字串 I

1

1.1 前言

沒錯沒錯，今天要介紹的就是字串啦！

不知道大家知不知道字串和普通的序列差別是甚麼？其實字串本身就是一個序列，但通常在題目跟連續性有關的時候，我們才會稱它為字串題。

那就讓我們趕快進入此次的主題－字串吧！

1.2 基礎名詞簡介

1. 字元 (character)：構成字串的單位。以下「字串 A 的第 i 個字元」簡寫為 A_i。
2. 字元集：所有可能的字元的集合。
3. 長度：一個字串的字元個數。以下將「字串 A 的長度」簡寫為 L_A。
4. 子字串 (substring)：一個字串的一段連續的字元所構成的字串稱作子字串。以下將「字串 A 的第 $[i, j]$ 個字串所構成的子字串」簡寫為 $A_{i...j}$。(注意本篇講義的字串為左閉右閉)
5. 前綴、後綴 (prefix,suffix)：一個字串只取最前面一些字元所構成的子字串是前綴，只取最後面的則是後綴。前綴可寫成 $A_{0...i}$、後綴可寫成 $A_{i...L_A-1}$。

1.3 字串匹配問題

字串匹配是字串的經典老題。因為它太老，而不常出現在競賽中。不過字串匹配的眾多解法時常出現許多富有巧思的變化，用以解決較複雜的字串問題。現在讓我們來看看這個原始的問題吧！

習題 1.3.1: 字串匹配

給你一個字串 T，以及字串 P。求 P 是否為 T 的其中一個子字串。

最基本的想法是枚舉起點，然後再一一往後配對，當匹配不上則將起點向右移動一格。這樣的複雜度會是 $O(L_P L_T)$。

```
bool matching(string t,string p){
    if(t.size() < p.size()) return false;
    for(int i = 0; i < t.size() - p.size() + 1; i++){
        bool found = true;
        for(int j = 0; j < p.size(); j++)
            if(t[j+i] != p[j]) found = false;
        if(found) return true;
    }
    return false;
}
```

當然，這樣的複雜度對於每日處理龐大資料的電腦算是一場災難，所以我們需要更加快速的解決方案。

雜湊 (Hash)

在處理字串問題中所提到的 hash 通常都是指將字串轉換成為一個數字，這樣比較的時候就可以達到 $O(1)$ 的比較時間了呢！做法就是將字串看長一個 p 進位制的數字，具體一點來說，假設雜湊函數為 $h(A)(A$ 是一個字串)，則 $h(A) = A_0 p^{L_A-1} + A_1 p^{L_A-2} + ... + A_{L_A-1}$ (L_A 為字串長度)。照理說，只要 p 比字元集大小還要大，那就可以將一個字串唯一的轉成一個數字了喔！好，接下來問題就是，要如何快速地找出一個字串中某個子字串的 hash 值呢？首先我們先預處理字串每個前綴的 hash 值，也就是找出 $h(A_{1...L_A-1}), h(A_{1...L_A-2}), ..., h(A_{1...1})$。根據定義，應該不難看出，$h(A_{1...i}) = h(A_{1...i-1}) \times p + A_i$。因此，只需要花 $O(L_A)$ 的時間就可以預處理完了。接著假設想要知道 $A_{i...j}$ 這段子字串的湊湊值，一樣根據定義，這段的雜湊值就是 $h(A_{1...j}) - h(A_{1...i}) \times p^{j-i}$，而這個值可以 $O(1)$ 算出 (畢竟 p 的冪次也可以 $O(L_A)$ 預處理然後 $O(1)$ 知道。

這樣說是不是感覺非常簡單易懂呢？但或許大家也發現了，就是雜湊值會非常大，long long也存不下嘛！而應對方式也非常簡單，就是在計算的時候模一個數字，就所有問題都解決了，因為上述的計算都可以在一個模數之下好好地做。但這樣也出現了新的問題，就是因為雜湊值模了一個數，有可能造成兩個不同的字串卻有相同的雜湊值，這就是碰撞 (collision) 囉。解決方式也很簡單，就是開很多 hash，如果那麼多個 hash 值都顯示兩個字串相同，那我們或許就可以合理相信兩個字串真的一樣了呢。那到底要寫多少 hash 才合理呢？我聽說一般是要寫 5 個 hash 喔！

最後的問題就是 p 和模數的選取了，我不是很確定怎麼選才好，不過一般認為模數應該要夠大 (要不然更容易碰撞)，而且 p 和模數應該不互質的時候會有某些數不被用到，所以我會選把兩個都選成質數 (或至少模數選質數)。

