Folhas Práticas

Matemática Discreta

Eliana Costa e Silva
eos@estg.ipp.pt

Licenciatura em Segurança Informática
em Redes de Computadores
Licenciatura em Engenharia Informática
2021/2022

Conteúdo

Capítulo 1

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

1.1 Conjuntos

1. Defina por extensão os seguintes conjuntos:

1.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$; **1.2.** $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x \leq 10\}$;

1.3. $C = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 3\}$; **1.4.** $D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \in \mathbb{N} \wedge x < 10\}$.

2. Defina por compreensão os seguintes conjuntos:

2.1. $A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$; **2.2.** $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$;

2.3. $C = \{3, 6, 9, 12\}$; **2.4.** $D = \{1, 3, 5, 7\}$.

3. De entre os seguintes conjuntos, quais são iguais?

3.1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, d, c, b\}$, $C = \{a, b, c, a, d\}$, $D = \{a, b, c, d, b\}$.

3.2. $E = \{1, 1, 3, 3, 5\}$, $F = \{3, 1, 5\}$, $G = \{5, 3, 3, 1\}$.

3.3. $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}, I = \{1, 2\}$, $J = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 4\}$.

3.4. $K = \emptyset$, $L = \{\emptyset\}$, $M = \{0\}$, $N = \{\}$.

3.5. $O = \{\{1\}\}$, $P = \{1, \{1\}\}$.

4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$.
Diga, justificando se cada uma das afirmações é verdadeira.

4.1. $5 \in A$; **4.2.** $\{5\} \in A$; **4.3.** $\{5, 11\} \subseteq A$;

4.4. $\{5, 11\} \in A$; **4.5.** $A \subseteq \mathbb{R}$; **4.6.** $0 \in A$;

4.7. $\emptyset \in A$; **4.8.** $\{0, 5, 11\} \subseteq A$.

5. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que:

5.1. $A \subseteq B$ e $A \notin B$; **5.2.** $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$;

5.3. $A \nsubseteq B$ e $A \in B$; **5.4.** $A \subseteq B$ e $A \in B$.

6. Sendo A, B e C conjuntos, use um diagrama de Venn para ilustrar:

6.1. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$; **6.2.** $A \subset B$ e $A \subset C$.

7. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 4\}$ e $C = \{x^2 : x \in A\}$. Determine:

7.1. $A \cup C$; **7.2.** $C \cup A$; **7.3.** $A \cup B$; **7.4.** $C \cup B$;
7.5. $A \cup A$; **7.6.** $B \cup C \cup A$; **7.7.** $A \cap B$; **7.8.** $B \cap B$;
7.9. $A \backslash B$; **7.10.** $C \backslash A$; **7.11.** $A \backslash A$.

8. Considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ e os conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 5, 6, 7\}, \quad C = \{5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad E = \{2, 4, 6, 8\}, \quad F = \{1, 5, 9\}.$$

Determine:

8.1. $A \cup B$ e $A \cap B$; **8.2.** $B \cup D$ e $B \cap D$;
8.3. $A \cup C$ e $A \cap C$; **8.4.** $A \cup A$ e $A \cap A$;
8.5. $D \cup E$ e $D \cap E$; **8.6.** $D \cup F$ e $D \cap F$;
8.7. $A \cap B \cap C$ e $B \cup C \cup E$; **8.8.** $\overline{A}, \overline{B}, \overline{D}, \overline{E}$;
8.9. $A \backslash B$, $B \backslash A$, $D \backslash E$, $F \setminus D$; **8.10.** $A \oplus B$, $C \oplus B$, $E \oplus F$;
8.11. $A \cap (B \cup E)$; **8.12.** $\overline{A \backslash E}$;
8.13. $(A \cap D) \backslash B$; **8.14.** $(B \cap F) \cup (C \cap E)$.

9. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha:

9.1. $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$; **9.2.** $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

10. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{10\}$.

10.1. Determine

10.1.1. $A \times C$ e $C \times A$; **10.1.2.** B^2; **10.1.3.** $A \times B \times C$;
10.1.4. $C \times B \times A$; **10.1.5.** C^3; **10.1.6.** $C^3 \times B$.

10.2. Verifique que os conjuntos $C^3 \times B$ e $B \times C^3$ não são iguais.

10.3. Qual o número de elementos dos conjuntos:

10.3.1. A^2; **10.3.2.** B^4;
10.3.3. $A^4 \times B \times C^2$; **10.3.4.** $C^3 \times B \times A$.

11. Ilustre a seguinte propriedade num diagrama de Venn:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

12. Considerando os conjuntos A, B e C, utilize um diagrama de Venn para esboçar:

12.1. $A \cap \overline{B}$; **12.2.** $\overline{B \setminus A}$; **12.3.** $A \cap (B \setminus C)$;
12.4. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$; **12.5.** $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; **12.6.** $A \cap (B \cap C)$.

13. Sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{\emptyset, 6, \{2, 4, 6\}\}$.
Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

14. Seja A um conjunto finito.
Verifique se a seguinte afirmação é verdadeira: $\#(\mathcal{P}(A \times A)) < \#(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A))$.

15. Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3\}$, será que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$?

16. Sendo A, B e C conjuntos e U o conjunto universo, prove, usando identidades de conjuntos, que:

16.1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; **16.2.** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
16.3. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$; **16.4.** $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
16.5. $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup C} = (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})$; **16.6.** $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
16.7. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$; **16.8.** $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Soluções:

1.1. $A = \{-1, 1\}$; **1.2.** $B = \{1, 2, \ldots, 10\}$; **1.3.** $C = \{\}$; **1.4.** $D = \{1, 4, 9\}$.

2.1. $A = \{x : x$ é um número par não negativo$\}$; **2.2.** $B = \{x : x$ é um número inteiro entre -3 e 2$\}$; **2.3.** $C = \{x : x$ é um número múltiplo de 3, maior do que 1 e menor do que 13$\}$; **2.4.** $D = \{x : x$ é um número ímpar positivo menor ou igual a 7$\}$;

3.1. $A = B = C = D$; **3.2.** $E = F = G$; **3.3.** $H = I = J$; **3.4.** $K = N$; **3.5.** -.

4.1. V; **4.2.** F; **4.3.** V; **4.4.** V; **4.5.** F; **4.6.** F; **4.7.** V; **4.8.** F.

5.1. Por exemplo, $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$; **5.2.** Por exemplo, $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$; **5.3.** Por exemplo, $A = \{1\}$ e $B = \{\{1\}\}$; **5.4.** Por exemplo, $A = \{1\}$ e $B = \{1, \{1\}\}$.

7.1. $\{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$; **7.2.** $\{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$; **7.3.** A; **7.4.** $\{2, 4, 16, 36, 64\}$; **7.5.** A; **7.6.** $\{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$; **7.7.** $\{2, 4\}$; **7.8.** B; **7.9.** $\{6, 8\}$; **7.10.** $\{16, 36, 64\}$; **7.11.** $\{\}$.

8.1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{4, 5\}$; **8.2.** $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, \{5, 7\}$; **8.3.** $\{1, 2, \ldots, 9\}, \{5\}$; **8.4.** A, A; **8.5.** $\{1, 2, \ldots, 9\}, \emptyset$; **8.6.** D, F; **8.7.** $\{5\}, \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; **8.8.** $\bar{A} = \{6, 7, 8, 9\}, \bar{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}, \bar{D} = \{2, 4, 6, 8\}, \bar{E} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; **8.9.** $\{1, 2, 3\}, \{6, 7\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}, \emptyset$; **8.10.** $A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 7\}, C \oplus B = \{4, 8, 9\}, E \oplus F = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$; **8.11.** $\{2, 4, 5\}$; **8.12.** $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$; **8.13.** $\{1, 3\}$; **8.14.** $\{5, 6, 8\}$.

9.1. Por exemplo, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1\}$; **9.2.** $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1\}$.

10.1.1. $A \times C = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10)\}, C \times A = \{(10, 1), (10, 2), (10, 3)\}$;
10.1.2. $B^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$;
10.1.3. $A \times B \times C = \{(1, a, 10), (2, a, 10), (3, a, 10), (1, b, 10), (2, b, 10), (3, b, 10)\}$;
10.1.4. $C \times B \times A = \{(10, a, 1), (10, a, 2), (10, a, 3), (10, b, 1), (10, b, 2), (10, b, 3)\}$; **10.1.5.** $C^3 = \{(10, 10, 10)\}$;
10.1.6. $C^3 \times B = \{(10, 10, 10, a), (10, 10, 10, b)\}$.

10.3.1. 9; **10.3.2.** 16; **10.3.3.** 162; **10.3.4.** 6.

13. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$;
$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{6\}, \{\{2, 4, 6\}\}, \{\emptyset, 6\}, \{\emptyset, \{2, 4, 6\}\}, \{6, \{2, 4, 6\}\}, \{\emptyset, 6, \{2, 4, 6\}\}\}$.

14. A afirmação apenas é verdadeira para $\#A = 1$. Tem-se $\#(\mathcal{P}(A \times A)) = \#(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A))$, para $n = 2$. e $\#(\mathcal{P}(A \times A)) > \#(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)), \forall n \geq 3$.

15. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cap B)$.

1.2 Funções, Sucessões de números inteiros, somatórios e produtórios

17. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$.

17.1. Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.

17.2. Caso possível, dê exemplos de funções de A para B tais que:
17.2.1. não injetiva; **17.2.2.** injetiva; **17.2.3.** não sobrejetiva;
17.2.4. sobrejetiva; **17.2.5.** bijetiva.

18. Considere as seguintes correspondências:

$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f_1(x) = 2x - 1$; $\quad f_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, f_2(x) = \dfrac{1}{x}$;

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -x & \text{se} \quad x \leq 2 \end{cases}$; $\quad f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, f_4(x) = x^2$;

$f_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, f_5(x) = |x| + 2$; $\quad f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, f_6(x) = x^2 - 3$.

18.1. Diga, justificando, quais definem funções;

18.2. Das que são funções, diga justificando, quais são:
18.2.1. injetivas; **18.2.2.** sobrejetiva; **18.2.3.** bijetiva.

19. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 1$. Determine:
19.1. $g(\{-1, 0, 1\})$; **19.2.** $g(\mathbb{R}^-)$; **19.3.** $g(\mathbb{R})$.

20. Considere as funções de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \quad g(n) = 2n; \quad h(n) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ 1 & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Determine:
20.1. $f \circ f$; **20.2.** $f \circ g$; **20.3.** $g \circ f$;
20.4. $g \circ h$; **20.5.** $(f \circ g) \circ h$; **20.6.** $f \circ (g \circ h)$.

