主成分分析法和层次分析法在对综合指标进行定量评价中的比较

李春平[1]，杨益民[1]，葛莹玉[2]

（1. 南京财经大学 经济学院，江苏 南京　210003；2. 云南财贸学院 统计系，云南 昆明　6502211）

摘要：随着我们对经济社会发展研究的不断深入，用单一指标来反映某一问题已经不能满足研究的需要，综合指标的运用越来越普遍。主成分分析法和层次分析法是计算综合指标的两种常用方法，对不同的问题，两种方法的评价效果是不同的。本文对主成分分析法作了一些改进，然后通过与层次分析法的比较，得出它们在评价经济发展综合指标时的优劣，并分析了原因，有助于准确理解和运用这两种方法进行综合指标评价。

关键词：主成分分析法；层次分析法；定量评价

中图分类号：F222.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6049(2005)06-0054-04

一、引言

经济发展是当今社会普遍关心的问题，然而用单一的指标来评价经济发展这样一个复杂的系统，得到的分析结果势必比较片面，而多指标的综合评价则可较全面、准确地反映一个地区经济发展的综合水平。综合评价方法很多，常用的有层次分析法、模糊评价法、主成分分析法等。用层次分析法虽然能简单的将综合指标定量化，但其权重确定的主观性较大。因为在运用 Saatty 的九级标度法来构造判断矩阵的时候（构造判断矩阵的时候一般都用 Saatty 的九级标度法），经常碰到两指标的重要性程度难以界定的情况，而且当某一层的指标较多时，经常会犯逻辑上的错误，造成判断矩阵的一致性检验通不过，即使经过矫正后判断矩阵通过了一致性检验，也会使初始判断的信息产生一些影响，很难正确客观地评价一个地区的综合经济发展水平。由于用模糊评价法在定权的时候用的也是层次分析法，所以也会遇到同样的问题。主成分分析法在多指标的综合评价中，有它的优势，它能比较客观地对多指标进行综合评价。然而，简单地运用主成分分析法得到的结果没有明确的范围，只能反映强弱关系，不能很好地反映综合指标所处的位置，本文在运用主成分分析法的时候做了一些修改，使综合指标有一个明确的范围，更能合理反映地区综合经济发展水平的状况。

二、主成分分析法对综合指标进行评价的原理方法

步骤 1：标准化

在主成分分析法中常用的标准化方法为正态标准化，这种标准化方法不仅计算麻烦，而且标准化后的变量取值范围不确定，不能很好地反映变量的经济意义，所以我们采取下面的标准化方法。根据指标性质的不同，分成越大越好型和越小越好型。对于越大越好型指标，用(2.1)式进行标准化，公式为：

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \min x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}} \tag{2.1}$$

其中，$i = 1, 2, \cdots, n$；$j = 1, 2, \cdots, p$。

而对于越小越好型指标，用公式(2.2)进行标准化：

$$x_{ij}^* = \frac{\max x_{ij} - x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}} \tag{2.2}$$

收稿日期：2005-05-10

基金项目：江苏省高校哲学社会科学重大项目基金资助项目（2004-01）；江苏省高校自然科学资金资助项目（04KJD11076）

作者简介：李春平（1982—），男，江苏昆山人，南京财经大学统计专业研究生；杨益民（1955—），男，安徽六安人，南京财经大学经济学院教授，研究方向为不确定经济分析与评价；葛莹玉（1981—），女，江苏常州人，云南财贸学院统计专业研究生。

其中，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,p$。

这种标准化方法不仅计算简单，而且标准化后变量在[0,1]之间取值，方便控制综合指标的取值范围。

步骤2:求特征值及特征向量

用标准化后的样本计算其相关系数，然后求出特征值，最后可得相应的特征向量。相应的计算步骤如下:

记标准化后的样本相关系数矩阵为:

$$R=\frac{1}{n}(X^*)'X^*=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix}$$

