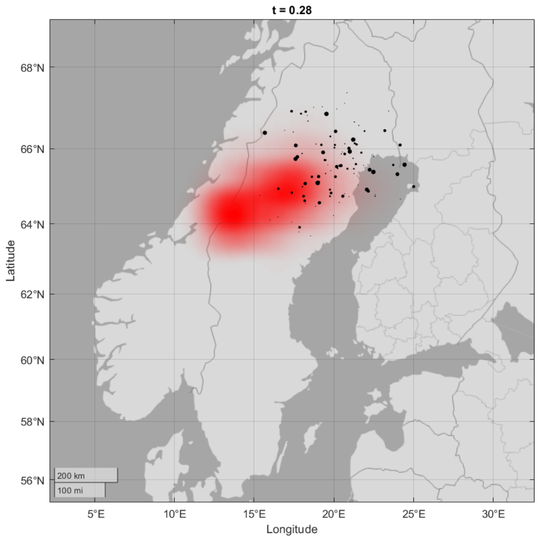

Figur i uppgift 4.

Laboration 1 (SF1693): Konvektion och diffusion

Avsikten med denna laboration är att:

- snabbt komma igång med träning i Matlabprogrammering,
- modellera konvektions-diffusionsproblem och studera dess kvalitativa egenskaper,
- öva på begreppen karakteristikor, rättställdhet, konvergens och stabilitet,
- öva på numerisk approximation av partiella differentialekvationer med finita differensmetoden, Fourierserier och slumpvandring.

Laborationen handlar om spridning av brandrök i olika former. Frågorna nedan, som inte alltid är precist formulerade, ska ses som en vägledning för att skriva en laborationsrapport.

Konvektionsproblem

Denna uppgift handlar om koncentrationen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ av brandrök som uppfyller den partiella differentialekvationen $v \cdot \nabla u = f$ i ett område Ω. För enkelhets skull antar vi att vinden, $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$, och rökproduktionen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, är tidsoberoende i området $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

1. Antag först att

$$\begin{aligned} u(x_1,1) &= g(x_1)\,, \quad \Omega := \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x_1\in\mathbb{R},\; x_2>1\}\,,\\ v(x_1,x_2) &= (x_1,x_2)\,,\\ f(x_1,x_2) &= 2u(x_1,x_2)\,,\end{aligned}$$

där $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är en given funktion. Använd metoden med karakteristikor för att analytiskt lösa konvektionsproblemet

$$v(x)\cdot\nabla u(x) = 2u(x)\,.$$

2. I tillämpningar är data ofta givna i vissa datapunkter, t.ex. att vinden är given endast i observationspunkter. Då är första steget att bestämma en approximation till funktionen från given data och nästa steg att lösa problemet med hjälp av den konstruerade funktionen. Därför antar vi nu att vinden och röken är givna i M diskreta punkter $\mathbf{x}_p=(x_p,y_p)\in\mathbb{R}^2$, det vill säga $v(\mathbf{x}_p)\in\mathbb{R}^2$ är vindhastigheten i punkten $\mathbf{x}_p$ och $f(\mathbf{x}_p)\in\mathbb{R}$ är rökproduktionen i punkten $\mathbf{x}_p$, för $p=1,\ldots,M$.

Välj punkterna $\mathbf{x}_p$ slumpässigt i $\Omega := [0,1]\times[0,1]$ med likformig fördelning och t.ex. $M=1000$.

Använd en Fourierbas

$$\{e^{\mathrm{i}\kappa(n_1x+n_2y)} \;:\; (n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2,\; |n_1|\le N \;\text{ och } |n_2|\le N\}$$

för att interpolera data till Ω med hjälp av minstakvadratmetoden

$$\min_{\hat v_1\in\mathbb{C}^{(2N+1)^2}} \sum_{p=1}^{M} |v_1(\mathbf{x}_p) - \underbrace{\sum_{|n_2|\le N}\sum_{|n_1|\le N} \hat v_1(n_1,n_2)e^{\mathrm{i}\kappa(n_1x_p+n_2y_p)}}_{=:\bar v_1(\mathbf{x}_p)}|^2\,,$$

$$\min_{\hat v_2\in\mathbb{C}^{(2N+1)^2}} \sum_{p=1}^{M} |v_2(\mathbf{x}_p) - \underbrace{\sum_{|n_2|\le N}\sum_{|n_1|\le N} \hat v_2(n_1,n_2)e^{\mathrm{i}\kappa(n_1x_p+n_2y_p)}}_{=:\bar v_2(\mathbf{x}_p)}|^2\,,$$

$$\min_{\hat f\in\mathbb{C}^{(2N+1)^2}} \sum_{p=1}^{M} |f(\mathbf{x}_p) - \underbrace{\sum_{|n_2|\le N}\sum_{|n_1|\le N} \hat f(n_1,n_2)e^{\mathrm{i}\kappa(n_1x_p+n_2y_p)}}_{=:\bar f(\mathbf{x}_p)}|^2\,,$$

där $\kappa=2\pi$ och t.ex. $N=6$. Vi antar att vindhastigheten v och rökproduktionen f i mätpunkterna genereras av

$$\begin{aligned} v(x,y) &= (y,1-x)\,,\\ f(x,y) &= \begin{cases} 1\,, & \text{för } |(x,y)-(0.5,0.5)|<0.1\,,\\ 0\,, & \text{för } |(x,y)-(0.5,0.5)|\ge 0.1\,.\end{cases}\end{aligned}$$

