ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO

P.PORTO

Matemática Discreta 2022/2023

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Indução e recursividade

Teste os seus conhecimentos

Faça o Diagnóstico no moodle

Exemplo 90:

Mostre que, se a e b são dois números reais tais que $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

Resolução:

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < a < b$.

Temos que

$$a < b \Rightarrow$$

Por outro lado,

$$a < b \Rightarrow$$

Assim,

$$a^2 < ab < b^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2 < b^2$$

Prova por contradição ou redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*)

Por forma a provar p, podemos assumir $\neg p$ e procurar uma contradição.

Exemplo 91:

Existe um número infinito de números primos.

Resolução:

Admitamos, por absurdo, que existem apenas n números primos, denotados por $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Consideremos o número $x = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ ⇒ não é divisível por nenhum dos números $p_1, p_2, \ldots, p_n$

Então x é um número primo

Portanto, não existem n números primos como tínhamos suposto!!

Logo, existem um número infinito de números primos.

Prova por contradição ou redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*)

Por forma a provar p, podemos assumir $\neg p$ e procurar uma contradição.

$$p \rightarrow q \text{ é logicamente equivalente a } \neg(p \wedge \neg q)$$

A redução ao absurdo consiste em

assumir a veracidade da conjunção $p \vee \neg q$ e procurar uma contradição.

Portanto, $\neg(p \wedge \neg q)$ será verdadeira,

$$p \rightarrow q$$

4.1 Indução Matemática

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0, se

(i) $\boxed{\textbf{Passo base:}}$

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) $\boxed{\textbf{Passo indutivo:}}$

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k (k \geq n_0)$ - **Hipótese**, então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0, se

(i) **Passo base:**

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo:**

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k (k \geq n_0)$ - **Hipótese**,

então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo base: $P(1)$

Para um conjunto com um único elemento $A_1 = \{a\}$ $(n = 1)$,

temos que $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, A_1\}$, portanto,

$$P(1) : \#\mathcal{P}(A_1) = 2^1, \text{ com } \#A_1 = 1.$$

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0, se

(i) **Passo base:**

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo:**

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k (k \geq n_0)$ - **Hipótese**,

então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

Tese: $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

Tese: $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

Seja $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e seja $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \boxed{a_{k+1}}\}$

Os subconjuntos de A_{k+1} podem ser agrupados em dois grupos:

(i) os que não incluem a_{k+1}

$\mathcal{P}(A_k)$

(ii) os que incluem o novo elemento a_{k+1}

são obtidos acrescentando o novo elemento a_{k+1} a cada subconjunto de A_k

Assim,

$$\#\mathcal{P}(A_{k+1}) =$$

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$,

ι proposição é válida para todo o n.

$$\boxed{\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}\text{, para um conjunto } A \text{ não vazio qualquer}}$$

Exemplo 93:

Mostre que para qualquer número inteiro positivo n

$$\text{temos } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Passo base: $P(1)$

Substituímos n por 1

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ é verdadeira.}$$

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k)$:

Tese: $P(k+1)$:

Hipótese: $P(k)$ $\boxed{1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}}$.

Tese: $P(k+1): 1+2+\cdots+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Temos que

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+k+1 &= \boxed{1+2+\cdots+k}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Reduzindo ao mesmo denominador

Logo, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é.

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$,

então a proposição é válida para todo o n, ou seja,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$$

Indução matemática

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(k) \text{ Verd.} \rightarrow P(k+1) \text{ Verd.,} \end{array}\right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1$$

Indução matemática

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(k) \text{ Verd.} \to P(k+1) \text{ Verd.,} \end{array}\right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1$$

Indução completa (ou segundo princípio da indução matemática ou indução forte)

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(r) \text{ Verd.}, \forall r, 1 \leq r \leq k \to P(k+1) \text{ Verd.,} \end{array}\right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1 \ .$$

4.2 Recursividade

Uma *definição recursiva* de uma função

- **Passo base:**

  Especificar o(s) valor(es) inicial(is) da função;

- **Passo recursivo:**

  Fornecer uma regra para encontrar o valor num número inteiro a partir de valores nos números inteiros menores.