21. Indique se as seguintes funções são injetivas, sobrejetivas e bijetivas:

21.1. $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tal que $f(1) = 4, f(2) = 6, f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 5$;

21.2. $f : \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \longrightarrow \{2, 3, 5, 7, 11\}$, tal que $f(2) = 11, f(4) = 2, f(6) = 5, f(8) = 3, f(10) = 5, f(12) = 7$;

21.3. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, $f : A \longrightarrow B$, tal que $f(x) = \{x\}$;

21.4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, $f : B \longrightarrow B$, tal que $f(X) = X \cap \{1, 2\}$;

21.5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, $f : B \longrightarrow B$, tal que $f(X) = X \cup \{1, 2\}$;

21.6. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, $f : B \longrightarrow B$, tal que $f(X) = A - X$.

22. Considere os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e as funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ definidas por
$f(a) = \beta$, $f(b) = \alpha$, $f(c) = f(d) = f(e) = \delta$ e $g(\alpha) = 3, g(\beta) = 5, g(\gamma) = 1$ e $g(\delta) = 5$.
Represente através de um diagrama de setas e descreva por extensão $g \circ f$.

23. Considere as funções:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -2x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Verifique se f, g e h são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

24. O armazenamento de dados num disco rígido ou a transmissão de dados por meio de uma rede são geralmente representados como uma cadeia de bytes. Cada byte é composto por 8 bits. Quantos bytes são necessários para codificar 100 bits de dados?

25. Num modo de transferência assíncrona (ATM) (protocolo de comunicação utilizado em certas redes de transmissão), os dados são organizados em células de 53 bytes. Quantas células ATM podem ser transmitidas num minuto numa conexão que transmite os dados com uma taxa de 500 kilobits por segundo?

26. Determine os primeiros cinco termos das sequências seguintes, identificando as progressões aritméticas e geométricas:

26.1. $\{a_n\}$, com $a_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

26.2. $\{b_n\}$, com $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

26.3. $\{c_n\}$, com $c_n = 5 - 3n$, $n \in \mathbb{N}_0$;

26.4. $\{d_n\}$, com $d_n = 2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$;

26.5. $\{e_n\}$, com $e_n = (n+1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

26.6. $\{f_n\}$, com $f_n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$, $n \in \mathbb{N}$;

26.7. a sequência que começa por 2 e na qual cada termo é obtido do anterior acrescido de 5 unidades;

26.8. a sequência que lista cada número inteiro positivo três vezes, por ordem crescente.

27. Como podemos obter os termos de uma sequência cujos primeiros termos são:

27.1. $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$?

27.2. $5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59$?

27.3. $1, 7, 25, 79, 241, 727$?

27.4. $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1$?

27.5. $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7$?

28. Determine o termo geral, a_n, $n \in \mathbb{N}$ das sequências cujos primeiros termos são:

28.1. $-1, 1, -1$;

28.2. $2, 4, 6$;

28.3. $1, -1, 1$;

28.4. $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8$;

28.5. $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27$;

28.6. $3, 6, 12, 24, 48, 96$.

29. Determine:

29.1. $\sum_{k=1}^{5}(k+1)$;

29.2. $\sum_{i=2}^{6}(-2)^i$;

29.3. $\sum_{j=0}^{4}(2^{j+1} - 2^j)$;

29.4. $\sum_{i\in\{2,4,6\}} i$;

29.5. $\sum_{j\in\{1,2,3\}} j^3$;

29.6. $\sum_{k\in\{3,5,7,9\}} 1$;

29.7. $\sum_{j=0}^{8} 3 \times 2^j$;

29.8. $\sum_{j=1}^{5} 2^j$;

29.9. $\sum_{j=0}^{6} 3 \times (-2)^j$;

29.10. $\sum_{j=0}^{5}(1 + (-1)^j)$;

29.11. $\sum_{j=0}^{3}(3^j - 2^j)$.

30. Calcule os seguintes somatórios duplos:

30.1. $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(i+j)$;

30.2. $\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{2}(2i+3j)$;

30.3. $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(i^2 j^3)$.

31. Sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

determine:

31.1. $\sum_{i=50}^{100} i^2$; **31.2.** $\sum_{i=40}^{91} i^2$.

32. Sabendo que

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1, r \neq 0,$$

determine $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$, para $|x| < 1$.

33. Determine o valor dos seguintes produtórios:

33.1. $\prod_{i=0}^{1000} i$; **33.2.** $\prod_{i=5}^{8} i$; **33.3.** $\prod_{i=1}^{999} 1$;
33.4. $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$; **33.5.** $\prod_{i=1}^{10} 2$.

34. Expresse $n!$ usando a notação de produto.

35. Calcule:

35.1. $\sum_{i=0}^{4} i!$; **35.2.** $\prod_{j=0}^{4} j!$.

36. Determine se cada um dos conjuntos abaixo é contável ou não contável. Para aqueles que forem contáveis, apresente uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto:

36.1. números inteiros negativos;

36.2. números inteiros positivos pares;

36.3. números reais entre 0 e 1;

36.4. números inteiros negativos múltiplos de 5;

36.5. números inteiros negativos e ímpares;

36.6. cadeia de todos os bits que não tenham o bit 0.

37. Mostre que os seguintes conjuntos são contáveis:

37.1. conjunto dos números inteiros;

37.2. conjunto dos números inteiros positivos pares;

37.3. conjunto dos números racionais positivos;

37.4. conjunto dos números racionais.

Soluções:

17.1. Por exemplo, $f(1) = a$, $f(1) = b$, $f(3) = c$; **17.2.1.** Por exemplo, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$; **17.2.2.** Por exemplo, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$; **17.2.3.** Por exemplo, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$; **17.2.4.** Não é possível, pois $\#A = 3 < \#B = 4$; **17.2.5.** Não é possível encontrar uma função sobrejetiva, consequentemente não é possível encontrar uma função bijetiva.

18.1. Apenas f_1, f_4, f_5 e f_6 são funções pois para cada elemento do domínio existe uma e uma só imagem. **18.2.1.** f_1 é injetiva pois é uma função estritamente crescente (declive $m > 0$) e portanto não existem dois objectos diferentes com a mesma imagem. **18.2.2.** f_4 é sobrejetiva uma vez que $f_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$. **18.2.3** Não existe.

19.1. $g(\{-1, 0, 1\}) = \{-1, 0\}$; **19.2.** $g(\mathbb{R}^-) =]-1, +\infty[$; **3.3.** $g(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$;

20.1. $(f \circ f)(n) = n + 2$; **20.2.** $(f \circ g)(n) = 2n + 1$; **20.3.** $(g \circ f)(n) = 2(n + 1)$;
20.4. $(g \circ h)(n) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ é par} \\ 2 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$; **20.5.** $((f \circ g) \circ h)(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ é par} \\ 3 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$;
20.6. $(f \circ (g \circ h))(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ é par} \\ 3 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$.

21.1. Injetiva, não sobrejetiva, não bijetiva; **21.2.** Não injetiva, sobrejetiva, não bijetiva; **21.3.** Injetiva, não sobrejetiva,não bijetiva. **21.4.** Não injetiva, não sobrejetiva, não bijetiva; **21.5.** Não injetiva, não sobrejetiva, não bijetiva. **21.6.** Injetiva, sobrejetiva, bijetiva.

22. $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(c) = (g \circ f)(d) = (g \circ f)(e) = 5$ e $(g \circ f)(b) = 3$;

23. f e g são bijetivas, portanto admitem inversa. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

24. 13 bytes.

25 70754 células.

26.1. PG $r = \frac{2}{3}$, $a_0 = 3$;$a_1 = 2$; $a_2 = \dfrac{4}{3}$; $a_3 = \dfrac{8}{9}$; $a_4 = \dfrac{16}{27}$; **26.2.** PG $r = -1$, $b_0 = 1$;$b_1 = -1$; $b_2 = 1$; $b_3 = -1$; $b_4 = 1$; **26.3.** PA $r = -3$, $c_0 = 5$;$c_1 = 2$; $c_2 = -1$; $c_3 = -4$; $c_4 = -7$; **26.4.** Não é PG nem PA, $d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $d_3 = 9$; $d_4 = 17$; $d_5 = 33$; **26.5.** Não é PG nem PA, $e_1 = 4$; $e_2 = 27$; $e_3 = 4^4 = 256$; $e_4 = 5^5 = 3125$; $e_5 = 6^6 = 46656$; **26.6.** PA $r = 1$, $f_1 = 1$; $f_2 = 2$; $f_3 = 3$; $f_4 = 4$; $f_5 = 5$; **26.7.** PA $r = 5$, $2, 7, 12, 17, 22$; **26.8.** Não é PG nem PA, $1, 1, 1, 2, 2$.

27.1. Cada número natural n aparece n vezes; **27.2.** Cada termo é obtido do anterior somando 6, ou seja, $a_n = 5 + 6(n - 1)$; **27.3.** $a_n = 3^n - 2$; **27.4.** Um 1 e um 0 seguido de dois 1's e dois 0's, e assim sucessivamente; **27.5.** Número inteiros positivos por ordem crescente em que os números pares surgem duas vezes.

28.1. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$; **28.2.** $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$; **28.3.** $a_n = (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$;
28.4. $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$; **28.5.** (PA) $a_n = 15 - 7(n - 1), n \in \mathbb{N}$;
28.6. (PG) $a_n = 3 \times 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

29.1. 20; **29.2.** 44; **29.3.** 31; **29.4.** 12; **29.5.** 36; **29.6.** 4; **29.7.** 1533; **29.8.** 62; **29.9.** 129; **29.10.** 6; **29.11.** 25.

30.1. 21; **30.2.** 60; **30.3.** 45.

31.1. 297925; **31.2.** 234806.

32. $\dfrac{1}{1-x}$.

33.1. 0; **33.2.** 1680; **33.3.** 1; **33.4.** 1; **33.5.** 1024.

34. $n! = \prod_{i=1}^{n} i = \prod_{i=2}^{n} i$.

35.1. 34; **35.2.** 288.

36. Apenas 36.3. não é contável os outros são todos.

1.3 Relações e suas Aplicações

38. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
Para cada uma das relações binárias definidas em A que se seguem, determine o domínio, o contradomínio e represente por uma matriz.

38.1. $R_1 = \{(x, y) \in A \times A : x + y \geq 6\}$;

38.2. $R_2 = \{(x, y) \in A \times A : (x - y)$ é divisivel por $2\}$.

39. Sendo R a relação $>$ (maior que) definida em $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$,

39.1. determine o domínio e o contradomínio de R;

39.2. apresente a matriz desta relação.

40. Relativamente à relação R definida no conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

40.1. defina a relação R;

40.2. indique o seu domínio e contradomínio;

40.3. represente-a graficamente.

41. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (10, 8)\}, \quad S = \{(10, 2), (10, 8)\}, \quad T = \{(6, 2), (6, 4), (8, 10)\}.$$

Determine

41.1. R^{-1}; **41.2.** $R^{-1} \cup S^{-1}$; **41.3.** $T - S^{-1}$; **41.4.** $T^{-1} \cap S$;
41.5. $S \circ T$; **41.6.** $R \circ T$; **41.7.** $S^{-1} \circ T^{-1}$; **41.8.** $S^{-1} \circ S$.

42. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z, w\}$.
Considere as relações de A em B e de B em A, respetivamente:

$$R = \{(1, x), (1, y), (2, y), (2, z)\} \qquad S = \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}.$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

42.1. Determine:

42.1.1. R^{-1}; **42.1.2.** S^{-1}; **42.1.3.** T;
42.1.4. $T \circ T$; **42.1.5.** U; **42.1.6.** $U \circ U$.

42.2. Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;

42.3. Indique o domínio e contradomínio de R;

42.4. Indique todas as relações binárias de A para B cujo domínio é $\{2, 3\}$ e cujo contradomínio é $\{x, z\}$;

42.5. Dê um exemplo de relações binárias não vazias R' de A para B e S' de B para A, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

43. Verifique se cada uma das seguintes relações, definidas no conjunto dos números inteiros, é reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva.

43.1. $R_1 = \{(x, y) : x + y$ é par$\}$;

43.2. $R_2 = \{(x, y) : x > y\}$;

43.3. $R_3 = \{(x, y) : x$ é metade, o dobro ou igual a $y\}$.

44. De entre as seguintes relações identifique as que são de equivalência.

44.1. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;

44.2. $R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;

44.3. $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 1)\}$;

44.4. $R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1)\}$;

45. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e considere a relação θ em $\mathcal{P}(A)$ definida por $X\theta Y$ se e só se $X \cup \{1, 2\} = Y \cup \{1, 2\}$.

45.1. Mostre que θ uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

45.2. Indique todos os elementos da classe $[\{1\}]_\theta$.

45.3. Determine o conjunto quociente $\mathcal{P}(A)/\theta$.

46. Se $R : A \longrightarrow B$ e $S : C \longrightarrow D$ são duas relações tais que $A \subset C, B \subset D$ e $R \subset S$, dizemos que (i) S é uma *extensão* de R, e (ii) R é uma *restrição* de S.
Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $C = \{1, 3\}$ e $D = \{a, e\}$, dê um exemplo de duas relações R e S tais que R seja uma restrição de S.

47. Para cada uma das seguintes relações, indique as suas propriedades. Diga se a relação é reflexiva (r), irreflexiva (i), simétrica (s), anti-simétrica (a), ou transitiva (t). Determine também se a relação é uma relação de equivalência. Todas as relações são no conjunto de todos os humanos, em que xRy representa que:

47.1. x é filho de y.

47.2. x é descendente de y.

47.3. x é marido de y.

47.4. x é cônjuge de y.

47.5. x e y têm os mesmos pais (pai e mãe).

47.6. x é tão alto ou mais baixo do que y.

48. Dê um exemplo de uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica.

49. Para cada uma das relações seguintes, indique se é reflexiva (r), irreflexiva (i), simétrica (s), anti-simétrica (a), ou transitiva (t).

49.1. Sejam x e y números inteiros e xRy se x divide y.

49.2. Sejam x e y pessoas e xRy se x e y pertencem ao mesmo agregado familiar.

49.3. Sejam x e y rapazes e xRy se x e y são irmãos ou $x = y$.

49.4. Sejam x e y pessoas e xRy se x e y são primos.

50. Indique, justificando, quais das relações dadas no exercício anterior são de equivalência.

51. Seja $R = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a)\}$. Determine a matriz da relação e determine ainda:

51.1. a matriz do fecho reflexivo,

51.2. a matriz do fecho simétrico,

51.3. a matriz do fecho transitivo.

52. Considere a relação XRY sse $X \subseteq Y$, no conjunto $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

52.1. Verifique que R é uma relação de ordem parcial.

52.2. Faça o seu diagrama de Hasse.

53. Considere relação $x \sqsubseteq y$ sse "x divide y", definida no conjunto $A = \{2,4,6,8\}$.

53.1. Mostre que se trata de uma r.o.p..

53.2. Será total?

53.3. Faça o seu diagrama de Hasse.

54. Dados c.p.o.'s $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$, mostre que a relação definida no conjunto $A_1 \times A_2$ por $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ sse $x_i \leq_i y_i)$ para $i = 1, 2$, é efetivamente uma r.o.p..

55. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e sejam R_1, R_2, R_3 e R_4 as seguintes relações em A:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(4,1),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4)\} \\
R_2 &= \{(1,1),(1,4),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4),(2,4)\} \\
R_3 &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \\
R_4 &= \{(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,1)\}
\end{aligned}$$

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

56. Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

56.1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1,2,3\}$.

56.2. $(A, |)$, sendo $A = \{2,3,6,10,12,20\}$ e sendo $|$ a relação "divide".

Soluções:

38.1. $dom(R_1) = cdom(R_1) = \{2,3,4\}$, $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

38.2. $dom(R_2) = cdom(R_2) = \{1,2,3,4\}$, $M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

39.1. $dom(R) = \{4,9,16,25\}$ e $cdom(R) = \{1,4,9,16\}$; **39.2.** $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

40.1. $R = \{(a,a),(a,d),(b,b),(b,c),(c,b),(d,a),(d,c)\}$; **40.2.** $dom(R) = cdom(R) = \{a,b,c,d\}$; **40.3.** –

41.1. $R^{-1} = \{(2,2),(4,2),(6,2),(8,10)\}$; **41.2.** $R^{-1} \cup S^{-1} = \{(2,2),(2,10),(4,2),(6,2),(8,10)\}$;
41.3. $T - S^{-1} = \{(6,2),(6,4)\}$; **41.4.** $T^{-1} \cap S = \{(10,8)\}$; **41.5.** $S \circ T = \{(8,8),(8,2)\}$;
41.6. $R \circ T = \{(6,2),(8,8),(6,4),(6,6)\}$; **41.7.** $S^{-1} \circ T^{-1} = \{(10,10)\}$; **41.8.** $S^{-1} \circ S = \{(10,10)\}$.

42.1.1. $R^{-1} = \{(x,1),(y,1),(y,2),(z,2)\}$; **42.1.2.** $S^{-1} = \{(1,x),(3,x),(2,y),(2,w),(3,z)\}$;
42.1.3. $T = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$; **42.1.4.** $T \circ T = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$;

42.1.5. $U = \{(x,x),(x,y),(y,y),(y,z),(w,y),(w,z)\}$;
42.1.6. $U \circ U = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,z),(w,y),(w,z)\}$;
42.2. –; **42.3.** dom(R)= $\{1,2\}$; cdom(R)= $\{x,y,z\}$; **42.4.** –;
42.5. Por exemplo, $S' = \{(x,1)\}$ e $R' = \{(2,x)\}$.

43.1. Reflexiva, Simétrica, Transitiva. **43.2.** Irreflexiva, Anti-Simétrica, Transitiva. **43.3.** Reflexiva, Simétrica, não transitiva.

44. As relações das alíneas **44.1** e **44.4** são relações de equivalência.

45.1. —; **45.2.** $[\{1\}]_\theta = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$; **45.3.** $\mathcal{P}(A)/\theta = \{\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\},\{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}\}$.

46. Por exemplo, $R = \{(1,a),(3,e)\}$ e $S = \{(1,a),(2,b),(3,e),(4,d)\}$.

47.1. (i), (a); **47.2.** (i), (a), (t); **47.3.** (i), (a); **47.4.** (i), (s); **47.5.** (r), (s), (t) - é relação de equivalência; **47.6.** (r), (a), (t).

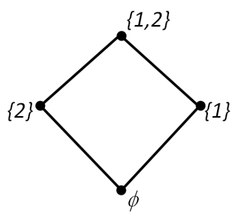
48. Por exemplo, $R = \{(1,1),(2,2)\}$.

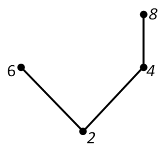
49.1. (r), (a), (t); **49.2.** (r), (s), (t); **49.3.** (r), (s), (t); **49.4.** (i), (s).

50. São relações de equivalência **49.2** e **49.3**.

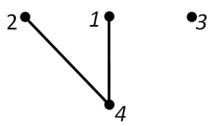
51.1. $M_{reflexivo} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **51.2.** $M_{simetrico} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

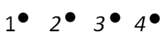
51.3. $M_{transitivo} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

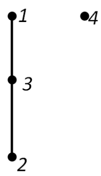
52.1. –; **52.2.** 

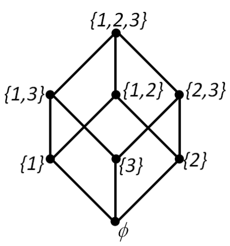
53.1. –; **53.2.** Não; **53.3.** 

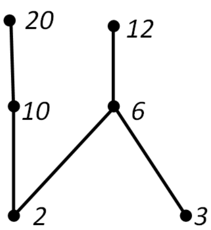
54. –.

55. R_1 

; R_3 

; R_4 

56.1 

; **56.2** 

1.4 Indução e Recursividade

57. Considere a propriedade $P(n) : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$.

57.1. Identifique $P(1)$.

57.2. Mostre que $P(1)$ é verdadeiro completando assim o passo base.

57.3. Identifique a hipótese de indução.

57.4. Conclua a indução.

58. Mostre, por indução matemática, que:

58.1. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 0$;

58.2. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para todo $n \geq 1$;

58.3. $3^{2n} + 7$ é divisível por 8, para todo $n \geq 1$;

58.4. $n < 2^n$, para todo $n \geq 1$;

58.5. $2^n < n!$, para todo $n \geq 4$;

59. Considere os números harmónicos $H_j, j = 1, 2, 3, \ldots$, definidos por

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{j}.$$

Por exemplo $H_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.
Use indução matemática para mostrar que $H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$, para todo n inteiro não negativo.

60. Use indução matemática para provar a seguinte generalização das leis de De Morgan:

$$\overline{\cap_{j=1}^{n} A_j} = \cup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos do conjunto universal U e para $n \geq 2$.

61. Escreva os cinco primeiros termos das seguintes sequências:

61.1. $\begin{cases} A(1) = 2 \\ A(n) = \dfrac{1}{A(n-1)}, n \geq 2 \end{cases}$ **61.2.** $\begin{cases} B(1) = 1 \\ B(n) = B(n-1) + n^2, n \geq 2 \end{cases}$

62. Encontre a fórmula fechada das seguintes fórmulas recursivas:

62.1. $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2T(n-1) + 3, n \geq 2 \end{cases}$ **62.2.** $\begin{cases} S(1) = 5 \\ S(n) = S(n-1) + 5, n \geq 2 \end{cases}$

Soluções:

57. —;

58. —;

59. —;

60. —;

61. **61.1.** $A(1) = 2, A(2) = \dfrac{1}{2}, A(3) = 2, A(4) = \dfrac{1}{2}, A(5) = 2$;

61.2. $B(1) = 1, B(2) = 5, B(3) = 14, B(4) = 30, B(5) = 55$.