根据方程$|R-\lambda_j E|=0$，可求得R的p个特征根$\lambda_j(j=1,2,\cdots,p)$。以及相应的特征向量$U_j$，$U_j=(u_{1j},u_{2j},\cdots,u_{pj})(j=1,2,\cdots,p)$。则提取的主成分记为$Y_j=X^*U_j$，即$y_{kj}=x^*_{k1}u_{1j}+x^*_{k2}u_{2j}+\cdots+x^*_{kp}u_{pj}(k=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,p)$。并计算其方差贡献率$v_k=\frac{\lambda_k}{p}$。则综合得分的计算公式为

$$Z_j=VY_j=(v_1,v_2,\cdots,v_p)Y_j \qquad (2.3)$$

步骤3:计算综合得分

虽然我们已经把原始变量标准化为在[0,1]范围内取值的新变量，而且由于$\sum_{j=1}^{p}=p$，即$\sum_{k=1}^{p}v_k=1$，也就是说如果Y_j中的每一个元素的取值范围也在[0,1]间，那么最后的综合得分的取值范围也将在[0,1]之间。然而在通常情况下，Y_j中的元素并不在[0,1]之间取值，因为在通常情况下$\sum_{k=1}^{p}u_{kj}\neq 1$，如果用公式$u'_{kj}=\frac{u_{kj}}{\sum_{k=1}^{p}u_{kj}}$使$\sum_{k=1}^{p}u'_{kj}=1$在每一个$j$上都成立，就破坏了整个特征向量矩阵$U$的比例系数，对主成分的提取造成影响，显然这样做缺乏合理性。这里我们使第一主成分Y_1中的每一元素的最大可能值为1，即使$\sum_{k=1}^{p}u_{k1}=1$，方法就是使$u'_{k1}=\frac{u_{k1}}{\sum_{k=1}^{p}u_{k1}}$，为方便起见，记$c=\sum_{k=1}^{p}U_{k1}$，则$\sum_{k=1}^{p}u'_{k1}=1$。并使$u'_{kj}=\frac{u_{kj}}{c}(j=1,2,\cdots,p)$。这样一来，就保证了$Y_j$中的各元素均在[0,1]中取值，从而使最终的综合得分值得范围也为[0,1]。而且这种变换没有改变原来的系数向量比例，即没有损坏系数所反映的信息。此时，U_j相应地变为U_j^*，综合得分的计算公式也变为

$$Z_j=VY'_j=U_i^*X_j^*U_j^{*\prime} \qquad (2.4)$$

这样计算出来的综合得分不仅可以用来排序，而且也比较精确地反映了研究对象处在的位置，把一个等级指标提升为计量指标，提高了指标值的精度。

三、层次分析法对综合指标进行定量评价的原理方法

层次分析法(AHP)是处理多目标决策问题的一种常用办法，由于层次分析法的层次结构、判断矩阵一致性检验的问题各类文献讨论得较多，也较详细，故这里只讨论与本文有关的权重计算问题。权重的计算方法有很多，本文以使用较广的和法为例，各层目标的权数计算公式为:

$$w_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}a_{kj}}(i=1,2,\cdots,n) \qquad (3.1)$$

然后根据各层权数计算子目标层对总目标的合成权数，这一过程是自上往下进行的，假设上一层C包含m个因素:$C_1,C_2,\cdots,C_m$，其对于上一层Z的权数分别为:$c_1,c_2,\cdots,c_m$。下一层D包含n个因素:$X_1,X_2,\cdots,X_n$，它们对于上一层因素C_j的单准则排序权重为:$b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}$。如果某一个$X_i$对$C_j$没有影响，则此时对应的$b_{ij}=0$。则$D$层对于$Z$层的合成权数为:$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^T$，其中

$$d_i=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}c_j(i=1,2,\cdots,n) \qquad (3.2)$$

则综合指标值Z的计算公式为

$$Z_j=\sum_{i=1}^{n}d_ix_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m) \qquad (3.3)$$

对于子目标之间没有相互影响的指标，如果判断矩阵通过了一致性检验，这样得出的综合指标值是比较准确的，也可以用来进行对比分析。但如果子目标之间存在相关程度较大的指标，那么这样得出的综合指标值就会有偏差，不能很好地反映我们所研究的问题。原因如下:

