Låt p vara ett naturligt tal, $p \geq 3$.

Avlägsna från intervallet $[0, 1]$ ett öppet intervall med längden $\frac{1}{p}$ och mittpunkt i $\frac{1}{2}$ (steg 1).

Avlägsna sedan (steg 2) från vart och ett av de båda återstående intervallen ett öppet intervall med längden $(\frac{1}{p^2})$ och mittpunkt i centrum av respektive intervall.

I steg 3 avlägsnas från vart och ett av de återstående intervallen ett öppet intervall med längden $(\frac{1}{p^3})$ och mittpunkt i centrum av respektive intervall.

Och så forts..

Beteckna med $C_n(p)$ unionen av alla återstående intervallen efter steg n, och låt $C(p)$ vara återstående mängden efter oändliga många steg.

3. Skapa en injektiv funktion f från $[0, 1)$ till $\cancel{\mathcal{C}}$ (tips: använd bas 2 representation av reela tal i $[0, 1)$ och bas 3 representation av reela tal i $\cancel{\mathcal{C}}$). Observera att sådan f visar att $\cancel{\mathcal{C}}$ inte har färre element än intervallet $[0, 1)$. $C(3)$

Enligt wikipedia (och jag tror videon) så består Cantormängden av alla reella tal som inte kräver siffran 1 för att representeras i bas 3. $[0,1]$

Detta är eftersom du tar bort $(0,1; 0,2)_{tre}$, sedan $(0,01; 0,02)_{tre}$ och $(0,21; 0,22)_{tre}$ etc.

Observera att $0,1_{tre}$ är kvar eftersom denna även kan skrivas som $0,\overline{2}_{tre}$.

Alla tal i $[0,1)$ kan representeras som

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad \text{där} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}$$ (Tänk bas två).

För att mappa något av dessa T till något $T' \in C(3)$, låt $T' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$ (T' skrivet i bas tre kommer ej ha några 1:or, varje siffra kommer var 0 eller 2).

Bevisa att C_3 endast innehåller tal som kan skrivas

$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$? Princip genom ovan motivering.

4. Avlägsna från intervallet $[0,1]$ två öppna intervallen: $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ och $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ (steg 1).

Avlägsna sedan (steg 2) från vart och ett av de återstående intervallen två öppna intervall med längden $(\frac{1}{5^2})$ (t.ex. från $[0, \frac{1}{5}]$ avlägsna intervaller $(\frac{1}{5^2}, \frac{2}{5^2})$ och $(\frac{3}{5^2}, \frac{4}{5^2})$.

Och så forts..

Beteckna med D_n unionen av alla återstående intervallen efter steg n, och låt D vara återstående mängden efter oändliga många steg.

(a) Låt $l(n)$ vara totala längden av de intervall som återstår efter steg n. Bestäm $l(n)$ och motivera ditt svar.

(b) Beräkna $\lim_{n\to\infty} l(n)$. Vad betyder ditt resultat? Rita bild.

(c) Skapa en funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ sådant att

  i. f är kontinuerlig

  ii. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, och

  iii. f har derivatan 0 i alla $x \in [0,1] \setminus D$. ← Sant men hur visa? Hur def D?

Försök att definera funktionen f som en gränsvärde av en följd av continuerliga funktioner. Det stämmer inte att om en följd av kontinuerliga funktioner f_n konvergerar till en funktion g då måste g vara kontinuerlig (varför?). Men **för den följd av continuerliga funktioner** som är konstruerad som i videon, då måste gräns funktionen f vara kontinuerlig. Visa att det f som ni konstruerar (dvs. f som uppfyller egenskap i., ii. och iii.) är faktiskt kontinuerlig.

Avlägsna $(0,1;0,2)_{\text{fem}}$ och $(0,3;0,4)_{\text{fem}}$ $\quad 1 - 2 \cdot \frac{1}{5}$

-||- $(0,01;0,02)_{\text{fem}}$ och $(0,03;0,04)_{\text{fem}}$ från $[0;0,1]_{\text{fem}}$

och $(0,41;0,42)_{\text{fem}}$ och $(0,43;0,44)_{\text{fem}}$ från $[0,4;1]$

och $(0,21;0,22)_{\text{fem}}$ och $(0,23;0,24)_{\text{fem}}$ från $[0,2;0,3]_{\text{fem}}$

$1 - 3^0 \cdot 2^1 \cdot \frac{1}{5^1} - 3^1 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{5^2}$, etc för nästa

Återstående tal, hypotes: Alla tal som ej kräver 1 eller 3 för att skriva i bas 5.

$$l(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} 3^k \cdot 2^{k+1} \cdot \frac{1}{5^{k+1}} = 3^n \cdot \frac{1}{5^n}$$

D är alla tal som ej innehåller siffran 1 eller 3 i bas 5.

