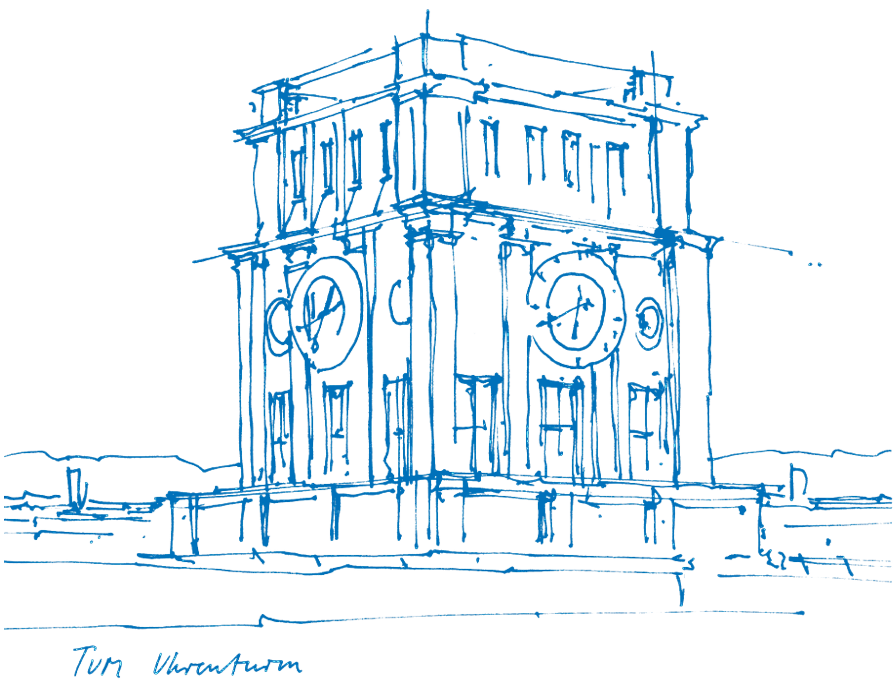
Diskrete Strukturen Tutorium

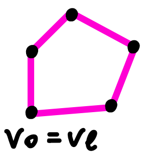
Jay Zhou
Technische Universität München
Garching b. München, 27. November 2023



Prüfungsanmeldung freigeschaltet!!!

Graphentheorie

Graphentheorie — Kreis und Isomorphie



Kreis

- Ein Pfad mit endlich vielen Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_l$, wo $v_0 = v_l$
- Einfacher Kreis: 1) Alle Knoten sind paarweise verschieden, 2) enthält keinen kleineren Kreisen

Isomorphie

- Zwei Graphen G, H sind isomorph, falls es eine Bijektion $\beta : V_G \to V_H$ gibt
- Copy und Paste

Graphentheorie — Gradfolge

Der Graph G besitzt eine Gradfolge $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ für $V = \{v_0, \ldots, v_n\}$

