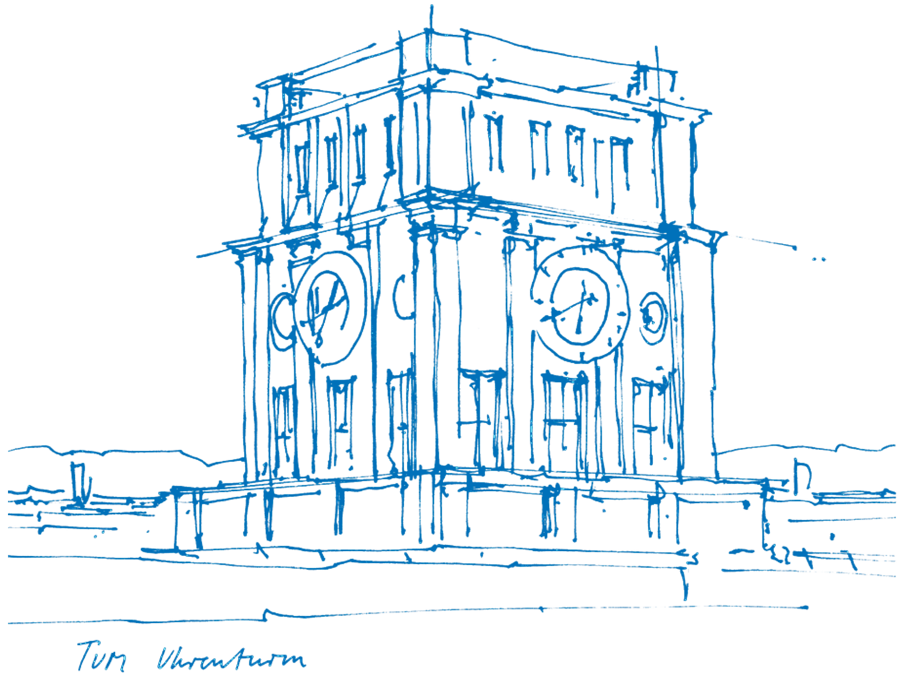
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 13. November 2023



Funktionen

$f : A \to B$

$f \subseteq A \times B$ eine Funktion von A nach B ist

$f : \overset{\text{Eingabe}}{\mathbb{N}} \to \overset{\text{Ausgabe}}{\mathbb{N}}$

Dom(f)

Urbildmenge, also A

Rng(f)

Bildmenge, also $\{f(a) \quad a \in A\}$

Total

Für jedem $a \in A$ wird ein Bild $f(a)$ zugewiesen

Funktionen

Komposition

Sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen, dann gilt es

$(g \circ f) : A \to C, a \to g(f(a))$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

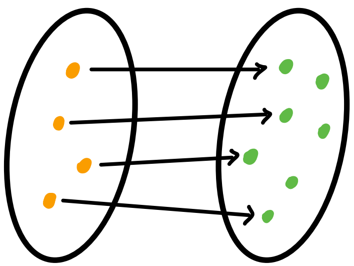
Komposition ist assoziativ: $(h \circ (g \circ f)) = ((h \circ g) \circ f)$

Funktionen

Injektiv

$f : A \to B$

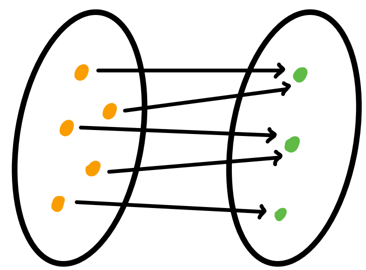
$\forall x \in A .\ \exists y \in B .\ f(x) = y$



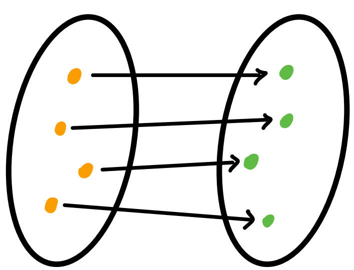
Surjektiv

$f : A \to B$

$\forall y \in B .\ \exists x \in A .\ f(x) = y$



Bijektiv



$f : A \to B$

$\forall x \in A .\ \exists y \in B .\ f(x) = y$

und $\forall y \in B .\ \exists x \in A .\ f(x) = y$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $C \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(f(f^{-1}(C))) = f^{-1}(C)$.

