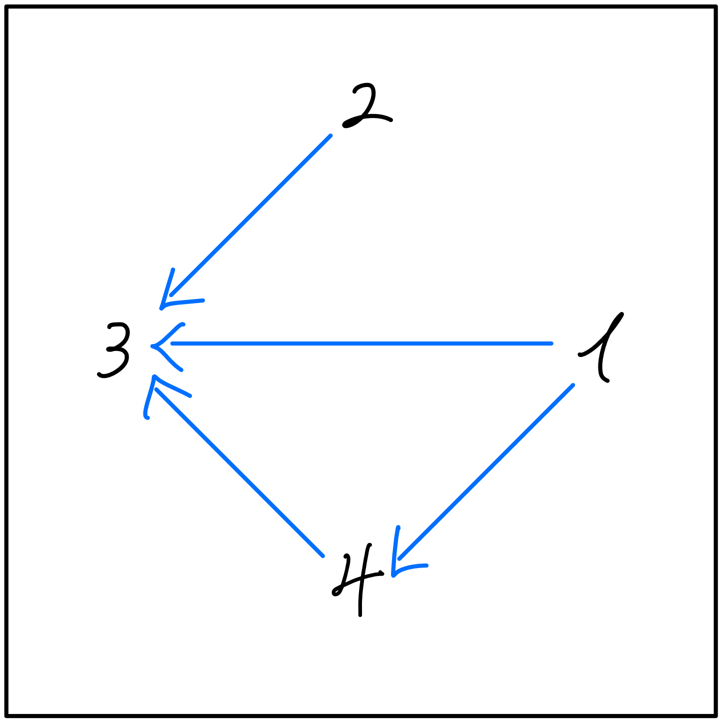
Gegeben sind die folgenden beiden Relationen R (links) und S (rechts) über der Grundmenge $[4]$ in graphischer Darstellung:



(b) Bestimmen Sie für jede der folgenden Relationen, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv) sie besitzt.

$$(i)\ R \quad (ii)\ S \quad (iii)\ R^* \quad (iv)\ (R \cap R^{-1})^* \quad (v)\ (S \cup S^{-1})^* \quad (vi)\ (S \setminus S^2)^*$$

1) R



✗ Reflexiv

$\bigcup_{i \in V} Id_i$ nicht vorhanden

✗ Symmetrisch

(2,3) vorhanden, (3,2) nicht (mehrere Möglichkeiten)

✓ Asymmetrisch

Asym. zwischen allen Paaren

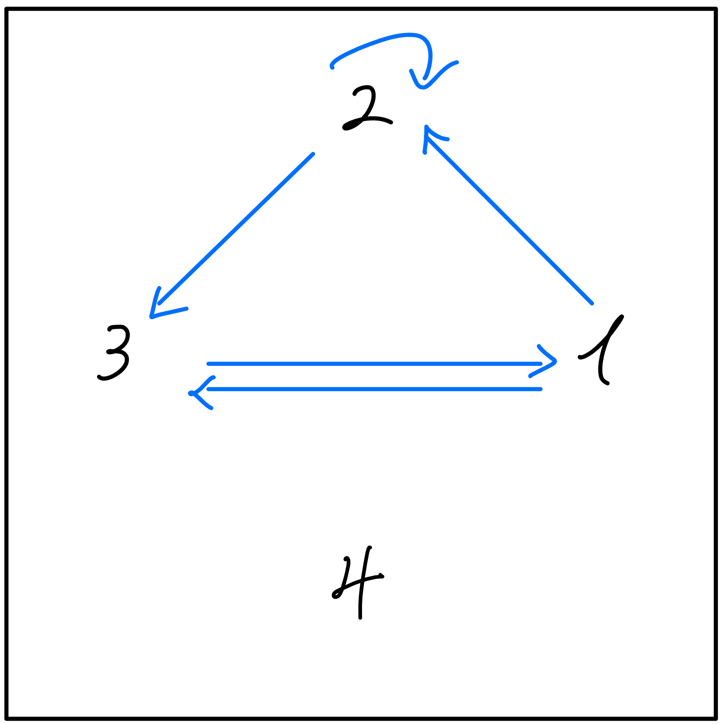
✓ Antisymmetrisch

Asym. zwischen Paaren mit verschiedenen Elem.

