1. Låt

a) $f(x) = \arccos\sqrt{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-2}$ (*Obs.* $e^{x^2} = e^{x \cdot x}$).

För funktioner i a) och b) svara på följande frågor: Vad är definitionsmängden av f? Vad är värdemängden av f? Är f jämn eller udda? Är f begränsad? Är f injektiv? Är f inverterbar? Motivera ditt svar.

a) För definitionsmängden: Notera först definitionsmängderna av "delfunktionerna", dvs arccos, $\sqrt{\cdot}$ och ln.

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, där $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

De betecknade målmängderna är här värdemängderna.

$f(x) = \arccos\sqrt{\ln x}$, $f : \underbrace{[1, e]}_{D_f} \to \underbrace{[0, \frac{\pi}{2}]}_{V_f}$

Bevis

Först visar vi att 1 och e är del av D_f, sedan visar vi att dessa är randpunkter till D_f. Efter detta visar vi att dessa måste ge randpunkter till V_f.

$\arccos\sqrt{\ln 1} = \arccos\sqrt{0} = \arccos 0 = \arccos(\cos\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Notera att $\ln x$, där $0 < x < 1$, ger ett negativt tal. $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$ när $x < 0$, därmed kan f ej vara definierad för $0 < x < 1$.

Om $x \leq 0$ så är $\ln x$ ej def., därmed kan f ej vara definierad för dessa tal.

↓ Forts.

$\arccos \sqrt{\ln e} = \arccos 1 = \arccos(\cos 0) = 0.$

Observera att $\arccos\sqrt{\ln x}$ när $x > e$ är odefinierat eftersom $\sqrt{\ln x} > 1$ när $x > e$ och arccos endast är definierad på intervallet $[-1,1]$.

Vi vet att f applicerat på ändpunkterna av D_f ger ändpunkterna till V_f eftersom f är strängt avtagande/växande eftersom arccos, $\sqrt{\cdot}$ och ln är strängt avtagande/växande, därmed är den ovan angivna V_f korrekt.

Bevis att $h = g \circ f$ är strängt växande när f och g är strängt växande:

Antag $x_1 > x_2$. Då är $f(x_1) > f(x_2)$. (f s.v.)
Då är
$g(f(x_1)) > g(f(x_2))$ eftersom $f(x_1) > f(x_2)$
och g är strängt växande. $g(f(x)) = h(x)$,
alltså är h s.v.

Fall när f s.v. och g s.a. eller g s.a. och f s.v. etc. ger liknande resultat (h är s.v. eller s.a.) och kan visas på analogt vis.

f kan omöjligt vara jämn eller udda eftersom D_f är osymmetriskt.

f är uppenbarligen begränsad, se V_f.
f är injektiv och inverterbar, vi har bevisat att den är s.a./s.v. och vi har valt målmängden till värdemängden.

b) $f(x) = \frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-2}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\} \to (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

Notera att $e^{x^2} \geq 1$. Notera även att funktionen är jämn: $f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}+1}{e^{(-x)^2}-2} = \frac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-2} = f(x)$ (def. av jämn funk.).

Analysera $g(a) = \frac{a+1}{a-2}$, $a \geq 1$. När $a = e^{x^2}$ så är $g(a) = f(x)$, för alla $a \geq 1$ kan vi finna x sådant att är sant.

Därmed är värdemängden för g (där $D_g = [1,\infty)$) densamma som V_f.

När $1 \leq a < 2$ så kommer $g(a) < 0$ och när $a > 2$ kommer $g(a) > 0$. Det är uppenbart att $\lim_{a \to 2^+} g(a) = \infty$ och $\lim_{a \to 2^-} g(a) = -\infty$.

För att bevisa att V_f är vad den är så skall jag nu bevisa att g är avtagande på intervallet $[1,2)$ och på $(2,\infty)$.

Antag $x_1 < x_2$ och $x_1, x_2 \in [1,2)$. Då är

$g(x_1) = \frac{x_1+1}{x_1-2}$ och $g(x_2) = \frac{x_2+1}{x_2-2}$.

Vi vill ha $g(x_1) < g(x_2)$.

Notera att $x_1-2,\ x_2-2 < 0$.

Antag $g(x_2) \geq g(x_1)$.

$$\Leftrightarrow \frac{x_2+1}{x_2-2} \geq \frac{x_1+1}{x_1-2}$$

$$\Leftrightarrow (x_2+1)(x_1-2) \geq (x_1+1)(x_2-2)$$

$$\Leftrightarrow x_2x_1 - 2x_2 + x_1 - 2 \geq x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2$$

$\Leftrightarrow 3x_1 \geq 3x_2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, vilket är en motsägelse. Därmed är $g(x_1) > g(x_2)$, därmed är g och f avtagande på intervallet som angivits.