k-regulär

- $\forall v \in V \,.\, \deg(v) = k$

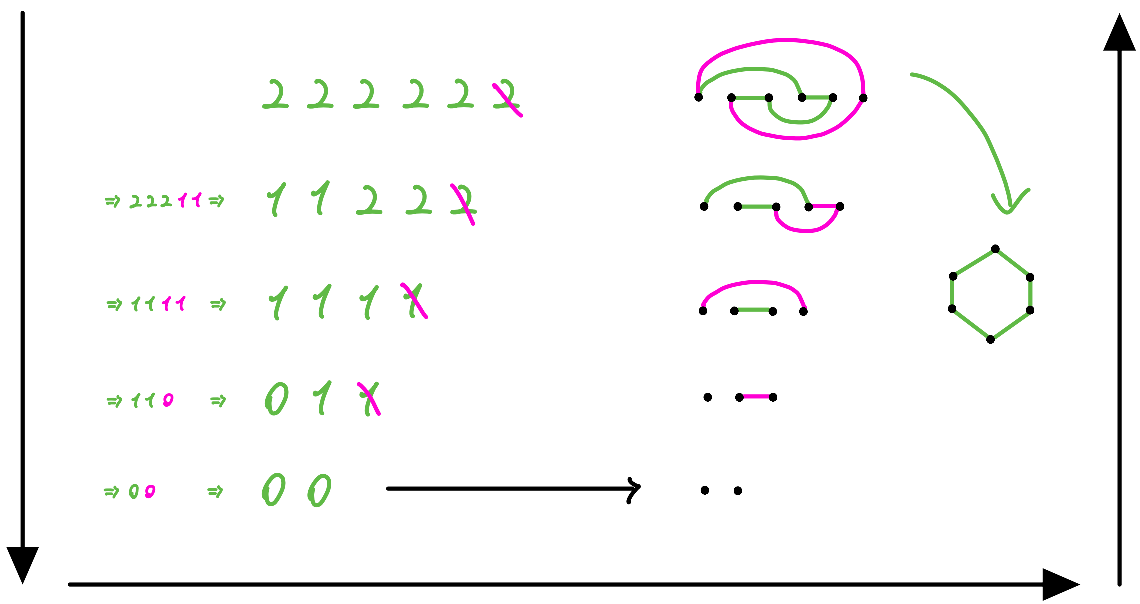
Graphentheorie — Gradfolge

Realisierbarkeit: Havel Hakimi

1) Aufsteigend Sortieren

2) Für jeden Schritt: Die höchsten Gradfolge eliminieren, zu entsprechenden Anzahl der Gradfolgen verteilen

3) Rekursiv bis alle Gradfolgen 0 sind



Graphentheorie — Gradfolge

Handschlaglemma

$$2\left|E\right| = \sum_{i\in[n]} \deg(v_i)$$

aka. Die Summe der Gradfolgen muss durch 2 teilbar sein, damit die Gradfolge realisierbar ist.

Gegeben 2 2 2 2 2 2

$$|E| = \frac{2+2+2+2+2+2}{2} = 6$$

Graphentheorie — Zusammenhang

Auf Zusammenhang prüfen

Voraussetzung

1. $|E| \geqslant |V| - 1$: Der Graph kann zusammenhängend sein.
2. $dh \geqslant |V| - 1$: Der Graph ist zusammenhängend, da der Knoten mit dem höchsten Grad mit allen anderen Knoten verbunden sein muss.

ODER

3. $dh \geqslant |V| - 2$ und es gibt keinen Knoten mit Grad 0: Der Graph ist zusammenhängend. Der Knoten mit dem höchsten Grad ist mit allen außer einem Knoten verbunden. Da es keinen Knoten mit Grad 0 gibt, muss der Knoten, der kein Nachbar von v ist, eine Kante zu einem Nachbarn von v haben.

Sonst könnte man keine Aussage ziehen. Man müsste ein Beispiel geben.

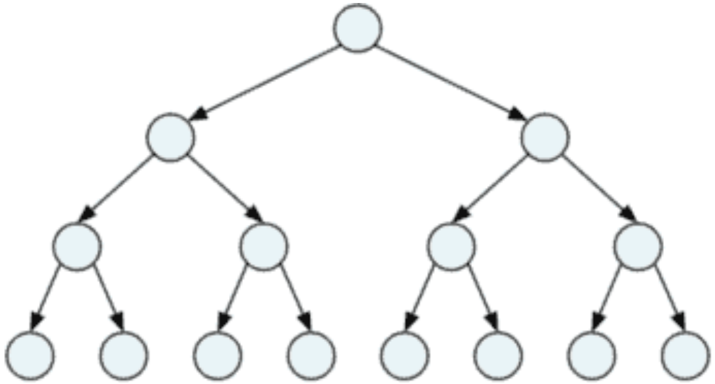
$\boxed{dh\text{ : Knoten mit dem höchsten Grad}}$

Graphentheorie — Baum

Baum ist ein einfacher Graph, der zusammenhängend und kreisfrei ist.

