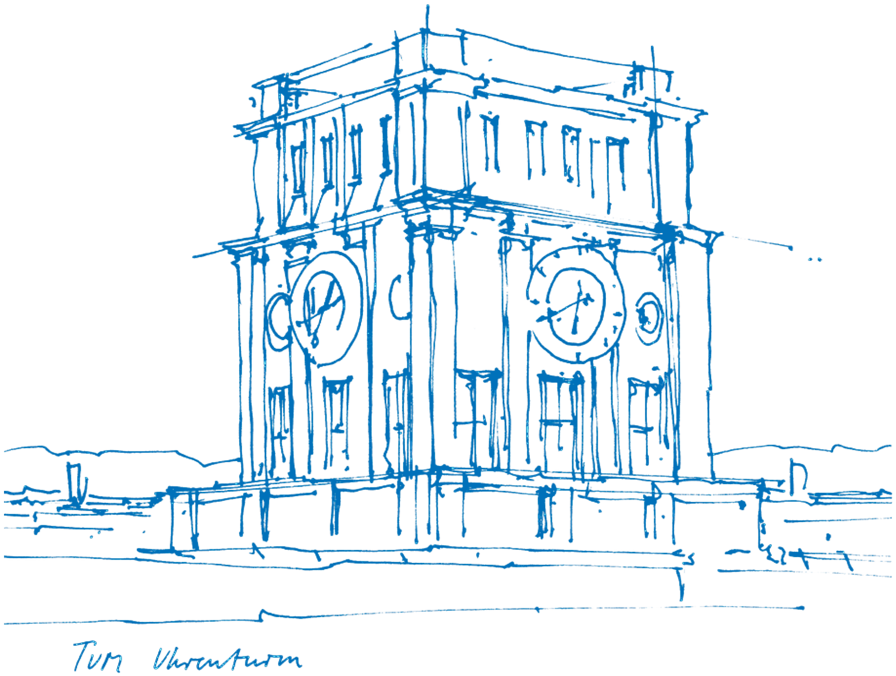
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 18. Dezember 2023



Graphentheorie — Planarität

Unter Planarität versteht man, dass man einen Graph in der 2D Zeichenebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen könnte.

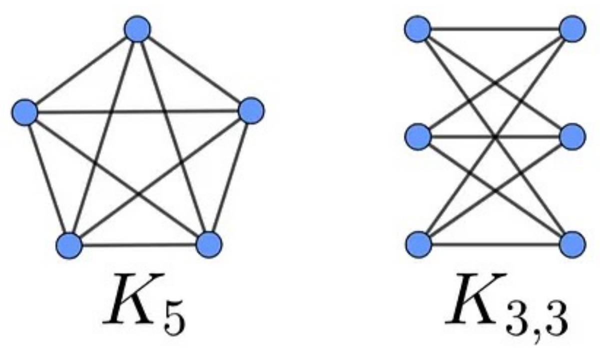
Eulersche Polyederformel (EPF): Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängenden planarer Graph. Sei f die Anzahl der Flächen, in die G bei überschneidungsfreier Darstellung die Zeichenebene zerschneidet.

- $f - |E| + |V| = 2$

Graphentheorie — Planarität

Satz von Kuratowski

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn weder $K_{3,3}$ noch K_5 ein Minor von G ist.



https://medium.com/math-simplified/graph-theory-101-why-all-non-planar-graphs-contain-k%E2%82%81-or-k%E2%82%83-%E2%82%83-c3ad48d6798e

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

3 Formeln

- $|E| \leqslant 3|V| - 6$
- $f - |E| + |V| = 2$ $\longrightarrow$ EPF
- $f \leqslant \dfrac{2|E|}{4}$

Falls $|V| \geqslant 4$

$|E| \leqslant 2|V| - 4$ (wird heute bewiesen)

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

1. $|E| \leqslant 3|V| - 6$: Der Graph kann planar sein, sonst kann der Graph NICHT planar sein.
2. Es gibt weniger als 5 Knoten mit Grad 5 und weniger als 6 Knoten mit Grad 3: Der Graph ist planar, da der $K_{3,3}$ und K_5 nicht als Minor enthalten werden.
3. Es gibt weniger als 5 Knoten mit Grad 4 aber mindestens 6 Knoten mit Grad 3: Manuelle Überprüfung von $K_{3,3}$ erforderlich, da K_5 kein Minor sein kann aber $K_{3,3}$ weiß man nicht.
4. Es gibt mindestens 5 Knoten mir Grad 4 aber weniger als 6 Knoten mit Grad 3: Manuelle Überprüfung von K_5 erforderlich, da $K_{3,3}$ kein Minor sein kann aber K_5 weiß man nicht.

Sonst muss man manuell überprüfen, ob $K_{3,3}$ und K_5 als Minor enthalten werden.

Graphentheorie — Planarität

Auf Planarität prüfen:

Informationen bzgl. Flächen? Dann könnte man auch prüfen: $f - |E| + |V| = 2$

Graphentheorie — Planarität

Flächen

Generell gilt : $2|E| = \ell f$

Graphentheorie — Vier-Farben-Satz

Für jeden einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leqslant 4$.

Auf Vielfarbigkeit prüfen:
Der Graph ist 4 farbbar, wenn er planar ist.

Meistens gibt es nur eine Möglichkeit bei dieser Fragestellung. Man könnte den Graphen zeichnen und damit zeigen, dass sie x-farbbar ist.

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(a) Zeigen, dass $k \in \{3, 4, 5\}$ gelten muss.

k-regulär $\longrightarrow$

planar $\longrightarrow$

Handschlag $\longrightarrow$

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(b) Wir nehmen weiter an, dass jede Fläche $f \in F$ einschließlich der umschließenden Fläche, in welche eine jede planare Einbettung von G die euklidische Ebene unterteilt, durch genau l Kanten berandet ist. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$l = \frac{2k\,|V|}{(k-2)\,|V| + 4}$$

k-regulär $\longrightarrow$

planar $\longrightarrow$

Handschlag $\longrightarrow$

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, nicht leerer, einfacher, zusammenhängender, planarer, k-regulärer Graph mit $k \geq 3$.

(c) Bestimmen Sie mittels (b) alle möglichen Werte von $|V|, |E|, |F|, l$ in Abhängigkeit von k.

$k = 3$ $k = 4$ $k = 5$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden einfachen, bipartiten, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.

Zusammen-hängend

planar $\longrightarrow$

bipartit $\longrightarrow$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden einfachen, bipartiten, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$.

Nicht Zusammen-hängend

Bewiesen: Für jeden einfachen, bipartiten, planaren, zusammenhängenden Graph G mit $|V| \geq 3$ gilt $|E| \leq 2|V| - 4$

Idee:

Zeigen Sie die folgenden Aussagen: ohne Kuratowski

(b) Der $K_{m,n}$ für $m, n \geq 3$ ist nicht planar.

$K_{m,n} \longrightarrow |E| =$

$|V| =$

Aufgabe 9.3

Zeigen Sie: Es gibt keinen einfachen, planaren, zusammenhängenden Graphen, in welchem jeder Knoten genau vier Nachbarn hat und jedes innere Gebiet durch genau fünf Kanten begrenzt ist.

Schönen Weihnachten :)