第七届中国青年运筹与管理学者大会论文集
南京，2005 年 8 月 12-16 日，第 608- 614 页

# 集装箱装载货箱的数学模型和算法[1]

林道荣 1)　陆志峰 2)
1)2) 南通大学理学院，江苏南通，226007
2) 东南大学数学系，江苏南京，210098

**摘要** 对集装箱装载货箱三维问题，基于分层思想建立多步决策模型，提出棱（面）判别矩阵法把三维装箱问题转化为二维乃至一维装箱问题而得到模型的求解算法．重要的是本文对货箱间的"体等价，面等价，棱等价" 这类情形进行了研究．

**关键词** 集装箱装载货箱，三维问题，多步决策模型，棱（面）判别矩阵法，体（面，棱）等价

## 1　引言

随着中国的经济发展，进出口贸易活动日益频繁，进出口贸易量也在逐步增大，同时也带来许多业务管理的问题，如业务员都会碰到怎样利用集装箱的空间，用何种装运方式才能最大限度地多装货物，以降低单位运输费用，从而达到降低商品成本，增加经济效益的问题．

某企业现有 $n$ 种不同规格的长方体货箱若干，待装入集装箱出口．每种长方体货箱的规格用重量 (千克 kg)) 与长宽高 (厘米 cm) 描述．要求 $n$ 种货箱任意装入集装箱，货箱数量与规格不限定 ( 所谓货箱数量不限定是指装箱数量预先没有人为限定，但有集装箱自然限定；货箱规格不限定是指装箱规格预先没有人为限定．)．自然的问题是，如何摆放货箱 (当然有数量与规格)，使得集装箱的使用率最大?

这是集装箱货物装载问题，既是物流服务的核心问题，而且货物装载优化问题是物流管理中公认的一个难题．由于货箱为长方体，故集装箱装载货箱问题为三维问题．这一问题是一个具有复杂约束条件的组合优化问题，即 NP-hard 问题 [1]．对于单一货箱的三维集装箱装载问题，黄伟文等提出 "行约法/列约法"[2]；对于在一些实际约束条件下的多货箱的三维集装箱装载问题，阎威武等提出了一种启发式算法 [3]．本文基于分层思想建立多步决策模型，提出棱（面）判别矩阵法把三维装箱问题转化为二维乃至一维装箱问题而得到模型的求解算法．重要的是本文对货箱间的 "体等价，面等价，棱等价" 这类情形进行了研究．

