计算物理 A——Homework 17

何金铭 PB21020660

1 题目描述

进行单中心 DLA 模型的模拟 (可以用圆形边界，也可以用正方形边界)，并用两种方法计算模拟得到的 DLA 图形的分形维数，求分形维数时需要作出双对数图。

注：由于在第 11 次作业中已经对 DLA 模型做过一些讨论，在这里会参考一部分第 11 次作业中的内容。

2 理论分析

2.1 DLA

格点 DLA 的模拟规则是，取一个 2 维的方形点阵，在点阵中央原点处放置一个粒子作为生长的种子，然后从距原点足够远的圆周界处释放一个粒子，让它作 Brown 运动或随机行走，其结果是：该粒子走到种子的最近邻位置与种子相碰，这时让粒子粘结到种子上不再运动；或者粒子走到大于起始圆的更远处（如 2-3 倍的半径处）或干脆走到点阵边界，这时认为粒子走了一条无用的轨迹，取消该粒子，把它重新放回原点。因此，那些有用的粒子与种子相粘结后形成不断生长的聚集集团。

2.2 分形维数的计算

表述分形图案的主要方法就是研究它的分形维数。其中对于 DLA 模型和 DBM 模型，最常用的方法就是 SandBox 法。

2.2.1 SandBox

Sandbox 法是将一系列尺寸 r 不断增大的方框（也可以是圆）覆盖到分形图形（如 DLA 图形）上，计数不同方框（或圆）中象素数 N（即以象素为测量单元），在 $\log N \sim \log r$ 图上如有直线部分，则在此范围内存在：$N \sim r^D$，直线部分的斜率即分形维数 D。Sandbox 法也可以应用于一维和三维空间或更高维空间中的分形。

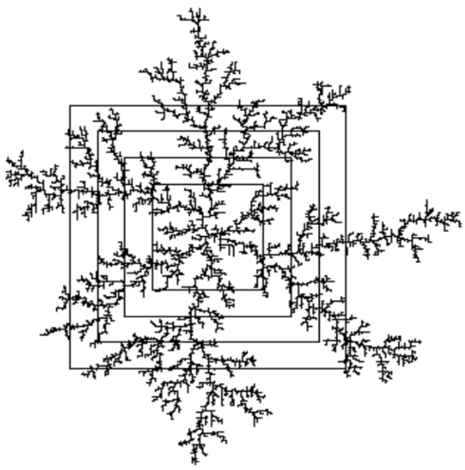

图 1: SandBox 法示意图

在处理 $\log N \sim \log R$ 图像的时候，我们需要给出其直线部分的斜率。其中做了近似分析，遍历整条曲线，当其斜率变化 $\Delta = \dfrac{|N_k - N_{k-1}|}{N_{k-1}}$ 达到阈值 $THRUSTER$ 之后，就认为不再是直线。

2.3 回转半径法

对于 DLA 模型，其分形中心已知，回转半径 R_g 的定义是：

$$R_g^2 = \frac{\sum r_i^2}{N} \quad (i = 1, 2, 3 \dots N) \tag{1}$$

其中 r_i 是像素 i 至分形中心的距离，i 遍及所有像素。

做出其 $\ln N \sim \ln R_g$ 图，如果有直线的部分，则此部分的斜率就是分形维数 D。

同上，在处理 $\log N \sim \log R$ 图像的时候，我们需要给出其直线部分的斜率。其中做了近似分析，遍历整条曲线，当其斜率变化 $\Delta = \dfrac{|N_k - N_{k-1}|}{N_{k-1}}$ 达到阈值 $THRUSTER$ 之后，就认为不再是直线。

