人工智能——样例学习II

饶洋辉
数据科学与计算机学院,
中山大学
raoyangh@mail.sysu.edu.cn
http://sdcs.sysu.edu.cn/node/2471

线性回归

- 最小二乘法

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

$$Q(w_0, w_1) = \min_{w_0, w_1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - w_0 - w_1 x_i)^2$$

$$\partial Q(w_0, w_1) / \partial w_0 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

$$\partial Q(w_0, w_1) / \partial w_1 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - w_0 - w_1 x_i) = 0$$

线性回归

- 最小二乘法

$$w_0 = \bar{y} - w_1\bar{x}$$

$$w_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - \bar{x})}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

逻辑回归模型

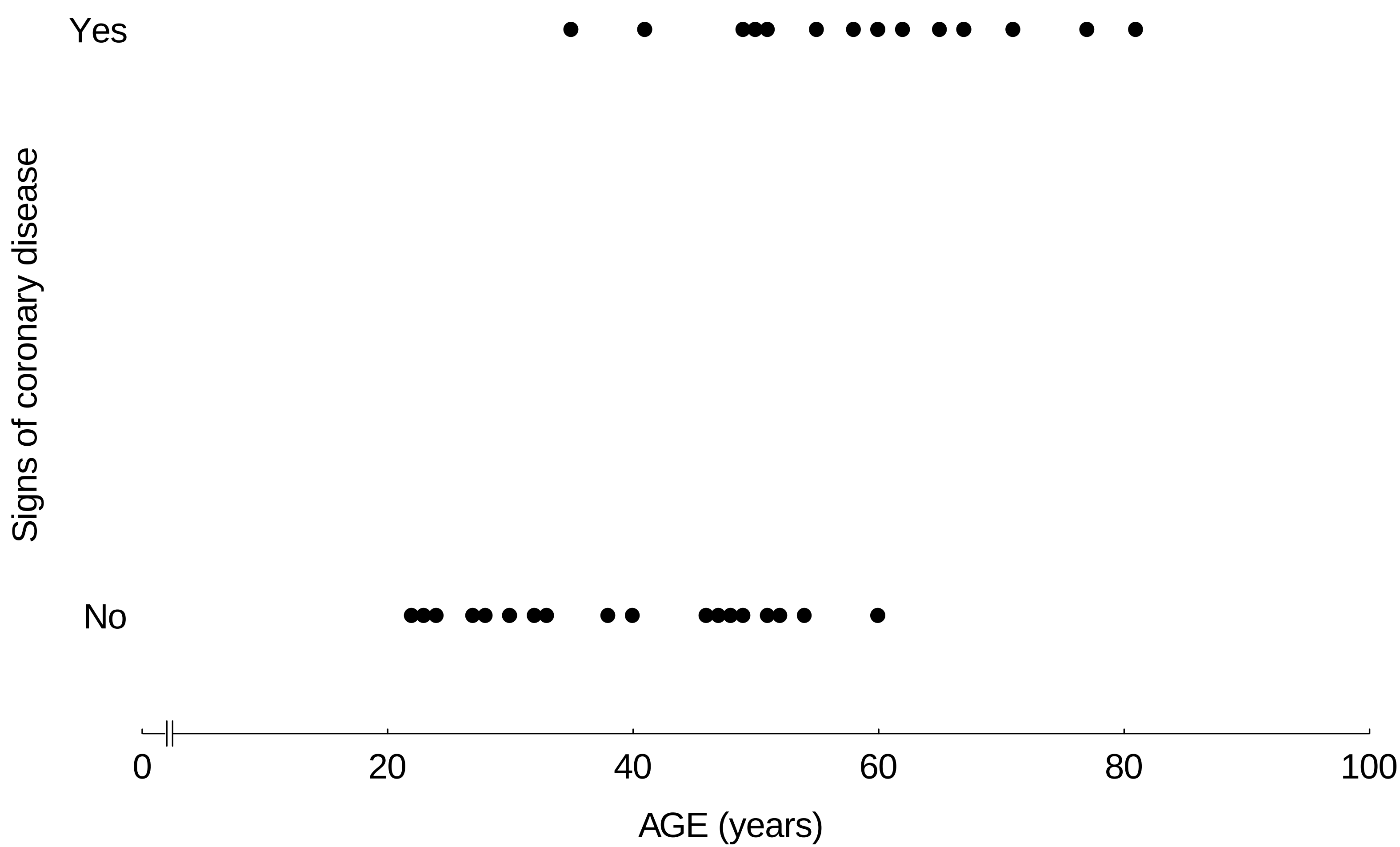
- 如果使用最小二乘法的回归模型来做二分类任务：

$$y = w_0 + \sum_{j=1}^{d} w_j x_j + u$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{X}}$$

