图论及应用笔记

自动化工程学院　陈军成

2022 年 5 月 20 日

目录

1 图的基本概念

1.1 图和简单图

1.1.1 图的定义及其相关概念

图的定义:

定义 1.1 一个图 G 定义为一个有序对 $<V, E>$，记为 $G = (V, E)$, 其中:

(1) V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合, 其元素称为顶点或点. 用 $|V|$ 表示顶点数;

(2) E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次. 用 $|E|$ 表示边数.

图的相关概念:

(1) 有限图: 顶点集和边集都有限的图称为有限图。

注 无限图也是大量存在的! 如正整数集合上的“整除关系”图就是一个无限图。但我们课程只涉及“有限图”.

(2) 平凡图与空图: 只有一个顶点的图称为平凡图; 只有点没有边的图称为空图.

(3) n 阶图: 顶点数为 n 的图，称为 n 阶图.

(4) (n, m) 图: 顶点数为 n 的图，边数为 m 的图称为 (n, m) 图.

(5) 边的重数: 连接两个相同顶点的边的条数称为边的重数; 重数大于 1 的边称为重边.

(6) 环: 端点重合为一点的边称为环

(7) 简单图: 无环无重边的图称为简单图; 其余的图称为复合图.

(8) 顶点 u 与 v 相邻接: 顶点 u 与 v 间有边相连接 (u adjv); 其中 u 与 v 称为该边的两个端点.

注 规定一个顶点与自身是邻接的.

(9) 顶点 u 与边 e 相关联: 顶点 u 是边 e 的端点.

(10) 边 e1 与边 e2 相邻接: 边 e1 与边 e2 相邻接: 边 e1 与边 e2 有公共端点.

1.1.2 图的同构

图的同构: 如果顶点数相同、边数相同的两个图，其结构形式也相同，那么这两个图同构.

定义 1.2 设有两个图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$, 若在其顶点集合间存在双射, 使得边之间存在如下关系: $\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1\in\mathbf{V}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2\in\mathbf{V}_2$, 设 $\mathbf{u}_1\leftrightarrow\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1\leftrightarrow\mathbf{v}_2\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\in\mathbf{E}_1$ 当且仅当 $\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2\in\mathbf{E_2}$, 且 u_1v_1 与 u_2v_2 的重数相同。称 G_1 与 G_2 同构, 记为:

$$G_1\cong G_2$$

注
- 图同构的两个必要条件: 顶点数相同; 边数相同.
- 研究图的同构问题, 核心是同构的判定问题.
- 3(4) 个顶点非同构简单图有 4(11) 个

1.1.3 完全图、偶图与补图

完全图:

(1) 完全图: 完全图是一个简单图, 且任意一个顶点都与其它每个顶点有且只有一条边相连接.
(2) n 阶完全图: n 个顶点的完全图用 K_n 表示.
(3) K_n 的边数:

$$m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

偶图:

偶图的特征: 顶点分成不相交的两部分; 任意一条边两个端点分属于两部分顶点.

定义 1.3 (偶图) 所谓具有二分类 (X,Y) 的偶图 (或二部图) 是指一个图, 它的点集可以分解为两个 (非空) 子集 X 和 Y, 使得每条边的一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中.

注 偶图不能有环, 不能有三角形, 可以有重边

定义 1.4 (完全偶图) 完全偶图是指具有二分类 (X,Y) 的简单偶图, 其中 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点相连, 若 $|X|=n_1,|Y|=n_2$, 则这样的偶图记为 K_{n_1,n_2}.

注 完全偶图是完全二部图. 偶图可以是只有两个点的空图, 即偶图可能没有边.

简单图的补图:

定义 1.5 (补图) 对于一个简单图 $G=(V,E)$, 令集合

$$E_1=\{uv|u\neq v,u,\in V\}$$

则称图 $H=(V,E_1\backslash E)$ 为 G 的补图, 记作 $H=\overline{G}$.

注
- 只有简单图才能定义补图;
- n 阶简单图和其补图的顶点集合是相同的;

- n 阶简单图任意一对顶点邻接的充分必要条件是这对顶点在其补图中不邻接；
- n 阶简单图的边数与其补图的边数之和等于 K_n 的边数；
- 补图是经常涉及的概念，在图结构分析中有重要的作用。

定义 1.6 (自补图) 如果图 G 与其补图同构，则称 G 为自补图。

注 并不是任意一个简单图都是自补图.

定理 1.1 若 n 阶图是 G 的自补图，则有：$n \equiv 0, 1(\text{mod}4)$.

证明. n 阶图是 G 的自补图, 则有 $m(G) + m(\overline{G}) = m(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)$

且 $m(G) = m(\overline{G})$

所以 $m(G) = \frac{1}{4}n(n-1)$. 因为 n 是正整数，所以：$n \equiv 0, 1(\text{mod}4)$.

1.1.4 顶点的度和图的度序列

顶点的度及其性质:

定义 1.7 (顶点的度) G 的顶点 v 的度 $d(v)$ 是指 G 中与 v 关联的边的数目，每个环计算两次.

注
- 分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最小与最大度.
- 奇数度的顶点称为奇点，偶数度的顶点称偶点.
- k-正则图：设 $G = (V, E)$ 为简单图，如果对所有 $v \in V$，有 $d(v) = k$，称图 G 为 k-正则图, 其边数和点数满足 $3n = 2m$.

定理 1.2 (握手定理) 图 $G = (V, E)$ 中所有顶点的度的和等于边数 m 的 2 倍，即：

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

证明. 由顶点度的定义知：图中每条边给图的总度数贡献 2 度，所以，总度数等于边数 2 倍.

推论 在任何图中，奇点个数为偶数.

证明. 设 V_1, V_2 分别是 G 中奇点集和偶点集. 则由握手定理有:

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

是偶数。由于上式左边第二项是偶数，所以左边第一项是偶数，于是奇度点个数必为偶数。

推论 正则图的阶数和度数不同时为奇数.

证明. 设 G 是 k-正则图，若 k 为奇数，则由上一个推论知正则图 G 的点数必为偶数

推论 δ 和 Δ 表示图 G 的最小与最大度，则

$$\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$$

证明. 由握手定理有

$$n\delta \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \leq n\Delta$$

所以，$\delta \leq \dfrac{2m}{n} \leq \Delta$

图的度序列及其性质：

定义 1.8 (度序列) 一个图 G 的各个点的度 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的度序列

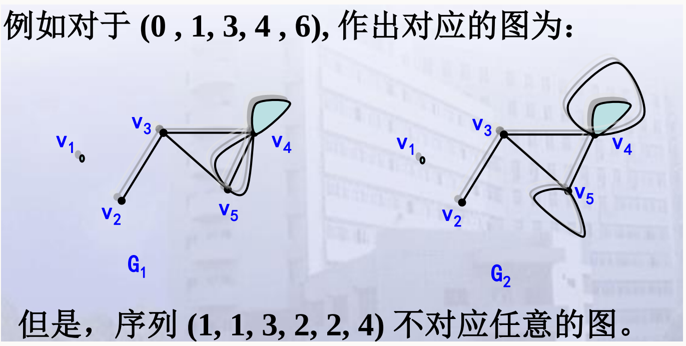
注
- 一个图的度序列与序列中元素排列无关；
- 给定一个图，只对应唯一一个度序列；
- 同构的图具有相同的度序列.

定理 1.3 非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的度序列的充分必要条件是序列中元素总和为偶数.

证明. 必要性：由握手定理立即得到

充分性：如果 $\sum_{i=1}^{N} d_i$ 为偶数，则数组中为奇数的数字个数必为偶数

根据度序列画图 (不太理解)：若 d_i 为偶数，则在与之对应的点作 $d_i/2$ 个环；对于剩下的偶数个奇数，两两配对后分别在每配对点间先连一条边，然后在每个顶点画 $d_j - 1/2$ 个环。该图的度序列就是已知数组。



图序列及其性质:

研究一个非负整数序列是否对应简单图的问题.

定义 1.9 (图序列) 一个非负整数组如果是某简单图的度序列，我们称它为可图序列，简称图序列.

定理 1.4 非负整数组

$$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n),d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n,\sum d_i=2m$$

是图序列的充分条件是:

$$\pi_1=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$$

是图序列.

定理 1.5 (厄多斯 1960) 非负整数组

$$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n),d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n,\sum d_i=2m$$

是图序列的充分条件是:

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\leq r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\},1\leq r\leq n-1$$

是图序列.

注 该定理只能做判定，证明困难.

图的频序列及其性质:

定义 1.10 (频序列) 设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 $d_1,d_2,\cdots,d_s$. 又设度为 d_i 的点有 b_i 个 $(i=1,2,\cdots,s)$，则

$$\sum_{i=1}^{s}b_i=n$$

故非整数组 $(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 是 n 的一个划分，称为 G 的频序列.

定理 1.6 一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同.

证明. 因为图 G 为简单图，所以: $\Delta(G)\leq n-1$.

- 情形 1: 若 G 没有孤立点，则 $1\leq d(v)\leq n-1,\forall v\in V(G)$; 由鸽笼原理: 必有两顶点度数相同;
- 情形 2: 若 G 只有一个孤立点，设 G_1 表示 G 去掉孤立点后的部分，则 $1\leq d(v)\leq n-2,\forall v\in V(G_1)$; 由鸽笼原理: 必有两顶点度数相同;

- 情形 3: 若 G 只有两个以上的孤立点，则定理显然成立.

定理 1.7 一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列 $(n \geq 2)$.

证明. 设图 G 的任一顶点 v 的度数为 k, 则该顶点在补图中的度数为 $n-1-k$. 因此：在 G 中有 b 个度数为 k 的顶点，则在补图中就有 b 个度数为 $n-1-k$ 个顶点.

1.2 子图与图的运算

1.2.1 子图的相关概念

子图的定义：

定义 1.11 (子图) 如果 $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$，且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的条数，则称 H 为 G 的子图，记为 $H \subseteq G$. 特别地，当 $H \subseteq G, H \neq G$ 时，称 H 是 G 的真子图，记为 $H \subset G$.

点与边的导出子图：

定义 1.12 (顶点导出子图) 如果 $V' \subseteq V(G)$，则以 V' 为顶点集，以两个端点均在 V' 中的边集组成的图，称为图 G 的点导出子图。记为：$G[V']$.

定义 1.13 (边导出子图) 如果 $E' \subseteq E(G)$，则以 E' 为顶点集，以两个端点均在 E' 中的边集组成的图，称为图 G 的边导出子图。记为：$G[E']$.

图的生成子图：

定义 1.14 (生成子图) 如果图 G 的一个子图包含 G 的所有顶点，称该子图为 G 的一个生成子图.

定理 1.8 简单图 $G=(n,m)$ 的所有生成子图个数为 2^m.

1.2.2 图运算

在图论中，将两个或更多的图按照某种方式合并，或者对一个图作某种形式的操作，可以得到很有意义的新图。将图合并或对一个图进行操作，称为图运算。

(1) 图的删点运算

设 $V' \subseteq V(G)$，在 G 中删去中的顶点和 G 中与之关联的所有边的操作，称为删点运算。记为 $G-V'$. 特别地，如果只删去一个点 v，则记为 $G-v$.

(2) 图的删边运算

设 $E' \subseteq E(G)$，在 G 中删去中的顶点和 G 中的所有边的操作，称为删边运算。记为 $G - E'$. 特别地，如果只删去一个边 e，则记为 $G - e$.

注 删点要删关联的边，删边不删关联的点！

(3) 图的并运算

设 G_1, G_2 是 G 的两个子图，G_1 与 G_2 并是指由 $V(G_1) \cup V(G_2)$ 为顶点集，以 $E(G_1) \cup E(G_2)$ 为边集组成的子图. 记为 $G_1 \cup G_2$. 特别地，如果 G_1, G_2 不相交 (没有公共顶点)，称它们的并为直接并，可以记为：$G_1 + G_2$.

(4) 图的交运算

设 G_1, G_2 是 G 的两个子图，G_1 与 G_2 交是指由 $V(G_1) \cap V(G_2)$ 为顶点集，以 $E(G_1) \cap E(G_2)$ 为边集组成的子图. 记为 $G_1 \cap G_2$.

(5) 图的差运算

设 G_1, G_2 是两个图，G_1 与 G_2 的差是指从 G_1 中删去 G_2 中的边得到的新图。记为 $G_1 - G_2$.