3 算法模拟

由于在第 11 次作业中有对各种格点大小规格的讨论，这里就采用一种固定的大小与模拟点数。

3.1 DLA

由于直接按理论分析中的规则模拟，则计算量将会过大。这里给出一种快速的算法。

注：以下讨论的内容都是在 10000×10000 的格点中讨论的。且取模拟 DLA 的总点数为 50000 个点，

3.1.1 一些算法的假设与大致思路

1. 设初始时的中心集团大小为 $k \times k$ 的正方形（k 为一个的小量）
2. 设粒子出发的起始圆周半径为 $R_0 = \sqrt{2} \cdot k + \alpha$（$\alpha$ 为一个不大的数），每次随机于圆上取一个点，此操作等价于一个从远处来的随机游走的粒子。
3. 若粒子碰到了集团，则成为集团的一个部分；若粒子运动到了 $ALPHA \cdot R_n$ 以外，则舍弃该粒子，重新开始。(其中 $ALPHA$ 为逃逸半径系数)
4. 当集团于第 n 次触碰到了边界则记此半径为 R_n，并取 $R_{n+1} = R_n + \alpha$
5. 重复多次操作即可生成。

3.2 Sandbox 法

1. 取生长中心为原点,画出一系列的以原点为中心的同心正方形,每次取的正方形边长为 $1, 2, 3, \dots$。
2. 遍历每个正方形中的点，判断其占有状态，记录正方形中的占有数 N。
3. 将半径 r 和数目 N 写入文件中。

3.3 回转半径法

1. 取生长中心为原点,画出一系列的以原点为中心的同心正方形,每次取的正方形边长为 $1, 2, 3, \ldots$。
2. 遍历每个正方形中的点，判断其是否位于以原点为圆心，半径为 $1, 2, 3, \ldots$ 的圆内，记录圆中的占有数 N。
3. 将半径 r 和数目 N 写入文件中。

4 程序说明

4.1 主要程序

注:助教检查的时候可以手动修改各种参数与输出的文件路径。

dla.c 生成 DLA 模型的代码以及 SandBox 计数法代码

dla_visual.py 用于可视化作图 DLA 模型**仅为作图程序，助教无须检查**

sandbox.py 用于处理 SandBox 法得到的数据的代码**仅为作图程序，助教无须检查**

r.py 用于处理回转半径法得到的数据的代码**仅为作图程序，助教无须检查**

4.2 程序结果

dla.exe 生成 DLA 模型的代码以及 SandBox 计数法与回转半径计数法代码

- **float rn()** 随机生成一个随机数 $\xi \in [0, 1]$ 并返回
- **double pow_2(long cor,double index)** 一个整数型的乘幂函数
- **int check(int **dot,int x,int y)** 一个判断数组 dot 中是否被占有的函数
- **void sandbox(int **dot,int *sandbox_r,int *sandbox_n)** sandbox 计数法
- **void radius(int **dot,int *radius_r,int *radius_n)** 回转半径计数法

./data 文件夹路径，里面存放了各种与 DLA 模型有关的数据。

- **dla.csv** 里面有生成的 DLA 模型的占有位置的原始数据，其中第一列为 x 轴坐标，第二列为 y 轴坐标。
- **dla_sand.csv** 里面有 Sandbox 计数法 (thruster=0.01) 得到的数据，第一列为正方形的边长 r，第二列为正方形中的点数
- **dla_r.csv** 里面有回转半径法 (thruster=0.01) 得到的数据，第一列为回转半径 R_g，第二列为正方形中的点数
- **dla_sand_all.csv** 里面有 Sandbox 计数法 (thruster=10^{-5}) 得到的数据，第一列为正方形的边长 r，第二列为正方形中的点数
- **dla_r_all.csv** 里面有回转半径法 (thruster=10^{-5}) 得到的数据，第一列为回转半径 R_g，第二列为正方形中的点数

./pic 文件夹路径, 里面存放了各种与 DLA 模型有关的图片，具体对照报告中的图片即可。

4.3 其他说明

1. 数据都写于 CSV 文件中
2. 其中 Python 程序用到的库有:

- matplotlib.pyplot：用于作图
- numpy：用于数据处理

5 结果分析

以下结果均为 10000×10000 的正方形边界，且模拟点数均为 50000 个点。

5.1 DLA 图像的模拟

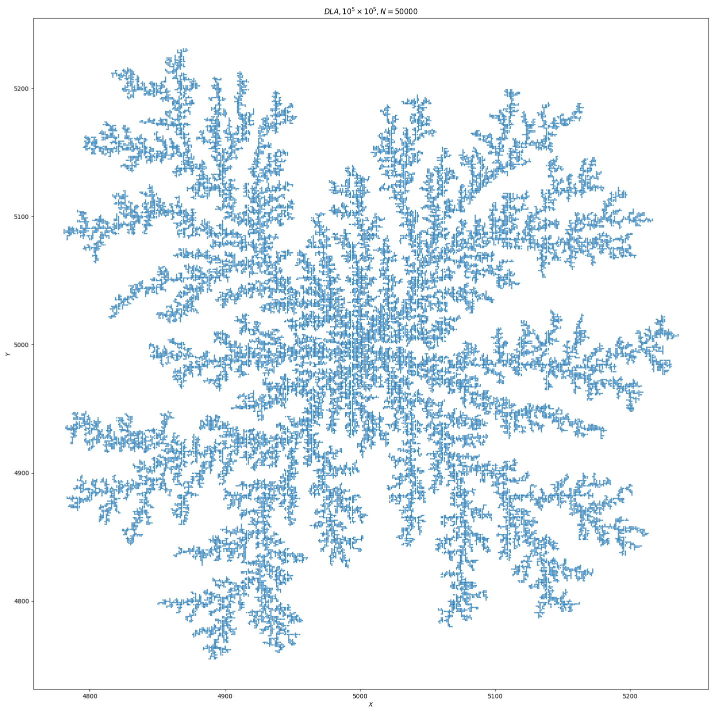

图 2: DLA 模拟图（$10^4 \times 10^4, N = 5 \times 10^4$）

发现得到的 DLA 模拟图比较合理。

5.2 Sandbox 计数法结果

5.2.1 调整阈值 THRUSTER 为 0.00001

当调整阈值较小时，得到的 $\ln N \sim \ln R$ 图比较完整，但线性性比较差。

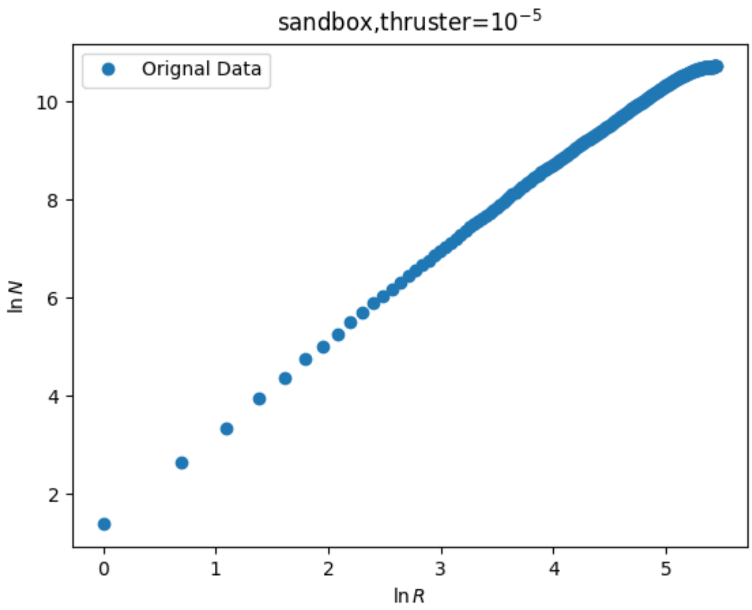

图 3: SandBox 计数法 $thruster = 10^{-5}$

发现大部分时候，点所构成的线都是线性的，这是由于取的格点边界较大，所以边缘效应几乎可以忽略。

5.2.2 调整阈值 THRUSTER 为 0.01