Def: $f: X \to Y$ $\quad f(x) = \{ f(x') \mid x' \in x \}$ Trivial

$f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) \in y \}$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(b) Sei $g\colon Y \to Z$ eine weitere Funktion. Dann gilt $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$ für alle $E \subseteq Z$.

Def: $f: X \to Y$ $\quad f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) \in y \}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(b) Sei $g\colon Y \to Z$ eine weitere Funktion. Dann gilt $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$ für alle $E \subseteq Z$.

Def: $f: X \to Y$ $\quad f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) \in y\}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(c) Zeigen Sie: f ist genau dann surjektiv, falls es eine Funktion $g\colon Y \to X$ mit $f \circ g = \mathsf{Id}_Y$ gibt.

A B

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass es eine Funktion $r\colon X \to X$ mit $r(x) \equiv_f x$ und $(r(x) = r(x')$ gdw. $x \equiv_f x')$ gibt.

Surjektion $f: X \to Y$ $\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ f(x) = y$

$A \leftarrow B$?

$A \rightarrow B$?

Beweis: Genau dann wenn

Zu zeigen A gdw. B

wenn A stimmt, stimmt B ($A \rightarrow B$)

UND

wenn B stimmt, stimmt A ($A \leftarrow B$)

kturen001

Aufgabe 4.2

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei A_i eine abzählbare, nicht leere Menge.

Zeigen Sie, dass dann auch $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar ist.

Hinweis: Falls es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt, dann gibt es auch eine injektive Abbildung $A \to \mathbb{N}$. Weiterhin gibt es nach Vorlesung eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

A ist abzählbar, falls $|A| \leq |\mathbb{N}|$

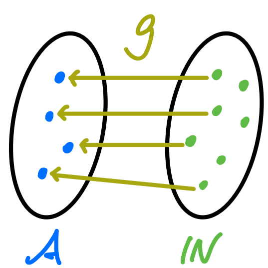
⚠ Beim Beweis sollte man am Anfang immer bestimmen, was man zeigen wollte (zu Zeigen), damit man eine grobe Orientierung hat.

⚠ $=$ → gleich, $:=$ → definieren

Annahme: $\forall i \in \mathbb{N}.\ A_i$ abzählbar

Zu zeigen: $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar

Ziel: abzählbar $\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow$



$\Rightarrow$ Surjektivität

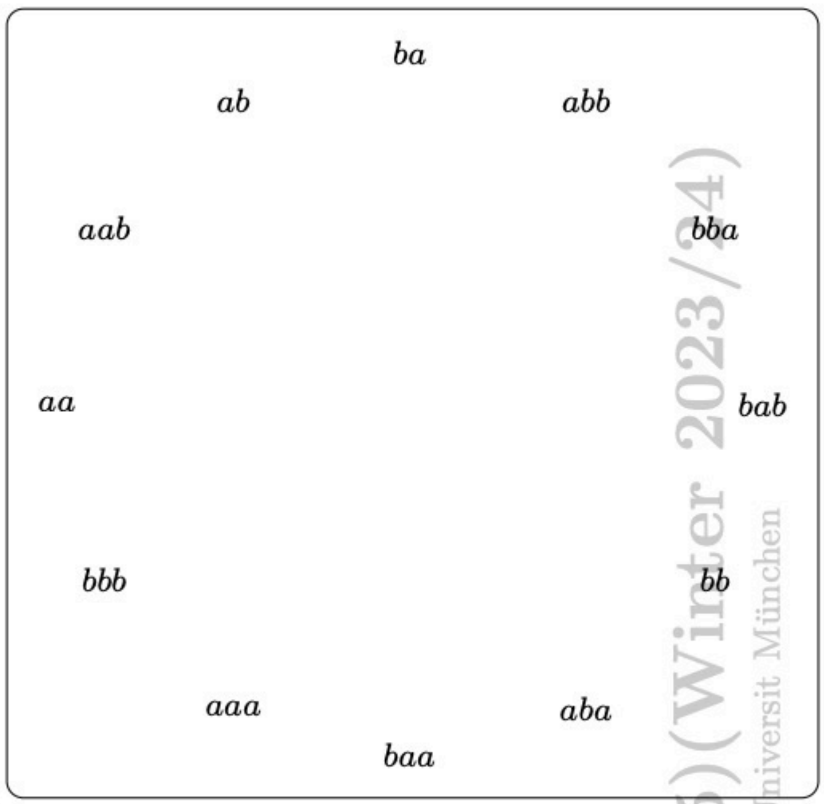
Daher wollen wir eine surjektive Funktion $g(n): \mathbb{N} \longrightarrow A$ erzeugen.

