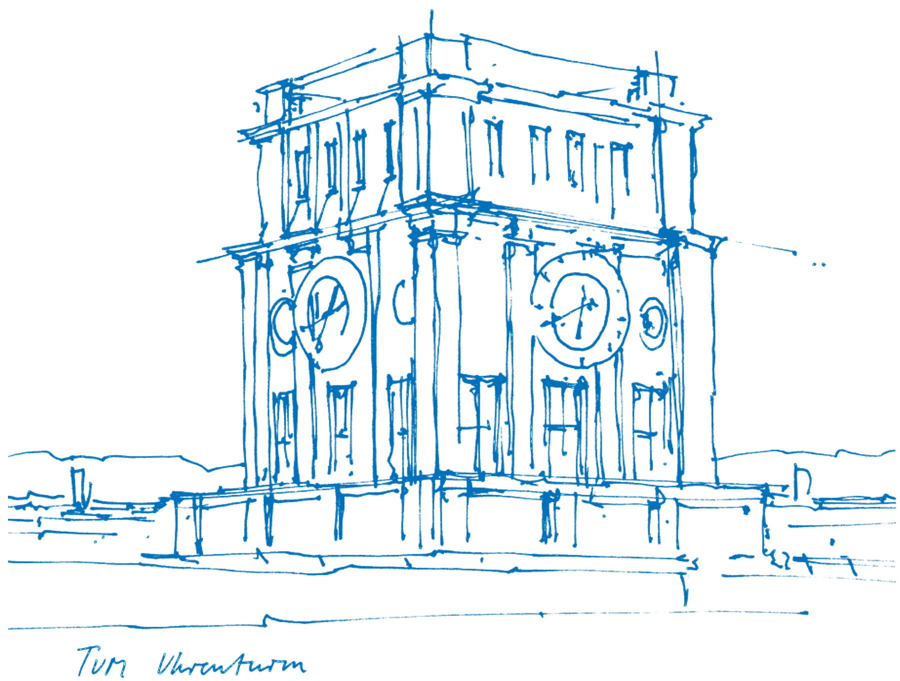
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 29. Januar 2023



Kombinatorik — Stirling Zahl

Stirling Zahl 1. Art

- $s_{n,k}$ gibt die Anzahl der Permutationen in Zyklenschreibweise von n Elementen mit genau k Zyklen an.
- $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k}$
- $s_{0,0} = 1$, $s_{n,0} = 0$, $s_{n,n} = 1$

\# Permutionen über [N], welche in je λ_i viele Zykel der Länge i zerfallen

$$\frac{N!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_N! \cdot 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots N^{\lambda_N}}$$

Stirling Zahl 2. Art

- $S_{n,k}$ gibt die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k nichtleere Klassen an.
- $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1m,k}$
- $S_{0,0} = 1$, $S_{n,0} = 0$, $S_{n,n} = 1$

\# Äquiv.relationen über [N], welche genau λ_i viele i-elementige Äquiv.klassen besitzt

$$\frac{N!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_N! \cdot (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \ldots (N!)^{\lambda_N}}$$

Kombinatorik — Verteilung: Die Goldene Tabelle

k Bälle → n Urnen	Pro Urne Beliebig viele Bälle (Beliebig)	Pro Urne Höchstens 1 Ball (Injektiv)	Pro Urne Mindestens 1 Ball (Surjektiv)	Pro Urne Genau 1 Ball (Bijektiv)
Bälle unterscheidbar Urnen unterscheidbar	n^k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n! \cdot S_{k,n}$	$k!$
Bälle gleich Urnen unterscheidbar	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$	1
Bälle unterscheidbar Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$	1	$S_{k,n}$	1
Bälle gleich Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$	1	$P_{k,n}$	1

Aufgaben

Aufgabe 13.1

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(a) Wie viele solche Einteilungen gibt es, wenn man allein daran interessiert ist, wie viele Gruppen es einer bestimmten Größe gibt?

Aufzählung

Aufgabe 13.1

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(b) Wie viele solche Einteilungen gibt es, wenn man die Gruppen anhand ihrer Mitglieder unterscheidet und noch zusätzlich jeder Gruppe einen eindeutigen Gruppenname zuordnet?

Äquiv.relationen über $[N]$, welche genau λ_i viele i-elementige Äquiv.klassen besitzt

$$\frac{N!}{\lambda_1! \lambda_2! \ldots \lambda_N! \cdot (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \ldots (N!)^{\lambda_N}}$$

Aufgabe 13.1

Eine Grundschulklasse bestehend aus $n = 19$ Kindern macht einen Tagesausflug. Hierzu sollen die Kinder selbst Gruppen der Größe mindestens 3, aber maximal 5 bilden.

