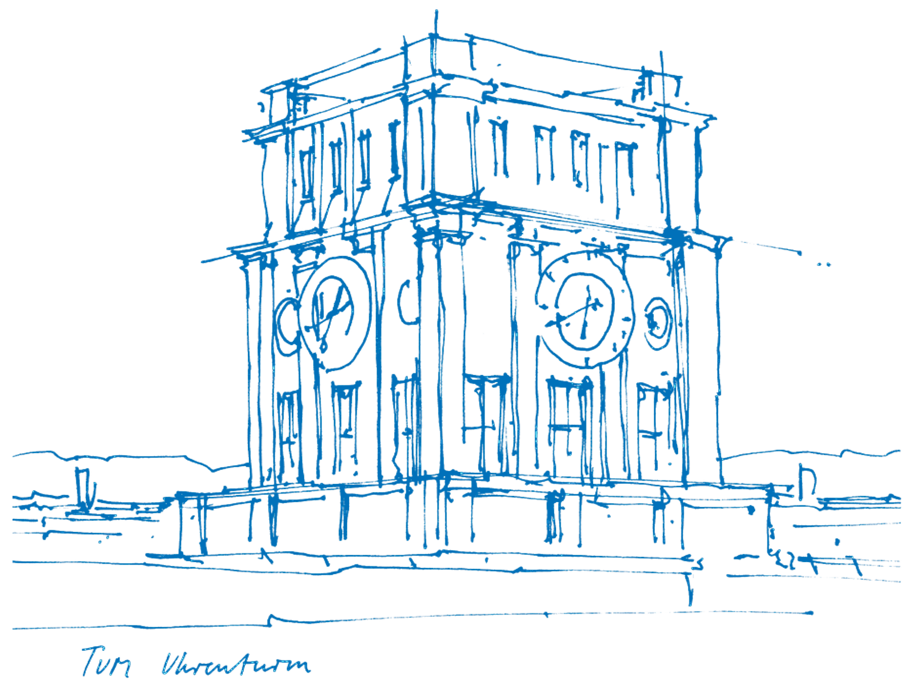
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 18. Dezember 2023



Graphentheorie — Planarität

Unter Planarität versteht man, dass man einen Graph in der 2D Zeichenebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen könnte.

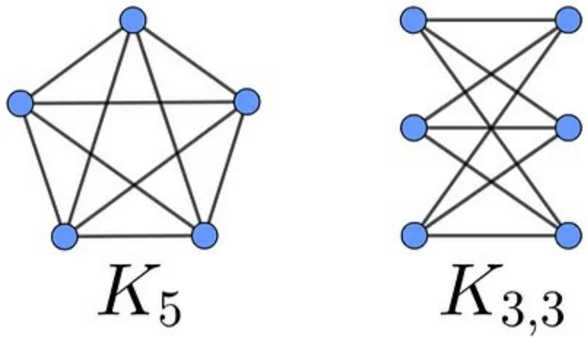
Eulersche Polyederformel (EPF): Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängenden planarer Graph. Sei f die Anzahl der Flächen, in die G bei überschneidungsfreier Darstellung die Zeichenebene zerschneidet.

- $f - |E| + |V| = 2$

Graphentheorie — Planarität

Satz von Kuratowski

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn weder $K_{3,3}$ noch K_5 ein Minor von G ist.



https://medium.com/math-simplified/graph-theory-101-why-all-non-planar-graphs-contain-k%E2%82%81-or-k%E2%82%83-%E2%82%83-c3ad48d6798e

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

3 Formeln

- $|E| \leqslant 3|V| - 6$
- $f - |E| + |V| = 2$ ⟶ EPF
- $f \leqslant \frac{2|E|}{4}$

Falls $|V| \geqslant 4$

$|E| \leqslant 2|V| - 4$ (wird heute bewiesen)

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

1. $|E| \leqslant 3|V| - 6$: Der Graph kann planar sein, sonst kann der Graph NICHT planar sein.
2. Es gibt weniger als 5 Knoten mit Grad 4 und weniger als 6 Knoten mit Grad 3: Der Graph ist planar, da der $K_{3,3}$ und K_5 nicht als Minor enthalten werden.
3. Es gibt weniger als 5 Knoten mit Grad 4 aber mindestens 6 Knoten mit Grad 3: Manuelle Überprüfung von $K_{3,3}$ erforderlich, da K_5 kein Minor sein kann aber $K_{3,3}$ weiß man nicht.
4. Es gibt mindestens 5 Knoten mir Grad 4 aber weniger als 6 Knoten mit Grad 3: Manuelle Überprüfung von K_5 erforderlich, da $K_{3,3}$ kein Minor sein kann aber K_5 weiß man nicht.