Vi testar att fylla alla hål?

Låt $D_n = [0;0,1]_{\text{fem}} \cup [0,2;0,3]_{\text{fem}} \cup [0,4;0,5]_{\text{fem}}$

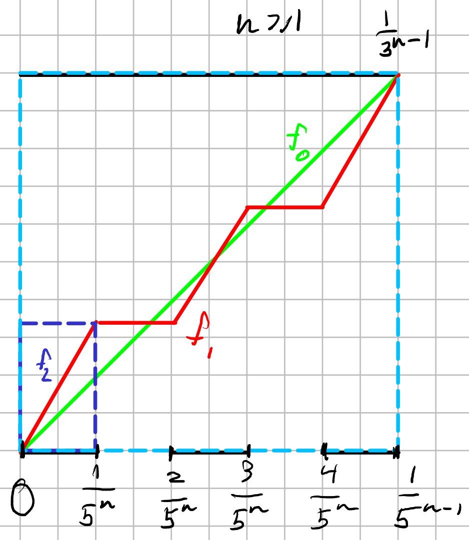
$f_1\, x = \frac{5}{3} x \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{5}$

$f_1\, x = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5}$

$f_1\, x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{5}\right), \quad \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$

$f_1\, x = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5}$

$f_1\, x = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right), \quad \frac{4}{5} \leq x \leq 1$



Förflyttar denna hit och hit.

Funktionen liknar sig själv, dvs.

$$\left\{(5x, 3f_2(x)) \,\middle|\, x \in \left[0, \tfrac{1}{5}\right]\right\} = \left\{(x, f_1(x)) \,\middle|\, x \in [0, 1]\right\}$$

Mer generellt: för $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot f_{n-1}(5x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ f_{n-1}(x), & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_{n-1}\left(5\left(x - \frac{2}{5}\right)\right), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ f_{n-1}(x), & \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_{n-1}\left(5\left(x - \frac{4}{5}\right)\right), & \frac{4}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

TODO: Bevisa derivata 0 i alla $x \in [0,1] \setminus D$ och $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$ (detta är sant, behöver dock bevisas)

$f_0\, x = x$

$$f_1\, x = \begin{cases} \frac{5}{3}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{5}\right), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3}, & \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right) & \frac{4}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vi visar först f_1 är kont. Notera att vi endast behöver visa att den är kont. i ändpunkter av intervallen (i intervallen definieras den av elementärfunktioner).

$$\lim_{x \to \frac{1}{5}^-} f_1(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{3}} = \lim_{x \to \frac{1}{5}^+} f_1(x)$$

$$\lim_{x \to \frac{2}{5}^-} f_1(x) = \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\right) = \lim_{x \to \frac{2}{5}^+} f_1(x)$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{5}^-} f_1(x) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{3} = \lim_{x \to \frac{3}{5}^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{5}^-} f_1(x) = \boxed{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\right) = \lim_{x \to \frac{4}{5}^+} f_1(x)$$

Notera $f_1(0) = 0$ och $f_1(1) = 1$. Därmed är f_1 kont.

Vi skall nu visa att om f_n är kont. så är f_{n+1} kont.

Induktionsantaganden

Antag $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}$, $f_n\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{3}$, $f_n\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{3}$, $f_n\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3}$,
$f_n(1) = 1$ och f_n är kont.

Notera

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot f_n(5x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ f_n(x), & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_n\left(5\left(x - \frac{2}{5}\right)\right), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ f_n(x), & \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_n\left(5\left(x - \frac{4}{5}\right)\right), & \frac{4}{5} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notera att i varje intervall består f_{n+1} av en sammansättning av kontinuerliga funktioner, därmed är f_{n+1} kont i dessa intervall.

Vi behöver alltså visa att f_{n+1} är kont. i $\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$.

Notera att $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \cup (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$: $f_{n+1}(x) = f_n(x)$, dvs funktionen förändras inte beroende på n i dessa intervall (notera $n \neq 0$). Notera att detta betyder att när $x \in (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \cup (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ så är $f_n(x) = \frac{1}{3}$. Notera att f_n är kontinuerlig. Vi beräknar gränsvärdena för funktionen:

$$f_{n+1}(0) = \frac{1}{3} f_n(0) = 0$$

Pga kont.