[1]作者简介：林道荣 (1963—)，男，江苏海安人，副教授，硕士，主要从事调和分析、数学模型研究．

## 2 基本概念和有关符号

以集装箱里侧左下方的顶点为原点，箱底在 $xoy$ 面上，箱门平行于 $yoz$ 面，建立三维直角坐标系．

### 2.1 基本概念

(1) 层三维长方体中，在 $z$ 轴 ($y$ 轴或 $x$ 轴) 上截取一定的厚度用平行 $xoy$ 面 ($zox$

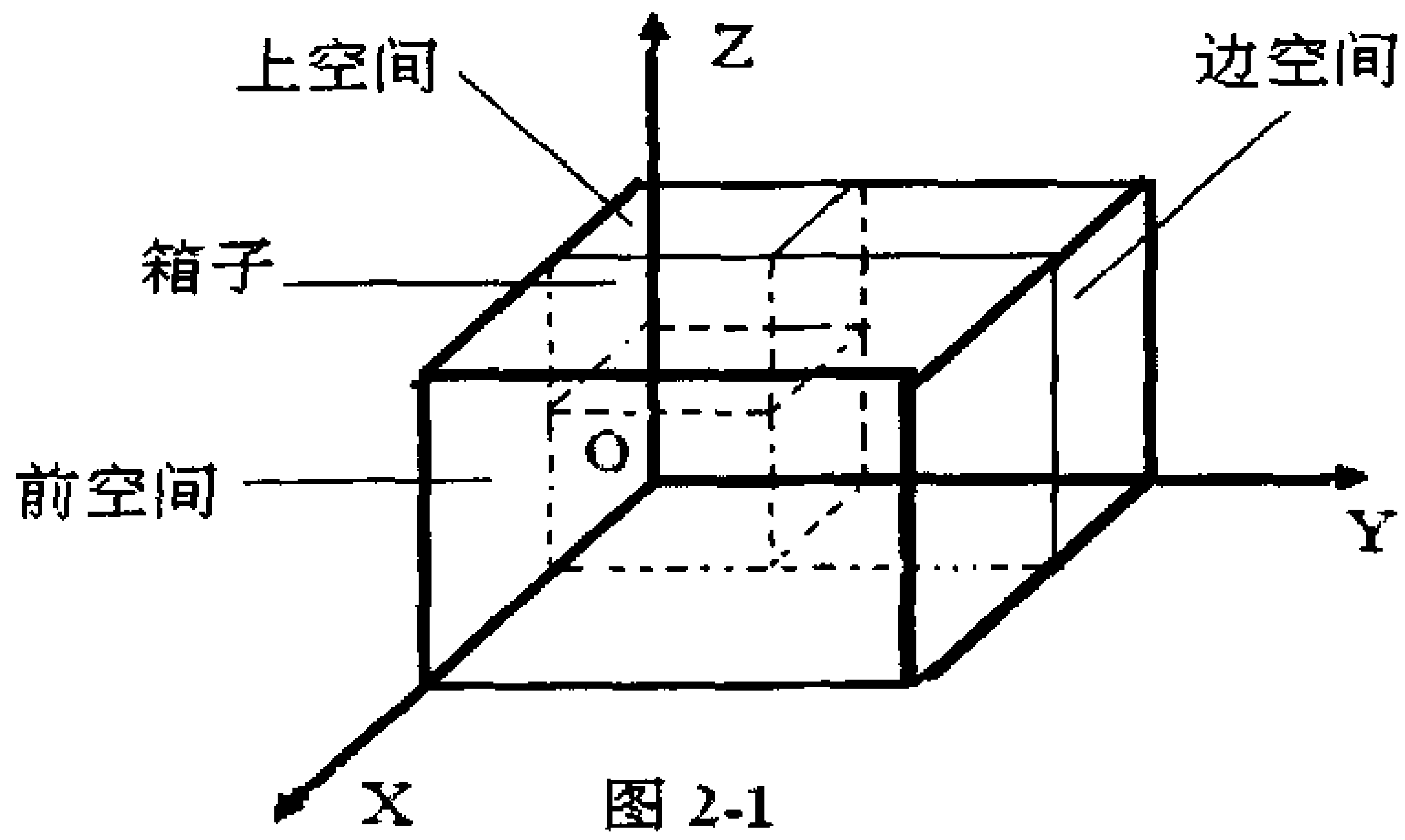


图 2-1

面或 $yoz$ 面) 的平面进行切割，所得到的空间长方体叫做层．对于层，装载货箱的方式是平面装载．例如，在 $z$ 轴上截取一定的厚度用平行 $xoy$ 面的平面进行切割得到的层上，装载货箱的方式是沿 $xoy$ 面装载一层一种货箱 (在有体 "等价"、面 "等价"、棱 "等价" 的情形会装载几种 "等价" 货箱，按几何度量较大者，仍理解为装载一层货箱．)．

(2) 坐标面层放法由图 2-1 可规定：沿平行于集装箱箱门的装箱方式称为 $yoz$ 面层放法；沿平行于地面的装箱方式称为 $xoy$ 面层放法；沿平行于集装箱侧面的装箱方式称为 $zox$ 面层放法．

(3) 体 "等价"、面 "等价"、棱 "等价" 有两种型号的箱子，其中较大的一种箱子所占立体与较小的箱子累成的立体完全重合，则称这两种箱子体 "等价"；有两种型号的箱子，它们不是体 "等价"，其中较大的一种箱子的某个面与若干个较小的箱子的某个面围成的矩形完全重合，则称这两种箱子面 "等价"；有两种型号的箱子，它们不是面 "等价"，其中较大的一种箱子的某条棱是较小箱子的某条棱正整数倍，则称这两种箱子棱 "等价"．

### 2.2 有关符号

(1) 装载立体、可装载立体某种型号的集装箱，用 $V(A,B,C)$ 表示集装箱的体积，其中 $A$ 表示 $x$ 轴方向的长度，$B$ 表示 $y$ 轴方向的长度，$C$ 表示 $z$ 轴方向的长度 (见图 2-1)．

集装箱或立体平行于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的棱称为集装箱或立体的长棱、宽棱、高棱.

