組合 1

組合數學是一門研究可數或離散對象的數學，也就是如何數可以一個一個數的東西。競程裡面大部分的東西都是離散的，而許多動態規劃和資料結構題目都需要一些組合技巧，因此組合在競程的數學題裡面是十分重要的一部分。

1.1 基本計數原則

簡單的問題

有 1 元、2 元、4 元、8 元硬幣任意多個，有多少種方法湊成 20 元? 兩種方法視為不同，代表有至少一種幣值使用的硬幣個數不同。

用手算一下的話，可以發現答案為 56 種。雖然這個問題非常簡單，解答的過程中或許會不經意使用到核心的計數原則!

加法原理

假設有 k 個集合 $A_1, A_2, ..., A_k$，任兩個集合皆互斥，則

$$|\cup_{i=1}^{k} A_i| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

用白話講的話，當你要數符合某個條件的東西時，可以試著把它分成一些**互斥的情況**，把每種情況的方法數加起來得到答案。以剛剛的問題為例，我們可以將每一種方法依照「8 元硬幣個數」分類，剩下只需討論使用 1、2、4 元三種硬幣的情況，最後再將各方法數相加即可。只不過這樣做的話還是稍嫌麻煩，於是我們用到第二個計數原理。

乘法原理

假設有 k 個集合 $A_1, A_2, ..., A_k$，定義他們的笛卡爾積 (Cartesian Product) 為集合 $\Pi A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., k\}$ 則

$$|\Pi A_i| = |A_1| \times |A_2| \times ... \times |A_k| = \Pi |A_i|$$

也就是說，假設每個集合都有 c_i 個東西可以選，那從每個集合各選一個東西有 Πc_i 種選法。

在剛剛的問題中，如果只考慮 $1, 2$ 兩種硬幣，則可以發現湊出 k 元的方式有 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$ 種方法，那麼我們利用加法原理，枚舉 4 元和 8 元能湊出的數值 (假設是 x 元)，再將此方法數乘上 $\lfloor \frac{20-x}{2} \rfloor + 1$ 就可以快速算出答案。

這兩個原理看似簡單，但幾乎所有的組合公式都是由此推導而來。

1.2 排列數與組合數

這個部分大多屬於高中數學的範圍，因此這裡會快速帶過。

定義 1.2.1: 組合數定義

- 階乘 (factorial):$n! = \Pi_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots n - 1 \cdot n$，額外定義 $0! = 1$。
- 排列數 (permutation): $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$
- 組合數 (combination): $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$，若 $k > n$ 或 $k < 0$，則定義 $C_k^n = 0$。
- 重複組合數 (combination with repetitions): $H_k^n = C_{n-1}^{n+k-1}$

這些符號都有相對應的組合意義。比較不熟悉的可能是重複組合數 H_k^n 的計算方式。這個符號代表從 n 種東西中選出 k 個的組合數 (每個東西可以重複任意多次)。可以把它看成是有 k 顆球與 $n-1$ 個隔板，球跟隔板之間的每個排列方式都一一對應到重覆組合的方法，因此總方法數為 C_{n-1}^{n+k-1}。

如何計算組合數

競程裡的組合題目通常會要求輸出方法數模一個大質數的結果 (如 $10^9 + 7$ 或 998244353)。因此以下皆討論 $mod\ p$ 時的狀況。

用階乘的定義算

```
#define ll long long
const int mod = 1e9 + 7;
const int maxn = 100005;
ll modpow(ll a, ll p) {}//快速冪略
ll fac[maxn], finv[maxn]; //階乘與階乘的模反元素
ll C(int n, int m){
    if (m > n) return 0;
    return fac[n] * finv[m]%mod * finv[n-m]%mod;
}
int main() {
    fac[0] = finv[0] = 1;
    for (int i = 1;i < maxn;i++) {
        fac[i] = fac[i-1] * i %mod;
        finv[i] = modpow(fac[i], mod - 2); //費馬小定理
    }
}
```

此方法需要 $O(n)$ 預處理時間，可以 $O(1)$ 算出 $C(n, m)$ 的值，其中 n 是題目最大需要的數值。

巴斯卡三角形

```
ll c[maxn][maxn];
int main() {
    c[0][0] = 1;
    for (int i = 1;i < maxn;i++) {
        for (int j = 0;j <= i;j++) {
            c[i][j] = (c[i-1][j] +
            (j ? c[i-1][j-1] : 0))%mod;
        }
    }
}
```

