Álgebra Linear e Geometria Analítica

Matrizes

LEI e LSIRC

2023/2024

Matriz

Definição

Chama-se matriz do tipo m por n a uma tabela de $m \times n$ elementos (números, polinómios, funções...) dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde, a_{ij} representa o elemento da linha i e da coluna j, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$. Usualmente a matriz representa-se por uma letra maiúscula e os seus elementos por uma letra minúscula.

Exemplos Aplicação

1. Computação Gráfica;
2. Criptografia;
3. Inteligência Artificial;
4. Circuitos Elétricos;
5. Sistemas de Controle;
6. Reconhecimento Facial.

Generalidades

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 18 & 16 \\ 16 & 10 \\ 8 & 5 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}$

1. 8 está na 3ª linha e na 1ª coluna, portanto, $a_{31} = 8$.
2. A é do tipo 4×2.
3. A tem $4 \times 2 = 8$ elementos.

Generalidades

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{3} \\ \sqrt{2} & -3 & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

e $D = \begin{bmatrix} 2i & -5 \\ -3 & 3i \end{bmatrix}$.

1. A é do tipo 2×2 e $a_{11} = \frac{1}{2}$.
2. B é do tipo 3×2 e $b_{32} = 5$.
3. C é do tipo 3×4 e $c_{23} = -\frac{3}{5}$.
4. D é do tipo 2×2 e $d_{22} = 3i$.

Generalidades

Exemplo

Considere matrizes $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2i & -5 \\ -3 & 3i \end{bmatrix}$.

1. Defina as matrizes B e D no Scilab.
2. Extraia os elementos b_{32} e d_{22}.

Scilab

```
//Definição das matrizes

 -->B=[2 1; 3 -1;7 5]
 B  =
   2.   1.
   3.  -1.
   7.   5.
 -->D=[2*%i -5; -3 3*%i]
 D  =
   2.i   -5.
  -3.     3.i

//Extração dos elementos

-->B(3,2)
 ans  =
   5.
-->D(2,2)
 ans  =
   3.i
```

Generalidades

Exemplo

Considere matrizes $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2i & -5 \\ -3 & 3i \end{bmatrix}$ definidas no Scilab.

1. Extraia a 1ª linha da matriz B.
2. Extraia a 2ª coluna da matriz D.

Scilab

```
//Extração de linha e coluna

 -->B(1,:)
 ans  =

   2.    1.

 -->D(:,2)
 ans  =

  -5.
   3.i
```

Generalidades

Definição

Em matrizes do mesmo tipo ($m = n$), elementos homólogos são os que têm índices iguais, ou seja, os elementos que ocupam a mesma posição na matriz correspondente.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & -9 & 3 \\ 6 & 8 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 & 3 \\ 45 & 11 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 13 & 22 & 19 & 17 \end{bmatrix}$$

Generalidades

Definição

Duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ são iguais se houver igualdade de elementos homólogos, isto é:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & x & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \\ y & 2 & 1 \end{bmatrix}$. As matrizes A e B são iguais se e só se: $x = -5$ e $y = 2$.

Tipos de matrizes

Definição

Matriz quadrada ou matriz de ordem n é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, é uma matriz do tipo $n \times n$.
Numa matriz quadrada A, designam-se por elementos principais da matriz A os elementos a_{ii}, qualquer que seja o i.
O conjunto dos elementos principais designa-se por diagonal principal.
O conjunto dos elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ designa-se por diagonal secundária.

Tipos de matrizes

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & -9 & 3 \\ 6 & 8 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 9 & 7 \end{bmatrix}$. A matriz é de ordem 4, a diagonal principal é formada pelos elementos 1, 10, 11, 7 e a diagonal secundária é formada pelos elementos -2, -9, 8, 3.

Tipos de matrizes

Definição

Matriz retangular, é uma matriz que não é quadrada, isto é, cujo número de linhas é diferente do número de colunas. Portanto, é uma matriz do tipo $m \times n$, com $m \neq n$.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (matriz do tipo 2×3)
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (matriz do tipo 3×4)

Scilab

```
--> A=[2 3+%i 1; 0 2 -1]
 A  =

   2.    3. + i      1.
   0.    2.         -1.

//tipo da matriz A
--> size(A)
 ans  =

   2.    3.
```

Tipos de matrizes

Definição

Matriz nula, é uma matriz onde todos os seus elementos são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, qualquer que seja i e j. A matriz nula representa-se, usualmente, pela letra O.

