Mathématiques discrètes

Logique, arithmétique, relations binaires

Ivan Canet, 10 oct. 2017

TABLE DES MATIÈRES

Formulaire

$\forall (p, q, r) \in E^3$ quelconques, on a ;

$\boldsymbol{p} \vee (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\mathbf{1} \wedge \boldsymbol{p} \Leftrightarrow p$	$\boldsymbol{p} \wedge \overline{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow 0$
$\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\mathbf{0} \wedge \boldsymbol{p} \Leftrightarrow 0$	$\boldsymbol{p} \vee \overline{\boldsymbol{p}} \Leftrightarrow 1$
$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$	$\mathbf{1} \vee \boldsymbol{p} \Leftrightarrow 1$	
	$\mathbf{0} \vee \boldsymbol{p} \Leftrightarrow p$	$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

I. Notion de logique

1. Proposition et prédicat

Introduction à la logique

La logique permet de modéliser et d'étudier le raisonnement mathématique.

La logique fourni des outils très importants, nous allons établir des techniques, des règles et utiliser un vocabulaire spécifique afin de construire des phrases mathématiques correctes et établir la vérité de ces phrases.

Énoncé

Les phrases du langage courant sont de plusieurs types : déclaratif, exclamatif, impératif, interrogatif… Nous nous intéresserons aux phrases de type décoratif appelés énoncés.

Proposition

Une proposition est un énoncé auquel on peut attribuer sans ambiguïté une valeur de vérité, vraie ou faux.

Prédicat

Un prédicat est un énoncé composé de plusieurs variables, qui devient une proposition lorsque l'on évalue chaque variable.

Théorème

On appelle théorème un prédicat dont toutes les applications sont vraies.

2. Opération sur les propositions et sur les prédicats

Soient des propositions anonymes p, q et r, appelées variables propositionnelles.

2.1. Opérations principales

La conjonction (ET)

La conjonction est l'opérateur binaire ET : l'un **et** l'autre. On la note $\wedge$.

La disjonction inclusive (OU)

La disjonction est l'opérateur binaire OU : l'un **ou** l'autre **ou les deux**. On la note $\vee$.

La négation

La négation est l'opérateur unaire OU. La négation de p est notée $\overline{p}$.

2.2. Opérations dérivées

La disjonction exclusive (XOR)

La disjonction exclusive est l'opérateur binaire XOR : l'un **ou** l'autre, **mais pas les deux**, c'est à dire quand les deux arguments sont **différents**.

Elle se note $\oplus$; on peut la définir avec les opérateurs précédents tels que :

$$(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$$

L'implication logique

L'implication s'écrit avec le connecteur logique $\Rightarrow$.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

On voit que $p \Rightarrow q$ est fausse uniquement quand p est vraie et q est fausse.

Elle peut être définie comme :

$$(\overline{p} \vee q)$$

L'équivalence

L'équivalence est le contraire de la disjonction exclusive ; elle correspond au cas où l'un et l'autre **sont identiques**.

2.3. Propriétés des opérations

Les différentes opérations admettent différentes propriétés, par exemple ;

Associativité

On définie l'associativité d'une opération quelconque $*$ dans un intervalle I comme son insensibilité aux priorités opératoires ;

$$\forall (x,y,z) \in I^3;$$
$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

Distributivité

La distributivité est la capacité de deux opérations quelconques $*$ et $\circ$ dans un intervalle I à être distribuables l'une par rapport à l'autre ;

$$\forall (x,y,z) \in I^3;$$
$$x \circ (y*z) = (x \circ y)*(x \circ z)$$

Commutativité

On s'intéresse à une opération quelconque $*$ dans un intervalle I telle que ;

$\forall(x,y)\in I^2;$
$x*y = y*x$

2.4. Tautologie, antilogie

Tautologie

Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.

Antilogie

Au contraire, une antilogie est une proposition qui est toujours fausse.

2.5. Variations d'un théorème

Suppositions

Durant toute cette partie, on supposera l'existence d'un théorème t composé de deux propositions p et q, tel que $\boldsymbol{t : p \Rightarrow q}$.

Réciproque

Il s'agit d'inverser la cause et la conséquence ; c'est-à-dire que la réciproque de t est $\boldsymbol{q \Rightarrow p}$.

Pour un théorème quelconque, on ne peut pas savoir quelle valeur de vérité a la réciproque.

Contraposée

On s'intéresse maintenant au cas où le théorème n'est pas validé. La contraposée de t est donc $\boldsymbol{\bar{p} \Rightarrow \bar{q}}$.

La contraposée a toujours la même valeur de vérité que le théorème d'origine ; si le théorème est vrai, la contraposée l'est aussi.

Négation

La négation est le cas où le théorème est **entièrement** faux. Il s'agit donc de $\overline{p \Rightarrow q}$, soit $\boldsymbol{p \wedge \bar{q}}$.

La négation a toujours la valeur de vérité opposée au théorème d'origine ; si le théorème est vrai, la négation est fausse.