计算物理 A——Homework 5

何金铭 PB21020660

1 题目描述

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x, y) 平面上投影的几率分布函数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}, y = 2v\sqrt{1-r^2}, z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样。

2 实现方法

2.1 投影的几率分布函数

利用抽样变换法来解球面上均匀点于 (x, y) 平面上的投影的几率分布函数
设点的面密度为 λ，利用几何关系可得：

$$dN = \lambda\, dS = \lambda \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = p(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi, (\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]) \tag{1}$$

当样本点足够大时，可认为是连续分布，有

$$\int_0^\theta \int_0^\varphi p(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi = \xi(\theta, \varphi) \tag{2}$$

进行归一化之后得:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \xi(\theta, \varphi) \tag{3}$$

利用 $Jacobi$ 行列式法进行变量替换：

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}\right| = \sin\theta\cos\theta \end{cases} \tag{4}$$

则有：

$$g(x, y)\, dx\, dy = p(\theta, \varphi) \left|\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(x, y)}\right| dx\, dy \tag{5}$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= p(\theta, \varphi) \left|\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(x, y)}\right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\cos\theta} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{aligned} \tag{6}$$

所以得球面上均匀点于 (x, y) 平面上的投影的几率分布函数:

$$p(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \tag{7}$$

2.2 验证 $Marsaglia$ 抽样方法

再球面上的 $Marsaglia$ 抽样方法为:

$$\begin{cases} x = 2u\sqrt{1-r^2} \\ y = 2v\sqrt{1-r^2} \\ z = 1-2r^2 \\ u^2+v^2 = r^2 \qquad u,v \in [-1,1] \end{cases} \tag{8}$$

由于 u, v 随机均匀分布, 所以有 $g(u,v) = \frac{1}{4}$

利用等概率性, 我们有

$$\begin{aligned} p(x,y)\,dx\,dy = Cg(u,v)\,du\,dv &= g(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\,dx\,dy \\ &= Cg(u,v)\frac{1}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}\,dx\,dy \\ &= Cg(u,v)\frac{1}{4(1-2r^2)}\,dx\,dy \\ &= C\frac{1}{16\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy \end{aligned} \tag{9}$$

其中 C 为归一化常数.

需要加一个归一化常数的原因是积分的区域发生了改变, 由于在抽样时实际上取的面积比值为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $C = \frac{4}{\pi}$

最终可得:

$$p(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \tag{10}$$

发现结果与直接抽样法的结果相同.

当然, 我们所验证的只是必要条件而已 (仅仅是 $Marsaglia$ 方法在 o-xy 平面上的正确性) 若要完全验证, 还需严格的证明, 这里就不详细给出了.

2.3 算法思路

2.3.1 直接抽样法

利用直接抽样的方法解得 (ρ, θ, φ)

设点的面密度为 λ，利用几何关系可得：

$$dN = \lambda\,dS = \lambda\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = p(\theta,\varphi)\,d\theta\,d\varphi, (\theta\in[0,\pi]\,, \varphi\in[0,2\pi]) \tag{11}$$

当样本点足够大时，可认为是连续分布，有

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\theta\int_0^\varphi p(\theta,\varphi)\,d\theta\,d\varphi = \xi(\theta,\varphi) \tag{12}$$

积分可得：

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\theta\int_0^\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_1^{\cos\theta}\int_0^\varphi d\cos\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\varphi\cdot(1-\cos\theta) = \xi(\theta,\varphi) \tag{13}$$

进行变量替换:

$$\begin{cases} u = \cos\theta & u\in[-1,1] \\ 2\pi v = \varphi & v\in[0,1] \\ g(u,v) = 1 \end{cases} \tag{14}$$

抽样方法如下:

1. 产生随机数 $\xi,\eta\in[0,1]$
2. 做变换 $\xi' = 2\xi - 1$
3. 直接抽样得 $\theta = \arccos\xi', \varphi = 2\pi\eta$

2.3.2 $MarsagliaSampling$

抽样方法如下:

1. 先生成随机数 $\xi,\eta\in[0,1]$
2. 记 $w = \xi^2 + \eta^2$
3. 若 $w <= 1$, 则取样本点 $x = 2\xi\sqrt{1-w}, y = 2\eta\sqrt{1-w}$; 若不成立, 则重新操作 1.

3 程序说明

3.1 主要程序

schrage.c 16807 随机数生成器的代码

xy.py 利用直接抽样法和 Marsaglia 法产生球面上均匀点于 xy 平面上的随机投影坐标, 写入文件'./out1.csv','./Marsaglia.csv', 并作图

3.2 程序结果

schrage.exe 16807 PRNG

16807.csv 一个种子数为"23942907" 的样本随机数文件

./out 文件夹路径, 里面存放了用两种方法求得的随机点坐标文件, 在上文有提及.

./pic 文件夹路径, 里面存放了均匀点于 xy 平面上的投影的图像.

