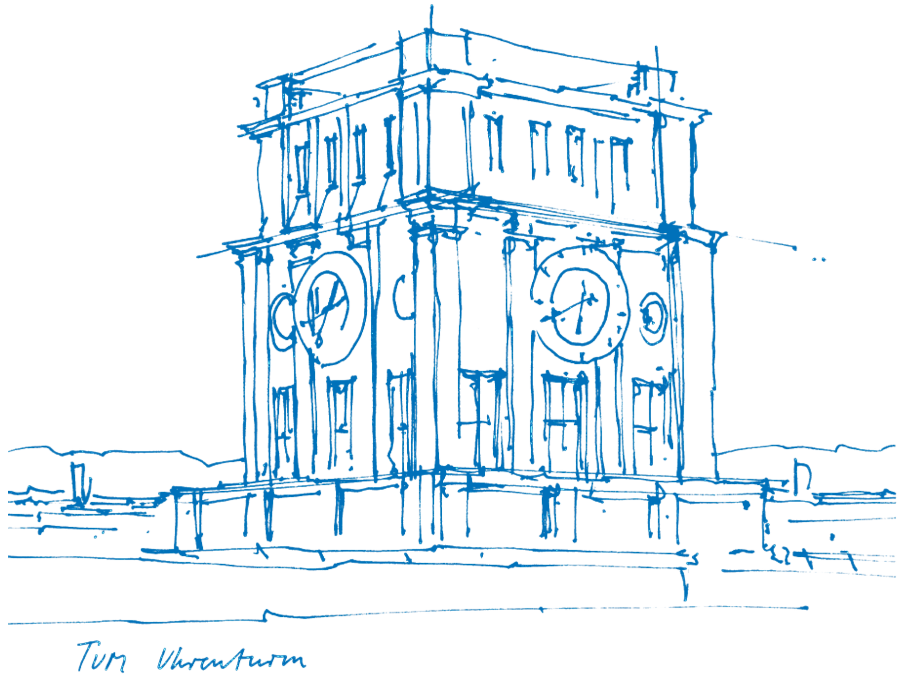
Diskrete Strukturen Tutorium

Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 13. November 2023



Funktionen

Funktionen

$f : A \to B$

$f \subseteq A \times B$ eine Funktion von A nach B ist

$f : \overset{\text{Eingabe}}{\mathbb{N}} \to \overset{\text{Ausgabe}}{\mathbb{N}}$

Dom(f)

Urbildmenge, also A

Rng(f)

Bildmenge, also $\{f(a) \quad a \in A\}$

Total

Für jedem $a \in A$ wird ein Bild $f(a)$ zugewiesen

Funktionen

Komposition

Sei $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen, dann gilt es

$(g \circ f) : A \to C, a \to g(f(a))$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

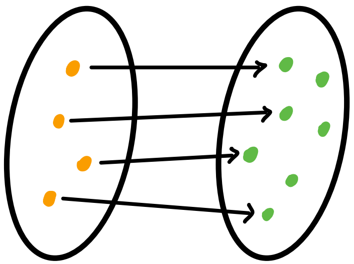
Komposition ist assoziativ: $(h \circ (g \circ f)) = ((h \circ g) \circ f)$

Funktionen

Injektiv

$f: A \to B$

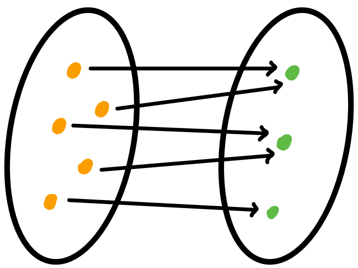
$\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ f(x) = y$



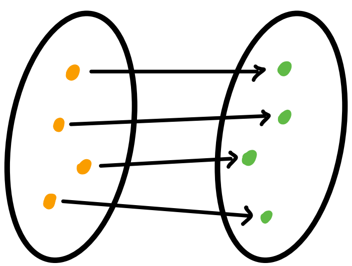
Surjektiv

$f: A \to B$

$\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ f(x) = y$



Bijektiv



$f: A \to B$

$\forall x \in A.\ \exists y \in B.\ f(x) = y$

und $\forall y \in B.\ \exists x \in A.\ f(x) = y$

Aufgabe

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $C \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(f(f^{-1}(C))) = f^{-1}(C)$.