Exemplo

1. $O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Scilab

```
--> O=zeros(3,2)
 O  =


   0.    0.
   0.    0.
   0.    0.

--> O=zeros(3,3)
 O  =


   0.    0.    0.
   0.    0.    0.
   0.    0.    0.
```

Tipos de matrizes

Definição

Matriz coluna, é uma matriz com uma única coluna, isto é, do tipo $m \times 1$.

Definição

Matriz linha, é uma matriz com uma única linha, isto é, do tipo $1 \times n$.

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ matriz (coluna) do tipo 3×1.
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matriz (linha) do tipo 1×4.

Matrizes quadradas

Definição

Matriz diagonal, é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$, qualquer que seja $i \neq j$, isto é, onde todos os elementos que não pertencem à sua diagonal principal são nulos.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ matriz diagonal}$$

de ordem 3.

Scilab

```
--> A=[2 0 0; 0 -1 0; 0 0 3]
 A  =

   2.    0.    0.
   0.   -1.    0.
   0.    0.    3.

// Elementos da diagonal principal
--> diag(A)
 ans  =

   2.
  -1.
   3.
```

Matrizes quadradas

Definição

Matriz identidade, é uma matriz diagonal onde $a_{ii} = 1$, qualquer que seja i, isto é, onde todos os elementos principais são iguais a um. A matriz identidade de ordem n representa-se usualmente pela letra I_n.

Exemplo

1. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz identidade de ordem 3.
2. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz identidade de ordem 2.

Scilab

```
--> I=eye(3,3)
 I  =


   1.   0.   0.
   0.   1.   0.
   0.   0.   1.
--> I=eye(2,2)
 I  =


   1.   0.
   0.   1.
```

Matrizes quadradas

Definição

Matriz escalar, é uma matriz diagonal onde $a_{ii} = k$ (escalar, $k \in \mathbb{C}$), qualquer que seja i, isto é, onde todos os elementos principais são iguais. Pode representar-se por kI_n.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix} = 2iI_3, k = 2i.$$

Scilab

```
--> A=2*%i*eye(3,3)
 A  =

   2.i     0.      0.
   0.      2.i     0.
   0.      0.      2.i
```

Matrizes quadradas

Definição

Matriz triangular superior, é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$, qualquer que seja $i > j$, isto é, onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} -1 & 4i & 3 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é matriz triangular superior de ordem 3.

Scilab

```
--> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
 A  =

   1.   2.   3.
   4.   5.   6.
   7.   8.   9.

//Extrair a matriz triangular
--> triu(A)
 ans  =

   1.   2.   3.
   0.   5.   6.
   0.   0.   9.
```

Matrizes quadradas

Definição

Matriz triangular inferior, é uma matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$, qualquer que seja $i < j$, isto é, onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Exemplo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Scilab

```
--> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
 A  =

   1.   2.   3.
   4.   5.   6.
   7.   8.   9.

//Extrair a matriz triangular
--> tril(A)
 ans  =

   1.   0.   0.
   4.   5.   0.
   7.   8.   9.
```

Adição de matrizes

Definição

A adição de matrizes só está definida se as matrizes forem do mesmo tipo. Os elementos da matriz soma obtêm-se pela soma dos elementos homólogos das matrizes parcelas, ou seja, se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ então $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -3 & 4i \end{bmatrix}$, então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ -3 & 4i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4i-3 \end{bmatrix}.$$

Adição de matrizes

Scilab

```
--> A=[1 0;2 4]; B=[1 4 5;3 3 4];C=[0 0 2 3; 5 6 7 9];
D=[2 2 9; 6 5 3];

--> A
 A  =
   1.   0.
   2.   4.
--> B
 B  =
   1.   4.   5.
   3.   3.   4.
--> C
 C  =
   0.   0.   2.   3.
   5.   6.   7.   9.
--> D
 D  =

   2.   2.   9.
   6.   5.   3.
```

Scilab

```
//Adição de matrizes
--> A+B

Inconsistent row/column dimensions.

--> B+D
 ans  =

   3.   6.   14.
   9.   8.   7.
```

Nota

Não podemos adicionar matrizes de tipos diferentes.

