计算物理 A——Homework 11

何金铭 PB21020660

1 题目描述

模拟 2 维 DLA 以及介电击穿（DBM）图案并讨论

2 理论分析

2.1 DLA

格点 DLA 的模拟规则是，取一个 2 维的方形点阵，在点阵中央原点处放置一个粒子作为生长的种子，然后从距原点足够远的圆周界处释放一个粒子，让它作 Brown 运动或随机行走，其结果是：该粒子走到种子的最近邻位置与种子相碰，这时让粒子粘结到种子上不再运动；或者粒子走到大于起始圆的更远处（如 2-3 倍的半径处）或干脆走到点阵边界，这时认为粒子走了一条无用的轨迹，取消该粒子，把它重新放回原点。因此，那些有用的粒子与种子相粘结后形成不断生长的聚集集团。

2.2 DBM

介质击穿模型满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1}$$

其边界条件为 $\phi_{center} = \phi_0$，$\phi_{edge} = 0$
若用计算机模拟，则可列出离散的 Laplace 方程（等步长差分法）：

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}}{4} \tag{2}$$

假定此模型的生成速率 $v = f(\nabla^2\phi)$，在一下的分析中有假设：

$$v_{i,j} = n\left|\phi_0 - \phi_{i.j}\right|^{\eta} \tag{3}$$

其中 n 为已被占据的格子数目，η 为速度参数
于是环绕已占据格子周界上的一个空格子被占据的几率是

$$P_{i,j} = \frac{v_{i,j}}{\sum v_{i,j}} \tag{4}$$

2.3 分形维数的计算

表述分形图案的主要方法就是研究它的分形维数。其中对于 DLA 模型和 DBM 模型，最常用的方法就是 SandBox 法。

2.3.1 SandBox

Sandbox 法是将一系列尺寸 r 不断增大的方框（也可以是圆）覆盖到分形图形（如 DLA 图形）上，计数不同方框（或圆）中象素数 N（即以象素为测量单元），在 $\log N \sim \log r$ 图上如有直线部分，则在此范围内存在：$N \sim r^D$，直线部分的斜率即分形维数 D。Sandbox 法也可以应用于一维和三维空间或更高维空间中的分形。