62. **62.1.** $T(n) = 2^{n+1} - 3$; **62.2.** $S(n) = 5n$.

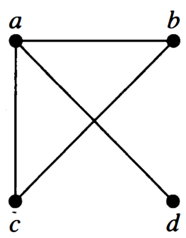
Capítulo 2

Teoria de Grafos

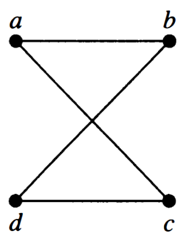
2.1 Grafos e a sua representação

63. Considere os grafos:

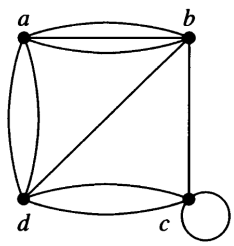
63.1.



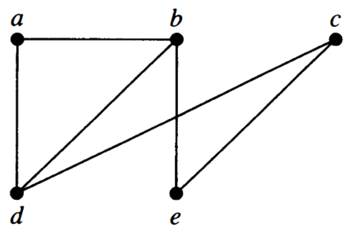
63.2.



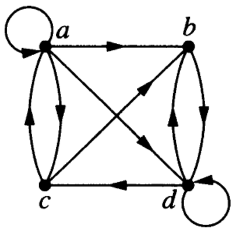
63.3.



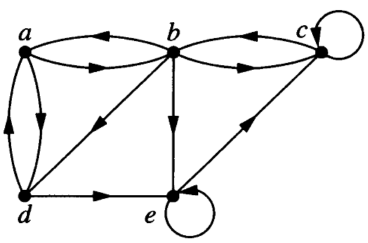
63.4.



63.5.



63.6.



Para cada um:

i) diga se se trata de um grafo orientado ou não orientado;

ii) indique a matriz de adjacências, M;

iii) indique o número de arestas e de vértices, a dimensão e a ordem, e o grau de cada vértice;

iv) represente-o recorrendo ao GraphTea e recorrendo a uma função `plot_grafo(M,k)`, feita por si em Scilab, onde M é a matriz de adjacências, k indica se o grafo é orientado ($k = 1$) ou não orientado ($k = 0$);

v) confirme iii) recorrendo a uma função `[dim_G, ord_G, graus_G] = dim_ord_grau(M,k)`, feitas por si em Scilab, que retorna dois números inteiros `dim_G` e `ord_G` com a dimensão e ordem do grafo, e uma matriz `graus_G` com o grau de cada vértice. No caso dos grafos orientados a matriz `graus_G` tem número de colunas igual ao dobro do número de vértices do grafo, sendo a submatriz constituída pelas primeiras colunas relativa aos graus de entrada e a submatriz constituída pelas restantes colunas relativa aos graus de saída de cada vértice.

64. Considere os grafos dados pelas matrizes de adjacência:

64.1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **64.2.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **64.3.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **64.4.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

64.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **64.6.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para cada um:

i) diga se se trata de um grafo orientado ou não orientado;
ii) indique o número de arestas e de vértices, a dimensão e a ordem, e o grau de cada vértice;
iii) represente-o recorrendo ao GraphTea;
iv) represente-o recorrendo à função `plot_grafo`;
v) confirme ii) recorrendo à função `dim_ord_grau`.

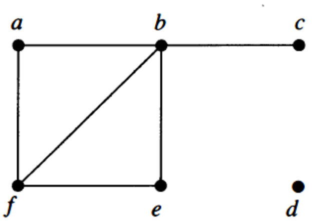
65. Para cada um dos seguintes grafos, determine:
o número de vértices, o número de arestas, a matriz de adjacência e apresente uma representação gráfica, com e sem recurso às funções `plot_grafo(M)` e `dim_ord_grau`:

65.1. K_4; **65.2.** $K_{1,4}$; **65.3.** $K_{2,3}$;

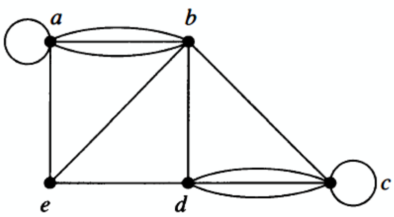
65.4. C_4; **65.5.** W_4; **65.6.** Q_3.

66. Para cada um dos grafos não orientados seguintes determine:
o número de vértices, o número de arestas e o grau de cada vértice.
Confirme a sua resposta recorrendo à função `dim_ord_grau`.

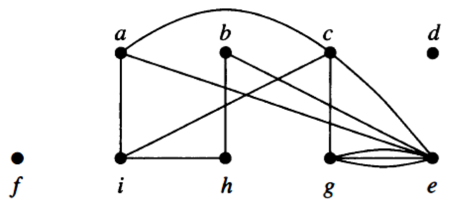
66.1.



66.2.

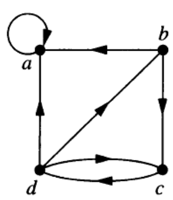


66.3.

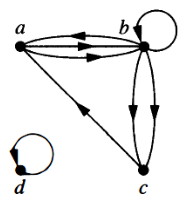


67. Para cada um dos grafos orientados seguintes determine:
o número de vértices, o número de arestas e o grau de entrada e saída de cada vértice.
Confirme a sua resposta recorrendo à função `dim_ord_grau`.

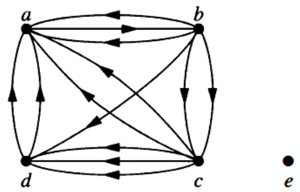
67.1.



67.2.



67.3.



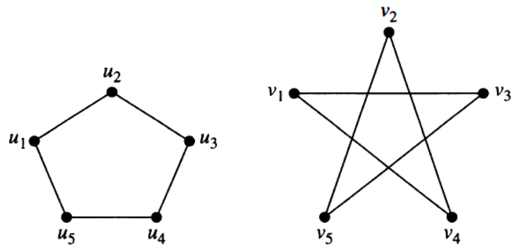
68. Os grafos simples dados pelas seguintes matrizes de adjacência são isomorfos? Justifique

68.1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

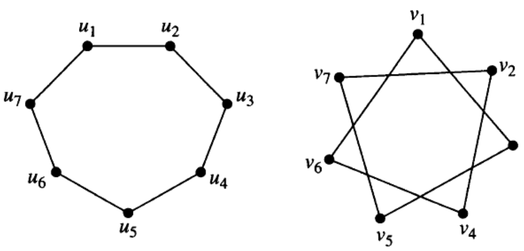
68.2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

69. Verifique se os pares de grafos que se seguem são isomorfos:

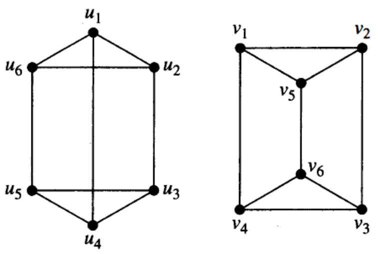
69.1.



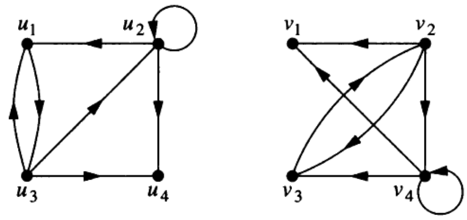
69.2.



69.3.

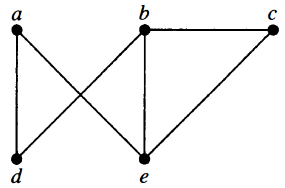


69.4.



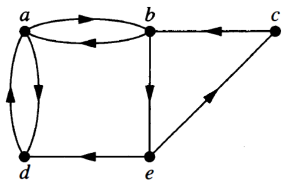
70. Considere os grafos abaixo e as listas de vértices **(a)**, **(b)**, **(c)** e **(d)**:

70.1.



(a) a, e, b, c, b; **(b)** a, e, a, d, b, c, a;
(c) e, b, a, d, b, e; **(d)** c, b, d, a, e, c.

70.2.



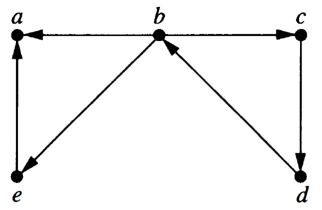
(a) a, b, e, c, b; **(b)** a, d, a, d, a;
(c) a, d, b, e, a; **(d)** a, b, e, c, b, d, a.

Para cada um dos grafos identifique as listas que: (i) formam um caminho (eventualmente não simples); (ii) são caminhos simples; (iii) são circuitos; (iv) e os seus comprimentos.

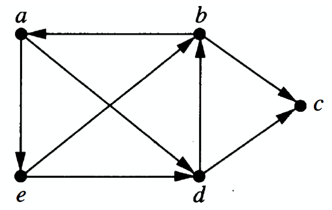
Implemente em Scilab uma função `L=comp(P)`, onde P é um vetor contendo a sequência de vértices de um caminho e L é o seu comprimento.

71. Quais dos seguintes grafos são fortemente conexos? Justifique.

71.1.



71.2.



72. Considere os grafos não orientados $G_1 : V(G_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E(G_1) = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$G_2 : V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E(G_2) = \{(1, 2), (1, 4), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$

$G_3 : V(G_3) = \{A, B, C, D, E, F\}$ e
$E(G_3) = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, E), (B, F), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F)\}$

Para cada um dos grafos:

72.1. represente-o graficamente, com e sem recurso à função `plot_grafo`;

72.2. determine a sua matriz de adjacências;

72.3. usando a matriz de adjacências, calcule o grau de cada um dos seus vértices, com e sem recurso à função `dim_ord_grau`;

72.4. calcule o número de caminhos de comprimento 3 entre o segundo e o quarto vértice.

72.5. indique, justificando, quais dos grafos são grafos simples.

72.6. indique, justificando, quais dos grafos são conexos.

73. Considere os grafos orientados $\vec{G}_1 : V(\vec{G}_1) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E(\vec{G}_1) = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$
$\vec{G}_2 : V(\vec{G}_2) = \{A, B, C, D, E\}$ e $E(\vec{G}_2) = \{(A, B), (B, C), (B, E), (C, B), (C, C), (C, D), (D, E), (E, E),$
$(E, D), (E, A)\}$

Para cada um dos grafos:

73.1. represente-o graficamente.

73.2. determine a sua matriz de adjacências.

73.3. usando a matriz de adjacências, calcule os graus de entrada e saída de cada vértices.

73.4. calcule o número de caminhos de comprimento 3 do segundo para o primeiro vértice.

73.5. comente a afirmação: "O grafo $\vec{G}_1$ é conexo, mas não é fortemente conexo".

73.6. mostre que o grafo $\vec{G}_2$ é fortemente conexo.

