1. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\ln(x+1)), & x \geq 0 \\ x^2 + x, & x \in (-1, 0) \\ 1, & x \in [-2, -1] \cap \mathbb{Q} \\ -2, & x \in [-2, -1] \setminus \mathbb{Q} \\ x + \arctan(x+2), & x \in (-\infty, -2) \end{cases}$$

Undersök derverbarhet av f. (Dvs. bestäm *alla* punkter x där f är deriverbar, bestäm derivatan av f i dessa punkter, och förklara varför f inte är deriverbar i andra punkter.)

Vi vet att f är deriverbar i intervallen $[0, \infty)$, $(-1, 0)$, $(-\infty, -2)$ p.g.a. f där är sammansättning av elementära funktioner.

Vi visar att f är kont. och deriverbar i punkten 0 och att f ej är kont. (och således ej deriverbar) i $[-2, -1]$.

Vi bestämmer först derivatorna av elementärfunktionerna:

$$\frac{d}{dx} \sin(\ln(x+1)) = \cos(\ln(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\cos(\ln(x+1)) \cdot \frac{1}{x+1}\right) = \cos(\ln(1)) = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{d}{dx}(x^2 + x)\right) = \lim_{x \to 0^-} (2x+1) = 1.$$

Funktionen f måste dessutom vara kont. i $x=0$:

$\sin(\ln(1)) = \sin 0 = 0$,

$0^2 + 0 = 0$. Därmed är f deriverbar i $x = 0$.

↑behövs ej utan lim p.g.a. kont.

f är deriverbar i intervallet $(-\infty, -2)$ med derivatan

$$\frac{df}{dx} = 1 + \frac{1}{(x+2)^2 + 1}, \quad x \in (-\infty, -2).$$

Vi visar att f inte är deriverbar i $x = [-2, -1]$ genom att notera att deriverbarhet implicerar kontinuitet och att f ej är kont. i någon punkt i $[-2, -1]$.

Bevis f ej kont. i någon punkt där $f\,x = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Definition kontinuitet:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definition gränsvärde, $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Vi ska visa negationen av kontinuitet, dvs:

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \neg \left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$. Vi börjar med att visa att f ej är kontinuerlig kring irrationella punkter:

Tag $\varepsilon = 1$. Vi ska visa att för alla δ så existerar det $x \in \mathbb{Q}$ där $a - \delta < x < a + \delta$, där a är ett irrationellt tal. Notera att varje irrationellt tal t kan representeras som $t = \lfloor t \rfloor + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i}$, där $k_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Notera att $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{10^i}$ (per def.) vilket betyder att det för alla $\varepsilon_1 > 0$ finns $N > 0$ sådant att $\left| t - \lfloor t \rfloor - \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{10^i} \right| < \varepsilon_1$ för alla $n > N$. Notera att $\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{10^i}$ ger ett rationellt tal.

Vi låter $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i} = a - \lfloor a \rfloor$. Då finns det x där

$x = \lfloor a \rfloor + \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{10^i}$, där $N > 0$ är något tal så att $|a - x| < \delta$. Därmed blir $|f(x) - f(a)| = 3 \geq 1$, därmed är f ej kont. kring irrationella punkter.

Notera att om f var def. på t.ex. $[-\sqrt{2}, \infty)$ skulle x på detta sätt hamna utanför intervallet. Detta är dock ej fallet i uppgiften.

Vi visar att f ej är kont kring rationella punkter:

Tag $\varepsilon = 1$. Låt a vara rationellt. Vi vill finna ett irrationellt x sådant att $a - \delta < x < a + \delta$. Om δ är rationellt, välj $x = a \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$. Annars välj $x = a \pm \frac{\delta}{2}$. Eftersom summan av ett rationellt och ett irrationellt tal är irrationellt blir x då irrationellt.

välj att addera/subtrahera så x hamnar i intervallet till f

Därmed är $|f(x) - f(a)| = 3 \geq 1 = \varepsilon$. Därmed är f ej kont. någonstans.

2.

2. Låt

$$f(x) = \frac{x^2+9}{x^2-9}$$

(a) Bestäm definitionsmängd till f och beräkna eventuella asymptoter.

(b) Bestäm stationära punkter (dvs. kritiska punkter) och bestäm intervaller där f är avtagande eller växande.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$f(x) = \frac{x^2+9}{(x+3)(x-3)}$, vertikala asymptoter (v.a.) vid ± 3 då uttrycket ej kan förenklas $\left(\lim_{x \to \pm 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty\right)$.

Horisontella asymptoter:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+9}{x^2-9} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{9}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

b) $f(x) = (x^2+9) \cdot \frac{1}{x^2-9}$

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x^2-9} + (x^2+9) \cdot -\frac{1}{(x^2-9)^2} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{x^2-9} - \frac{(x^2+9)2x}{(x^2-9)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-9) - 2x(x^2+9)}{(x^2-9)^2} = \frac{2x(x^2-9-x^2-9)}{(x^2-9)^2}$$

$$= \frac{2x \cdot (-18)}{(x^2-9)^2} = -\frac{36x}{(x^2-9)^2}$$

Stationära punkter är punkter där derivatan är 0.

$$-\frac{36x}{(x^2-9)^2} = 0 \iff x = 0$$

f är avtagande om $f' \leq 0$ och kont, växande om $f' \geq 0$ och kont.

f är inte växande i hela $D_f \cap (-\infty, 0]$ eftersom t.ex. $f(-4) = \frac{25}{7}$ och $f(0) = -1$, samma argument kan föras för $D_f \cap [0, -\infty)$

Notera att nämnaren alltid är större än 0 eftersom nämnaren är en kvadrat.

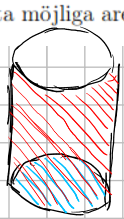
$$-\frac{36x}{(x^2-9)^2} \geq 0 \iff -36x \geq 0 \iff x \leq 0,$$ dvs f är växande

i intervallen $(-\infty, -3)$ och $(-3, 0)$

På liknande sätt, x är avtagande i intervallen $[0, 3)$ och $(3, \infty)$

$x = 0$ är en stationär punkt.

3. Man vill tillverka en cylindrisk konservburk (utan lock) med volymen $V = 1000 cm^3$ och minsta möjliga area. Bestäm burkens radie och höjd.



$A_1 = 2\pi r \cdot h$

$A_2 = \pi r^2$

$A = A_1 + A_2 = \pi r(2h + r)$

$V = \pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow A = \pi r\left(2 \cdot \frac{V}{\pi r^2} + r\right)$

$= \frac{2V}{r} + \pi r^2.$

Notera att $D_A = (0, \infty)$

Notera $\lim_{r \to 0} A(r) = \lim_{r \to \infty} A(r) = \infty$. Därmed ges minimivärdet av A vid någon stationär punkt.

$\frac{dA}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = V \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{\pi}$

$\overset{r \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 6,8$

$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \cdot \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(\frac{V}{\pi}\right)^1}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r$

Svar: $h = r = \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, c.a. 6,8 cm