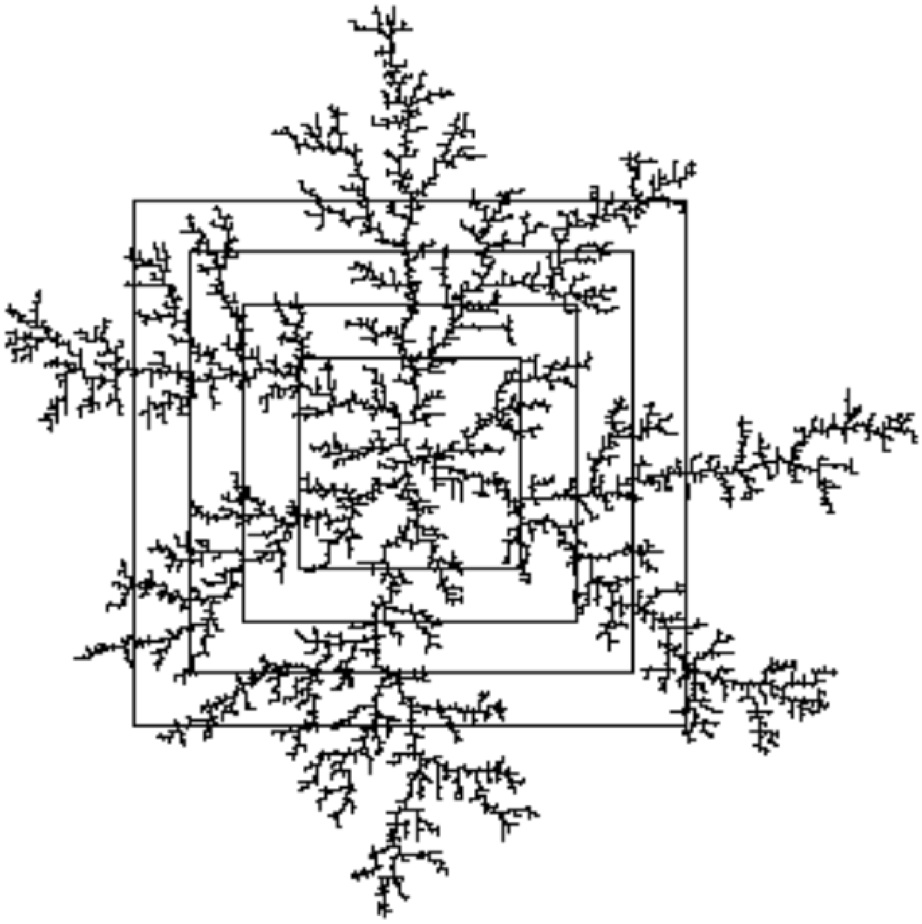

图 1: SandBox 法示意图

在处理 $\log N \sim \log R$ 图像的时候，我们需要给出其直线部分的斜率。其中做了近似分析，遍历整条曲线，当其斜率变化达到阈值 $1 - THRUSTER$ 之后，就认为不再是直线。

3 算法模拟

3.1 DLA

由于直接按理论分析中的规则模拟，则计算量将会过大。这里给出一种快速的算法。

注：以下讨论的内容都是在 10000×10000 的格点中讨论的。

3.1.1 一些算法的假设与大致思路

1. 设初始时的中心集团大小为 $k \times k$ 的正方形（k 为一个的小量）

2. 设粒子出发的起始圆周半径为 $R_0 = \sqrt{2} \cdot k + \alpha$（$\alpha$ 为一个不大的数），每次随机于圆上取一个点，此操作等价于一个从远处来的随机游走的粒子。
3. 若粒子碰到了集团，则成为集团的一个部分；若粒子运动到了 $ALPHA \cdot R_n$ 以外，则舍弃该粒子，重新开始。(其中 $ALPHA$ 为逃逸半径系数)
4. 当集团于第 n 次触碰到了边界则记此半径为 R_n，并取 $R_{n+1} = R_n + \alpha$
5. 重复多次操作即可生成。

3.2 DBM

由于复杂的边界难以处理，下面仅分析正方形（边长 $L = 300$）边界的 DBM 模型。

3.2.1 一些算法的假设与大致思路

1. 求解 Laplace 方程，求出电势分布 $\phi_{i,j}$
2. 通过搜索来寻找种子的边缘部分。
3. 计算集团边界处的粒子生长速度，并计算出其概率
4. 通过其概率分布，进行随机数抽样来决定生长的节点
5. 重新计算电势分布，并重复上述操作

3.2.2 有限差分法 (Jacobi 迭代法) 解 Laplace 方程

1. 先给特定的格点附上初始值，如种子格点赋值 PHI_0，边界格点赋值 0。
2. 再给其余的格点的电势赋上任意初值，于代码中赋值 $\dfrac{PHI\_0}{2}$。
3. 由 Laplace 的差分形式 $\phi_{i,j} = \dfrac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1}}{4}$ 遍历格点，并且进行迭代，直至达到迭代次数，或者精度要求时停止。
4. 再由得到的电势分布来模拟 DBM 模型

3.2.3 随机游走方法解集团边缘节点的 Laplace 方程

由于此部分模拟出来结果不太正确，之后不详细讨论，只简单的理论分析。
有理论公式:

$$\langle \phi_0 \rangle = \sum_{n}^{N} \frac{\Phi(s^{(n)})}{N} \tag{5}$$

1. 于占有部分边缘部位生成一个随机游走的粒子
2. 若粒子最终回到中间的种子部位，则计数器 1 加一
3. 总概率 $P = \dfrac{N_{back}}{N_{tol}}$

但是由于粒子回来的概率过大，其值超过计算机的浮点数的精度，故不可取。

4 程序说明

4.1 主要程序

dla.c 生成 DLA 模型的代码以及 SandBox 计数法代码

dbm_2.c 有限差分法 (Jacobi 迭代法) 生成 DBM 模型的代码

dla_visual.py 用于可视化作图 DLA 模型

dbm_visual.py 用于可视化作图 DBM 模型

sandbox.py 用于处理 SandBox 法的数据的代码

4.2 程序结果

dla.exe 生成 DLA 模型的代码以及 SandBox 计数法代码

dbm_2.exe 有限差分法 (Jacobi 迭代法) 生成 DBM 模型的代码

./data/DLA 文件夹路径,里面存放了各种与 DLA 模型有关的数据。其命名格式为:“dla_k_ALPHA_N”。例如 “dla_3_2_50000” 代表 DLA 模型，其参数 $k = 3, ALPHA = 2, N = 50000$。若命名格式为：“dla_sand_k_ALPHA_N”，则表示相应的 SandBox 法的数据

