四旋翼飞行器的最小捕捉轨迹生成和控制

徐嘉迟，19023027，计算机学院，计算机科学与技术

摘要

我们讨论了在严格受限的室内环境中，对三维空间中实现四旋翼飞行器机动的控制器设计和轨迹生成方法。我们开发了一种算法，该算法可以通过一系列三维位置和偏航角实时生成最佳轨迹，同时确保飞行器能安全地通过指定的通道，并满足对速度，加速度和输入的约束。非线性控制器确保飞行器可靠地沿着生成的轨迹运动。实验结果说明了该方法在三维障碍回转中快速运动（5-10体长/秒）的应用。

关键词：四旋翼飞行器；轨迹生成；平坦输出；二次规划

1 介绍

在过去的十年里，微型无人机领域出现了许多令人振奋的发展，这些飞行器的长度在0.1-0.5米之间，质量在0.1-0.5公斤之间[1]。特别是，多旋翼飞机已经有了大量的工作，在四旋翼飞行器的设计[2]、控制[3]和规划[4]方面取得了许多新的进展。本文的重点是四旋翼飞行器的建模、控制器设计和轨迹生成。

该领域的大部分工作使用的控制器是根据悬停条件下的模型线性化而得出的，并且只有在相当小的横滚角和俯仰角下才是稳定的[5]。利用可达性算法[6]、增量搜索技术[7]或基于LQR树的搜索[8]探索全状态空间对于一个六自由度的动态系统是不可行的。这方面的一些工作已经涉及到特技飞行[3，6，9，10]。然而，当旋翼飞行器的姿态显著偏离水平悬停条件时，就没有稳定性和收敛性保证。虽然机器学习技术已经成功地利用人类飞行员的数据学习模型[9]，并且利用强化学习来提高性能[3]，但这些方法似乎不适合在有障碍物的环境中进行运动规划或轨迹生成。类似的问题通过模型预测控制（MPC）得以解决[11，12]。利用这些方法，只有当线性化模型是完全可控的[12]或如果可以合成控制Lyapunov函数[13]，才能保证收敛性。因此，很难将这些技术直接应用于四旋翼飞行器的轨迹生成。

本文讨论了在严格受限的室内环境下，三维空间中四旋翼飞行器机动的控制器设计和轨迹生成。在这种情况下，有必要制定利用系统动力学的飞行计划，而不是简单地将动力学视为对系统的约束。同时，有必要放宽对小角度的假设，并允许悬停状态发生显著的偏移。我们开发了一种算法，该算法能够通过一组位置和方向中的一系列航路点或航路点生成最佳轨迹，同时确保安全通过指定的通道并满足可实现的速度，加速度和输入的约束。

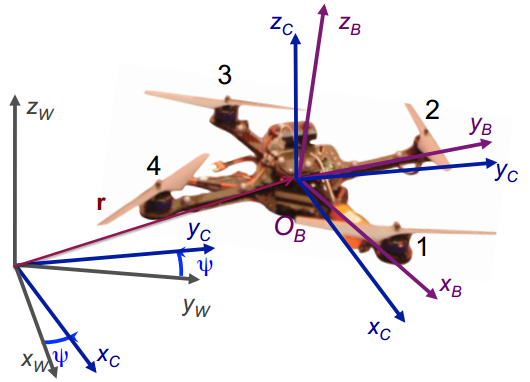


图1 平坦输出和参考坐标系

2 建模

图1中显示了包括世界坐标系和机身坐标系的坐标系，以及对四旋翼飞行器的螺旋桨编号约定。因为我们想控制能表示与悬停的大偏差的姿态，为了避免奇点，我们使用旋转矩阵来表示坐标系方向。我们还使用欧拉角将横滚角，俯仰角和偏航角（）定义为局部坐标系。从到的旋转矩阵由给出，其中代表到中间坐标系的偏航旋转，代表横滚角和俯仰角的影响。飞行器的角速度用表示，表示世界坐标系在机身坐标系中的角速度，角速度在机身坐标系中具有分量和：

