Analyse

Semestre 2

Ivan Canet · 8 févr. 2018 (27 févr. 2018)

Ce document a pour intention de résumer toutes les notions, formules et méthodes de résolution vues au cours de ce chapitre.

Table des matières

I. Rappels

1. Valeur absolue

1.1. Propriétés

La valeur absolue d'un réel quelconque x est définie comme le maximum entre x et $-x$.

$$|x| = \mathrm{Max}(x, -x)$$

On peut aussi définir la valeur absolue comme la distance entre deux points :

$$|x-y| = \sqrt{x^2+y^2}$$

On retrouve ensuite les propriétés suivantes :

$$\forall\, x, y, a \in \mathbb{R} - \forall\, z \geq 0$$

$\lvert 0\rvert = 0$	$\lvert x+y\rvert \leq z \Rightarrow y-z \leq x \leq y+z$
$\lvert x\cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert < z \Rightarrow y-z < x < y+z$
$x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$	$\lvert x\rvert \geq \lvert y\rvert \Rightarrow x^2 \geq y^2$
$x < a \Rightarrow -a < x < a$	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \Rightarrow x^2 = y^2$
$\lvert x+y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	

1.2. Résolution

Égalité

On souhaite résoudre l'équation $|x-3| = |x+5|$. Il existe trois méthodes ;

- **Propriété de la distance : $|x-y|$**
  L'équation à résoudre est donc : « la distance entre x et 3 est égale à la distance entre x et -5 » – on en déduit que x est le milieu entre 3 et -5 ; donc $x = \frac{-5+3}{2} = -1$.
- **Propriété du carré : $|x| = |y| \Rightarrow x^2 = y^2$**
  On transforme la valeur absolue en carré puis on résout l'équation.
- **Propriété du signe : $|0| = 0$**
  On remarque que les valeurs absolues changent de signe quand $x=3$ et $x=-5$; on analyse l'équation sur les intervalles $]-\infty, -5]$, $[-5, 3]$ et $[3, +\infty[$.

Inégalité

On souhaite résoudre l'inéquation $|x-3| \geq |x+5|$.

- **Propriété de la distance : $|x-y|$**
  L'inéquation se traduit par « la distance entre x et 3 est supérieure à la distance entre x et -5 », ce qui signifie que x est sur la demi-droite $[-1, -5)$ donc que $x \leq -1$.

2. Logarithme et fonction exponentielle

2.1. Propriétés

On note la fonction exponentielle e^x et la fonction logarithme népérien $\ln(x)$.

Domaines et limites

Domaines :

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow]0,+\infty[\quad - \quad \ln(x) :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

Limites :

	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		$-\infty$	$+\infty$

Priorité des limites en $+\infty$:

$$\ln(x) \geq x^y \geq e^x$$

Valeurs remarquables

$$\forall\, x, y, a \in \mathbb{R} \ - \ \forall\, z \geq 0$$

$e^0 = 1$	$\ln(1) = 0$
$(e^x)' = e^x$	$\ln(x)' = \dfrac{1}{x}$
$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
$(e^x)^a = e^{ax}$	$\ln(x^a) = a \ln(x)$
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$	$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
$e^{\ln(a)} = \ln(e^a) = a$	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$x^z = e^{z\ln(x)}$	

2.2. Résolution

II. Suites et nombres réels

1. Définitions et notations

1.1. Suite

Une suite est en ensemble de nombres ayant une relation logique.

1.2. Application

Une application est une fonction que l'on applique à tous les membres d'une suite ; ainsi si l'on a une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, on peut définir une application φ telle que $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} / \varphi(n) = 2n$. Appliquer φ à u_n permet de récupérer une nouvelle suite v_n, nommée « Suite extraite de u_n » ou « Sous-suite de u_n », qui vaut : $v_n = u_{\varphi(n)} = u_{2n}$.

1.3. Majorants, minorants, bornes

Si une suite admet une valeur telle que tous ces éléments sont plus petits que cette valeur, on dit qu'elle est majorée par cette valeur. C'est différent d'un maximum car la valeur n'est pas forcément atteinte.

De même, une suite admettant une valeur plus petite que tous ses membres est dite minorée.

Une suite majorée et minorée est dite bornée.

1.4. Convergence

Une suite est convergente si elle admet une limite réelle. Une suite convergente est donc obligatoirement bornée.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente. On admet trois types de suites divergentes : en $+\infty$ et en $-\infty$, et les cas particuliers.

2. Résultats de convergence

2.1. Unicité des limites

Une suite convergente ne peut pas avoir plusieurs limites (c'est démontrable par l'absurde).

2.2. Bornes

Une suite convergente est toujours bornée. Par contre, les suites bornées ne sont pas toujours convergentes.

