ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO

Textos de

Matemática Discreta

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Eliana Costa e Silva

eos@estg.ipp.pt

Para os cursos de:

Licenciatura em Segurança Informática

em Redes de Computadores

Licenciatura em Engenharia Informática

Felgueiras, 2018/2019

O uso destes apontamentos como **único** material de estudo é fortemente desaconselhado.

O estudante deve também consultar a bibliografia recomendada indicada na Ficha da Unidade Curricular e disponível neste documento, nomeadamente, [4], [3], [1], [2].

Última atualização:

Fevereiro de 2022

Conteúdo

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Grande parte da Matemática Discreta é dedicada ao estudo de estruturas discretas, usadas para representar objetos discretos.

Muitas dessas estruturas discretas são construídos utilizando **conjuntos**, que são coleções de objetos. De entre as estruturas discretas construídas a partir de conjuntos temos as combinações - coleções não ordenada de objetos usados extensivamente em contagem; as relações - conjuntos de pares ordenados que representam relações entre os objetos; os grafos - conjuntos de vértices e arestas que ligam os vértices; e as **máquinas de estados finitos** - usadas para modelar máquinas de computação.

O conceito de uma **função** é também extremamente importante em matemática discreta. Uma função atribui a cada elemento de um primeiro conjunto exatamente um elemento de um segundo conjunto, em que os dois conjuntos não são necessariamente distintos. Elas também são usados para representar a **complexidade computacional de algoritmos** (que não iremos abordar nesta UC), para estudar o tamanho dos conjuntos, para contar objetos, e em uma infinidade de outras maneiras. Estruturas úteis, como sucessões (ou sequências) e strings são tipos especiais de funções. Neste capítulo, vamos introduzir a noção de uma sucessões, que representa conjuntos ordenados de elementos. Além disso, vamos apresentar alguns tipos importantes de sucessões e vamos mostrar como definir os termos de uma sucessão usando termos anteriores. Também vamos resolver o problema da identificação de uma sucessão a partir dos seus primeiros termos.

Com frequência encontramos somas de termos consecutivos de sucessões de números, assim como de outros conjuntos de números indexados, iremos abordar a notação de somatório e estudar alguns **somatórios** mais comuns e úteis. Podemos por exemplo encontrar tais somatórios na **análise** do número de passos **de um algoritmo** para classificar uma lista de números de modo que os seus termos estejam por ordem crescente.

As **relações** entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos. Por exemplo, na relação entre um negócio e o número de telefone do cliente, na relação entre um funcionário e o seu vencimento, relação entre uma pessoa e um parente, ... As relações podem ser utilizadas para resolver problemas tais como determinar quais pares de cidades que estão ligadas por linhas aéreas, encontrando qual a ordem viável das diferentes fases de projeto complicado, ou produzir uma maneira útil para armazenar informações em **bases de dados** de computador.

Quando um procedimento é especificado para resolver um problema, este procedimento deve **sempre** resolver corretamente o problema. Apenas testando para ver que o resultado correto é obtido para um conjunto limitado de valores não mostra que o procedimento funciona sempre corretamente. A correção de um procedimento só pode ser garantido por provar que ele dá sempre o resultado correto. Um modo de fazer tal verificação é recorrer a **indução matemática**. Técnicas de **verificação de programas** assentam neste princípio e em formulas de **recursividade** subjacentes.

1 Representação e operações sobre conjuntos

Definição 1:

Um *conjunto* é uma coleção não ordenada de objetos.

Os objetos de um conjunto são chamados os *elementos* do conjunto.

Diz-se que os elementos pertencem ao conjunto.

Notação:

Os conjuntos representam-se por letras maiúsculas e os objetos por letras minúsculas.

Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elementos do conjunto A.

Exemplo 1:

O conjunto dos números naturais menores que 5 pode ser escrito como $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplo 2:

O conjunto das vogais pode ser escrito como $V = \{a, e, i, o, u\}$.

Exemplo 3:

O conjunto de todos os números inteiros não negativos menores do que 1000 pode denotado por $X = \{0, 1, 2, \ldots, 999\}$.

A descrição dos elementos de um conjunto pode ser feita por:

- *extensão* - enumerando explicitamente todos os elementos.

  Exemplo 4:

  $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, d, g, t\}$, $C = \{amarelo, azul, castanho\}$.

- *compreensão* - especificando uma propriedade que caracteriza todos os elementos.

