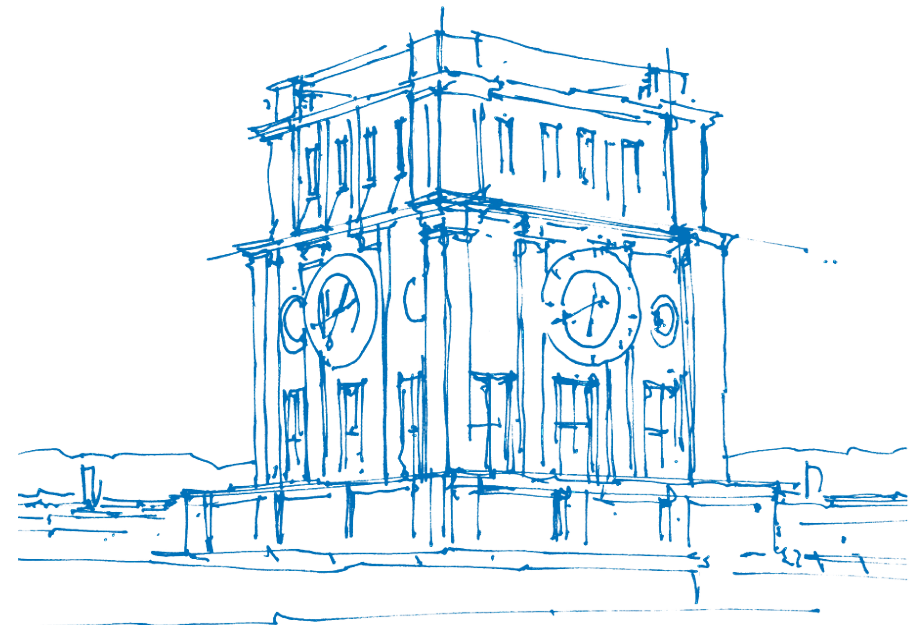


Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou

Technische Universität München

Garching b. München, 27. November 2023



TUM Uhrenturm

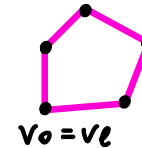
Prüfungsanmeldung freigeschaltet!!!

Graphentheorie

Graphentheorie — Kreis und Isomorphie

Kreis

- Ein Pfad mit endlich vielen Knoten v_0, v_1, \dots, v_l , wo $v_0 = v_l$
- Einfacher Kreis: 1) Alle Knoten sind paarweise verschieden, 2) enthält keinen kleineren Kreisen



Isomorphie

- Zwei Graphen G, H sind isomorph, falls es eine Bijektion $\beta : V_G \rightarrow V_H$ gibt
- Copy und Paste

Graphentheorie — Gradfolge

Der Graph G besitzt eine Gradfolge $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ für $V = \{v_0, \dots, v_n\}$