- 基于上述模型预测的y值，即样本属于某个类的概率，会超出0到1的范围。

逻辑回归模型



逻辑回归模型

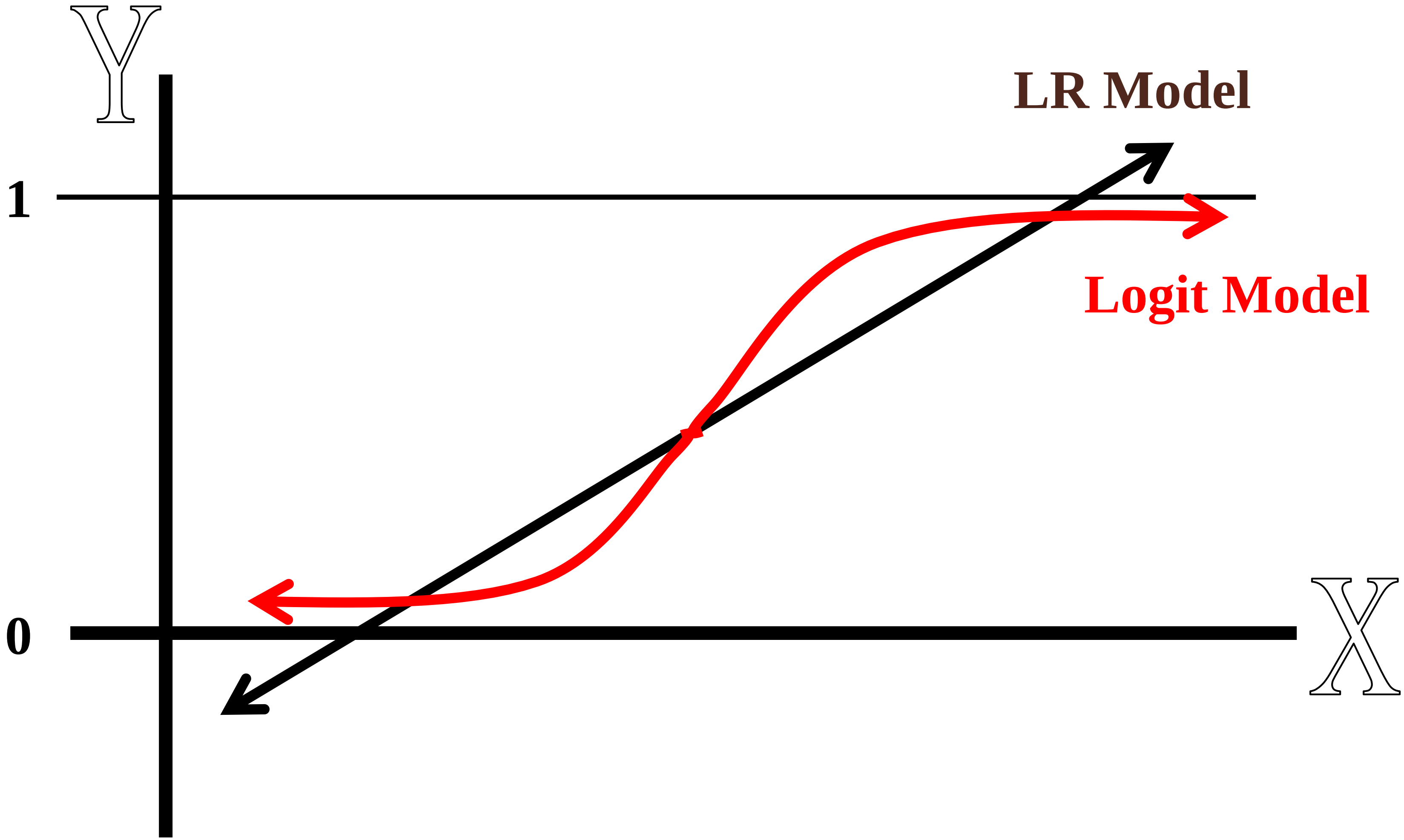
- “logit” 变换可以解决上述问题:

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = w_0 + \sum_{j=1}^{d} w_j x_j + u$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}$$

- p 是事件y发生的概率，比如：$p=p(y=1\,|\,\mathbf{X})$
- $p/(1-p)$ 称为机率比或优势比 (odds ratio)
- log[$p/(1-p)$] 是机率比的对数, 或称为 "logit"

