Graphen

1, Digraph

$G = (V, E)$

endlich: wenn V endlich ist

bipartit: $V = A \cup B \wedge A \cap B = 0, E \subseteq A \times B \wedge B \times A$

Pfad

einfach —> kein Knoten mehrmals in dem Pfad vorkommt

Teilgraph

Zusammenhang

zusammenhängend

stark zusammenhängend

zusammenhängende Komponente

stark zsmhgd. Komponente

maximale Zsmhkomponente

maximale stark Zsmhkomponente

Satz: Jeder einfache zsmhgd. Graph mit $n \geqslant 1$ Knoten hat mind. $n - 1$ Kanten.

Kreis

Selbstkante: reflexiv

azyklisch: kreisfrei

Vorgänger/Nachfolger: uEv

Satz: Jeder endliche einfache zsmhgd. Graph mit $n \geqslant 3$ Knoten und mind. n Kanten besitzt ein Kreis.

Isomorphie

Isomorphism

Automorphism

2, Einfache Graphen

Einfacher Kreis

aus mind. 3 Kanten bestehen

Satz: Ein einfacher Graph ist bipartit gdw. er keinen Kreis ungerader Länge besitzt.

Multigraph/Hypergraph

Wichtige Graphen

K_n: vollständige Graphen (n-1)-regulär

C_n: Kreisgraph ($n \geqslant 3$) (2-regulär)

P_n: Pfadgraph

$K_{m,n}$: vollständiger bipartiter Graph

$M_{m,n}$: Gittergraph (m —> height, n —> weight)

Q_n: Hyperwürfel (n-regulär)

Gradfolge

k-regulär: $\forall v \in V(\deg(v) = k)$

Realisierung: Havel-Hakimi

Satz: $2|E| = \sum_{i \in [n]} \deg(v_i)$ für jeden Graph $G = (V, E)$

3, Bäume

Definition: ein einfacher Graph, der zsmhgd. und kreisfrei ist.

Perfekter Binärbaum

B_h: perfekter Binärbaum

2^h Blättern

$2^{h+1} - 1$ Knoten

Satz: Ist $G = (V, E)$ ein Baum, dann gilt $|E| = |V| - 1$.

Satz: Jeder Baum $G = (V, E)$ mit $|V| \geqslant 2$ hat mind. 2 Blätter.

Satz: Jeder zsmhgd. Graph $G = (V, E)$ hat mind. 1 Spannbaum.

Satz: Die folgende vier Aussagen sind äquivalent:

1, G ist ein Baum

2, G ist zsmhgd. und $|V| = |E| + 1$

3, G ist kreisfrei und $|V| = |E| + 1$

4, 2 beliebige Knoten u, v sind durch genau einen einfachen Pfad G verbunden.

Wurzelbäume

4, Eulertouen und Hamiltonkreise

Eulertour: jede Kante wird genau einmal besucht

Hamiltonkreis: jeder Knoten wird genau einmal besucht.

Satz (Existenz): Jeder Knoten in einem einfachen zsmhgd. Graph $G = (V, E)$ mit einem geraden positiven Knotengrad —> besitzt eine Eulertour. (v.v.)

Satz (Existenz): Jeder Knoten in einem einfacher Graph $G = (V, E)$ mind. Knotengrad $\frac{|V|}{2}$ hat —> besitzt ein Hamiltonkreis.

5, Planare Graphen und Knotenfärbungen

Planarität: if man in der 2D Zeichenebene ohne Kantenüberschneidungen zeichnen kann.

Eulersche Polyederformel (EPF)

Satz: Sei $G = (V, E)$ ein zsmhgd. planarer Graph. Sei f die Anzahl der Flächen, in die G bei überschneidungsfreier Darstellung die Zeichenebene zerschneidet.

Dann gilt: $f - |E| + |V| = 2$

Dann gilt: $f - |E| + |V| = 1 + k$ (k —> max. Zusammenhangskomponent)

Satz: $2|E| = lf$, l ist die Anzahl der Kanten, die eine Fläche umrundet.

Satz von Kuratowski

Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn weder $K_{3,3}$ noch K_5 ein Minor von G ist.

Knotenfärbung

$c(u) \neq c(w)$ für jede Kante $\{u, w\} \in E$

Vier-Farben-Satz

Für jeden einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt $\chi(G) \leqslant 4$

Graphen Bestimmen

1. Summe der Knotengerade prüfen

    gerade

    -> Keine Informationen

    ungerade

    -> Der Graph lässt sich nicht konstruieren. Hier kann die Analyse abgebrochen werden.