- Ist $G = (V, E)$ ein Baum, dann gilt $|E| = |V| - 1$.
- Jeder Baum $G = (V, E)$ mit $|V| \geqslant 2$ hat mindestens 2 Blätter
- Jeder Baum ist kreisfrei

Perfekter Binärbaum B_h besitzt 2^h Blättern und $2^{h+1} - 1$ Knoten.



https://www.happycoders.eu/de/algorithmen/binaerbaum-java/

Graphentheorie — Baum

Auf Baum prüfen:

$|E| = |V| - 1$: Der Graph ist Kreisfrei. WENN der Graph ZUSAMMENHÄNGEND ist, dann ist er ein Baum

UND

Sonst kann der Graph kein Baum sein.

Aufgabe

Aufgabe 6.1

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion.

Gliedern Sie den jeweiligen Beweis korrekt in Induktionsbasis, -schritt, -annahme und -behauptung.

(a) Wir definieren die Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3,\ \text{ und allgemein für } i \in \mathbb{N}_0\ \ a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 35 \cdot a_i$$

Zeigen Sie mittels Induktion nach $i \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_i = \frac{3 \cdot 7^i + 3 \cdot (-5)^i}{2}$$

Induktionsbasis ⚠ Bei mehreren Base Cases : Für ALLE definieren

$\Rightarrow i = 0 \qquad a_0 = \dfrac{3 \cdot 7^0 + 3 \cdot (-5)^0}{2} = 3 = a_0$

$\Rightarrow i = 1 \qquad a_1 = \dfrac{3 \cdot 7^1 + 3 \cdot (-5)^1}{2} = 3 = a_1$

Induktionsschritt

Angabe $a_0 = 3,\ a_1 = 3,$ und allgemein für $i \in \mathbb{N}_0$ $a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 35 \cdot a_i$

Induktionsannahme $a_i = \frac{3 \cdot 7^i + 3 \cdot (-5)^i}{2}$ $\quad a_{i+1} = \frac{3 \cdot 7^{i+1} + 3 \cdot (-5)^{i+1}}{2}$

Induktionsbehauptung $a_{i+2} = \frac{3 \cdot 7^{i+2} + 3 \cdot (-5)^{i+2}}{2}$

Induktionsbeweis

$$a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 35 \cdot a_i = 2 \cdot \frac{3 \cdot 7^{i+1} + 3 \cdot (-5)^{i+1}}{2} + 35 \cdot \frac{3 \cdot 7^i + 3 \cdot (-5)^i}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 7^{i+1} + 2 \cdot 3 \cdot (-5)^{i+1} + 35 \cdot 3 \cdot 7^i + 35 \cdot 3 \cdot (-5)^i}{2}$$

$\cdot 7$ $\quad \cdot -5$

$$= \frac{42 \cdot 7^i - 30 \cdot (-5)^i + 105 \cdot 7^i + 105 \cdot (-5)^i}{2}$$

$$= \frac{147 \cdot 7^i - 75 \cdot (-5)^i}{2} = \frac{3 \cdot 7^2 \cdot 7^i - 3 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^i}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 7^{i+2} - 3 \cdot (-5)^{i+2}}{2} \quad \square$$

Probier die b) Aufgabe selber nach dem Tutorium!

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2,2,2,2,2,2) \qquad D_2 = (1,1,1,1,2,3,3) \qquad D_3 = (1,1,2,2,2) \qquad D_4 = (2,3,3,4,4)$$

(a) Wenden Sie den Algorithmus von Havel-Hakimi auf jede der gegebenen Gradsequenzen an. Geben Sie hierbei auch alle rekursiv berechneten Gradsequenzen samt den jeweils konstruierten Graphen an.

