Mängd kemikalie P som produceras på dag k är a_k.

Förs sedan in i blandning där den reagerar med andra kemikalier.

Om process har pågått i n dagar, minskar mängden a_k till $p_{nk} a_k$ där p_{nk} är positiva tal så att $\sum_{i=1}^{n} p_{ni} = 1$.

Vi kan anta $\forall k: p_{nk} = 0$ när $n \to \infty$.

Låt c_n vara tot. mängd P efter process har gjorts under första n dagarna

$$\left(\text{dvs } c_n = \sum_{i=1}^{n} p_{ni} a_i \right).$$

a_k mäts varje dag k, ska sedan räkna ut c_n efter n dagar. Mål: Visa $|c_n - a| < 0{,}001$ efter ett antal dagar.

OBJECTIVE: Formulera och bevisa en sats som säger att om a_n konv. mot A då konv. c_n mot A.

Efter detta, ta reda på om a_n inte konv. $\Rightarrow$ c_n inte konv, dvs a_n konv. $\Leftrightarrow$ c_n konv.

Om en serie är konvergent betyder detta att

$|a_n - A| < \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$ för alla $n > N(\varepsilon)$.

Vi kan inte välja ε till något som beror på n, n försvinna. och ε är konst.

Löst version

Visa att $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| < \varepsilon$. Notera $|a_n - A| < \varepsilon_2$ när $n > M$.

Notera

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| = \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M-1} a_k + \sum_{k=M}^{n} a_k\right) - A\right| = t$$

$$\sum_{k=M}^{n} a_k \leq \sum_{k=M}^{n} (A+\varepsilon_2) \leq n\left(A+\varepsilon_2\right). \text{ Låt } \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow t = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M-1} a_k + \frac{1}{n}\left(nA + \frac{n\varepsilon}{2}\right) - A\right|$$

Vi producerar inte antimateria, alla $a_k > 0$

$$= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M-1} a_k + A + \frac{\varepsilon}{2} - A\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M-1} a_k + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nu återstår att visa att $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M-1} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notera att $\sum_{k=1}^{M-1} a_k$ är summan av alla termer i a_k innan a_k konvergerar, detta är ett ändligt antal termer och antalet termer beror på ε (d.v.s $M = M(\varepsilon)$).

Vi väljer N:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M-1} a_k < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{M-1} a_k < N.$$

Kom ihåg $n > M$. Därmed är $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{M-1} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$ när $n > \max(N, M)$.

Därmed är $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| < \varepsilon$ när $n > \max(N, M)$,

vilket betyder att serien $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergerar. $\blacksquare$

Nu för faktoriskt frågan: Visa att $c_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} a_k$ konvergerar mot A när p_{nk} konvergerar mot 0 när $n \to \infty$ och a_k konvergerar mot A när $n \to \infty$. Noterar att $\forall n : \forall k : p_{nk}, a_k > 0$.

Vi ska visa att $\left| \sum_{k=1}^{n} p_{nk} a_k - A \right| < \varepsilon$ när $n > N$.

Noterar att $\forall k : p_{nk} < \varepsilon_p$ när $n > M_p$ och att $|a_k - A| < \varepsilon_a$ när $n > M_a$. Låt $M = \max\{M_p, M_a, 1\}$

Trivialt att visa går mot 0.

Noterar $$\sum_{k=1}^{n} p_{nk} a_k - A = \sum_{k=1}^{M-1} p_{nk} a_k + \sum_{k=M}^{n} p_{nk} a_k - A < \overbrace{\varepsilon_p \sum_{k=1}^{M-1} a_k} + \varepsilon_p n (A + \varepsilon_a) - A.$$

Vi vill att $\varepsilon_p n (A + \varepsilon_a) - A \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\varepsilon_p n A + \varepsilon_a \varepsilon_p n - A \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad n > M.$$

~~Noterar att~~ $\cancel{\forall n : \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = 1}$

$\cancel{\forall k : p_{nk} < \varepsilon_p.}$

$\cancel{p_{n1} = 1}$

$\cancel{-n\varepsilon_p < \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = 1 < n\varepsilon_p}$

$p_{nk} < \varepsilon_p$ när $n > M$.

Frågan är, kan vi ha $p_{nk} < \frac{1}{n}$ när $n > M$?

Jag ser ingen anledning till varför detta skulle vara sant utan motivation.

Går det överhuvudtaget ~~att~~ visa att $\varepsilon_p \leq \frac{1}{n}$?