74. Represente graficamente os grafos dados pelas matrizes de adjacência seguintes:

74.1. Grafo não orientado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

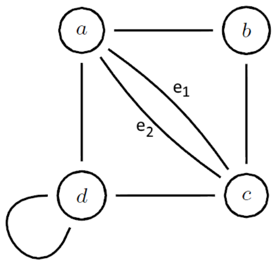
74.2. Grafo orientado:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

74.3. Pode a matriz da alínea **74.2** ser a matriz de adjacências de um grafo não orientado? Justifique.

74.4. Verifique se o grafo da alínea **74.2** é fortemente conexo e justifique a sua resposta.

75. Considere o grafo seguinte:

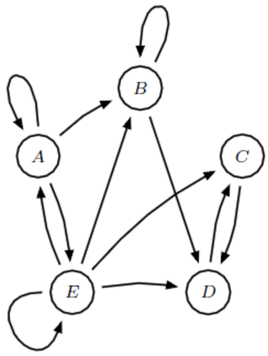


75.1. Identifique um caminho de comprimento 7 do vértice d para o vértice b.

75.2. Quantos circuitos de comprimento 4 existem? Indique um exemplo.

75.3. Indique um caminho simples de maior comprimento. Qual é o comprimento desse caminho?

76. Considere o digrafo seguinte:



76.1. Determine a matriz de adjacências do grafo.

76.2. Calcule, matricialmente, quantos caminhos de comprimento igual a 4 existem do vértice A para o vértice C.

76.3. Tente identificar todos os caminhos da alínea anterior.

Soluções:

63. **63.1.** não orientado, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 4 vértices, 4 arestas, grau$(a) = 3$, grau(b) =grau$(c) = 2$, grau$(d) = 1$;

63.2. não orientado, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 4 vértices, 4 arestas, grau(a) =grau(b) =grau(c) =grau$(d) = 2$;

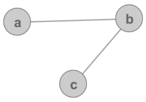
63.3. não orientado, $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 4 vértices, 10 arestas, grau(a) =grau(b) =grau(c) =grau$(d) = 5$;

63.4. não orientado, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 5 vértices, 6 arestas, grau(a) =grau(c) =grau$(e) = 2$, grau(b) =grau$(d) = 3$;

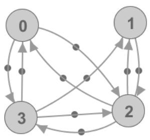
63.5. orientado, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 4 vértices, 10 arestas, grau$^e(a)$ =grau$^e(c) = 2$, grau$^e(b)$ =grau$^e(d) = 3$, grau$^s(a) = 4$, grau$^s(b) = 1$, grau$^s(c) = 2$, grau$^s(d) = 3$;

63.6. orientado, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 5 vértices, 12 arestas, grau$^e(a)$ =grau$^e(b)$ =grau$^e(d) = 2$, grau$^e(c)$ =grau$^e(e) = 3$, grau$^s(a)$ =grau$^s(c)$ =grau$^s(d)$ =grau$^s(e) = 2$, grau$^s(b) = 4$.

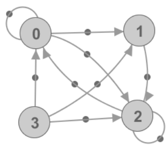
64. **64.1.** não orientado, 3 vértices, 2 arestas, grau(a) =grau$(c) = 1$, grau$(b) = 2$,



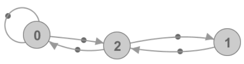
64.2. orientado, 4 vértices, 9 arestas, grau$^e(0)$ =grau$^e(1)$ =grau$^e(3) = 2$, grau$^e(2) = 3$, grau$^s(0) = 2$, grau$^s(1) = 1$, grau$^s(2)$ =grau$^s(3) = 3$



64.3. orientado, 4 vértices, 9 arestas, grau$^e(0) = 3$, grau$^e(1) = 2$, grau$^e(2) = 4$, grau$^e(3) = 0$, grau$^s(0)$ =grau$^s(3) = 3$, grau$^s(1) = 1$, grau$^s(2) = 2$



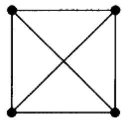
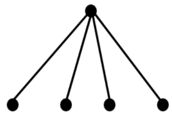
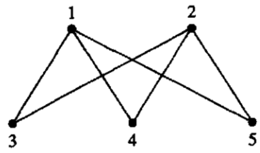
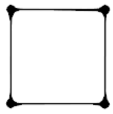
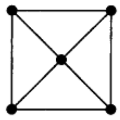
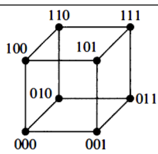
64.4. orientado, 3 vértices, 5 arestas, grau$^e(0) = 2$, grau$^e(1) = 0$, grau$^e(2) = 3$, grau$^s(0)$ =grau$^s(2) = 2$, grau$^s(1) = 1$



64.5. orientado, 3 vértices, 10 arestas, grau$^e(a)$ =grau$^e(c) = 3$, grau$^e(b) = 4$, grau$^s(a)$ =grau$^s(c) = 4$, grau$^s(b) = 2$,

64.6. orientado, 4 vértices, 18 arestas, grau$^e(a) = 4$, grau$^e(b) = 5$, grau$^e(c) = 6$, grau$^e(d) = 3$, grau$^s(a) = 5$, grau$^s(b) = 6$, grau$^s(c) = 4$, grau$^s(d) = 3$.

65.

	$\lvert V \rvert$	$\lvert E \rvert$	matriz adjacências	representação gráfica
65.1.	4	6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	 K_4
65.2.	5	4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
65.3.	5	6	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
65.4.	4	4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	 C_4
65.5.	5	8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	 W_4
65.6.	8	12	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	 Q_3

66. **66.1.** $v = 6; e = 6; deg(a) = 2, deg(b) = 4, deg(c) = 1, deg(d) = 0, deg(e) = 2, deg(f) = 3;$
66.2. $v = 5; e = 13; deg(a) = 6, deg(b) = 6, deg(c) = 6, deg(d) = 5, deg(e) = 3;$
66.3. $v = 9; e = 12; deg(a) = 3, deg(b) = 2, deg(c) = 4, deg(d) = 0, deg(e) = 6, deg(f) = 0; deg(g) = 4; deg(h) = 2; deg(i) = 3.$

67. **67.1.** $v = 4, e = 7, deg^e(a) = 3, deg^e(b) = 1, deg^e(c) = 2, deg^e(d) = 1,\ deg^s(a) = 1, deg^s(b) = 2, deg^s(c) = 1, deg^s(d) = 3;$
67.2. $v = 4, e = 8, deg^e(a) = 2, deg^e(b) = 3, deg^e(c) = 2, deg^e(d) = 1,\ deg^s(a) = 2, deg^s(b) =$

$4, deg^s(c) = 1, deg^s(d) = 1;$

67.3. $v = 5, e = 13,\ deg^e(a) = 6, deg^e(b) = 1, deg^e(c) = 2, deg^e(d) = 4, deg^e(e) = 0,\ deg^s(a) = 1, deg^s(b) = 5, deg^s(c) = 5, deg^s(d) = 2, deg^s(d) = 2, deg^s(e) = 0.$

68. **68.1.** Sim; **68.2.** Não.

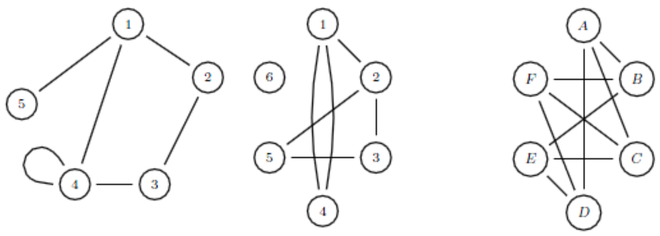
69. São todos isomorfos;

70. **70.1.** **(a)** Caminho de comprimento 4; não é caminho simples; não é circuito; **(b)** Não é caminho, porque não existe (c, a); **(c)** Não é passeio, porque não existe (b, a); **(d)** Circuito de comprimento 5.

70.2. **(a)** Caminho simples de comprimento 4; não é circuito; **(b)** Caminho; não é caminho simples; circuito de comprimento 4; **(c)** Não é caminho, porque não existe (d, b); **(d)** Não é caminho, porque não existe (b, d).

71. Ambos são conexos mas não fortemente conexos.

72. **72.1.**

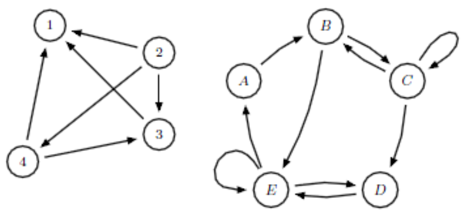


72.2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

72.3. $G_1 : grau(1) = 3, grau(2) = 2, grau(3) = 2, grau(4) = 3, grau(5) = 1;$
$G_2 : grau(1) = 3, grau(2) = 3, grau(3) = 2, grau(4) = 2, grau(5) = 2, grau(6) = 0;$
$G_3 : grau(A) = 3, grau(B) = 3, grau(C) = 3, grau(D) = 3, grau(E) = 3, grau(F) = 3.$

72.4. G_1: 2 caminhos; G_2: 0 caminhos; G_3: 0 caminhos. **72.5.** G_3; **72.6.** G_1 e G_3.

73. **73.1.**



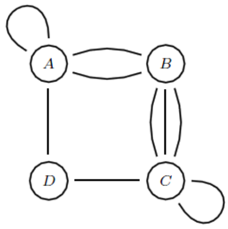
73.2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

73.3. $G_1 : grau^e(1) = 3; grau^e(2) = 0, grau^e(3) = 2; grau^e(4) = 1;\ grau^s(1) = 0; grau^s(2) = 3; grau^s(3) = 1; grau^s(4) = 2;$ $G_2 : grau^e(A) = 1; grau^e(B) = 2; grau^e(C) = 2; grau^e(D) = 2; grau^e(E) = 3; grau^s(A) = 1; grau^s(B) = 2; grau^s(C) = 3; grau^s(D) = 1; grau^s(E) = 3.$ **73.4.** G_1: 1 caminho; G_2: 1 caminho.

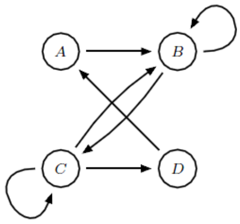
73.5. Verdadeira.

73.6. (A, B, C, D, E, A) é um caminho fechado que passa por todos os vértices, portanto existe um caminho entre quaisquer dois vértices.

74. **74.1.**



74.2.



74.3. Não, pois não é simétrica.

74.4. Sim, (A,B,C,D,A) é um caminho fechado que passa por todos os vértices, portanto existe um caminho entre quaisquer dois vértices.