./data/DBM 文件夹路径,里面存放了各种与 DBM 模型有关的数据。其命名格式为:“dbm_k_ETA_ALPHA_N” 例如“dbm_3_1_200”代表 DLA 模型,其参数 $k = 3, \eta = 2, L = 200$。若命名格式为:“dbm_sand_k_ETA_AL 则表示相应的 SandBox 法的数据

./pic/DLA 文件夹路径, 里面存放了各种与 DLA 模型有关的图片，命名方式与上面一致。

./pic/DBM 文件夹路径, 里面存放了各种与 DBM 模型有关的图片，命名方式与上面一致。

4.3 其他说明

1. 数据都写于 CSV 文件中
2. 其中 Python 程序用到的库有:

- matplotlib.pyplot：用于作图
- numpy：用于数据处理
- csv：用于读写 CSV 文件

5 结果分析

5.1 DLA

5.1.1 正方形种子边长 $k=3$，逃逸半斤系数 $ALPHA=2$，不同迭代次数 N 的结果

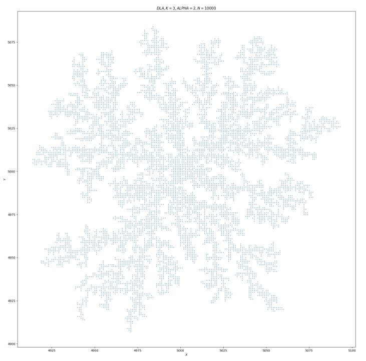

图 2: $N=10000$

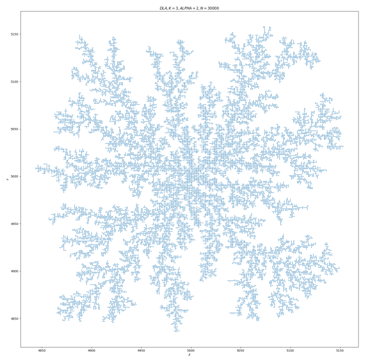

图 3: $N=30000$

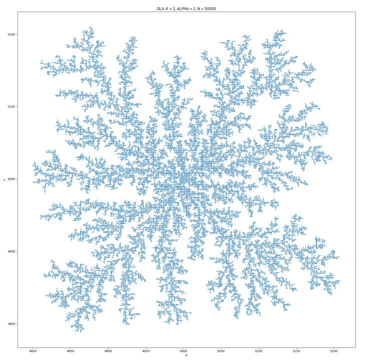

图 4: $N=50000$

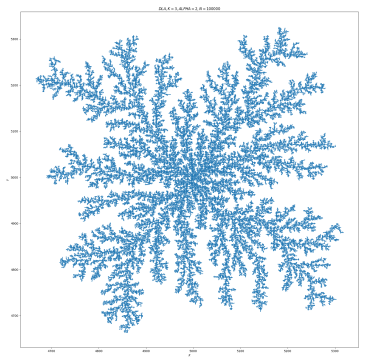

图 5: $N=100000$

可以发现当迭代次数增加的时候，图像变得更加密集。并且其形状的特征保持不变，间接说明了其分形性质。

下面分析其分形维数 D，做出 $\log N \sim \log R$ 图像并且对其直线部分进行最小二乘法拟合:

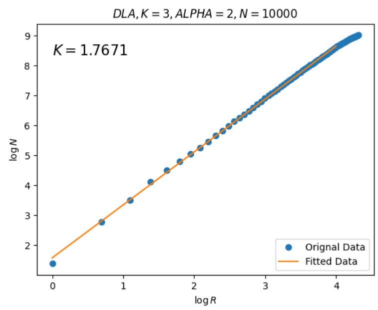

图 6: $N = 10000$

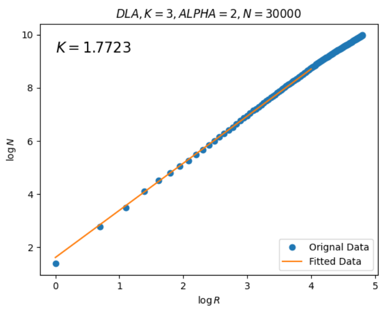

图 7: $N = 30000$

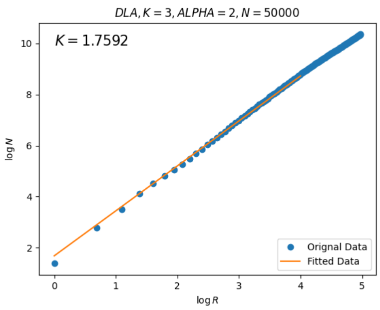

图 8: $N = 50000$

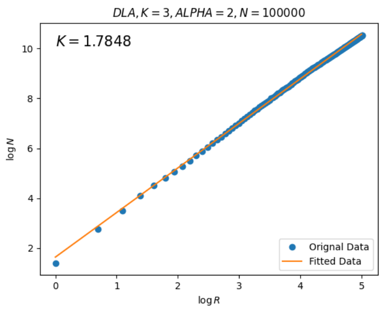

图 9: $N = 100000$

N	10^4	3×10^4	5×10^4	10^5
D	1.7671	1.7723	1.7592	1.7848

表 1: N-D 关系表

5.1.2 正方形种子边长 $k = 3$，迭代次数 $N = 50000$，不同逃逸半斤系数 $ALPHA$ 的结果

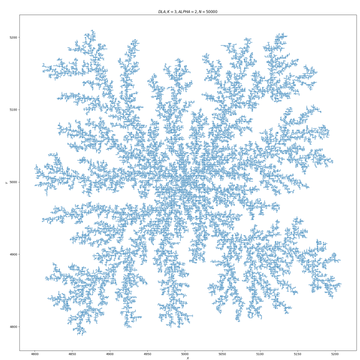

图 10: $ALPHA = 2$

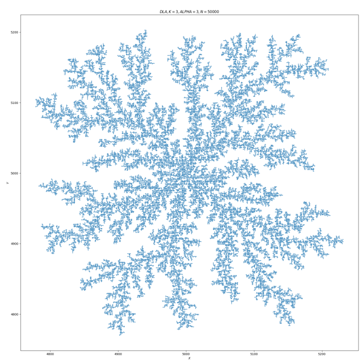

图 11: $ALPHA = 3$

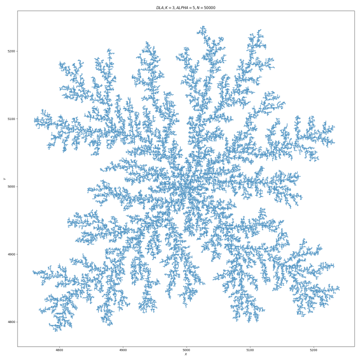

图 12: $ALPHA = 5$

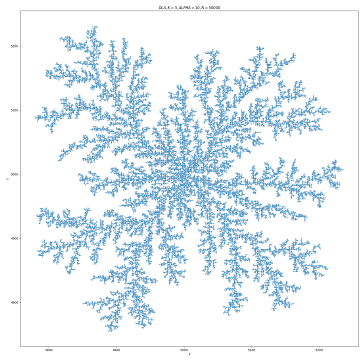

图 13: $ALPHA = 10$

可以直观的看出逃逸半径 $ALPHA$ 对于相同点数的 DLA 模型是有影响的，且分析可得逃逸半径 $ALPHA$ 越大，DLA 模型的精度越高。