(c) Zum Mittagessen wird jede Gruppe von Kindern an einen eigenen runden Tisch gesetzt.

Wie viele mögliche Sitzordnungen für die Kinder gibt es, wenn es nur entscheidend ist, wer die jeweiligen linken und rechten Sitznachbarn sind?

Permutionen über $[N]$, welche in je λ_i viele Zykel der Länge i zerfallen

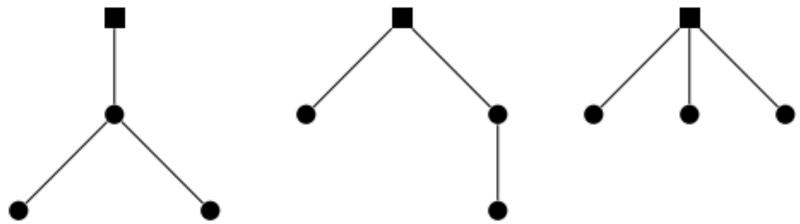
$$\frac{N!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_N! \cdot 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots N^{\lambda_N}}$$

13.2

(a) Wie viele Wurzelbäume der Höhe ≤ 3 gibt es mit genau $n+1$ Knoten ($n \in \mathbb{N}$), wenn isomorphe Wurzelbäume identifiziert, d.h. nur einmal gezählt werden?

Bemerkung: Nach Vorlesung ist die Höhe eines Wurzelbaums die Länge eines längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt **plus** 1.

Beispiel: Bis auf Isomorphie gibt es folgende Wurzelbäume der Höhe ≤ 3 mit 4 Knoten (Wurzel als Quadrat):



13.2

(b) $S_1, S_2, \dots, S_n$ bezeichnen $n \in \mathbb{N}$ unterschiedlich große Scheiben: die Scheibe S_j darf auf die Scheibe S_i genau dann gelegt werden, wenn $j < i$ gilt. Es darf immer höchstens eine Scheibe direkt auf einer anderen Scheibe liegen (siehe unten).

Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, die n Scheiben zu $k \in \mathbb{N}$ Türmen zu stapeln? Die Reihenfolge der Türme ist egal.

Beispiel: Für $n = 4$ und $k = 2$ gibt es **unter anderem** folgende Möglichkeiten:

Aufgabe 13.3

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Meerschweinchen 23 Meerschweinchenzüchtern zuzuordnen, wenn

(a) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?

(b) nur Meerschweinchen unterschieden werden, Meerschweinchenzüchter jedoch nicht?

(c) nur Meerschweinchenzüchter unterschieden werden, Meerschweinchen jedoch nicht?

k Bälle → n Urnen	Pro Urne Beliebig viele Bälle (Beliebig)	Pro Urne Höchstens 1 Ball (Injektiv)	Pro Urne Mindestens 1 Ball (Surjektiv)	Pro Urne Genau 1 Ball (Bijektiv)
Bälle unterscheidbar, Urnen unterscheidbar	n^k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n! \cdot S_{k,n}$	$k!$
Bälle gleich, Urnen unterscheidbar	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$	1
Bälle unterscheidbar, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$	1	$S_{k,n}$	1
Bälle gleich, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$	1	$P_{k,n}$	1

Aufgabe 13.3

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Meerschweinchen 23 Meerschweinchenzüchtern zuzuordnen, wenn

(d) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden?

(e) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils unterschieden werden, und jedem Meerschweinchenzüchter mindestens ein Meerschweinchen zugeordnet werden soll?

(f) sowohl Meerschweinchen als auch Meerschweinchenzüchter jeweils nicht unterschieden werden?

k Bälle → n Urnen	Pro Urne Beliebig viele Bälle (Beliebig)	Pro Urne Höchstens 1 Ball (Injektiv)	Pro Urne Mindestens 1 Ball (Surjektiv)	Pro Urne Genau 1 Ball (Bijektiv)
Bälle unterscheidbar, Urnen unterscheidbar	n^k	$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$n! \cdot S_{k,n}$	$k!$
Bälle gleich, Urnen unterscheidbar	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{n-1}$	1
Bälle unterscheidbar, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} S_{k,i}$	1	$S_{k,n}$	1
Bälle gleich, Urnen gleich	$\sum_{i=0}^{n} P_{k,i}$	1	$P_{k,n}$	1

Fragen?