D_1

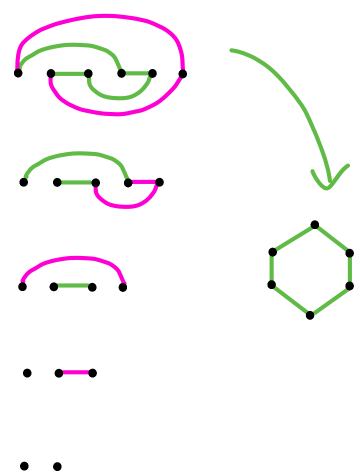
$2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \cancel{2}$

$\Rightarrow 2\,2\,2\,1\,1 \Rightarrow \quad 1\ 1\ 2\ 2\ \cancel{2}$

$\Rightarrow 1\,1\,1\,1 \Rightarrow \quad 1\ 1\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 1\,1\,0 \Rightarrow \quad 0\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 0\,0 \Rightarrow \quad 0\ 0 \longrightarrow$



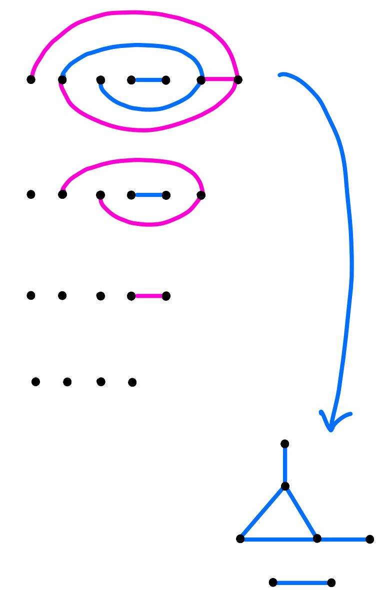
D_2

$1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ \cancel{3}$

$\Rightarrow 1\,1\,1\,0\,1\,2 \Rightarrow \quad 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ \cancel{2}$

$\Rightarrow 0\,1\,1\,0\,0 \Rightarrow \quad 0\ 0\ 0\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 0\,0\,0\,0 \Rightarrow \quad 0\ 0\ 0\ 0 \longrightarrow$



Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2,2,2,2,2,2) \qquad D_2 = (1,1,1,1,2,3,3) \qquad D_3 = (1,1,2,2,2) \qquad D_4 = (2,3,3,4,4)$$

(a) Wenden Sie den Algorithmus von Havel-Hakimi auf jede der gegebenen Gradsequenzen an. Geben Sie hierbei auch alle rekursiv berechneten Gradsequenzen samt den jeweils konstruierten Graphen an.

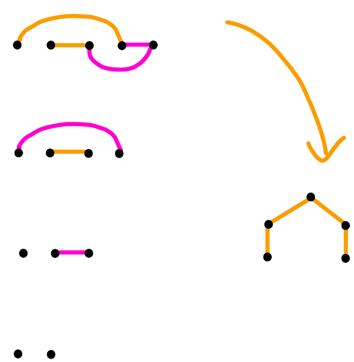
D_3

$1\ 1\ 2\ 2\ \cancel{2}$

$\Rightarrow 1\,1\,1\,1 \Rightarrow 1\ 1\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 1\,1\,0 \Rightarrow 0\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 0\,0 \Rightarrow 0\ 0 \longrightarrow$



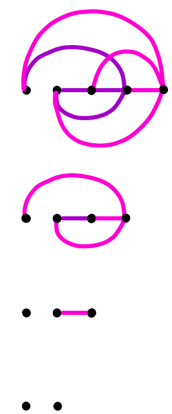
D_4

$2\ 3\ 3\ 4\ \cancel{4}$

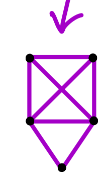
$\Rightarrow 1\,2\,2\,3 \Rightarrow 1\ 2\ 2\ \cancel{3}$