(1)

这些值可以直接与横滚角、俯仰角和偏航角的导数相关。

每个螺旋翼都有一个角速度,同时会产生一个力，，和力矩，，根据

在实际应用中，与刚体动力学和空气动力学相比，电机动力学相对较快，因此对于控制器的开发，我们假设它们可以在瞬间实现。因此，系统的控制输入可以写成，其中是合力，，，是体力矩，可以根据旋翼速度表示为：

(2)

L是旋翼的旋转轴到四旋翼中心的距离。

世界坐标系中质心的位置向量用表示。系统中的力包括方向上的重力，是每个旋翼在方向上的力的合力。牛顿的运动方程控制质心的加速度是：

角加速度可由欧拉方程得出：

(4)

其中，是沿轴参考质心的惯性矩矩阵。系统的状态由质心的位置、速度、方向（通过欧拉角局部设置）以及角速度给出：

或者不通过质心位置、速度、旋转矩阵和角速度进行参数化。

微分平坦

在本节中，我们证明四输入的四旋翼飞行器动力学是微分平坦的[14]。换句话说，状态和输入可以写成由四个精心选择的平坦输出及其导数组成的代数函数。这有助于自动生成轨迹，因为在平坦输出空间中的任何平滑轨迹（具有合理的有界导数）都可以由不完全驱动的四旋翼飞行器跟随。我们选择的平坦输出是：

其中是世界坐标系中质心的坐标，是偏航角。我们将轨迹定义为平坦输出空间中的平滑曲线：

(5)

我们现在将证明系统的状态和控制输入可以用及其导数来表示。

质心的位置、速度和加速度分别是、和的前三项。为了证明是平坦输出及其导数的函数，考虑运动方程（3）。

(6)

方程（3）定义了四旋翼飞行器机身坐标轴的Z轴。给定偏航角，，我们可以写出单位向量：

结果如图1所示。我们可将和如下定义：

其中。换句话说，我们可以唯一确定

而唯一确定的前提是和永远不会是平行的奇点。

为了表明角速度是平坦输出及其导数的函数，我们首先对方程（3）求一阶导数，结果为：

(7)

将此表达式沿着方向投影，并利用等式的事实，我们可以将代入方程（7）中，从而将向量定义为:

是在平面上的投影。如果我们把角速度在世界坐标系中的分量形式写成（1）式，那么和的分量是：

通过计算方程（3）的二阶导数，并遵循与上述相同的步骤，得到沿和的角加速度的分量。为了得到的分量，我们使用以下事实：

并且注意到，。因此，的分量可由下式计算得到：

四旋翼飞行器螺旋翼的推力合力可以看作是方程（3,6）中平坦输出及其导数的直接函数，。考虑到角速度和加速度是平坦输出及其导数的函数，我们可以通过欧拉方程（4）来计算输入，和。

3 控制

现在，我们提出一个能遵循指定轨迹的控制器。该控制器与我们先前的工作[15]中的控制器类似，但一些例外情况将会在后文中指出。首先，我们将位置和速度误差定义为：

接下来，我们计算控制器所需的力向量以及所需的机身坐标系的z轴：

其中和为正定增益矩阵。在这里我们假设。接下来，首先将所需的力向量投影到实际的机身坐标系的z轴上，以便为飞行器和第一个控制输入计算所需的力：

要确定其他三个输入，我们必须考虑旋转误差。首先，我们观察到所需的方向是沿着所需的推力向量方向：

因此如果，用表示的期望旋转可简洁表示为：

如果知道了沿轨迹指定的偏航角，我们可以同上一节用到的方法一样计算和：

同时还有：

注意，。这定义了期望的旋转矩阵。从数学上讲，这种奇异点在中是一个单点，但这种计算会导致奇异点附近的单位向量发生较大变化。为了解决这个问题，我们观察到和也与所需的偏航角和机身坐标系的z轴一致。在实践中，我们仅检查哪个解更接近飞行器的实际方向，以计算所需方向。