2.3. Opérations

Pour toutes suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ convergente en u et $(v_n)_{n \geq n_0}$ convergente en v, on a :

- La suite $(u_n + v_n)$ est convergente en $u + v$.
- La suite $(u_n - v_n)$ est convergente en $u - v$.

- La suite $(u_n \times v_n)$ est convergente en $u\,v$.

2.4. Suites monotones

Il existe trois types de suites monotones :

1. Suite croissante : $u_n \geq u_{n-1}$
2. Suite décroissante : $u_n \leq u_{n-1}$

2.4.1. Convergence des suites monotones

La convergence des suites monotones est simple à étudier :

- Si une suite est croissante et majorée, elle converge.
- Si une suite est croissante mais n'est pas majorée, elle diverge en $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et minorée, elle converge.
- Si une suite est décroissante mais n'est pas minorée, elle diverge en $-\infty$.

2.5. Adjacence

Deux suites sont adjacentes si elles se rejoignent en 0 : c'est à dire que l'une est croissante et l'autre décroissante, et que leur différence converge vers 0. Deux suites adjacentes sont donc convergentes, et ont la même limite.

2.6. Suites de Cauchy

Si une suite est de Cauchy, alors elle est convergente (et inversement : si une suite est convergente, alors elle est de Cauchy). Vérifier si une suite est de Cauchy est souvent plus simple que chercher sa limite, mais cela ne permet pas de la connaître.

Une suite est de Cauchy si la distance entre deux de ses éléments est minime ; c'est à dire que pour une distance minimale nommée $\epsilon > 0$, pour un rang minimal nommé $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, et pour deux rangs quelconques $p, q \in \mathbb{N}$ supérieurs à N_ϵ, on a $|u_p - u_q| < \epsilon$.

3. Suites récurrentes

3.1. Définition

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite récurrente d'ordre p avec $p \in \mathbb{N}*$ si chaque terme de (u_n) ne dépend que des p termes précédents.

Par exemple, la suite définie par $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ est récurrente d'ordre 2.

3.2. Suite récurrente linéaire à coefficients constants

Une suite récurrente d'ordre p est entièrement déterminée par ses p premiers termes. On appelle suite récurrente linéaire à coefficients constants une suite récurrente qui est représentée par :

$$u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \cdot u_{n+i}$$

3.3. Équation caractéristique

Soit une suite récurrente linéaire à coefficients constants de rang 2 servant d'exemple,

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

où α et β sont des réels fixés.

On appelle équation caractéristique l'équation :

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0$$

3.4. Solutions d'une équation récurrente

À l'aide de l'équation caractéristique d'une suite, on peut trouver ses solutions. On distingue trois cas :

- Si l'équation admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors on retrouve une infinité de solutions déterminées par l'ensemble de suites de la forme $(a x_1^n + b x_2^n)$ avec $n \geq 0$, où a et b sont des coefficients qu'il faudra trouver grâce aux valeurs initiales. On distingue deux autres solutions : (x_1^n) et (x_2^n).
- Si l'équation admet une racine double x, alors on retrouve un ensemble de solutions $((an+b)x^n)$ et deux solutions indépendantes (x^n) et $(n x^n)$.
- Si l'équation n'admet pas de racine réelle, on peut considérer les parties réelles des solutions complexes.

3.5. Exemple de résolution

> *On souhaite exprimer la suite exprimant le nombre de couples de lapins telle que, chaque mois, chaque couple ayant au moins deux mois engendre un nouveau couple.*

En notant u_n le nombre de couples au $n^{\text{è}}$ mois, on peut exprimer u_{n+2} de la manière suivante ;

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

> *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation récurrente précédente.*

On trouve l'équation caractéristique :

$$x^2 - x - 1 = 0$$ *(cf. Équation caractéristique, p6)*

On calcule $\Delta = 5$, donc $x_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Les solutions de la suite sont donc toutes les suites de la forme :

$$u_n = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ *où a et b sont des constantes* (1)

> *On pose $u_0 = 1$, quelles sont les conditions initiales ?*

Puisque $u_0 = 1$, on sait que $u_1 = 1$ (pas de reproduction le premier mois).

> *En déduire les valeurs de a et b*

On peut poser le système :

$$\begin{cases} u_0 = a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + b\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1 \\ u_1 = a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases}$$

On résout le système pour obtenir la valeur de a et la valeur de b. On trouve :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{5}+5}{10} \\ b = \dfrac{\sqrt{5}-5}{10} \end{cases} \tag{2}$$

On en déduit que les suites correspondant à l'énoncé sont toutes les suites de la forme :

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-5}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \textit{d'après } (1) \textit{ et } (2)$$

III. Continuité et dérivation

IV. Annexes

1. Bibliographie

2. Index lexical