k -regulär

– $\forall v \in V. \deg(v) = k$

vollständig

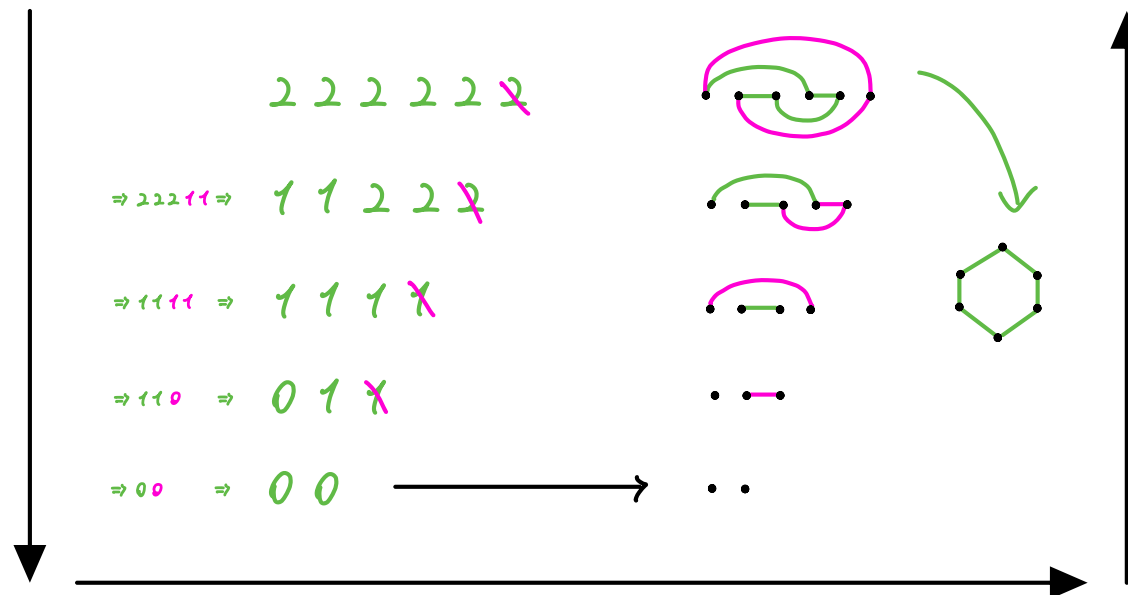
Graphentheorie — Gradfolge

Realisierbarkeit: Havel Hakimi

1) Aufsteigend Sortieren

2) Für jeden Schritt: Die höchsten Gradfolge eliminieren, zu entsprechenden Anzahl der Gradfolgen verteilen

3) Rekursiv bis alle Gradfolgen 0 sind



Graphentheorie — Gradfolge

Handschlaglemma

$$2|E| = \sum_{i \in [n]} \deg(v_i)$$

aka. Die Summe der Gradfolgen muss durch 2 teilbar sein, damit die Gradfolge realisierbar ist.

Gegeben 2 2 2 2 2 2

$$|E| = \frac{2+2+2+2+2+2}{2} = 6$$

Graphentheorie — Zusammenhang

Auf Zusammenhang prüfen \rightarrow Voraussetzung

1. $|E| \geq |V| - 1$: Der Graph kann zusammenhängend sein.
2. $dh \geq |V| - 1$: Der Graph ist zusammenhängend, da der Knoten mit dem höchsten Grad mit allen anderen Knoten verbunden sein muss. \rightarrow ODER
3. $dh \geq |V| - 2$ und es gibt keinen Knoten mit Grad 0: Der Graph ist zusammenhängend. Der Knoten mit dem höchsten Grad ist mit allen außer einem Knoten verbunden. Da es keinen Knoten mit Grad 0 gibt, muss der Knoten, der kein Nachbar von v ist, eine Kante zu einem Nachbarn von v haben.

Sonst könnte man keine Aussage ziehen. Man müsste ein Beispiel geben.

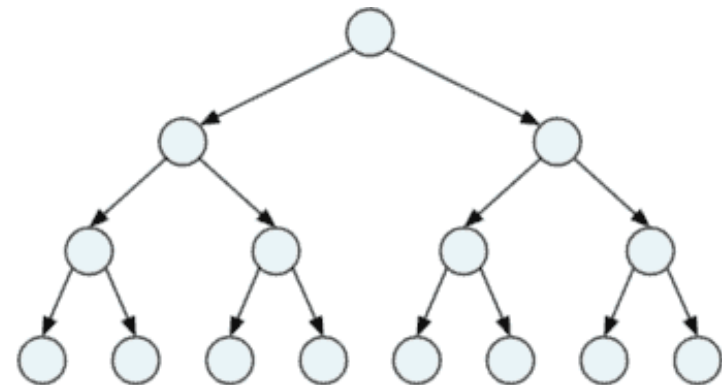
dh : Knoten mit dem höchsten Grad

Graphentheorie — Baum

Baum ist ein einfacher Graph, der **zusammenhängend** und **kreisfrei** ist.

- Ist $G = (V, E)$ ein Baum, dann gilt $|E| = |V| - 1$.
- Jeder Baum $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ hat mindestens 2 Blätter
- Jeder Baum ist kreisfrei

Perfekter Binärbaum B_h besitzt 2^h Blättern und $2^{h+1} - 1$ Knoten.



<https://www.happycoders.eu/de/algorithmen/binaerbaum-java/>

Graphentheorie — Baum

Auf Baum prüfen:

$|E| = |V| - 1$: Der Graph ist kreisfrei. **WENN** der Graph **ZUSAMMENHÄNGEND** ist, dann ist er ein Baum

Sonst kann der Graph kein Baum sein.

UND

Aufgabe

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

Gliedern Sie den jeweiligen Beweis korrekt in Induktionsbasis, -schritt, -annahme und -behauptung.