Exemplo 5:

$X = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$, conjunto de todos os números naturais menores do que 4.

$Y = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar e } n \leq 7\}$, conjunto de todos os números ímpares menores ou iguais a 7.

- *recursividade* - especificamos o primeiro elemento do conjunto e a regra que permite determinar os restantes.

Exemplo 6:

O conjunto, S, de todos os números positivos pares pode ser descrito como:

$$\text{(i) } 2 \in S; \text{ (ii) se } x \in S \text{ então } x + 2 \in S.$$

Alguns conjuntos usualmente utilizados em Matemática Discreta são:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$, conjunto dos números racionais;
- $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos.

Exemplo 7:

Podemos também considerar conjuntos cujos elementos são eles próprios conjuntos. O conjunto $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ contém 5 elementos e cada um deles é um conjunto.

Definição 2:

O *conjunto vazio* (ou conjunto nulo) é um conjunto que não tem elementos e representa-se por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Atenção!

É importante não confundir o conjunto $\{\emptyset\}$ (o conjunto formado pelo conjunto vazio) com o conjunto vazio. Ou seja, $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Fazendo uma analogia com um computador, o conjunto vazio pode ser visto como uma pasta vazia, e o conjunto que contém apenas o conjunto vazio pode ser entendido como uma pasta com exatamente uma pasta dentro, sendo essa pasta vazia.

Definição 3:

O *conjunto universo* é formado por todos os elementos em consideração e representa-se por U.

Definição 4:

Dado um conjunto A com exatamente n elementos distintos, em que n é um número inteiro não negativo, dizemos que A é um *conjunto finito* e que n é o *cardinal* de A. O cardinal de A representa-se por $\#A$, $\text{card}(A)$ ou $|A|$.

Exemplo 8:

$\#(\{1,2,3\}) = 3$ e $\#\emptyset = 0$.

Definição 5:

Um conjunto é dito *infinito* se ele não é finito.

Definição 6:

Um conjunto com um único elemento é chamado um *conjunto unitário*.

Exemplo 9:

O conjunto $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário uma vez que $\#(\{\emptyset\}) = 1$.

Definição 7:

Dois conjuntos A e B dizem-se iguais se todo o elemento de A está em B e todo o elemento de B está em A. Escreve-se $A = B$.

Exemplo 10:

Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{e, i, a, o, u\}$. Tem-se que $A = B$.

Exemplo 11:

Sejam $X = \{x : x \text{ é positivo e divide } 5\}$ e $Y = \{1, 5\}$. Temos que $X = Y$.

Definição 8:

O conjunto A é um *subconjunto* de B se e somente se todo o elemento de A também for um elemento de B. Escreve-se $A \subseteq B$ e diz-se que A é um *subconjunto* do conjunto B.

Exemplo 12:

Sejam $X = \{1, 2, 4, 9\}$ e $Y = \{2, 4\}$.

Temos que todos os elementos de Y são elementos de X. De facto, $2 \in Y$ e $2 \in X$, e do mesmo modo $4 \in Y$ e $4 \in X$.

Então $Y \subseteq X$.

Exemplo 13:

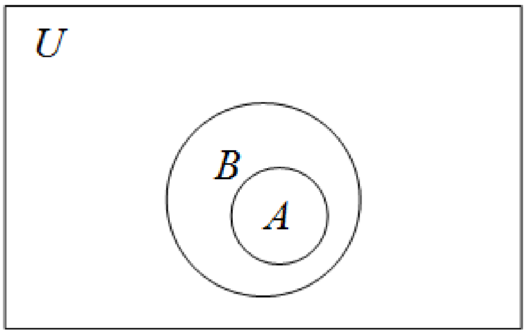
Considerem-se os conjuntos

$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 5\}$. Então,

$$C \subseteq A, \quad C \subseteq B, \quad A \supseteq C, \quad B \supseteq C$$

Diagrama de Venn

Num Diagrama de Venn faz-se um esboço dos conjuntos, os quais são representados por áreas fechadas no plano. O conjunto universal é representado pelo interior de um retângulo, e os restantes conjuntos são representados por círculos desenhados no interior do retângulo. Representados, por exemplo, da seguinte forma:



$A \subseteq B$

Teorema 1:

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Tem-se que:

(i) $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;

(ii) $A \subseteq A$;

(iii) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

(iv) $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. □

Observações:

- Quando se pretende enfatizar que A é um subconjunto de B mas $A \neq B$, escreve-se $A \subset B$ e diz-se que A é um *subconjunto estrito* de B.
- Se $A \subseteq B$ então é possível que $A = B$.
- Símbolos utilizados entre:

  Elemento e Conjunto: $\in$, $\notin$

  Conjuntos: $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq, \nsubseteq$

Elemento		Conjunto	Conjunto		Conjunto
	$\in$			$\subset$	
	$\notin$			$\subseteq$	
				$\supset$	
				$\supseteq$	
				$\not\subseteq$	

- Note-se ainda que, um conjunto A pode ser elemento de um conjunto B, nesse caso faz sentido escrever $A \in B$.

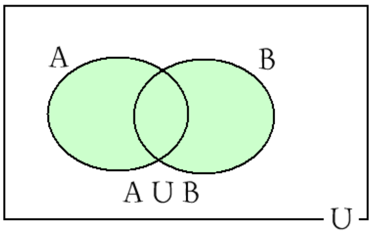
Operações com conjuntos

Definição 9:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *união* ou reunião dos conjuntos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B, i. e.,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$



Exemplo 14:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 9\}.$$

De um modo geral,

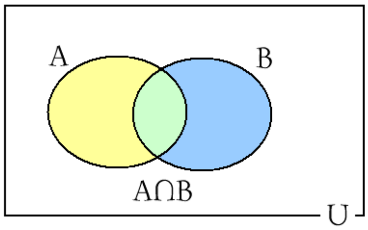
$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : \exists_{1 \leq i \leq n}, x \in A_i\}.$$

Definição 10:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *intersecção* dos conjuntos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, i. e.,

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Exemplo 15:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que

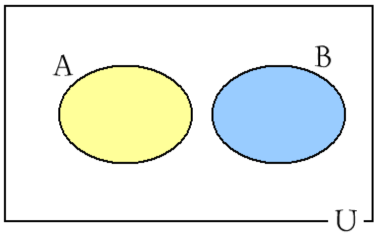
$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

De um modo geral,

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : \forall_{1 \leq i \leq n}, x \in A_i\}.$$

Definição 11:

Dois conjuntos são disjuntos se a sua intersecção é um conjunto vazio.



Exemplo 16:

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

Tem-se que

$$A \cap B = \{\}.$$

Portanto, os conjuntos A e B são disjuntos.

Exemplo 17:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3\}$. Temos que

$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = A$ e $A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{3\} = \{3\} = B$.

Teorema 2:

Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Então,

$$A \cup B = B \text{ e } A \cap B = A.$$

$\square$

Teorema 3:

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

$\square$

A generalização deste resultado para uniões de um número arbitrário de conjuntos é chamado o *princípio da inclusão-exclusão* o qual veremos mais tarde.

Exemplo 18:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$. Temos que $\#A = 3$ e $\#B = 2$,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\#(A \cup B) = 4$ e $A \cap B = \{3\}$, $\#(A \cap B) = 1$.
Portanto, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

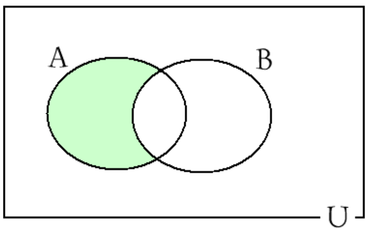
Definição 12:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *diferença* entre A e B, representada por $A - B$ ou $A \backslash B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B, i. e.,

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

A diferença ente A e B é também designada por complemento de B em relação a A.



Exemplo 19:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que,

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 3\} \text{ e } B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\} = \{6\}.$$

Como se pode verificar $A - B \neq B - A$.

Definição 13:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *diferença simétrica* entre A e B, representada por $A \oplus B$, é o conjunto de todos os objetos que são membros de exatamente um dos conjuntos A e B, i.e.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Exemplo 20:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que, $A \oplus B = \{1, 3, 6\}$.

Definição 14:

Considere-se U como sendo o conjunto universo. O complementar absoluto, ou simplesmente, complementar do conjunto A, representado por $\bar{A}$ ou A^c ou ainda A', é o conjunto de elementos que pertencem ao conjunto universal U mas que não pertencem ao conjunto A, i. e.,

$$\bar{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

Exemplo 21:

Considere $A = \{a, e, i, o, u\}$ e o conjunto universo formado por todas as letras do alfabeto Português.

Então, $\bar{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, y, z\}$.