接下来，我们定义方向误差：

其中表示将的元素通过*vee*映射到上。这是本文设计的控制器与[15]中的主要区别，在[15]中，是使用小角度假设来计算角度误差。

角速度误差只是机身坐标系中实际角速度和期望角速度之间的差：

接下来，所需的力矩和其余三个控制输入的计算如下：

(8)

其中和为正对角增益矩阵。这允许将单独的增益用于横滚，俯仰和偏航角跟踪。最后，我们计算所需的螺旋翼速度以达到所需的控制输入。实际上，这是通过将（2）式进行关于的线性化反转来完成的。

值得注意的是，该控制器关于悬停点的线性化与我们先前的工作[15]中介绍的控制器相同。本文介绍的这种非线性控制器增加了两个新的重要功能。首先，方向误差不再是基于包含奇点的欧拉角。其次，将所需的力投射到实际的z体轴上。在[16]中为类似的控制器提出了稳定性和收敛性的证明，但是（a）增加了包括角加速度在内的前馈项；（b）在（8）式中包含抵消的反馈项； （c）假设所有增益矩阵都是单位的标量倍数（例如，）； （d）假设电机动力影响可忽略；（e）并且m和是完全可知的。在上述条件下，只要初始条件满足以下两个条件，动力学就将呈指数稳定：

并且在限制条件较少的情况下，动力学几乎是具有全局指数吸引的完全动力学。我们对控制器的实际实现与理论是有差别的，并不能完全满足上面列出的所有假设。但是，正如我们将在第六节中看到的那样，即使在非常大的横滚角和俯仰角下，该控制器仍具有良好的跟踪性能。

4 轨迹生成

我们将航路点定义为空间中沿着某个偏航角的位置。考虑在指定时间通过m个航路点的问题。在每个航路点之间都有一个安全航道，四旋翼飞行器的运动必须被限制在其中。满足这些约束的最简单的轨迹是使用直线将相邻航路点直接连接起来。但是，该轨迹效率低下，因为它在航路点处不可导，这要求四旋翼飞行器在每个航路点处停止，即位置的各阶导数为0。

我们提出的方法能生成一条最优轨迹，飞行器沿着该轨迹能在给定时间内平稳顺滑地通过各航路点，同时保持在安全航道内。 基于第三节的结果，我们考虑形如（5）式的平坦输出空间中的轨迹。将它们分片为在m个时间间隔上的n阶分段多项式函数，如下所示：

(9)

选择这种划分的原因很简单。我们感兴趣的是找到最小化泛函的轨迹，这些泛函可以用这些基函数来写。下面给出了在最小化位置平方的阶导数和偏航角平方的阶导数积分（无航道约束）的情况下求解该问题的优化程序。

(10)

其中和是使被积分数保持不变的常数,并且,。我们令的前个导数和的前个导数在间是连续的。

（10）式中的代价函数与Flash和Hogan[17]所使用的函数相似，后者显示了人类到达的轨迹是使加速度率（加速度的导数，）范数平方的积分最小化。在我们的系统中，由于输入和是位置的四阶导数的函数，因此我们生成的轨迹将捕捉（加速度的二阶导数）范数平方的积分最小化。由于输入出现在偏航角的二阶导数中，因此我们使用。基函数（9）允许我们可以使用更高阶的多项式，这可能使我们可以满足对状态和输入的不同约束。

我们可以通过将常量记为具有决策变量的大小为的向量,从而将问题化为二次规划问题。

(11)

这里的目标函数包含函数的最小化，而约束可以用来满足平坦输出及其导数的约束，从而满足状态和输入的约束。可以将轨迹的任何阶导数（如，）的初始条件、最终条件或中间条件的规范写成（11）式中的等式约束。如果不需要精确指定条件，则可以在（11）式中用不等式约束表示它们。在计算出轨迹之后，可以使用第三节中描述的方法来计算整个轨迹上的角速度，角加速度，总推力以及力矩。