(a) Wir definieren die Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_0 = 3, a_1 = 3, \text{ und allgemein für } i \in \mathbb{N}_0 \quad a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 35 \cdot a_i$$

Zeigen Sie mittels Induktion nach $i \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_i = \frac{3 \cdot 7^i + 3 \cdot (-5)^i}{2}$$

Induktionsbasis ⚠ Bei mehreren Base Cases : Für ALLE definieren

$$\Rightarrow i = 0 \quad a_0 =$$

$$\Rightarrow i = 1 \quad a_1 =$$

Induktionsschritt

Angabe $a_0 = 3, a_1 = 3$, und allgemein für $i \in \mathbb{N}_0$ $a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 35 \cdot a_i$

Induktionsannahme

Induktionsbehauptung

Induktionsbeweis

Probier die b) Aufgabe
selber nach dem Tutorium!

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$\underline{D_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2)}$$

$$\underline{D_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3)}$$

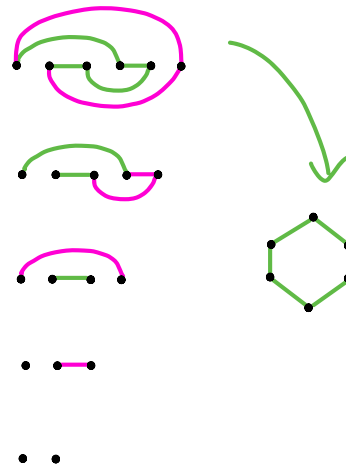
$$D_3 = (1, 1, 2, 2, 2)$$

$$D_4 = (2, 3, 3, 4, 4)$$

- (a) Wenden Sie den Algorithmus von Havel-Hakimi auf jede der gegebenen Gradsequenzen an. Geben Sie hierbei auch alle rekursiv berechneten Gradsequenzen samt den jeweils konstruierten Graphen an.

D_1

$2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$
 $\Rightarrow 2\ 2\ 2\ 1\ 1 \Rightarrow 1\ 1\ 2\ 2\ 2$
 $\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 1 \Rightarrow 1\ 1\ 1\ 1$
 $\Rightarrow 1\ 1\ 0 \Rightarrow 0\ 1\ 1$
 $\Rightarrow 0\ 0 \Rightarrow 0\ 0$



D_2

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2) \quad D_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3) \quad \underline{D_3 = (1, 1, 2, 2, 2)} \quad \underline{D_4 = (2, 3, 3, 4, 4)}$$

- (a) Wenden Sie den Algorithmus von Havel-Hakimi auf jede der gegebenen Gradsequenzen an. Geben Sie hierbei auch alle rekursiv berechneten Gradsequenzen samt den jeweils konstruierten Graphen an.

 D_3 D_4

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2) \quad D_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3) \quad D_3 = (1, 1, 2, 2, 2) \quad D_4 = (2, 3, 3, 4, 4)$$

- (b) Geben Sie, falls möglich, zu jeder der Gradsequenzen einen Baum an. Falls dies nicht möglich ist, begründen Sie dies.

Erinnerung : ① $|E| = |V| - 1$ und zusammenhängend \Rightarrow Baum

② Handschlaglemma : $2|E| = \sum_{i \in V} \deg(v_i)$

③ Aut Zusammenhang prüfen : $|E| \geq |V| - 1$ und

$dh \geq |V| - 1$ oder $dh \geq |V| - 2$ und $\nexists i. \deg(v_i) = 0$

dh : Knoten mit dem höchsten Grad

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2) \quad D_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3) \quad D_3 = (1, 1, 2, 2, 2) \quad D_4 = (2, 3, 3, 4, 4)$$

(c) Begründen Sie explizit, dass es bis auf Isomorphie nur einen einfachen Graphen mit Gradsequenz D_4 gibt.



Nur eine Verbindungsmöglichkeit

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 2) \quad D_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 3, 3) \quad D_3 = (1, 1, 2, 2, 2) \quad D_4 = (2, 3, 3, 4, 4)$$

- (d) Realisieren Sie eine der Gradsequenzen durch **einen Graphen**, der nicht durch den Algorithmus von Havel-Hakimi erzeugt werden kann, d.h. zu dem der Algorithmus von Havel-Hakimi keinen isomorphen Graphen konstruieren kann.

Begründen Sie explizit, warum der angegebene Graph nicht von dem Algorithmus konstruiert werden kann.



Aufgabe 6.3

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher *nicht zusammenhängender* Graph mit $n = |V|$ Knoten. Bestimmen Sie die maximale Zahl an Kanten $m = |E|$ in Abhängigkeit von n , die G haben kann.

Es gibt daher mindestens 2 Teilgraphen, die nicht voneinander zusammenhängend sind

Fragen?