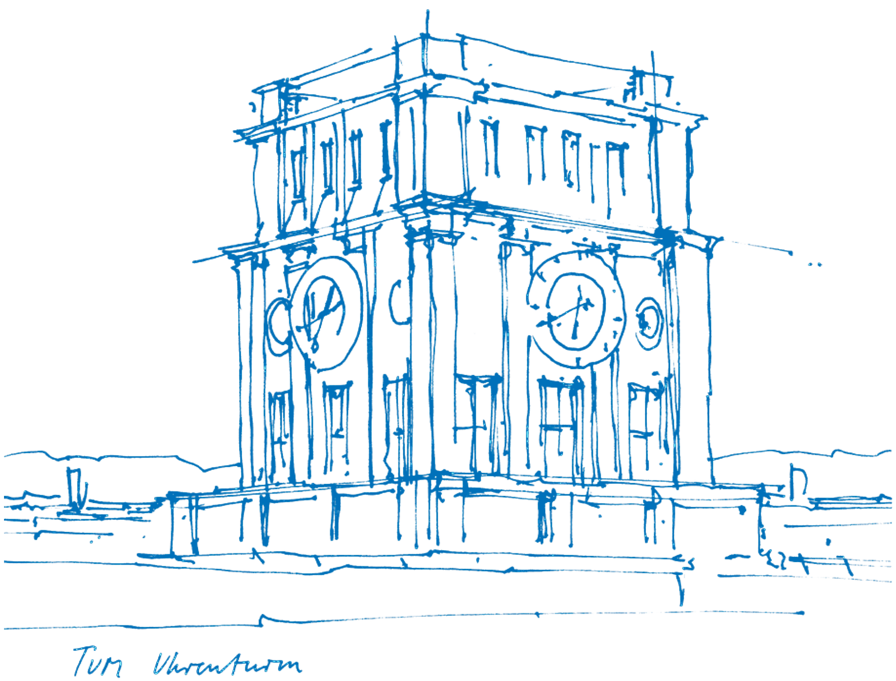
Diskrete Strukturen Tutorium 1

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 23. Oktober 2023



Willkommen an meinem Tutorium!

Ich bin Jay, komme aus Shanghai und bin später in Wien aufgewachsen. Es macht mir Riesen Freude, mit euch mit Diskrete Strukturen auseinandersetzen zu dürfen. Ich hoffe, dass mein Tutorium euch beim Lernen und Verständnis helfen könnte.

Wenn ihr Feedbacks oder Kritiken über meinem Tutorium habt, nehme ich diesen gern entgegen. Ich bitte euch, total offen und ehrlich zu mir zu sein. Es macht mir Spaß, an den anderen Kenntnisse beizubringen. Deswegen freue mich auf jegliche Kritik!

Zu allen erst …

https://discord.gg/v44bAsfmdK

Hausaufgaben

Hausaufgaben können abgegeben werden, um Notenbonus um eine Stufe zu kriegen.
Abgabe nicht verpflichtend, aber sehr empfohlen!

Abgabe der Hausaufgaben mittels TUMexam.
Es soll immer nur ein Gruppenmitglied die Aufgaben hochladen.
Die Abgabe dieser Woche dient nur zum Testzweck. Es wird nicht bewertet!

Ampelsystem:
“grün”: korrekte Lösung (ggf. mit kleineren Rechenfehlern)
“gelb”: zielführender Lösungsansatz, aber Lücken/Fehler im vertretbaren Maße
“rot”: nicht zielführender Ansatz, Aufgabenstellung nicht verstanden, größere Lücken/Fehler
Für Notenbonus: ”grün“ und ”gelb“ 1 Punkt; ”rot“ 0 Punkte.

Für den Notenbonus müssen
- insgesamt ≥ 2/3 aller Punkte und
- jeweils ≥ 40% aller Punkte, die vor bzw. nach Weihnachten erreichbar sind, erlangt werden.