4.1 无量纲化

我们注意到，在二次规划问题的目标函数（10）式中，变量均在代价函数和约束条件上解耦，因此可以将此二次规划问题分为四个优化问题。我们现在考虑一个无量纲变量最优化问题的一般形式,其中代表时间：

(12)

接下来我们介绍维度时间,（不是一般性的，假设）以及维度变量，定义如下：

接下来我们用变量和重新重写（12）式：

(13)

注意，在这个问题中，边界条件在空间上通过移动，通过进行缩放，时间则按缩放。令无量纲问题的最优解设为新问题的解：

现在让我们考虑（10）式的无量纲形式，其中，和被无量纲变量和所代替。我们可以通过令,=来解决4个无量纲问题。然后将无量纲问题的最优解解映射到原问题（10）中的最优解。每个变量的时间缩放尺度是相同的，但空间变换尺度和可能不同。

1）时间缩放：如果我们将航路点间的飞行时间更改为倍，以使到达航路点的新时间为，则真正问题的解决方案就是无量纲问题解的时间放缩：

随着的增加，航路点间的飞行将花费更长的时间执行并变得更加安全。当达到无穷大时，所有位置和偏航角以及角速度的导数都变为零，这导致：

因此，通过使足够大，我们可以满足任何安全约束。相反，随着的减小，轨迹执行所需的时间减少，位置的导数增加，轨迹变得更激进。

2）空间变换：接下来我们介绍如何利用空间变换特性来处理只有两个航路点的轨迹。我们首先考虑（10）式中无量纲形式的一个单一情况，其中并且，最终速度的指定方式与真实问题中的相同。此时，实际问题的最优解为：

同理可得和。这种解法之所以方便，是因为分析解决方案比解决二次规划问题更快。因此，这种方法对于快速对动态障碍物或目标做出反应很有用。 值得注意的是，空间变换也适用于具有多个航路点的问题，但是该属性的用处较小，因为所有航路点的位置必须按相同的因子进行变换。

4.2 引入航道约束

接下来，我们在（10）式中引入对航道的约束条件。首先，定义是沿分段到单位向量。段的垂直距离向量定义为:

为每个走廊定义了无穷范数上的走廊宽度：

通过引入个中间点,可以将此约束合并到二次规划问题中：

同理，该约束可用于和。注意，每个绝对值约束都可以写为两个线性约束。航道约束的使用如图2所示。图2的左半幅图显示的是在没有航道约束下解决优化问题，而右半幅图显示的是在航道的第二段添加约束后的解决方案，其中添加的约束为。轨迹停留在表示航道宽度约束的虚线内。

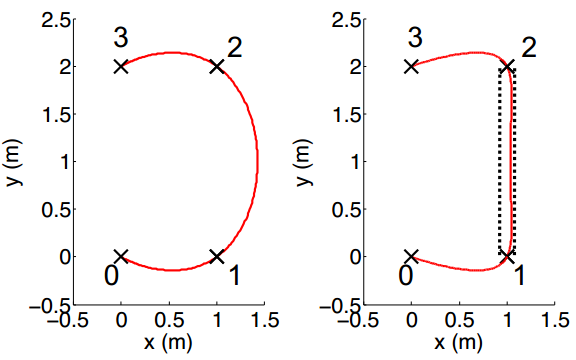


图2 经过4个航路点的最优轨迹

4.3 最优分片时间

在某些情况下，飞行器在航路点间运动的时间很重要并且是可以被指定的。但是，在其他情况下，这些飞行时间可能无关紧要，我们可以尝试通过为某些部分留出更多时间，同时从其他部分占用相同的时间来找到更好的解决方案。在这里，我们描述了一种为给定的一组航路点寻找最佳相对分片时间的方法。对于这类问题，考虑允许分配给第段的时间，比考虑到达第个航路点的时间更方便。然后，我们可以解决最小化问题：

