Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ficha de Exercícios - Determinantes

LEI e LSIRC

Ano Letivo 2023/2024

Algumas considerações sobre Determinantes

1. São iguais os determinantes associados a matrizes transpostas, isto é, $|A| = |A^T|$;

2. Se multiplicarmos todos os elementos de uma fila (uma linha ou uma coluna) de um determinante por um escalar $k \in \mathbb{R}$, o determinante vem multiplicado por esse escalar, isto é, $k\,|A|$;

3. O valor de um determinante muda de sinal quando trocarmos a posição relativa de duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas);

4. É nulo um determinante com duas filas paralelas iguais ou proporcionais;

5. É nulo um determinante onde todos os elementos de uma fila (uma linha ou uma coluna) são iguais a zero;

6. O determinante associado a uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos principais;

7. Se dois determinantes têm a mesma ordem e tiverem no máximo uma fila diferente, a soma dos dois determinantes é um novo determinante que mantém as filas que são iguais e só se somam os elementos homólogos da fila diferent;

8. Se num determinante somarmos a uma fila uma combinação linear de filas paralelas, o determinante não se altera, por exemplo, $l_i -> l_i + kl_j$;

9. O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes, isto é, $|AB| = |A||B|$;

10. As filas paralelas de uma matriz são linearmente dependentes se e só se o seu determinante é nulo.

11. O **menor complementar do elemento** a_{ij} da matriz A de ordem n representa-se por M_{ij} e é o determinante de ordem $n-1$ que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j na matriz A;

12. O **complemento algébrico** de a_{ij} da matriz A de ordem n representa-se por A_{ij} e é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$;

13. **Teorema de Laplace**, o determinante da matriz A de ordem n (fixando a linha i) é dado por |A|=$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$;

14. A **matriz adjunta** da matriz A de ordem n é uma nova matriz transposta da matriz dos complementos algébricos da matriz A, isto é, $Adj(A) = A_{ij}^T$;

15. A **matriz inversa** da matriz A de ordem n é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj(A)$;

16. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Cálculo de Determinantes

1. Calcule os **determinantes** das seguintes matrizes de ordem 2 e de ordem 3, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Calcule os **determinantes, utilizando apenas o Teorema de Laplace**, das seguintes matrizes.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule os **determinantes** das seguintes matrizes.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Utilizando apenas as propriedades dos determinantes, diga qual o valor dos seguintes determinantes:
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

5. Verifique sem desenvolver, apenas utilizando as propriedades dos determinantes, que os seguintes determinantes são nulos:
$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}.$$

6. Adicione, se possível, os seguintes determinantes sem os desenvolver:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Considere o seguinte determinante:
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 0 \end{vmatrix},$$
verifique, sem o desenvolver, apenas utilizando as propriedades dos determinantes, que o determinante é múltiplo de 9.

8. Sem efectuar o desenvolvimento (utilizando apenas as propriedades dos determinantes), diga quais os valores de $a \in \mathbb{R}$ que anulam o determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2a \\ 2 & -1 & 3 \\ a^2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

9. Diga se é verdadeira ou falsa a proposição, sem desenvolver o determinante
$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -abcd.$$

10. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} m-\frac{1}{3} & m & m-1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}$, sem o desenvolver, considerando que a, b, c e $m \in \mathbb{R}$

11. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, determine o valor do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{bmatrix}$, utilizando unicamente as propriedades dos determinantes, isto é, sem o desenvolver, considerando que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

12. Verifique a igualdade $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$, utilizando exclusivamente as propriedades dos determinantes e considerando que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

13. Mostre que:

$$\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4);$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Cálculo da Matriz Adjunta e da Matriz Inversa

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Determine:
    (a) o determinante da matriz A, $|A|$.
    (b) a matriz adjunta de A, $\mathrm{Adj}(A)$.
    (c) a matriz inversa de A, A^{-1}, com base nas alíneas anteriores.

15. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.
    (a) Calcule o determinante da matriz B, $|B|$.
    (b) Calcule a matriz adjunta de B, $\mathrm{Adj}(B)$.
    (c) Calcule a matriz inversa de B, B^{-1}, com base nas alíneas anteriores.
    (d) Verifique que $|B^{-1}| = 1/|B|$.

SOLUÇÕES

1. 8; 23; 3; $t^2 - 2t - 8$; 27; -18; 4; -11

2. 27; -18; 4; -11

3. -120;-38; -131

4. Todos os elementos da coluna 1 são nulos então o determinante é nulo;
   Os elementos da coluna 1 são iguais aos elementos da coluna 2 ($C_1 = C_2$) então o determinante é nulo;
   A linha dois é múltipla da linha 2, $L_2 = -2L_1$, então o determinante é nulo;
   O determinante de uma matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal, então o determinante é igual a -2.

5. O determinante é nulo porque:
   $C_2 = 5C_1$;
   $C_3 = 2C_1 + C_2$;
   $L_3 = L_1 + L_2$.

6. $\begin{vmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 5+5 & -2 & 4 \\ 1+4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 10 & -2 & 4 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; Não é possível somar.

7. $C_2 = 3C_2$ e $L_3 = 3L_3$; $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 4 \\ 3 & 18 & 0 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

8. $a = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\}$

9. $C_2 \leftrightarrow C_3$, Proposição Verdadeira.

10. $|A| = \begin{vmatrix} m-\frac{1}{3} & m & m-1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \underbrace{L_1 = L_1 + L_3}_{=} \begin{vmatrix} m & m & m \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3m \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$
    $\underbrace{|A| = |A^T|}_{=} 3m \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} \underbrace{C_1 \leftrightarrow C_3}_{=} -3m \begin{vmatrix} a & \frac{1}{3} & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} a & 3*\frac{1}{3} & 1 \\ b & 3*0 & 1 \\ c & 3*1 & 1 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 3 & 1 \end{vmatrix}$
    $= -m$

11. $|A| = 1$, desdobrar o determinante a partir da L_2; um dos determinantes é nulo porque $L_2 = 3L_1$; desdobrar o outro determinante a partir da L_3; um dos determinantes é nulo porque $L_1 = L_3$; o determinante final é igual ao dado.

12. Fazendo as seguintes operações: $C_3 = C_3 - C_2$; $C_2 = C_2 - C_1$; desdobrar $(c^2 - b^2)(c+b)(c-b)$ e $(b^2 - a^2)(b+a)(b-a)$; colocar em evidência $(b-a)(c-b)$; $C_3 = C_3 - C_2$; aplicar o T. Laplace fixando a L_1 e chega ao resultado ou como a matriz é triangular inferior, o determinante é igual ao produto dos elementos principais;

13. Fazendo as seguintes operações: $C_1 = C_1 + C_2$; colocar (t+2) da C_1 em evidência; $C_3 = C_3 + C_1$; colocar (t-2) da C_2 em evidência; $L_2 = L_2 - L_1$; aplicar o T. Laplace fixando a C_3 e chega ao resultado.

    Fazendo as seguintes operações: $C_1 = C_1 - C_2$; $C_3 = C_3 - C_2$; e aplicando o Teorema de Laplace fixando a linha 3, chega ao resultado.

14. (a) $|A| = 1$.

    (b) $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

    (c) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\,\text{Adj}(A) = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

15. (a) $|B| = -5$.

    (b) $\text{Adj}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 10 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

    (c) $B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\,\text{Adj}(B) = -\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 10 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.