此方法需要 $O(n^2)$ 預處理時間，$O(1)$ 查詢時間，當 n 不大時，計算時間會較低。

另外，當模數不大時，可以用Lucas's Theorem求組合數，當 $\binom{n}{k}$ 中的 k 不大時可以直接用乘的算出答案，另外有許多求組合數的方法，有興趣的讀者可以自行查資料。

1.3 組合公式

以下是許多組合計數中經常使用的公式，適當的使用往往能降低計算的複雜度。

引理 1.3.1: 組合恆等式

- 對稱性: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 巴斯卡定理: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
- 二項式定理: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

這些組合恆等式可以用代數的方法證明，也可以使用組合證明 (Combinatorial Proof) 解釋。組合證明的好處是相對直觀，而能夠說明該公式實際的意義。以下面的問題為例:

習題 1.3.1: 范德蒙恆等式 Vandermonde's Identity

試用組合的方式證明

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

解答: 考慮從 n 個男生和 m 個女生中選出 k 個人，顯然有 $\binom{n+m}{k}$ 種選法，而假設固定選了 i 個男生，會有 $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ 種方法，因此根據加法原則，選 0 到 k 個男生的總方法數和必為 $\binom{n+m}{k}$。

上述的證明為「數兩次」證明法的一個例子，用兩種方法計算同一個東西的方法數，藉此證明兩種方法的公式得到的結果相等。

接下來用一個例子介紹另外一種組合證明。

卡特蘭數

習題 1.3.2: 一路領先問題

以下各種問題都互相等價:

- n 個左括弧和 n 個右括弧組成合法括號字串的方法數。
- 在 $n \times n$ 的方格中從左下角的格子點走捷徑到右上角，且不經過左下-右上對角線 (即 $x = y$) 的方法數。
- $n + 1$ 個葉節點的完全二元樹個數。

這些問題的方法數都相同，我們稱之為第 n 個卡特蘭數 (Catalan Number) C_n

以第一個問題來說，應該有些人最先想到的是用動態規劃來解這題，令 $dp_{i,j}$ 代表前 i 個字元中'('**的個數**$-$')'**的個數為**j 的方法數。則有以下轉移式:

$$dp_{i,j} = \begin{cases} dp_{i-1,j-1} + dp_{i-1,j+1}, & \text{if } j \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

，最後答案為 $dp_{2n,0}$。這樣的複雜度為 $O(n^2)$，但我們能做到更好!

考慮第二種問題 (在格子走捷徑)，以下用「路徑」簡稱任意一條由左下至右上的路徑。我們想要證明 $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$，但首先需要先介紹一些名詞。

定義 1.3.1: 函數的類別

數學中的函數 $f : A \to B$ 可以想成是兩個集合 A, B 之間的對應關係，其中:

- 單射 (injective) 函數: 每個 A 的元素都對應到一個 B 的元素。且 A 內相異元素對應到的值皆不同。
- 滿射 (surjective) 函數: 每個 B 的元素都有至少一個 A 的元素對應到。
- 雙射 (bijective) 函數: 每個 A 的元素都一一對應到 B 的元素。函數為雙射若且唯若同時是單射跟滿射。

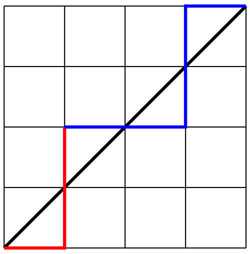
接下來使用的組合證明法稱為雙射原則 (bijection principle)。

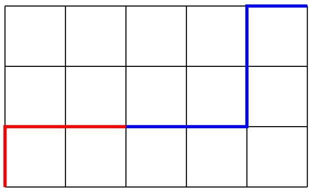
引理 1.3.2: 雙射原則

若有兩個可數的集合 A, B 之間可以建立雙射函數，則 $|A| = |B|$。

回到卡特蘭數的證明。左邊的 $\binom{2n}{n}$ 顯然是在沒有限制下的路徑方法數，因此可以猜測扣掉的 $\binom{2n}{n-1}$ 代表「不合法的路徑數」。我們將在 $(n-1)\times(n+1)$ 的路徑與 $n \times n$ 格子內不合法的路徑之間建立雙射。