Vi ska använda minsta kvadratlösningarna $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ och $\bar{f}$ för att approximera ett konvektionsproblem med karakteristikor. Eftersom v och f är reellvärda och vi söker reellvärda karakteristikor använder vi i koden av numeriska skäl realdelen av funktionerna $\bar{v}$ och $\bar{f}$ och låter $\tilde{v}_i(x)$ vara realdelen av $\bar{v}_i(\mathbf{x})$ och $\tilde{f}(\mathbf{x})$ vara realdelen av $\bar{f}$ samt $\tilde{v}(\mathbf{x}) = \big(\tilde{v}_1(\mathbf{x}), \tilde{v}_2(\mathbf{x})\big)$. Bestäm nu en approximation till koncentrationen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ som löser

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) \cdot \nabla u(x) &= \tilde{f}(x)\,, \quad x \in \Omega\,,\\ u(x_1, 0) &= 0\,, \quad x_1 \in [0,1]\,,\\ u(0, x_2) &= 0\,, \quad x_2 \in [0,1]\,, \end{aligned}$$

på liknande sätt som i uppgift 1 fast numeriskt: välj för varje punkt $(k_1/K, k_2/K) \in \Omega, \quad k_i \in \{1, 2, \ldots K\}$ en karakteristisk bana

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} x(s) &= \tilde{v}\big(x(s)\big)\,, \quad s < 0\,,\\ x(0) &= (k_1/K, k_2/K)\,,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s) &= \tilde{f}\big(x(s)\big)\,, \end{aligned}$$

som du approximerar med t.ex. Eulers metod. Testa först med relativt litet K, t.ex. $K = 10$, för att undvika lång beräkningstid. Använd Matlabs kommandon `contour` och `mesh` för att göra figurer med nivåkurvor och 3D-plottar för u. (Tips: det kan underlätta att först lösa problemet med de givna funktionerna v och f).

Till exempel när placering av vindkraftverk ska väljas behöver problem som liknar uppgiften lösas. Tillgänglig historisk data om vind i vissa punkter i rum-tiden (t.ex. från SMHI) används då för att skapa approximationer av vindfältet i hela beräkningsområdet. Det erhållna vindfältet avgör sedan var det är optimalt att placera vindkraftverken.

Alternativet med karakteristikor som startar från givna punkter på inflödesranden kan användas för att lösa problemet mer beräkningseffektivt, men det blir (troligen) mer besvärligt att plotta, så det behöver inte testas nu. Avsikten med uppgiften är inte beräkningseffektivet utan träning på lösning av transportproblem och karakteristikor.

Diffusion och slumpvandring

Konvektions-diffusionsproblemet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t}(y,t) + \mathrm{div}\big(v(y)\rho(y,t)\big) - c\Delta\rho(y,t) &= 0\,, \quad y \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\,,\\ \rho(y, 0) = g(y) &\geq 0\,, \quad y \in \mathbb{R}^2\,, \end{aligned} \tag{1}$$

för tätheten $\rho : \mathbb{R}^2 \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, där c är en positiv konstant och $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ett givet hastighetsfält, kan approximeras med differensmetoder. Om $v(y) = v$ är konstant kan lösningen även approximeras med en Fourierserie. I följande uppgift ska ni jämföra differensmetoden med approximation med Fourierserie, i fallet $v = 0$ (ingen vind) och en rumsdimension.

3. Jämför approximation med Fourierserier och finita differensmetoden för

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}u(x,\tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\tau) &= 0\,, \quad \tau > 0\,,\ x \in [0,\pi]\,, \\ u(x,0) &= g(x)\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,\tau) &= 0\,, \quad \tau > 0\,, \\ u(\pi,\tau) &= 0\,, \quad \tau > 0\,, \end{aligned}$$

för de två fallen $g(x) = x(\pi - x)$ och

$$g(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0,\pi/2)\,, \\ 0\,, & x \in [\pi/2,\pi]\,. \end{cases}$$

Studera metodernas noggrannhet. Vad är de olika metodernas för och nackdelar?