若调整阈值较大时，得到的线性性就比较强，且得到的数据长度适合。做最小二乘法的时候，去除前面 10 个点（去除起始无分形的过程）。

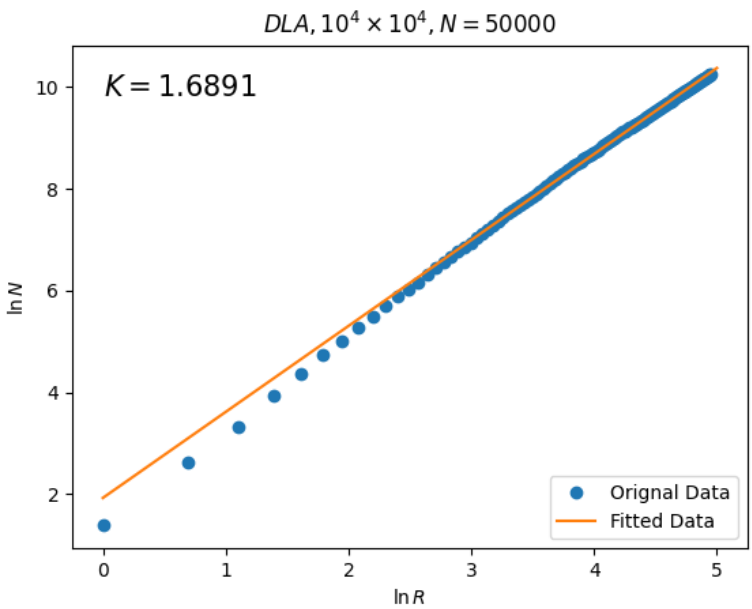

图 4: SandBox 计数法（$thruster = 10^{-2}$）

SandBox 法在判断线性的阈值为偏离 0.01 时，其得到的直线段的斜率为 $K = 1.6891$，于 1.6 ∼

1.7 之间合理。可知比较准确。

5.3 回转半径法计数结果

5.3.1 调整阈值 THRUSTER 为 0.00001

当调整阈值较小时，得到的 $\ln N \sim \ln R$ 图比较完整，但线性性比较差。

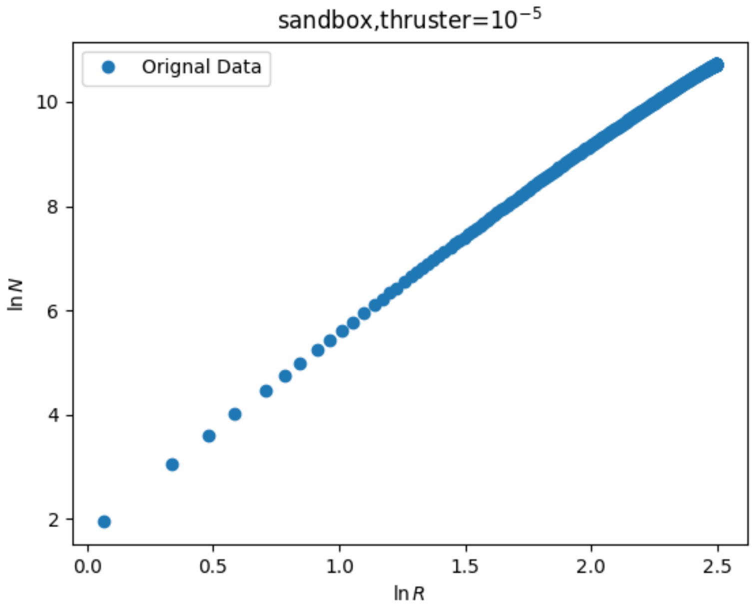

图 5: 回转半径法 $thruster = 10^{-5}$

由于取的格点边界较大，所以边缘效应几乎可以忽略。

5.3.2 调整阈值 THRUSTER 为 0.01

若调整阈值较大时，得到的线性性就比较强，且得到的数据长度适合。去除前面 10 个点（去除起始无分形的过程）。