Mathematik an den Informatikstudiengang

- Diskrete Strukturen
- Lineare Algebra
- Analysis
- Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie
- Numerisches Programmieren

Mengen

Mengen — Grundnotationen

$\cup \quad \cap \quad \setminus \quad \overline{A}$

$\in \quad \notin \quad \{\} \quad \{\ \} \quad \varnothing$

$\mathbb{N}\ (\mathbb{N}_0\ \mathbb{N}^+) \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C} \quad [5]$

$\subseteq \quad \subsetneq \quad \not\subseteq$

$=$ (Beim Beweis?) $A = B \overset{\text{iff}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \supseteq B$

Δ DISJUNKT

$A \times B \quad A^k \quad 2^M \ (\mathcal{P}(M))$

Mengen — Grundnotationen (Erklärungen)

$\backslash$: Mengendifferenz, $A \backslash B$ heißt $\{x \;\; \forall x \,.\, x \in A$ und $x \notin B\}$

$[k]$: $\{x \;\; \forall x \in \mathbb{N}^+ \,.\, x \leqslant k\}$

$\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$ $\mathbb{N}^+$): Natürliche Zahlen, $\{(0),1,2,3,4,5,...\}$

$\mathbb{Z}$: Ganze Zahlen, $\{\ldots, -2, -1,0,1,2,...\}$

$\mathbb{Q}$: Rationale Zahlen, $\{p/q \;\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$: Reelle Zahlen

$\mathbb{C}$: Komplexe Zahlen

Mengen — Äquivalenzen

1, Trivial

$A = A \cup A \quad A = A \cap A \quad A = A \cup \emptyset \quad \emptyset = A \cap \emptyset$

$A \cap \overline{A} = \emptyset \quad A \cup \overline{A} = \Omega \quad \overline{\overline{A}} = A$

2, Kommutativität

$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$

3, Assoziativität

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4, Distributivität

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A = A \cup (A \cap B) \quad A = A \cap (A \cup B)$ Absorption

$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C) \quad A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

Mengen — Äquivalenzen

5, De Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

6, Definitionen von Differenz

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$

$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

$\overline{A \setminus B} \overset{\text{Def.}}{=} \overline{A \cap \overline{B}} \overset{\text{D.M.}}{=} \overline{A} \cup B$

Mengen — Darstellung

- Venn Diagram
- KV Diagram

Mengen — Begriffe

Menge

$\{\}$, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $\{1,2\} = \{2,1\}$

Tupel

$()$, mit Berücksichtigung der Reihenfolge $\{1,2\} \neq \{2,1\}$

Sequenz

$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, unendliche Auflistung, die die Objekte nach ansteigendem Index zusammenfasst

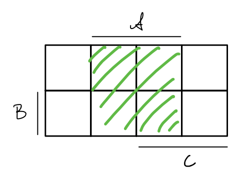
Aufgaben

Aufgabe 1.1

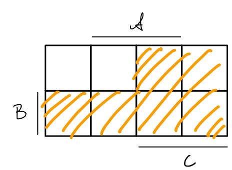
In jeder der folgenden Teilaufgaben sind jeweils zwei Mengenausdrücke gegeben. Stellen für beide Mengenausdrücke das entsprechende KV-Diagramme auf, halten Sie sich dabei an das vorgegebene Diagramm. Falls die beiden KV-Diagramme nicht identisch sind, geben Sie konkrete Mengen inkl. eines Universums an, für die sich die beiden Ausdrücke zu unterschiedlichen Mengen auswerten.

(a) $F_a := \overline{(A \cup A) \cap (C \cup B)}$ und $G_a := \overline{((B \cap A) \cup \overline{B}) \setminus ((B \cap A) \cap (C \cup A))}$

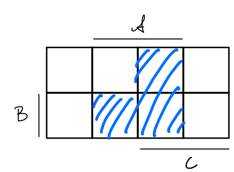
1 $A \cup A \quad (= A)$



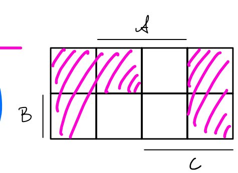
2 $C \cup B$



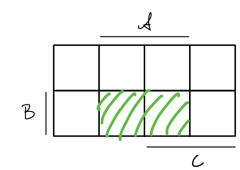
3 $(A \cup A) \cap (C \cup B)$



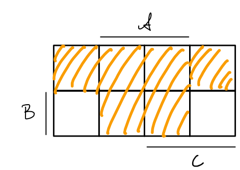
4 $\overline{(A \cup A) \cap (C \cup B)}$



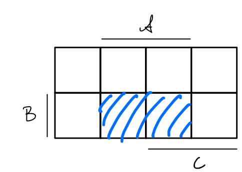
1 $B \cap A$



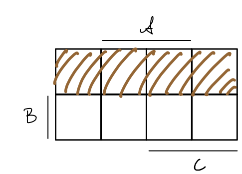
2 $(B \cap A) \cup \overline{B}$



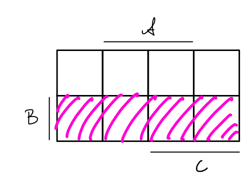
3 $(B \cap A) \cap (C \cup A)$



4 $((B \cap A) \cup \overline{B}) \setminus ((B \cap A) \cap (C \cup A))$



5 $\overline{((B \cap A) \cup \overline{B}) \setminus ((B \cap A) \cap (C \cup A))}$

