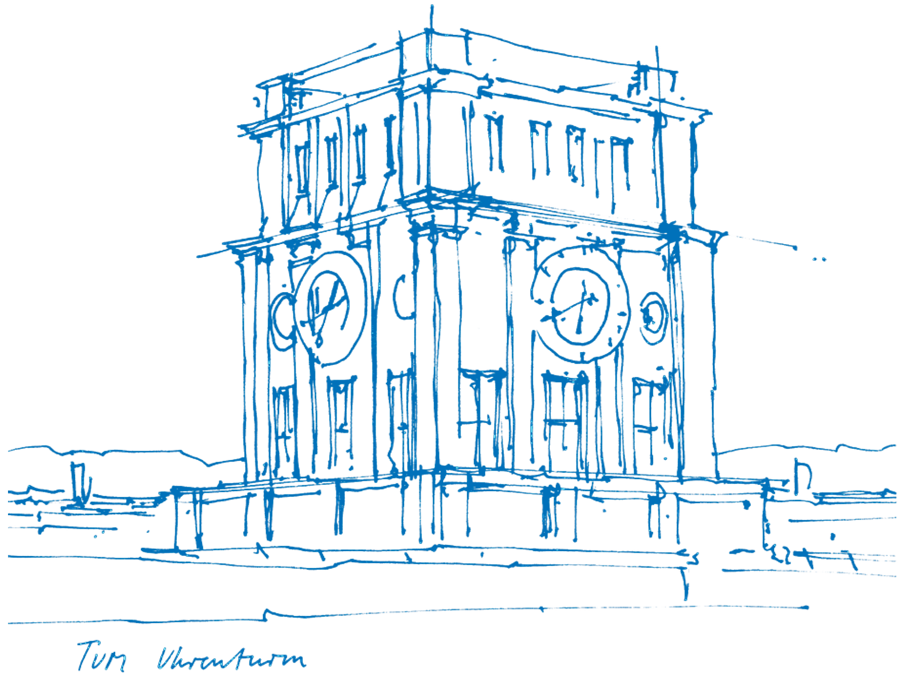
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 15. Januar 2023



Logik — Erfüllbarkeitsäquivalenz

Vorgang:

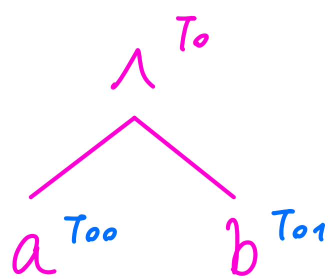
1, Syntaxbaum zeichnen

2, Nummerierung

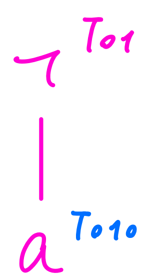
3, $T_{\text{oben}} \leftrightarrow$ (var1 op var2)

4, Überführung in die Klauselschreibweise

Bsp 3:



$T_0 \leftrightarrow (T_{00} \wedge T_{01})$



$T_{01} \leftrightarrow (\neg T_{010})$

Logik — DPLL

Idee: Suche nach einer erfüllenden Belegung

Regeln

− OLR: One-Literal Rule, falls $\{L\} \in K$ auftritt, dann setzt man $L =$ true

− PLR: Pure-Literal Rule, falls L in K auftritt und $\neg L$ nicht, dann setzt man $L =$ true

− Fallunterscheidung

$\{\}$ true

$\{\{\}\}$ false

Wichtig : Reihenfolge

① OLR

② PLR

③ Fallunterscheidung

(alphabetisch aufsteigend)

Logik — Resolution

Für Literal L, Klauseln K_1, K_2 mit $L \in K_1$, $\overline{L} \in K_2$ gilt:
$K_1, K_2 \vDash (K_1 \setminus \{L\}) \cup (K_2 \setminus \{\overline{L}\})$

Beispiel:

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg p, q, r\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg r, s, t\} \arrow[dl, dash] \\
& \{\neg p, q, s, t\} &
\end{tikzcd}
$$

Achtung: Immer genau ein Literal!
Lineare Resolution: Resolution, aber schrittweise

Aufgaben

Aufgabe 11.1

Wir betrachten die aussagenlogische Formel

$$H = ((\neg t \rightarrow \neg q) \wedge \neg(x \rightarrow u))$$

Verwenden Sie das Verfahren aus der Vorlesung, um zu H eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel in KNF aufzustellen.