Definição 15:

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *produto cartesiano* de A e B, e designa-se por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, i. e.,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 22:

Considere-se os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. O produto cartesiano de A por B é

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Exemplo 23:

Considere-se o conjunto $A = \{1, 2\}$. O produto cartesiano de A por A é

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Observações: Um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$ é chamado de *relação* do conjunto A com o conjunto B. Por exemplo, $R = \{(1, a), (1, c), (2, a)\}$ é uma relação do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ com o conjunto $B = \{a, b, c\}$.

Estudaremos estas relações mais a fundo mais adiante!

Definição 16:

O *produto cartesiano* de A_1, A_2, ..., A_n, com $n \in \mathbb{N}$, representado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$, é o conjunto de $n-$uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, i.e.,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Exemplo 24:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{0, 4\}$, o produto cartesiano $A \times B \times C$ é

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(1, a, 0), (1, b, 0), (1, c, 0), (2, a, 0), (2, b, 0), (2, c, 0) \\ &\quad (1, a, 4), (1, b, 4), (1, c, 4), (2, a, 4), (2, b, 4), (2, c, 4)\} \end{aligned}$$

Propriedades 1:

- O produto cartesiano não é comutativo.

  Exemplo 25:

  Vejamos que para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, se tem $A \times B \neq B \times A$.

  Temos que

  $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ e

  $B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$, portanto,

  $$A \times B \neq B \times A.$$

- $\#(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \#(A_1) \times \#(A_2) \times \ldots \#(A_n)$, para $n \in \mathbb{N}$.

  Exemplo 26:

  Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{0, 4\}$, tem-se

  $$\#(A \times B \times C) = 12 = 2 \times 3 \times 2 = \#(A) \times \#(B) \times \#(C).$$

Definição 17:

Dado um conjunto A, o *conjunto das partes* de A é o conjunto constituído por todos os subconjuntos de A. O conjuntos das partes representa-se por $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 27:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ (conjunto constituído por 3 elementos), então

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (8 elementos).

Exemplo 28:

Seja $B = \emptyset$ (0 elementos), então $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ (1 elemento).

Exemplo 29:

Seja $C = \{a, b\}$ (2 elementos), então

$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ (4 elementos).

- Para qualquer conjunto, o conjunto vazio e o próprio conjunto são elementos do conjunto das partes.
- $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}$

Definição 18:

Seja A um conjunto não vazio. Uma *partição* de A é um subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, cujos elementos $A_i, i = 1, \ldots, n$ são tais que:

(i) A_i são subconjuntos não vazios de A;

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$;

(ii) A_i são mutuamente disjuntos, i.e., para $i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

A cada A_i chamamos uma célula.

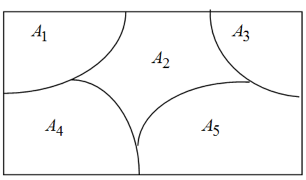
Exemplo 30:

Seja $A = \{a, b, c\}$. Duas partições de A são, por exemplo:

- $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, com $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$ e $A_3 = \{c\}$.
- $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, com $A_1 = \{a, c\}$ e $A_2 = \{b\}$.

Exemplo 31:

O Diagrama de Venn, em baixo, representa a partição do conjunto rectangular A em cinco células, A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.



Identidades de Conjuntos Sejam A, B e C subconjuntos do conjunto universo U. Tem-se

$A \cup \emptyset = A$ (P1a), $A \cap \emptyset = \emptyset$ (P1b) $A \cap U = A$ (P1c), $A \cup U = U$ (P1d)	Propriedades dos elementos neutros
$A \cup A = A$ (P2a) $A \cap A = A$ (P2b)	Propriedades idempotentes
$\overline{\overline{A}} = A$ (P3a), $\overline{\emptyset} = U$ (P3b), $\overline{U} = \emptyset$ (P3c) $A \cup \overline{A} = U$ (P3d) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (P3e)	Propriedades dos complementares
$A \cup B = B \cup A$ (P4a) $A \cap B = B \cap A$ (P4b)	Propriedades comutativas
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (P5a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (P5b)	Propriedades associativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (P6a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (P6b)	Propriedades distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (P7a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (P7b)	Leis de De Morgan

Exemplo 32:

Considere os conjuntos A, B e C.