Adição de matrizes

Propriedades da adição de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ matrizes do mesmo tipo $m \times n$, tem-se que:

1. $A + B = B + A$ (comutativa).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativa).
3. $A + O_{m \times n} = A$ (elemento neutro).
4. $A + (-A) = -A + A = O_{m \times n}$ (elemento oposto ou simétrico).

Adição de matrizes

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

$B + A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[1 0;2 4]
 A  =
   1.   0.
   2.   4.
--> B=[-1 2; 3 -2]
 B  =
  -1.   2.
   3.  -2.
--> A+B
 ans  =
   0.   2.
   5.   2.
--> B+A
 ans  =
   0.   2.
   5.   2.
```

Adição de matrizes

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

2) $(A+B)+C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[1 0;2 4];

--> B=[-1 2; 3 -2];

--> C=[1 3 ; -3 1];

--> (A+B)+C
 ans  =
   1.   5.
   2.   3.

--> A+(B+C)
 ans  =

   1.   5.
   2.   3.
```

Adição de matrizes

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ e $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3) $A + O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$

4) $-A + A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}.$

$A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}.$

Scilab

```
--> A=[1 0;2 4];

--> [m,n]=size(A);

--> A+zeros(m,n)
 ans  =

   1.   0.
   2.   4.


--> -A+A
 ans  =

   0.   0.
   0.   0.
```

Subtração de matrizes

Definição

A diferença, $A-B$, entre duas matrizes do mesmo tipo obtém-se pela subtração dos elementos homólogos das respetivas matrizes e pode ser vista como a soma da primeira com a matriz simétrica da segunda matriz, isto é, $A-B=A+(-B)$.

Exemplo

Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Temos: $A-B=A+(-B)=$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scilab

```
--> A=[1 3 0; 2 -1 2];

-->B=[ 3 2 1; -1 0 1];

--> A-B
 ans  =
  -2.    1.   -1.
   3.   -1.    1.

--> A+(-B)
 ans  =
  -2.    1.   -1.
   3.   -1.    1.
```

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e seja k um escalar ($k \in \mathbb{C}$). O produto do escalar k pela matriz A, kA, é uma matriz cujos elementos são iguais ao produto do escalar por cada elemento da matriz A, isto é, $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 4+i & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Temos: $3iA = 3i\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 4+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3i \\ 12i-3 & 0 \end{bmatrix}$.

$-\frac{1}{4}B = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[2*%i 1;4+%i 0]
 A  =

   2.i          1.
   4. + i       0.

--> 3*%i*A
 ans  =

  -6.           3.i
  -3. + 12.i    0.
```

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Propriedades

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$ e k_1, k_2 dois escalares ($k_1, k_2 \in \mathbb{C}$), tem-se que:

1. $k_1(A + B) = k_1 A + k_1 B$.
2. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$.
3. $k_1(k_2 A) = (k_1 k_2)A$.
4. $0 \times A = O_{m \times n}$.
5. $1 \times A = A$.

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Temos:

$$3(A+B) = 3A + 3B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$(2+3)A = 2A + 3A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = 5A.$$

Scilab

```
--> A=[1 0; 1 2];
-->  B=[1 -2; -3 2];

--> 3*(A+B)
 ans  =
   6.  -6.
  -6.   12.

--> (2+3)*A
 ans  =
   5.   0.
   5.   10.
```

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Temos:

$$2(3A) = 2\left(3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = 6A.$$

$$0 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}.$$

$$1 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Scilab

```
--> A=[1 0; 1 2];
-->  B=[1 -2; -3 2];

--> 2*(3*A)
 ans  =
   6.   0.
   6.   12.

--> 0*A
 ans  =
   0.   0.
   0.   0.

