HW3

HW3_1 KKT

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\in\mathbb{R}^n} \tfrac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\
&\text{s.t. } Ax = b
\end{aligned}
$$

stationarity

if $Q = Q^T$, then

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}x^TQx + c^Tx + v^T(Ax-b))|_{x=x^*} &= 0 \\
Qx^* + A^Tv^* &= -c
\end{aligned}
$$

primal feasibility

$$
Ax^* = b
$$

KKT condition

$$
\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}
$$

例

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\in\mathbb{R}^n} \tfrac{1}{2}x^T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}^T x \\
&\text{s.t. } \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix}x = 9
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{bmatrix} x^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.2 \\ 6.55 \\ -1.7 \end{bmatrix}
$$

$$
f_{min} = 11.8
$$

且 x^* 满足等式约束。

HW3_2 Low-Dimensional QP

$\mathrm{LowDimMinNorm}(\mathcal{H})$
  if $\dim(\mathcal{H}) = 1$
    $y \leftarrow \mathrm{OneDimMinNorm}(\mathcal{H})$
  end if
  $\mathcal{I} \leftarrow \{\}$
  for $h \in \mathcal{H}$ in a random order
    if $y \notin h$
      $\{M, v, \mathcal{H}'\} \leftarrow \mathrm{HouseholderProj}(\mathcal{I}, h)$
      $y' \leftarrow \mathrm{LowDimMinNorm}(\mathcal{H}')$
      $y \leftarrow My' + v$
    end if
    $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{h\}$
  end for
return y

Householder reflection

对于违反当前最优解的 d 维新约束 $g^T y \leq f$，要将之前的约束 h_i 都投影到新约束的边界 : $h : g^T y = f$ 上，就要找到 h 上的一组 $d-1$ 维标准正交基，可以使用 Householder reflection 得到这组标准正交基。

首先将 d 维单位向量 I_d 的第 i 个元素乘以 $-\operatorname{sgn}(g_i)\|g\|$，其中 $i = \operatorname{argmax}_k |g_k|$，只要将 I_d 通过标准正交变换 H^{-1}，将 $-\operatorname{sgn}(g_i)\|g\| e_i$ 变换为 g，则 I_d 中剩余的单位向量则为 h 上的一组 $d-1$ 维标准正交基。

令

$$u = g + \operatorname{sgn}(g_i)\|g\| e_i$$

则

$$g - 2g^T \frac{u}{\|u\|} \frac{u}{\|u\|} = -\operatorname{sgn}(g_i)\|g\| e_i$$

整理可得

$$Hg = -\operatorname{sgn}(g_i)\|g\| e_i$$

其中

$$H = I_d - \frac{2uu^T}{u^T u}$$

则新约束为

$$
\begin{aligned}
h' &= Hh \\
&= h + (-\frac{2}{u^T u} u^T h) u
\end{aligned}
$$

$$f' = f + v^T h$$

结果

```
# ck1201 @ ck1201-ubuntu20 in ~/workspa
/low-dim QP/build [13:03:52]
$ ./sdqp_example
optimal sol: 4.11111 9.15556 4.50022
optimal obj: 201.14
cons precision: 0
```

Collision Distance Compute

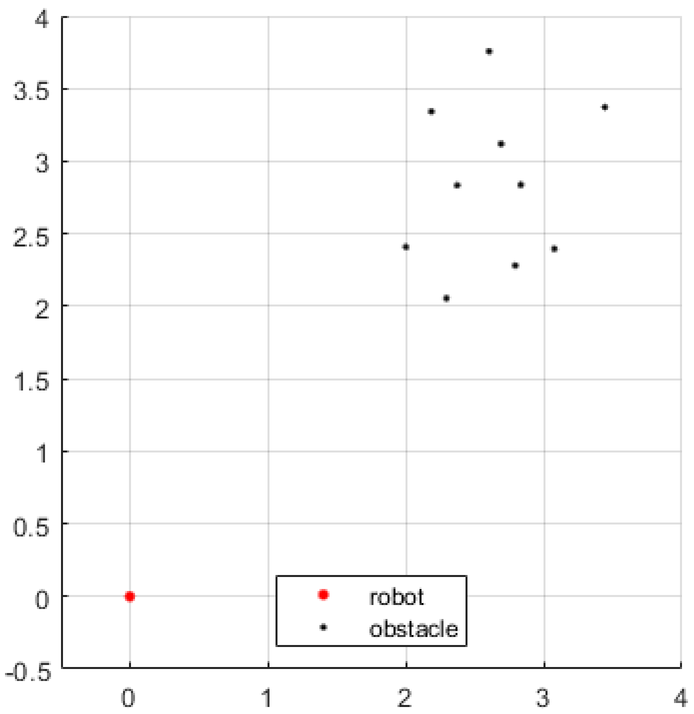
对于最小障碍物距离的计算,可以通过求解以下优化问题得到,其中, $v_i, i = 1, \cdots, m$ 为 m 个障碍物点云的坐标, x_{robot} 为机器人坐标

