$|f(\frac{x}{5})| \leq \frac{1}{8}|f(x)|$ f är kont.

Visa att $f'(0)=0$.

Först visar vi att $f(0)=0$:

$x=0 \Rightarrow |f(0)| \leq \frac{1}{8}|f(0)|$, låt $y=|f(0)|$, notera $y \geq 0$.

$y \leq \frac{1}{8} y \Rightarrow y=0 \Rightarrow f(0)=0$.

$\cancel{0 \leq |f(\frac{x}{5^n})| \leq \frac{1}{8^n}|f(x)|, \ n \in \mathbb{N}}$

Tror ej detta fungerar, spelar dock ej roll.

$\cancel{0 \leq \lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{5^n}) \leq 0}$, ~~därmed är~~ $\cancel{f(0)=0}$ ~~(Flytta in lim i f).~~

2. Visa derivatan är 0, dvs att

$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Enligt def vill vi visa

$\forall \varepsilon>0: \exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(h)}{h}\right| < \varepsilon$.

Vi vill hitta $\delta(\varepsilon)$.

Notera

$|f(x)| \leq \frac{1}{8^n}|f(5^n x)|$ ← hittas genom rekursiv utveckling av olikheten.

Vi har i frågan att den är deriverbar i en omgivning kring x.

$\exists I = [-a, a], \ a>0$, ← Slutet intervall som f är definierad i, se sats 7.7, f blir begränsad.

$\Rightarrow \exists \sup\{x \in I : f(x)\} = M$ ← Supremum existerar om f är begränsad i intervallet, existerar även infimum.

$x \in I \Rightarrow x \leq a \wedge f(x) \leq M$ ← Samma sak behöver egentligen göras för inf. för att detta ska gälla.

$\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{8^n}|f(5^n x)| \leq M$

$5^n|x| \leq a$ ← Vi väljer n så att detta är sant, dvs $5^n|x| \leq a \leq 5^{n+1}|x|$

$5^{n+1}|x| > a$

$\Rightarrow \frac{a}{5^{n+1}} \leq |x| \leq \frac{a}{5^n}$

Nu för δ.

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right| < \varepsilon$$ Def, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq \frac{1}{8^n} \frac{M}{|h|}$$ Rättelse: $M = \max\{|\sup\{f(x) : x \in I\}|, |\inf\{f(x) : x \in I\}|\}$

Intervallet har en viss storlek, $\frac{1}{8^n}$ gör så att vi kommer till intervallet (ish).

Ersätt $|h|$, notera att $\frac{a}{5^{n+1}} \leq |h|$;

$$\left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq \frac{1}{8^n} \cdot \frac{M}{\frac{a}{5^{n+1}}} = \frac{5^n \cdot 5M}{8^n a} < \varepsilon$$

Ersätter vi inte med fel sak? Vi vill väl att nämnaren ska bli större så bråket blir mindre?

$$n > \log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{\varepsilon a}{5M}\right)$$ ← Löser ut n.

Notera att vi vet att $|h| < \frac{a}{5^n}$ och att $n > \log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{\varepsilon a}{5M}\right)$.

subs. in detta i $|h| < \frac{a}{5^n}$ så erhålls

$|h| < \dfrac{a}{5^{\log_{\left(\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{\varepsilon a}{5M}\right)}} = \delta$. Därmed har vi när

$0 < |x| < \delta$ så är $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$, därmed är $f'(0) = 0$ ■.

Betyder detta att f är lokalt max/min i 0? Svar nej, betrakta x^3

$$\left|\left(\frac{x}{5}\right)^3\right| \leq \frac{1}{8}\left|x^3\right|$$