(6) 图的对称差运算 (或环和运算)

设 G_1, G_2 是两个图，G_1 与 G_2 的对称差定义为：

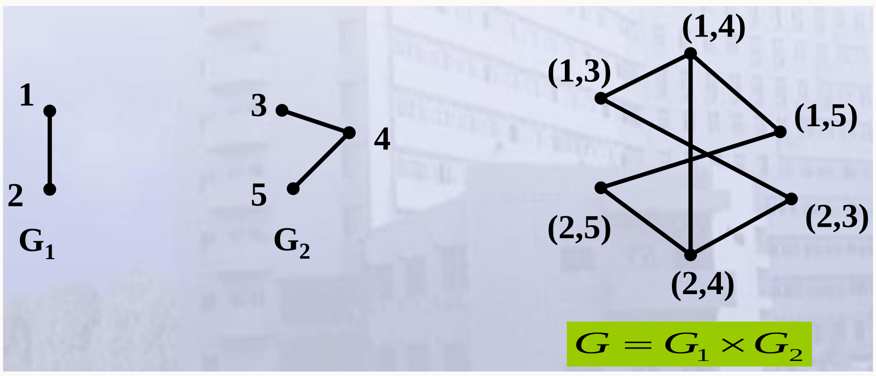
$$G_1 \Delta G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$$

(7) 图的联运算

设 G_1, G_2 是两个不相交的图，作 $G_1 + G_2$，并且将 G_1 中每个顶点和 G_2 中的每个顶点连接，这样得到的新图称为 G_1 与 G_2 的联图。记为：$G_1 \vee G_2$. $n = n_1 + n_2, m = m_1 + m_2 + n_1 n_2$

(8) 图的积图

设 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$，是两个图。对点集 $V = V_1 \times V_2$ 的任意两个点 $u = (u_1, u_2)$ 与 $v = (v_1, v_2)$，当 $(u_1 = v_1和u_2 \mathrm{adj} v_2$ 或 $(u_2 = v_2和u_1 \mathrm{adj} v_1$ 时，把 u 与 v 连接. 如此得到的新图称为 G_1 和 G_2 的积图. 记为：$G = G_1 \times G_2$. $n = n_1 n_2, m = n_1 m_2 + n_2 m_1$

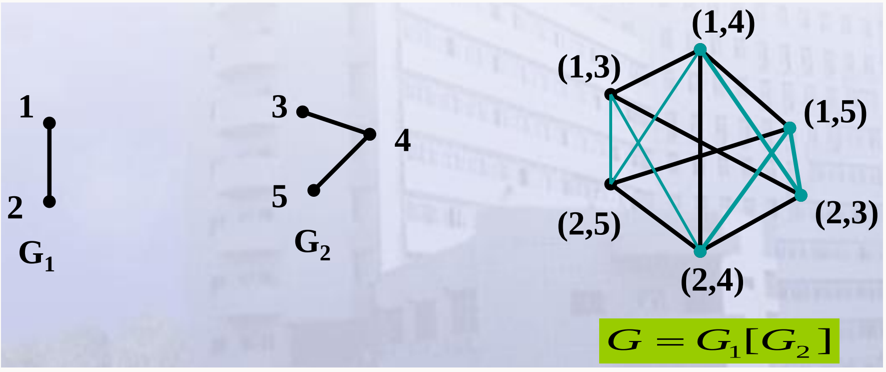


注 超立方体

n 方体Q_n: $Q_1 = K_2, Q_2 = K_2 \times K_2, \cdots, Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$. Q_n 有 2^n 个点，用 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 来标定，a_i 是 0 或 1. 如果 Q_n 两个点的二进制表示只有一位不同，则这两个点邻接. $Q_n(n > 1)$ 是偶图

(9) 图的合成图

设 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$, 是两个图。对点集 $V = V_1 \times V_2$ 的任意两个点 $u = (u_1, u_2)$ 与 $v = (v_1, v_2)$，当 $u_1 \mathrm{adj} v_1$ 或 $(u_1 = v_1$和$u_2 \mathrm{adj} v_2$ 时，把 u 与 v 连接. 如此得到的新图称为 G_1 和 G_2 的合成图. 记为：$G = G_1[G_2]$



1.3 路与图的连通性

1.3.1 路与圈相关概念

(1) 图中的途径：指一个有限非空序列，顶点和边交替。途径中边数称为途径的长度；v_0, v_k 分别称为途径的起点与终点，其余顶点称为途径的内部点.

(2) 图中的迹：边不重复的途径称为图的一条迹.

(3) 图中的路：顶点不重复的途径称为图的一条路.

注 • 路是途径，也是迹，迹是途径；

• 起点与终点重合的途径、迹、路分别称为图的闭途径、闭迹与圈。闭迹也称为回路. 长度为 k 的圈称为 k 圈，k 为奇数时称为奇圈，k 为偶数时称为偶圈.

1.3.2 连通性的相关概念

(1) 图中两顶点的距离：图中顶点 u 与 v 的距离：u 与 v 间最短路的长度称为 u 与 v 间距离。记为 $d(u, v)$，如果 u 与 v 间不存在路，定义 $d(u, v) = \infty$.

(2) 图中两顶点的连通性：如果在 G 中存在 (u, v) 路，则规定 u 和 v 是连通的.

(3) 连通图：如果对 G 中每一对顶点 u, v 都有一条 (u, v) 路，则称 G 为连通图，否则称为非连通图.

(4) 连通分支: 非连通图中每一个极大连通部分，称为 G 的连通分支。G 的连通分支的个数，称为 G 的分支数，记为 $\omega(G)$.

(5) 图的直径: 连通图 G 的直径定义为:

$$d(G) = \max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$$

如果 G 不连通，图 G 的直径定义为 $d(G) = \infty$. .

1.3.3 连通性性质

定理 1.9 若图 G 不连通，则其补图连通.

证明. 如果 u, v 属于 G 的同一分支，设 w 是与 u, v 处于不同分支中的点，则在 G 的补图中，u 与 w, v 与 w 分别邻接，于是，u 与 v 在 G 的补图中是连通的。

如果 u 与 v 在 G 的两个不同分支中，则在 G 的补图中必然邻接，因此，也连通。

1.3.4 偶图的判定定理

定理 1.10 一个图是偶图当且当它不包含奇圈

证明. 略.

1.4 图的代数表示

1.4.1 图的邻接矩阵

定义 1.15 设 G 为 n 阶图,$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, 邻阶矩阵 $A(G) = (a_{ij})$，其中$a_{ij} = l$ 表示 v_i 与 v_j 的边数，当 $l = 0$ 时，表示 v_i 与 v_j 不邻接.

性质:

(1) 非负性与对称性.

(2) 同一图的不同形式的邻接矩阵是相似矩阵.

(3) 如果 G 为简单图，则 $A(G)$ 为布尔矩阵; 行和 (列和) 等于对应顶点的度数; 矩阵元素总和为图的总度数，也就是 G 的边数的 2 倍.

(4) G 连通的充分必要条件是: $A(G)$ 不能与如下矩阵相似:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

证明. 略.

注 非连通图的邻接矩阵一定能够写成准对角矩阵形式.

(5)

定理 1.11 设 $A^k(G)=(a_{ij}^{(k)})$，则 $a_{ij}^{(k)}$ 表示顶点 v_i 到 v_j 的途径长度为 k 的途径条数.

证明. 略.

推论 设 A 为简单图 G 的邻接矩阵，则：A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数，A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形个数的 2 倍数

1.4.2 图的关联矩阵

定义 1.16 设 G 是 (n,m) 阶图. 定义 G 的关联矩阵：$M(G)=(a_{ij})_{(n\times m)}$

其中：$a_{ij}=l,\quad l$ 表示 v_i 和 e_j 关联的次数 (0,1, 或 2(环))

性质:

(1) 关联矩阵的元素为 0，1 或 2；
(2) 关联矩阵的每列和为 2；每行的和为对应顶点度数.

1.4.3 图的邻接谱

定理 1.12 设 $A(G)$ 的谱为 $SpecA(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n\end{pmatrix}$, 则

$$\sum_{i=1}^{s} m_i\lambda_i^2=2m$$

其中 m_i 是特征值 λ_i 的重数，m 为 G 的边数.

注 图 G 邻接矩阵 A 所有特征值的平方和为图 G 边数的 2 倍.

例 1.1 若 $G=K_n$，则 $SpecA(K_n)=\begin{pmatrix}-1 & n-1\\ n-1 & 1\end{pmatrix}$.

注 K_n 的最大特征值为 $n-1$.

1.5 最短路及其算法

1.5.1 几个相关概念

(1) 边赋权图：在图 G 的每条边 e 上赋予一个实数 $\omega(e)$ 后, 称 G 为边赋权图。

(2) 边赋权图中的最短路：设 G 为边赋权图，u 与 v 是 G 中两点，在连接 u 与 v 的所有路中，路中各边权值之和最小的路，称为 u 与 v 间的最短路.

1.5.2 最短路算法

注 主要考填空题，肉眼目测最短路.

1.6 极图

定义 1.17 (1) 若简单图 G 的点集 V 有一个划分：$V=\bigcup_{i=1}^{l} V_i, V_i \cap V_j=\phi, i \neq j$，且所有的 V_i 非空，V_i 内的点均不邻接，称 G 是一个 l 部图.

(2) 如果在一个 l 部图 G 中，任意部 V_i 中的每个顶点同 G 中其它各部中的每个顶点均邻接，称 G 为完全 l 部图. 记作：$G=K_{n_1,n_2,\cdots,n_l}(n_i=|V_i|, 1 \leq i \leq n)$. 显然 $|V|=\sum_{i=1}^{l} n_i$ 和 $m(G)=\sum_{1 \leq i<j \leq l} n_i n_j$.

定理 1.13 n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数 $m=n_1 n_2$，且有 $m \leq\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

证明. $m=n_1 n_2$ 显然. 下面证明第二结论:

$$m\left(K_{n_1,n_2}\right)=m\left(K_{n-n_2,n_2}\right)=\left(n-n_2\right) n_2=\frac{n^2}{4}-\left(\frac{n}{2}-n_2\right)^2 \leq\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$$

定义 1.18 如果在一个 n 个点的完全 l 部图 G 中有:

$$\begin{aligned}
& n=kl+r, 0 \leq r<l, \\
& \left|V_1\right|=\left|V_2\right|=\cdots=\left|V_r\right|=k+1, \\
& \left|V_{r+1}\right|=\left|V_{r+2}\right|=\cdots=\left|V_l\right|=k,
\end{aligned}$$

则称 G 为 n 阶完全 l 几乎等部图，记为 $T_{l,n}$. 所有 l 部顶点数相等，n 阶完全 l 几乎等部图称为，n 阶完全 l 等部图.

定理 1.14 n 阶 l 部图 G 有最多边数的充要条件是 $G \cong T_{l,n}$.

1.6.1 托兰定理

定理 1.15 若 G 度弱于 H，一定有 $m(G) \leq m(H)$.

注 反过来不一定，因为两个图可能不存在度弱关系.

定理 1.16 若 n 阶简单图 G 不包含 K_{l+1}，则 G 度弱于某个完全 l 部图 H，且若 G 具有与 H 相同的度序列，则 $G \cong H$.

定理 1.17 (托兰定理) 若 n 阶简单图 G 不包含 K_{l+1}，则:

$$m(G) \le m(T_{l,n})$$

仅当 $G \cong T_{l,n}$ 时，有 $m(G) = m(T_{l,n})$.

定理 1.18 n 阶简单图 G 不包含 K_{l+1}，则 $m(T_{l,n}) = C_l^2 \left(\frac{n}{l}\right)^2$

例 1.2 (1) n 阶简单图 G 不包含 K_3, 则 G 最多有 $\frac{n^2}{4}$ 条边.
(2) 9 阶简单图 G 不包含 K_4, 则 G 最多有 27 条边.

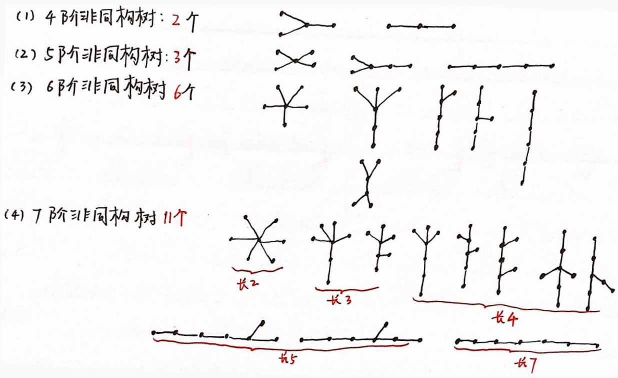
2 树

2.1 树的概念和性质

2.1.1 树的概念

定义 2.1 (1) 不包含圈的图称为无圈图，连通的无圈图称为树，树通常用字母 T 表示.
(2) 一个无圈图称为森林，树也是森林.
(3) 在一棵树中，度数为 1 的顶点称为树叶，度数大于 1 的顶点称为分支点.
(4) 平凡图称为平凡树.

注 (1) 树和森林都是单图且都是偶图.
(2) 非同构的 4,5,6,7 阶树的棵数分别为 2,3,6,11.



2.1.2 树的性质

定理 2.1 每棵非平凡树至少有两片树叶.

证明. 设 $P = v_1v_2\cdots v_k$ 是非平凡树 T 中一条最长路，则 v_1 与 v_k 在 T 中的邻接点只能有一个，否则，要么推出 P 不是最长路，要么推出 T 中存在圈，这都是矛盾！即说明 v_1 与 v_k 是树叶。

例 2.1 G 是树且 $\Delta \geq k$，则 G 至少有 k 片叶子.