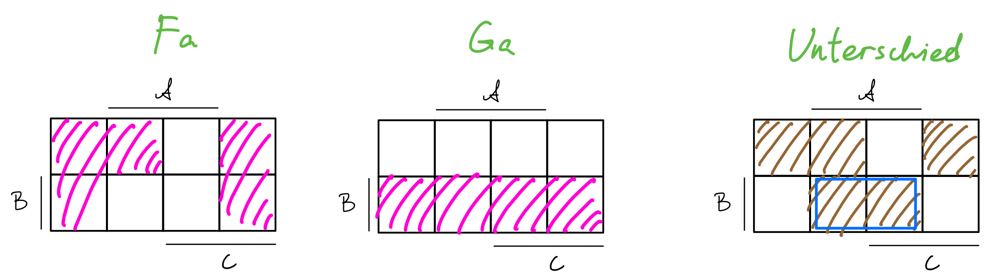


ϟ

Aufgabe 1.1

In jeder der folgenden Teilaufgaben sind jeweils zwei Mengenausdrücke gegeben. Stellen für beide Mengenausdrücke das entsprechende KV-Diagramme auf, halten Sie sich dabei an das vorgegebene Diagramm. Falls die beiden KV-Diagramme nicht identisch sind, geben Sie konkrete Mengen inkl. eines Universums an, für die sich die beiden Ausdrücke zu unterschiedlichen Mengen auswerten.

(a) $F_a := \overline{(A \cup A) \cap (C \cup B)}$ und $G_a := \overline{((B \cap A) \cup \overline{B}) \setminus ((B \cap A) \cap (C \cup A))}$



Wir wählen eine oder mehrere Mengen aus den Unterschied.

$\boxed{} \Rightarrow A \cap B$

Da $A \cap B$ in G_a und nicht in F_a enthalten ist:

$A \cap B \not\Leftrightarrow F_a$

$A \cap B \Leftrightarrow G_a$

$\Rightarrow$ Wenn $A \cap B = \{x\}$ ist, ist diese Bedingung erfüllt.

Daher muss $A = \{x\}$ und $B = \{x\}$ gelten.

C könnte dann beliebig sein. (Wir nehmen hier $\emptyset$ an.)

$\Omega = \{x\}$

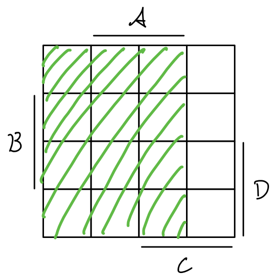
Es gibt noch viel mehr Lösungen. Versuch eine andere zu finden und diese zu überprüfen!

Überprüfung: $F_a = \overline{(\{x\} \cup \{x\}) \cap (\emptyset \cup \{x\})} = \emptyset$

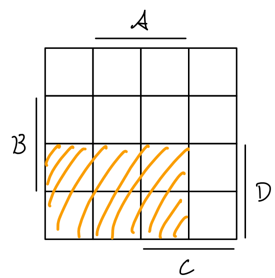
$G_a = \overline{(\{x\} \cap \{x\}) \cup \overline{\{x\}}) \setminus ((\{x\} \cap \{x\}) \cap (\emptyset \cup \{x\}))} = \{x\}$

(b) $F_b := (D \cap (\overline{C \setminus A})) \cup \overline{\overline{B \setminus C}}$ und $G_b := \overline{\overline{B \cap D} \setminus ((\overline{D \setminus A}) \cup (C \cup D))}$

① $\overline{C \setminus A}$

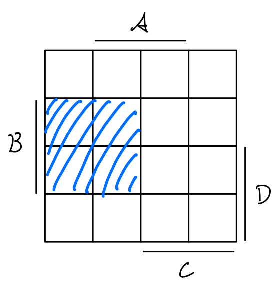


② $D \cap (\overline{C \setminus A})$

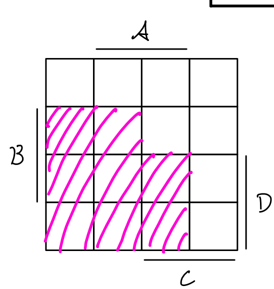


③ $\overline{\overline{B \setminus C}}$

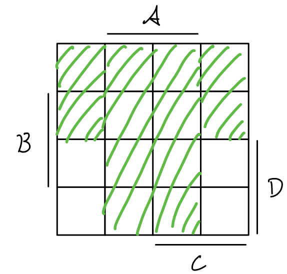
$(= B \setminus C)$



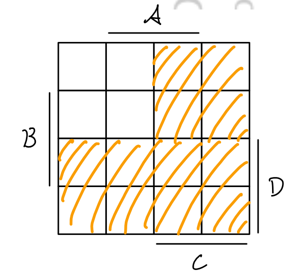
④ $(D \cap (\overline{C \setminus A})) \cup \overline{\overline{B \setminus C}}$