Def : $f: X \to Y$ $\quad f(x) = \{ f(x') \mid x' \in x \}$ Trivial

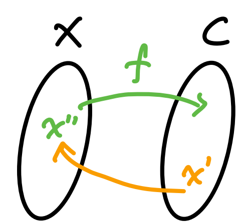
$f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) \in y \}$

$$f^{-1}(f(f^{-1}(C)))$$

$$= \{ x \in X \mid f(x) \in f(f^{-1}(C)) \} \quad \text{Def.}$$

$$= \{ x \in X \mid f(x) \in \{ f(x') \mid x' \in f^{-1}(C) \} \} \quad \text{Def.}$$

$$= \{ x \in X \mid f(x) \in \underline{\{ f(x') \mid x' \in \{ x'' \in X \mid f(x'') \in C \} \}} \} \quad \text{Def.}$$



$$= \{ x \in X \mid f(x) \in C \}$$

$$= f^{-1}(C) \quad \text{Def.}$$

$\square$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(b) Sei $g\colon Y \to Z$ eine weitere Funktion. Dann gilt $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E))$ für alle $E \subseteq Z$.

Def: $f: X \to Y$ $\quad f^{-1}(y) = \{ x \in X \mid f(x) \in y \}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$(g \circ f)^{-1}(E)$$

$$= \{ x \in X \mid (g \circ f)(x) \in E \} \quad \text{Def.}$$

$$= \{ x \in X \mid g(f(x)) \in E \} \quad \text{Def.}$$

$$= \{ x \in X \mid f(x) \in g^{-1}(E) \} \quad \text{Inv. Funktion}$$

$$= \{ x \in X \mid x \in f^{-1}(g^{-1}(E)) \} \quad \text{Inv. Funktion}$$

$$= f^{-1}(g^{-1}(E)) \quad \text{Def.}$$

$\square$

Beweis: Genau dann wenn

Zu Zeigen A gdw. B

wenn A stimmt, stimmt B $(A \rightarrow B)$

$\Rightarrow$ UND

wenn B stimmt, stimmt A $(A \leftarrow B)$

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(c) Zeigen Sie: $\underbrace{f \text{ ist genau dann surjektiv,}}_{A}$ falls $\underbrace{\text{es eine Funktion } g\colon Y \to X \text{ mit } f \circ g = \mathsf{Id}_Y \text{ gibt}}_{B}$.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass es eine Funktion $r\colon X \to X$ mit $r(x) \equiv_f x$ und $(r(x) = r(x')$ gdw. $x \equiv_f x')$ gibt.

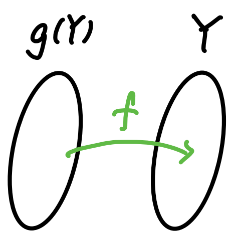
Surjektion $\quad f: X \to Y \quad \forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ f(x) = y$

$A \leftarrow B$

$$f \circ g = Id_Y$$

$$\Rightarrow \quad \forall y \in Y.\ f(g(y)) = y$$

$g(y)$ ist ein Urbild von y unter f



$\forall a \in g(Y).\ \exists y \in Y.\ f(a) = y$

$\Rightarrow f$ surjektiv $\square$

$A \rightarrow B$

$\forall y \in Y.\ \exists x \in X.\ f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x \in X.\ \exists y \in Y.\ x \in f^{-1}(y)$ Inv. Funktion

$\Rightarrow \exists x, x' \in X.\ \exists y, y' \in Y.\ x \equiv_f x'$ und $x \in f^{-1}(y)$ und $x' \in f^{-1}(y')$ Trivial

Da $\exists x, x' \in X.\ x \equiv_f x'$ gdw. $r(x) = r(x')$ Hinweis

$\Rightarrow \exists x, x' \in X.\ \exists y, y' \in Y.\ \underline{x \equiv_f x' \text{ gdw. } r(f^{-1}(y)) = r(f^{-1}(y'))}$ x Einsetzen

Eindeutig

$\Rightarrow \forall y \in Y.\ |r(f^{-1}(y))| = 1$

Da $\exists x \in X.\ x \in f^{-1}(y)$ 2. Zeile

Sei $g : Y \rightarrow X$ mit $g(y) = x$

$\Rightarrow \forall y \in Y.\ g(y) \in f^{-1}(y)$ Einsetzen

$\Rightarrow \forall y \in Y.\ f(g(y)) = y$ Inv. Funktion

$\Rightarrow f \circ g = Id_Y$ Inv. Funktion $\square$

Aufgabe 4.2

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei A_i eine abzählbare, nicht leere Menge.