$$
\begin{aligned}
&\min_{z \in \mathbb{R}^d} z^{\mathrm{T}} z \\
&\text{s.t. } (v_i - x_{\text{robot}})^{\mathrm{T}} z \geq 1, \forall i \in \{1, \ldots, m\}
\end{aligned}
$$

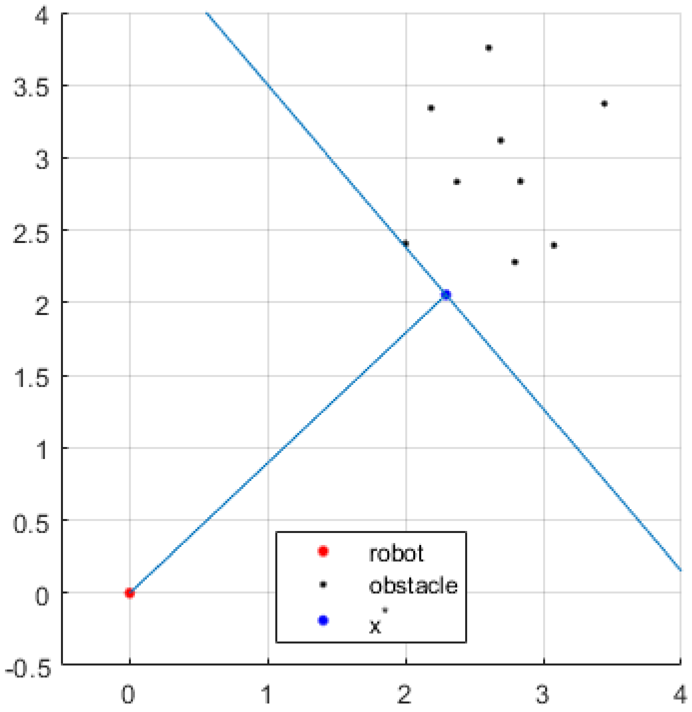
最终得到离机器人最近的障碍物点为 $x = y + x_{\text{robot}} = z / \left(z^{\mathrm{T}} z\right) + x_{\text{robot}}$