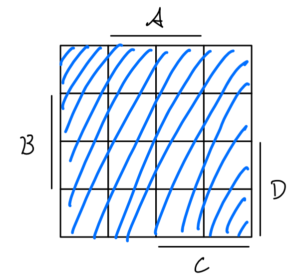
① $\overline{D \setminus A}$



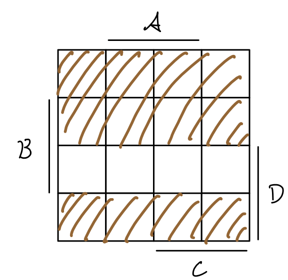
② $C \cup D$



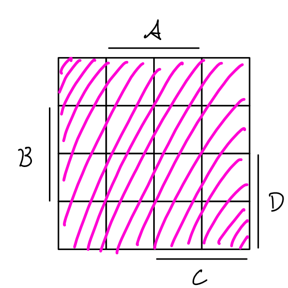
③ $(\overline{D \setminus A}) \cup C \cup D$



④ $\overline{B \cap D}$



⑤ $\overline{\overline{B \cap D} \setminus ((\overline{D \setminus A}) \cup C \cup D)}$



Aufgabe 1.2

Zeigen Sie, dass folgende Mengenausdrücke äquivalent sind, indem Sie diese mittels der Äquivalenzen aus der Vorlesung ineinander überführen.

(a) $\overline{(C \setminus A) \cap B} = \overline{(C \setminus A) \setminus \overline{B \cup B}}$

$\overline{(C \setminus A) \cap B}$

$= \overline{(C \setminus A) \cap \overline{\overline{B}}}$ | $A = \overline{\overline{A}}$ Doppelnegation

$= \overline{(C \setminus A) \setminus \overline{B}}$ | $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ Def. von Differenz

$= \overline{(C \setminus A) \setminus \overline{B \cup B}}$ | $A = A \cup A$ Trivial

(b) $\overline{\overline{(\overline{C}\cup B)\cap(\overline{C}\cup A)}\cup\overline{B}} = (\overline{C}\cup(B\cap A))\cap B$

$$\overline{\overline{(\overline{C}\cup B)\cap(\overline{C}\cup A)}\cup\overline{B}}$$

$$= (\overline{C}\cup B)\cap(\overline{C}\cup A)\cap B$$

$$= (\overline{C}\cup(B\cap A))\cap B$$

$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ De Morgan

$(A\cup B)\cap(A\cup C) = A\cup(B\cap C)$

Distributivität

(c) $\overline{\overline{\overline{B\cap(B\cup C)}\cup(\overline{A}\cup\overline{C})}} = \overline{(B\cap(B\cup C))\setminus\overline{A\cap C}}$

$$\overline{\overline{\overline{B\cap(B\cup C)}\cup(\overline{A}\cup\overline{C})}}$$

$$= \overline{B\cap(B\cup C)}\cup(\overline{A}\cup\overline{C}) \quad \neq$$

$$= \overline{B\cap(B\cup C)}\cup(\overline{A\cap C})$$

$$= \overline{(B\cap(B\cup C))\cap(A\cap C)}$$

$$= \overline{(B\cap(B\cup C))\setminus(\overline{A\cap C})}$$

$A=\overline{\overline{A}}$ Doppelnegation

$\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B}$ De Morgan

$\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B}$ De Morgan

$A\cap\overline{B} = A\setminus B$ Def. von Differenz

Aufgabe 1.4

Es seien $A, B, C, \ldots$ Teilmengen der Grundmenge Ω. Das Komplement bezüglich Ω sei für $X \subseteq \Omega$ durch $\overline{X} := \Omega \setminus X$ abgekürzt.