证明. 若不然, 设 G 有 n 个顶点, m 条边且至多 $k-1$ 片叶子. 由于 $\Delta \geq k$, 于是由握手定理得

$$2m = \sum d(v) \geq 1\cdot(k-1) + 2\cdot(n-k) + k\cdot 1 = 2n-1 > 2n-2$$

所以, $m > n-1$, 与 G 是树矛盾!

定理 2.2 图 G 是树当且仅当 G 中任意两点都被唯一的路连接.

证明. (1) 必要性：图 G 是树，若不然，设 $P1$ 与 $P2$ 是连接 u 与 v 的两条不同的路。则由这两条路的全部或部分将构成一个圈，这与 G 是树相矛盾.

(2) 充分性：首先，因 G 的任意两点均由唯一路相连，所以 G 是连通的。其次，若 G 中存在圈，则在圈中任取点 u 与 v，可得到连接 u 与 v 的两条不同的路，与条件矛盾 (定义，连通的无圈图即为树)。

注 G 连通，删去任一边便不连通.

定理 2.3 设 T 是 (n, m) 树，则：

$$m = n - 1$$

证明. 对 n 作数学归纳.

当 $n = 1$ 时，等式显然成立；

设 $n = k$ 时等式成立。考虑 $n = k+1$ 的树 T. 由定理2.1 T 中至少有两片树叶，设 u 是 T 中树叶，考虑 $T1 = T - u$, 则 $T1$ 为 k 阶树，于是 $m(T1) = k-1$, 得 $m(T) = k$.

推论 由 k 棵树组成的森林满足：$m = n - k$. 其中 n 为 G 的顶点数，m 为 G 的边数.

证明. 设森林中每棵树的顶点数与边数分别是 n_i 和 $m_i(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则由定理2.1知,

$$m_i = n_i - 1, i = 1, 2, \cdots, k$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k,$$

即

$$m = n - k$$

定理 2.4 每个 n 阶连通图的边数至少为 $n-1$.

证明. 如果 n 阶连通图没有一度顶点，那么由握手定理有：

$$m(G) = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \geq n$$

如果 G 有一度顶点. 对顶点数作数学归纳.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设当 $n=k$ 时，结论成立，则

当 $n=k+1$ 时，设 u 是 G 的一度顶点，则 $G-u$ 为具有 k 个顶点的连通图.

若 $G-u$ 有一度顶点，则由归纳假设，其边数至少 $k-1$, 于是 G 的边数至少有 k 条；

若 $G-u$ 没有一度顶点，则由握手定理：$m(G-u) = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G-u)} d(v) \geq k$, 所以 G 至少有 $k+1$ 条边.

而当 G 是树时，边数恰为 $n-1$. 所以 n 阶连通图 G 至少有 $n-1$ 条边 (所以，树也被称为最小连通图.)

定理 2.5 任意树 T 的两个不邻接顶点之间添加一条边后，可以得到唯一圈.

证明. 设 u 与 v 是树 T 的任意两个不邻接顶点，由定理2.2 知：有唯一路 P 连接 u 与 v. 于是 $P\cup\{uv\}$ 是一个圈.

显然，由 P 的唯一性也就决定了 $P\cup\{uv\}$ 的唯一性.

2.2 树的中心和形心

2.2.1 树的中心概念与性质

(1) 图的顶点的离心率：

$$e(v) = \max\{d(u,v)|u\in V(G)\}$$

(2) 图的半径：

$$r(G) = \min\{e(v)|v\in V(G)\}$$

(3) 图的直径: 最大离心率

(4) 图的中心点: 离心率等于半径的点 $e(v) = r(G)$

(5) 图的中心: 中心点的集合

定理 2.6 每棵树的中心由一个点或两个相邻点组成.

2.2.2 树的形心概念与性质

定义 2.2 设 u 是树 T 的任意一个顶点，树 T 在顶点 u 的分支是指包含 u 作为一个叶点的极大子树，其分支数为顶点 u 的度数；树 T 在 u 点的分支中边的最大数目称为点 u 的权；树 T 中权值最小的点称为它的一个形心点。全体形心点的集合称为树 T 的形心.

定理 2.7 每棵树的形心由一个点或两个相邻点组成..

2.3 生成树

2.3.1 生成树的概念和性质

定义 2.3 图 G 的一个生成子图 T 如果是树，称它为 G 的一棵生成树；若 T 为森林，称它为 G 的一个生成森林. 生成树的边称为树枝，G 中非生成树的边称为弦.

定理 2.8 每个连通图至少包含一棵生成树.

证明. 如果连通图 G 是树，则其本身是一棵生成树；

若连通图 G 中有圈 C，则去掉 C 中一条边后得到的图仍然是连通的，这样不断去掉 G 中圈，最后得到一个 G 的无圈连通子图 T，它为 G 的一棵生成树.

推论 若 G 是 (n, m) 连通图，则 $m \geq n-1$.

2.3.2 生成树的计数

凯莱递推计数法:

定义 2.4 图 G 的边 e 称为被收缩，是指删掉 e 后，把 e 的两个端点重合，如此得到的图记为 $G \cdot e$.

定理 2.9 (Cayley) 设 e 是 G 的一条边，则有:

$$\boxed{\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)}$$

证明. $\tau(G-e)$ 是 G 不包含边 e 生成树的棵数. $G \cdot e$ 表示在 G 中删去 e 并重合其端点，则 $\tau(G \cdot e)$ 是 G 包含边 e 生成树的棵数. 故 G 生成数的棵数 $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$.

见 PPT 例题.

矩阵树定理:

定理 2.10 (矩阵树定理) 设 G 是顶点集合为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 的图, 设 $A=(a_{ij})$ 是 G 的邻接矩阵, $C=(c_{ij})$ 是 n 阶方阵, 其中:

$$c_{ij}=\begin{cases} d(v_i) & i=j \\ -a_{ij} & i\neq j \end{cases}$$

则 G 的生成树棵数为 C 的任意一个代数余子式的值.

注 矩阵 C 又称为图的拉普拉斯矩阵, 即

$$C=D(G)-A(G)$$

其中, $D(G)$ 是图的度对角矩阵, 即主对角元为对应顶点度数, 其余元素为 0.

定理 2.11 $\tau(K_n)=n^{n-2} \quad \tau(K_{m,n})=n^{m-1}m^{n-1}$

证明. 使用矩阵树定理证明

写出拉普拉斯矩阵 C, 然后计算某行某列的余子式即可得证.

2.3.3 回路系统简介

定义 2.5 设 T 是连通图 G 的一棵生成树, 把属于 G 但不属于 T 的边称为 G 关于 T 的连枝, T 中的边称为 G 关于 T 的树枝

定义 2.6 设 T 是连通图 G 的一棵生成树, 由 G 的对应于 T 一条连枝与 T 中树枝构成的唯一圈 C, 称为 G 关于 T 的一个基本圈或基本回路. 若 G 是 (n,m) 连通图, 把 G 对应于 T 的 $m-n+1$ 个基本回路称为 G 对应于 T 的基本回路组, 记为 C_f .

定理 2.12 连通图 G 的任一回路均可表示成若干个基本回路的对称差

2.4 最小生成树

定义 2.7 在连通边赋权图 G 中求一棵总权值最小的生成树. 该生成树称为最小生成树或最小代价树.

2.4.1 克鲁斯克尔算法

算法步骤:

(1) 选择边 e_1, 使得其权值最小;

(2) 若已经选定边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$, 则从 $E-\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ 中选择边 e_{k+1}, 使得:

- $G[e_1, e_2, \cdots, e_{k+1}]$ 为无圈图;
- e_{k+1} 的权值 $w(e_{k+1})$ 尽可能小.

(3) 当 (2) 不能进行时，停止.

注 由克鲁斯克尔算法得到的任何生成树一定是最小生成树.

2.4.2 管梅谷的破圈法

破圈法求最小生成树的求解过程是：从赋权图 G 的任意圈开始，去掉该圈中权值最大的一条边，称为破圈。不断破圈，直到 G 中没有圈为止，最后剩下的 G 的子图为 G 的最小生成树.

2.4.3 Prim 算法

算法步骤:

(1) 对于连通赋权图 G 的任意一个顶点 u，选择与点 u 关联的且权值最小的边作为最小生成树的第一条边 e_1;

(2) 在接下来的边 $G[e_2, e_3, \cdots, e_m]$，在与一条已经选取的边只有一个公共端点的的所有边中，选取权值最小的边. 直到找到最小生成树.

2.4.4 根树简介

定义 2.8 (1) 对于有向树T 的顶点 v 来说，存在入度和出度.

(2) 一棵非平凡的有向树 T，如果恰有一个顶点的入度为 0，而其余所有顶点的入度为 1，这样的的有向树称为根树. 其中入度为 0 的点称为树根，出度为 0 的点称为树叶，入度为 1，出度大于 1 的点称为内点. 又将内点和树根统称为分支点.

(3) 对于根树 T，顶点 v 到树根的距离称为点 v 的层数；所有顶点中的层数的最大者称为根树 T 的树高.

(4) 对于根树 T，若规定了每层顶点的访问次序，这样的根树称为有序树.

(5) 对于根树 T，若每个分支点至多 m 个儿子，称该根树为 m 元根树；若每个分支点恰有 m 个儿子，称它为 完全 m 元根树.

注 高度为 h 的完全二元树最多有 $h+1$ 片树叶.

对于完全 m 元树 T，有如下性质:

定理 2.13 在完全 m 元树 T 中，若树叶数为 t，分支点数为 i，则：

$$\boxed{(m-1)i = t-1}$$

证明. 由树的性质得：$m(T) = n-1 = t+i-1$

由握手定理得：$2m(T) = t + m + (i-1)(m+1)$

联立得结论.

有序树转化为二元树:长子兄弟法.

二元树的遍历: 先序遍历、中序遍历、后序遍历.

2.4.5 最优二元树

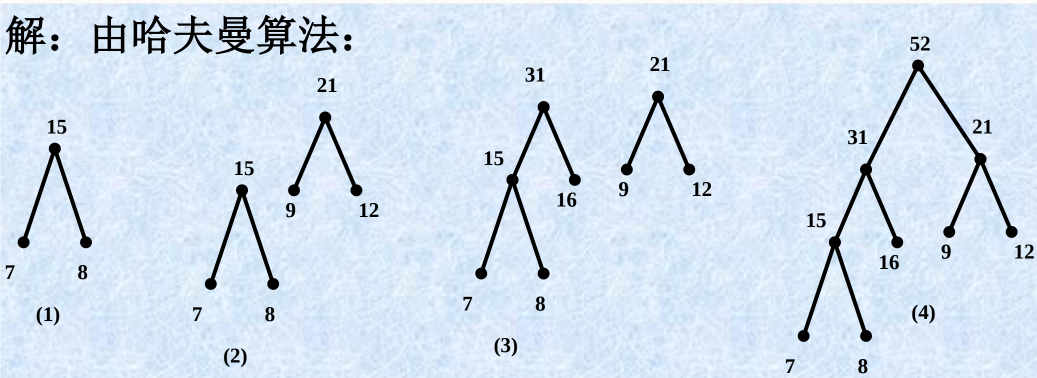
定义 2.9 设 T 是一棵有 t 片树叶的二元树，若对 T 的所有 t 片树叶赋以权值 (实数) $w_1, w_2, \cdots, w_t$，则称 T 为带权二元树；若带有权 w_i 的树叶的层数为 $l(w_i)$，则称

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(w_i)$$

为 T 的权；$W(T)$ 最小的二元树称为最优树.

哈夫曼算法.

例 2.2 求带权为：7、8、9、12、16 的最优树.



设求得的最优二元树为 T，则

$W(T) = (7+8)\times 3 + (16+9+12)\times 2 = 119$

3 图的连通度

3.1 割边、割点和块

3.1.1 割边及其性质

定义 3.1 设 e 是图 G 的一条边，若 $\omega(G-e)>\omega(G)$，则称 e 为 G 的割边

定理 3.1 边 e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中.

推论 e 为连通图 G 的一条边，如果 e 含于 G 的某圈中，则 $G-e$ 连通.

例 3.1 求证: (1) 若 G 的每个顶点的度数均为偶数，则 G 没有割边; (2) 若 G 为 k 正则二部图 $(k\geq 2)$，则 G 无割边.

证明. (1) 若不然，设 $e=uv$ 为 G 的割边. 则 $G-e$ 的含有顶点 u(或 v) 的那个分支中点 u(或 v) 的度数为奇，而其余点的度数为偶数，与 “度数为奇数的顶点的个数为偶数” 相矛盾!

(2) 若不然，设 $e=uv$ 为 G 的割边. 取 $G-e$ 的其中一个分支 G_1, 显然，G_1 中只有一个顶点的度数是 $k-1$, 其余点的度数为 k. 并且 G_1 仍然为偶图.