结果

机器人和障碍物点云信息如图所示

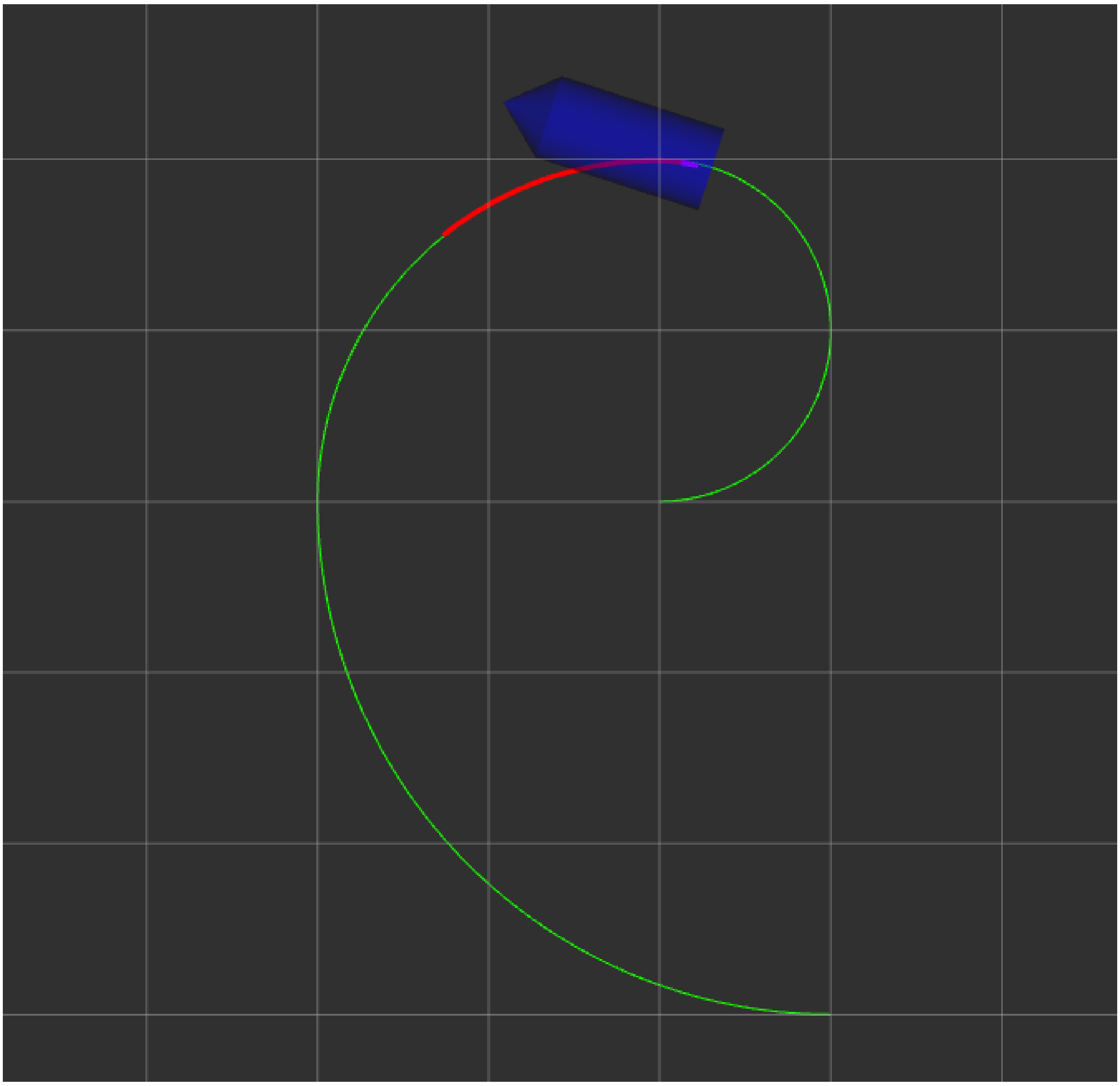


使用 SDQP 优化得到 $x^* = \begin{bmatrix} 2.29351 \\ 2.05478 \end{bmatrix}$ ，最短距离为 3.07933，结果如下图所示。