Zeigen Sie, dass dann auch $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar ist.

A ist abzählbar, falls $|A| \leq |\mathbb{N}|$

Hinweis: Falls es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt, dann gibt es auch eine injektive Abbildung $A \to \mathbb{N}$. Weiterhin gibt es nach Vorlesung eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

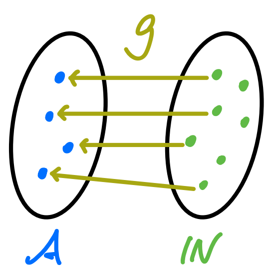
⚠ Beim Beweis sollte man am Anfang immer bestimmen, was man zeigen wollte (zu Zeigen), damit man eine grobe Orientierung hat.

⚠ $=$ → gleich, $:=$ → definieren

Annahme: $\forall i \in \mathbb{N}.\ A_i$ abzählbar

Zu zeigen: $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ abzählbar

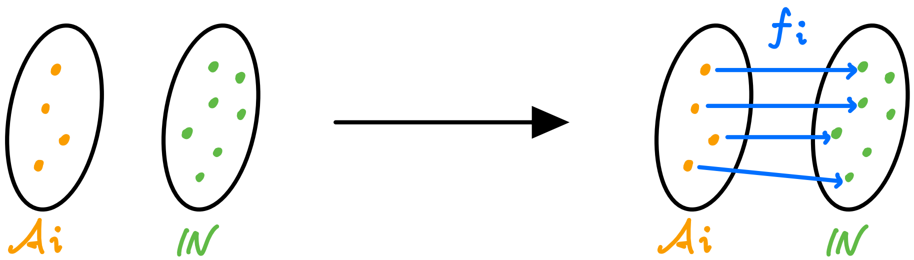
Ziel: abzählbar $\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow$



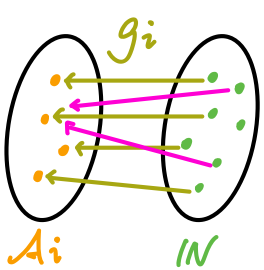
$\Rightarrow$ Surjektivität

Daher wollen wir eine surjektive Funktion $g(n): \mathbb{N} \longrightarrow A$ erzeugen.

① Da A_i abzählbar ist, gilt $|A_i| \leq |\mathbb{N}|$, also f_i ist injektiv.



② Wir betrachten jetzt $g_i := f_i^{-1} : \mathbb{N} \to A_i$.



Dabei können wir g_i so definieren:

$$g_i(k) := \begin{cases} a & \text{falls } f_i(a) = k \\ a_i & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Damit $g_i(k)$ surjektiv wäre

a_i muss also fixiert sein, z.B. $\min(f_i(A_i))$

☆ Absolute Werte $(1, 2, \ldots)$ dürfen wir nicht nehmen, denn er nicht unbedingt $\in A_i$.

$g_i(k)$ ist also nach Definition surjektiv.

③ Anbindung $g(n)$ mit $g_i(k)$

$$g(n) \xrightarrow[n \to (i,k)]{\exists q.\, q: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}} g_i(k)$$

Wir definieren $q(n) := (q_1(n), q_2(n)) = (i, k)$

Damit: $g_i(k) = g_{q_1(n)}(q_2(n)) = g(n)$

$\forall a \in A.$ Sei $a \in A$ beliebig

$\Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}.\ a \in A_i$

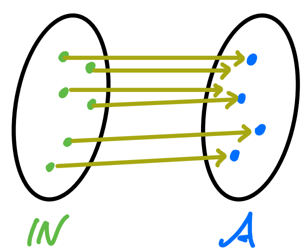
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ g_i(k) = a$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ q(n) = (i, k)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}.\ g(n) = g_i(k) = a$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall a \in A.\ \exists n \in \mathbb{N}.\ g(n) = a}_{\text{Def. Surjektivität}}$$

$g: \mathbb{N} \to A$



Ziel erreicht!

