Applications du produit scalaire

Objectifs

Utiliser le produit scalaire pour :

- calculer une longueur (côté ou médiane d'un triangle) ;
- calculer un angle ;
- caractériser un cercle.

Points clés

- Calculer un angle avec la formule : $\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}}{AB \times AC}$
- Calculer un angle ou une longueur avec la formule d'**Al Kashi** : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
- Calculer la longueur d'une médiane d'un triangle, à l'aide du **théorème de la médiane** : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$
- Caractériser un cercle par $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Pour bien comprendre

Produit scalaire : définitions et propriétés

1. Produit scalaire et calcul d'angles dans un repère orthonormé

a. Principe

A, B, C sont 3 points repérés par leurs coordonnées dans repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ d’au

Ainsi, on peut en conclure que : $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AC}}+y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AC}}}{AB\times AC}$

Remarque **:** il est préférable de retenir la méthode plutôt que la formule.

b. Application

Cette formule permet d'évaluer une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exemple

Soit $A(2,-3)$, $B(3,1)$ et $C(-1,4)$.

Déterminer une mesure au degré près des 3 angles du triangle ABC.

D'après ce que l'on a vu ci-dessus, $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$.

Or $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A)$ soit $\overrightarrow{AB}(1,4)$ et $\overrightarrow{AC}(-3,7)$.

Ainsi, $AB=\sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2+y_{\overrightarrow{AB}}^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$ et $AC=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$

En injectant ces données dans la formule, on obtient :$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{1\times(-3)+4\times7}{\sqrt{17}\times\sqrt{58}}=\dfrac{25}{\sqrt{986}}$

A l'aide de la calculatrice ($\cos^{-1}\left(\dfrac{25}{\sqrt{986}}\right)$), on obtient $\widehat{BAC}\simeq37^\circ$ au degré près.

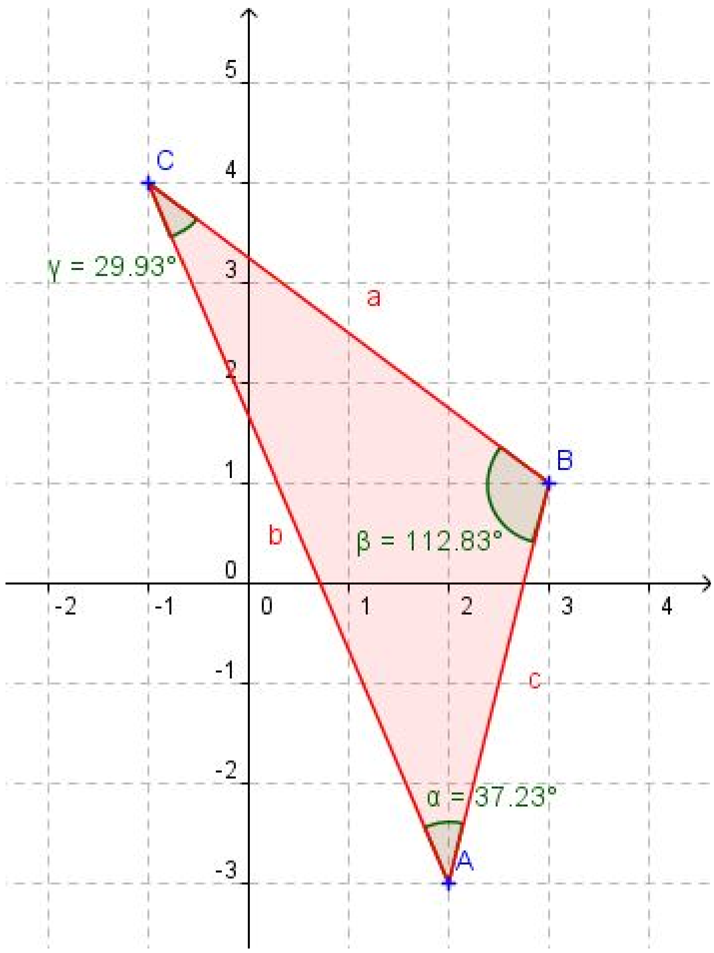
Pour déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, on utilise la même démarche et on obtient :

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{AB\times BC}$

$\overrightarrow{BC}(-4,3)$ et $BC=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Ainsi, $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{AB\times BC}=-\dfrac{(1\times4+(-4)\times3)}{\sqrt{17}\times5}=-\dfrac{8}{5\sqrt{17}}$ d'où $\widehat{ABC}\simeq113^\circ$ au degré près.

On utilise le fait que la somme des angles dans un triangle vaut 180° et $\widehat{ACB}=180^\circ-37^\circ-113^\circ=30^\circ$ au degré près.



2. Théorème d'Al Kashi

a. Théorème

ABC est un triangle où l'on adopte les notations suivantes :

$AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$.

$\widehat{BAC}=\widehat{A}$, $\widehat{ABC}=\widehat{B}$ et $\widehat{ACB}=\widehat{C}$.

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\times\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$BC^2=BA^2+AC^2-2\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

Ce qui s'écrit à l'aide des notations ci-dessus :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

Par permutation circulaire, on a également :

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$

b. Application

Ces formules permettent de déterminer une **mesure des angles du triangle** connaissant les longueurs des trois côtés, ou déterminer la **longueur du 3e côté** connaissant deux cotés et l'angle encadré par ces deux cotés.