✓ Transitiv

$(1,4), (4,3) \Rightarrow (1,3)$

2) S



✗ Reflexiv

$\bigcup_{i \in V} Id_i$ nicht vorhanden

✗ Symmetrisch

$(2,3)$ vorhanden, $(3,2)$ nicht (auch $(1,2)/(2,1)$)

✗ Asymmetrisch

Id vorhanden (auch $\begin{cases}(1,3)\\(3,1)\end{cases}$)

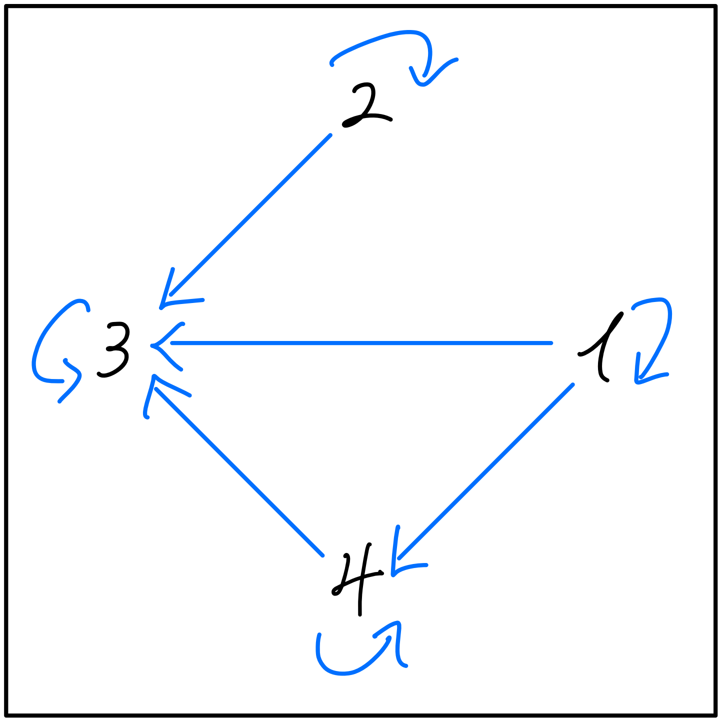
✗ Antisymmetrisch

$\begin{cases}(1,3)\\(3,1)\end{cases}$

✗ Transitiv

$(3,1) \circ (1,2) \not\Rightarrow (3,2)$

3) R^*



✓ Reflexiv

$\bigcup_{i \in V} Id_i$ vorhanden

✗ Symmetrisch

(1,3) vorhanden, (3,1) nicht

✗ Asymmetrisch

Id vorhanden

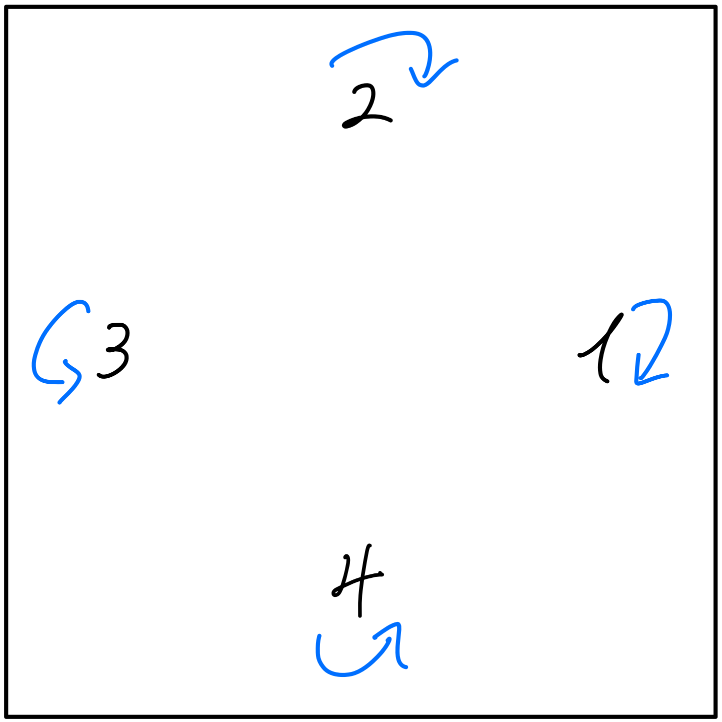
✓ Antisymmetrisch

Asym. zwischen Paaren mit verschiedenen Elem.