假若 G_1 的两个顶点子集包含的顶点数分别为 s 与 t，并且 s 包含顶点度为 $k-1$ 的点，那么有：$ks-1=|E(G_1)|=kt$. 但是因 $k\geq 2$, 所以等式不能成立!

注 割点有两类，一类是自环，一类是破坏连通性的点.

3.1.2 割点及其性质

定义 3.2 在 G 中，如果 $E(G)$ 可以划分为两个非空子集 E_1 与 E_2, 使 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 以点 v 为公共顶点，称 v 为 G 的一个 割点.

定理 3.2 G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点，当且仅当

$$\omega(G-e)>\omega(G)$$

定理 3.3 v 是树 T 的顶点，则 v 是割点，当且仅当 v 是树的分支点.

定理 3.4 设 v 是无环连通图 G 的一个顶点，则 v 是 G 的割点，当且仅当 $V(G-v)$ 可以划分为两个非空集 V_1 与 V_2, 使得对任意 $x\in V_1, y\in V_2$, 点 v 在每一条 (x,y) 路上。

例 3.2 求证：无环非平凡连通图至少有两个点不是割点.

证明. 由于 G 是无环非平凡连通图，所以存在非平凡生成树．非平凡生成树至少两片树叶，它们不能为生成树的割点．显然，它们也不能为 G 的割点．

注 非平凡树一定有割边，不一定有割点 (K_2).

定理 3.5 (割点与割边关系) (1) 没有割点 $\not\Rightarrow$ 没有割边 (K_2).

(2) 有割边 $\not\Rightarrow$ 有割点 (八字形的图).

(3) 阶数 $n \geq 3$ 的无环连通图, 有割边 $\Rightarrow$ 有割点.

(4) 阶数 $n \geq 3$ 的无环连通图, 有割点 $\not\Rightarrow$ 有割边.

3.1.3 块及其性质

定义 3.3 没有割点的连通图称为是一个块图

定理 3.6 若 $|V(G)| \geq 3$, 则 G 是块，当且仅当 G 无环且任意两顶点位于同一圈上.

定理 3.7 点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块.

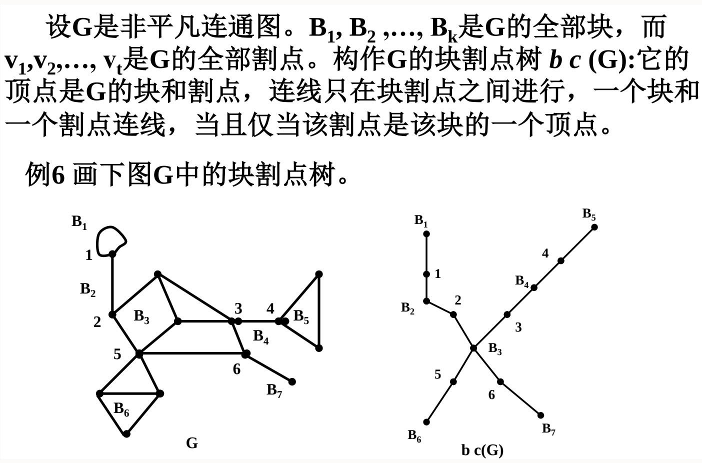
注 (1) $(m = 1)$ 块，要么是割边，要么是环；

(2) $(k = 1)$ 块要么是孤立点，要么是环；

(3) $(k \geq 2)$ 块无环；

(4) $(k \geq 3)$ 块无割边，无自环，有圈.

块割点树:



3.2 连通度

定义 3.4 (1) 给定连通图 G, 设 $V' \subseteq V(G)$, 若 $G - V'$ 不连通，称 V' 为 G 的一个点割集, 含有 k 个顶点的点割集称为 k 顶点割. G 中点数最少的顶点割称为最小顶点割.

(2) 在 G 中，若存在顶点割，称 G 的最小顶点割的顶点数称为 G 的连通度；否则称 $n-1$ 为其点连通度.G 的点连通度记为 $k(G)$，简记为 k. 若 G 不连通，$k(G)=0$.

(3) 给定连通图 G，称使 $G-E'$ 不连通的 G 的边子集 E' 为 G 的割边集，含有 k 条边的边割集称为 k 边割.G 中边数最少的边割称为最小边割.

(4) 在 G 中，最小边割集所含边数称为 G 的边连通度. 边连通度记为 $\lambda(G)$. 若 G 不连通或 G 是平凡图，则定义 $\lambda(G)=0$.

(5) 若一个图的连通度至少为 k, 则称该图是 k 连通的 ($k(G)\geq k$); 若一个图的边连通度至少为 k, 则称该图是 k 边连通的 ($\lambda(G)\geq k$).

注 (1) k 连通：要想破坏连通性，至少要删去 k 个点.

(2) K_2 连通、无割点，但连通度为 1(k 通度的图不一定存在 k 点割).

(3) k 边连通：要想破坏连通性，至少要删去 k 条边.

(4) k 连通一定是 k 边连通的.

(5) $k(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$.

(6) $k(C_n)=2(n\geq 3); \lambda(C_n)=2(n\geq 2)$. C_n 为 n 圈.

定理 3.8 (惠特尼 1932) 对任意图 G，有：

$$k(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$$

定理 3.9 设 G 是 (n,m) 连通图，则：

$$k(G)\leq\left[\frac{2m}{n}\right]$$

证明. 由握手定理得 $2m=\sum d(v)\geq n\delta\Rightarrow\delta\leq\frac{2m}{n}$

由定理3.8得 $k(G)\leq\delta$，考虑到 $k(G)$ 是整数，所以

$$k(G)\leq\left[\frac{2m}{n}\right]$$

引理 3.10 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)\geq\left[\frac{n}{2}\right]$, 则 G 连通.

证明. 若 G 不连通，则 G 至少有两个连通分支，于是，至少有一个分支 H 满足 $|V(H)|\leq\left[\frac{n}{2}\right]$. 因为 G 是简单图，从而

$$\varDelta(H)\leq\left[\frac{n}{2}\right]-1<\left[\frac{n}{2}\right]$$

于是

$$\delta(G)\leq\delta(H)\leq\varDelta(H)<\left[\frac{n}{2}\right]$$

这与已知矛盾，所以 G 必连通.

定理 3.11 设 G 是 n 阶简单图，对正整数 $k < n$, 若

$$\delta(G) \geq \frac{n+k-2}{2}$$

则 G 是 k 连通的.

定理 3.12 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G) \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$.

例 3.3 n 阶 k 连通图至少有 $\dfrac{kn}{2}$ 条边.

3.3 敏格尔定理

定义 3.5 设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点，S 表示 G 的一个顶点子集或边子集，如果 u 与 v 不在 $G-S$ 的同一分支上，称 S 分离 u 和 v.

定理 3.13 (敏格尔 1902—1985) (1) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离点 x 与 y 的最少点数等于独立的 (x,y) 路的最大数目；

(2) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不同顶点，则 G 中分离点 x 与 y 的最少边数等于 G 中边不重的 (x,y) 路的最大数目

定理 3.14 (惠特尼 1932) 一个非平凡的图 G 是 $k(k \geq 2)$ 连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点 u 与 v 间，至少存在 k 条内点不交的 (u,v) 路.

定理 3.15 (惠特尼 1932) 一个非平凡的图 G 是 $k(k \geq 2)$ 连通的，当且仅当 G 的任意两个顶点 u 与 v 间，存在 k 条边不重的 (u,v) 路.

注 由“任意两个不相邻的顶点之间存在 k 条独立的路”必能推出“任意两个相邻的顶点之间也存在 k 条独立的路”.

推论 对于一个阶至少为 3 的无环图 G，下面三个命题等价:

(1) G 是 2 连通的；
(2) G 中任意两点位于同一个圈上；
(3) G 无孤立点，且任意两条边在同一个圈上.

4 Euler 图与 Hamilton 图

4.1 Euler 图与中国邮路问题

4.1.1 Euler 图及其性质

定义 4.1 对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图. 欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路. 对于连通图 G，如果 G 中存在经过每

条边的迹，则称该迹为 G 的一条欧拉迹.

定理 4.1 下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：

(1) G 是欧拉图；

(2) G 的顶点度数为偶数；

(3) G 的边集合能划分为圈.

注 欧拉图一定没有割边，有可能有割点 (联系例3.1).

推论 (1) 连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 的顶点度数为偶数.

(2) 连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数.

注 (1) 欧拉图必存在欧拉迹，非欧拉图可能存在欧拉迹. 非平凡欧拉图一定有圈.

(2) 图 G 有欧拉迹当且仅当 G 能"一笔画". 若奇度点数为零，则一笔画与起点无关；若奇度点数为 2，则一笔画的起点与终点均为奇点.

4.1.2 Fleury 算法

该算法解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法. 方法是尽可能避割边行走. 算法步骤：

(1) 任意选择一个顶点 v_0, 置 $w_0 = v_0$;

(2) 假设迹 $wi = v_0e_1v_1 \cdots e_iv_i$ 已经选定，那么按下述方 法从 $E - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取边 e_{i+1}:

- e_{i+1} 与 v_i 相关联；
- 除非没有别的边可选择，否则 e_{i+1} 不能是 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边.

(3) 当(2)不能进行时，停止.

例 4.1 证明：若 G 有 $2k > 0$ 个奇数顶点，则存在 k 条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，使得：

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots \cup E(Q_k)$$

证明. 不失一般性，只就 G 是连通图进行证明.

设 $G = (n, m)$ 是连通图. 令 $v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{2k}$ 是 G 的所有奇度点.

在 v_i 与 v_{i+k} 间连新边 e_i 得图 $G^*(1 \leq i \leq k)$. 则 G^* 是欧拉图，因此，由 Fleury 算法得欧拉环游 C.

在 C 中删去 e_i $(1 \leq i \leq k)$. 得 k 条边不重的迹 Q_i $(1 \leq i \leq k)$:

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots \cup E(Q_k)$$

4.1.3 中国邮路问题

针对边赋权图的非欧拉图.

定理 4.2 若 W 是包含图 G 的每条边至少一次的闭途径，则 W 具有最小权值当且仅当下列两个条件被满足：

(1) G 的每条边在 W 中最多重复一次；

(2) 对于 G 的每个圈上的边来说，在 W 中重复的边的总权值不超过该圈非重复边总权值.

注 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加 $k/2$ 条边才能使 G 具有欧拉回路.

例 4.2 如果一个非负权的边赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v, 设计一个求其最优欧拉环游的算法.

解: 算法步骤：

(1) 在 u 与 v 间求出一条最短路 P; (最短路算法)

(2) 在最短路 P 上，给每条边添加一条平行边得 G 的欧拉母图 G^*;

(3) 在 G 的欧拉母图 G^* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉环游.

4.2 Hamilton 图

定义 4.2 对于连通图 G，经过 G 中每个点仅一次的圈 (路)称为 G 的Hamilton 圈 (路)，存在 Hamilton 圈的图称为 Hamilton 图，简称 H 图. Hamilton 路简称 H 路.

注 H 图可能有割点，如 K_3 加一个自环.

定理 4.3 (必要条件) 若 G 为 H 图，则对 $V(G)$ 的任一非空顶点子集 S，有：

$$\omega(G-S) \leq |S|$$

证明. 设 C 是 G 的 H 圈，则对 $V(G)$ 的任意非空子集 S, 容易知道：

$$\omega(C-S) \leq |S|$$

又因 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图，故有

$$\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|.$$

注 不等式为 G 是 H 图的必要条件，即不等式不满足时，可断定对应图是非 H 图; 但满足不等式，不一定是 Hamilton 图，如彼德森图. 彼得森图不是 H 图，是超 H 图.

定理 4.4 (充分条件) 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶简单图，

(1) 若 $\delta \geq \frac{n}{2}$，则 G 是 H 图(Dirac 定理).

(2) 若对 G 中任意不相邻顶点 u 和 v，都有 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 是 H 图(Ore 定理).

定理 4.5 (充要条件) (帮迪——闭包定理) 图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图.

推论 (充分条件) 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶简单图，若图 G 的闭包 $\hat{G}$ 是完全图，则 G 是 H 图.

注 任意图 G 的闭包是唯一的. 一个图的闭包不一定是完全图.

定理 4.6 (充分条件) 设简单图 G 的度序列是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, 这里，$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, 并且 $n \geq 3$. 若对任意的 $m < \frac{n}{2}$, 或有 $d_m > m$, 或有 $d_{n-m} \geq n-m$, 则 G 是 H 图 (且 G 的闭包为完全图).

例 4.3 教材 P84 例题对定理4.6的应用

4.3 度极大非 Hamilton 图

定义 4.3 图 G 称为度极大非 H 图，如果它的度不弱于其它非 H 图.