$\square$

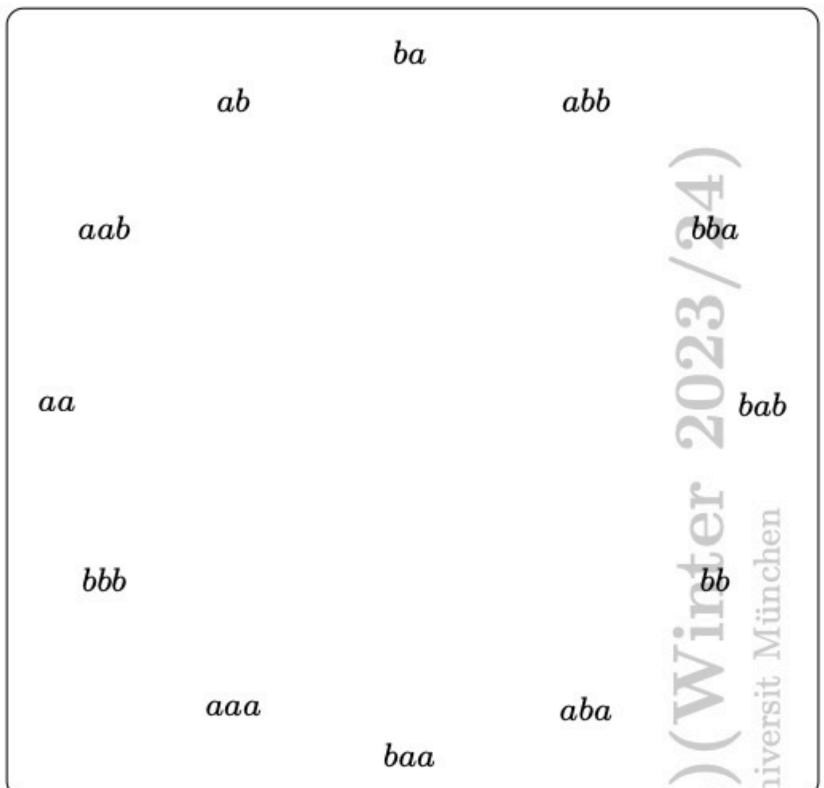
Fazit: A^* für A abzählbar, da $\forall k \in \mathbb{N}$ A^k abzählbar

Aufgabe 4.3

Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

Wir betrachten hier $A = \{a, b\}^2 \cup \{a, b\}^3$.
Die zu betrachtenden Elementen sind also:
$\{aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb\}$

Vorlage



Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(a) Für $A = \{a, b\}^2 \cup \{a, b\}^3$ sei $R = \{(uv, vu) \in A \times A \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$.

Stellen Sie R, $R \setminus \mathsf{Id}_A$, $(R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$ und H_R graphisch dar.

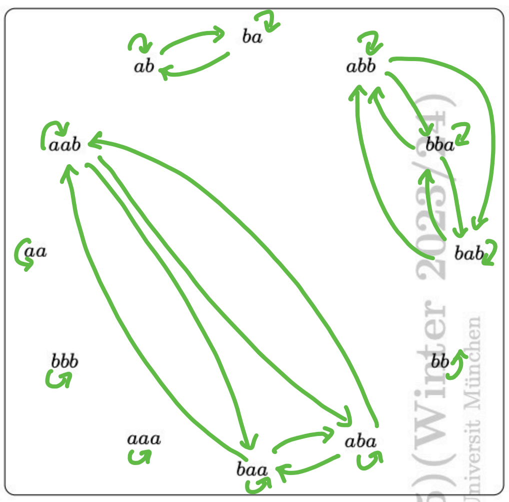
$\underbrace{ab}_{u/v \;\; v/u=\varepsilon} \in R \longrightarrow$ $ba \in R$

$ab \in R$ Id

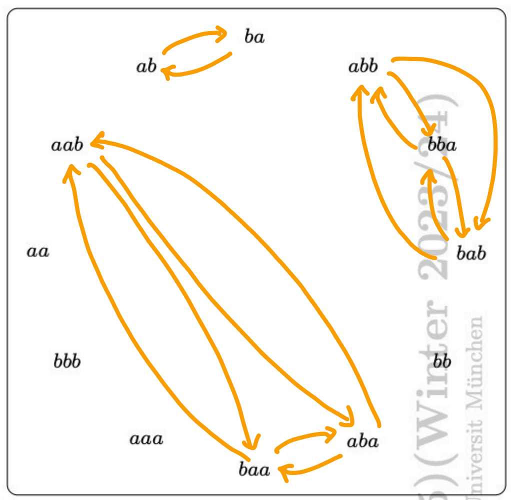
$\underbrace{aab}_{u/v \;\; v/u=\varepsilon} \in R \longrightarrow$ $baa \in R$