75. **75.1.** Por exemplo, (d, d, a, b, c, d, a, b);

75.2. Existem 153 circuitos de comprimento 4. `sum(diag(M^4))= 153`. Por exemplo, (a, b, c, d, a).

75.3. Por exemplo, (a, b, c, d, d, a, c, a) de comprimento 7.

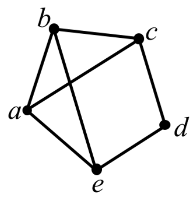
76. **76.1.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

76.2. 10. **76.3.** (A, A, B, D, C), (A, B, B, D, C), (A, E, B, D, C), (A, E, C, D, C), (A, A, E, D, C), (A, E, E, D, C), (A, A, A, E, C), (A, E, A, E, C), (A, A, E, E, C) e (A, E, E, E, C).

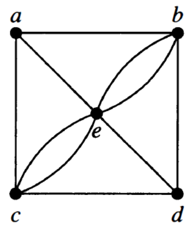
2.2 Caminhos Eulerianos e Hamiltonianos

77. Determine, justificando, se cada um dos grafos seguintes admite um circuito de Euler.
Caso exista tal circuito construa-o, caso contrário construa, se possível, um caminho de Euler.

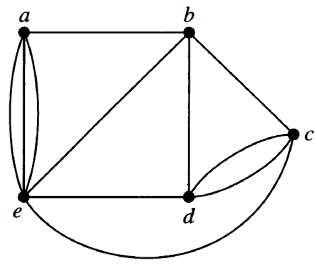
77.1.



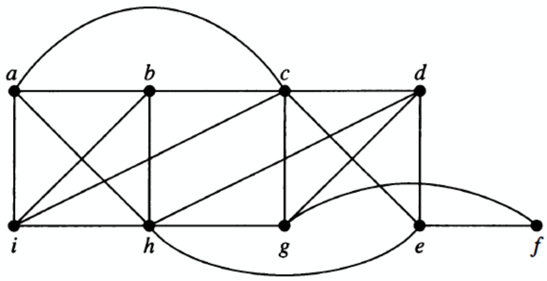
77.2.



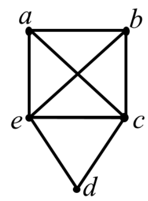
77.3.



77.4.

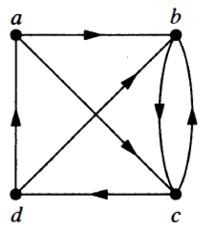


77.5.

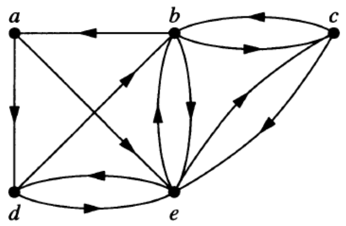


78. Determine, justificando, se cada um dos grafos orientados seguintes tem um circuito de Euler. Caso exista tal circuito construa-o, caso contrário construa, se possível, um caminho de Euler.

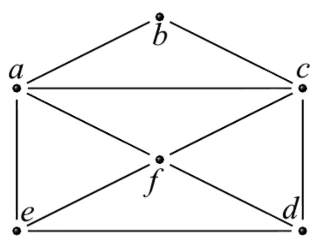
78.1.



78.2.

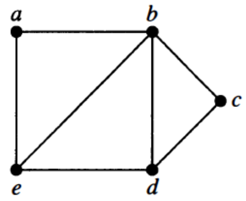


79. Determine um caminho Euleriano para o grafo seguinte, usando o Algoritmo de Fleury.
Faça o mesmo, caso possível, para cada um dos grafos dos dois exercícios anteriores.

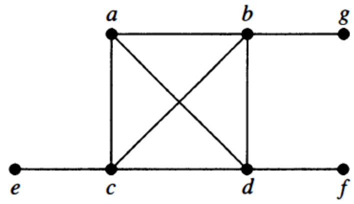


80. Determine, justificando, se cada um dos grafos seguintes tem um circuito ou um caminho Hamiltoniano.
Para cada um verifique ainda se são verificadas as condições dos Teoremas de Dirac e de Ore.

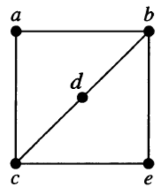
80.1.



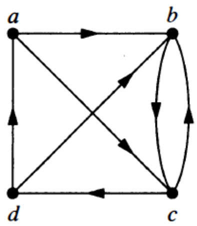
80.2.



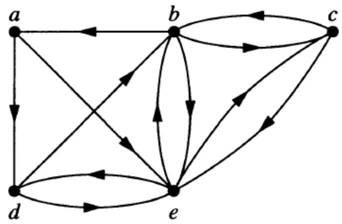
80.3.



80.4.

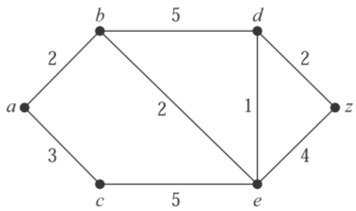


80.5.

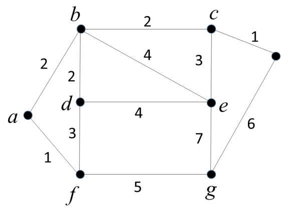


81. Usando o Algoritmo de Dijkstra encontre o caminho mais curto entre a and z para os seguintes grafos ponderados:

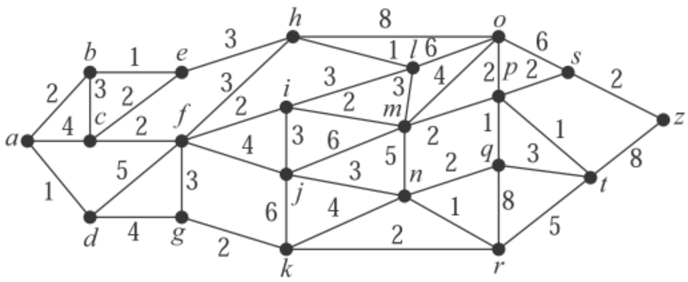
81.1.



81.2.



81.3.



82. Encontre o caminho mais curto entre quaisquer dois vértices dos grafos da questão anterior.

Soluções:

77.

77.1. Não tem nenhum circuito nem caminho de Euler.

77.2. Não tem nenhum circuito de Euler mas tem caminhos de Euler; Um exemplo de um caminho de Euler é: $a, b, d, e, b, e, c, e, a, c, d$.

77.3. Tem circuitos de Euler. Por exemplo, $a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a$;

77.4. Tem circuitos de Euler. Por exemplo, $a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a$;

77.5. $deg(a) = deg(b) = 3$, $deg(c) = deg(e) = 4$ e $deg(d) = 2$, portanto, não tem nenhum circuito de Euler mas tem caminhos de Euler. Por exemplo, $a, e, d, c, b, e, c, a, b$.

78.

78.1. Não tem nenhum circuito nem caminho de Euler.

78.2. Não tem nenhum circuito de Euler; Um caminho de Euler é: $a, d, e, d, b, a, e, c, e, b, c, b, e$.

79. —

80. **80.1.** a, b, c, d, e, a é um circuito Hamiltoniano.

80.2. Não existe nenhum circuito Hamiltoniano, pois sempre que um dado caminho chega a e não teria para onde ir de seguida.

80.3. Não existe nenhum circuito Hamiltoniano, pois todo a aresta do grafo é incidente num vértice de grau 2 e portanto está no circuito.

81. **81.1.** a, b, e, d, z;

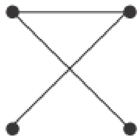
81.2. ;

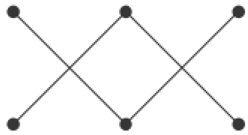
81.3. $a, b, e, h, l, m, p, s, z$.

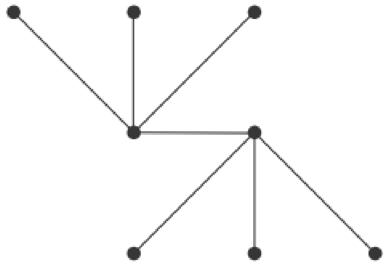
82. —

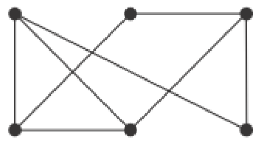
2.3 Árvores e suas aplicações

83. Indique, justificando quais dos seguintes grafos são árvores.

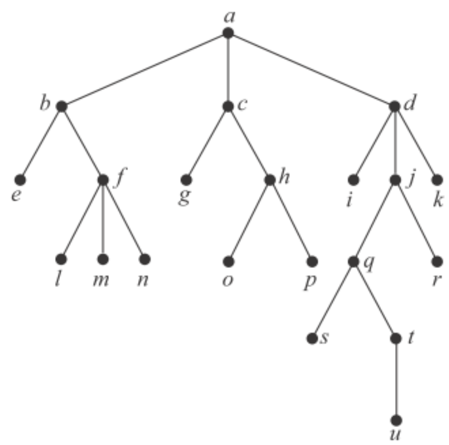
83.1. 

83.2. 

83.3. 

83.4. 

84. Considere a árvore:



Indique:

84.1. a raiz; **84.2.** os vértices internos; **84.3.** as folhas;

84.4. os filhos de j; **84.5.** o pai de h; **84.6.** os irmãos de o;

84.7. os vértices ascendentes de m;

84.8. os vértices descendentes de b;

84.9. se a árvore é m-ária plena para algum $m \in \mathbb{N}$;

85. Relativamente à árvore apresentada na pergunta anterior, desenhe uma sua sub-árvore com raiz:

85.1. a; **85.2.** c; **85.3.** e.

86. Desenhe uma árvore binária plena com 15 vértices que represente uma rede de computadores com 15 processadores.

87. Desenhe a árvore binária que represente as seguintes expressões

87.1. $a + (b \times c - d)$;

87.2. $4(x + 2)$;

87.3. $(2 + x) - (3y)$;

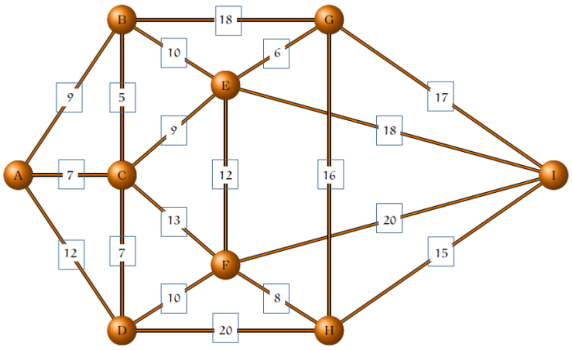
87.4. $(3 + 6) \times (10 + 45/9)$;

87.5. $[(x - 2) \times 3] + (5 + 4)$;

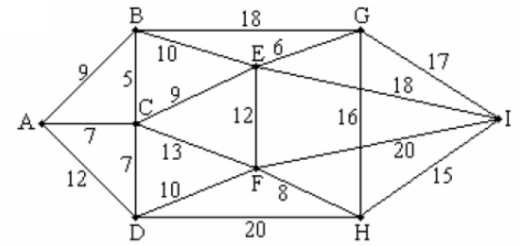
87.6. $(x + y)/(3y + 9)$.