--> 1*A
 ans  =
   1.   0.
   1.   2.
```

Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, então, $A \times B = AB = [c_{ij}]_{m \times p} = C$, onde, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots p$. Ou seja, o elemento c_{ij} da matriz C é a soma dos produtos que se obtêm multiplicando os elementos da linha i da primeira matriz (a_{ik}) pelos elementos da coluna j da segunda matriz (b_{kj}).

Nota

Apenas é possível efetuar o produto de duas matrizes quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Multiplicação de matrizes

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 \times 1 + 0 \times 1 & -1 \times 2 + 0 \times 1 \\ 1 \times 1 + 4 \times 1 & 1 \times 2 + 4 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 0 & -2 + 0 \\ 1 + 4 & 2 + 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Scilab

```
--> A=[-1 0;1 4]
 A  =

  -1.   0.
   1.   4.

--> B=[1 2;1 1]
 B  =

   1.   2.
   1.   1.

--> A*B
 ans  =

  -1.  -2.
   5.   6.
```

Multiplicação de matrizes

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Então:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times (1+i) + 3 \times 4 & 2 \times 0 + 3 \times 1 & 2 \times (-2) + 3 \times (-1) \\ -i \times (i+1) + 0 \times 4 & -i \times 0 + 0 \times 1 & -i \times (-2) + 0 \times (-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2i+12 & 0+3 & -4-3 \\ 1-i+0 & 0 & -2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+2i & 3 & -7 \\ 1-i & 0 & -2i \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de matrizes

Scilab

```
--> A=[2 3; -%i 0]
 A  =
   2.      3.
  -i       0.

--> B=[1+%i 0 -2; 4 1 -1]
 B  =
   1. + i      0.  -2.
   4.          1.  -1.

--> A*B
 ans  =
   14. + 2.i   3.  -7.
   1. - i      0.   2.i

--> B*A

Inconsistent row/column dimensions.
```

Multiplicação de matrizes

Propriedades

Supondo definidas as somas e os produtos apresentados, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Associativa).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva à esquerda).
3. $(B + C)A = BA + CA$ (Distributiva à direita).
4. $OA = O$ e $AO = O$ (Elemento absorvente).
5. $I_n A = AI_n = A$ (Elemento neutro de matrizes quadradas).

Multiplicação de matrizes

Scilab

```
A=[%i 1; 2 0]; B=[1 0; %i+1 3];
C=[2 3 ; 4 0];

--> (A*B)*C
 ans  =
   14. + 4.i   3. + 6.i
   4.          6.

--> A*(B*C)
 ans  =
   14. + 4.i   3. + 6.i
   4.          6.

--> A*(B+C)
 ans  =
   5. + 4.i   3. + 3.i
   6.         6.

--> A*B+A*C
 ans  =
   5. + 4.i   3. + 3.i
   6.         6.
```

Scilab

```
--> (B+C)*A
 ans  =
   6. + 3.i   3.
   5. + 5.i   5. + i

--> B*A+C*A
 ans  =
   6. + 3.i   3.
   5. + 5.i   5. + i

--> zeros(2,2)*A, A*zeros(2,2)
 ans  =
   0.   0.
   0.   0.
 ans  =
   0.   0.
   0.   0.

--> eye(2,2)*A, A*eye(2,2)
 ans  =
   i      1.
   2.     0.
 ans  =
   i      1.
   2.     0.
```

Multiplicação de matrizes

Nota

O produto de matrizes não goza da propriedade comutativa, isto é, em geral $AB \neq BA$. Se $AB = BA$, as matrizes A e B dizem-se <u>permutáveis ou comutáveis</u>.

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Então:

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, logo as matrizes são matrizes permutáveis.

Multiplicação de matrizes

Definição

Chama-se potência de expoente k (número inteiro positivo) de uma matriz quadrada A e designa-se por A^k, ao produto de A por si própria k vezes.

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Então:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4-6 & 4+0 \\ -6+0 & -6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Scilab

```
--> A=[2 2;-3 0]
 A  =


   2.   2.
  -3.   0.