Via induktion

$$\lim_{x \to \frac{1}{5}^-} \frac{1}{3} f_n(5x) = \frac{1}{3} f_n\left(\lim_{x \to \frac{1}{5}^-} 5x\right) = \frac{1}{3} f_n(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Via induktion

$$\lim_{x \to \frac{2}{5}^+} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_n\left(5\left(x - \frac{2}{5}\right)\right)\right) = \frac{1}{3} + f_n(0) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

Via induktion

$$\lim_{x \to \frac{3}{5}^-} \text{———} \,\| \,\text{———} = \frac{1}{3} + f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to \frac{4}{5}^+} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_n\left(5\left(x - \frac{4}{5}\right)\right)\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_n(0) = \frac{2}{3}$$

$$f_{n+1}(1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_n\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 1.$$

Därmed är f_{n+1} kont., $f_{n+1}(0) = 0$ och $f_{n+1}(1)$ om alla induktionsantaganden stämmer för f_n. Alla induktionsantaganden stämmer för f_1 därmed är $\forall n \geq 1$ har f_n dessa egenskaper.

Definition 6.2.3 (Uniform Convergence). Let (f_n) be a sequence of functions defined on a set $A \subseteq \mathbf{R}$. Then, (f_n) *converges uniformly on* A to a limit function f defined on A if, for every $\epsilon > 0$, there exists an $N \in \mathbf{N}$ such that $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ whenever $n \geq N$ and $x \in A$.

Theorem 6.2.6 (Continuous Limit Theorem). *Let (f_n) be a sequence of functions defined on $A \subseteq \mathbf{R}$ that converges uniformly on A to a function f. If each f_n is continuous at $c \in A$, then f is continuous at c.*

Theorem 6.2.5 (Cauchy Criterion for Uniform Convergence). *A sequence of functions (f_n) defined on a set $A \subseteq \mathbf{R}$ converges uniformly on A if and only if for every $\epsilon > 0$ there exists an $N \in \mathbf{N}$ such that $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ whenever $m, n \geq N$ and $x \in A$.*

~~**Theorem 6.3.1 (Differentiable Limit Theorem).** *Let $f_n \to f$ pointwise on the closed interval $[a, b]$, and assume that each f_n is differentiable. If (f_n') converges uniformly on $[a, b]$ to a function g, then the function f is differentiable and $f' = g$.*~~

Först visar vi att $\left|f_{n+1}(x) - f_n(x)\right| < \frac{1}{3^{n+1}}$

Noterar $f_0\, x = x$

och att
$$f_1\, x = \begin{cases} \frac{5}{3}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{5}\right), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3}, & \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5} \\ \frac{2}{3} + \frac{5}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right) & \frac{4}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

$$|f_1 - f_0| = \begin{cases} \left|x - \frac{5}{3}x\right| = \left|-\frac{2}{5}x\right| \leq \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} < \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ \left|x - \frac{1}{3}\right| \leq \left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{15} - \frac{5}{15}\right| = \frac{2}{15} < \frac{1}{3}, & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \left|x - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{15} < \frac{1}{3}, & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \text{BLABLABLA} \end{cases}$$

Anta att påståendet är sant för $f_n - f_{n-1}$.

$$f_{n+1} - f_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot f_n(5x) - \frac{1}{3} f_{n-1}(5x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{5} \\ f_n(x) - f_{n-1}(x), & \frac{1}{5} < x < \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_n(5x-2) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_{n-1}(5x-2)\right), & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5} \\ f_n(x) - f_{n-1}(x), & \frac{3}{5} < x < \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} f_n(5x-4) - \frac{1}{3} f_{n-1}(5x-4), & \frac{4}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\underbrace{f_n(5x-4) - f_{n-1}(5x-4)}_{< \frac{1}{3^n}}\Big) < \frac{1}{3^{n+1}}$$

Samma argument kan föras för de andra värdena.

Vi vill visa $|f_n - f_{n-2}| < \varepsilon$.

Notera $|f_n - f_{n-1}| < \frac{1}{3^n}$ och $|f_{n-1} - f_{n-2}| < \frac{1}{3^{n-1}}$.

$$\Rightarrow f_{n-1} - \frac{1}{3^{n-1}} < f_{n-2} < f_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\Rightarrow f_{n-1} - f_n - \frac{1}{3^{n-1}} < f_{n-2} - f_n < f_{n-1} - f_n - \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$f_n - f_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}} > f_n - f_{n-2} > f_n - f_{n-1} - \frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\Rightarrow |f_n - f_{n-2}| < \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n-1}}$$

generalisera till att $|f_n - f_m| < \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^m} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^m} \Bigg(\underbrace{\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-m+1}}{1 - \frac{1}{3}}}\Bigg)$

antag, WLOG, $m < n$

$$= \frac{1}{3^m} \left(\frac{1 - \frac{1}{3^{n-m+1}}}{2} \right) \cdot 3 = \frac{1}{3^{m-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-m+1}} \right)$$

$$\frac{1}{3^{m-1}} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 3^{m-1} \iff 1 + \log_3 \frac{1}{\varepsilon} < m$$

VÄLJ $N = 1 + \log_3 \frac{1}{\varepsilon}$ så konv. pga Cauchy kriterium