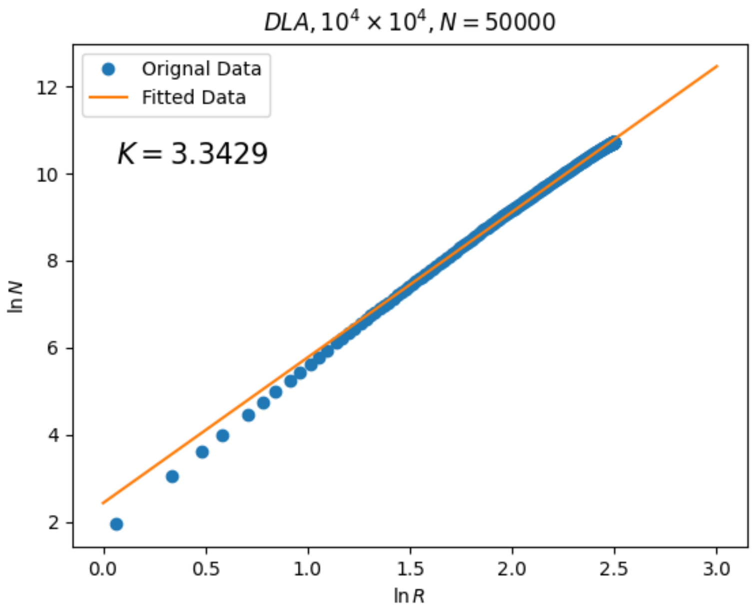

图 6: 回转半径法（$thruster = 10^{-2}$）

发现 $D = 3.3429$，远大于 1.6 ~ 1.7 可能的原因是模拟的数据点不够多。
进一步分析，取 thruster= 10^{-5} 时的情况，发现去除前 260 个数据点的时候有：

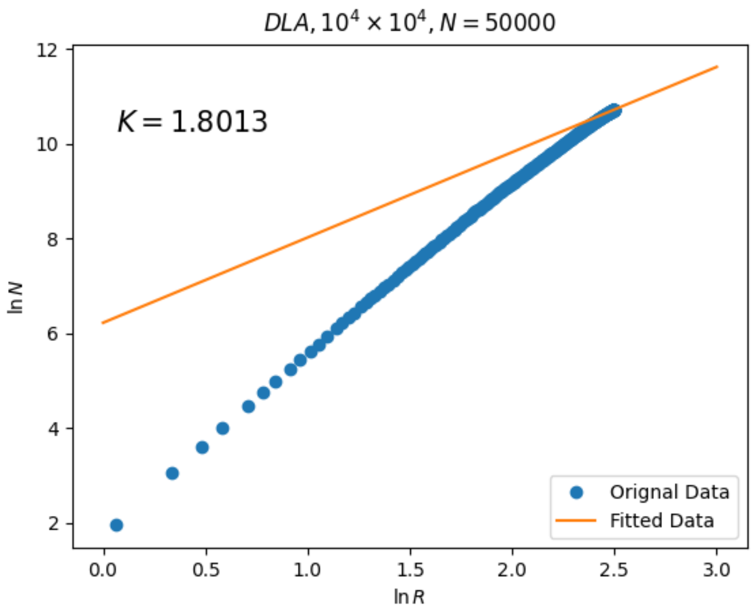

图 7: 回转半径法（$thruster = 10^{-2}$）

其斜率为 1.8013，分析可得是数据点不够多导致的。可能回转半径法需要有足够多的数据点。这样由于时间问题就不继续讨论了。

6 总结

1. 本次作业通过理想的 DLA 模型假设进行模拟，模拟出的 DLA 图像合理。但此假设是每次只有一个粒子会沉积，之后还可以进一步讨论每次有随机个数的点数沉积的情况。
2. 通过 SandBox 计数法得出的 DLA 模型的分形维数 $D = 1.6891$，结果比较合理。
3. 通过回转半径法得到的 DLA 模型的分形维数存在一些问题，可能是模拟数据点不够多导致的，需要之后继续讨论。