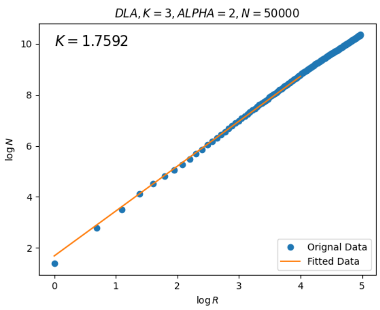

图 14: $ALPHA = 2$

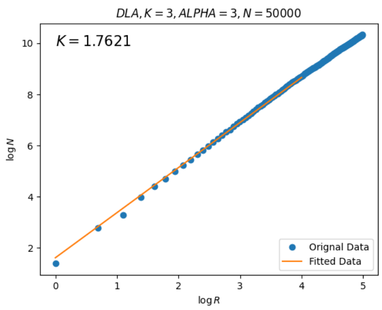

图 15: $ALPHA = 3$

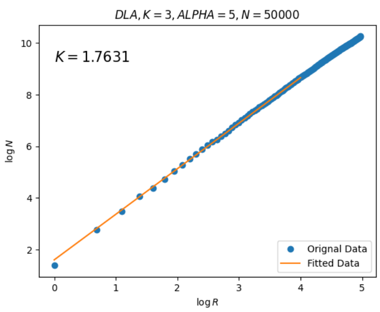

图 16: $ALPHA = 5$

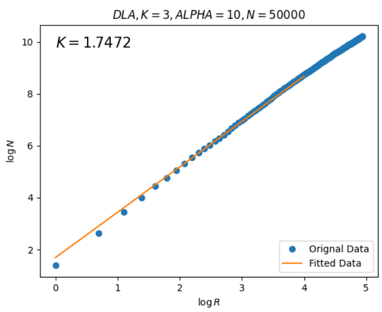

图 17: $ALPHA = 10$

ALPHA	2	3	5	10
D	1.7592	1.7621	1.7631	1.7472

表 2: ALPHA-D 关系表

5.2 DBM

由于 Jacobi 迭代的计算速度过慢，暂时也没写出更好的算法，于是此处讨论的图案大小都比较小。

5.2.1 正方形种子边长 $k=3$，比例系数 $\eta=1$，不同边界边长 L 的结果

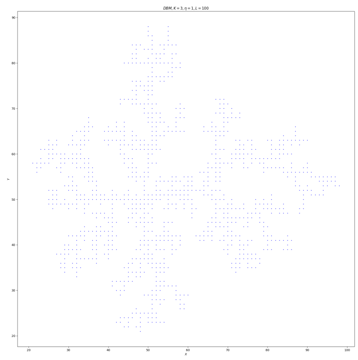

图 18: $L=100$

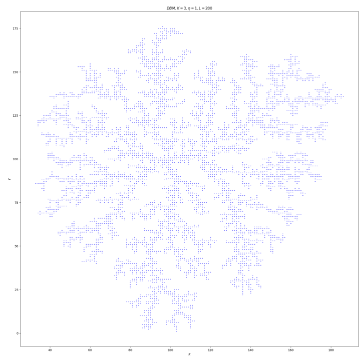

图 19: $L=200$

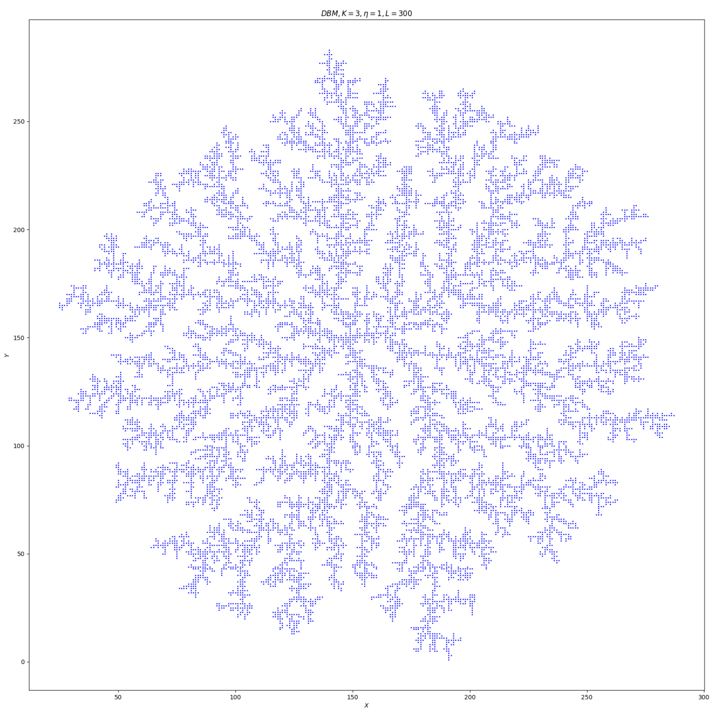

图 20: $L=300$

可以发现：

1. 随着边界长度的增大，越来越不容易击穿，图像生长得越来越大。且保持特征不变
2. 可以发现其与上面的 DLA 模型类似。

下面分析其分形维数 D：

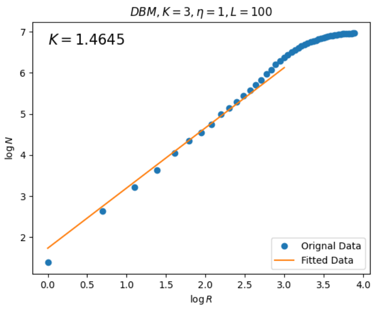