Aufgabe 4.3

Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

Wir betrachten hier $A = \{a, b\}^2 \cup \{a, b\}^3$.
Die zu betrachtenden Elementen sind also:
$\{aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}$

Vorlage



5)(Winter 2023/24)
Universit München

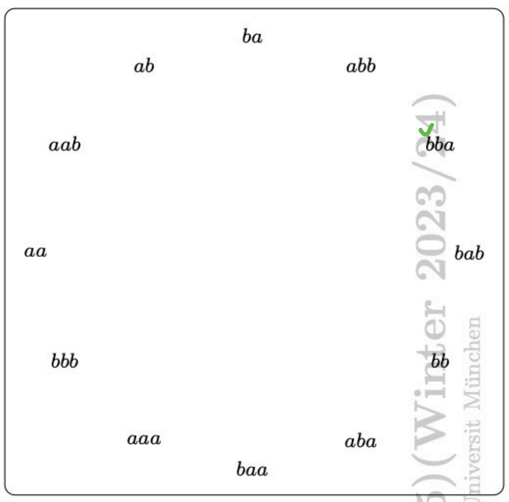
Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(a) Für $A = \{a,b\}^2 \cup \{a,b\}^3$ sei $R = \{(uv, vu) \in A \times A \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$.

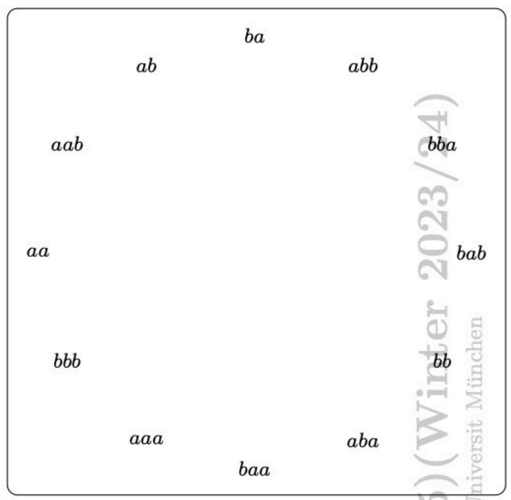
Stellen Sie R, $R \setminus \mathsf{Id}_A$, $(R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$ und H_R graphisch dar.

