

计算物理 A——Homework 3

何金铭 PB21020660

1 题目描述

在球坐标系 (ρ, θ, φ) 下, 产生上半球面上均匀分布的随机坐标点, 给出其直接抽样方法。

2 实现方法

2.1 算法思路

利用直接抽样的方法解得 (ρ, θ, φ)

设点的面密度为 λ , 利用几何关系可得:

$$dN = \lambda dS = \lambda \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi = p(\theta, \varphi) d\theta d\varphi, (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]) \quad (1)$$

当样本点足够大时, 可认为是连续分布, 有

$$\int_0^\theta \int_0^\varphi p(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \xi(\theta, \varphi) \quad (2)$$

积分可得:

$$\lambda \rho^2 \int_0^\theta \int_0^\varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \lambda \rho^2 \int_1^{\cos \theta} \int_0^\varphi d \cos \theta d\varphi = \lambda \rho^2 \varphi \cdot (1 - \cos \theta) = \xi(\theta, \varphi) \quad (3)$$

其中, 进行归一化操作后, 最终式子为:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\theta \int_0^\varphi \sin(\theta) d\theta d\varphi = \xi, (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]) \quad (4)$$

2.1.1 直接抽样法

对 (4) 式进行分析, 发现其为一个二维联合概率密度分布函数, 由此可得其边缘分布概率密度函数 $p(\theta), p(\varphi)$:

$$p(\theta) = \sin(\theta) \quad (5)$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (6)$$

得概率分布函数 $F(\theta), F(\varphi)$:

$$F(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 1 - \cos \theta \quad (7)$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (8)$$

若有随机数 $\xi, \eta \in [0, 1]$, 则有

$$F(\theta) = 1 - \cos \theta = \xi = 1 - \xi, F(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} = \eta \quad (9)$$

最终有:

$$\begin{cases} \theta = \arccos \xi & \xi \in [0, 1] \\ \varphi = 2\pi\eta & \eta \in [0, 1] \end{cases} \quad (10)$$

算法具体步骤为

1. 先生成随机数 $\xi, \eta \in [0, 1]$
2. 代入表达式 $\theta = \arccos \xi, \varphi = 2\pi\eta$ 即可得到结果

2.1.2 变换抽样法

虽然要求用直接抽样法, 但还是用变换抽样法来进行验证
进行变量替换:

$$\begin{cases} u = \cos \theta & u \in [0, 1] \\ 2\pi v = \varphi & v \in [0, 1] \\ g(u, v) = 1 \end{cases} \quad (11)$$

其结果与直接抽样法给出的结果相同, 所以可认为 0 到 1 的随机数 u, v 可通过 (4) 式来导出球面上均匀点的 (θ, φ) 分布。

3 程序说明

3.1 主要程序

schrage.c 16807 随机数生成器的代码

uniform_shpere.py 直接产生样本点 (θ, φ) , 以及进行作图的代码, 将结果写入"./out.csv"

3.2 程序结果

schrage.exe 16807 PRNG

16807.csv 一个种子数为"23942907" 的样本随机数文件

./out.csv 2500 个球面上的随机数点的坐标, 其中左列为 θ 坐标, 右列为 φ 坐标

./pic 文件夹路径, 里面存放了一些 2500 个球面上随机点的图片

3.3 其他说明

1. 数据都写于 CSV 文件中
2. 其中 Python 程序用到的库有:

- matplotlib.pyplot : 用于作图
- numpy : 用于数据处理
- csv : 用于读写 CSV 文件

4 结果分析

4.1 得到的坐标

得到的坐标结果放于“./out.csv”中

4.2 可视化结果

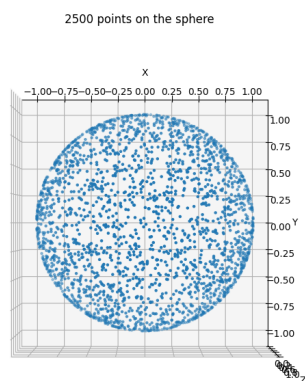


图 1: 2500 个随机点的俯视图

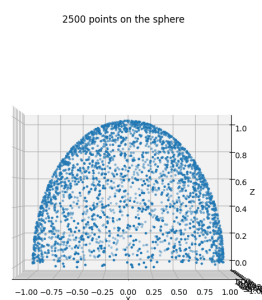


图 2: 2500 个随机点的侧视图

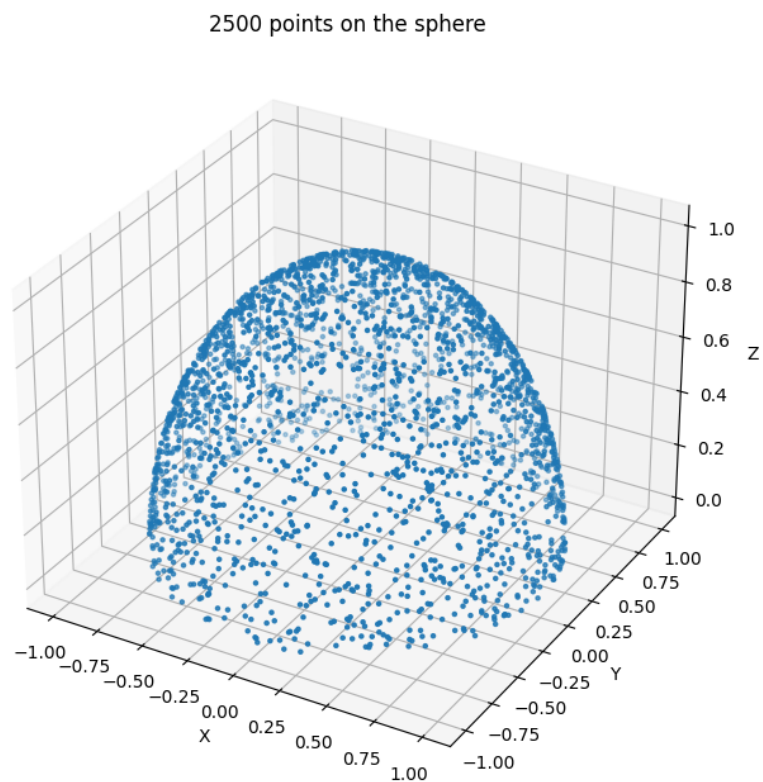


图 3: 2500 个随机点的斜视图

- 从俯视图来看, 结果应该是圆周的边界上密集, 中间稀疏, 符合要求
- 从侧视图来看, 结果也应该是圆周的边界上密集, 中间稀疏, 也大致符合要求

- 从斜视图来看, 还是边界密集, 中间稀疏, 符合要求

结果图像和数学知识可以发现从各个方向看到的随机点图像都应该是边界密集, 中间稀疏
从可视化结果可以看出可以球面上的随机点大致是均匀分布的, 可见推导的正确性.

5 进一步讨论

实际上, 由于直接抽样法和一般变换抽样法给出的表达式中含有三角函数, 运算较为慢, 也可以尝试 *Marsaglia* 抽样法

6 总结

1. 可以通过直接抽样法得出抽样结果 $\theta = \arccos \xi, \varphi = 2\pi\eta, (\xi, \eta \in [0, 1])$
2. 结果也可以通过变换抽样法给出
3. 从各个方向看球面上随机分布的点应该是中间稀疏, 两边密集
4. 虽然思路简单, 但是运算速度有待改进