图 21: $L = 100$

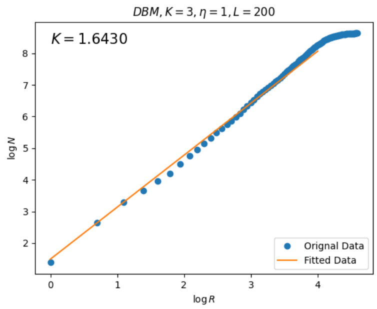

图 22: $L = 200$

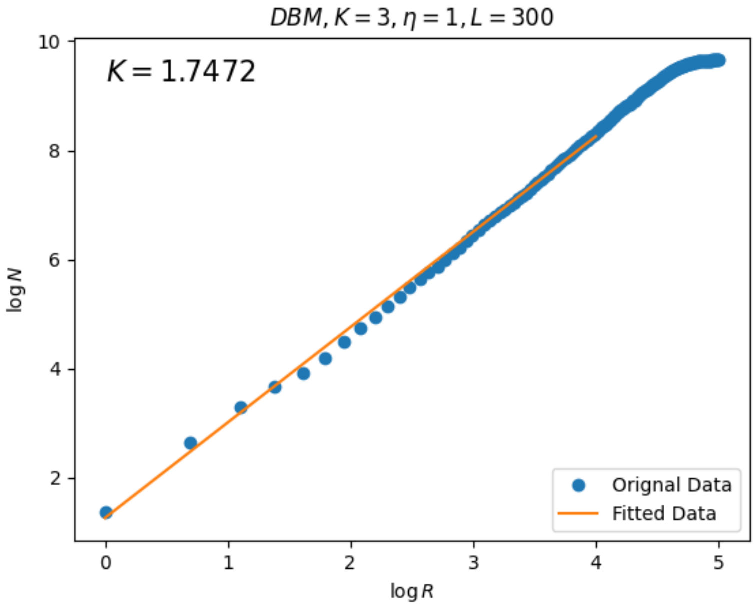

图 23: $L = 300$

L	100	200	300
D	1.4645	1.6430	1.7472

表 3: L-D 关系表

发现随着 L 的增大，其维数逐渐增加，说明当边界变大的时候，DBM 会越来越像 DLA 模型。

5.2.2 正方形种子边长 $k=3$，边界边长 $L=200$，不同比例系数 η 的结果

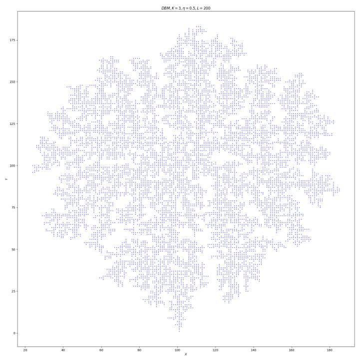

图 24: $\eta = 0.5$

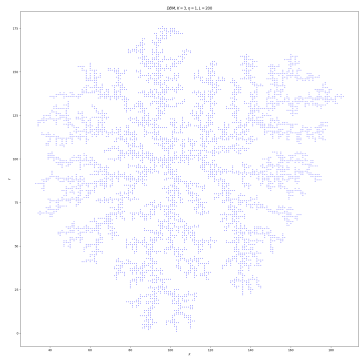

图 25: $\eta = 1$

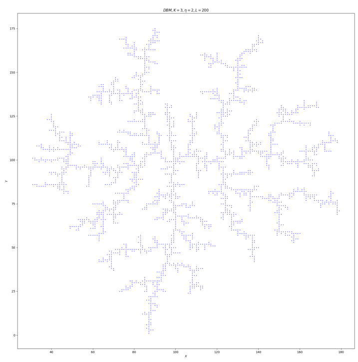

图 26: $\eta = 2$

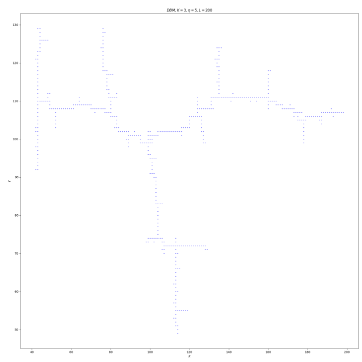

图 27: $\eta = 5$

可以发现

1. 随着 η 的增大，其分形图案越来越不明显。
2. 可以理解为随着 η 的增大，越来越容易击穿。

下面分析其分形维数 D:

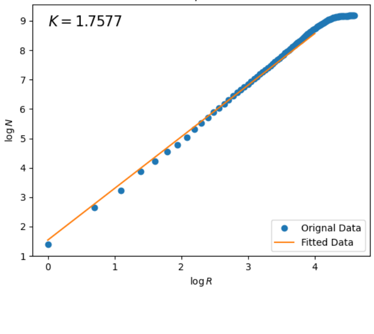

图 28: $\eta = 0.5$

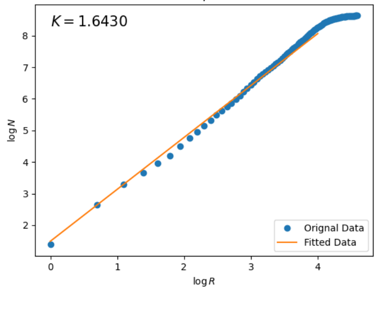