考慮以下兩張圖:





對於任意一條不合法的路徑，都可以找到第一次跨越對角線的地方 (左圖的紅色線段)，此時往上步數 = 往右步數 $+1$。將紅色線段依對角線翻轉，後面再接上藍色線段，就可以得到一條在 $(n-1)\times(n+1)$ 方格的路徑。不難證明這個轉換會建立雙射，而右邊方格的路徑數為 $\binom{2n}{n-1}$，故根據雙射原則，不合法的路徑數亦為 $\binom{2n}{n-1}$，上述公式因此得證，我們就能在 $O(n)$ 時間找到 C_n 的值。

卡特蘭數還有兩個遞迴式跟其他性質，有興趣的讀者可以參考**維基百科**。

1.4 鴿籠原理

定理 1.4.1: 鴿籠原理

假設有 n 個物品要分成 k 堆，東西最少的一堆數量 $\leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$，東西最多的一堆數量 $\geq \lceil \frac{n}{k} \rceil$

這個定理常常出現在一些存在性證明裡面用到，在競程裡也可以用來尋找上下界。

習題 1.4.1: 怪怪背包?

給定 n 個的整數，證明一定存在一個非空子集使得總和為 n 的倍數。

這類證明的問題要做的事就是找到「物品」跟「箱子」。總和為 n 的倍數，也相當是總和模 n 為 0，那我們就把總和模 n 的值視為箱子吧！任意排序這 n 個整數並計算他們的前綴和模 n 並放進箱子，如果有一項放進 0 的箱子的話就有解了，否則只有 $n-1$ 個箱子可以放，必定存在一個箱子有兩個東西，此時取這兩個前綴相減的區間就能得到總和為 n 的倍數的子集。

1.5 使用動態規劃

程式競賽中最常使用到排組的地方就是動態規劃問題了，先看看一個例題:

習題 1.5.1: N 箱 M 球

n 個相同的箱子要放入 m 個不同的球，問有幾種放法。輸出方法數 $\bmod 10^6$ 的結果。
$n, m \leq 200$，有多筆測資。

這裡提供兩種解法，兩種都需要對不同的方法進行分類。
因為 m 顆球皆相異，我們可以把球編號 $1, 2, \ldots m$。而 n 個箱子相同，因此他們放在一排之後任意排序都會是一樣的方法，而箱子內的球也是無序的。

解一: 考慮 1 號球所在的箱子，我們可以把所有分法依照這個箱子有多少顆球分類。令 $dp_{i,j}$ 代表 i 個箱子放 j 顆球的方法數。若 $j = 0, dp_{i,j} = 1$。假設 1 號球所在箱子有 k 顆球，剩下 $k-1$ 顆球有 $\binom{j-1}{k-1}$ 種選法，而之後剩 $j-k$ 顆球放在 $i-1$ 個箱子。故轉移式為:$dp_{i,j} = \sum_{k=1}^{j} \binom{j-1}{k-1} dp_{i-1,j-k}$，初始條件 $dp_{0,0} = 1$。時間複雜度為 $O(nm^2)$。

解二: 令 $dp_{i,j}$ 代表 i 個箱子放 j 顆球，且**每個箱子都至少有一顆球**的方法數。考慮 1 號球所在箱子，如果箱子只有 1 號球的話，剩下球有 $dp_{i-1,j-1}$ 種放法。否則，在放 1 號球之前每個箱子至少有一顆，對於所有 $dp_{i,j-1}$ 種方法，1 號球都能放在 i 個箱子中任意一個。因此有轉移式:$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1} + i * dp_{i,j-1}$。初始條件 $dp_{0,0} = 1$。最終的答案為 $\sum_{k \leq n} dp_{k,m}$，時間複雜度 $O(nm)$。

由上面的問題可以發現，有一些組合問題不一定有一個乾淨的解析解 (closed form)，但在題目限制下好好使用遞迴就能解決許多問題!