定义 4.4 ($C_{m,n}$ 图) 对于 $1 \leq m < \frac{n}{2}$, 则

$$C_{m,n} = K_m \vee (\overline{K}_m + K_{n-2m})$$

引理 4.7 对于 $1 \leq m < \frac{n}{2}$ 的图 $C_{m,n} = K_m \vee (\overline{K}_m + K_{n-2m})$ 是非 H 图.

证明. 由定义知，在 $C_{m,n}$ 中属于 K_m 的任意一点 v, 其度数均为 $d(v) = m + (m-1) + (n-2m) = n-1$. 若 S 是 K_m 的顶点集，则 $\omega(C_{m,n} - S) = m+1 > |S| = m$，由定理4.3知 $C_{m,n}$ 是非 H 图.

定理 4.8 (Chvátal,1972) 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.

证明. 设 G 是度序列为 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 的非 H 图，这里 $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n, n \geq 3$. 由定理4.6知，存在 $m \geq \frac{n}{2}$ 使得 $d_m \leq m$ 且 $d_{n-m} < n-m$. 因此 G 的度序列弱于下列序列:

$$(m, \cdots, n-m-1, \cdots, n-m-1, n-1, \cdots, n-1)$$

这个序列有 m 项等于 m, 有 $n-2m$ 项等于 $n-m-1$，有 m 项等于 $n-1$，因此它就是 $C_{m,n}$ 的度序列.

注 对于固定正整数 n, 只要 $1 \leq m < \frac{n}{2}$，则 $C_{m,n}$ 均是度极大非 H 图，随 m 的不同取值就得到 n 点度极大非 H 图族. 定理4.8的逆不成立，如：5 阶圈 C_5 的度序列是 $(2,2,2,2,2)$，它度弱于 $C_{2,5}$ 的度序列 $(2,2,2,4,4)$，但 C_5 是 H 图.

例 4.4 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.

推论 设 G 是 n 阶单图. 若 $n \geq 3$ 且 $|E(G)| > C_{n-1}^2 + 1$ 则 G 是 H 图; 并且, 具有 n 个顶点和 $C_{n-1}^2 + 1$ 条边的非 H 简单图只有 $C_{1,n}$ 以及当 $n = 5$ 时还有 $C_{2,5}$.

注 n 阶完全图中 H 圈的个数为 $(n-1)!$.

4.4 最优 H 圈

在边赋权图中求最小 H 圈是 NP —难问题.

4.4.1 边交换技术 (上界)

在赋权完全图中取一个初始 H 圈 C; 将 H 圈 C 进行修改.

4.4.2 最优 H 圈的下界

过程 (考过):

(1) 在 G 中删掉一点 v(任意的) 得图 G_1

(2) 在图 G_1 中求出一棵最小生成树 T;

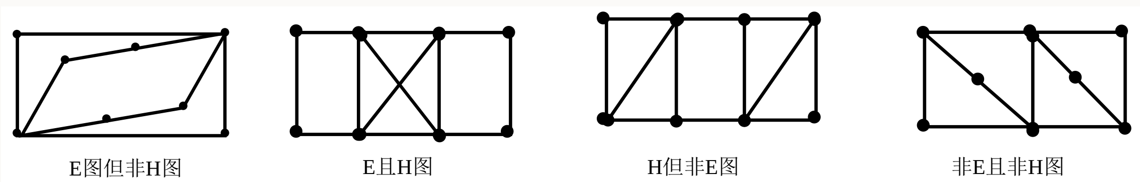
(3) 在 v 的关联边中选出两条权值最小者 e_1 与 e_2. 若 C 是 G 的最优 H 圈, 则:

$$w(C) \geq w(T) + w(e_1) + w(e_2)$$

说明 (考过):

设 C 是 G 的最优 H 圈, 则对 G 中任意一点 v, $C - v$ 是 $G - v$ 的 H 路, 也是 $G - v$ 的生成树. 由此推知: 设 T 是 $G - v$ 最小生成树, 同时选取与 v 关联的两条边 e_1, e_2 使得 $w(e_1) + w(e_2)$ 尽可能小, 则 $w(T) + w(e_1) + w(e_2)$ 是 $w(C)$ 的一个下界.

4.5 E 图和 H 图的联系

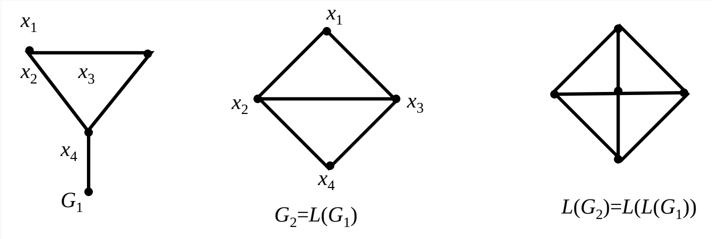


定义 4.5 (线图) 设 G 是图, G 的线图 $L(G)$ 定义为:

(1) $V(L(G)) = E(G)$;

(2) 当 G 中两个边邻接时，$L(G)$ 的两个点邻接.

一般地，$L^1(G) = L(G), L^2(G) = L(L(G)), L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$



线图的性质：

(1) 若 $e = uv$ 是 G 的边，则 e 作为 $L(G)$ 的顶点度数为；$d(e) = d_G(u) + d_G(v) - 2$；

(2) 若 $G = (n, m)$, 则线图 $L(G)$ 边数为: $m(L(G)) = -m + \frac{1}{2} \sum\limits_{v \in V(G)} d^2(v)$.

定义 4.6 称 S_n 是图 G 的 n 次细分图，是指将 G 的每条边中都插入 n 个 2 度顶点. $L_n(G) = L(S_{n-1}(G))$.

注 $L^n(G) \neq L_n(G)$

定理 4.9 (1) 若 G 是 E 图，则 $L(G)$ 既是 E 图又是 H 图.

(2) 若 G 是 H 图，则 $L(G)$ 是 H 图

注 该定理逆不成立.

定理 4.10 一个图 G 是 E 图的充要条件是 $L_3(G)$ 为 H 图

定理 4.11 (Chartarand) 若 G 是 n 个点的非平凡连通图，且不是一条路，则对所有 $m \geq n-3$，$L^m(G)$ 是 H 图

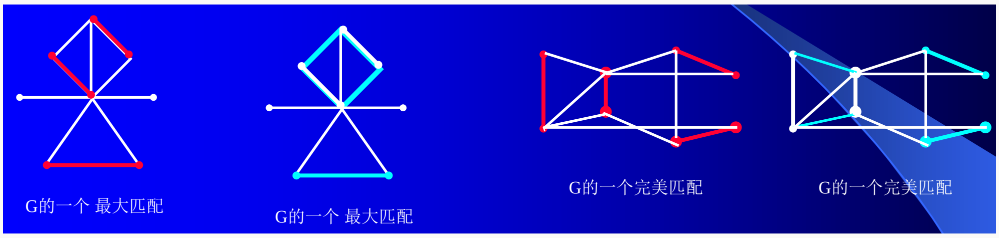
5 匹配与因子分解

5.1 匹配

5.1.1 图的匹配相关概念

(1) 给定图 $G = (V, E)$. 设 M 是 E 的不包含环的子集，它的任意两条边在 G 中均不相邻，则称 M 是 G 的匹配.

(2) 如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个 最大匹配. 特别是，若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称它为 G 的一个 完美匹配.



注 (a) 一个图 G 不一定存在完美匹配.

(b) 一个图 G 的完美匹配若存在，不一定唯一.

(c) 一个图 G 的最大匹配不一定唯一.

(d) 完美匹配一定是最大匹配，最大匹配不一定是完美匹配.

(3) 如果 M 是图 G 的匹配，G 中一条由 M 中的边和非 M 中的边交错形成的路，称为 G 中的一条 M 交错路. 特别地，若 M 交错路的起点与终点是 M 非饱和点，称这种 M 交错路为 M 可扩路.

注 如果 G 中顶点 v 是 G 的匹配 M 中某条边的端点，称它为 M 饱和点，否则为 M 非饱和点.

5.1.2 贝尔热定理

定理 5.1 (贝尔热，1957) G 的匹配 M 是最大匹配，当且仅当 G 不包含 M 可扩路.

5.2 偶图的匹配和覆盖

5.2.1 偶图的匹配

定理 5.2 (Hall,1935) 设 $G = (X, Y)$ 是偶图，则 G 存在饱和 X 每个顶点的匹配的充要条件是：

$$|N(S)| \geq |S|, 对\forall S \subseteq X 成立.$$

注 $N(S) : S$ 的 邻集 – 与 S 的顶点相邻的所有顶点的集. 匈牙利算法的基础.

例 5.1 (常考大题应用题) 内容...

推论 若 G 是 $k(k > 0)$ 正则偶图，则 G 存在完美匹配.

注 (1) 每个 k 方体都有完美匹配 $(k \geq 2)$.

(2) 树至多存在一个完美匹配.

(3) K_{2n} 不同完美匹配个数为 $(2n-1)!!$.

(4) $K_{n,n}$ 不同完美匹配个数为 $n!$.

5.2.2 点覆盖与哥尼定理

定义 5.1 G 的一个点覆盖是指 $V(G)$ 的一个顶点子集 K, 使得 G 的每条边都至少有一个有一个端点在 K 之中. G 的一个包含点数最少的点覆盖称为 G 的最小点覆盖，其包含的点数称为 G 的覆盖数，记为 $\alpha(G)$.

定理 5.3 设 M 是 G 的匹配，K 是 G 的覆盖，若 $|M| = |K|$, 则 M 是最大匹配，而 G 是最小覆盖.

证明. K 至少包含 M 中每条边的一个端点，则 $|M| \le |K| \Rightarrow |M^*| \le |K^*| \Rightarrow |M| \le |M^* \le |K^*| \le |K|$. 又因为 $|M| = |K|$, 故 $|M| = |M^*|, |K| = |K^*|$.

定理 5.4 (哥尼，1931) 在偶图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数.

注 $K_{m,n}(m \le n)$ 的最小覆盖包含的点数为 $\min\{m, n\}$.

例 5.2 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线。证明：布尔矩阵中，包含了所有 “1” 的线的最少数目，等于具有性质 “任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目” .

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

证明. 设布尔阵是 n 行 m 列矩阵，把它模型为一个偶图如下：每行每列分别用一个点表示，X 表示行点集合，Y 表示列点集合，两点连线，当且仅当该行该列元为 1.

于是，包含了所有 “1” 的线的最少数目对应偶图中的最小点覆盖数。而具有性质 “任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目” 对应偶图的最大匹配包含的边数.

由哥尼定理，命题得到证明。

5.3 托特定理与完美匹配

定理 5.5 (托特，1947) 图 G 有完美匹配当且仅当对 V 的任意非空真子集 S, 有

$$o(G - S) \le |S|.$$

注 $o(G - S)$ 表示奇分支数目(奇分支表示顶点数为奇数).

例 5.3 证明：一棵树 G 有完美匹配当且仅当对所有顶点 $v \in (G)$, 有：$o(G - v) = 1$.

证明. 必要性:

一方面: 若 G 有完美匹配, 由托特定理: $o(G-v)\leq 1$; 另一方面: 若树 G 有完美匹配, 则显然 G 为偶阶树, 于是 $o(G-v)\geq 1$; 所以: $o(G-v)=1$.

充分性:

由于对任意点 $v\in o(G-v)$, 有 $o(G-v)=1$. 设 C_v 是 $G-v$ 的奇分支, 又设 G 中由 v 连到 $G-v$ 的奇分支的边为 vu, 显然, 由 u 连到 $G-u$ 的奇分支的边也是 uv. 令 $M=\{e(v)$: 它是由 v 连到 $G-v$ 的奇分支的边, $v\in V(G)\}$ 则: M 是 G 的完美匹配.

推论 (彼得森) 没有割边的 3 正则图存在完美匹配.

注 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配.

彼得森图有完美匹配, 3 正则 H 图存在完美匹配.

5.4 因子分解

5.4.1 1-因子分解

定义 5.2 (1) 一个图 G 的一个因子 G_i, 是指至少包含 G 的一条边的生成子图.
(2) 一个图 G 的因子分解, 是指把图 G 分解为若干个边不重的因子之并.
(3) 一个图 G 的 n-因子, 是指图 G 的 n 度正则因子.
(4) 如果一个图 G 能够分解为若干 n-因子之并, 称 G 是可 n-因子分解的.

注 图的一个一因子实际上就是图的一个完美匹配的导出子图. 一个图能够作一因子分解, 也就是它能够分解为若干边不重的完美匹配的导出子图之并.

定理 5.6 K_{2n} 可 1-因子分解.

注 (1) K_{2n} 可以分解为 $2n-1$ 个边不重 1-因子之并. 如 K_4 有 3 个边不重的个 1-因子.

例 5.4 证明: 每个 $k(k>0)$ 正则偶图 G 是一可因子分解的.

证明. 因为每个 $k(k>0)$ 正则偶图 G 存在完美匹配, 设 Q 是它的一个一因子, 则 $G-Q$ 还是正则偶图, 由归纳知, G 可作一因子分解.

