ESTGF POLITÉCNICO DO PORTO	Tipo de Prova Exame da Época de Recurso	Ano lectivo 2012/2013	Data 09-07-2013
	Curso Engenharia Informática		Hora 10:00
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica		Duração 2 horas

Observações:

- Para a realização do exame de ALGA os alunos podem utilizar:
  - máquina de calcular gráfica;
  - um formulário A4 manuscrito pelo aluno que está a realizar o teste (só frente).
- Não são admitidas fotocópias de formulários ou formulários feitos em PC.
- Os alunos devem apresentar todos os cálculos necessários à resolução dos problemas e as justificações necessárias.
- No caso de utilizarem as funcionalidades de matrizes da máquina de calcular devem indicar todos os passos que realizaram.

Bom trabalho!

Aldina Correia, Eliana Costa e Silva e Teófilo Melo

Questão	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	4.1	4.2	5	6.1	6.2.1	6.2.2	7.1	7.2	7.3	Total
Cotação	1	1,5	1	2	2	2	1,5	1	2	1	1	1	1	1	1	20

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere que o seguinte output do Scilab:

```
-->a=(x+%i)/(1+%i)-(y-2*%i)/2
 a  =
  - 1.5 + 1.5i
-->RI=[real(a) imag(a)]
 RI  =
  - 1.5     1.5
-->[N,D] = rat(RI)
 D  =
    2.     2.
 N  =
  - 3.     3.
```

1.1. Determine os números reais `x` e `y`.

1.2. Considere $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 =$`a+1`. Determine o número complexo $w = \frac{{z_1}^4}{z_2}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.3. Represente no plano de Argand a seguinte condição $|z + z_1| < |\mathrm{a}| \vee \mathrm{Re}(z - i) \leq 0$.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz X, tal que $X^{-1}A + C^2 = CB$ (Sugestão: Comece por mostrar que $X = A(CB - C^2)^{-1}$.

3. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + ay + z = a - 1 \\ y + az = a^2 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}.$$

3.1. Considere que A é a matriz do sistema. Determine a de forma a que exista A^{-1}.

3.2. Discuta o sistema em função do parâmetro a.

4. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x,y e z, cuja matriz do sistema A e a matriz dos termos independentes B, definidas em Scilab, são:

```
-->A=[1 0 -1;0 1 2;1 1 0];

-->B=[-1; 0 ;1];
```

4.1. Averigue se o sistema é de Cramer;

4.2. Observe o excerto de código Scilab seguinte e respetivo output:

```
-->rref([A B])
 ans  =
    1.     0.     0.   - 3.
    0.     1.     0.     4.
    0.     0.     1.   - 2.
```

Classifique o sistema, justificando.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule os valores próprios e vectores próprios associados à matriz A.

6. Considere o espaço vetorial das matrizes reais do tipo 2×2:

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

6.1. Mostre que o conjunto $\mathrm{S} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a_{11} = a_{21} \wedge a_{12} = a_{22}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

6.2. Considere os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

6.2.1. Averigue se $\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \langle v_1, v_2 \rangle$;

6.2.2. Determine uma base de S e indique a sua dimensão.

7. Dado o plano α de equação cartesiana $x - y + 2z = 0$, a reta r de equação vetorial $(x, y, z) = (1, -1, 0) + k(0,1,2)$ e o ponto $A = (0, -1, 1)$, determine:

7.1. Os ângulos que a reta r faz com o plano α.

7.2. As equações cartesianas da reta s que passa pelo ponto A e é paralela à reta r.

7.3. A distância do ponto A ao plano α.