唉呀，講了這麼多，都還沒講到要怎麼用 hash 來匹配字串呢！

假設要在字串 A 中找到字串 B，則我們一樣花 $O(L_A)$ 的時間將 A 的每一個前綴的 hash 找出來，也順便算出 B 的 hash 值。接著我們可以知道，A 中有 $L_A - L_B + 1$ 個位子有可能找到 B，因此，我們就可以在線性時間內去看每個可能符合條件的位子的 hash 值跟 B 一不一樣就做完囉！整體來說，用 hash 來做字串匹配的複雜度是 $O(L_A + L_B)$。

Hash 固然是字串匹配的好幫手，不過千萬不要絕 Hash 只能拿來做字串匹配，有許多其他字串題也有它出場的機會！

以下附上我醜醜的 code。

string::find

這個東西就是 C++ STL 裡面的函式，可以直接達到字串匹配的目的。直接給出範例程式囉！

```
#include<iostream>
#include<string>
using namespace std;
int main()
{
  string A = "ABCABCABC";
  string B = "CAB";
  cout << A.find(B) << endl;//在A中找出B第一個出現的位子
}
```

感覺非常實用呢，是不是？但相信大家或許跟我一開始會有一樣的問題，就是它的複雜度到底是多少呢？我大概上網查了一下，C++ 沒有規定它的複雜度，但我實測起來感覺速度頗快，大家好好斟酌一下比賽的時候要不要用吧。

1.4　古斯菲爾德演算法

這個字串匹配的演算法由 Dan Gusfield 提出，又稱作 Z-algorithm。這個演算法能夠實現，主要是建立在「對於一個字串 s，能夠在線性時間內計算其對應的 Z-陣列」這個基礎上。

Z-陣列

Z-陣列是一個與字串長度相同的陣列，每個元素 $Z[k]$ 代表的是以位置 k 為始的最長子字串長度，使得這個子字串也是整個字串的前綴。

以字串ACBACDACBACBACDA 為例，依此建構出的 Z-陣列就如以下所示：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	A	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
16	0	0	2	0	0	5	0	0	7	0	0	2	0	0	1

其中 $Z[6] = 5$，因為以 $s[6]$ 開頭的子字串ACBACB剛好是整個字串的一個前綴。

如何計算 Z-陣列

計算 Z-陣列的方法正是 Gusfield's Algorithm 的精神所在。為了有效率的完成 Z-陣列的建構，這個演算法會維護一個區間 $s[x...y]$，使得這個區間是一個原字串的前綴，而且 y 要盡量越大越好。

維護這個區間的目的是：當你要計算一個未知的 $Z[i]$ 時，能夠確保可以利用先前儲存的值快速計算。如果將要計算 $Z[i]$ 的 i 在 $s[x...y]$ 的區間之外，我們就沒有儲存到任何有關 $Z[i]$ 的資訊，只能從頭計算；但是如果這個 i 在這個區間內，就可以很快知道 $Z[i]$ 至少有 $\min(Z[i-x], y-i+1)$，所以從這個值開始暴力搜就行了。

詳細作法如下：

1. 如果 $i > y$，代表還沒有已知的、與前綴相同的子字串包含 i，這時候重新暴力比對 $s[0...$ 與 $s[i...$，並更新 $x, y, Z[i]$。
2. 如果 $i \leq y$ 我們知道 $s[0...y-x]$ 與 $s[x...y]$ 相等，因此 i 的位置在 $s[x...y]$ 的地位就類似 $i-x$ 在 $s[0...y-x]$ 的地位。因此我們可以用 $Z[i-x]$ 來推算 $Z[i]$。
3. 如果 $Z[i-x] < y-i+1$，已經確定 $Z[i]$ 不能再多了，所以 $Z[i]$ 就是 $Z[i-x]$。
4. 如果 $Z[i-x] \geq y-i+1$，那麼 $Z[i]$ 只能確定不小於 $y-i+1$，所以一樣要暴力比對 $s[y...$ 與 $s[y-x...$，並更新 $x, y, Z[i]$。

```cpp
vector<int> Z(string &s){
    vector<int> Z(s.size());
    int x = 0, y = 0;
    for(int i = 0; i < s.size(); i++){
        Z[i] = max(0, min(y-i+1, Z[i-x]));
        while(i+Z[i] < s.size() && s[Z[i]] == s[i+Z[i]])
            x = i, y = i+Z[i], Z[i]++;
    }
    return Z;
}
```