设子目标的变量为$X_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,p)$。假设剔除了变量之间的重复信息之后变量变为$e_{ij}x_{ij}$，其中$0\leq e_{ij}\leq 1$，$e_{ij}=0$表示该变量可由其他变量线性表示，即该变量所包含的信息与其他变量完全重复；$e_{ij}=1$表示该变量独立于其它变量，即不能由其他变量线性表示。则此时的综合指标值$Z_j=\sum_{i=1}^{n}d_ie_{ij}x_{ij}\leq\sum_{i=1}^{n}d_ix_{ij}$，也就是说这种情况下得出的综合指标值会偏大，而且大量重复信息的存在，使重要因素的作用因重复计算而被夸大，次要因素的作用被削弱，导致综合指标值不能很好地反映所研究的问题。

四、两种方法在评价江苏经济发展综合指标中的比较

经济发展的综合评价是一个复杂的系统，可以作为衡量一个地区经济发展的指标有很多，而且通常经济发展的指标之间有较强的相关性，例如GDP、人均GDP、固定资产投资、居民收入，所以在作综合评价的时候应该考虑到重复信息的存在。

我们在分析江苏各市经济发展综合水平时，选取了三个子系统共10项指标进行综合分析，指标体系如表1:

表 1　江苏宏观经济效益指标体系

经济发展综合指标 Z	经济发展水平　C_1	GDP　x_{i1} 人均 GDP　x_{i2} 人均 GDP 增长率　x_{i3}
	经济发展质量　C_2	城镇居民人均可支配收入　x_{i4} 农村居民纯收入　x_{i5} 第三产业占 GDP 比重　x_{i6}
	经济发展动力　C_3	固定资产投资效益　x_{i7} 金融机构存款余额　x_{i8} 万人中各专业技术人员数　x_{i9} 科技三项和文教科卫支出　x_{i10}

其中，$i=1,2,\cdots,n$。此处 $n=13$，分别代表 13 个城市。

由于上述指标均为效益型(即越大越好型)指标，故先按公式(2.1)对其进行标准化，一来消除了量纲的影响，二来作统一的标准化处理，便于两种方法之间的比较。经过上面所介绍步骤的处理、变换后，分别用两种方法计算江苏经济发展综合指标值，结果如下：

表 2　两种方法结果比较

城市	主成分分析法计算的结果		层次分析法计算的结果		按人均 GDP 的结果	
	Z 值	排名	Z 值	排名	人均 GDP:元	排名
苏州市	0.7044	1	0.8612	1	47693	1
无锡市	0.5674	2	0.7820	2	43155	2
南京市	0.5074	3	0.5775	4	27307	3
常州市	0.4037	4	0.6398	3	26149	4
镇江市	0.3027	5	0.5149	5	23995	5
南通市	0.2619	6	0.4543	6	12924	7
盐城市	0.2089	7	0.3837	7	9330	10
扬州市	0.2036	8	0.3672	8	14290	6
徐州市	0.2014	9	0.3382	10	9992	9
泰州市	0.1872	10	0.3616	9	11513	8
淮安市	0.0905	11	0.2001	11	8108	11
连云港市	0.0837	12	0.1739	12	7536	12
宿迁市	0.0299	13	0.1039	13	5400	13

数据来源：2004 年《江苏统计年鉴》。

从表中可以看出，按主成分分析法计算经济发展综合指标和按层次分析法计算经济发展综合指标，以及仅按人均 GDP 来作为经济综合发展的度量，它们三者的排序结果大致相同，但他们反映的各市经济发展的综合情况却有所差异。主成分分析法得出的综合指标值苏州与宿迁市的比例为 23.56 倍，层次分析法下这一比例为 8.29，而苏州与宿迁市的人均 GDP 比例为 8.83。为了清楚说明苏州与宿迁经济发展的综合情况，这里把这两个城市经济发展各指标值列出，见表 3：

从表 3 可以看出除了固定资产投资效益苏州比宿迁略差外，其余指标苏州都比宿迁高，其中有些指标例如 GDP、人均 GDP、金融机构存款余额，苏州比宿迁高出许多倍，也就是说苏州和宿迁之间经济发展的真实差距肯定要比人均 GDP 所反映的差距来的大，即反映苏州和宿迁经济发展的综合指标值的比例一定大于两者之间人均 GDP 的比例，而用层次分析法得出的经济发展综合指标值的比例为 8.29，小于人均 GDP 的比例，说明层次分析法并没有把苏州和宿迁之间经济发展的差异完全反映出来。从上面的原理分析可知，层次分析法并没有把指标间的重复信息去掉，这些信息在用层次分析法进行计算的时候被重复地计算，导致这些信息的实际计算权重比我们用判断矩阵得出的权重要大，相反能反映个体差异的信息的实际计算权重就相应减少了，这样得出的计算结果就会趋向于重复信息所反映的结果。例如我们研究人均 GDP 的重复信息问题，本例中设人均 GDP 为 x_{i2}，其余指标与人均 GDP 均有一定的相关性，即其他指标中包

