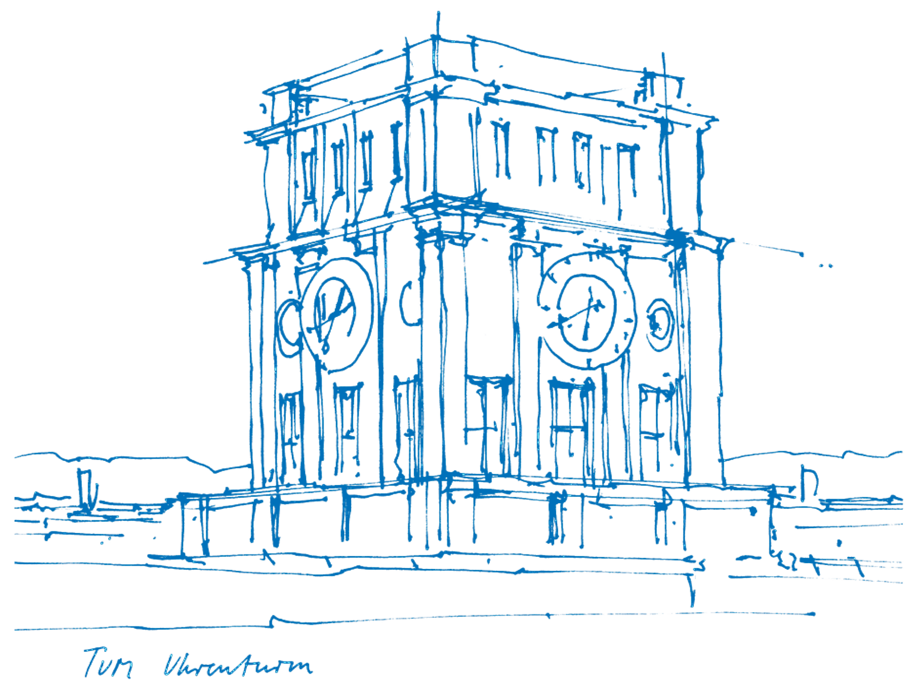
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 11. Dezember 2023



Graphentheorie — Kreis

Auf Kreise prüfen

Jeder zusammenhängenden Graph mit $n > 2$ Knoten und n oder mehr Kanten besitzt einen Kreis.

Graphentheorie — Hamiltonkreis

In einem Hamiltonkreis wird jeder Knoten genau einmal besucht.

- Jeder Knoten in einem einfacher Graph $G = (V, E)$, der mindestens Knotengrad $\left|V\right|/2$ hat, besitzt ein Hamiltonkreis.

Graphentheorie — Hamiltonkreis

Auf Hamiltonkreis prüfen

1. Es gibt einen Knoten mit Grad 1: Der Graph hat KEINEN Hamiltonkreis. Es gibt einen Knoten u vom Grad 1. Der einzige Nachbar von u muss somit zweimal besucht werden. Ein Kreis besucht aber einen Knoten höchsten einmal.
2. $\forall v \in V \,.\, \deg(v) \geqslant |V|/2$: WENN der Graph ZUSAMMENHÄNGEND ist, dann hat der Graph einen Hamiltonkreis.

Sonst könnte man keine Aussage ziehen. Man müsste ein Beispiel geben (Bsp. $K_{m,n}$).

Aufgabe

VL-Skript Abschnitt 127

Aufgabe 8.1

In der Vorlesung haben Sie einen ersten Induktionsbeweis für die Behauptung gesehen, dass der perfekte Binärbaum B_h der Höhe h genau 2^h viele Blätter hat.

Der perfekte Ternärbaum der Höhe h ist durch $T_h := ([3]^{\leq h}, \{\{u, ux\} \mid u \in [3]^{<h}, x \in [3]\})$ definiert, wobei $[3]^{\leq h} = \{w \in \{1,2,3\}^* \colon |w| \leq h\}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $[3] = \{1,2,3\}$ ist, welche maximal Länge h haben.

Passen Sie den Induktionsbeweis entsprechend an, um zu zeigen, dass der T_h genau 3^h viele Blätter hat.

Basis :

Schritt : Sei $h \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert

Annahme :

Behauptung :

Beweis :

Aufgabe 8.2

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher zusammenhängender Graph, in dem es zwei nicht benachbarte Knoten u, w mit $\mathsf{deg}(u) + \mathsf{deg}(w) \geq |V|$ gibt.