1.6 機率與期望值

定義 1.6.1: 期望值

一個隨機變數 X 有 n 種可能的事件，第 i 個事件價值是 v_i，發生的機率是 p_i，且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，那麼這個隨機變數的期望值 $E(X) = \sum v_i p_i$

期望值的問題可以有許多變化，因為他其實只是「求和問題」的一種變形而已。而這個時候會運用到一個非常重要的性質。

引理 1.6.1: 期望值的疊加性 (linearity of expectation)

$$E(X_1 + \dots X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

這個性質告訴我們，如果可以把一個事件拆成一些互不影響（獨立）的小事件，並且能算出小事件的價值跟機率的話，就可以枚舉小事件把期望值相加! 來看一個實際的例子。

習題 1.6.1: 神奇寶貝獎章 (TIOJ 2163)

星街跟姐街在玩一個遊戲，星街有 n 張牌，每張牌上面數字分別為 $a_1, a_2, \dots, a_n$，姐街有 m 張牌，上面數字為 $b_1, b_2, \dots, b_m$，且這 $n+m$ 張牌數字兩兩相異。兩人各隨機選 k 張牌，由小到大排好後比大小，第 i 張牌數字較大者得一分。星街想知道，她期望得分是多少？假設答案化為最簡分數是 $\frac{P}{Q}$，輸出 $PQ^{-1} \mod 998244353$。$1 \le k \le n, m \le 500$

顯然，直接枚舉所有 $\binom{n}{k}\binom{m}{k}$ 種組合會太慢，這時候就可以用前面的性質。在比大小的時候，假設第 i 個位置是比較 a_x, b_y，我們就可以算出它的價值（得分），至於發生的機率，星街需要在前 $x-1$ 項選 $i-1$ 項，在後 $n-x$ 項選 $k-i$ 項。姐街那邊也一樣，所以方法數有 $\binom{x-1}{i-1}\binom{n-x}{k-i}\binom{y-1}{i-1}\binom{m-y}{k-i}$ 種！把這個總和算出來，最後除以 $\binom{n}{k}\binom{m}{k}$ 就可以得到答案。

遞迴關係

另外，有一種類型的問題是要問你某件事情發生前的步數，但這個步數可能是無限的，以下面的例題來說：

習題 1.6.2: 幾何分佈

骰一顆六面骰直到出現 6 為止，期望要幾次?

數學好的人可能會列出一個無窮等比級數的算式得到答案，但其實有另一種方法。假設答案是 E，那麼可以列出遞迴式 $E = 1 + \frac{5}{6}E$, 輕鬆得到正確答案 $E = 6$。**這裡預先假設了答案會收斂，數學考試別這樣寫**，但是上述的方法對一些更複雜的期望值題目比較有用。有一種題目是要將每一種狀態視為一個變數，狀態之間的轉移是一個方程式，最後再用高斯消去（或是其他技巧）解開一組方程式。

1.7 排容原理

高中課程裡提到了兩項與三項的排容原理，但在競賽程式中，更常用到的是推廣的版本，先來看看排容原理本身的敘述：

定理 1.7.1: 排容原理

有 n 個集合 $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，宇集為 U, 令 $T \in S$，$F(T)$ 為集合 $T_1 \cap \ldots T_k$ 的大小，則

$$|U \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{T \in S} (-1)^{|T|} F(T)$$

如果 $F(T)$ 的值只跟 T 的大小有關 (用 $f(|T|)$ 表示，那也可以寫成

$$|U \setminus \cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k)$$

證明：考慮任何一個元素 x，假設它在一些集合 $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}, k \neq 0$ 裡面，則 x 在左式貢獻的數量為 0，在右式貢獻 $\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$，否則，$x$ 在左式貢獻為 1，右式貢獻也是 $\binom{0}{0} = 1$，故得證。

可以注意到：排容原理是加法原理的延伸，而許多數個數的問題都需要扣除重複的情況，因此我們可以利用排容原理，計算出右式的結果。一個思考排容問題的訣竅是：把集合視為某種條件，那麼要算「不符合所有條件」的數量就能用「符合 x 個條件的個數」算出。以錯排問題為例：

習題 1.7.1: 錯排數

給定 n，數有多少個 $1, \ldots, n$ 的排列沒有任何定點，即不存在 $1 \leq i \leq n$ 使 $a_i = i$。

令第 i 個條件是 $a_i = i$，則答案為符合 0 個條件的排列數。可以知道，不符合 x 個條件 $a_{i_1} \ldots a_{i_x}$ 的排列數有 $(n-x)!$ 個，而這個值只跟 x 有關，因此