表 3　苏州与宿迁经济发展差异比较(2003 年)

	GDP:亿元	人均 GDP:元	人均 GDP 增长率:%	城镇居民人均可支配收入:元	农村居民纯收入:元
苏州市	2801.56	47693	117	12362	6681
宿迁市	278.19	5400	111.40	5593	3102
倍数	10.07	8.83	1. 05	2.21	2.15
	第三产业占 GDP 比重:%	固定资产投资效益:GDP/固投	金融机构存款余额:亿元	万人中各专业技术人员人数:人	科技三项和文教科卫事业支出:亿元
苏州市	34.05067	3.276257	3149.79	608.8296	38.07
宿迁市	29.68834	4.216278	158.68	128.7554	8.10
倍数	1.15	0.78	19.85	4.73	4.70

含了一定的人均 GDP 的信息,用 $a_{ij}x_{ij}$ 表示指标 x_{ij} 中包含人均 GDP 的信息,$i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,p;a_{i2}=1$,根据判断矩阵计算的合成权数为 d_{ij},$0\leqslant d_{ij}\leqslant 1$,则人均 GDP 的权数为 d_{i2},而实际计算的人均 GDP 的信息的权数为 $\sum_{i=1}^{n} d_{ij}a_{ij} \geqslant d_{i2}a_{i2} = d_{i2}$,实际计算的权数比专家在构造判断矩阵时分配给人均 GDP 的权数大,其余的重复信息部分也是如此;与此相反反映指标个体差异信息的实际计算权数为 $d_{ij}(1-a_{ij})\leqslant d_{ij}$,也就是这部分信息被弱化了,这与专家对这些指标的重要性程度的判断不一致,导致的后果就是综合指标值偏向于重复程度高的信息。本例中人均 GDP 对其它指标有程度不同的影响,在各指标间的重复程度较高,所以用层次分析法算出的综合指标值的差异与人均 GDP 相似,没有把两个城市间经济发展的差异完全反映出来。

五、结束语

经济发展对于一个地区来说相当重要,正确分析一个地区经济发展综合情况,有助于我们做出正确的决策,引导经济良性发展。本文用两种常用的衡量经济发展综合水平的方法分别计算了江苏 13 个城市的经济发展综合指标,使原本只能定性描述的综合指标直观、定量地展现出来,使人们一看就知道各城市经济发展的基本情况以及与其他城市的差距。在用两种方法作比较的时候,主成分分析法能较好地反映地区经济发展的综合情况,而层次分析法由于定权时存在主观因素,以及没有将经济变量间的重复信息去除,导致其分析结论偏差较大。所以在处理相关度较高的经济变量综合指标问题时,用主成份分析法是一个比较可行的方法,能够让我们更加清晰地了解地区经济发展综合状况,有效指导我们促进经济发展。

参考文献:

[1]杨益民,杨绪兵. 层次分析法中整体一致性判别及校正[J]. 武汉大学学报(理学版),2004,(6).

[2]王莲芬,许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京:中国人民大学出版社,1990.

[3]于秀林,任雪松. 多元统计分析[M]. 北京:中国统计出版社,1999.

(责任编辑:黄明晴)

A Comparison on the Quantitative Appraisal of Multi-index Between the Principal Component Analysis Algorithm and the Analytical Hierarchy Process

LI Chunping[1], YANG Yimin[1], GE Yingyu[2]

(1. School of Economics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210003, China;

2. Dept. of Statistics, Yunnan University of Finance and Trade, Kunming 6502211, China)

Abstract: As we are going deep into the research of the development of economy and society. It is unappeasable to reflect a problem with single index. The application of the multi-index is more and more general. This text has drawn their quality while appraising the Multi-index of economic development, and their reasons. To help us appraising Multi-index accurately.

Key words: principal component analysis algorithm; analytical hierarchy process; quantitative appraisal