定理 5.7 具有 H 圈的 3 正则图可 1-因子分解.

注 可 1-因子分解的 3 正则图不一定存在 H 圈.

定理 5.8 若三正则图有割边, 则它不能 1-因子分解.

注 没有割边的三正则图可能也没有一因子分解, 如彼得森图就是如此, 但它存在完美匹配.

5.4.2 2-因子分解

定义 5.3 如果一个图 G 可以分解为若干 2 度正则因子之并 (每个因子是不相交的圈)，称 G 可 2-因子分解。

注 G 的一个 H 圈肯定是 G 的一个 2- 因子，但是 G 的一个 2-因子不一定是 G 的 H 圈. 2-因子可以不连通.

可 2-因子分解的图的所有点的度数一定是偶数，故 K_{2n} 不可 2-因子分解.

定理 5.9 K_{2n+1} 可 2-因子分解, 是 n 个 H 圈的和.

定理 5.10 K_{2n} 可分解为一个 1-因子和 n-1 个 2-因子之和.

定理 5.11 每个没有割边的 3-正则图是一个 1-因子和 1 个 2-因子之和.

定理 5.12 一个连通图可 2 因子分解当且仅当它是偶数度正则图.

例 5.5 若 n 为偶数，且简单图 G 满足：$\delta(G) \geq \frac{n}{2}+1$，求证：$G$ 中存在 3-因子.

证明. 因为 G 为简单图，因为 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}+1$，由 Dirac 定理可得 G 中存在 H 圈 C，C 可以分解为两个边不重的 1-因子之并，设这两个 1-因子分别为 F_1, F_2.

令 $G_1 = G - F_1$, 则 $\delta(G_1) \geq \frac{n}{2}$, 由此得出 G_1 中存在 H 圈 C_1.

显然，$C_1 \cup F_1$ 是 G 的一个 3-因子. 故 G 中存在 3-因子.

5.4.3 森林因子分解

定义 5.4 把一个图分解为若干边不重的森林因子的和，称为图的森林因子分解.

主要讨论：图 G 分解为边不重的森林因子的最少数目问题，称这个最少数目为 G 的荫度，记为 $\sigma(G)$.

定理 5.13 非平凡图 G 的荫度为:

$$\sigma(G) = \max_{s} \left\lceil \frac{m_s}{n-1} \right\rceil$$

其中 s 是 G 的子图 H_s 的顶点数，而: $m_s = \max_{s}\{E(H_s)\}$

定理 5.14 完全图和完全偶图的为:

$$\sigma(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad \sigma(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{rs}{r+s-1} \right\rceil$$

完全图最小森林因子分解 (拜内克):

(1) 对于 K_{2n}，将其分解为 n 条路 $P_i = v_i v_{i-1} v_{i+1} v_{i-2} v_{i+2} \cdots v_{i-n} v_{i+n}$, 脚 $2n$ 计算.
(2) 对于 K_{2n+1}，将其分解为 n 条路 $P_i = v_i v_{i-1} v_{i+1} v_{i-2} v_{i+2} \cdots v_{i-n} v_{i+n}$, 脚 $2n$ 计算. 在每条路外添上点 v_{2n+1} 的 n 个森林因子;
然后，v_{2n+1} 与 $v_1, v_2, \cdots, v_{2n}$ 分别相连接得一星图，这是 G 的最后一个森林因子.

5.5 匈牙利算法与最优匹配

5.5.1 匈牙利算法

(1) 问题: 设 $G = (X, Y), |X| = |Y|$, 在 G 中求一完美匹配 M.
(2) 基本思想: 从任一初始匹配 M_0 出发，通过寻求一条 M_0 可扩路 P，令 $M_1 = M_0 \Delta E(P)$, 得到比 M_0 更大的匹配 M_1(近似于迭代思想)。

定义 5.5 设 $G = (X, Y)$, M 是 G 的匹配，u 是 M 非饱和点. 称树 H 是 G 的扎根于点 u 的 M 交错树, 如果:

(1) $u \in V(H)$;
(2) 对任意 $v \in V(H)$, (u, v) 路是 M 交错路.

匈牙利算法 从任何一个匹配 M 开始

(1) 若 M 饱和 X 所有顶点, 停止. 否则, 设 u 为 X 中 M 非饱和顶点, 置 $S = \{u\}, T = \phi$.
(2) 若 $N(S) = T$, 则 G 中不存在完美匹配. 否则设 $y \in N(S) - T$.
(3) 若 y 为 M 饱和点，设 $yz \in M$, 置 $S = S \cup \{z\}, T = T \cup \{y\}$ 转(2); 否则，设 P 为 M 可扩 (u, y) 路，置 $M = M \Delta E(P)$, 转(1).

5.5.2 最优匹配

设 $G = (X, Y)$ 是边赋权完全偶图, 且 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}, w_{ij} = w(x_i y_j)$. 在 G 中求出一个具有最大权值的完美匹配.

$K_{n,n}$ 有 $n!$ 个不同完美匹配. 使用库恩算法.

定义 5.6 设 $G = (X, Y)$, 若对任意的 $x \in X, y \in Y$, 有:

$$l(x) + l(y) \geq w(xy)$$

称 l 是赋权完全偶图 G 的可行顶点标号.

对于任意的赋权完全偶图 G，均存在 G 的可行顶点标号 l:

$$\begin{cases} l(x) = \max\limits_{y\in Y} w(xy) & 若 x \in X \\ l(y) = 0 \quad 若 y \in Y \end{cases} \tag{5-1}$$

定义 5.7 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号，令:

$$E_l = \{xy \in E(G) | l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

称 G_l 为 G 的对应于 l 的相等子图.

定理 5.15 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号，若相等子图 G_l 有完美匹配 M^*, 则 M^* 是 G 的最优匹配.

证明. 设 M^* 是 G_l 的完美匹配，则:

$$W(M^*) = \sum_{e\in M^*} w(e) = \sum_{v\in V} l(v)$$

又设 M 是 G 的任一完美匹配，则

$$W(M) = \sum_{e\in M} w(e) \le \sum_{v\in V} l(v)$$

故，$W(M^*) \ge W(M)$,M^* 是最优匹配.

库恩算法 (考过) 给一初始可行顶点标号 l (按式5-1), 做出关于 l 的相等子图 G_l, 在 G_l 中任选一个匹配 M.

(1) 若 X 是 M 饱和的，则 M 是最优匹配. 否则，令 u 是一个 M 非饱和点，置 $S = \{u\}, T = \phi$.

(2) 若 $N_{G_l}(S) \supset T$, 转(3). 否则 ($N_{G_l}(S) = T$)，计算:

$$\alpha_l = \min_{x\in S, y\notin T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\}$$

且由

$$\hat{l} = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, v \in S \\ l(v) + \alpha_l, v \in T \\ l(v), 其他 \end{cases}$$

给出可行顶点标号 $\hat{l}$(注意 $\alpha_l > 0$ 且 $N_{G_{\hat{l}}} \supseteq T$). 以 $\hat{l}$ 代替 l, 以 $G_{\hat{l}}$ 代替 G_l.

(3) 在 $N_{G_l}(S) - T$ 中选择一个顶点 y. 若 y 是 M 饱和的, 且 $yz \in M$, 则置 $S = S \cup \{z\}, T = T \cup \{y\}$ 转(2). 否则，设 P 是 G_l 中 M 可扩 (u, y) 路，置 $M = M \Delta E(P)$, 转(1).

例 5.6 (2019) 某工厂有 4 名工人和 4 种工作，每个人干不同工作的效率由下面矩阵 A 给出 (a_{ij} 代表工人 i 干第 j 件工作的效率). 试给出 4 名工人分别安排一种工作的，使得他们总的效率最高.

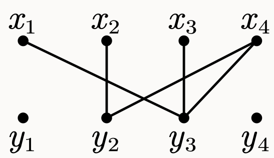
$$
\text{A=}\begin{pmatrix} 12 & 14 & 15 & 14 \\ 9 & 11 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 16 & 14 \\ 12 & 13 & 13 & 10 \end{pmatrix}
$$

解： 设工人集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, 事件集合 $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$.

(1) 给定初始可行顶点标号 l 为：

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 12 & 14 & 15 & 14 \\ 9 & 11 & 6 & 8 \\ 10 & 9 & 16 & 14 \\ 12 & 13 & 13 & 10 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 15 \\ 11 \\ 16 \\ 13 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 & \;\;0 & \;\;0 & \;\;0 \end{matrix} &
\end{array}
$$

关于 l 的相等子图 G_l，如下：



在 G_l 中选一个匹配 $M=\{x_2y_2,x_3y_3\}$, M 不饱和, x_4 为 M 非饱和点, 置 $S=\{x_4\},T=\phi$

$N_{G_l}(S)=\{y_2,y_3\}\supset T$, 选择 $y_2\in N_{G_l}(S)-T=\{y_2,y_3\}$，$y_2$ 是 M 的饱和点，且 $y_2x_2\in M$. 置 $S=S\cup\{x_2\}=\{x_4,x_2\},T=T\cup\{y_2\}=\{y_2\}$;

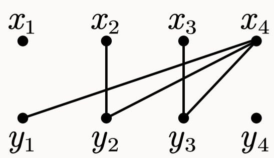
$N_{G_l}(S)=\{y_2,y_3\}\supset T$, 选择 $y_3\in N_{G_l}(S)-T=\{y_3\}$，$y_3$ 是 M 的饱和点，且 $y_3x_3\in M$. 置 $S=S\cup\{x_3\}=\{x_2,x_3,x_4\},T=T\cup\{y_3\}=\{y_2,y_3\}$;

$N_{G_l}(S)=\{y_2,y_3\}=T$，求得 $\alpha_l=1$.

(2) 根据 $\alpha_l = 1$ 更新可行顶点标号 $\hat{l}$ 为:

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}12 & 14 & 15 & 14\\ 9 & 11 & 6 & 8\\ 10 & 9 & 16 & 14\\ 12 & 13 & 13 & 10\end{pmatrix} & \begin{matrix}15\\ 10\\ 15\\ 12\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \ \ 1 & \ \ 1 & \ \ 0\end{matrix} & \end{array}$$

关于 $\hat{l}$ 的相等子图 $G_{\hat{l}}$，如下:



在 G_l 中选一个匹配 $M = \{x_2y_2, x_3y_3, x_4y_1\}$，$M$ 不饱和，x_1 为 M 非饱和点，置 $S = \{x_1\}, T = \phi$

$N_{G_{\hat{l}}}(S) = T = \phi$.

标准答案没有这一部分

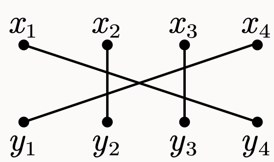
---

(3) 寻找 S, T 使得 $N(S) = T$. 此时 $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, T = \{y_2, y_3\}$, 求得 $\alpha = 1$.

根据 $\alpha_{l'} = 1$ 更新可行顶点标号 l' 为:

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}12 & 14 & 15 & 14\\ 9 & 11 & 6 & 8\\ 10 & 9 & 16 & 14\\ 12 & 13 & 13 & 10\end{pmatrix} & \begin{matrix}14\\ 10\\ 15\\ 12\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & \ \ 1 & \ \ 1 & \ \ 0\end{matrix} & \end{array}$$

关于 l' 的相等子图 $G_{l'}$，如下:



得到最优匹配: $\{x_1y_4, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_1\}$, 即第 1 个工人分配第 4 份工作，第 2 个工人分配第 2 份工作，第 3 个工人分配第 3 份工作，第 4 个工人分配第 1 份工作.

6 平面图

6.1 平面图的性质和概念

定义 6.1 如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图. 可平面图 G 的边不交叉的一种画法，称为 G 的一种平面嵌入，G 的平面嵌入表示的图称为平面图.

定义 6.2 一个平面图 G 把平面分成若干连通片，这些连通片称为 G 的区域，或 G 的一个面. G 的面组成的集合用 ϕ 表示. 面积有限的区域称为平面图 G 的内部面，否则称为 G 的外部面. 某面 f 的边界中含有的边数 (割边计算 2 次) 称为该面 f 的次数，记为 $deg(f)$.

注 (1) 平面图外部面只有一个.
(2) 可以把平面图的任意一个内部面转换为外部面.

定理 6.1 (次数公式) 设 $G=(n,m)$ 是平面图，则：$\sum\limits_{f\in\phi} deg(f)=2m$.

定理 6.2 (欧拉公式) 设 $G=(n,m)$ 是连通平面图，ϕ 是 G 的面数，则：$n-m+\phi=2$.

推论 (1) 设 G 是具有 ϕ 个面 k 个连通分支的平面图，则:

$$n-m+\phi=k+1$$

证明. 对第 $i(1\le i\le k)$ 个分支来说，设顶点数为 n_i，边数为 m_i，面数为 ϕ_i, 由欧拉公式：$n_i-m_i+\phi_i=2\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-m_i+\phi_i)=2k$, 又 $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n, \sum\limits_{i=1}^{k}m_i=m, \sum\limits_{i=1}^{k}\phi_i=\phi+k-1$, 故得 $n-m+\phi=k+1$.