--> A^2
 ans  =


  -2.   4.
  -6.  -6.
```

Multiplicação de matrizes

Definição

Matriz idempotente, é uma matriz quadrada onde $A^2 = A$. Neste caso, se A é idempotente, temos que: $A^2 = A^3 = A^4 = \ldots = A^k = A$.

Definição

Matriz nilpotente, é uma matriz quadrada onde $A^p = O$, para algum p inteiro positivo e $A^k \neq O$, para $k < p$.

Transposição de matrizes

Definição

A transposição de matrizes é uma operação que a cada matriz A do tipo $m \times n$, faz corresponder uma outra matriz do tipo $n \times m$, que se chama transposta de A e que se representa por A^T, e resulta da matriz A trocando as linhas pelas colunas ou vice-versa.
Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, então, $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[2 1; -2 3; 5 -4; 6 7]
 A  =
   2.   1.
  -2.   3.
   5.  -4.
   6.   7.
//Matriz transposta de A
--> A'
 ans  =
   2.  -2.   5.   6.
   1.   3.  -4.   7.
```

Transposição de matrizes

Propriedades

Supondo definidas as somas e os produtos apresentados, e sendo k um escalar ($k \in \mathbb{C}$), então:

1. $\left(A^T\right)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(AB)^T = B^T A^T$.
4. $(kA)^T = kA^T$.
5. $I_n^T = I_n$.

Outras operações com matrizes

Definição

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se matriz conjugada de A, e representa-se por $\bar{A} = \bar{a}_{ij}$, à matriz, em que $\bar{a}_{ij}$ representa o conjugado do número complexo a_{ij}.

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3i & -2+i \end{bmatrix}$, então $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3i & -2-i \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[1 0; 3*%i -2+%i]
 A  =

   1.      0.
   3.i   -2. + i

//Matriz conjugada de A
--> conj(A)
 ans  =

   1.      0.
  -3.i   -2. - i
```

Outras operações com matrizes

Definição

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se matriz transconjugada de A, e representa-se por A^*, à matriz $A^* = (\bar{A})^T = \bar{A}^T$, de elemento genérico $a^*_{ji} = \bar{a}_{ji}$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3i & -2+i \end{bmatrix}$ então $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3i \\ 0 & -2-i \end{bmatrix}$.

Scilab

```
--> A=[1 0; 3*%i -2+%i]
 A  =

   1.      0.
   3.i   -2. + i

//Matriz transconjugada de A
--> conj(A.')
 ans  =

   1.   -3.i
   0.   -2. - i
```

Matriz inversa

Definição

Chama-se matriz inversa de uma matriz quadrada A de ordem n à matriz B, que multiplicada por A dá a matriz identidade, isto é $AB = BA = I_n$. Quando B existe, designa-se por A^{-1} e a igualdade anterior vem $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
Uma matriz que admite inversa diz-se invertível, regular ou não singular. A inversa de uma matriz, quando existe, é única.

Nota

Nem todas as matrizes quadradas admitem inversa! Neste caso, diz-se que a matriz é singular.

Matriz inversa

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$.

Temos que:

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, dizemos que as matrizes A e B são invertíveis e inversas uma da outra.

Scilab

