S is unsatisfiable $\Rightarrow$ S $\vdash$ ()

采用数学归纳法证明

先定义 P(i) 表示这样一个命题：

当S中含有i个literals时，S不可满足 $\Rightarrow$ S $\vdash$ ( )

归纳法基情形：

P(1)是成立 的.

当S是含有1个literal的子句集 合时，设含有的literal为 p.

$\because$ S不可满足

$\therefore$ S只 可能为{(p), (¬p)}

$\because$ (p) 与 (¬p) 可归结出 ( )

$\therefore$ S $\vdash$ ()

若S是{(p)}，那么只需让解释 ς 中{p = True}，则S就可满足.

若S是{(¬p)} 也是同样

归纳法假设：

对于 $1 \le i \le k$，P(i)都成立 $\Rightarrow$ P(k+1)成立.

归纳证明：

$\because$ S是含有k+1个文字的子句集合，且S不可满足.

从S中选取任意literal，设选取的literal为p。将 S 分为下列3个集合

S_p：所有含有 p 的子句集合

$S_{(\neg p)}$：所有含有 ¬p 的子句集合.

R：所有不含 p 或 ¬p 的子句集合.

$\therefore$ R是含有k个 literals的子句集合

情形1：若 R不可满足，$\because$ P(k)成立.

$\therefore$ R $\vdash$ ()

$\because$ R $\subseteq$ S

$\therefore$ S $\vdash$ () 即 P(k+1)成立.

情形2：若R可满足，即存在解释 ς 使得R中的子句全为真.

注意到 ς 是R上的解释，未给定 p 的取值.

$\because$ S整体不可满足

$\therefore$ S_p. $S_{\neg p}$中存在子句使得任意解释下都不满足

若S_p 为空集. 则取解释 $\tilde{S}$并加上p的取值为假. S便可满足.

若$S_{\neg p}$为空集，则取解释 $\tilde{S}$并加上p的取值为真，S便可满足.

故S_p和$S_{\neg p}$均不能为空集，S不可满足才会成立.

$\therefore$ 存在子句(p, α)和$(\neg p, \beta)$使得p无论取何值，S都不可满足

这里α和β表示子句中其它不是p的literal

$\because$ (p, α)与$(\neg p, \beta)$不论p取何值均不能同时满足

$\therefore$ 在$\tilde{S}$解释下，α为假，β为假.

$\because$ (p, α)与$(\neg p, \beta)$可归结出(α, β)

(α, β)在解释$\tilde{S}$下无法满足.

令$R' = \{(\alpha, \beta)\} \cup R$

$\therefore$ R'无法满足，且只含有k个literal

$\because$ $P(k)$成立

$\therefore$ $R' \vdash ()$

即R'中存在子句可归结出()

$\because$ R'中的子句是属于S或由S中子句归结得到

$\therefore$ $S \vdash ()$ 即$P(k+1)$成立