Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ficha de Exercícios - Matrizes

LEI e LSIRC

Ano Letivo 2023/2024

1. Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3i & 2 & 0 \\ 1 & 1-i & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Indique o tipo de cada uma das matrizes.

   (b) Indique a(s) matriz(es):

      i. reais;
      ii. complexas;
      iii. quadradas;
      iv. retangulares;
      v. nulas;
      vi. coluna;
      vii. linha
      viii. diagonais;
      ix. identidade;
      x. triangulares superior;
      xi. triangulares inferior;
      xii. escalares.

   (c) Indentifique os elementos: a_{12}, b_{13}, c_{41}, d_{22}, e_{33}, g_{21} e h_{32}.

   (d) Identifique os elementos da diagonal principal e secundária das matrizes quadradas A, G e H.

2. Sabendo que a matriz A é do tipo (2×3) e que $a_{ij} = 2^{i+j}$, escreva-a explicitamente.

3. Escreva as matrizes A e B de ordem 3 tais que:

$$A = \begin{cases} i+j & \text{se } i \neq j \\ 2i-j & \text{se } i = j \end{cases} \quad \text{e } B = \begin{cases} i-j+2 & \text{se } i < j \\ j & \text{se } i = j \\ i^2-1 & \text{se } i > j \end{cases}$$

4. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Efetue as seguintes operações matriciais.

   (a) $2A + 3B$

   (b) $5A - 2B$

   (c) $0 \times A$

(d) $1 \times B$

(e) AB

(f) AC

(g) I_2A

(h) A^2;

(i) B^T e C^T;

(j) B^TC^T.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

   Utilize o Scilab para verificar todas as propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz, supondo $k_1 = 2$ e $k_2 = 3/2$.

   (a) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$

   (b) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

   (c) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

   (d) $0 \times A = O_3$

   (e) $1 \times A = A$.

6. Considere as seguintes matrizes

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   Utilize o Scilab para verificar as seguintes das propriedades da multiplicação de matrizes.

   (a) $(AD)C = A(DC)$

   (b) $C(B + D) = CB + CD$

   (c) $(B + D)C = BC + DC$

   (d) $O_{1\times 2}A = O_{1\times 3}$

   (e) $AO_{3\times 2} = O_{2\times 2}$

   (f) $I_2A = A$

   (g) $CI_3 = C$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Utilize o Scilab e mostre que se verificam as seguintes propriedades:

   (a) $(A^T)^T = A$;

   (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

   (c) $(AB)^T = B^TA^T$;

(d) $(kA)^T = kA^T$, supondo que $k = -1/3$.

8. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é simétrica, isto é, $A = A^T$.

9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i & 1 \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & -i & -1+i \\ -i & 0 & -5 \\ 1+i & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz conjugada e a matriz transconjugada de A e de B.

10. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i \\ 2 & i \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -i & -1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique se:

(a) A é idempotente, isto é, $A^2 = A$;

(b) A e B são permutáveis, isto é, $AB = BA$.

11. Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial:

$$(B^T X^{-1})^{-1} B^T C + (C^T B^{-1})^T = I.$$

12. Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, cada uma das seguintes equações matriciais:

(a) $AX + (X^{-1}B)^{-1} = A$;

(b) $(A^{-1}X + B)^{-1} = A$;

(c) $(A^{-1}X)^{-1} + 2A = B$;

(d) $(X^T A)^{-1} + (X^{-1}B^T)^T = I$;

(e) $A(B + X)^T = I$;

(f) $(2A^{-1}X)^{-1} + B = A$;

(g) $AX^{-1} + (XB^{-1})^{-1} = A$;

(h) $(X^T A - B)^T = CX$;

(i) $AX + (X^T B)^T = C$;

(j) $AX + (X^T B^T)^T = A$;

(k) $\left[(A^T X)^{-1} B\right]^T = (A^T)^{-1}$.

SOLUÇÕES

1. (a) A - matriz com 3 linhas e 3 colunas (3 por 3), $A_{3\times 3}$
   ou matriz de ordem 3, A_3.
   B - matriz com 1 linha e 4 colunas (1 por 4), $B_{1\times 4}$.
   C - matriz com 4 linhas e 1 coluna (4 por 1), $C_{4\times 1}$.
   D - matriz com 3 linhas e 3 colunas (3 por 3), $D_{3\times 3}$.
   E - matriz com 3 linhas e 3 colunas (3 por 3), $E_{3\times 3}$.
   F - matriz com 2 linhas e 3 colunas (2 por 2), $F_{2\times 3}$.
   G - matriz com 2 linhas e 2 colunas (3 por 2), $G_{2\times 2}$.
   H - matriz com 3 linhas e 3 colunas (3 por 3), $H_{3\times 3}$.

   (b) i. A, B, C, D, F, G;
      ii. E, H;
      iii. A, D, E, G, H;
      iv. B, C, F;
      v. F;
      vi. C;
      vii. B;
      viii. A, E;
      ix. A;
      x. A, E, G;
      xi. A, E, H;
      xii. $A = I_3$.

   (c) $a_{12} = 0$, $b_{13} = 3$, $c_{41} = -1$, $d_{22} = 1/3$, $e_{33} = 5i$, $g_{21} = 0$ e $h_{32} = 1 - i$.

   (d) Diagonal principal: $a_{ii} = 1, i = 1, 2, 3$; $g_{11} = 2, g_{22} = 1$; $h_{11} = 1, h_{22} = 2, h_{33} = 2$;
   Diagonal secundária: $a_{31} = 0, a_{22} = 1, a_{13} = 0$; $g_{21} = 0, g_{12} = 4$; $h_{31} = 1, h_{22} = 2, h_{13} = 0$.

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

4. (a) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

   (b) $5A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 27 & -34 \end{bmatrix}$

   (c) $0 \times A = O_{2\times 2}$

   (d) $1 \times B = B$

(e) $AB = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 39 & -28 \end{bmatrix}$

(f) $AC = \begin{bmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -5 & -33 & 24 \end{bmatrix}$

(g) $I_2 A = A$

(h) $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{bmatrix}$

(i) $B^T = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ e $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(j) $B^T C^T$ impossível

5. -

6. -

7. -

8. -

9. $\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & 1 \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2-i & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\overline{B} = \begin{bmatrix} 0 & i & -1-i \\ i & 0 & -5 \\ 1-i & 5 & 0 \end{bmatrix}$,
$B^* = \begin{bmatrix} 0 & i & 1-i \\ i & 0 & 5 \\ -1-i & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

10. (a) não
    (b) não

11. $X = C^{-1} - B^{-T}$.

12. (a) $X = (A + B^{-1})^{-1} A$;
    (b) $X = I - AB$;
    (c) $X = A(B - 2A)^{-1}$ ou $X = (BA^{-1} - 2I)^{-1}$;
    (d) $X = A^{-T} + B^T$;
    (e) $X = A^{-T} - B$;
    (f) $X = A(A - B)^{-1}/2$;
    (g) $X = A^{-1}(A + B)$;
    (h) $X = (A^T - C)^{-1} B^T$;
    (i) $X = (A + B^T)^{-1} C$;
    (j) $X = (A + B)^{-1} A$;
    (k) $X = A^{-T} BA$.