假设整个装载分 $k$ 步，相应地集装箱空间分成 $k$ 个装载立体：$V_i(A_i,B_i,C_i)$, $i=1,2,\cdots,k$, 这里 $V_i(A_i,B_i,C_i)$ 表示第 $i$ 步的装载立体，$A_i,B_i,C_i$ 分别表示长、宽、高. 用 $V_{(i)}(A_{(i)},B_{(i)},C_{(i)})$ 表示在第 $i$ 步时集装箱剩余的 $k-i$ 个装载立体所成空间立体，称为第 $i+1$ 步的可装载立体，这里 $A_i,B_i,C_i$ 分别表示其长、宽、高.

显然 $V_i(A_i,B_i,C_i)=V_{(i-1)}(A_{(i-1)},B_{(i-1)},C_{(i-1)})-V_{(i)}(A_{(i)},B_{(i)},C_{(i)}),i=1,2,\cdots,k$，规定 $V_{(0)}(A_{(0)},B_{(0)},C_{(0)})=V(A,B,C)$.

(2) 货箱的体积，数量和重量现有 $n$ 种装载货箱，用#$j$ 表示第 $j$ 种箱子 $(j=1,2,\cdots,n)$，其中前 $m$ 种箱子只能水平旋转（指不能倒放），后 $n-m$ 种箱子任意旋转（任意摆放），这 $n$ 种不同规格的箱子重量分别为 $g_1,g_2,\cdots g_n$，集装箱所能承受的最大载重量为 $G$.

用 $v_j(a_j,b_j,c_j)$ 表示第 $j$ 种型号的箱子的体积，其中 $a_j,b_j,c_j$ 分别表示 $x$ 长、宽、高 $(j=1,2,\cdots n)$.

用 $l_{ij}$ 表示第 $i$ 步装入第 $j$ 种型号箱子的个数，记 $L_{(i)}=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{in})$ 为第 $i$ 步装入各种型号箱子的向量. 用 $L_i=(L_{i1},L_{i2},\cdots,L_{in})$ 表示第 $i$ 步装载后 $n$ 种型号箱子摆入集装箱的总数量，其中 $L_{ij}=\sum\limits_{h=1}^{i}l_{hj}$. 规定 $L_0=(0,0,\cdots 0)$，$L=(l_1,l_2,\cdots,l_n)$. 显然 $L=L_k$，并且 $L_i-L_{i-1}=L_{(i)}\ (i=1\ \cdots,k)$.

(3) 判别矩阵设 $x$ 为任意实数，定义 $r(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示对 $x$ 取整，则 $0\le r(x)<1$. 显然 $r(x)$ 表示 $x$ 的小数部分.

用

$$r(F_{ij})=\begin{pmatrix} r(A_{(i-1)}/a_j) & r(A_{(i-1)}/b_j) & r(A_{(i-1)}/c_j) \\ r(B_{(i-1)}/a_j) & r(B_{(i-1)}/b_j) & r(B_{(i-1)}/c_j) \\ r(C_{(i-1)}/a_j) & r(C_{(i-1)}/b_j) & r(C_{(i-1)}/c_j) \end{pmatrix}$$

表示第 $i$ 步时选择#$j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 的棱判别矩阵. 如果#$j$ 不能倒置，则规定 $r(F_{ij})$ 为

$$\begin{pmatrix} r(A_{(i-1)}/a_j) & r(A_{(i-1)}/b_j) & 1 \\ r(B_{(i-1)}/a_j) & r(B_{(i-1)}/b_j) & 1 \\ 1 & 1 & r(C_{(i-1)}/c_j) \end{pmatrix}.$$

对于某个#$j_0$，对应的 $r(F_{ij_0})$ 有两个元素分别为所有的 $r(F_{ij})$ 中全体行元素的最小元素与所有的 $r(F_{ij})$ 中全体列元素的最小元素，选择#$j_0$.