Mostre que $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{C} \cap \overline{B}) \cup \overline{A}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap (B \cup C)} &= \overline{A} \cup \overline{(B \cup C)}, && \text{pela segunda lei de De Morgan}\\
&= \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}), && \text{pela primeira lei de De Morgan}\\
&= (\overline{B} \cap \overline{C}) \cup \overline{A}, && \text{pela propriedade comutativa de união}\\
&= (\overline{C} \cap \overline{B}) \cup \overline{A}, && \text{pela propriedade comutativa de intersecção}
\end{aligned}$$

Exercícios: 1 a 16.

2 Funções, sucessões de números inteiros, somatórios e produtórios

2.1 Funções

Definição 19:

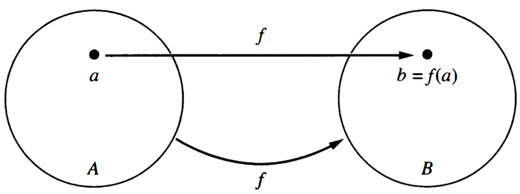
Sejam A e B conjuntos não vazios.

Uma *função* f de A para B, é uma correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B.

Escreve-se $f : A \longrightarrow B$.

Cada elemento $a \in A$ designa-se por *objeto* e ao elemento $b \in B$ correspondente chama-se *imagem* de a por f, e denota-se por $b = f(a)$.

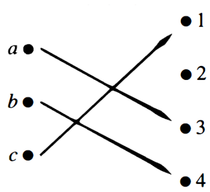
- A é o *domínio* de f - D_f ou $\text{dom}(f)$;
- B é o *conjunto de chegada* de f ou *contradomínio* - D'_f, $\text{cdom}(f)$;
- a *imagem* de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A - $f(A)$ ou $\text{im}(f)$.



Uma função $f : A \longrightarrow B$ pode ser definida em termos de uma relação de A para B, i.e., um subconjunto de $A \times B$. Uma relação de A para B que contém um e um só par ordenado (a, b) para cada elemento $a \in A$, onde $f(a) = b$, define uma função f de A para B.

Exemplo 33:

Considere $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, com $f(a) = 3$, $f(b) = 4$, $f(c) = 1$.



Tem-se que f é uma função, $D_f = \{a, b, c\}$, $D'_f = \{1, 2, 3, 4\}$ e $f(A) = \{1, 3, 4\}$.

Exemplo 34:

Considere $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, com $f(x) = x^2$ (função que faz corresponder a cada número inteiro o seu quadrado).

Tem-se que o domínio é $D_f = \mathbb{Z}$, o contradomínio $D'_f = \mathbb{Z}$ e o conjunto imagem de f, $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ (conjunto de todos os inteiros que são quadrados perfeitos).

Definição 20:

O gráfico de uma função f de A para B é o conjunto dos pares ordenados $\{(a, b) : a \in A$ e $b \in B\}$.

Exemplo 35:

Considere f como sendo a função que determina os dois últimos bits de uma cadeia de bits de extensão 2 ou maior.

Por exemplo,

$$f(11010) = 10 \text{ e } f(111) = 11.$$

Então,

o domínio de f é o conjunto de todas as cadeias de bits de extensão igual ou superior a 2,

e o contradomínio é $\{00, 01, 10, 11\}$.

Exemplo 36:

O domínio e o contradomínio de funções são geralmente especificadas em linguagem computacionais. Por exemplo, em Java

int **floor**(float real)...

afirma que o domínio desta função é o conjunto dos números reais, e o seu contradomínio é o conjunto dos números inteiros.

Operações com funções

Sejam f e g duas funções reais de variáveis reais:

	Expressão algébrica	Domínio
$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$

	Expressão algébrica	Domínio
$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	$D_f \cap D_g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

Exemplo 37:

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = x^3$ e $g(x) = 1 - x$.

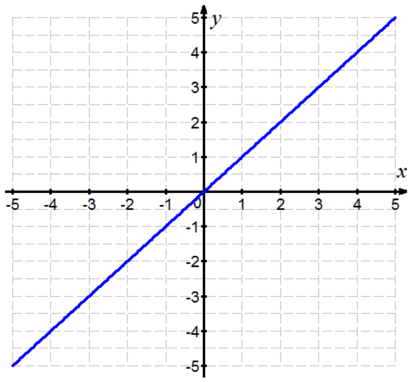
Então,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + (1 - x) = 1 - x + x^3$ e $D_{f+g} = \mathbb{R}$;

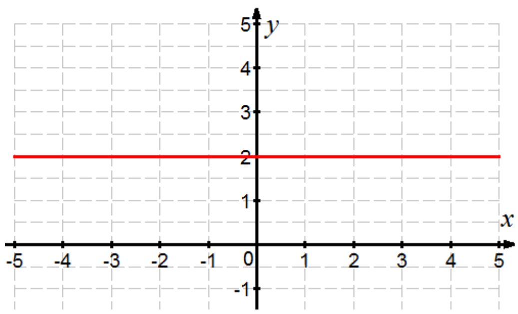
$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^3 \times (1 - x) = x^3 - x^4$ e $D_{f \times g} = \mathbb{R}$.