```
--> A=[11 3;7 2]
 A  =
   11.   3.
   7.    2.
--> B=[2 -3; -7 11]
 B  =
   2.  -3.
  -7.   11.
--> A*B
 ans  =
   1.   0.
   0.   1.
--> B*A
 ans  =
   1.   0.
   0.   1.
//Matriz inversa de A
--> A^-1
 ans  =
   2.  -3.
  -7.   11.
--> B^-1
 ans  =
   11.   3.
   7.    2.
```

Inversão de matrizes

Propriedades

Sejam A e B duas matrizes invertíveis da mesma dimensão, k um escalar não nulo e p um número inteiro positivo, tem-se que:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$.
4. $(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p = A^{-p}$.

Matriz simétrica e matriz ortogonal

Definição

Matriz simétrica, é uma matriz quadrada que coincide com a sua transposta, isto é, $A^T = A$.

Nota

Não se deve confundir matriz simétrica com a simétrica da matriz A, a matriz $-A$.

Definição

Matriz ortogonal, é uma matriz cuja inversa coincide com a sua transposta, isto é $A^{-1} = A^T$. Esta igualdade é equivalente a ter $AA^T = A^T A = I_n$.

Matriz simétrica e matriz ortogonal

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Então $A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Temos que

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \frac{8}{9} & \frac{\sqrt{8}}{9} - \frac{\sqrt{8}}{9} \\ \frac{\sqrt{8}}{9} - \frac{\sqrt{8}}{9} & \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Logo, A^T é a matriz inversa da matriz A, ou seja, A é ortogonal.

Matriz simétrica

Propriedades

1. Qualquer que seja a matriz A do tipo m por n, AA^T e A^TA são simétricas, ou seja $(AA^T)^T = AA^T$ e $(A^TA)^T = A^TA$.
2. Qualquer que seja a matriz A, quadrada de ordem n, $A + A^T$ é simétrica, ou seja $(A + A^T)^T = A + A^T$.

Equações matriciais

Definição

Uma equação matricial envolve matrizes com as suas operações.

Exemplo

Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial: $3A - 2X = B$.

$$3A - 2X = B \Leftrightarrow -2X = B - 3A \Leftrightarrow 2X = 3A - B \Leftrightarrow X = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}B.$$

Equações matriciais

Exemplo

Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial: $AX - 3B = B$.

$AX - 3B = B \Leftrightarrow AX = B + 3B \Leftrightarrow AX = 4B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(4B) \Leftrightarrow IX = 4A^{-1}B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X = 4A^{-1}B$.

Exemplo

Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial: $A\left(X^{-1} - B\right) = O$.

$A\left(X^{-1} - B\right) = O \Leftrightarrow AX^{-1} - AB = O \Leftrightarrow AX^{-1} = AB \Leftrightarrow A^{-1}AX^{-1} = A^{-1}AB \Leftrightarrow$
$IX^{-1} = IB \Leftrightarrow \left(X^{-1}\right)^{-1} = B^{-1} \Leftrightarrow X = B^{-1}$.

Equações matriciais

Exemplo

Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial: $(X^T - A)^{-1} = C$.

$(X^T - A)^{-1} = C \Leftrightarrow \left((X^T - A)^{-1}\right)^{-1} = C^{-1} \Leftrightarrow X^T - A = C^{-1} \Leftrightarrow X^T = C^{-1} + A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (X^T)^T = (C^{-1} + A)^T \Leftrightarrow X = C^{-T} + A^T$.

Exemplo

Resolva, em ordem a X, e supondo definidas todas as operações apresentadas, a seguinte equação matricial: $(BX^T)^T = X - A$.

$(BX^T)^T = X - A \Leftrightarrow XB^T - X = -A \Leftrightarrow X(B^T - I) = -A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow X(B^T - I)(B^T - I)^{-1} = -A(B^T - I)^{-1} \Leftrightarrow XI = -A(B^T - I)^{-1} \Leftrightarrow X = -A(B^T - I)^{-1}$.

Operações de Jacobi

Definição

Designam-se por operações elementares ou operações de Jacobi efetuadas sobre as filas (linhas ou colunas) de uma matriz, as seguintes operações:

1. Troca da posição relativa de duas filas (linhas ou colunas) paralelas.
2. Multiplicação (ou divisão) de todos os elementos de uma qualquer fila (linha ou coluna) por um escalar k não nulo.
3. Substituição dos elementos de uma qualquer fila (linha ou coluna) pela sua soma com os elementos correspondentes de outra fila paralela, mesmo que previamente multiplicados ou divididos por um escalar k não nulo.

Operações de Jacobi

Exemplo

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \underset{l_1 \longleftrightarrow l_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (troca de linhas)
2. $B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{c_1 \longleftrightarrow c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (troca de colunas)
3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \underset{l_2 \longrightarrow l_2 + l_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 9 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (substituição dos elementos de um linha pela sua soma com os elementos correspondeste de uma outra linha)

Operações de Jacobi

Definição

Dadas as matrizes A e B, do mesmo tipo, diz-se que a matriz B é equivalente à matriz A, e representa-se por $B \sim A$, se for possível transformar A em B através de uma sucessão de operações elementares.

Exemplo

$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \longleftrightarrow l_3}{\sim} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \to \frac{1}{2} l_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = B$. Logo as matrizes A e B são equivalentes.

Condensação de uma matriz

Definição

O método da condensação de uma matriz é um processo de transformação de uma matriz noutra equivalente em que figure uma submatriz triangular (usualmente superior) da maior ordem possível, utilizando as operações elementares sobre as filas de uma matriz.

Exemplo

Após ter-se efetuado uma sucessão de operações elementares, transformamos a matriz A e obtivemos a matriz B, uma matriz triangular superior, cujos elementos principais são todos diferentes de zero.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = B.$$

Condensação de uma matriz

Passos para condensar uma matriz

1. Efetuar operações elementares por forma a obter $a_{11} = 1$ (elemento pivot) .
2. Efetuar operações elementares, usando a linha 1, por forma a obter: $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0, \ldots, a_{m1} = 0$ (elementos abaixo de a_{11}).
3. Efetuar operações elementares usando a linha 2, por forma a obter: $a_{32} = 0$, $a_{42} = 0, \ldots, a_{m2} = 0$ (elementos abaixo de a_{22}).
4. Efetuar operações elementares, usando a linha 3, por forma a obter: $a_{43} = 0$, $a_{53} = 0, \ldots, a_{m3} = 0$ (elementos abaixo de a_{33}).
5. Efetuar operações elementares, usando a linha 4, por forma a obter: $a_{54} = 0$, $a_{64} = 0, \ldots, a_{m4} = 0$ (elementos abaixo de a_{44}).
6. O procedimento repete-se até obtenção de uma matriz triangular.

Condensação de uma matriz

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \longleftrightarrow l_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to 2l_1 + l_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{l_3 \to 4l_1 + l_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 14 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_3 \to -2l_2 + l_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Dependência e independência linear

Definição

Chama-se combinação linear das linhas de uma matriz $A_{m\times n}$ a uma expressão da forma:

$$a_1L_1 + a_2L_2 + \ldots + a_mL_m$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são escalares ($a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, m$).

Definição

Chama-se combinação linear das colunas de uma matriz $A_{m\times n}$ a uma expressão da forma:

$$a_1C_1 + a_2C_2 + \ldots + a_nC_n$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são escalares ($a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Dependência e independência linear

Scilab