Remarque : ces formules généralisent le théorème de Pythagore.

Exemple

Un triangle ABC est tel que AB = 5, AC = 7 et $\widehat{CAB}=60^\circ$. Déterminer la longueur du coté BC.

On connaît c, b et l'angle en A donc on peut utiliser $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$.

$a^2=7^2+5^2-2\times5\times7\times\cos60^\circ=39$.

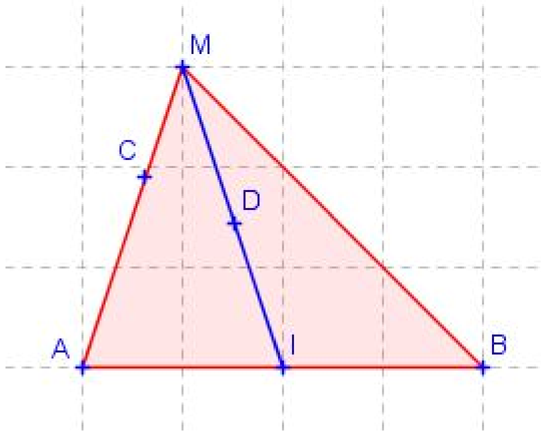
Ainsi, $BC=\sqrt{39}\simeq6,24$.

3. Théorème de la médiane

a. Théorème

On considère un segment $[AB]$ de milieu I .

Alors pour tout point M du plan, on a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$



Preuve

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MI}^2+2\times\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\times\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\times\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\times\overrightarrow{MI}\cdot(-\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB})+(-\overrightarrow{IB})^2+\overrightarrow{IB}^2$ car $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{IB}^2$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$ car I est le milieu de [AB]

b. Application

La relation $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$ permet, lorsque l'on connaît la longueur des trois cotés d'un triangle, de déterminer la longueur de la médiane $[MI]$.

Exemple

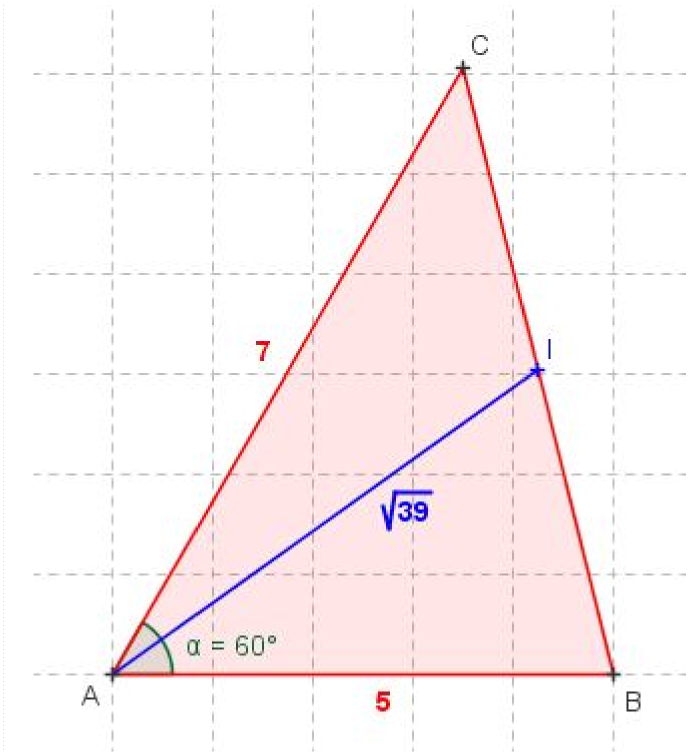
Dans le triangle précédent, déterminer la longueur de la médiane $[AI]$.

D'après la relation précédente, $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$.

$25+49=2AI^2+\frac{39}{2}$

$2AI^2=\frac{109}{2}$

$AI^2=\frac{109}{4}$ soit $AI=\frac{\sqrt{109}}{2}\simeq 5,22$



4. Caractérisation du cercle

a. Transformation de l'expression du produit scalaire de deux vecteurs

On considère un segment [AB] de milieu I.

Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$.

Preuve

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})-\frac{AB^2}{4}$

Or I est le milieu

de [AB] donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{AB^2}{4}$.

On obtient $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$.

b. Application

Cette relation va nous permettre de donner une caractérisation d'un cercle en utilisant le produit scalaire.

L'ensemble des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Preuve

On reprend l'expression précédente $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$.
Ce qui donne $MI^2 = \frac{AB^2}{4}$ et donc $IM = \frac{AB}{2}$.
Cela signifie que M appartient au cercle de centre I milieu de [AB] et de rayon $\frac{AB}{2}$, donc au cercle de diamètre [AB].

Exemple

Dans un repère on donne A(2 ; 3) et B(1 ; –5). Donner l'équation du cercle de diamètre [AB].

D'après ce qui précède le point $M(x\ ;\ y)$ appartient au cercle si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

On calcule alors le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (2-x)(1-x) + (3-y)(-5-y) = 0$.

On développe pour obtenir une équation de cercle : $2-2x-x+x^2-15-3y+5y+y^2=0$, que l'on écrit sous la forme $x^2+y^2-3x+2y-13=0$.