Aufgabe 11.2

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln F und G in den Variablen a, b, c, d bzw. p, r, w, y in Klauselmengendarstellung:

$$F = \{\{a, \neg b, d\}, \{\neg a, \neg c\}, \{a, \neg c\}, \{\neg a, b, \neg d\}, \{\neg a, \neg d\}\}$$

$$G = \{\{p, \neg w\}, \{p, y\}, \{\neg p, \neg r, \neg w, y\}, \{r\}, \{\neg r, w, \neg y\}, \{w, y\}, \{\neg w, \neg y\}\}$$ $\longrightarrow$ selbst versuchen :)

Protokollieren Sie den Verlauf des DPLL-Algorithmus angewandt auf F und G entsprechend den Übungen als Graph über den betrachteten Klauselmengen.

Wichtig: Reihenfolge

1. OLR
2. PLR
3. Fallunterscheidung

(alphabetisch aufsteigend)

$$\{\{a, \neg b, d\}, \{\neg a, \neg c\}, \{a, \neg c\}, \{\neg a, b, \neg d\}, \{\neg a, \neg d\}\}$$

Aufgabe 11.3

(a) Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel F in den Variablen s, t, u, x in Klauselmengendarstellung:

$$\{\{s, t, \neg u\}, \{s, u\}, \{s, \neg u, x\}, \{\neg s, t, u\}, \{\neg s, t, \neg u\}, \{\neg s, \neg u, \neg x\}, \{\neg t, u\}, \{\neg t, \neg u, x\}, \{\neg t, \neg x\}\}$$

Protokollieren Sie graphisch entsprechend den Übungen den Verlauf des Resolutions-Algorithmus angewandt auf F.

$$\{\{s, t, \neg u\}, \{s, u\}, \{s, \neg u, x\}, \{\neg s, t, u\}, \{\neg s, t, \neg u\}, \{\neg s, \neg u, \neg x\}, \{\neg t, u\}, \{\neg t, \neg u, x\}, \{\neg t, \neg x\}\}$$

Aufgabe 11.3

(b) **Def:** *Eine **lineare** Resolution ist eine Sequenz $R_1, R_2, \ldots$ von Klauseln, wobei für die erste Klausel $R_1 \in F$ gilt, und für alle weiteren Klauseln R_i (mit $i > 1$) eine Klausel $K \in F \cup R_j \mid 1 \leq j < i$ und ein Literal L existieren, so dass*

$$R_i = (R_{i-1} \setminus L) \cup (K \setminus \overline{L}).$$ $R_0 \in K$

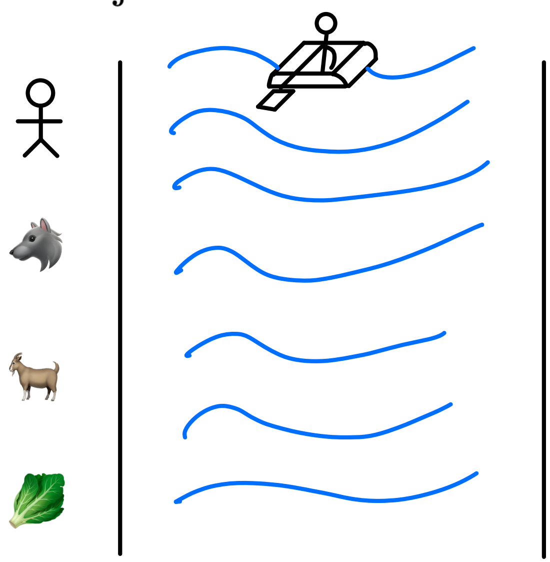
D.h. mit Ausnahme der ersten Klausel R_1 muss jede weitere Klausel R_i (mit $i > 1$) aus der vorhergehenden Klausel R_{i-1} durch Resolventenbildung hervorgehen.