隨著越來越多的 $Z[i]$ 被算出來，y 值也會不斷的增加，每次暴力往後搜一格，y 值就會增加或至少不變，所以需要暴力搜的個數不會超過 $O(n)$。

也就是說，對於每個 i，當`while`迴圈的條件成立時頂多使 y 值不變一次，第二次開始 y 值一定會增加 1。因為 y 值最多只有字串長度，所以時間複雜度 $O(n)$。

Z-陣列與字串匹配

有了 Z-陣列之後，那我們要怎麼進行字串匹配呢？這邊我們需要一些巧思，將 P 與 T 兩個字串用特殊字元接在一起，再做一次 Z-陣列就行了。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	C	B	#	C	D	A	C	B	A	C	B	A	C	D	A
16	0	0	0	0	0	3	0	0	3	0	0	2	0	0	1

在這裡，Z-陣列中值恰好等於字串 P 長度的位置，就是找到了的 P 的一個匹配。

1.5 克努斯-莫里斯-普拉特演算法

除了 Gusfield's Algorithm 之外，還有一個類似的作法叫 KMP 算法，這個做法也是對於原字串建立一個陣列，再利用這個陣列的值進行字串匹配。

失配函數

想像一個情境：你嘗試用暴力法在 aaabaaaab 找 aaaa ，當你從第一個字元當開頭匹配到第四個字元時，你明明已經知道因為有個b卡在那裡，導致前四個字元都不可能作為開頭。但是你還是必須把開頭對到第二個字元，再慢慢掃，對吧。

這時候你就需要一個東西，先對字串 P 計算好一個陣列，指引配對失敗時開頭位置要怎麼往後跳，就可以不必每次都只往後一格。

次長共同前後綴

失配函數事實上就是次長共同前後綴。我們定義

$$Fail(i) = s[0...i]\textit{的次長共同前後綴的長度}$$

這裡用次長不用最長的原因很簡單，因為最長共同前後綴就是 $s[0...i]$ 本身，根本沒必要算。

那我們對於一個字串 P，我們要怎麼建立失配函數陣列呢？

與 Z-陣列的建構方式有些類似，對於每個 i，我們可以確定 $s[0...F[i-1]] = s[i-1-F[i-1]...i-1]$，因此可以假設 $q = F[i-1]$。如果 $s[q]$ 與 $s[i]$ 相同，則 $F[i]$ 的值就等於 $q+1$。

如果這兩個字元不相同，我們可以試著縮小 q 的值，來使 $s[q]$ 與 $s[i]$ 相同。因為失配函數本身的性質，我們可以知道，$s[i-F[q-1]-1...i-1]$ 與 $s[0...F[q-1]]$ 是一樣的，所以可以將新的 q 換成 $F[q-1]$，繼續比對 $s[q]$ 與 $s[i]$。

```
vector<int> build_failure(string &s){
    vector<int> fail = {0};
    for(int i = 1, q = 0; i < s.size(); i++){
        // q = fail[i-1];
        while(q && s[i] != s[q]) q = fail[q - 1];
        fail.push_back(q += (s[i] == s[q]));
    }
    return fail;
}
```

KMP 與字串匹配

相信有了失配函數之後，大家都很快就知道怎麼進行字串匹配了。我們先對欲尋找的字串 P，建立它的失配函數陣列，然後用兩個變數 i, j 在字串 T 與 P 上爬行。

如果 $T[i] = P[j]$ 表示配對正確，則繼續對 $T[i+1], P[j+1]$ 進行比對，直到字串完全匹配或失配；如果 $T[i] \neq P[j]$ 代表失配，將 j 的值跳到失配函數 $(F[j-1])$ 的位置就行了！$j = L_P + 1$ 時就代表 P 字串已經被完全找到，達成字串匹配的目的。

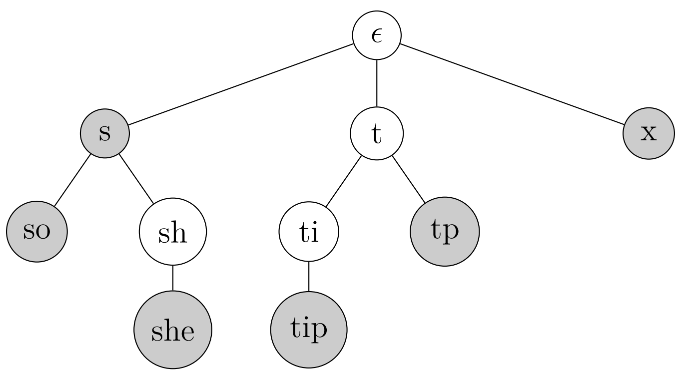
```
void KMPSearch(string t, string p){
    vector<int> fail = build_failure(p);
    int i = 0; // index for t[]
    int j = 0; // index for p[]
    while (i < t.size()){
        if(p[j] == t[i]){ // 匹配
            j++, i++;
        }
        if(j == p.size()){ // 找到了！
            printf("Found pattern at index %d \n", i-j);
            j = fail[j-1];
        }
        else if(i < t.size() && p[j] != t[i]){ // 失配
            if(j != 0) j = fail[j-1];
            else i++;
        }
    }
}
```