(14)

其中是最优化问题（10）式对于分片时间的解。我们通过约束梯度下降法来求解（14）式。我们通过数值计算由表示的m个向量的方向导数来实现：

是某个小数值。向量的第个元素1，其余元素为。这样构造的原因是保证，且可以被加到中或从中减去，但最终时间保持不变。给定方向导数的估计值，我们使用回溯线搜索执行梯度下降。

图3显示了该方法在平面上生成的轨迹的示意图，其中航路点是平面上的点。对时间进行分片的第一种选择是通过假设四旋翼飞行器是以均匀的速度在航路点之间沿直线飞行的。这种选择为第二段分配了太多时间，并且该段的轨迹与航路点间存在明显的偏离。如图3所示，该算法在经过7次迭代后收敛到最优解。最后的轨迹看起来是一个非常自然的轨迹，通过所有的航路点，这定性地验证了代价函数的选择。

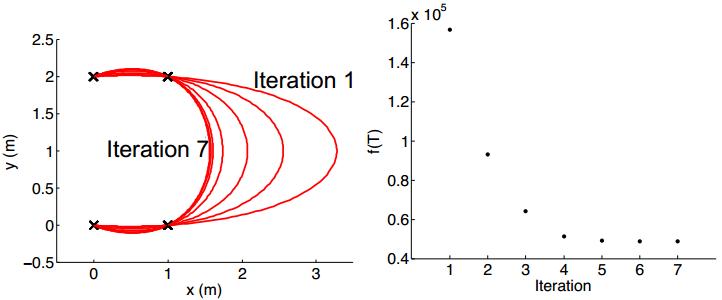


图3 相对时间缩放的说明

5 实验

本文中的所有实验都是使用Ascending Technologies Hummingbird的四旋翼飞行器进行的[18]。我们使用Vicon运动捕捉系统[19]来估计飞行器的位置，方向和速度，并使用板载陀螺仪来估计角速度。[15]中详细描述了实验用到的软件基础架构。

A.空间变换轨迹

这部分实验演示了如何使用空间比例缩放的轨迹来飞过抛出的圆形环。在检测到环被抛出后，将使用二次风阻力模型预测环的未来位置。找到预测的未来时间以及通过选定平面下降的和位置。所选的平面在飞行器下方0.6米处。环拦截的允许区域为米和米，其中朝向环。所有轨迹所允许的时间为0.9秒。允许飞行器沿和方向自由移动，以便使飞行器可以向前或向下飞行穿过铁环，而将轴速度限制为零，这是因为假定铁环大约是直线下落的。最坏情况的性能是针对最远的位置，即米，米，结果如图4所示。

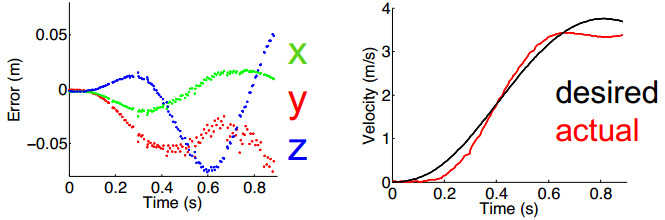


图4 通过抛出的铁环的飞行轨迹的性能数据

即使在最坏的情况下，任何方向的位置误差也始终小于8 cm。值得注意的是，这是一种极激进的轨迹，因为飞行器的速度达到了3.6 m / s，并在某一点具有的俯仰角。一系列显示完整实验的图片如图5所示。