2. Havel Hakimi anwenden

    Havel Hakimi funktioniert

    -> Graph ist ist konstruierbar

    Havel Hakimi schlägt fehl

    -> Graph lässt sich nicht konstruieren

3. Auf Zusammenhang prüfen

    |E| >= |V| - 1

    -> Der Graph kann zusammenhängend sein

    dh >= |V| - 1

    -> Der Graph ist zusammenhängend, da der Knoten mit dem höchsten Grad mit allen anderen Knoten verbunden sein muss

    dh >= |V| - 2 und es gibt keinen Knoten mit Grad 0

    -> Der Knoten mit dem höchsten Grad (ab jetzt v) ist mit allen außer einem Knoten verbunden.

    Da es keinen Knoten mit Grad 0 gibt, muss der Knoten der kein Nachbar von v ist eine Kante zu einem Nachbarn von v haben.

    Damit ist der Graph zusammenhängend.

    Sonst

    -> Keine Aussage versuche ein Beispiel zu finden

4. Planarität prüfen

    3 Formeln:

    $$|E| \leqslant 3|V| - 6$$

$$f - |E| + |V| = 2$$

$$f \leqslant \frac{2|E|}{4} \ (4f \leqslant \sum_{f \in F} |E_f| \leqslant 2|E|)$$

|E| <= 3 * |V| - 6

-> Der Graph kann planar sein

Sonst

-> Der Graph kann NICHT planar sein

Auf Minoren prüfen:

Es gibt weniger als 5 Knoten mit Grad 5 und weniger als 6 Knoten mit Grad 3?

-> Damit ist der Graph planar

Der K5 und der K33 sind nicht als Minor enthalten, da es weniger als 6 Knoten mit deg(v) >= 3 und weniger als 5 Knoten mit deg(v) >= 4 gibt.

Es gibt weniger als 5 Konoten mit Grad 4 aber mindestens 6 Knoten mit Grad 3?

-> Der K5 kann kein Minor sein, da es weniger als 5 Knoten mit deg(v) >= 4 gibt

der K33 kann jedoch ein Minor sein das muss manuel geprüft werden

Es gibt mindestens 5 Knoten mir Grad 4 aber weniger als 6 Knoten mit Grad 3?

-> Der K33 kann kein Minor sein, da es weniger als 6 Knoten mit deg(v) >= 3 gibt

der K5 kann jedoch ein Minor sein das muss manuel geprüft werden

Sonst

-> Ob der K3 und der K55 als Minoren enthalten sind muss manuel geprüft werden

Hast du Informationen über die Flächen? Dann prüfe: f - |E| +|V| = 2

5. Bäume

$|E| = |V| - 1$

-> Der Graph ist kreisfrei => WENN der Graph zusammenhängend ist, dann ist er auch ein Baum

Sonst

-> Der Graph kann kein Baum sein

6. Eulertour

Haben alle Knoten einen geraden positiven Knotengrad?

-> WENN der Graph zusammenhängend ist, dann hat er EINE Eulertour.

Sonst

-> Der Graph hat KEINE Eulertour

7. Eulerpfad

Haben alle Knoten oder alle außer 2 Knoten einen geraden positiven Knotengrad?

-> WENN der Graph zusammenhängend ist, dann hat er EINEN Eulerpfad

Sonst

-> Der Graph hat keinen Eulerpfad

8. Hamilton Kreis

Gibt es einen Knoten mit Grad 1?

-> Der Graph hat KEINEN Hamiltonkreis. Es gibt einen Knoten u vom Grad 1. Der einzige Nachbar von u muss somit zweimal besucht werden. Ein Kreis besucht (nach Vorlesung) aber einen Knoten höchstens einmal.

Gilt $deg(v) >= |V|/2$, für alle v aus V

-> WENN der Graph zusammenhängend ist, dann hat EINEN Hamiltonkreis.

Sonst

-> Es lässt sich anhand dieser Bedingung nichts sagen finde ein Beispiel (vielleicht der bipartite Graph Kmn)

9. Färbbarkeit

Der Graph ist 4 färbbar, wenn er planar ist.

Meistens gibt es nur eine Möglichkeit bei dieser Fragestellung den Graphen zu zeichenen finde diese und zeige, dass sie x-färbbar ist

10, Kreise

Jeder zusammenhängende Graph mit $n > 2$ Knoten und n oder mehr Kanten besitzt einen Kreis (Vorlesung).