Samma bevis kan göras för $x \in (2,\infty)$.

Vi beräknar $g(1) = \frac{1+1}{1-2} = -2$, därmed är $V_g = (-\infty,-2]$ om $D_g = [1,2)$.

Vi vet även att $\lim_{a \to 2^+} g(a) = \infty$

$\nearrow$ Vi vet att g är avtagande på intervallet $(2, \infty)$. Vi vill veta vad $g(a)$ är när $\lim a \to \infty$. Vi visar enligt definitionen att $g(a)$ konvergerar mot 1. Vi visar att

$$\left|\frac{a+1}{a-2} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{för alla } \varepsilon > 0 \quad \text{för alla } a > N:$$

$$N-2>0 \Rightarrow \frac{N+1}{N-2} - 1 = \frac{N+1-(N-2)}{N-2} = \frac{3}{N-2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(N-2) \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < N-2 \Leftrightarrow N > 2 + \frac{3}{\varepsilon}$$

Därmed konvergerar funktionen $g(a)$ mot 1 när $a \to \infty$, eftersom $|g(a) - 1| < \varepsilon$ för alla $a > 2 + \frac{3}{\varepsilon}$.

Därmed är ovan angivna V_f korrekt.

$f(x)$ är icke injektiv (den är jämn), den är därmed ej heller inverterbar.

2. Bevisa att talföljd $a_n = \frac{3(n+1)}{n^2+2}$ konvergerar mot 0, genom att använda definitionen (d.v.s. för varje $\epsilon > 0$ hitta ett tal $N = N(\epsilon)$ som beror på ϵ, sådant att $|a_n| < \epsilon$ för alla $n \geq N$). Skriv också exakt vilka värden du föreslår för $N(0.1)$, $N(0.01)$, $N(0.001)$ och $N(0.0001)$.

$a_n = \frac{3(n+1)}{n^2+2}$. Vi påminner oss om satsen som säger att om två följder b_n och c_n konv. mot B och C respektive så konv. $(b_n + c_n)$ mot $B + C$.

Notera sedan att $a_n = \frac{3n+3}{n^2+2} = \frac{3n}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+2}$.

Låt $b_n = \frac{3n}{n^2+2}$ och $c_n = \frac{3}{n^2+2}$. Vi visar enligt def. att b_n och c_n båda konv. mot 0.

För c_n, notera att $\frac{3}{n^2+2} < \frac{3}{n}$ $(n^2+2 > n)$.

Välj för denna följd $N_c = \frac{3}{\varepsilon}$, så är $|c_n| < \varepsilon$ när $n > \frac{3}{\varepsilon}$

$\frac{3n}{n^2+2} = 3 \cdot \frac{n}{n^2+2} < 3 \cdot \frac{n}{n^2} = \frac{3}{n}$. Välj för denna följd $N_b = \frac{3}{\varepsilon}$, så är $|b_n| < \varepsilon$ när $n > \frac{3}{\varepsilon}$. $(n^2+2 > n^2)$

Notera att $N_b = N_c = \frac{3}{\varepsilon}$, vilket betyder att vi kan välja $N = \frac{3}{\varepsilon}$ för a_n. Därmed har vi visat att a_n konvergerar eftersom

$\left| \frac{3(n+1)}{n^2+2} \right| < \varepsilon$ när $n > N = \frac{3}{\varepsilon}$. För $\varepsilon = 0,1$ väljer vi $N = 30$, sedan $N = 300$, sedan $N = 3000$, sedan $N = 30\,000$.

3. Bestämma konstanter A och B sådant att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -2\cos x + 5, \ x < -\frac{\pi}{2} \\ Ax + B, -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \frac{e^{(1+x)}}{x+2}, \ x > 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i sin defintionsmängd. Motivera ditt svar.

Notera

Definition 7.1. Låt f vara en reellvärd funktion, med $D_f \subset \mathbb{R}$, sådan att varje punkterad omgivning till $x = a$ innehåller punkter från D_f och $a \in D_f$. Vi säger att f är kontinuerlig i a om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{7.1}$$

Notera att alla elementärfunktioner och sammansättningar av är kontinuerliga.

Vi beräknar värdet av $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} (-2\cos x + 5) = 5$.

Vi beräknar $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{(1+x)}}{x+2} = \frac{e}{2}$

Därmed har vi $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}A + B = 5 \\ A \cdot 0 + B = \frac{e}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{e}{2}$ och

$-\frac{A\pi}{2} + \frac{e}{2} = 5 \Leftrightarrow -A\pi + e = 10 \Leftrightarrow A = \frac{e-10}{\pi}$.

Därmed om vi låter $A = \frac{e-10}{\pi}$ och $B = \frac{e}{2}$ så är f kontinuerlig i sin definitionsmängd eftersom

$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ och

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ och övriga intervall definieras av elementärfunktioner.