```
--> A=[4 2;-1 5]
 A  =
   4.   2.
  -1.   5.

--> A(1,:)
 ans  =
   4.   2.

--> A(2,:)
 ans  =
  -1.   5.

--> 2*A(2,:)
 ans  =
  -2.   10.

// L_1+2L_2  é uma combinação
// linear das linhas de A

--> A(1,:)+2*A(2,:)
 ans  =
   2.   12.
```

Scilab

```
--> B=[3 3 1;2 0 -6;1 -2 1]
 B  =
   3.   3.   1.
   2.   0.  -6.
   1.  -2.   1.

// 2L_1+3L_2-L_3 é uma combinação
// linear das linhas de B

--> 2*B(1,:)+3*B(2,:)-B(3,:)
 ans  =

   11.   8.  -17.
```

Dependência e independência linear

Definição

Diz-se que as m linhas, $L_1, L_2, \ldots, L_m$, de uma matriz são linearmente dependentes, se existem constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$, não todas nulas, tais que:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + \ldots + a_m L_m = [0\ 0 \ldots 0]_{1 \times n}$$

Neste caso, uma das linhas é combinação linear das outras.
Caso contrário, se $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, então, diz-se que as linhas são linearmente independentes.
Neste caso, nenhuma das linhas é combinação linear das outras.

Dependência e independência linear

Scilab

```
--> A=[1 -2;-2 4]
 A  =
   1.  -2.
  -2.   4.

--> 2*A(1,:)
 ans  =

   2.  -4.

--> A(2,:)+2*A(1,:)
 ans  =
   0.   0.

// As linhas da matriz A são
// linearmente dependentes porque
    2*L_1+1*L_2=[0 0]
```

Scilab

```
--> B=[1 3 4;-1 -3 -4;2 7 10]
 B  =
   1.   3.   4.
  -1.  -3.  -4.
   2.   7.   10.

--> B(1,:)
 ans  =
   1.   3.   4.

--> B(2,:)
 ans  =
  -1.  -3.  -4.

--> B(1,:)+B(2,:)
 ans  =
   0.   0.   0.

// As linhas da matriz B são
// linearmente dependente
// uma vez que
    1*L_1+1*L2+0*L_3=[0 0 0]
```

Característica de uma matriz

Definição

Chama-se característica de uma matriz $A_{m\times n}$, e representa-se por $r(A)$ ou $car(A)$, ao número máximo de filas (linhas ou colunas) paralelas linearmente independentes, isto é, que não se podem obter como combinação linear umas das outras.
Note-se que $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Scilab

```
--> A=[1 0;1 0]
 A  =
   1.   0.
   1.   0.