Exemplo 94:

Considere a função S definida recursivamente por:

$$\begin{cases} S(0) = 3 \\ S(n) = 2\,S(n-1) + 3, n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 94:

Considere a função S definida recursivamente por:

$$\begin{cases} S(0) = 3 \\ S(n) = 2\,S(n-1) + 3, n \geq 1 \end{cases}$$

Encontre $S(1), S(2), S(3)$ e $S(4)$.

$$S(1) = 2S(0) + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9,$$

$$S(2) = 2S(1) + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21,$$

$$S(3) = 2S(2) + 3 = 2 \times 21 + 3 = 45,$$

$$S(4) = 2S(3) + 3 = 2 \times 45 + 3 = 93.$$

Exemplo 95:

Dê uma definição recursiva da função fatorial $F(n) = n!$.

$$\begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n) = n \times F(n-1), n \geq 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n+1) = (n+1) \times F(n), n \geq 0 \end{cases}$$

Uma *fórmula de recorrência linear* pode ser escrita como

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \cdots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

onde f_i e g são expressões envolvendo n.

Exemplo 97:

Considere a relação de recorrência definida por

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 97:

Considere a relação de recorrência definida por

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

$$S(1) = 2$$

$$S(2) = 2S(1) = 4 = 2^2$$

$$S(3) = 2S(2) = 8 = 2^3$$

$$S(4) = 2S(3) = 16 = 2^4$$

$$\ldots$$

$$S(n) = 2^n.$$

$S(n) = 2^n$ é a *fórmula fechada* (*closed-form solution*) de S.

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

- **Expand**: Usando a fórmula de recorrência tem-se que:

$$\begin{aligned} & S(n) = 2S(n-1) \\ \Rightarrow \quad & S(n) = 2(2S(n-2)) = 2^2 S(n-2) \\ \Rightarrow \quad & S(n) = 2^2(2S(n-3)) = 2^3 S(n-3) \\ & \ldots \end{aligned}$$

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

- **Guess**: Observando o desenvolvimento em cima, podemos conjeturar que

$$S(n) = 2^k S(n-k).$$

Para $n - k = 1$ então $k = n - 1$, donde

$$S(n) = 2^{n-1} S(1) = 2^{n-1} \times 2 = 2^n.$$

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

- **Verify**: Verificar usando indução.

  Passo Base: $S(1) = 2^1 = 2$ é verdadeiro.

  Passo de Indução:

Hipótese: $S(k) = 2^k$

Tese: $S(k+1) = 2^{k+1}$

$$\boxed{\begin{aligned} S(k+1) &= 2S(k), \\ &= 2 \times 2^k, \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}}$$

Fica assim provado que $S(n) = 2^n$.

Algoritmo EGV

1. Começando por $S(n)$, que é função de $S(n-1)$:
   - Calcular $S(n-1)$ e substituir em $S(n)$,

     obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-2)$.
   - Calcular $S(n-2)$ e substituir em $S(n)$,

     obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-3)$.
   - Calcular $S(n-3)$ e substituir em $S(n)$,

     obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-4)$.
   - $\ldots$
2. Repetir o processo até ser capaz de definir $S(n)$ em função de $S(n-k)$.

   Fazer $n-k=1$ e deduzir $S(n)$ em função de apenas n.
3. Usando indução, demonstrar que a fórmula fechada está correta.

Exercício:

Encontre a fórmula fechada para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

1. **Expand:**

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3 \\ &= (T(n-2) + 3) + 3 = T(n-2) + 2 \times 3 \\ &= (T(n-3) + 3) + 2 \times 3 = T(n-3) + 3 \times 3 \end{aligned}$$

2. **Guess:** $T(n) = T(n-k) + k \times 3.$

Para $n - k = 1$ então $k = n - 1$,

$$T(n) = T(1) + (n-1) \times 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2.$$

Exercício:

Encontre a fórmula fechada para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ \boxed{T(n) = T(n-1) + 3}, n \geq 2 \end{cases}$$

3. **Verify:**

Passo Base: $T(1) = 3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$ é Verdadeira.

Passo de Indução:

$\boxed{\textbf{Hipótese: } T(k) = 3k - 2}$

$\boxed{\textbf{Tese: } T(k+1)} = 3(k+1) - 2 = 3k + 1$

$$\boxed{T(k+1)} \boxed{= \quad T(k) + 3} \boxed{= \quad 3k - 2} + 3 \quad = \quad 3k + 1$$

Logo, tem-se que $T(n) = 3n - 2$.