$aba \in R$

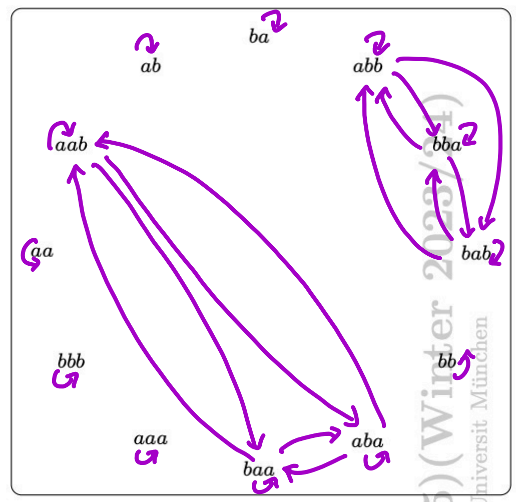
$aab \in R$ Id



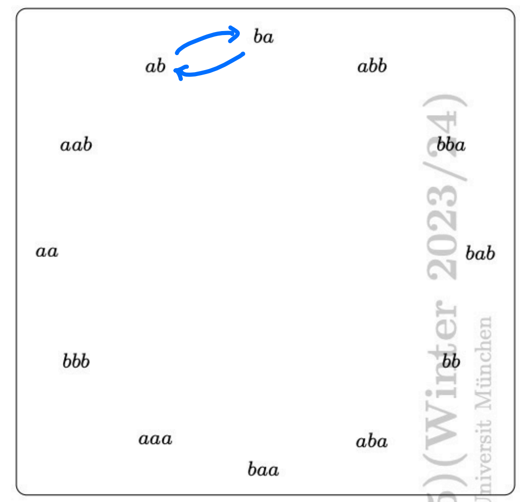
R



$R \setminus Id_A$



$(R \setminus Id_A)^2$



H_R

$= (R \setminus Id_A) \setminus (R \setminus Id_A)^2$

- Id sind zurück: $(a,b) \circ (b,a) = (a,a)$
- Kreise mit 3 Elementen bleiben: $(a,b) \circ (b,c) = (a,c)$
- Kreise mit 2 Elementen verschwinden

Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(b) Für $A = \{a,b\}^2 \cup \{a,b\}^3$ sei $R = \{(u, uv) \in A \times A \mid u, v \in \{a,b\}^*\}$.

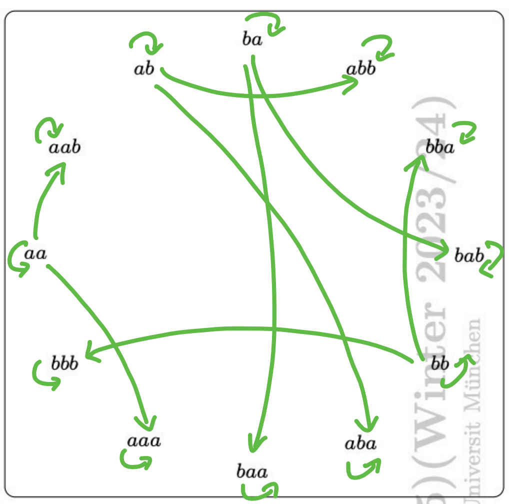
Stellen Sie R, $R \setminus \mathsf{Id}_A$, $(R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$ und H_R graphisch dar.