$\Rightarrow 0\,1\,1 \Rightarrow 0\ 1\ \cancel{1}$

$\Rightarrow 0\,0 \Rightarrow 0\ 0 \longrightarrow$



Haus vom Nikolaus



Erinnerung: ① $|E| = |V| - 1$ und zusammenhängend $\Rightarrow$ Baum

② Handschlaglemma: $2|E| = \sum_{i \in [n]} \deg(v_i)$

③ Auf Zusammenhang prüfen: $|E| \geq |V| - 1$ und

$\boxed{dh: \text{Knoten mit dem höchsten Grad}}$

$dh \geq |V| - 1$ oder $dh \geq |V| - 2$ und $\nexists i.\ \deg(v_i) = 0$

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2,2,2,2,2,2) \qquad D_2 = (1,1,1,1,2,3,3) \qquad D_3 = (1,1,2,2,2) \qquad D_4 = (2,3,3,4,4)$$

(b) Geben Sie, falls möglich, zu jeder der Gradsequenzen einen Baum an. Falls dies nicht möglich ist, begründen Sie dies.

D_1 $\quad |V| = 6 \quad |E| = 12/2 = 6 \quad |E| \neq |V| - 1$ $\lightning$

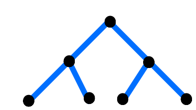
D_2 $\quad |V| = 7 \quad |E| = 12/2 = 6 \quad |E| = |V| - 1$

Zusammenhang: $|E| \geq |V| - 1$ ✓

$dh \geq |V| - 1$ $\lightning$

$dh \geq |V| - 2$ $\lightning$

Beispiel finden $\rightarrow$



✓

D_3 $\quad |V| = 5 \quad |E| = 8/2 = 4 \quad |E| = |V| - 1$

Zusammenhang: $|E| \geq |V| - 1$ ✓

$dh \geq |V| - 1$ $\lightning$

$dh \geq |V| - 2$ $\lightning$

Beispiel finden $\rightarrow$

Bis auf Isomorph nur ✓

D_3 $\quad |V| = 5 \quad |E| = 16/2 = 8 \quad |E| \neq |V| - 1$ $\lightning$

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2,2,2,2,2,2) \qquad D_2 = (1,1,1,1,2,3,3) \qquad D_3 = (1,1,2,2,2) \qquad D_4 = (2,3,3,4,4)$$

(c) Begründen Sie explizit, dass es bis auf Isomorphie nur einen einfachen Graphen mit Gradsequenz D_4 gibt.

$2 \; 3 \; 3 \; 4 \; \cancel{4}$

muss mit allen anderen Knoten verbunden werden

⇒ nur eine Verbindungsmöglichkeit !

⇒ 1 2 2 3 ⇒ $1 \; 2 \; 2 \; \cancel{3}$

muss mit allen anderen Knoten verbunden werden

⇒ nur eine Verbindungsmöglichkeit !

⇒ 0 1 1 ⇒ $0 \; 1 \; \cancel{1}$

muss mit allen anderen Knoten verbunden werden

⇒ nur eine Verbindungsmöglichkeit !

⇒ 0 0 ⇒ $0 \; 0$

⇓

Nur eine Verbindungsmöglichkeit

Daher nur einer einfache Graph bis auf Isomorphie

Aufgabe 6.2

Gegeben seien folgende Gradsequenzen:

$$D_1 = (2,2,2,2,2,2) \qquad D_2 = (1,1,1,1,2,3,3) \qquad D_3 = (1,1,2,2,2) \qquad D_4 = (2,3,3,4,4)$$

(d) Realisieren Sie eine der Gradsequenzen durch einen Graphen, der nicht durch den Algorithmus von Havel-Hakimi erzeugt werden kann, d.h. zu dem der Algorithmus von Havel-Hakimi keinen isomorphen Graphen konstruieren kann.

Begründen Sie explizit, warum der angegebene Graph nicht von dem Algorithmus konstruiert werden kann.