Zeigen Sie: Hat $G' = (V, E \cup \{\{u, w\}\})$ einen Hamiltonkreis, dann auch G.

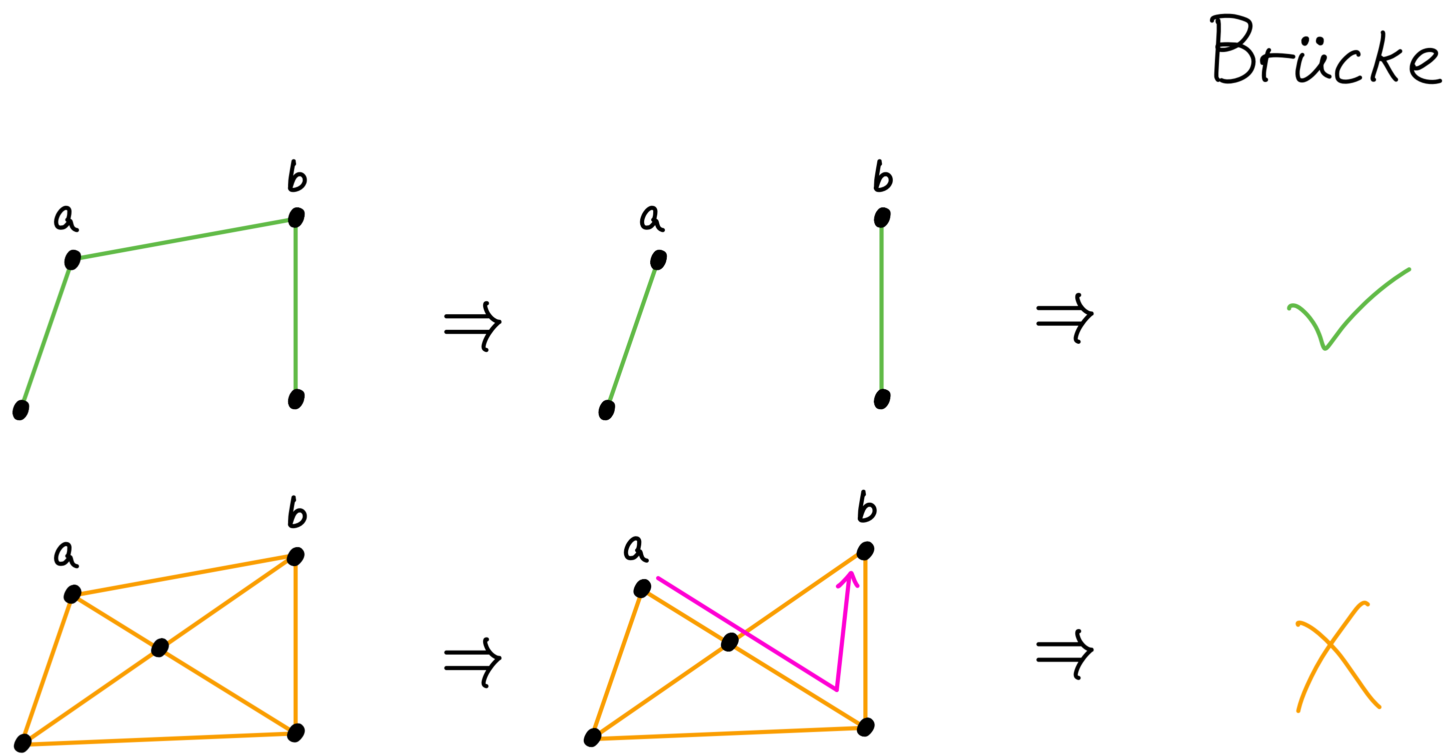
Hinweis: Passen Sie den Beweis für das hinreichende Kriterium für die Existenz eines Hamiltonkreises aus der Vorlesung geeignet an.

Fall 1 $\{u, w\}$ nicht in Hamiltonkreis von G' enthalten

Fall 2 $\{u, w\}$ in Hamiltonkreis von G' enthalten

Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.



Frage : Haben Kreise Brücken ?

Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.

(a) Zeigen Sie: Hat jeder Knoten von G einen geraden Grad, so kann G keine Brücke besitzen.

Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.

(b) Zeigen Sie: Jeder einfache, zusammenhängende Graph G, in dem jede Kante eine Brücke ist, ist ein Baum.

VL-Skript Abschnitt 131

$|E| \geq |V| \geq 3 \Rightarrow$ Kreis vorhanden

Fall 1

Fall 2

Fragen?