用

$$r(H_{ij})=\begin{pmatrix} r(A_{(i-1)}B_{(i-1)}/a_jb_j) & r(A_{(i-1)}B_{(i-1)}/b_jc_j) & r(A_{(i-1)}B_{(i-1)}/c_ja_j) \\ r(B_{(i-1)}C_{(i-1)}/a_jb_j) & r(B_{(i-1)}C_{(i-1)}/b_jc_j) & r(B_{(i-1)}C_{(i-1)}/c_ja_j) \\ r(C_{(i-1)}A_{(i-1)}/a_jb_j) & r(C_{(i-1)}A_{(i-1)}/b_jc_j) & r(C_{(i-1)}A_{(i-1)}/c_ja_j) \end{pmatrix}$$

表示第 $i$ 步时选择#$j$ ($j=1,2,\cdots,n$) 的面判别矩阵. 如果#$j$ 不能倒置, 则规定 $r(H_{ij})$ 为

$$r(H_{ij})=\begin{pmatrix} r(A_{(i-1)}B_{(i-1)}/a_jb_j) & 1 & 1 \\ 1 & r(B_{(i-1)}C_{(i-1)}/b_jc_j) & r(B_{(i-1)}C_{(i-1)}/c_ja_j) \\ 1 & r(C_{(i-1)}A_{(i-1)}/b_jc_j) & r(C_{(i-1)}A_{(i-1)}/c_ja_j) \end{pmatrix}.$$

对于#$j_1$ 与#$j_2$, 通过比较 $r(H_{ij_1})$ 中全体元素最小元素（可能不唯一）与 $r(H_{ij_2})$ 中全体元素最小元素（可能不唯一）而确定#$j_1$ 或#$j_2$.

(4) 层利用率、集装箱利用率第 $i$ 层（装载立体）$V_i(A_i,B_i,C_i)$ 中装入各种型号箱子的向量为 $L_{(i)}=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{in})$, 定义

$$\eta_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij}v_j}{V_i}\times 100\%$$

为第 $i$ 层（装载立体）$V_i(A_i,B_i,C_i)$ 的层（装载立体）利用率. 而定义

$$\eta=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} l_jv_j}{V}\times 100\%$$

为集装箱的利用率.

## 3 问题分析

这是一个整数规划问题, 其最优解不一定是可装箱的最优解, 这由货箱本身的物理性质可知, 即货箱不能分割、挤压. 注意到集装箱的实际装载货箱过程是从里到外与自下而上, 最好的集装箱装载货箱操作规程是三种装载方式: 一是沿与集装箱箱门平行的平面于集装箱内左右下上装载, 即 $yoz$ 面层放法; 二沿与地面平行的平面于集装箱内左右后前装载, 即 $xoy$ 面层放法; 三是沿与集装箱侧面平行的平面于集装箱内后前下上装载, 即 $zox$ 面层放法. 对于每一种装载方式, 实际装载货箱就是装载一层货箱. 这样整个集装箱的装载就分解为若干步装载, 每一步装载就是一种装载方式. 基于此, 集装箱的最优装载问题就转化为如下整体优化问题:

把集装箱的装箱立体用平行于集装箱箱面的平面分解为若干个装载立体层, 每个层按一种装载方式装载若干货箱后, 集装箱的利用率最大.

显然这是一个多步决策问题, 可以建立动态规划模型. 如果采用动态规划模型解决, 要找出转移函数困难, 从而动态规划模型理论上有意义, 实际不可行. 由于每个层按一种装载方式装载一层货箱后的剩余立体空间不可再装载其它货箱, 对于集装箱装载货箱提出如下局部优化问题:

把集装箱的装箱立体用平行于集装箱箱面的平面分解为若干个装载立体层, 按一种装载方式装载货箱后, 每个层的层利用率最大.

这也是一个多步决策问题, 每步优化都归结为从集装箱的可装载立体中用平行于集装箱箱面的平面切割一个装载立体层, 使这个层按一种装载方式装载货箱后的层利用率最大.

对于动态规划问题, 局部优化不能保证整体优化, 假如存在后效性. 而集装箱装箱问题存在后效性, 因此局部优化问题的最优解与整体优化问题的最优解不一致. 考虑到集装箱装载货箱的装载过程, 而且集装箱装箱立体三维对称, 这样集装箱的最优装载问题就可用局部优化模型解决.