✓ Transitiv

$(1,4) \circ (4,3) \Rightarrow (1,3)$

4) $(R \cap R^{-1})^*$



✓ Reflexiv

$\bigcup_{i \in V} Id_i$ vorhanden

✓ Symmetrisch

Nur Id vorhanden

✗ Asymmetrisch

Id vorhanden

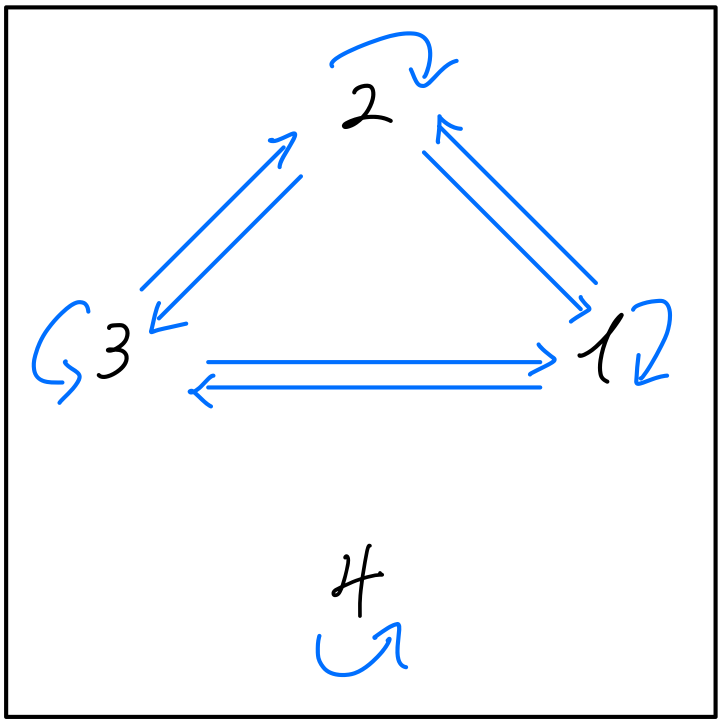
✓ Antisymmetrisch

Keine Verletzung der Regel

✓ Transitiv

Keine Beziehungen nacheinander

5) $(S \cup S^{-1})^*$



✓ Reflexiv

$\bigcup_{i \in V} Id_i$ vorhanden

✓ Symmetrisch

$\begin{cases}(1,2)\\(2,1)\end{cases}$ $\begin{cases}(1,3)\\(3,1)\end{cases}$ $\begin{cases}(2,3)\\(3,2)\end{cases}$ und Id

✗ Asymmetrisch

Id vorhanden

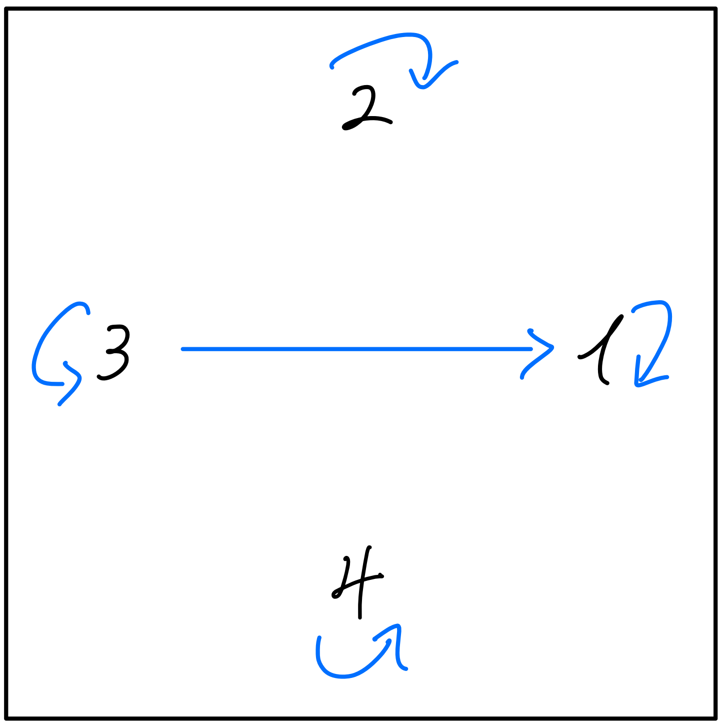
✗ Antisymmetrisch

$\begin{cases}(1,2)\\(2,1)\end{cases}$ $\begin{cases}(1,3)\\(3,1)\end{cases}$ $\begin{cases}(2,3)\\(3,2)\end{cases}$

✓ Transitiv

Beziehungen nacheinander bilden Kreise

6) $(S\setminus S^2)^*$



✓ Reflexiv

$\bigcup_{i\in V} Id_i$ vorhanden

✗ Symmetrisch

(3,1) vorhanden, (1,3) nicht

✗ Asymmetrisch

Id vorhanden

✓ Antisymmetrisch

(3,1) vorhanden, (1,3) nicht

✓ Transitiv

Keine Verletzung der Regel

Alle Folien werden hier hochgeladen :)

https://discord.gg/v44bAsfmdK

Fragen?