另一種比較短的寫法是

```
void KMPsearch(string t, string p) {
    vector<int> fail = build_failure(p);
    for(int i = 0, j = 0; i < t.size(); i++) {
        while(j && t[i] != p[j]) j = fail[j-1];
        if(t[i] == p[j]) ++j;
        if(j == p.size()) {
            printf("Found pattern at index %d \n", i-j);
            j = fail[j-1];
        }
    }
}
```

1.6 Trie

首先考慮一個這樣的問題，你需要處理兩種操作：一、在資料結構中加入一個字串；二、給你一個字串，問你此字串是否曾經被插入該資料結構。大家或許會很直覺地認為直接開一個set，然後把字串全部丟進去就解決了！那這麼做的複雜度會是多少呢？假設目前有 N 個字串在set中，而當前要查詢一個長度為 L 的字串是否在set中，這樣複雜度就是 $O(L \lg N)$。有沒有可能有更好的複雜度呢？這時候就要派我們的 Trie 出場了呢！看看它的英文字首，就知道他絕對是跟樹有關了呢！它的的確確是一棵樹，它的每一顆節點都包含了字元集大小的那麼多個指標，舉例來說，若全部的字串都是由英文小寫字母所組成的話，那每顆節點都有 26 個指標。好，接下來就直接說要如何插入一個字串吧，直接來看例子比較直接：
下圖插入了 $"s", "so", "tp", "tip", "she", "x"$，灰色節點表示該節點是一個字串的結尾



相信大家看完了上面的例子，都大概了解 Trie 的運作方式了。而它的時間複雜度大家應該也知道，就是插入和查詢都是 $O(N)$，而空間複雜度就是 $O($ 字元集大小 $\times \sum L_i)$。其實 gcc 中的 pbds 也有一個能直接拿來用的 Trie，詳情就參考 pbds 的講義吧！

在字元集越小的時候，Trie 越容易派上用場，尤其是只有 0 跟 1 的時候，例如跟某些位元運算有關的題目常常得把 Trie 派出場。

習題 1.6.1: 最大區間 XOR（經典問題）

給定一個序列，求最大的區間 XOR 值。

對序列做一次前綴可以發現問題變成找到兩個數字 XOR 起來最大，我們可以一個一個把前綴的二進位表示法丟進 Trie 裡面（最高位放在前面）並順便拿去 Trie 裡面查，能夠往相反的地方走就盡量往相反的地方走便能找到最大 XOR 值。

1.7 習題

排版跑掉了 郭死

習題 1.7.1: Massacre at Camp Happy (TIOJ 1725)

給定兩個長度相同的字串 A、B，請你找出所有的 k，使得將 A 的前 k 個字元移到尾端時會跟 B 只差一個字元，或回答不存在符合的 k。(字串長度 $\leq 10^6$)

習題 1.7.2: 似曾相識 (TIOJ 1515)

給定一字串 s，請問在此字串中重複出現兩次以上的最長字串長度為何 (若無則輸出 0)？(字串長度 $\leq 2 \times 10^5$)(其實這題可以用一個較複雜的結構 suffix array 做完，但你能想到比較簡單的方法嗎？)

習題 1.7.3: 字串中的字串 (TIOJ 1306)

給你一個字串 T，以及很多字串 P。對於每個 P 請輸出 P 在 T 中出現過幾次。(T、P 都是由小寫字母所組成，長度 $\leq 10^4$)(你可以想到幾種方法來解這題呢？)

習題 1.7.4: k-口吃子字串 (TIOJ 1735)

給你一個字串 s，和一個非負整數 k，問你 s 中有多少組長度為 k 的兩個子字串相同且相連？(字串長度 $\leq 10^5$)

習題 1.7.5: kukukey（TIOJ 1531）

給你一個字串 S 和 k，對於所有「恰好可以被分成 k 個相同的小字串」的前綴，請輸出可以分成的小字串的最大長度。$|S| \leq 5 \cdot 10^6$