4. En annan metod för att approximera lösningar till (1) är slumpvandring med Monte Carlo sampling. Låt

$$X_{n+1} = X_n + v(X_n)\Delta t + \sqrt{2c}\Delta W_n$$

där $\Delta t \in (0,\infty)$ är ett givet tidssteg och $\Delta W_n \in \mathbb{R}^2$ är oberoende normalfördelade slumpvariabler med väntevärde noll och varians Δt i varje komponent, för $n = 0,1,2,\ldots,N$. Då har vi för varje kontinuerlig funktion $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(y)\rho(y,t)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{\Delta t \to 0+} \mathbb{E}[G(X_N) \mid X_0 = x,\ N\Delta t = t]g(x)\mathrm{d}x\,.$$

Ekvationen ovan säger ungefär, att om man genererar oändligt många av dessa partikelbanor med slumpade startpositioner fördelade enligt g, så kommer partiklarnas täthet i punkten y och tiden t vara $\rho(y,t)$. Med andra ord är ρ partiklarnas täthetsfunktion. Här är $\mathbb{E}[G(X_N) \mid X_0 = x,\ N\Delta t = t]$ är väntevärdet av $G(X_N)$ för banor, X, som startar i x och vid tiden t slutar i X_N. Notera att för $c = 0$ har vi i gränsen när $\Delta t \to 0+$ karakteristikan

$$\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathrm{d}s} = v\big(X(s)\big)\,, \quad 0 < s < t,\ X(0) = x.$$

Här följer en kort motivering varför tätheten ρ löser (1), i fallet $v = 0$ och $y \in \mathbb{R}$. Låt oss betrakta

$$X_{n+1} - X_n = \alpha\Delta\tilde{W}_n$$

där $(\Delta\tilde{W}_0, \ldots, \Delta\tilde{W}_n, \ldots)$ är oberoende stokastiska variabler och $\Delta\tilde{W}_n = \pm\sqrt{\Delta t}$ med sannolikheten $1/2$ och $\alpha > 0$ är en konstant. Då kan tätheten ρ_m^n mätas med antalet banor som vid tidssteget n hamnar i positionen $m\alpha\sqrt{\Delta t}$. Med oändligt många banor får vi differensekvationen

$$\rho_m^{n+1} = \frac{\rho_{m-1}^n + \rho_{m+1}^n}{2}$$

eftersom X_n kan gå från $m\alpha\sqrt{\Delta t}$ till $(m \pm 1)\alpha\sqrt{\Delta t}$ med sannolikheten $1/2$ på ett tidssteg. Denna differensekvation kan skrivas

$$\frac{\rho_m^{n+1} - \rho_m^n}{\Delta t} - \frac{\alpha^2}{2}\frac{\rho_{m+1}^n - 2\rho_m^n + \rho_{m-1}^n}{(\alpha\sqrt{\Delta t})^2} = 0\,,$$

vilket är en finit differensapproximation av diffusionsekvationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho(y,t) - \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\rho(y,t) &= 0\,, \quad t > 0\,,\ y \in \mathbb{R}\,, \\ \rho(y,0) &= g(y)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

En approximation av (2) med slumpvandring erhålls genom att ersätta med ändligt många banor $X_n(k)$, $k = 1, \ldots, K$, och beräkna tätheten av banor.

4a. Simulera lösningar till (1) med Matlabkoden `DEMO animera slumpvandring.m` i Canvas och studera till exempel hur diffusionskonstanten c påverkar lösningen. Canvasfilen `hur animering slumpvandring funkar.pdf` beskriver metoden i koden.

Testa gärna Matlabkoderna `DEMO animering slumpvandring geo.m` och `DEMO animering slumpvandring geo svans.m` simulerar konvektionsproblemet (1) i en omgivning av Sverige. Dessa koder använder Matlabmodulen "Mapping Toolbox" och filen `hur installera kartritning.pdf` i Canvas beskriver hur modulen installeras. Koderna i uppgift 4 har skrivits av Emanuel Ström (emastr@kth.se) och ramverket för hantering av vinddata tillhandahölls av H-AI AB.

4b. Frivillig uppgift. Vi kan tolka $\rho(x,t)$ som en mängd slumpade rökpartiklars fördelning över tid. Eftersom konvektions-diffusionsproblemet (1) är homogent, bildas aldrig nya partiklar (det finns ingen källterm). Denna modell fungerar bra för att beskriva utsläpp som görs över kort tid, men inte för exempelvis eldsvådor, där rök bildas över längre tid. Intressant nog kan vi faktiskt redan lösa ett sådant problem med hjälp av lösningen till (1) och Duhamels princip (se W. Strauss kapitel 3.4). Antag att $\mathrm{div}(v) = 0$ och visa, genom att tillämpa Leibniz integrationsregel och integralkalkylens fundamentalsats, att

$$\hat{\rho}(x,t) := \int_0^t \rho(x,s)\mathrm{d}s$$

löser den inhomogena differentialekvationen

$$\frac{\partial\hat{\rho}(x,t)}{\partial t} + v(x)\cdot\nabla\hat{\rho}(x,t) - c\Delta\hat{\rho}(x,t) = g(x),$$

med initialvillkoret

$$\hat{\rho}(x, 0) = 0.$$

Använd nu en lämplig numerisk integrationsmetod, exempelvis Eulers metod, för att uppskatta $\hat{\rho}$ med hjälp av din lösning ρ till (1). Om ρ är rökspridning som ett resultat av en kort "puff", så kan $\hat{\rho}$ tolkas som rökspridningen vid en konstant produktion av ny rök. En annan tolkning kan vara att $\hat{\rho}$ är "skadan" som puffens framfart orsakat sin omgivning.