// Característica de A
--> rank(A)
 ans  =

   1.
```

Scilab

```
--> B=eye(3,3)
 B  =
   1.   0.   0.
   0.   1.   0.
   0.   0.   1.

//Característica de B
--> rank(B)
 ans  =

   3.
```

Característica de uma matriz

Nota

1. Para o cálculo da característica de uma matriz, e consequentemente o estudo da dependência e independência, vai-se utilizar o método de condensação de matrizes conjuntamente com alguns teoremas.
2. Mostra-se que é indiferente o estudo da característica de uma matriz feito com base nas suas linhas ou nas suas colunas e que a característica de uma matriz é única.

Característica de uma matriz

Teorema

Seja T uma matriz triangular (inferior ou superior) de ordem n, e suponhamos que todos os elementos principais são diferentes de zero. Então, as filas paralelas de T são linearmente independentes e $r(T) = n$.

Teorema

Seja T uma matriz triangular (inferior ou superior) de ordem n, com algum elemento principal nulo. Então, as filas paralelas de T são linearmente dependentes e $r(T) < n$.

Característica de uma matriz

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Temos que:

- A matriz A é triangular (superior), de ordem 3.
- Os elementos principais de A (ou seja, os elementos 1, 6 e 2) são todos não nulos.

Então, as 3 linhas de A são linearmente independentes e $r(A) = 3$.

Característica de uma matriz

Exemplo

Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Temos que:

- A matriz B é triangular (superior), de ordem 3.
- Um dos elementos principais de B é nulo.

Então, as linhas de B são linearmente dependentes e $r(B) < 3$, mas, as duas primeiras linhas de B são linearmente independentes, pois nenhuma delas é combinação linear da outra, existe uma submatriz quadrada de ordem 2 triangular superior com elementos principais não nulos, donde $r(B) = 2$.

Característica de uma matriz

Exemplo

Considere as matrizes $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Indique a característica de cada uma das matrizes.

$r(C) = 1$, $r(D) = 1$, $r(F) = 1$ e $r(E) = 1$.

Cálculo da inversa de uma matriz

Teorema

Uma matriz A, quadrada de ordem n, admite inversa A^{-1} se e só se a característica de A é igual a n, isto é, $r(A) = n$.

Nota

1. Prova-se que, efetuando as operações elementares sobre linhas (ou colunas) de uma matriz, é possível transformar a matriz aumentada $[A|I_n]$ na matriz $[I_n|B]$, onde I_n define a matriz identidade de ordem n, e concluir que $B = A^{-1}$.
2. Pode-se calcular a inversa de uma matriz quadrada de ordem n, ou mostrar que uma matriz não é invertível utilizando a condensação por linhas.

Cálculo da inversa de uma matriz

Passos para determinar a matriz inversa

1. Formar uma matriz M do tipo $n \times 2n$, tal que $M = [A|I_n]$.
2. Transformar a matriz A numa matriz triangular com elementos principais não nulos, através das operações elementares sobre as linhas da matriz M.
3. Continuar a transformar a parte esquerda da matriz equivalente a M, até obtermos a matriz identidade, isto é, até obter uma matriz $M' = [I_n|B]$.

Nota

Se o processo condensação gerar uma linha nula na parte esquerda da matriz equivalente a M, terminamos o cálculo porque, neste caso, A não é invertível uma vez que $r(A) < n$.

Cálculo da inversa de uma matriz

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, calcule a matriz inversa de A.

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & -10 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to \frac{1}{5} l_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_2 \to -2l_1 + l_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{2}{5} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{l_2 \to \frac{1}{5} l_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \underset{l_1 \to 2l_2 + l_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{25} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} \end{array}\right], \text{ logo } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Cálculo da inversa de uma matriz

Scilab

```
--> A=[5 -10;2 1]
 A  =

   5.  -10.
   2.   1.

//Inversa da matriz A
--> A^-1
 ans  =

   0.04   0.4
  -0.08   0.2
```

Scilab

```
// Determinar o denominador e numerador
// dos valores decimais da matriz inversa de A

--> [N D]=rat(ans)
 D  =

   25.   5.
   25.   5.

 N  =

   1.   2.
  -2.   1.
```