$ab \in R \rightarrow \overset{u}{ab}\overset{v}{\varepsilon} = ab \in R$ Id

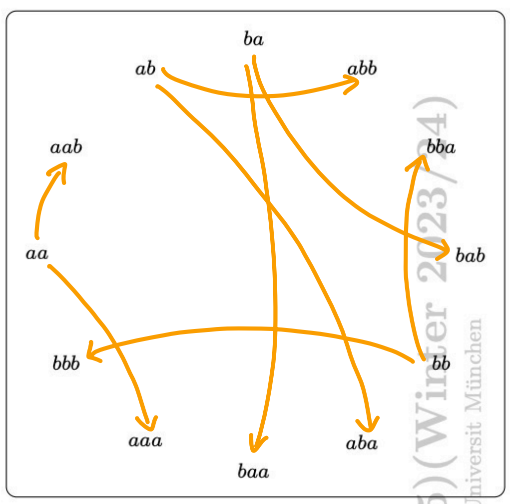
$aba \in R$

$abb \in R$

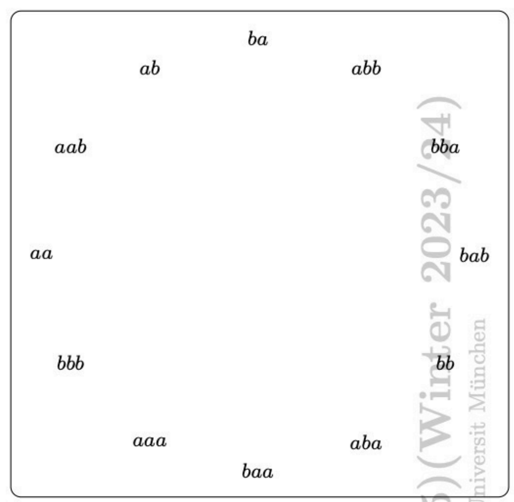
$aab \in R \rightarrow aab \in R$ Id



R

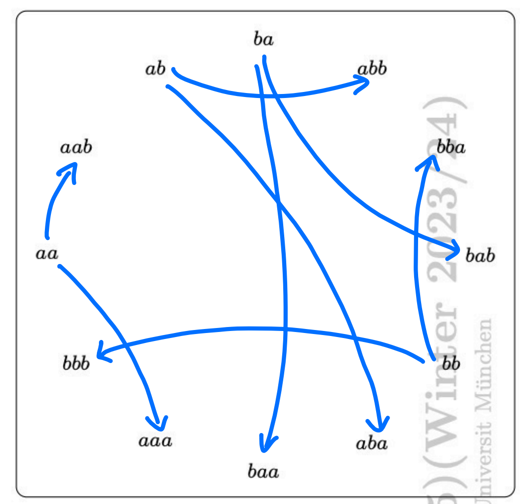


$R \setminus \mathrm{Id}_A$



$(R \setminus \mathrm{Id}_A)^2$

- Keine transitive Relationen aus $R \setminus \mathrm{Id}_A \rightarrow$ leer



H_R

$= (R \setminus \mathrm{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathrm{Id}_A)^2$

Für $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation sei $H_R := (R \setminus \mathsf{Id}_A) \setminus (R \setminus \mathsf{Id}_A)^2$.

(c) Bestimmen Sie H_R für $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$.

$(2,2) \in R$

$(2,3) \in R$ aber $(2,1) \notin R$

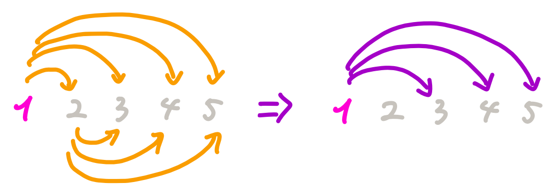
$(2,4) \in R$

$\vdots$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \leq y\}$

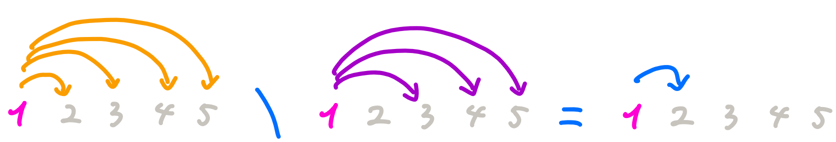
$R \setminus Id_A = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x < y\}$ $\quad (a,a) \notin R \setminus Id_A$

$(R \setminus Id_A)^2 = \{(x,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x < z-1\}$



Formal: Mit $(x,y),(y,z) \in S$ gilt $y \geq x+1$ und $z \geq y+1$, also $z \geq y+1 \geq x+2$

$H_R = (R \setminus Id_A) \setminus (R \setminus Id_A)^2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y-1\} = \{(x, x+1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$



Alle Folien werden hier hochgeladen :)

https://discord.gg/v44bAsfmdK

Fragen?