88. Usando o algoritmo de Kruskal, determine as árvores geradoras de custo mínimo dos seguintes grafos:

88.1.



88.2.



Grafos e árvores e as suas aplicações

89. Observe o seguinte mapa das cidades do distrito do Porto.

89.1. Represente graficamente um grafo em que cada vértice é uma cidade do distrito do Porto e duas cidades são adjacentes se têm uma fronteira comum.

89.2. Dê um exemplo de um passeio entre Porto e Amarante que:

89.2.1. não seja um trajeto nem um caminho;

89.2.2. seja um trajeto;

89.2.3. seja um caminho.

89.3. Dê um exemplo de um passeio fechado com início e fim no Porto e a passar por Amarante que:

89.3.1. seja um circuito;

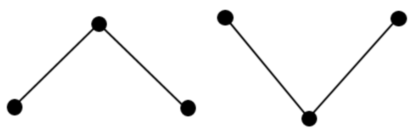
89.3.2. seja um ciclo.

90. Considere que um grafo das palavras é definido de forma a que cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma uma letra numa posição. Por exemplo, *rato* e *ramo* são adjacentes, enquanto *rato* e *rota* não são. Faça uma representação gráfica do grafo definido pelo seguinte conjunto de palavras e diga se é conexo ou não:

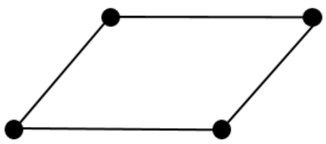
$$\{\textit{ramo, rara, rato, rata, remo, reta, riba, rima, rola, rolo, rota, roto}\}$$

Soluções:

83. O grafo **1.** é uma árvore, pois é um grafo conexo com 4 vértices e $4 - 1 = 3$ arestas.
O grafo **2.** é uma floresta, pois é uma grafo não conexo com duas componentes conexas:

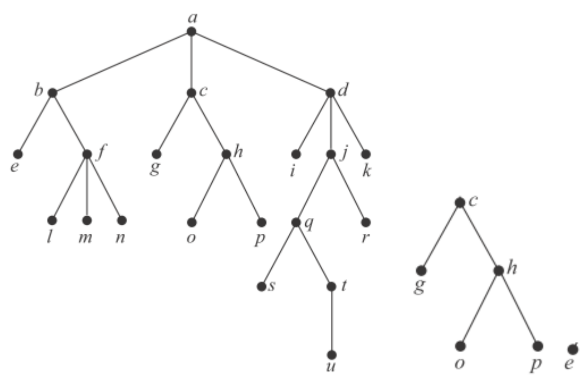


O grafo **3.** é uma árvore, pois é um grafo conexo com 8 vértice e $8 - 1 = 7$ arestas.
O grafo **4.** não é uma árvore, pois tem um circuito:



84. **84.1.** a; **84.2.** $b, f, c, , h, d, j, q, t$; **84.3.** $e, l, m, n, g, o, p, i, s, u, u, r, k$; **84.4.** q, r; **84.5.** c; **84.6.** p; **84.7.** a, f, b; **84.8.** e, f, l, m, n; **84.9.** Não.

85.



86. –

87. **87.1.** **87.2.** **87.3.** **87.4.** **87.5.** **87.6.**

88. A árvore é $T = \{(B, C), (E, G), (A, C), (C, D), (F, H), (C, E), (D, F), (H, I)\}$ e o custo é $5 + 6 + 7 + 7 + 8 + 9 + 10 + 15 = 67$.

89. Consideremos PV - Póvoa de Varzim, VC - Vila do Conde, M - Matosinhos, P - Porto, VN - Vila Nova de Gaia, MA - Maia, G - Gondomar, ST - Santo Tirso, V - Valongo, PF - Paços de Ferreira, PA - Paredes, PN - Penafiel, L - Lousada, F - Felgueiras, MC - Marco de Canaveses, B - Baião, AMT - Amarante.
89.1. –; **89.2.** $P, G, V, PA, G, PN, MC, PN, AMT$; P, G, PA, PN, AMT; P, G, PA, PN, AMT;

89.3. $P, G, PN, MC, AMT, L, PA, V, M, MA, M, P$.

90. Não é conexo.

Capítulo 3

Teoria dos Números

3.1 Divisibilidade e aritmética modular

91. Diga quais dos números seguintes são divisíveis por 17.
91.1. 68 **91.2.** 84 **91.3.** 357 **91.4.** 1001.

92. Mostre que se $a|b$ e $b|a$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a = b$ ou $a = -b$.

93. Mostre que se $a, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ and $b \in \mathbb{Z}$, tais que $ac|bc$, então $a|b$.

94. Indique os quocientes e os restos das seguintes divisões. Para cada uma confirme o resultado usando as funções `modulo` e `fix` do Scilab.
94.1. $19/7$; **94.2.** $-111/11$; **94.3.** $789/23$; **94.4.** $1001/13$; **94.5.** $0/19$; **94.6.** $3/5$; **94.7.** $-1/3$; **94.8.** $4/1$.

95. Que horas indica um relógio de pulso analógico:
95.1. 80 horas após as 11:00? **95.2.** 40 horas antes das 12:00?
95.3. 100 horas após as 6:00?

96. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \equiv 4 \pmod{13}$, e $b \equiv 9 \pmod{13}$. Determine o inteiro $0 \leq c \leq 12$ tal que:

96.1. $c \equiv 9a \pmod{13}$; **96.2.** $c \equiv 11b \pmod{13}$; **96.3.** $c \equiv a + b \pmod{13}$;

96.4. $c \equiv 2a + 3b \pmod{13}$; **96.5.** $c \equiv a^2 + b^2 \pmod{13}$; **96.6.** $c \equiv a^3 - b^3 \pmod{13}$.

97. Mostre que se $n, k \in \mathbb{Z}^+$, então $\lceil n/k \rceil = \lfloor (n-1)/k + 1 \rfloor$.

98. Determine:
98.1. $13 \bmod 3$; **98.2.** $-97 \bmod 11$; **98.3.** $155 \bmod 19$; **98.4.** $-221 \bmod 23$.

99. Determine a div m e $a \bmod m$ para:

99.1. $a = 228, m = 119$; **99.2.** $a = 9009, m = 223$; **99.3.** $a = -10101, m = 333$; **99.4.** $a = -765432, m = 38271$.

100. Indique todos os inteiros entre -100 e 100 que são congruentes com -1 módulo 25.

101. Diga se cada dos seguintes inteiros é congruente com 5 módulo 17:

101.1. 80 **101.2.** 103 **101.3.** 122

102. Determine:
102.1. $(-133 \bmod 23 + 261 \bmod 23) \bmod 23$; **102.2.** $(457 \bmod 23 \times 182 \bmod 23) \bmod 23$;
102.3. $(99^2 \bmod 32)^3 \bmod 15$; **102.4.** $(89^3 \bmod 79)^4 \bmod 26$.

103. Mostre que se $n|m$, onde n e m são inteiros maiores que 1, e se $a \equiv b(\bmod m)$, onde a e b são inteiros, então $a \equiv b \ (\bmod n)$.

104. Encontre contra exemplos para cada uma das afirmações seguintes:

104.1. Se $ac \equiv bc \ (\bmod m)$, onde a, b, c e m são inteiros com $m \geq 2$, então $a \equiv b(\bmod m)$.

104.2. Se $a \equiv b(\bmod m)$ e $c \equiv d(\bmod m)$, onde a, b, c, d e m são inteiros com $c, d > 0$ e $m \geq 2$, então $ac \equiv bd \ (\bmod m)$.

105. Determine se cada um dos números seguintes são primos:
105.1. 21; **105.2.** 29; **105.3.** 71; **105.4.** 97; **105.5.** 111; **105.6.** 143.

106. Encontre a fatorização em números primos de:
106.1. 88; **106.2.** 126; **106.3.** 729; **106.4.** 1001; **106.5.** 1111; **106.6.** 899.

107. Quais os números inteiros menores que 30 que são primos com 30?

108. Determine quais dos números seguintes são primos entre si dois a dois:
108.1. $11, 15$ e 19; **108.2.** $14, 15$ e 21; **108.3.** $12, 17, 31$ e 37.

109. Calcule $\text{mdc}(24, 36)$ e $\text{mdc}(22, 17)$.

110. Os inteiros 17 e 21 são primos entre si?

111. Calcule $\text{mdc}(2^2 \times 3^3 \times 5^2, 2^5 \times 3^3 \times 5^2)$ e $\text{mdc}(2^2 \times 7, 5^4 \times 13)$.

112. Determine $\text{mdc}(412, 664)$ usando o algoritmo de Euclides.

3.2 Resolução de Congruências e suas aplicações

113. Que sequência de números pseudo-aleatórios é gerada por $x_{n+1} = (4x_n + 1) \bmod 7$ com raiz $x_0 = 3$?

114. Indique seis inteiros congruentes com 4 módulo 12.

115. Resolva em $\mathbb{Z}_7$ as equações $3 +_7 5 = x$, $3 \times_7 3 = x$, $3 +_7 x = 0$ e $3 \times_7 x = 1$.

116. Resolva as congruências $3x \equiv_7 4$ e $2x \equiv_{17} 7$.

117. Mostre que 937 é um inverso de 13 módulo 2436.

3.3 Criptografia

118. Que letra substitui J com a função encriptadora $f(n) = (7n + 3) \bmod 23$?

119. Desencripte a mensagem $*PIBE * \sqcup D \sqcup Z@P$ onde $A \leftrightarrow 0, \ldots Z \leftrightarrow 25, * \leftrightarrow 26, @ \leftrightarrow 27, \sqcup \leftrightarrow 28$ (esta designa o espaço em branco), e $f(p) = (22p + 25) \bmod 29$.

120. Encripte a mensagem "HELP" usando o sistema RSA com $p = 43, q = 59$ e $a = 13$.

121. Encripte a mensagem "MATEMATICA" traduzindo as letras por números, aplicando a seguinte função de encriptação e depois traduzindo os números de volta em letras: $f(p) = (p + 3) \bmod 26$ (cifra de César).

122. Encripte a mensagem "MATEMATICA" traduzindo as letras por números, aplicando a seguinte função de encriptação e depois traduzindo os números de volta em letras:
(i)$f(p) = (2p + 3) \bmod 23$;
(ii) $f(p) = (2p + 3) \bmod 26$;

123. Desencripte mensagem "ZIV LFRTFP" que foi encriptada usando a função $f(p) = (2p+3) \bmod 23$.

124. Encripte a mensagem "DESCOBRIMOS O CODIGO" traduzindo as letras por números, aplicando a seguinte função de encriptação e depois traduzindo os números de volta em letras:
(a) $f(p) = (p + 3) \bmod 26$ (cifra de César)
(b) $f(p) = (3p + 7) \bmod 26$.