$f(x) = (n-x)!$, 答案為 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$。

以下來看一題比較難的問題。

習題 1.7.2: k 逆序數對排列計數

給定 n, k, 數有多少個 $1, \ldots, n$ 的排列有恰 k 個逆序數對。$n \leq 10^5, k \leq min(\binom{n}{2}, 10^5)$

首先，問題可以轉換為：數有多少個序列 $a_1, \ldots, a_n$ 使得 $0 \leq a_i < i$ 且 $\sum a_i = k$ (轉換方式留給讀者練習)。這裡有一個顯然的 $O(n^2)$ 背包做法，但要怎麼樣更快呢？

我們令第 i 個條件是 $a_i \geq i$，那麼答案會是符合 0 個條件的序列數。在沒有條件限制下，總和為 k 的方法數為 $H_k^n = \binom{n-1+k}{n-1}$。有條件限制時，我們需要找到類似的方法計算答案。問題是，假設我們枚舉不符合 x 個條件的個數的話，這個方法數還會跟那個集合 T 內的元素有關!

那樣是不是就沒救了? 其實不一定。仔細觀察會發現，我們如果知道 T 內元素總和是 s，那 $F(T) = \binom{n-1+k-s}{n-1}$，把式子寫開來會得到：

$$\textbf{答案} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{s=0}^{k}\binom{n-1+k-s}{n-1} g(s,i)$$

其中 $g(s,i)$ 代表有多少種方法用 i 個相異且 $\leq n$ 的正整數湊出 s。這樣寫出來有什麼好處呢？可以發現因為所有數字必須相異，i 個相異正整數最小總和是 $\frac{i(i+1)}{2}$，所以 i 的範圍只會到 $O(\sqrt(k))$，狀態數就是 $O(k\sqrt{k})$！最後，$g(s,i)$ 可以用前面提到的 dp 技巧計算出來，留給讀者練習。

1.8 例題

習題 1.8.1: Sum over n and k

用組合的方法證明 $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}=\binom{n+m+1}{m}$

習題 1.8.2: 期望逆序數對數

證明長度為 $n\geq 2$ 的排列，期望逆序數對數為 $\frac{n(n-1)}{4}$。
Bonus: 用兩種上述的方法證明。

習題 1.8.3: 卡特蘭數

證明習題 1.3.2 中的第三個問題答案為卡特蘭數。

習題 1.8.4: CF 128C

給一個 $n\times m$ 方格的矩形和整數 k，問有多少種方法在方格紙內畫 k 個矩形，使得每個矩形都在前一個矩形的邊界內 (邊界不重疊)，且第一個矩形邊界在方格內。$n,m,k\leq 1000$。
Bonus: 你有辦法算 $n,m\leq 10^9,k\leq 10^6$ 嗎?

習題 1.8.5: ABC 221 Count Multiset

給定 n,m，對於每個 $k=1,2,\ldots,n$，數有多少種多重集 A，使得 A 裡面數字總和為 n，且任意數字出現不超過 m 次。

習題 1.8.6: ABC 189 F

有 $n+1$ 個格子排成一直線，編號為 0 到 n。最喜歡 Jump King 的死神一開始站在 0 的格子，每次擲一個 m 面骰，擲到什麼就往前跳幾格，如果走到格子 n 或更後面的話就贏了。但是有 k 個格子 $b_1,\ldots,b_k$，如果踩到的話就要從 0 開始。請問期望要走幾步？
$n,m\leq 10^5,k\leq 10,0<b_i<n$

習題 1.8.7: CF 1151F

給一個長度為 n 的 01 序列，接下來進行 k 次操作: 從隨機選兩個相異的數字 $i<j$，交換 a_i,a_j。問 k 次操作後序列由小排到大的機率是多少（模 10^9+7）
$n\leq 100,k\leq 10^9$

習題 1.8.8: ARC 059 Unhappy Hacking

螢幕上有一個字串 s 以及三個按鍵 $0, 1, x$。按下 0 或 1 會在字串最後面多一個字元 $0/1$，按下 x 時會刪除最後一個字元 (如果字串是空的那什麼也不會發生)。給定按按鍵的次數 n 和字串 s，數有幾種按按鍵的方法使得最後字串為 s。$n \le 5000, |s| \le n$。