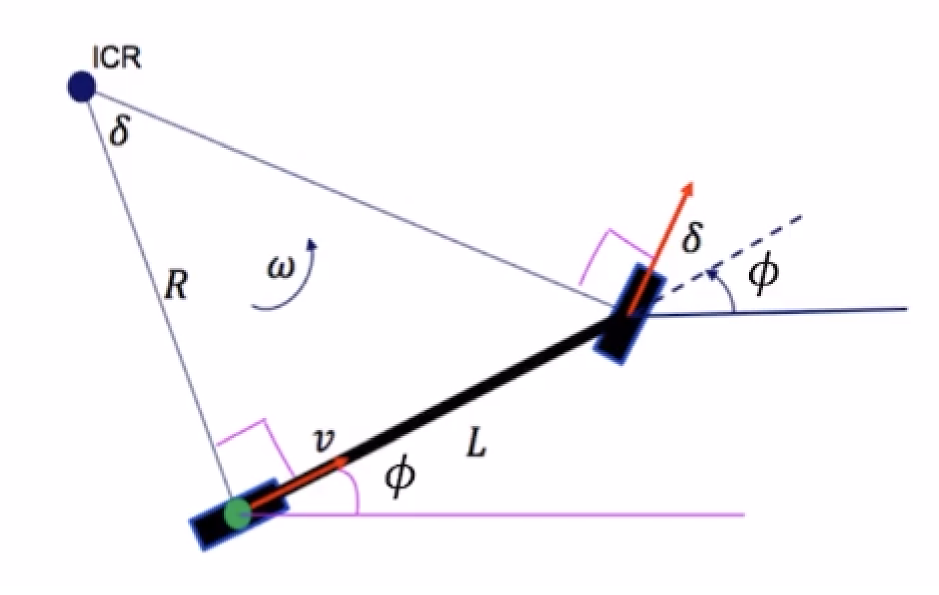
HW3_3 NMPC

Run the solveNMPC example



Use PHR-ALM to replace the Penalty Method in solveNMPC

建模



$$\begin{aligned}\min_{s_1,\ldots,s_N,u_0,\ldots,u_N} \quad & J\left(s_1,\ldots,s_N,u_0,\ldots,u_N\right) \\ \text{s.t.} \quad & F\left(s_k,u_k\right)=s_{k+1}, \forall i \in\{0,\ldots,N\} \\ & G\left(s_k,u_k\right) \leq 0, \quad \forall i \in\{0,\ldots,N\}\end{aligned}$$

其中， $s_k=\left[x_k,y_k,\phi_k,v_k\right]^T$ 为状态变量， $u_k=\left[a_k,\delta_k\right]^T$ 为输入变量， $F\left(s_k,u_k\right)=s_{k+1}$ 为系统方程

$$\begin{cases}\dot{x}=v\cos(\phi) \\ \dot{y}=v\sin(\phi) \\ \dot{\phi}=v\tan(\delta)/L \\ \dot{v}=a\end{cases}$$

$G\left(s_k,u_k\right) \leq 0$ 为状态和输入约束

$$\begin{aligned}& \forall k \in\{0,\ldots,N\} \\ & a_{\min} \leq a_k \leq a_{\max} \\ & \delta_{\min} \leq \delta_k \leq \delta_{\max} \\ & v_{\min} \leq v_k \leq v_{\max}\end{aligned}$$

目标函数为

$$J\left(s_1,\ldots,s_N,u_0,\ldots,u_N\right):=\sum_{k=1}^N\left[\left(x_k-x_k^{\text{ref}}\right)^2+\left(y_k-y_k^{\text{ref}}\right)^2+w_v\left(a_k-a_{k-1}\right)^2+w_\delta\left(\delta_k-\delta_{k-1}\right)^2\right]$$

进一步，消除模型中的系统方程等式约束，将目标函数和不等式约束转化为只与 $u_{0:N}$ 有关的函数

$$\begin{aligned}& \min_{u_{0:N}} J\left(s_1\left(u_{0:N}\right),\ldots,s_N\left(u_{0:N}\right),u_{0:N}\right) \\ & \text{s.t. } G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right) \leq 0, \forall i \in\{0,\ldots,N\}\end{aligned}$$

引入辅助变量 s ，使得

$$G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right)+[s]^2=0$$

由 PHR-ALM 可得 Lagrangian 函数为

$$\mathcal{L}_\rho(u_{0:N},\mu):=J\left(s_1\left(u_{0:N}\right),\ldots,s_N\left(u_{0:N}\right),u_{0:N}\right)+\frac{\rho}{2}\left\|\max\left[G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right)+\frac{\mu}{\rho},0\right]\right\|^2$$

则

$$\begin{cases}u_{0:N} \leftarrow \underset{u_{0:N}}{argmin}\, \mathcal{L}_\rho(u_{0:N},\mu) \\ \mu \leftarrow \max[\mu+\rho G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right),0] \\ \rho \leftarrow \min[(1+\gamma)\rho,\beta]\end{cases}$$

使用 LBFGS 求解 $u_{0:N} \leftarrow \underset{u_{0:N}}{argmin}\, \mathcal{L}_\rho(u_{0:N},\mu)$ 。

