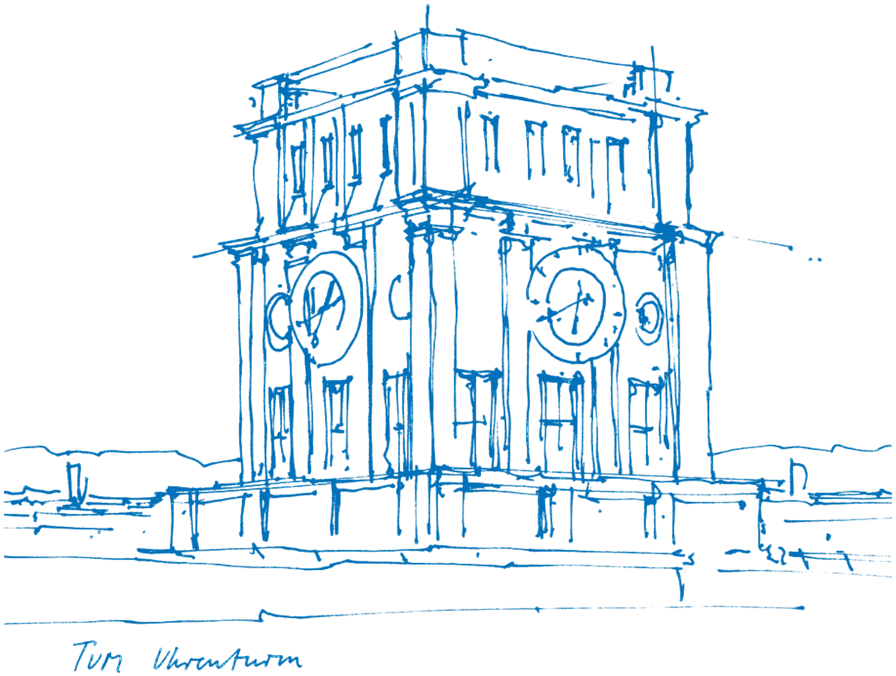
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 11. Dezember 2023



Graphentheorie — Kreis

Auf Kreise prüfen

Jeder zusammenhängenden Graph mit $n > 2$ Knoten und n oder mehr Kanten besitzt einen Kreis.

Graphentheorie — Hamiltonkreis

In einem Hamiltonkreis wird jeder Knoten genau einmal besucht.

- Jeder Knoten in einem einfacher Graph $G = (V, E)$, der mindestens Knotengrad $|V|/2$ hat, besitzt ein Hamiltonkreis.

Graphentheorie — Hamiltonkreis

Auf Hamiltonkreis prüfen

1. Es gibt einen Knoten mit Grad 1: Der Graph hat KEINEN Hamiltonkreis. Es gibt einen Knoten u vom Grad 1. Der einzige Nachbar von u muss somit zweimal besucht werden. Ein Kreis besucht aber einen Knoten höchsten einmal.
2. $\forall v \in V \,.\, \deg(v) \geqslant |V|/2$: WENN der Graph ZUSAMMENHÄNGEND ist, dann hat der Graph einen Hamiltonkreis.

Sonst könnte man keine Aussage ziehen. Man müsste ein Beispiel geben (Bsp. $K_{m,n}$).

Aufgabe

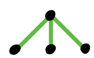
VL-Skript Abschnitt 1.2.7

Aufgabe 8.1

In der Vorlesung haben Sie einen ersten Induktionsbeweis für die Behauptung gesehen, dass der perfekte Binärbaum B_h der Höhe h genau 2^h viele Blätter hat.

Der perfekte Ternärbaum der Höhe h ist durch $T_h := ([3]^{\leq h}, \{\{u, ux\} \mid u \in [3]^{<h}, x \in [3]\})$ definiert, wobei $[3]^{\leq h} = \{w \in \{1,2,3\}^* \colon |w| \leq h\}$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $[3] = \{1,2,3\}$ ist, welche maximal Länge h haben.

Passen Sie den Induktionsbeweis entsprechend an, um zu zeigen, dass der T_h genau 3^h viele Blätter hat.