125. Desencripte a mensagem "HLX BEL", que foi encriptada com a função $f(p) = (6p + 1) \bmod 23$, identificando as 23 letras do alfabeto pelos inteiros 0, 1, 2, ..., 22.

126. Encripte as mensagens "STOP" e "ATAQUE" usando o sistema RSA com $n = 43 \times 59 = 2537$ e $a = 13$.
Se recebermos a mensagem 0981 0461 encriptada com esse sistema, como a desencriptamos? E a mensagem 2081 2182?
Recorra a recursos computacionais para poupar tempo.

3.4 Técnicas de contagem, probabilidades e Cadeias de Markov

127. Num centro de computação existem 32 microcomputadores. Cada microcomputador tem 24 portas. Quantas portas diferentes para um microcomputador do centro existem?

128. Quantas strings de bits de comprimento sete existem?

129. Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ números inteiros positivos. Qual o valor de k após o código seguinte:

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
    for i2 := 1 to n2
        .
        .
        .
        for im := 1 to nm
            k := k + 1
```

130. Um aluno pode escolher um projeto de computador de uma das três listas. As três listas contêm 23, 15 e 19 projetos possíveis, respetivamente. Nenhum projeto está em mais de uma lista.
Quantos projetos possíveis existem para escolher?

131. Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_m$ números inteiros positivos. Qual o valor de k após o código seguinte:

$$
\begin{array}{l}
k := 0 \\
\textbf{for } i_1 := 1 \textbf{ to } n_1 \\
\quad k := k + 1 \\
\textbf{for } i_2 := 1 \textbf{ to } n_2 \\
\quad k := k + 1 \\
\quad\quad \cdot \\
\quad\quad \cdot \\
\quad\quad \cdot \\
\textbf{for } i_m := 1 \textbf{ to } n_m \\
\quad k := k + 1
\end{array}
$$

132. Numa determinada versão da linguagem de computador BASIC, o nome de uma variável é uma sequência de caracteres de um ou dois caracteres alfanuméricos, onde letras maiúsculas e minúsculas não são distinguidas.
(Um caratere alfanumérico é uma das 26 letras em português ou um dos 10 dígitos.)
Além disso, um nome de variável deve começar com uma letra e deve ser diferente das cinco strings de dois caracteres que são reservados para uso de programação.
Quantos nomes de variáveis diferentes existem nesta versão do BASIC?

133. Cada utilizador em um sistema de computador tem uma senha, que é constituída de seis a oito caracteres, onde cada caratere é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve conter pelo menos um dígito.
Quantas senhas possíveis existem?

134. Contagem de endereços da Internet
Na Internet, que é composta de redes físicas interconectadas de computadores, a cada computador (ou mais precisamente, cada conexão de rede de um computador) é atribuído um endereço na Internet. Na versão 4 do Internet Protocol (IPv4), um endereço é uma sequência de 32 bits. Começa com um número de rede (*netid*).
O *netid* é seguido por um número de *host* (*hostid*), que identifica um computador como um membro de uma rede particular.
São utilizadas três formas de endereços, com números diferentes de *bits* usados para *netids* e *hostids*.

- Os endereços de **classe A**, usados para as redes maiores, consistem em 0, seguido por um *netid* de 7 bits e um *hostid* de 24 bits.
- Os endereços de **classe B**, usados para redes de tamanho médio, consistem em 10, seguidos por um *netid* de 14 bits e um hosted de 16 bits.
- Os endereços de **classe C**, utilizados para as redes mais pequenas, consistem em 110, seguido por um *netid* de 21 bits e um hostid de 8 bits.

Existem várias restrições nos endereços devido a usos especiais:

- 1111111 não está disponível como o netid de uma rede de Classe A,
- e os hostids consistindo em todos os 0s e todos os 1s não estão disponíveis para uso em qualquer rede.

- Um computador na Internet tem um endereço Classe A, um Classe B ou um endereço Classe C. (Além dos endereços das classes A, B e C, existem também endereços de classe D, reservados para uso em multidifusão quando vários computadores são endereçados em uma única vez, consistindo de 1110 seguido de 28 bits e endereços de classe E reservados para uso futuro , Consistindo de 11110 seguido por 27 bits. Nem classe D nem endereços de classe E são atribuídos como o endereço IPv4 de um computador na Internet.)

Quantos endereços IPv4 diferentes estão disponíveis para computadores na Internet?

135. Quantas sequências de bits de comprimento oito começam com 1 bit ou terminam com os dois bits 00?

136. Uma empresa de informática recebe 350 candidaturas de licenciados em informática para um trabalho de planeamento de uma linha de novos servidores Web. Suponha que 220 desses candidatos se especializassem em ciências da computação, 147 se especializassem em negócios e 51 se formassem ciências da computação e negócios.
Quantos desses candidatos não se especializaram em informática ou em negócios?

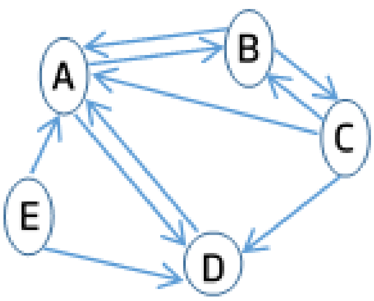
137. Quantas sequências de bits de comprimento quatro não têm dois 1s consecutivos?
(Sugestão: Use um diagrama em árvore.)

138. Um *playoff* entre duas equipas consiste no máximo de cinco jogos. A primeira equipa que ganhar três jogos ganha o *playoff*.
De quantas maneiras diferentes podem ocorrer os *playoffs*?

139. Quantas permutações das letras ABCDEFGH contêm a string ABC?

140. Considere o conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, $\{1, 3, 4\}$ é uma 3-combinação de S.
(Observe que $\{4, 1, 3\}$ é a mesma 3-combinação, porque a ordem na qual os elementos de um conjunto são listados não importa.)

141. Considere rede constituída por 5 páginas web A, B, C, D, E com os links mostrados na imagem abaixo:



Suponha que, em cada passo, escolhemos de forma aleatória um link da página web onde estamos.

141.1. Escreva a matriz de transição do processo Markov subjacente.

141.2. Calcule a probabilidade, de começando na página A, 5 passos depois estar na página D, A e C?

Soluções:

91. S; N; S; N. **92.** – **93.** – **94.** 2, 5; -10, 10; 34, 7; 77, 0; 0, 0; 0, 3; -1, 2; 4, 0. **95.** 7:00; 8:00; 10:00. **96.** 10; 8; 0; 9; 6; 11. **97.** – **98.** 1; 2; 3; 9. **99.** 1, 109; 40, 89; -30, 222; -20, 38259.

```
--> a=-765432; m=38271;fix(a/m),pmodulo(a, m)
  ans  =
  -20.
 ans  =
   38259.
```

100. -1, -26, -51, -76, 24, 49, 74, 99. **101.** N, N, N. **102.** 13; 6; 9; 0. **103.** Seja $m = tn$. Porque $a \equiv b($ mod $m)$ existe um inteiro s tal que $a = b + sm$. Então, $a = b + (st)n$, e portanto, $a \equiv b($ mod $n)$. **104.** Seja $m = c = 2$, $a = 0$, e $b = 1$. Então $0 = ac \equiv bc = 2 \mod 2$, mas $0 = a \equiv b = 1 \mod 2$. Seja $m = 5, a = b = 3, c = 1$, and $d = 6$. Então $3 \equiv 3($ mod 5) e $1 \equiv 6($ mod 5), mas $3^1 = 3 \neq 4 \equiv 729 = 3^6$ mod 5. **105.** N; S; S; S; N; N. **106.** $88 = 2^3 \times 11$; $126 = 2 \times 3^2 \times 7$; $729 = 3^6$; $1001 = 7 \times 11 \times 13$; $1111 = 11 \times 101$ $899 = 29 \times 31$. **107.** $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$; **108.** 11 e 15, 15 e 19, 11 e 19; 14 e 15; todos. **109.** 12 e 1; **110.** Sim; **111.** $\text{mdc}(2^2 \times 3^3 \times 5^2, 2^5 \times 3^3 \times 5^2) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ e $\text{mdc}(2^2 \times 7, 5^4 \times 13) = 1$; **112.** 4.

113. 3, 6, 4, 3, ... **114.** Qualquer número da forma $4 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, 16, 64, 124, 136, -116, -8. **115.** 1; 2; 4; 5. **116.** 6; 12; **117.** $937 \times 13 \equiv 1 \mod 2436$.

118. V.

119. $f^{-1}(p) = (4p + 16)\text{mod}29$, E S T U D E M _ M A I S

120. 0981 0461.

```
--> x=0704; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   981.
--> x=1115; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   461.
```

121. P D W H P D W L F D.

122. **(a)** C D R M C D R U H D; **(b)** B D Q L B D Q T H D.

123. X P V L Q B T U B S

124. **(a)** G H V F R E U L P R U R F R G L J R; **(b)** Q T J N X K G F R X J X Q X Q F Z X.

125. $f^{-1}(p) = (4p + 19)\text{mod}23$, B O M A N O.

126. 2081 2182; 2299 1841 0245.

```
--> x=1819; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   2081.
--> x=1415; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   2182.
   --> x=0019; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   2299.
```

```
--> x=0016; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   1841.
--> x=2004; x_new=1; for k=1:13, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   245.
```

$b = 937$, $v(x) = x^{937}$.

```
--> x=0981; x_new=1; for k=1:937, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   704.
--> x=0461; x_new=1; for k=1:937, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   1115.
```

0704 1115, ou seja, HELP;

```
--> x=2081; x_new=1; for k=1:937, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   1819.
--> x=2182; x_new=1; for k=1:937, x_new=pmodulo(x*x_new,43*59);end,x_new
 x_new  =
   1415.
```

2081 2182, ou seja, STOP;

127. $32 \times 24 = 768$ portas. **128.** $2^7 = 128$. **129.** $n_1 n_2 \ldots n_m$. **130.** $23 + 15 + 19 = 57$.

131. $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. **132.** $26 + 26 \times (26 + 10) - 5 = 957$ **133.** $(36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8) =$ 2 612 282 842 880. **134.** $(2^7 - 1) \times (2^{24} - 2) + (2^{14} \times (2^{16} - 2)) + (2^{21} \times (2^8 - 2))$.

135. $2^7 + 2^6 - 2^5$. **136.** $350 - (220 + 147 - 51) = 34$. **137.** 8. **138.** 20. **139.** $6! = 720$

141.

```
-->T=zeros(5,5); T(1,2)=0.5;T(1,4)=0.5; T(2,1)=0.5;T(2,3)=0.5;
 -->T(3,1)=1/3;T(3,2)=1/3;T(3,4)=1/3; T(4,1)=1; T(5,1)=0.5;T(5,4)=0.5;
```

aproximadamente 42%, 14% e 2%.