B. 时间缩放，航道约束和最佳分段时间

这部分实验验证了飞行器在狭窄缝隙中飞行的能力。我们设计了一个有三个固定环的场景，四旋翼飞行器必须连续飞行穿过这些环状障碍物。在间隙的每一侧的0.25米处选择六个具有相同偏航角的航路点，并为穿过间隙的线段添加一个小的航道约束（1厘米）。其他部分的航道宽度限制为1米，因此飞行器可能会在没有位置限制的情况下采取更直接，代价更低的路径。由于航路点的到达时间对于此问题并不重要，因此通过求解（14）式来确定最优分片时间。产生的最终轨迹如图6所示。

可以以不同的速度跟踪此生成的轨迹。图6的右侧显示了24秒的性能数据，用于在8秒（顶部）和4秒（底部）中跟踪此轨迹。数据表明我们可以通过牺牲速度以获得准确性。较快的轨迹中，飞行器的速度为2.6 m / s，侧倾角和俯仰角为。



图5 无人机飞过一个抛出的圆环的合成图像

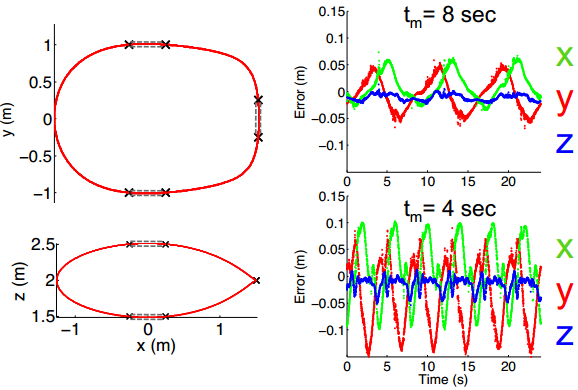


图6 穿越三个约束的两种轨迹及各自的速度性能数据

6 总结

我们提出了一种四旋翼飞行器的控制算法，用于跟踪需要大加速度的激进轨迹，以及一种可以为飞行器生成三维轨迹的自动方法，该方法可以满足位置，速度，加速度和输入的约束。最终生成的轨迹是最优的，因为它是通过最小化由捕捉范数（位置的四阶导数）的平方导出的代价函数得出的。这些成本函数意义重大，因为输入变量与捕捉是代数相关的。这种方法的时间标度特性使得轨迹可以被减慢以使其更安全。