(2) 设 $G=(n,m)$ 是连通平面图，ϕ 是 G 的面数，如果对 G 的每个面 f，有：$deg(f)\ge l\ge 3$, 则：

$$m\le\frac{l}{l-2}(n-2)$$

证明. 由次数公式得：$\sum\limits_{f\in\phi}deg(f)=2m\ge\phi l\Rightarrow\phi\le\frac{2m}{l}$. 由欧拉公式得:$\phi=2+m-n\le\frac{2m}{l}\Rightarrow m\le\dfrac{l}{l-2}(n-2)$.

注 推论(2)得不等式条件是必要非充分的，其等价说法为：
设 $G=(n,m)$ 是连通图，如果 $m>\frac{l}{l-2}(n-2)$, 则 G 是非可平面图 (常用).

(3) 设 G 是具有 n 个点 m 条边 ϕ 个面的简单可平面图，若 $n\ge 3$，则: $m\le 3n-6$.

注 如果 $m>3n-6$, 则 G 是非可平面图. $K_{3,3}$ 是非可平面图，K_5 是非可平面图.

(4) 设 G 是具有 n 个点 m 条边的连通平面图，若 G 的每个圈均由长度是 l 的圈围成，则：$m(l-2)=l(n-2)$

证明. 将推论(2)的证明中的符号改成等号.

(5) 设 G 是具有 n 个点 m 条边的简单平面图，则：$\delta \leq 5$.

证明. 设 G 有 n 个顶点 m 条边. 对 $n=1,2$ 经直接验证得结论成立. 假设 $n \geq 3$，假设 $\delta \geq 6$，则

$$6n-12<6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v)=2m \Rightarrow m>3n-6$$

故 G 是非可平面图，与原命题矛盾，假设不成立. 因此 $\delta \leq 6$.

定理 6.3 存在且只存在 5 种正多面体：它们是正四、六、八、十二、二十面体.

例 6.1 证明：每个五连通简单可平面图至少有 12 个顶点.

证明. 设该图为 $G(n \geq 3)$.

依题意可得：$\delta(G) \geq k(G) \geq 5$. 由握手定理可得：$2m=\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) \geq 5n$

又 G 是可平面图，故 $m \leq 3n-6$.

因此，$2.5n \leq m \leq 3n-6 \Rightarrow n \geq 12$，故图 G 至少有 12 个顶点.

例 6.2 若 G 是一个连通平面图且满足 $\delta \geq 3$，则 G 至少有一个面使得 $deg(f) \leq 5$.

证明. 若不然，则 $deg(f) \geq 6$.

$2m=\sum\limits_{f} deg(f) \geq 6\phi$且$n-m+\phi=2 \Rightarrow 2m \leq 3n-6$.

又因所有顶点度数不小于 3，故由握手定理得 $2m=\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) \geq 3n>3n-6$. 得出矛盾！

例 6.3 证明：在 $n(n \geq 3)$ 阶简单平面图 G 中有 $\phi \leq 2n-4$, 这里 ϕ 是面数.

证明. 显然，每个面次数 $l \geq 3$，则 $2m=\phi l \geq 3\phi$. 又 $n-m+\phi=2$, 故 $\phi \leq 2n-4$.

6.2 特殊平面图与平面图的对偶图

6.2.1 极大平面图

定义 6.3 设 G 是简单可平面图，如果 G 是 $K_i(1 \geq i \geq 4)$, 或者在 G 的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称 G 是极大可平面图. 极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图.

注 只有在简单图前提下才能定义极大平面图

引理 6.4 设 G 是极大平面图，则 G 必然连通；且若 G 的阶数大于等于 3，则 G 无割边.

定理 6.5 设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为单图.

推论 设 G 是 n 个点，m 条边和 ϕ 个面的极大平面图，且 $n \geq 3$. 则:

(1) $m = 3n - 6$; (2) $\phi = 2n - 4$.

证明. 因为 G 是极大平面图，则每个面的次数 $l = 3$. 由次数公式得：$2m = \sum\limits_{f \in \phi} deg(f) = 3\phi$. 由欧拉公式得:$\phi = 2 - n + m \leq \frac{2m}{l} \Rightarrow \frac{2}{3}m = 2 - n + m \Rightarrow m = 3n - 6$. 又 $m = n + \phi - 2$，故 $\phi = 2n - 4$.

注 顶点数相同得极大平面图并不唯一.

定义 6.4 如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图，则称 G 为极小不可平面图.

注 $K_{3,3}$ 和 K_5 是极小不可平面图.

6.2.2 外可平面图

定义 6.5 若一个可平面图 G 存在一种平面嵌入，使得其所有顶点均在某个面的边界上，称该图为外可平面图. 外可平面图的一种外平面嵌入，称为外平面图.

设 G 是一个简单外可平面图，若在 G 中任意不邻接顶点间添上一条边后，G 成为非外可平面图，则称 G 是极大外可平面图. 极大外可平面图的外平面嵌入，称为极大外平面图.

例 6.4 设 G 是一个具有 $n(n \geq 4)$ 个点, m 条边的简单连通外平面图. 若 G 不含三角形, 则 $m \leq (3n-4)/2$.

解: 假设 G 的所有顶点在外部面的边界上, 则由条件知: G 的外部面的次数至少为 n, 内部面的次数至少为 4(G 不含三角形). 设 G 有 ϕ 个面, 则 $2m \geq 4(\phi - 1) + n$. 由欧拉公式得, $\phi = 2 - n + m$. 因此, 根据上述两式得 $m \leq (3n-4)/2$.

引理 6.6 设 G 是一个连通简单外可平面图，则在 G 中存在度数至多是 2 的顶点.

定理 6.7 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点，m 条边，且所有点均在外部面上的极大外平面图，则 G 有 $n-2$ 个内部面且 $m = 3(n-2)-(n-2-1) = 2n-3$.

定理 6.8 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点，且所有点均在外部面上的外平面图，则 G 是极大外平面图，当且仅当其外部面的边界是圈，内部面是三角形.

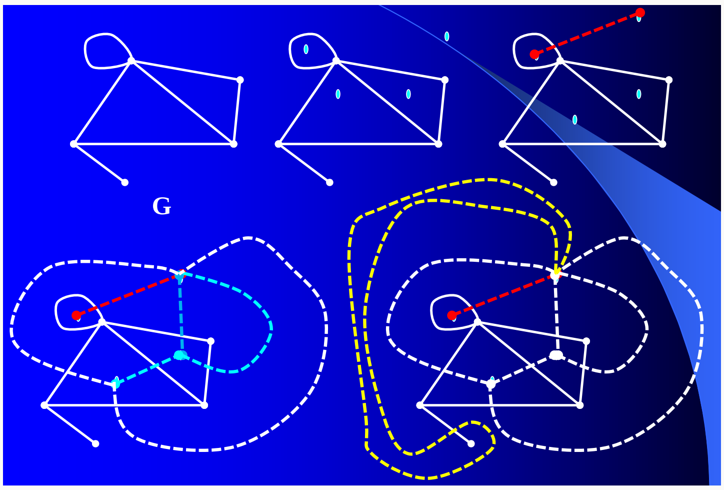
定理 6.9 每一个至少有 7 个顶点的外可平面图的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者 ($n = 6$, 外可平面图的补图也是外可平面图).

6.2.3 平面图的对偶图

定义 6.6 给定平面图 G，G 的对偶图 G^* 如下构造：

(1) 在 G 的每个面 f_i 内取一个点 v_i^* 作为 G^* 的一个顶点；

(2) 对 G 的一条边 e, 若 e 是面 f_i 与 f_j 的公共边，则连接 v_i^* 与 v_j^*，且连线穿过边 e; 若 e 是面 f_i 中的割边，则以 v_i 为顶点作环，且让它与 e 相交.



G 与 G^* 的对应关系

(1) G^* 的顶点数 = G 的面数;

(2) G^* 的边数 = G 的边数;

(3) G^* 的面数 = G 的顶点数;

(4) $d(v^*) = deg(f)$

定理 6.10 平面图 G 的对偶图必然连通.

注 (1) $(G^*)^*$ 不一定等于 G;

(2) G 是平面图，则 $(G^*)^* \cong G$ 当且仅当 G 是连通的；

(3) 同构的平面图可以有不同构的对偶图.

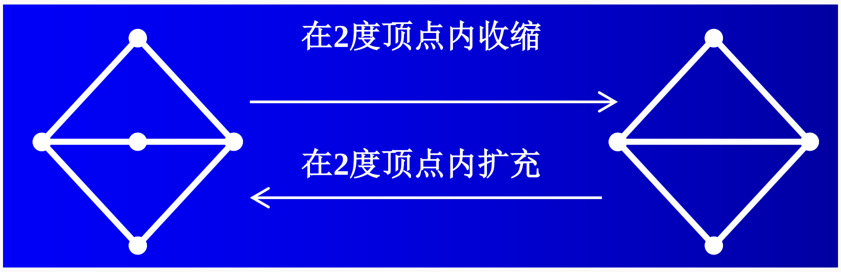
例 6.5 若平面图 G 是自对偶的 $G \cong G^*$，则 $m = 2n - 2$.

解: 设 G, G^* 阶数分别为 n, n^*, 则必有 $n = n^*$. 设 G 的面数为 ϕ, 则 $\phi = n^*$. G^* 连通 $\Rightarrow G$ 连通. 由连通平面图欧拉公式, 得: $2 = n - m + \phi = n - m + n^* = n - m + n \Rightarrow m = 2n - 4$.

6.3 平面图的判定

之前平面图判定方法包括：观察法、定理6.2(欧拉公式) 推论(2)和推论(3)

定义 6.7 两个图 G_1 与 G_2，如果 $G_1 \cong G_2$ ，或者通过反复在 2 度顶点内扩充和收缩后能够变成一对同构的图，则称 G_1 与 G_2 是同胚的(或 G_1 与 G_2 在 2 度顶点内是同构的).



定理 6.11 (库拉托斯基) 图 G 是可平面的，当且仅当它不含 K_5 和 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定义 6.8 给定图 G, 去掉 G 中的环, 用单边代替平行边而得到的图称为 G 的基础简单图.

定理 6.12 (1) 图 G 是可平面的当且仅当它的基础简单图是可平面的;
(2) 图 G 是可平面图当且仅当 G 的每个块是可平面图.

定义 6.9 设 uv 是简单图 G 的一条边. 去掉该边，重合其端点，再删去由此产生的环和平行边. 这一过程称为图 G 的初等收缩或图的边收缩运算

定理 6.13 (瓦格纳) 简单图 G 是可平面图当且仅当它不含有可收缩到 K_5或$K_{3,3}$ 的子图.

注 彼得森图是不可平面图.

定理 6.14 每一个至少有 9 个顶点的简单可平面图的补图是不可平面的，而 9 是这个数目中的最小的一个.

7 图的着色

7.1 边着色

定义 7.1 设 G 是图，对 G 的边进行染色，若相邻边染不同颜色，则称对 G 进行正常边着色. 如果能用 k 种颜色对图 G 进行正常边着色，称 G 是 k 边可着色的. 对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为：$\chi'(G)$.

注 $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

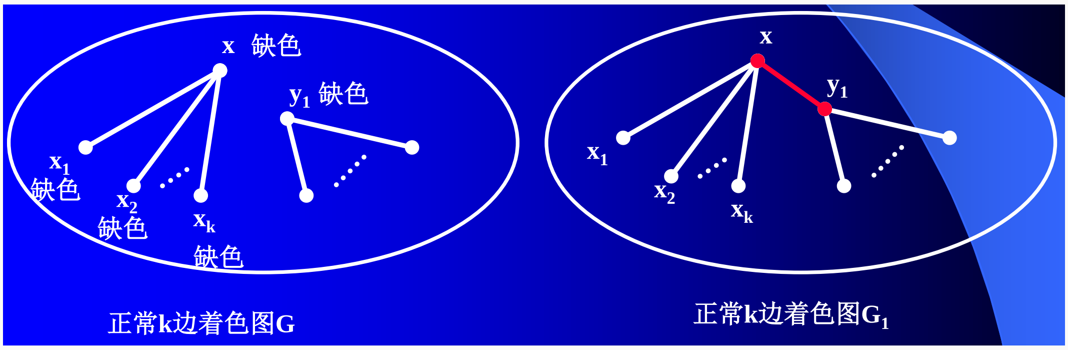
7.1.1 偶图的边色数

定理 7.1 $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$.

定理 7.2 (哥尼，1916) 若 G 是偶图，则 $\chi'(G) = \Delta$.

7.1.2 简单图的边色数

引理 7.3 设 G 是简单图，x 与 y_1 是 G 中不相邻的两个顶点，π 是 G 的一个正常 k 边着色. 若对该着色 π，x,y_1 以及与 x 相邻点均至少缺少一种颜色，则 $G + xy_1$ 是 k 边可着色的.