## 4 多步决策局部优化模型

在装载过程中, 货箱所能承受的最大压力受到限制, 对于排在较上层过重的货箱, 通过 180° 的翻转可将过重的货箱翻转到较下层. 这样不考虑货箱承受压力问题. 尽管动态规划可求得理论上的最优解, 但理论并不一定可操作, 而且不体现装载过程. 根据以上对问题的分析, 建立多步决策局部优化模型. 即把集装箱装载过程分为 $k$ 步, 第 $i$ 步是从集装箱的可装载立体 $V_{(i-1)}(A_{(i-1)},B_{(i-1)},C_{(i-1)})$ 中确定层 $V_i(A_i,B_i,C_i)$, 按一种坐标面层放法后该层利用率最大:

$$\max_{V_i,L_{(i)}} \eta_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij}v_j}{V_i}\times 100\%, i=1\ \cdots, k(\quad 4.1)$$

约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{i} l_{hj}g_j\le G, l_{ij}\ge 0, i=1\ \cdots, k, j=1,2,\cdots,n(\quad 4.2)$$

## 5 多步决策模型求解算法

由于问题转化为把集装箱装箱空间分为 $k$ 个层, 而每个层按层放法装载货箱, 这样就把三维问题降为二维问题乃至一维问题.

若 $n$ 种货箱之间不存在体 "等价", 面 "等价" 或棱 "等价" 这些情形, 则每个层只装载一种货箱若干. 此时有如下算法

(1) 令 $i=1$, $V_{(0)}(A_{(0)},B_{(0)},C_{(0)})=V(A,B,C)$, $L_0=(0,0,\cdots,0)$;

(2) 对于可装载立体 $V_{(i-1)}(A_{(i-1)},B_{(i-1)},C_{(i-1)})$, 如果所有 $r(F_{ij})$ 的行最小元素与列最小元素 (不是某一棱判别矩阵的同一元素) 在同一个 $j_p$ 取得, 则第 $i$ 步装载$\#j_p$ (不唯一时按货箱第三棱长最短, 或箱重确定), 同时确定摆放方案; 如果所有 $r(F_{ij})$ 的行最小元素与列最小元素 (不是某一棱判别矩阵的同一元素) 不在同一个 $j_p$ 取得, 则再利用面判别矩阵确定第 $i$ 步装载$\#j_p$ (不唯一时按货箱第三棱长最短, 或箱重确定), 同时确定摆放方案. 由此可得层 $V_i(A_i,B_i,C_i)$ 及 $L_{(i)}=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{in})$.

(3) 可装载立体 $V_{(i)}(A_{(i)},B_{(i)},C_{(i)})=V_{(i-1)}(A_{(i-1)},B_{(i-1)},C_{(i-1)})-V_i(A_i,B_i,C_i)$, $L_i=L_{i-1}+L_{(i)}$. 若 $A_{(i)}\ge\min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}, B_{(i)}\ge\min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}, C_{(i)}\ge\min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{h=1}^{i} l_{hj}g_j\le G$, 则转下一步; 否则转回 (2).

(4) $i=i+1$，继续 (2)．

(5) $A_{(i)} < \min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}$ 或 $B_{(i)} < \min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}$ 或 $C_{(i)} < \min\limits_{1\le j\le n}\{a_j,b_j,c_j\}$ 时，$i=k$，结束．

若 $n$ 种货箱之间存在体"等价"，则由于若干体积较小的货箱可用体"等价"的体积较大的货箱代替而先把体"等价"的体积较小的货箱不考虑，最后再根据约束条件考虑是否用若干个体"等价"的体积较小的货箱来替换"等价"的体积较大的货箱，因此不妨设 $n$ 种货箱之间不存在体"等价"．

若 $n$ 种货箱之间存在面"等价"，只在装载过程中货箱"等价"的面与层放面垂直时才有考虑价值，此时归结为一维问题，即在层面的一棱上如何放置面"等价"的货箱，亦即层面的一棱如何被面"等价"的货箱的第三条棱最佳分割．如在第 $i$ 步装载的货箱面"等价"，用简单的线性规划方法或穷举法可确定摆放方案表．