Algumas funções importantes

Função identidade: A função identidade num conjunto A é a função $f : A \longrightarrow A$ definida por $f(x) = x$ para todo o $x \in A$.



Função constante: é uma função tal que todos os elementos do domínio têm a mesma imagem, ou seja, para todo o $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$.



Função característica: A característica de um número real x é o maior número inteiro que é menor ou igual a x e denota-se por $[x]$.

Por exemplo,

$$\left[-\frac{3}{2}\right] = -2, [-0.24] = -1 \text{ e } [2.5] = 2.$$

A função característica faz corresponder a cada número real x a sua característica $[x]$.

Nota: Também se designa esta função por função maior inteiro menor que (*floor*) e representa-se por $\lfloor x \rfloor$.

Função menor inteiro maior que (*ceiling*): determina para o número real x o menor número inteiro maior que ou igual a x e representa-se por $\lceil x \rceil$.

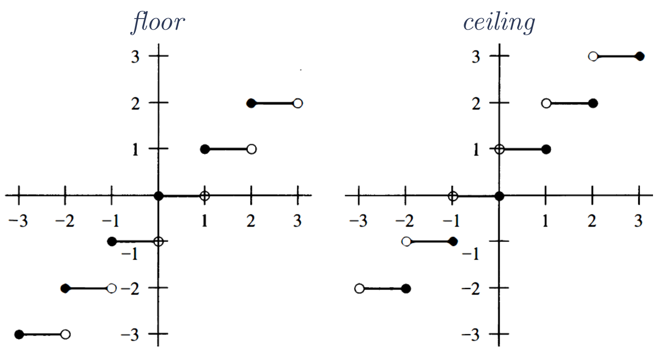
Exemplo 38:

Função maior inteiro menor que (*floor*):

$$\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \left[-\frac{3}{2}\right] = -2, [-0.24] = -1 \text{ e } [2.5] = 2$$

Função menor inteiro maior que (*ceiling*):

$$\lceil\frac{1}{2}\rceil = 1, \lceil-\frac{3}{2}\rceil = -1, \lceil-0.24\rceil = 0 \text{ e } \lceil 2.5\rceil = 3$$



Função módulo n: Dados um número inteiro x e um inteiro positivo n, existem um inteiro y e um natural r com $0 \leq r < n$, tais que $x = yn + r$, sendo y e r únicos.

Como é bem sabido, y é o quociente da divisão de x por n e r é o resto dessa divisão.

Facilmente se conclui que $y = \left[\frac{x}{n}\right]$.

O resto da divisão de x por n diz-se x módulo n e representa-se por $x \bmod n$.

Por exemplo, $8 \bmod 3 = 2$ e $-8 \bmod 3 = 1$.

A função módulo n faz corresponder a cada número inteiro x, o número $x \bmod n$.

A igualdade seguinte relaciona a função módulo n com a função característica:

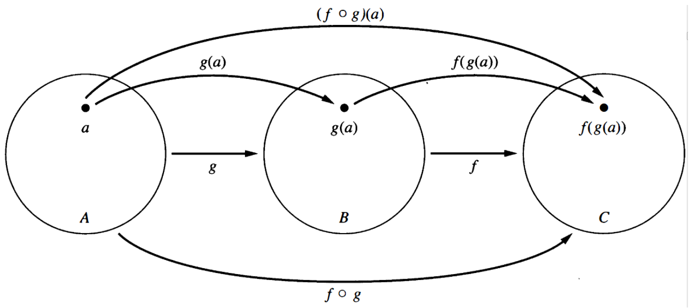
$x \bmod n = x - [x/n]n$.

Definição 21:

Considere as funções $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$ tal que $g(A) \subseteq B$.