Basis: Für $h = 1$ gilt  $\Rightarrow 3 = 3^1$ Blätter

Schritt: Sei $h \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert

Annahme: T_h hat genau 3^h Blätter

Behauptung: T_{h+1} hat genau 3^{h+1} Blätter

Beweis: T_{h+1} hat 3 Blätter für jedes Blatt von T_h

Damit wird die Anzahl der Blätter von T_{h+1} von T_h verdreifacht

Dadurch hat T_{h+1} $3^h \cdot 3 = 3^{h+1}$ Blätter. $\square$

Formaler Beweis mit Sprachentheorie siehe Musterlösung

(Idee: $v = u\,a$)
$\quad\quad\quad\;\; \downarrow\ \downarrow$
$\quad\quad\quad\;\; 3^h \cdot 3$

Aufgabe 8.2

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher zusammenhängender Graph, in dem es zwei nicht benachbarte Knoten u, w mit $\deg(u) + \deg(w) \geq |V|$ gibt.

Zeigen Sie: Hat $G' = (V, E \cup \{\{u, w\}\})$ einen Hamiltonkreis, dann auch G.

Hinweis: Passen Sie den Beweis für das hinreichende Kriterium für die Existenz eines Hamiltonkreises aus der Vorlesung geeignet an.

Fall 1 $\{u, w\}$ nicht in Hamiltonkreis von G' enthalten

$\rightarrow$ Der Hamiltonkreis befindet sich auch in G, da $\{u,w\} \notin E_G$ ✓

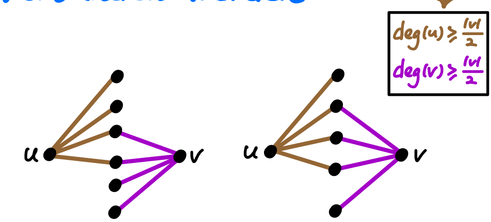
Fall 2 $\{u, w\}$ in Hamiltonkreis von G' enthalten $\Rightarrow \forall v \in V.\ \deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$

$\rightarrow$ Ziel: $\{u, w\}$ durch einen Pfad zu ersetzen

Es gibt mindestens $\underbrace{\min(\deg(u) + \deg(v))}_{\text{Min. Anzahl von ausgehenden Kanten von u und v}} - (|V| - \underbrace{2}_{1\,(u \nrightarrow v)\,+\,1\,(v \nrightarrow u)}) = |V| - |V| + 2 = 2$ Knoten, die mit beiden u und v verbunden werden

damit es zwischen u und v keinen Pfad gibt.

Der Hamiltonkreis befindet sich auch in G, da $\{u,w\}$ durch einen Pfad ersetzt wird. ✓