Sonst muss man manuell überprüfen, ob $K_{3,3}$ und K_5 als Minor enthalten werden.

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

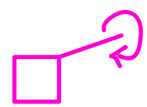
Informationen bzgl. Flächen? Dann könnte man auch prüfen: $f - |E| + |V| = 2$

Graphentheorie — Planarität

Flächen

Generell gilt: $2|E| = \sum_{f \in F} l_f$

Voraussetzung: Alle Fläche durch genau l_f Kanten umrandet

Sonst: $2|E| \geq \sum_{f \in F} l_f$ 

nur „innere Fläche": $f - 1$ statt f

Graphentheorie — Vier-Farben-Satz

Für jeden einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leqslant 4$.

Auf Vielfarbigkeit prüfen:
Der Graph ist 4 farbbar, wenn er planar ist.

Meistens gibt es nur eine Möglichkeit bei dieser Fragestellung. Man könnte den Graphen zeichnen und damit zeigen, dass sie x-farbbar ist.

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(a) Zeigen, dass $k \in \{3, 4, 5\}$ gelten muss.

k-regulär $\longrightarrow$ ① $\sum_{v \in V} \deg(v) = k\,|V|$

② $|V| \geq k + 1$

planar $\longrightarrow$ ③ $|E| \leq 3\,|V| - 6$

Handschlag $\longrightarrow$ ④ $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

④ $2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$ ③ $|E| \leq 3\,|V| - 6$

① $\Rightarrow$ $2\,|E| = k\,|V|$ ⑤ $\Rightarrow$ $\frac{k}{2}|V| \leq 3\,|V| - 6$

$\Rightarrow$ $|E| = \frac{k}{2}|V|$ ⑤ $\Rightarrow$ $k \leq 6 - \frac{12}{|V|}$ ⑥

② Da $|V| \geq k + 1 = 4$

$|V| \in [4, \infty)$

⑥ $\Rightarrow$ $6 - \frac{12}{|V|} \in [3, 6)$ $\lim_{|V| \to \infty} 6 - \frac{12}{|V|}$

$\Rightarrow$ $k < 6$

$\Rightarrow$ $k \in [3, 6)$

$\square$

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(b) Wir nehmen weiter an, dass jede Fläche $f \in F$ einschließlich der umschließenden Fläche, in welche eine jede planare Einbettung von G die euklidische Ebene unterteilt, durch genau l Kanten berandet ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$l = \frac{2k\,|V|}{(k-2)\,|V| + 4}$$

k-regulär $\longrightarrow$ ① $\sum_{v \in V} \deg(v) = k\,|V|$

planar $\longrightarrow$ ② $2\,|E| = \ell f$

③ $f - |E| + |V| = 2$

Handschlag $\longrightarrow$ ④ $2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

④ $2\,|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$

① $\Rightarrow 2\,|E| = k\,|V|$

$\Rightarrow \boxed{|E| = \frac{k}{2}\,|V|}$ ⑤

② $2\,|E| = \ell f$

$\Rightarrow f = \frac{2\,|E|}{\ell}$

⑤ $\Rightarrow \boxed{f = \frac{k}{\ell}\,|V|}$ ⑥

③ $f - |E| + |V| = 2$

⑤⑥ $\Rightarrow \frac{k}{\ell}\,|V| - \frac{k}{2}\,|V| + |V| = 2$

$\Rightarrow \frac{k}{\ell} = \frac{2}{|V|} + \frac{k}{2} - 1$

$\Rightarrow \frac{k}{\ell} = \frac{4 + (k-2)\,|V|}{2\,|V|}$

$\Rightarrow \ell = \frac{2k\,|V|}{4 + (k-2)\,|V|}$

① $l = \frac{2k|V|}{4+(k-2)|V|} \in \mathbb{Z}$ ② $|V| \geq k+1$ ③ $|E| = \frac{k}{2}|V| = \frac{k}{2}|V|$ ④ $f = \frac{k}{l}|V|$

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(c) Bestimmen Sie mittels (b) alle möglichen Werte von $|V|, |E|, |F|, l$ in Abhängigkeit von k.