逻辑回归模型

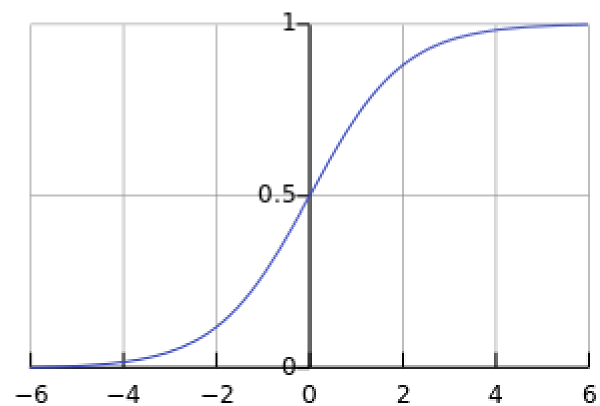


逻辑回归模型

- logistic 函数使得输出的概率值在0到1的范围内.
- 样本 X 标签为正的概率 $p(y=1|\mathbf{X})$ 是:

$$p=\frac{1}{1+e^{-w_0-\sum_{j=1}^{d}w_jx_j}}=\frac{e^{w_0+\sum_{j=1}^{d}w_jx_j}}{1+e^{w_0+\sum_{j=1}^{d}w_jx_j}}$$

$$=\frac{1}{1+e^{-\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}}=\frac{e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}}{1+e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}}}}$$



- 如果 $w_0+\sum_{j=1}^{d}w_jx_j=0$，那么 $p=0.5$
- 当 $w_0+\sum_{j=1}^{d}w_jx_j$ 很大时, p 趋近于 1
- 当 $w_0+\sum_{j=1}^{d}w_jx_j$ 很小时, p 趋近于 0

逻辑回归模型

- 最小二乘法回归模型，使用了最小二乘的公式，直接得到了最终的模型。
- 对于逻辑回归，可以使用极大似然估计，配合以一种迭代式的方法，计算出最终的模型。
- 算法：
  - 首先，随机初始化权重，并对某个样本进行预测；
  - 接着，计算这个模型在这次预测上的误差，改变权重，以提高模型在这个样本上的似然度；
  - 重复这个过程，直到模型收敛，即当前模型和上一步的模型的表现相差无几。
- 这个想法的本质是：找到一个最有可能产生你观察到的数据的参数。

逻辑回归模型

- 似然函数：$\prod_{i=1}^{n}(p_i)^{y_i}(1-p_i)^{1-y_i}$
- 极大似然法:

$$L(\tilde{\mathbf{W}})=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log p_i+(1-y_i)\log(1-p_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log\frac{p_i}{1-p_i}+\log(1-p_i)\right)$$

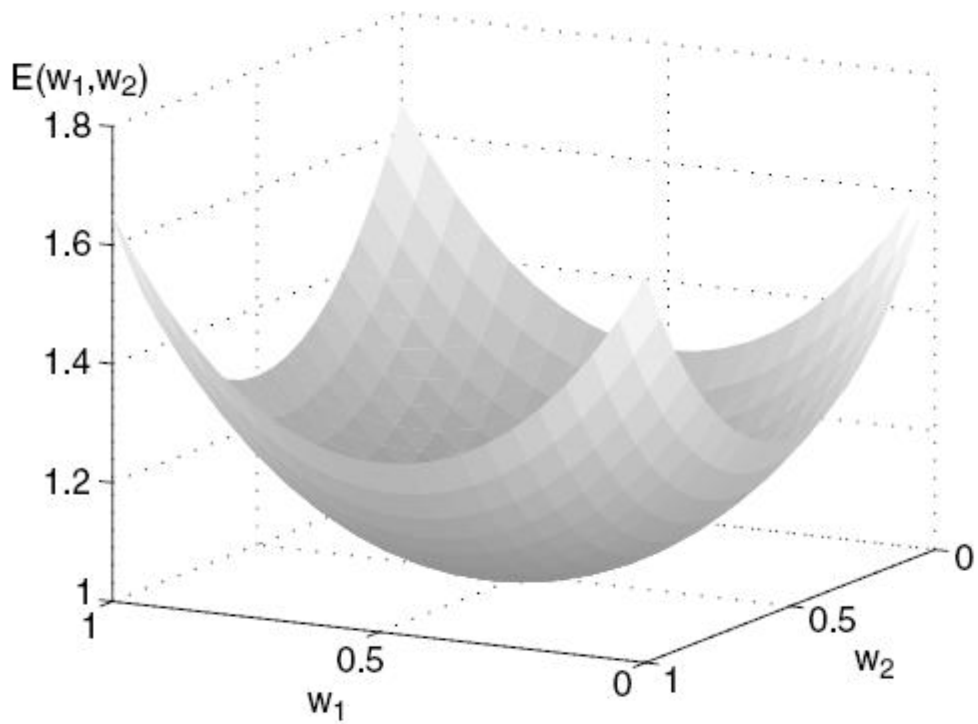
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i-\log(1+e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i})\right)$$

$$\frac{\partial L(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial\tilde{\mathbf{W}}}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i-\frac{e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i}}{1+e^{\tilde{\mathbf{W}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{X}}_i}}\right)\tilde{\mathbf{X}}_i\right]$$