Verwenden Sie ausschließlich die Definitionen und Identitäten aus dem Kapitel „Mengen / Mengenterme“, um die Mengenterme (a) und (b) schrittweise zu Ausdrücken der Form $\bigcap_{i=1}^{k} \left(\bigcup_{j=1}^{l_i} M_{i,j} \right)$ umzuformen, wobei $M_{i,j} \in \{S, \overline{S} \mid S \in \{A, B, C, D\}\}$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq l_i$ gilt.

a) $((B \cap A) \cap C) \cup \overline{(\overline{D} \setminus A)}$

$= ((B \cap A) \cap C) \cup (D \cup A)$

$= (A \cap (B \cap C)) \cup (D \cup A)$

$= D \cup (A \cup (A \cap (B \cap C)))$

$= D \cup A$

$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ Def. von Differenz

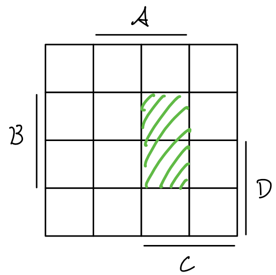
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ Assoziativität

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoziativität

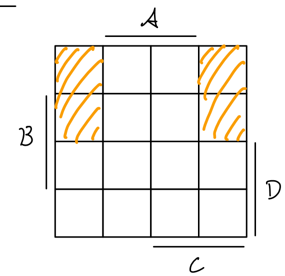
$A \cup (A \cap B) = A$ Absorption

$$((B \cap A) \cap C) \cup \overline{(\overline{D} \setminus A)}$$

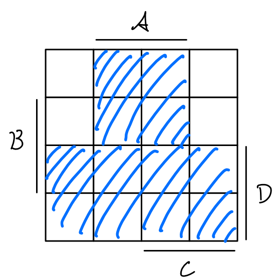
① $(B \cap A) \cap C$



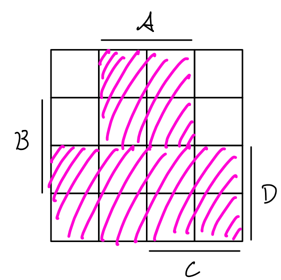
② $\overline{D} \setminus A$



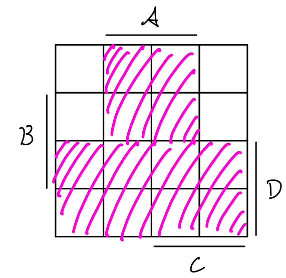
③ $\overline{\overline{D} \setminus A}$



④ $((B \cap A) \cap C) \cup \overline{(\overline{D} \setminus A)}$



$$D \cup A$$



a) $\overline{A} \cup \overline{((B \cup D) \setminus \overline{C})}$

$= \overline{A} \cup (\overline{B \cup D} \cup \overline{C})$

$= \overline{A} \cup ((\overline{B} \cap \overline{D}) \cup \overline{C})$

$= \overline{A} \cup ((\overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{D} \cup \overline{C}))$

$= (\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \overline{C})) \cap (\overline{A} \cup (\overline{D} \cup \overline{C}))$

Möglichst an den Form annähern!

$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ Def. von Differenz

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ De Morgan

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

Distributivität

Aufgabe 1.3

Im Folgenden fixieren wir die Grundmenge $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ($|\Omega| = 4$).

Bestimmen Sie die Mächtigkeit der folgenden Mengen. Eine kurze Begründung ist verlangt!

(a) $\{X \subseteq \Omega \mid |\Omega \setminus X| = 1\}$

(b) $\{Y \subseteq \Omega \mid Y \cap \{a, b\} = Y \setminus \{c\}\}$

a) $|\Omega \setminus X| = 1$

$\Rightarrow |X| = 3$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \{\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\}$

$|\mathcal{L}| = 4 \quad \left(= \binom{4}{3}\right)$

(b) $Y \cap \{a,b\} = Y \setminus \{c\}$

$\Rightarrow d \notin Y$

Beweis: Wäre $d \in Y$,
$d \notin Y \cup \{a,b\}$ aber $d \in Y \setminus \{c\}$, Widerspruch $\square$

a, b, c sind möglichen Kandidaten, die in der Menge enthalten werden zu dürfen.

Beweis:

(für a) Falls $a \in Y$, $a \in Y \cap \{a,b\}$ und $a \in Y \setminus \{c\}$.
Falls $a \notin Y$, $a \notin Y \cap \{a,b\}$ und $a \notin Y \setminus \{c\}$. $\square$

Beweis erfolgt ähnlich für b und c.

$\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{a,b,c\})$

$|\mathcal{L}| = 8 \quad \left(= \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i}\right)$

Fragen?