$ab \in R \rightarrow$

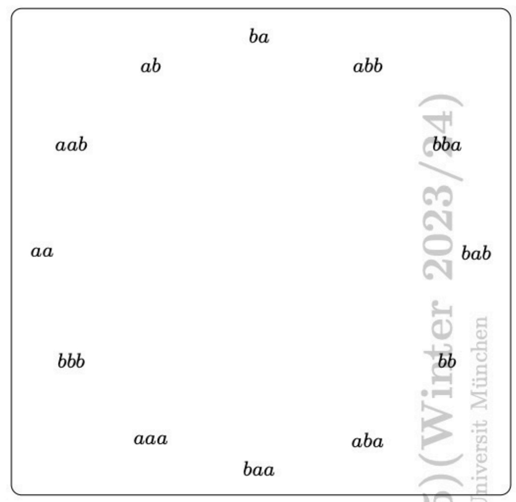
$aab \in R \rightarrow$



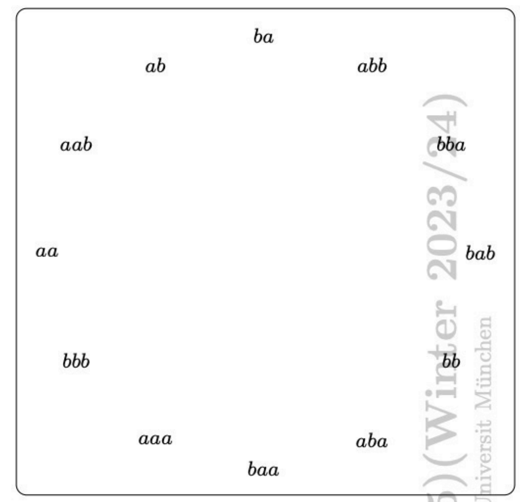
R



$R \setminus Id_A$



$(R \setminus Id_A)^2$



H_R

$= (R \setminus Id_A) \setminus (R \setminus Id_A)^2$

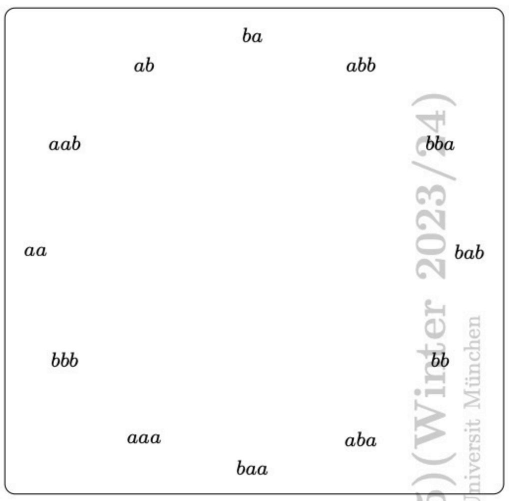
Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(b) Für $A = \{a,b\}^2 \cup \{a,b\}^3$ sei $R = \{(u, uv) \in A \times A \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$.

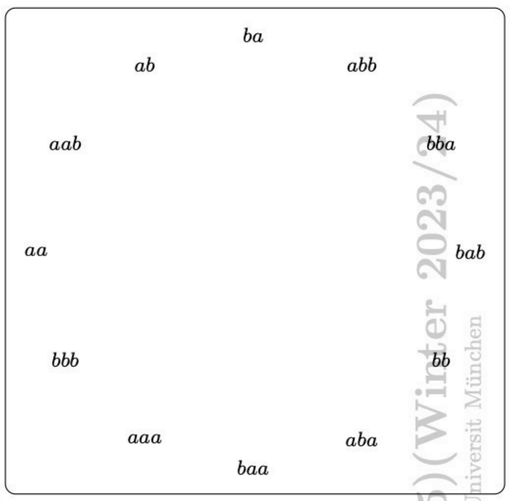
Stellen Sie R, $R \setminus \mathsf{Id}_A$, $(R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$ und H_R graphisch dar.

$ab \in R \rightarrow$

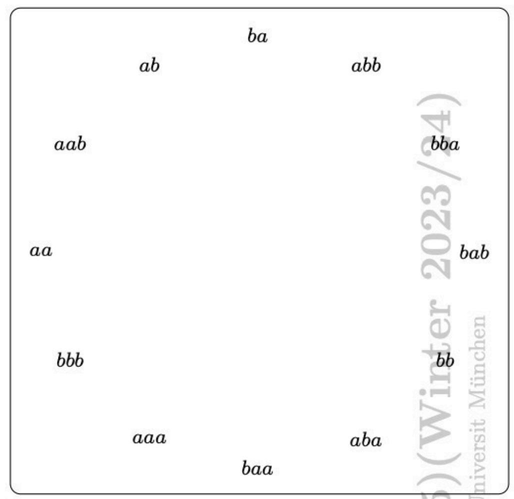
$aab \in R \rightarrow$



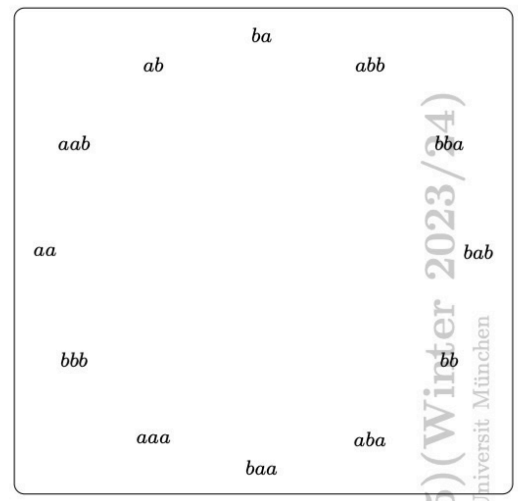
R



$R \setminus Id_A$



$(R \setminus Id_A)^2$



H_R

$= (R \setminus Id_A) \setminus (R \setminus Id_A)^2$

Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(c) Bestimmen Sie H_R für $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$.

$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$

$R \setminus Id_A =$

$(R \setminus Id_A)^2 =$

$H_R = (R \setminus Id_A) \setminus (R \setminus Id_A)^2 =$

Fragen?