注 若点 u 关联的边的着色没有用到色 i，则称点 u 缺 i 色.

定理 7.4 (维津定理，1964) 若 G 是简单图，则

$$\chi'(G) = \Delta \text{ or } \chi'(G) = \Delta + 1.$$

推论 (1) G 为简单图. 若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则:

$$\chi'(G) = \Delta.$$

(2) G 为简单图. 若点数 $n = 2k + 1$ 且边数 $m > k\Delta$, 则: $\chi'(G) = \Delta + 1$.

注 在应用题中求边色数，该结论很常用

(3) 设 G 是奇数阶 Δ 正则简单图，若 $\Delta > 0$，则：$\chi'(G) = \Delta + 1$.

注 (1) n 方体的边色数为 n.
(2) 彼得森图的边色数为 4.
(3) n 为奇数，$\chi'(K_n) = (n-1)+1 = n, \chi'(C_n) = 2+1 = 3$.
(4) n 为偶数，$\chi'(K_n) = n-1, \chi'(C_n) = 2$.

7.2 点着色

定义 7.2 设 G 是图，对 G 的顶点进行染色，若使得相邻顶点着不同颜色，则称对 G 进行正常顶点着色. 如果能用 k 种颜色对图 G 进行正常顶点着色，称 G 是 k(顶点) 可着色的. 对 G 进行正常顶点着色需要的最少颜色数，称为 G 的 (点) 色数，记为：$\chi(G)$.

注 色数为 k 的图称为 k 色图.

定理 7.5 (维津定理，1964) 对 $\forall$ G，有：$\chi(G) \le \Delta + 1$.

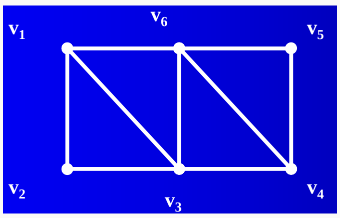
着色算法 设 $G = (V, E), V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，色集合 $C = \{1, 2, \cdots, \Delta + 1\}$，着色方案为 π.

(1) 令 $\pi(v_1) = 1, i = 1$;
(2) 若 $i = n$，则停止；否则令：

$$C(v_{i+1}) = \{\pi(v_j) | j \le i\text{并且}v_j\text{与}v_{i+1}\text{相邻}\}$$

设 k 是 $C - C(v_{i+1})$ 中最小整数，令 $\pi(v_{i+1}) = k$; .
(3) 令 $i = i + 1$，转(2).

例 7.1 给出下图的 $\Delta + 1$ 正常点着色.



解 设 π 为着色函数，色集 $C=\{1,2,\cdots,5\}$，着色过程如下：
(1) $\pi(v_1)=1, C(v_2)=\{1\}$, $C\backslash C(v_2)=\{2,\cdots,5\}$;
(2) $\pi(v_2)=2, C(v_3)=\{1,2\}$, $C\backslash C(v_3)=\{3,\cdots,5\}$;
(3) $\pi(v_3)=3, C(v_4)=\{3\}$, $C\backslash C(v_4)=\{1,2,4,5\}$;
(4) $\pi(v_4)=1, C(v_5)=\{1\}$, $C\backslash C(v_5)=\{2,\cdots,5\}$;
(5) $\pi(v_5)=2, C(v_6)=\{1,2,3\}$, $C\backslash C(v_6)=\{4,5\}$;
(6) $\pi(v_6)=4$.

注 着色算法能保证最多使用 $\Delta + 1$ 中颜色给一个图正常着色，但不能保证使用颜色数一定是最少的.Welsh—Powell 稍微对上面算法做了一个修改，着色时按最大度优先策略.

定理 7.6 (布鲁克斯，1941) 若 G 是连通的单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则：$\chi(G) \le \Delta$.

定义 7.3 设 G 是至少有一条边的简单图，定义：

$$\Delta_2(G) = \max_{u \in V(G)} \max_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) \le d(u)}} d(v)$$

其中 $N(u)$ 为 G 中点 u 的邻域. 称 $\Delta_2(G)$ 为 G 的次大度. 如果令：

$$V_2(G) = \{v \mid v \in V(G), N(v) \text{ 中存在点} u, \text{满足} d(u) \ge d(v)\}$$

那么，

$$\Delta_2(G) = \max\{d(v) \mid v \in V_2(G)\}$$

定理 7.7 设 G 是非空简单图，则：$\chi(G) \le \Delta_2(G) + 1$.

注 定理7.7是对定理7.5改进.

推论 设 G 是非空简单图，若 G 中最大度点互不邻接，则：$\chi(G) \le \Delta(G)$.

定理 7.8 (希伍德) 对任意平面图，均有 $\chi \le 5$.

注 (1) n 方体的点色数为 2.
(2) 彼得森图的点色数为 3.

7.3 色多项式

由点色数 $\chi(G)$ 和色多项式 P_k(G) 的定义可得：

(1) 若 $k < \chi(G)$, 则 $P_k(G) = 0$; $\chi(G) = \min\{k \mid P_k(G) \ge 1\}$.

注 通过色多项式方法求色数原理.

(2) 若 G 为空图, 则 $P_k(G) = k^n$.
(3) $P_k(K_n) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$.

色多项式的两种求法

7.3.1 递推计数法

定理 7.9 设 G 为简单图，则对任意，有

$$P_k(G) = P_k(G-e) - P_k(G \cdot e) \quad \text{减边, } G \text{ 的边数较少时}$$
$$P_k(G-e) = P_k(G) + P_k(G \cdot e) \quad \text{加边, } G \text{ 的边数较多时}$$

推论 设 G 是单图，$e = uv$ 是 G 的一条边，且 $d(u) = 1$, 则：$P_k(G) = (k-1)P_k(G-u)$.

7.3.2 理想子图计数法 (必考)

定义 7.4 设 H 是图 G 的生成子图. 若 H 的每个分支均为完全图，则称 H 是 G 的一个理想子图. 用 $N_r(G)$ 表示 G 的具有 r 个分支的理想子图的个数 $(r \geq \omega(G))$.

对于 n 阶简单图，有理想子图法色多项式计数公式:

$$P_k(G) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\overline{G})\,[k]_i \quad [k]_i = k(k-1)(k-2)\cdots(k-i+1)$$

注 (1) $N_n(G) = 1$.

(2) $N_{n-1}(G) = m$.

(3) 若 $k < \omega(G)$，则 $N_k(G) = 0$.

$\overline{G}$ 的伴随多项式:

$$h(\overline{G}, x) = \sum_{i=1}^{n} r_i x^i \quad r_i = N_i(\overline{G}), x^i = [k]_i$$

定理 7.10 若 G 有 t 个分支 $H_1, H_2, \cdots, H_t$, 且 H_i 的伴随多项式为 $h(H_i, x), i = 1, 2, , t$, 则:

$$h(G, x) = \prod_{i=1}^{t} h(H_i, x)$$

图 G 色多项式求解步骤:

(1) 画出 G 的补图 $\overline{G}$;

(2) 求出 $\overline{G}$ 中个分支的伴随多项式;

(3) 求出 $\overline{G}$ 的伴随多项式;

(4) 求出 G 的色多项式.

8 有向图

定义 8.1 有向图去掉边的方向后得到的无向图为基础图. 无向图的每条边加上方向后得到的有向图为定向图.

注 一个简单图有 $2^{m(G)}$ 个定向图 (n 阶完全图有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个定向图).

定理 8.1 设 $D = (V, E)$ 是一个有向图，则有

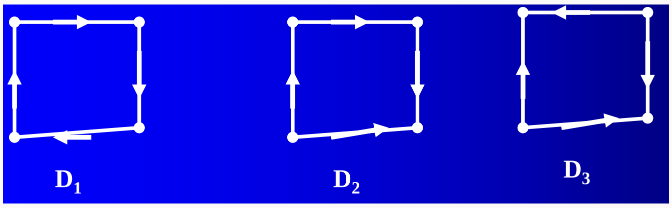
$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = m(D)$$

定义 8.2 设 $D = (V, E)$ 是有向图,

(1) 若 D 的基础图是连通的，称 D 是弱连通图；
(2) 若 D 的中任意两点是单向连通的，称 D 是单向连通图；
(3) 若 D 的中任意两点是双向连通的，称 D 是强连通图；

注 强连通一定单向连通，单向连通一定弱连通.

例 8.1 在下图中，$D1, D2, D3$ 为弱连通图；$D1, D2$ 为单向连通图；$D1$ 为强连通图.

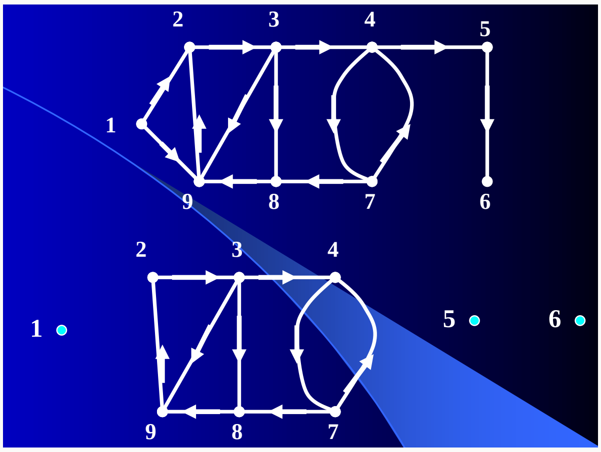


定理 8.2 有向图 $D = (V, E)$ 是强连通的当且仅当 D 中存在含有所有顶点的有向闭途径.

定义 8.3 设 D' 是有向图 $D = (V, E)$ 的一个子图. 如果 D' 是强连通的 (单向连通的、弱连通的)，且 D 中不存在真包含 D' 的子图是强连通的 (单向连通的、弱连通的)，则称 D' 是 D 的一个强连通分支 (单向连通分支、弱连通分支).

例 8.2 求下图 D 的强连通分支、单向连通分支.

解: D 的强连通分支 $\{1\}, \{5\}, \{6\}, \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$. 由于 D 本身是单向连通的，故 D 的单向连通分支是 D 本身.



定理 8.3 有向图 $D = (V, E)$ 的每个点位于且仅位于 D 的一个强 (弱) 连通分支中.

注 (1) 强 (弱) 连通分支的并应该包含图中的任何一个点.
(2) 有向图 D 的某个顶点 v，可能处于 D 的不同单向连通分支中.

定理 8.4 若 G 是 2 边连通的，则 G 存在强连通定向图..

9　特殊图的重要结论

(1) n 方体
 (a) Q_n 是 n 正则偶图.
 (b) (Q_n) 每个点的度数为 n.
 (c) Q_n 都有完美匹配 $(n \geq 2)$.
 (d) Q_n 的点色数为 2，边色数为 n
 (e) Q_n 具有 2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边.

(2) 彼得森图
 (a) 彼得森图的点色数为 3, 边色数为 4，点独立数 3.
 (b) 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 3 和 3.
 (c) 彼得森图不是 H 图，是超 H 图.
 (d) 彼得森图有完美匹配.
 (e) 彼得森图不可 1-因子分解.
 (f) 彼得森图是不可平面图.

(3) 完全图 K_n
 (a) 生成树数：$\tau(K_n) = n^{n-2}$.
 (b) 完全图：点色数为 n，边色数为 $n-1$(n 为偶数)，n(n 为奇数)，点连通度和边连通度均为 $n-1$.
 (c) 无向完全图 K_n (n 为奇数)，共有 $(n-1)!$ 条没有公共边的哈密尔顿圈.
 (d) K_{2n} 完美匹配个数为 $(2n-1)!!$.
 (e) 完全图 K_{2n} 能够分解为 $(2n-1)$ 个边不相交的 1-因子之并.

(4) 偶图
 (a) G 是偶图 $\Leftrightarrow$ 不含奇圈.
 (b) n 阶完全偶图具有 m 条边，则 $m \leq \left[\frac{n^2}{4}\right]$(可用托兰定理推导).
 (c) 生成树数：$\tau(K_{n_1,n_2}) = n_1^{n_2-1} n_2^{n_1-1}$.
 (d) k 正则偶图没有割边.
 (e) k 正则偶图存在完美匹配.
 (f) k 正则偶图可以 1-因子分解.
 (g) 偶图是否存在饱和顶点集 X 的完美匹配 (Hall 定理).
 (h) 完全偶图 K_{n_1,n_2} 的最小点覆盖数为 $\min\{n_1, n_2\}$, 点独立数为 $\max\{n_1, n_2\}$.
 (i) 相等子图 G_l 有完美匹配 M^*，则 M^* 是最优匹配.
 (j) G 是偶图，点色数为 2，边色数为最大度 Δ.
 (k) $K_{n,n}$ 完美匹配个数为 $n!$.
 (l) $K_{n,n}$ 最大特征值为 n.