$k = 3$

$$l = \frac{6|V|}{4+|V|} = \frac{24+6|V|-24}{4+|V|} = 6 - \frac{24}{4+|V|}$$

Da $l, |V| \in \mathbb{Z}$, müsste $4+|V|$ durch 24 teilbar sein

$|V| \in \{0, 2, 4, 8, 12\}$

Da $|V| \geq k+1 = 4$

$|V| \in \{4, 8, 12\}$

$\vert V\vert$	l	f	$\vert E\vert$
4	3	4	6
8	4	6	12
12	5	12	30

$k = 4$

$$l = \frac{8|V|}{4+2|V|} = \frac{4|V|}{2+|V|} = \frac{8+4|V|-8}{2+|V|} = 4 - \frac{8}{2+|V|}$$

Da $l, |V| \in \mathbb{Z}$, müsste $2+|V|$ durch 8 teilbar sein

$|V| \in \{0, 2, 6\}$

Da $|V| \geq k+1 = 5$

$|V| = 6$

$\vert V\vert$	l	f	$\vert E\vert$
6	3	8	12

$k = 5$

$$l = \frac{10|V|}{4+3|V|} = \frac{\frac{40}{3}+10|V|-\frac{40}{3}}{4+3|V|} = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{40}{4+3|V|}$$

Da $l, |V| \in \mathbb{Z}$, müsste $4+3|V|$ durch 40 teilbar sein

$|V| \in \{0, 2, 12\}$

Da $|V| \geq k+1 = 6$

$|V| = 12$

$\vert V\vert$	l	f	$\vert E\vert$
12	3	20	30

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

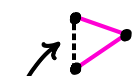
(a) Für jeden einfachen, bipartiten, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.

Zusammen-hängend

planar $\longrightarrow$ EPF $\quad f - |E| + |V| = 2 \quad$ (1)

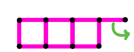
$\ell f = 2|E|$

bipartit $\longrightarrow$ keine Dreiecke



nicht zugelassen

$$\Rightarrow 4f = \sum_{f \in F} 4 \leq \sum_{f \in F} |E_f| \leq 2|E| \quad (2)$$



Diese Kante grenzt nur 1 Fläche ab

$\Rightarrow$ Verlust von 2 $\Rightarrow \geq$

Jedes Gebiet wird durch mind. 4 Kanten beranden

(1) $\quad f - |E| + |V| = 2$

$\Rightarrow \quad f = 2 + |E| - |V|$

(2) $\Rightarrow \quad 2 + |E| - |V| \leq \frac{1}{2}|E|$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}|E| \leq |V| - 2$

$\Rightarrow \quad |E| \leq 2|V| - 4$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden einfachen, bipartiten, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.

Nicht Zusammen-hängend

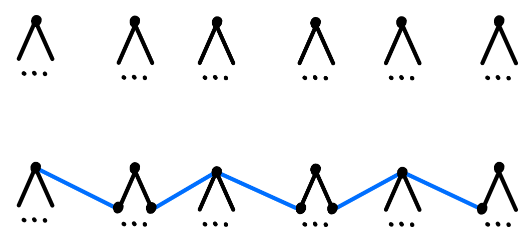
Bewiesen: Für jeden einfachen, bipartiten, planaren, zusammenhängenden Graph G mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$

Idee: nicht zusammenhängend $\longrightarrow$ zusammenhängend

Man verknüpft jeden Zusammenhangskomponente mit jeweils 1 Knoten

$G = (E, V)$ — X zusammenhängend

$G' = (E', V)$ — zusammenhängend



$$\Longrightarrow \quad |E'| \leq 2|V| - 4$$

$$|E| < |E'| \leq 2|V| - 4$$

$$|E| < 2|V| - 4 \quad \square$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen: ohne Kuratowski

(b) Der $K_{m,n}$ für $m, n \geq 3$ ist nicht planar.

$$K_{m,n} \longrightarrow \quad |E| = mn$$
$$|V| = m+n$$

Laut a):

$$|E| \leq 2|V| - 4$$
$$mn \leq 2(m+n) - 4$$
$$2m + 2n - mn - 4 \geq 0$$
$$(2-n)(m-2) \geq 0$$
$$\downarrow$$

Entweder m oder n muss negativ sein $\lightning$

$\square$

Aufgabe 9.3

Zeigen Sie: Es gibt keinen einfachen, planaren, zusammenhängenden Graphen, in welchem jeder Knoten genau vier Nachbarn hat und jedes innere Gebiet durch genau fünf Kanten begrenzt ist.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4|V|$$

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|V| \quad ①$$

1) EPF: $f - |E| + |V| = 2$ ②

2) $2|E| \geq 5(f-1) \implies f \leq \frac{2}{5}|E| + 1$ ③

Alle Flächen durch 5 Kanten begrenzt

innere Fläche = alle Fläche − äußere Fläche $= f - 1$

② $f - |E| + |V| = 2$

$\Rightarrow f = 2 + |E| - |V|$

③ $\Rightarrow 2 + |E| - |V| \leq \frac{2}{5}|E| + 1$

$\Rightarrow \frac{3}{5}|E| \leq |V| - 1$

① $\Rightarrow \frac{6}{5}|V| \leq |V| - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{5}|V| \leq -1$

$\Rightarrow |V| \leq -5$ ↯ $\square$

Schönen Weihnachten :)