

**Problem:** Vi vill uppskatta  $u(x, t)$  numeriskt genom att formulera  $u$  som ett väntevärde. Från uppgiftsbeskrivningen vet vi att  $u(x, t)$  är täthetsfunktionen hos en slumpvariabel  $X_t$  som beskriver positionen hos en partikel vid tiden  $t$ . Det vill säga, sannolikheten att  $X_t$  ligger i ett område  $\Omega$  är

$$\mathbb{P}(X_t \in \Omega) = \int_{\Omega} u(x, t) dx.$$

Notationen  $X_t$  står för gränsvärdet man får då man låter  $\Delta t \rightarrow 0$  i slumptvandringen från uppgift 4. Om  $\Omega$  är tillräckligt liten så kommer högerledet gå mot  $u(x, t) \cdot \int_{\Omega} dx$  där  $x$  ligger i  $\Omega$ . Det vill säga,  $\mathbb{P}(X_t \in \Omega)$  kan ses som en uppskattning av  $u$  för  $x$  som ligger inuti  $\Omega$ . Om vi låter  $\Omega_m, n = 1, 2, \dots, M$  vara en diskretisering av någon intressant del av  $\mathbb{R}^2$  (exempelvis ett rutnät, där  $\Omega_m$  är enskilda celler), kan vi skriva

$$\bar{u}_m(t) := \int_{\Omega_m} u(x, t) dx = \mathbb{P}(X_t \in \Omega_m), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Ett vanligt trick här är att introducera en indikatorfunktion

$$\mathbb{I}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Och skriva om  $\bar{u}_m(t)$  som ett väntevärde:

$$\bar{u}_m(t) = \int_{\Omega_m} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{\Omega_m}(x) u(x, t) dx = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Omega_m}(X_t)].$$

För att kunna beräkna väntevärdet måste vi generera utfall av slumpvariabeln  $X_t$ , och för att göra det måste vi diskretisera tiden. Låt  $t_n, n = 0, \dots, N$  vara en sådan diskretisering med  $t_0 = 0$ . Vi kan då uppskatta  $\bar{u}_m(t_n)$  genom att generera  $K$  stycken slumpvariabler  $X_{t_n}^1, X_{t_n}^2, \dots, X_{t_n}^K$  och beräkna

$$\bar{u}_{m,n} := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{I}_{\Omega_m}(X_{t_n}^k).$$

Man kan tänka på  $X_{t_n}^k, k = 0, 1, \dots, K$  som en mängd partiklar som släpps ut vid tiden  $t_0 = 0$  med fördelningen  $g$ , och vandrar slumprågigt i  $\mathbb{R}^2$ . Då är  $\bar{u}_{m,n}$  andelen av dessa partiklar som befinner sig i  $\Omega_m$  vid tiden  $t_n$ .

**Överkurs: importance sampling.** Problemet med att uppskatta  $\bar{u}_m(t_n)$  enligt ovan, är att om det finns  $\Omega_m$  där  $\mathbb{P}(X_{t_n} \in \Omega_m)$  är väldigt liten, så kommer  $\bar{u}_{m,n}$  uppskattas till 0, eftersom inga partiklar hamnar där under simuleringen. För att lösa detta problem kan man initiera partiklarna med en annan fördelning, och korrigera för detta när man beräknar värdevärdet. En sådan metod kallas ”importance sampling”. För att förklara hur den fungerar börjar vi med att utnyttja en egenskap hos  $u$  från uppgiftsbeskrivningen:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_\Omega(x) u(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E} [\mathbb{I}_\Omega(X_t) | X_0 = x] g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{g(X_0)}{f(X_0)} \mathbb{I}_\Omega(X_t) \middle| X_0 = x \right] f(x) dx.\end{aligned}$$

Uttrycket ovan beskriver ett väntevärde som innehåller en annan slumpvariabel  $Y_t$ , som följer samma karakteristik som  $X_t$ , men är initierad med en fördelning  $f$  istället för  $g$ . Vi får slutligen

$$\bar{u}_m(t_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{I}_{\Omega_m}(x) u(x, t_n) dx = \mathbb{E} \left[ \frac{g(Y_0)}{f(Y_0)} \mathbb{I}_{\Omega_m}(Y_{t_n}) \right]$$

Och på samma sätt som innan kan vi uppskatta denna kvantitet:

$$\bar{u}_{m,n} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{g(Y_0^k)}{f(Y_0^k)} \mathbb{I}_{\Omega_m}(Y_{t_n}^k).$$

Vi kan nu välja  $f$  så att fler celler  $\Omega_m$  träffas av partiklarna. Exempelvis, om  $g$  är en normalfördelning med standardavvikelse  $\sigma$ , skulle vi kunna låta  $f$  vara en normalfördelning med standardavvikelse  $2\sigma$  för att sprida ut partiklarna lite mer. Denna algoritm kan köras med matlab-funktionen `geo_animate_kolmogorov_fwd.mat`.