参考文献

[1] D. Pines and F. Bohorquez, “Challenges facing future micro air vehicle development,” AIAA Journal of Aircraft, vol. 43, no. 2, pp. 290–305, 2006.  
[2] D. Gurdan, J. Stumpf, M. Achtelik, K. Doth, G. Hirzinger, and D. Rus, “Energy-efficient autonomous four-rotor flying robot controlled at 1 khz,” in Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Roma, Italy, Apr. 2007.  
[3] S. Lupashin, A. Schollig, M. Sherback, and R. D’Andrea, “A simple learning strategy for high-speed quadrocopter multi-flips,” in Proc. Ofthe IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Anchorage, AK, May 2010, pp. 1642–1648.  
[4] R. He, A. Bachrach, M. Achtelik, A. Geramifard, D. Gurdan, S. Prentice, J. Stumpf, and N. Roy, “On the design and use of a micro air vehicle to track and avoid adversaries,” The Int. Journal of RoboticsResearch, vol. 29, pp. 529–546, 2010.  
[5] G. Hoffmann, S. Waslander, and C. Tomlin, “Quadrotor helicopter trajectory tracking control,” in AIAA Guidance, Navigation and ControlConference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, Apr. 2008.  
[6] J. H. Gillula, H. Huang, M. P. Vitus, and C. J. Tomlin, “Design of guaranteed safe maneuvers using reachable sets: Autonomous quadrotor aerobatics in theory and practice,” in Proc. of the IEEEInt. Conf. on Robotics and Automation, Anchorage, AK, May 2010, pp. 1649–1654.  
[7] M. Likhachev, G. Gordon, and S. Thrun, “ARA\*: Anytime A\* with provable bounds on sub-optimality,” Advances in Neural InformationProcessing Systems, vol. 16, 2003.  
[8] R. Tedrake, “LQR-Trees: Feedback motion planning on sparse randomized trees,” in Proc. of Robotics: Science and Systems, Seattle, WA, June 2009.  
[9] P. Abbeel, “Apprenticeship learning and reinforcement learning with application to robotic control,” Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA, Aug. 2008.  
[10] D. Mellinger, N. Michael, and V. Kumar, “Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers,” in Int. Symposium onExperimental Robotics, Dec. 2010.  
[11] H. Kim, D. Shim, and S. Sastry, “Nonlinear model predictive tracking control for rotorcraft-based unmanned aerial vehicles,” vol. 5, 2002, pp. 3576 – 3581.  
[12] J. Yu, A. Jadbabaie, J. Primbs, and Y. Huang, “Comparison of nonlinear control design techniques on a model of the caltech ducted fan,” in IFAC World Congress, IFAC-2c-112, 1999, pp. 53–58.  
[13] A. Jadbabaie and J. Hauser, “On the stability of receding horizon control with a general terminal cost,” Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 50, no. 5, pp. 674 – 678, may. 2005.  
[14] M. J. Van Nieuwstadt and R. M. Murray, “Real-time trajectory generation for differentially flat systems,” International Journal ofRobust and Nonlinear Control, vol. 8, pp. 995–1020, 1998.  
[15] N. Michael, D. Mellinger, Q. Lindsey, and V. Kumar, “The grasp multiple micro uav testbed,” IEEE Robotics and Automation Magazine, Sept. 2010.  
[16] T. Lee, M. Leok, and N. McClamroch, “Geometric tracking control of a quadrotor uav on SE(3),” in Proc. of the IEEE Conf. on Decisionand Control, 2010.  
[17] T. Flash and N. Hogan, “The coordination of arm movements: An experimentally confirmed mathematical model,” The Journal of Neuroscience, vol. 5, pp. 1688–1703, 1985.  
[18] “Ascending Technologies, GmbH,” http://www.asctec.de.  
[19] “Vicon Motion Systems, Inc.” http://www.vicon.com.

思考

文中，作者将无人机的飞行轨迹建模为分段的多项式形式：

轨迹需要满足以下两个约束：

1. 轨迹多项式在起始、终末点的的各阶导数应该等于位置，速度，加速度，加速度导数，和分别表示起点和终点表示：

该约束可化为矩阵形式：

1. 中间相邻轨迹段的多项式各阶导数应相等：

该约束也可化为矩阵形式：

最小化snap的目标即最小化各段轨迹4阶导数平方在各自分配时间内的积分：

因此整个问题可化为二次规划问题，继而容易通过QP问题求解器求解，例如可用matlab中的quadprog函数：

将问题化为QP，目标是求得各段轨迹对应的多项式的系数，通过求解器求得的是数值解，且这些多项式系数并没有什么物理上的意义，如果某段轨迹是比较高阶的多项式，例如：

当的值比较大时，会非常大，此时解得的可能会非常小，从而带来轨迹优化问题数值上的不稳定性。因此，如果能通过闭式的方法求得优化问题的解析解，则更好。

一种方法是将对各段轨迹多项式系数的优化问题转变为对各段轨迹端点的导数约束问题，对变量引入物理学的含义。例如，各段轨迹连接处，无人机的pvaj（位置，速度，加速度，加速度一阶导数）应该是相同的，这些变量是具有明显的物理意义的。我们首先需要构建一个将轨迹多项式系数映射到端点导数的选择矩阵，有。例如，轨迹是5阶多项式，**，**轨迹连接处，需满足pvaj约束，则**，**此时是一个的矩阵，前四行映射第段轨迹的起点，即时刻，无人机的位置、速度、加速度和加速度一阶导数，后四行映射第段轨迹的终点，即时刻，无人机的位置、速度、加速度和加速度一阶导数。构建好选择矩阵后，则优化目标J可化为：

从而将问题化为可以闭式求解的无约束的二次规划问题。