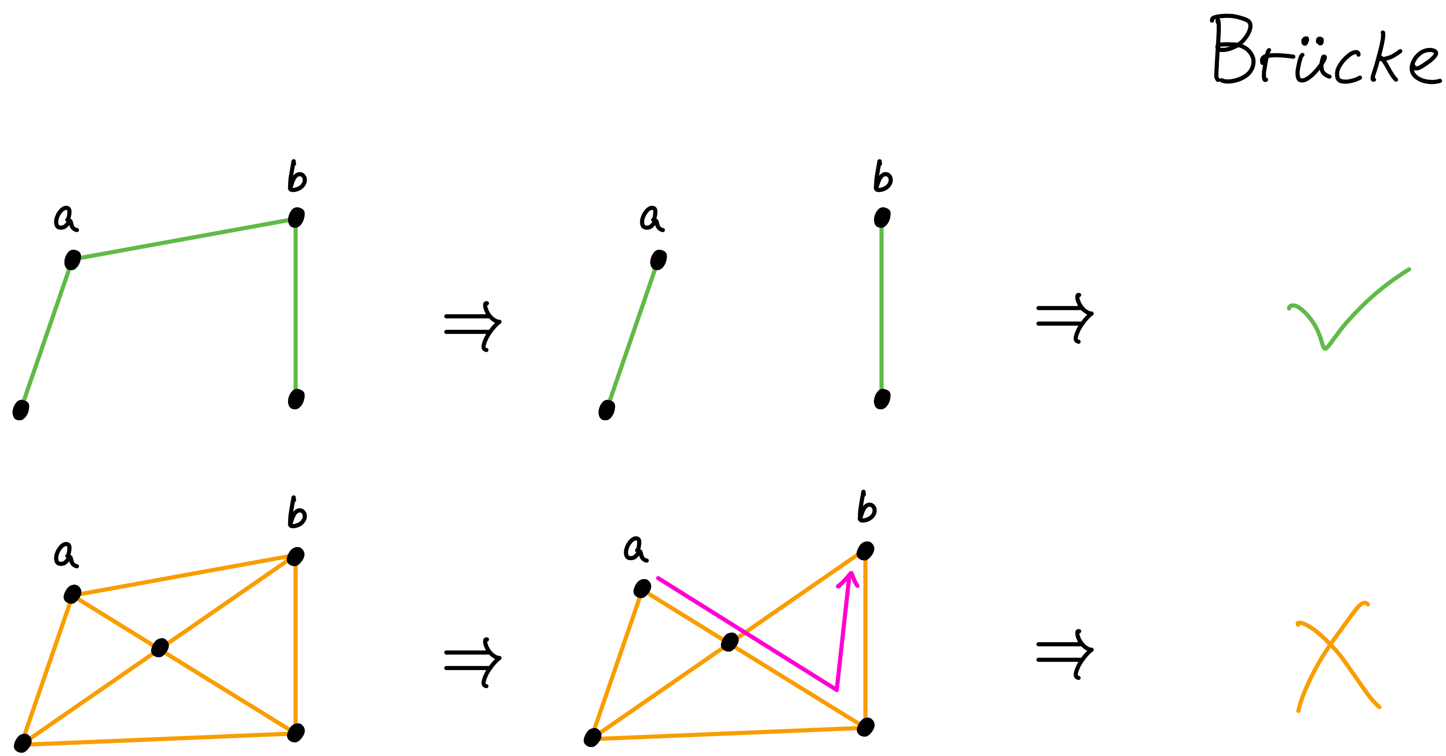


Beispiel $|V| = 8$
Es existiert 2 Pfade

Beispiel $|V| = 7$
Es existiert 3 Pfade

Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.



Frage: Haben Kreise Brücken?

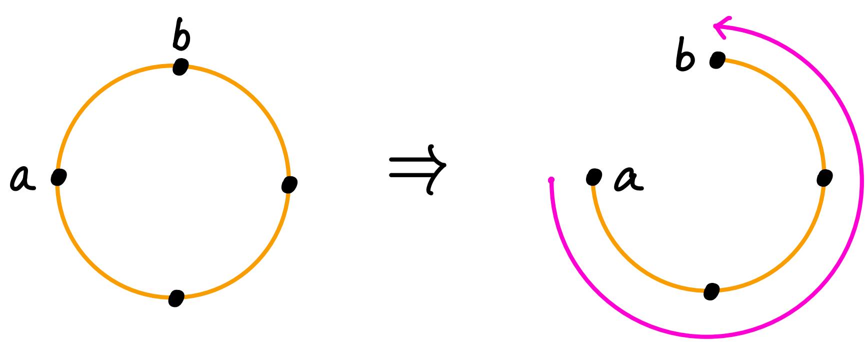
Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.

(a) Zeigen Sie: Hat jeder Knoten von G einen geraden Grad, so kann G keine Brücke besitzen.

Eulertour (auf den Teilgraphen)

$\Rightarrow$ Einfacher Kreis, wo jeder Knoten darauf ist



$\Rightarrow$ $\nexists$ Brücke

Aufgabe 8.3

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und sei $ab \in E$ eine Kante. Dann heißt ab eine **Brücke** von G, falls der Knoten b im Teilgraphen $G' = (V, E \setminus \{ab\})$ nicht vom Knoten a aus erreichbar ist.

(b) Zeigen Sie: Jeder einfache, zusammenhängende Graph G, in dem jede Kante eine Brücke ist, ist ein Baum.

$|E| \geq |V| - 1$

Zu zeigen: $|E| = |V| - 1$

VL-Skript Abschnitt 131

$|E| \geq |V| \geq 3 \Rightarrow$ Kreis vorhanden

Fall 1 $|V| \geq 3$

Falls $|E| \geq |V|$

$\Rightarrow$ Kreis

$\Rightarrow$ Keine Brücke ↯

$\Rightarrow |E| < |V|$

Da $|E| \geq |V| - 1$ (Zusammenhang)

$\Rightarrow |E| = |V| - 1$ ✓

Fall 2 $|V| < 3$

$|V| = 2$  ✓

$|V| = 1$ ✓

$|V| = 0$ ✓

✓

□

Fragen?