

计算物理 A——Homework 12

何金铭 PB21020660

1 题目描述

推导正方格子点阵上键逾渗的重整化群变换表达式 $p' = R(p)$ ，求临界点 p_c 与临界指数 ν ，与正确值（表 1.6.1.3-1）相比较。

维数	点阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	正方形	0.592746	0.50000	4

表 1: 表 1.6.1.3-1 节选

2 理论分析

2.1 标度变换法

做以下规定：

键数 a 是座与座之间连线的长度

新键数 a' 是经过重整化之后座与座之间连线的长度

放大因子 b 是经过重整化之后键数的放大系数，满足 $a' = b \cdot a$

占据概率 p 是键的占据概率

新占据概率 p' 是经过重整化之后新键的占据概率，且满足 $p' = R(p | b)$

临界点 p^* 是临界概率，满足 $p^* = R(p^*)$ ，代表了“相变”的临界概率

关联长度 ξ 是最大集团的最大直径

新关联长度 ξ' 是经过重整化之后最大集团的最大直径，且容易知道有 $\xi' = \frac{\xi}{b}$

临界指数 ν 是 ξ 于相变点处 ($p \rightarrow p^*$) 满足的与占据概率 p 关系的指数因子，且有表达式 $\xi = |p - p^*|^{-\nu}$

为了计算 p_c 附近 p' 与 p 的关系，做 Taylor 展开：

$$p' - p^* = R(p) - R(p^*) \approx (p - p^*) \left. \frac{dp'}{dx} \right|_{p=p^*} = (p - p^*) \left. \frac{dR(p)}{dp} \right|_{p=p^*} \quad (1)$$

为方便之后讨论，记：

$$\lambda = \left. \frac{dR(p)}{dp} \right|_{p=p^*} \quad (2)$$

2.2 键逾渗 bond percolation

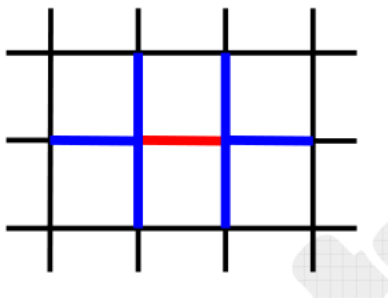


图 1: 键逾渗示意图

当一根键联通之后，会和其他 6 根键相导通，对于正方形格点来说只有一条线将上下边界相互导通，则可认为发生了逾渗。

2.3 重整化

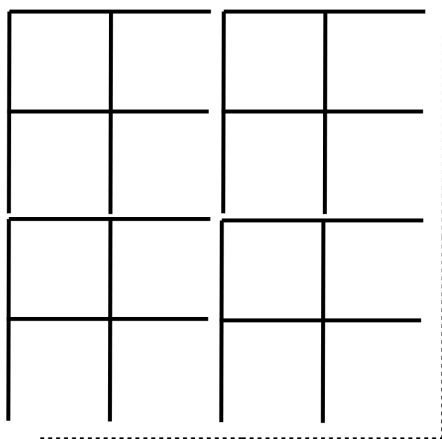


图 2: 标度变换示意图

可以从一个正方形点阵中找出一些有规律的重复单元，并将他们进行粗粒化处理。比如可以将一个 4×4 的正方形格点化为四个 2×2 的正方形格点的组合。同理可以将一个 2×2 的正方形格点化为 4 个 1×1 的正方形格点。于此处不考虑右边界和下边界，原因是一个基本单元的右边界和下边界可以由其他重复单元来提供。所以有以下重整化方法：

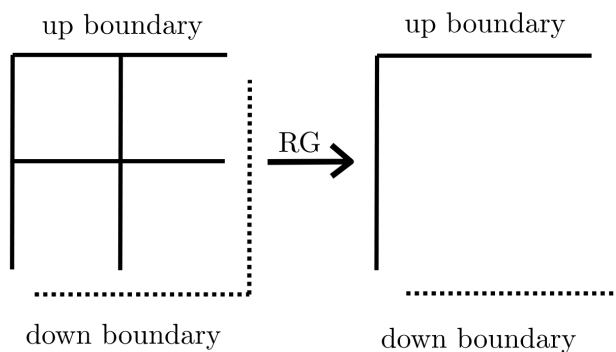


图 3: 重整化方法示意图

可知此变换方法满足:

变换前的边长 a : $a = 1$

变换后的边长 a' : $a' = 2$

所以有 $b = 2$

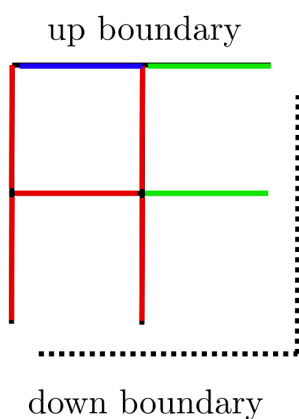


图 4: 有效线段分析

由于并不是每条线段都对导通起作用, 这里去掉一些线段。其中蓝线位于上边界处, 所以其是否占有对结果无影响; 绿色线段不与下边界相连, 所以也无影响, 剩下有用的线段为 5 条红色线段。下面分析其所有的可能的有效的占有状态。

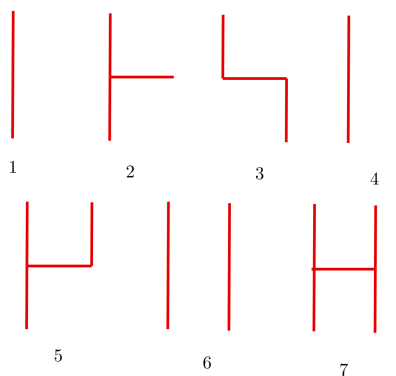


图 5: 可能导通的路径枚举

state 1 $p_1 = 2p^2(1-p)^3$

state 2 $p_2 = 2p^3(1-p)^2$

state 3 $p_3 = 2p^3(1-p)^2$

state 4 $p_4 = 4p^3(1-p)^2$

state 5 $p_5 = 4p^4(1-p)$

state 6 $p_6 = p^4(1-p)$

state 7 $p_7 = p^5$

所以有：

$$p' = R(p | b = 2) = \sum_{i=1}^7 p_i = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2 \quad (3)$$

$$R(p)' = 10p^4 - 20p^3 + 6p^2 + 4p \quad (4)$$

代入 $p^* = R(p^* | b = 2)$ 得：

$$p^*(p^* - 1)(2p^* - 1)(p^* - \frac{1 + \sqrt{5}}{2})(p^* - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}) = 0 \quad (5)$$

取 $p^* \in (0, 1)$, 得 $p^* = \frac{1}{2}$

2.4 临界指数 ν 的计算

有关系：

$$\xi' = \frac{1}{b}\xi \Rightarrow |p' - p^*|^{-\nu} = \frac{1}{b} |p - p^*|^{-\nu} \quad (6)$$

并且有关系：

$$p' - p^* = \lambda(p - p^*) \Rightarrow |p' - p^*|^{-\nu} = \lambda^{-\nu} |p - p^*|^{-\nu} \quad (7)$$

所以有关系 $b = \lambda^\nu$

$$\nu = \frac{\log b}{\log \lambda} \quad (8)$$

代入 $b = 2$, $R(p)'|_{p=p^*=\frac{1}{2}} = \frac{13}{8}$ 得：

$$\nu = \frac{\log 2}{\log \frac{13}{8}} = 1.4277 \quad (9)$$

3 程序说明

由于本次作业无程序部分，所以略过。

4 结果分析

维数	点阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	正方形	0.592746	0.50000	4

表 2: 表 1.6.1.3-1 节选

将 $p_c = \frac{1}{2}$ 与表中结果对比发现, 结果相同。

5 总结

1. 得出结果 $p' = R(p \mid b = 2) = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2$, $p_c = \frac{1}{2}$, $\nu = 1.4277$
2. 本次作业推导了键逾渗的临界概率, 与座逾渗有所差别, 有较大收获。