若 $n$ 种货箱之间存在棱"等价"，只在装载过程中货箱"等价"的棱与层放面垂直时才有考虑价值，此时归结为二维问题，即层面如何被棱"等价"的货箱的"等价"棱的垂直面最佳分割．如在第 $i$ 步装载的货箱棱"等价"，用简单的线性规划方法或穷举法可确定摆放方案表．

## 6 实例

例四种型号的货箱及集装箱的规格如下：

表 6-1 四种型号箱子的规格

| 箱子型号 | 长 (m) | 宽 (m) | 高 (m) | 重量 (kg) |
|---|---|---|---|---|
| #1 | 1.1 | 0.84 | 0.6 | 600 |
| #2 | 0.385 | 0.33 | 0.3 | 8 |
| #3 | 0.455 | 0.37 | 0.31 | 12.5 |
| #4 | 1.08 | 0.84 | 0.78 | 300 |
| 集装箱 | 5.86 | 2.33 | 2.35 | $\le 21000$ |

其中#1 与#4 只能水平旋转，#2 与#3 可以任意旋转．要求四种货箱任意装入集装箱，货箱数量与规格不限定．问如何摆放货箱，才能使集装箱的利用率最大?

解第一步：$V_{(0)}=(5.86,2.33,2.35)$，$L_0=(0,0,0,0)$;

第二步：由棱判别矩阵先摆放#3 货箱，$V_1=(0.455,2.33,2.35)$，沿 $yoz$ 面层放#3 货箱 $6\times7=42$ 只．$V_{(1)}=(5.405,2.33,2.35)$，$L_1=(0,0,42,0)$．

第三步：由棱判别矩阵摆放#4 货箱，$V_2=(5.405,0.84,2.35)$，沿 $zox$ 面层放#4 货箱 $3\times5=15$ 只．$V_{(2)}=(5.405,1.49,2.35)$，$L_2=(0,0,42,15)$．

第四步：由棱判别矩阵摆放#4 货箱，$V_3=(5.405,0.84,2.35)$，沿 $zox$ 面层放#4 货箱 $3\times5=15$ 只．$V_{(3)}=(5.405,0.65,2.35)$，$L_3=(0,0,42,30)$．

第五步：由棱判别矩阵摆放#2 货箱，$V_4 = (5.405, 0.33, 2.35)$，沿 $zox$ 面层放#2 货箱 $6\times18 = 108$ 只。$V_{(4)} = (5.405, 0.32, 2.35)$，$L_4 = (0, 108, 42, 30)$.

第六步：由棱判别矩阵摆放#2 货箱，$V_5 = (5.405, 0.31, 2.35)$，沿 $zox$ 面层放#2 货箱 $7\times14 = 98$ 只。$V_{(5)} = (5.405, 0.01, 2.35)$，$L_5 = (0, 206, 42, 30)$.

第七步：由于 $V_{(5)} = (5.405, 0.01, 2.35)$ 不可装载任何货箱，并且

$$600 \times 0 + 8 \times 206 + 12.5 \times 42 + 300 \times 30 < 21000,$$

结束。$L = L_4 = (0, 206, 42, 30)$，$\eta = 97.462\%$.

## 参考文献

[1] 邢文训，谢金星．现代优化计算方法 [M]．北京：清华大学出版社，1999
[2] 黄伟文、钱雁南、许保光．"行/列约束法" 在外贸进出口货柜运输业务上的应用 [J]．中国管理科学，2002，1 (10)：89-93
[3] 阚威武、邵惠鹤、田雅杰．集装箱装载的一种启发式算法 [J]．信息与控制，2002，4 (31)：353-356

## The Model and its Algorithm for Three Dimension Packing

Lin Daorong[1)] Lu Zifeng[2)]
[1)2)]Nantong university, Jiangsu Nantong, 226007
[2)] Southeast university, Jiangsu Nanjing, 210098

**Abstract** For three dimension containerizing problem, muit-steps decisionmaking model, which is based on the divided spaces, is constructed, and its algorithm is gained from the method. It is important that "equivalence relation of body(face; edges)" of packing box are studied.

**Keywords** containerize, three dimension problem, muit-steps decisionmaking model, matrix decision rule of edges ( face)