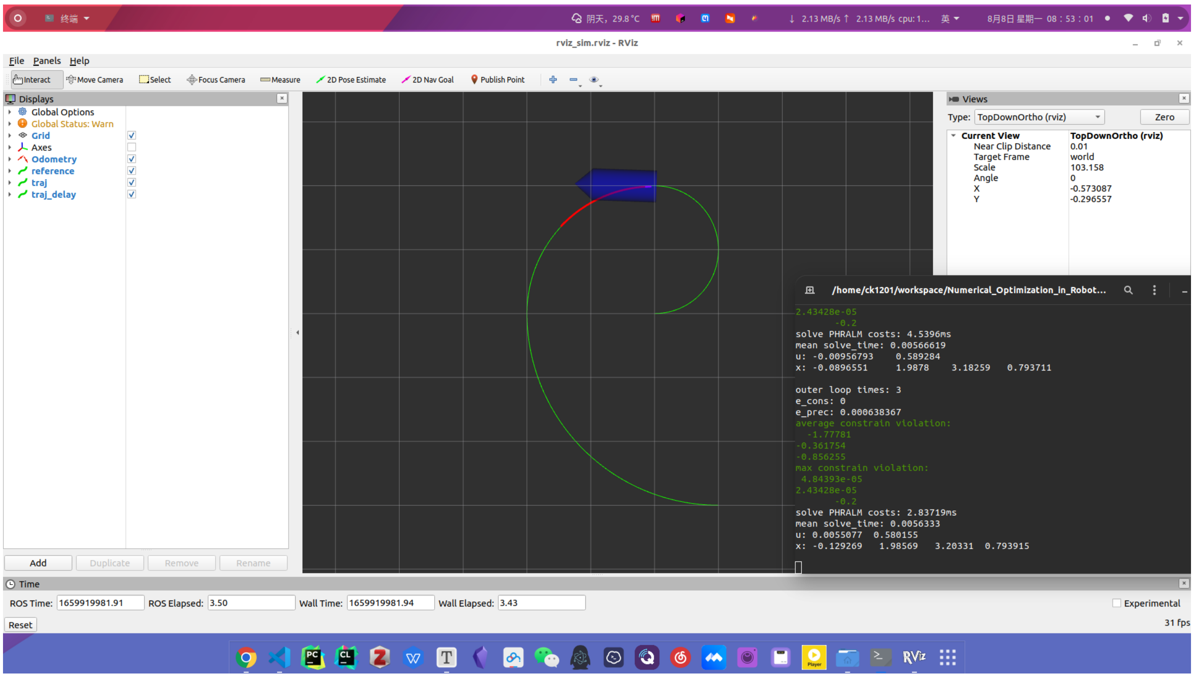
$$\frac{d}{du}(\frac{\rho}{2}\left\|\max\left[G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right)+\frac{\mu}{\rho},0\right]\right\|^2)=\begin{cases}\rho(G+\frac{\mu}{\rho})\frac{dG}{du} & \text{, if } G\left(s_k\left(u_{0:N}\right),u_k\right)+\frac{\mu}{\rho}>0 \\ 0 & \text{, otherwise}\end{cases}$$

设置系数如下表所示

系数	值	系数	值
ρ_{init}	1	λ_{init}	0
μ_{init}	0	γ	1
β	10^3	ξ	0.1
ϵ_{cons}	10^{-5}	ϵ_{prec}	10^{-3}

结果

演示视频见./attachments/HW3_3_example.mp4



Compare the constrain violation in Penalty Method and PHR-ALM

记录下分别使用 Penalty Method 和 PHR-ALM 时，约束 $G\left(s_k\left(u_{0:N}\right), u_k\right)$ 在整个轨迹跟踪阶段的平均值和最大值以及求解时间，结果如下表所示

	Penalty Average	Penalty Max	PHR-ALM Average	PHR-ALM Max
加速度 $a(m/s^2)$	-1.57412	0.00193741	-1.64372	8.86053e-05
前轮转角 $\delta(rad/s)$	-0.702643	0.00138958	-0.681276	2.43428e-05
速度 $v(m/s)$	-0.726147	0.000512305	-0.745466	-6.41998e-05

从结果可知，从平均值上看，两种方法都能使约束得到满足，且数值较接近。从最大值上看， Penalty Method 的违背程度在 10^{-3} 量级，而 PHR-ALM 的违背程度在 10^{-5} 量级。所以， PHR-ALM 在约束违背上比 Penalty Method 更好。在求解时间上， Penalty Method 的平均求解时间为 $6.07996ms$，PHR-ALM为 $3.89999ms$，同样是 PHR-ALM 更好。