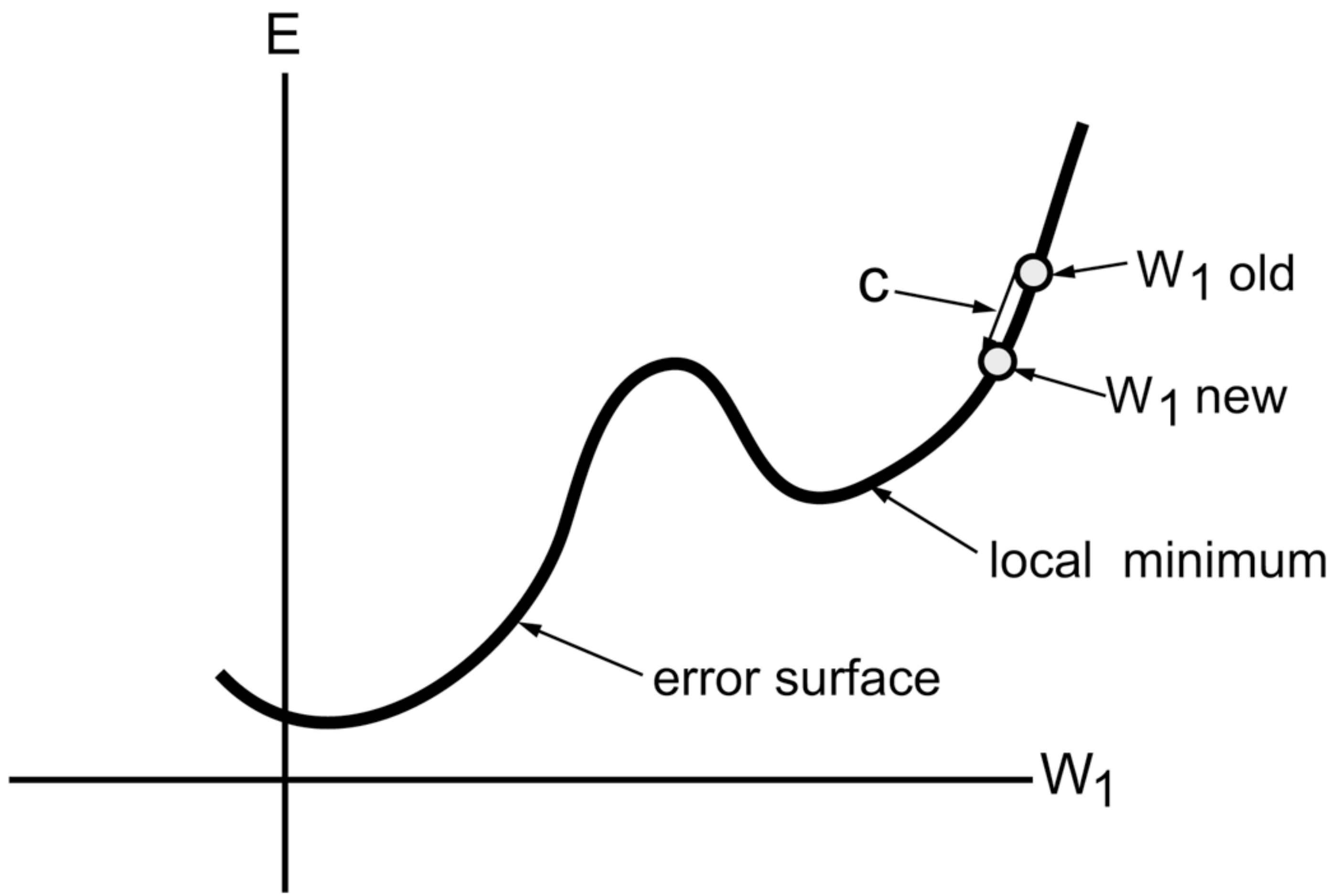
- 等价于最小化代价函数:

$$C(\tilde{\mathbf{W}})=-L(\tilde{\mathbf{W}})=-\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\log p_i+(1-y_i)\log(1-p_i)\right)$$ 交叉熵

梯度下降



梯度下降



逻辑回归模型

- 梯度下降
  - 计算梯度向量
  - 每次用梯度向量的反方向来更新权重
- 重复:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{new}^{(j)} = \tilde{\mathbf{W}}^{(j)} - \eta \frac{\partial C(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial \tilde{\mathbf{W}}^{(j)}}$$

$$= \tilde{\mathbf{W}}^{(j)} - \eta \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}}_i}}{1 + e^{\tilde{\mathbf{w}}^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}}_i}} - y_i \right) \tilde{\mathbf{X}}_i^{(j)} \right]$$

- 直至收敛。