Gegeben ist die aussagenlogische Formel F in KNF als Klauselmenge:

$$F = \{\{c, \neg e\}, \{b\}, \{\neg c, \neg b, \neg e\}, \{a, b\}, \{e, \neg b\}, \{\neg c, a\}\}$$

Aufgabe 11.4

Wolf-Ziege-Kohlkopf-Problem: Zu Beginn befindet sich ein Mann, ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf auf dem linken Ufer eines Flusses. Ziel des Mannes ist, den Wolf, die Ziege und den Kohlkopf einschließlich sich selbst auf das rechte Ufer zu bringen. Dem Mann steht hierfür ein Boot zur Verfügung, mittels welchem er maximal eine der anderen drei "Entitäten" (Wolf, Ziege, Kohlkopf) von einem Ufer auf das andere transportieren kann (in beide Richtungen). Sein Problem besteht darin, dass der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf frisst, wann immer Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohlkopf sich auf dem einen Ufer, er sich aber auf dem anderen Ufer befindet. (Z.B. befinden sich Wolf, Ziege und Kohlkopf auf dem linken Ufer, der Mann jedoch auf dem rechten Ufer, dann frisst auf jeden Fall der Wolf die Ziege, während diese u.U. gerade den Kohlkopf frisst.)



Ziel :

Alle rechts bringen

(a) Formalisieren Sie das *Wolf-Ziege-Kohlkopf-Problem*:

in dieser Reihenfolge

Verwenden Sie ausschließlich die aussagenlogischen Variablen $Z_{m,w,z,k}$ mit $m, w, z, k \in \{l, r\}$. Der Index gibt dabei an, auf welchem Ufer sich Mann, Wolf, Ziege bzw. Kohlkopf jeweils befindent. Die Variable steht für die entsprechende Aussage, dass der Mann diesen Zustand (irgendwie, irgendwann) erreichen kann.

Die Anfangssituation ist somit einfach durch $F_0 := Z_{l,l,l,l}$ beschrieben (alle vier sind auf dem linken Ufer).

Geben Sie die Klauselmenge einer Formel F_1 in KNF an, welche beschreibt, wie der Mann mittels des Boots von einem Zustand, in dem weder der Wolf die Ziege, noch die Ziege den Kohlkopf fressen würde, in ein anderen Zustand wechseln kann. Z.B. sollte $F_1 \models (Z_{l,l,l,l} \to Z_{r,r,l,l})$ gelten ("Wenn alle vier auf dem linken Ufer stehen, kann der Mann samt Wolf auf das rechte Ufer übersetzen, wobei die Ziege und Kohlkopf auf dem linken Ufer bleiben."). F_1 sollte jedoch keine Übergäng **aus** Zuständen beschreiben, in welchen der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf fressen würde.

Sie dürfen die Klauselmenge auch intensional beschreiben.

Nur Mann

Mann und Wolf

Klauseldarstellung

$\wedge$: trivial

$A \to B :\equiv \neg A \vee B$

$\Rightarrow \{\neg A, B\}$

Mann und Ziege

Mann und Kohlkopf

Wolf und Ziege

Ziege und Kohlkopf

$\wedge \varphi = \{$

$\}$

(b) Zeigen Sie mittels aussagenlogischer Resolution, dass $(F_0 \land F_1) \models Z_{r,r,r,r}$ gilt.

Überlegen Sie sich hierfür, wie Sie das Problem lösen würden (oder schauen Sie z.B. auf Wikipedia nach ...). Übersetzen Sie dann diesen "Plan" in eine Resultion der leeren Klausel. Sie müssen nur die benötigten Klauseln aus $F_0 \land F_1$ explizit angeben.

Fragen?