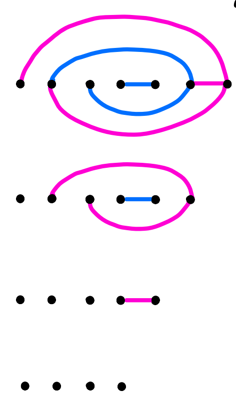
D_2

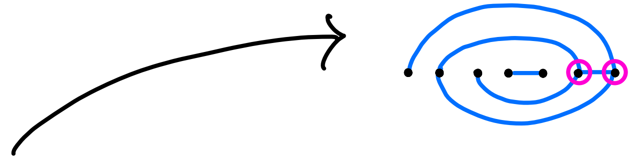
$1 \; 1 \; 1 \; 1 \; 2 \; 3 \; \cancel{3}$

$\Rightarrow 111012 \Rightarrow \; 0 \; 1 \; 1 \; 1 \; 1 \; \cancel{2}$

$\Rightarrow 01100 \Rightarrow \; 0 \; 0 \; 0 \; 1 \; \cancel{1}$

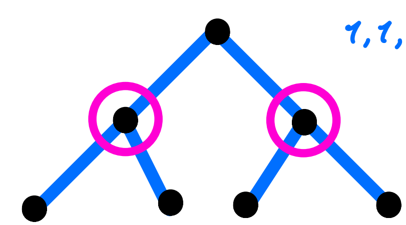
$\Rightarrow 0000 \Rightarrow \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \longrightarrow$





Durch Havel-Hakimi müssen die beiden Knoten vom Grad 3 einander benachbaren

wobei B_2



1,1,1,1,2,3,3 ✓

nicht benachbart

daher nicht durch Havel-Hakimi erzeugbar

Aufgabe 6.3

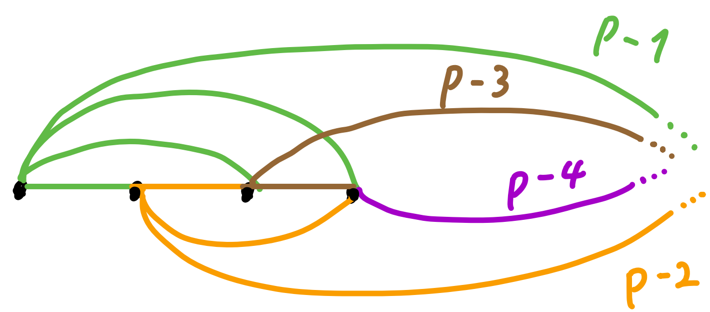
Sei $G = (V, E)$ ein einfacher *nicht zusammenhängender* Graph mit $n = |V|$ Knoten. Bestimmen Sie die maximale Zahl an Kanten $m = |E|$ in Abhängigkeit von n, die G haben kann.

Es gibt daher mindestens 2 Teilgraphen, die nicht voneinander zusammenhängend sind

Der beste Fall: G besteht aus 2 vollständige Graphen K_x und K_y

mit $x + y = n$ und $x, y \in [1, n-1]$

Der vollständige Graph K_p hat immer $\sum_{i=1}^{p-1} i = \frac{(1+p-1)\cdot(p-1)}{2} = \frac{p\cdot(p-1)}{2}$ Kanten



Daher besitzt G $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$ Kanten

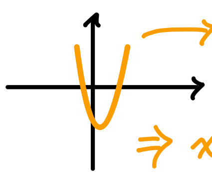
$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x(x-1) + (n-x)(n-x-1)}{2}$$

$$= \frac{x^2 - x + n^2 - nx - n - nx + x^2 + x}{2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2nx + (n^2 - n)}{2}$$

$$= x^2 - nx + \frac{n^2 - n}{2}$$

Graphisch



→ Max am Rand

$\Rightarrow x_{max} = 1 \quad y_{max} = n-1$

$x_{max} = n-1 \quad y_{max} = 1$

Rechnerisch

$f'(x) = 2x - n$

$f''(x) = 2$

Kein Max, Randverhalten untersuchen

$\Rightarrow x_{max} = 1 \quad y_{max} = n-1$

$x_{max} = n-1 \quad y_{max} = 1$

$$|E| = \underbrace{\frac{1 \cdot (1-1)}{2}}_{0} + \frac{(n-1)\cdot(n-1-1)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

Fragen?