3.3 其他说明

1. 数据都写于 CSV 文件中
2. 其中 Python 程序用到的库有:

- matplotlib.pyplot：用于作图
- numpy：用于数据处理
- csv：用于读写 CSV 文件

4 结果分析

4.1 随机点坐标

直接抽样法的结果为'./out/out1.csv',Marsaglia 抽样法的结果为'./out/marsaglia.csv'

4.2 随机点图像

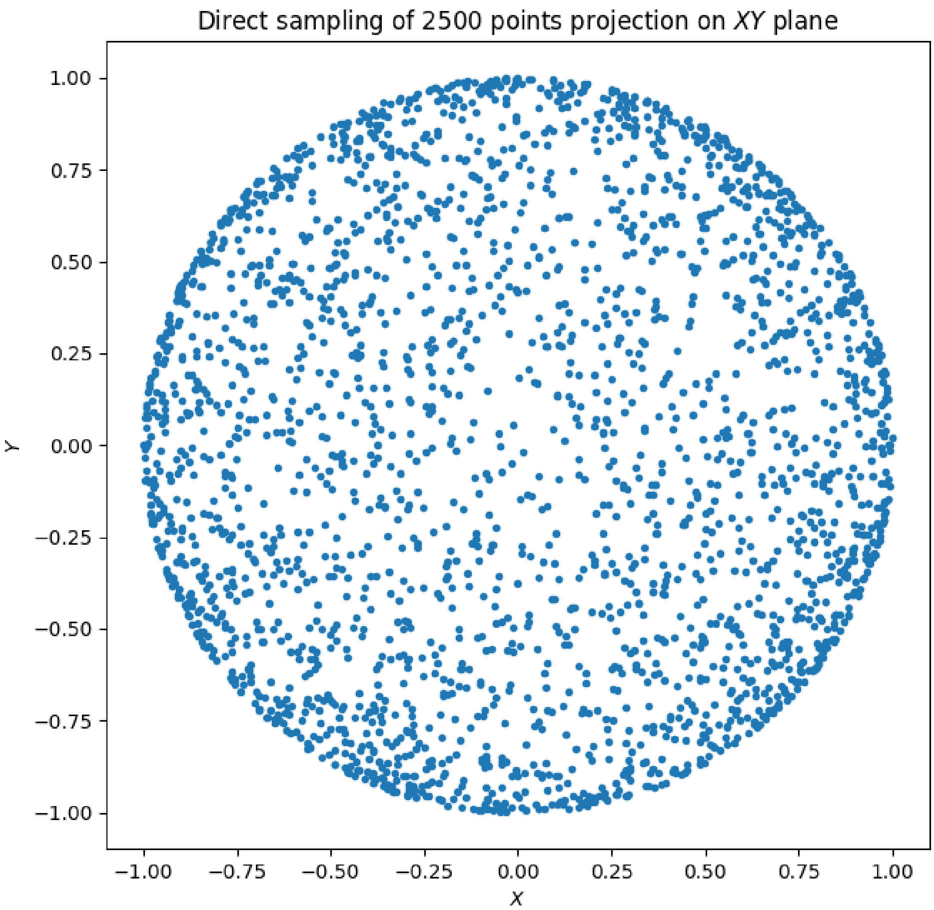

图 1: Direct Sampling

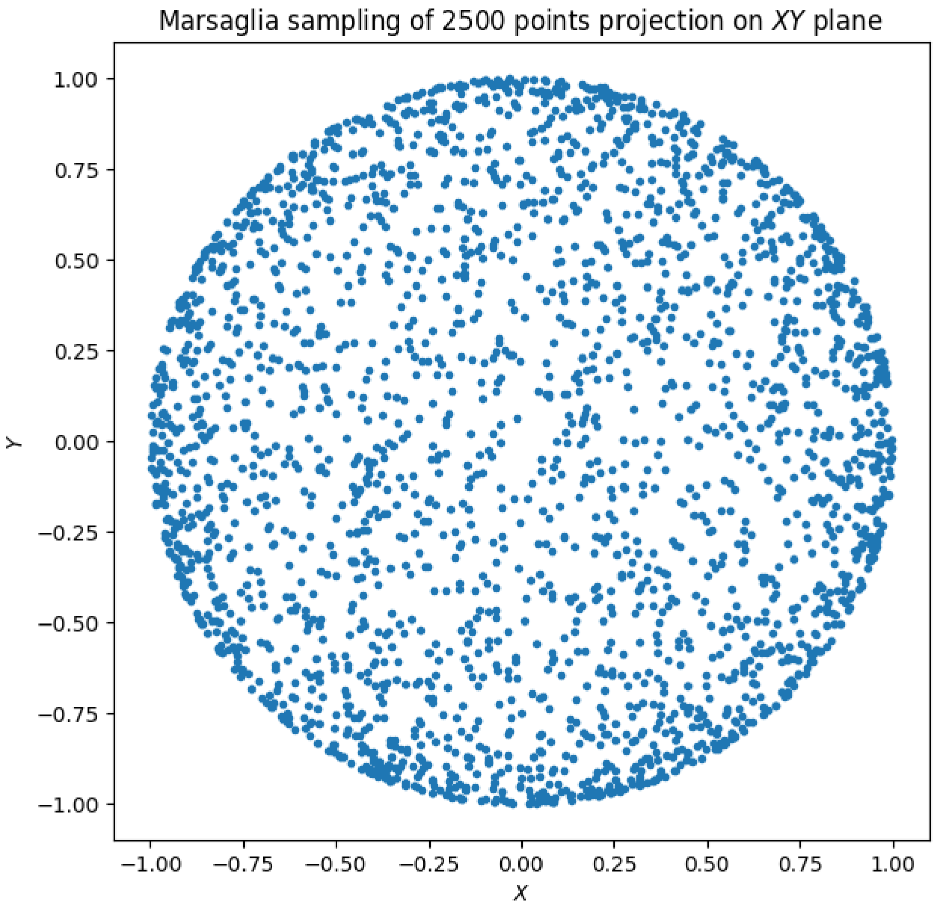

图 2: Marsaglia Sampling

通过观察可以发现利用两种不同方法产生的随机点于 xy 平面上的分布类似, 直观的说明了结论的正确性.

5 进一步讨论

之后还可以在此基础上来讨论两种方法的运算速度

6 总结

1. 三维球面上随机点于 xy 平面上的投影概率密度分布函数为 $p(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$
2. 成功检验 Marsaglia 抽样方法为球面上的均匀分布的随机抽样