图 29: $\eta = 1$

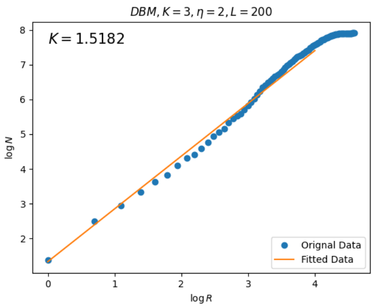

图 30: $\eta = 2$

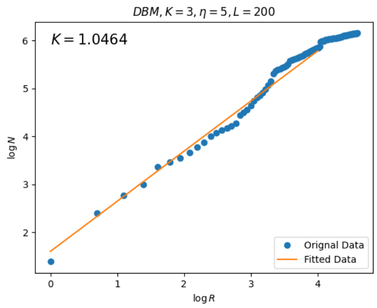

图 31: $\eta = 5$

η	0.5	1	2	5
D	1.7592	1.6430	1.5182	1.0464

表 4: η-D 关系表

1. 发现当 η 增大的时候，其分形维数逐渐减少
2. 且当 $\eta = 5$ 时，其 $\log N \sim \log R$ 的线性性变得极差，且 $N \simeq R$，其结果约为一次函数，说明其生长几乎是直线进行的。

5.3 DLA 和 DBM 模型的比较

由上述分析可得：

1. 发现 DLA 模型的分形维数约为 1.78；而 DBM 的分形维数随着边界和 eta 变化而变化
2. 当 $\eta \leq 1$ 时，DLA 模型和 DBM 模型类似，其分形维数也接近。

6 总结

1. 验证发现，DLA 和 DBM 图形相似，且均为分形图案，随着迭代次数的增加，其图案仍然保持原来的特征。
2. 发现 DLA 图形的分形维数 $D \simeq 1.78$；DBM 图形的分形维数 D 随 η 改变
3. DBM 图形随比例系数 eta 的增加，其分形维数逐渐降低，代表的越容易击穿。
4. 其中在计算 DBM 图形的电势分布时，发现 Jacobi 迭代法速度过慢，所以还需改进，尝试了随机游走方法，但效果不佳；也尝试了超豫迟迭代法，但效果与 Jacobi 方法类似，所以最终采取了 Jacobi 迭代法。