A *função composta* de f e g, que se representa por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



- $f \circ g$ lê-se "f após g" ou "f composta com g".
- O seu domínio é

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Exemplo 39:

Considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$

e as funções $g : A \longrightarrow B$ e $f : B \longrightarrow C$, tais que,

$$g(a) = b, g(b) = a, g(c) = a \text{ e } f(a) = 2, f(b) = 3.$$

Tem-se que $D_f = B$, $D_g = A$ e $g(A) = \{a, b\} \subseteq D_f$.

Composição de f com g é definida por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 3,$$
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = 2,$$
$$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 2.$$

e $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{a, b, c\}$.

No entanto, a composição de g com f **não** está definida uma vez que

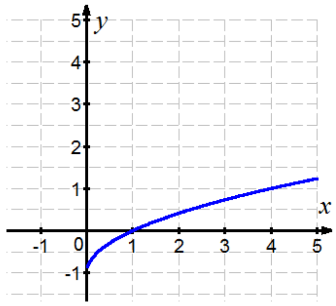
$$f(a) = 2,$$
$$f(b) = 3,$$

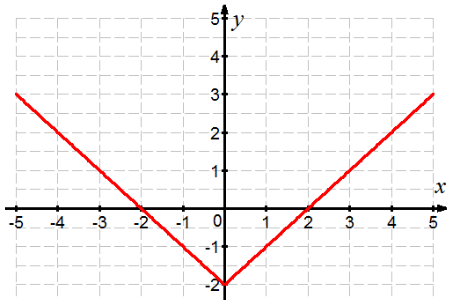
donde $f(B) = \{2, 3\} \nsubseteq D_g = \{a, b, c\}$.

Exemplo 40:

Considere as funções

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x}-1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x|-2. \end{array}$$

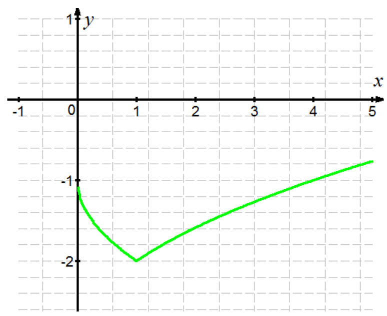




- g após f

  $f(\mathbb{R}_0^+) = [-1, +\infty[\subseteq \mathbb{R} (= D_g)$

  $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_0^+$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}-1) = |\sqrt{x}-1| - 2.$



- f após g

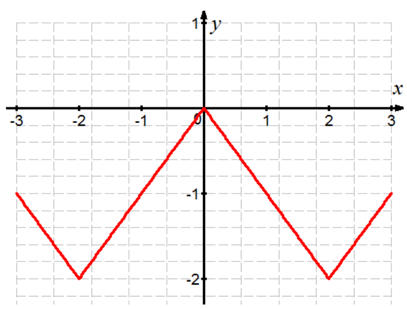
  $g(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[\nsubseteq \mathbb{R}_0^+ (= D_f)$. Logo, f após g não está definida.

  Nota: Em geral $f \circ g \neq g \circ f$, ou seja, a propriedade comutativa não se aplica à composição de funções.

- g após g

  $g(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[\subseteq \mathbb{R} (= D_g)$

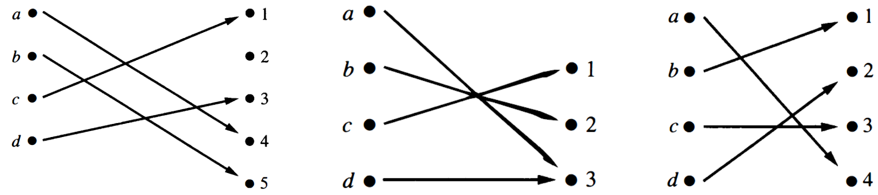
  $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$ e $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(|x|-2) = ||x|-2| - 2.$



Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se:

- *injetiva* (um-para-um), se quaisquer dois elementos distintos do domínio têm imagens diferentes, i.e., para todos $x, x' \in A$ se tem $f(x) = f(x')$ então $x = x'$;
- *sobrejetiva*, se todo o elemento $y \in B$ é imagem de algum elemento do domínio $x \in A$, i.e., $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$;
- *bijetiva* (ou uma correspondência biúnivoca), se for injectiva e sobrejectiva,i.e., $\forall y \in B, \exists^1 x \in A : f(x) = y$.

f é injetiva $\quad$ f é sobrejetiva $\quad$ f é bijetiva

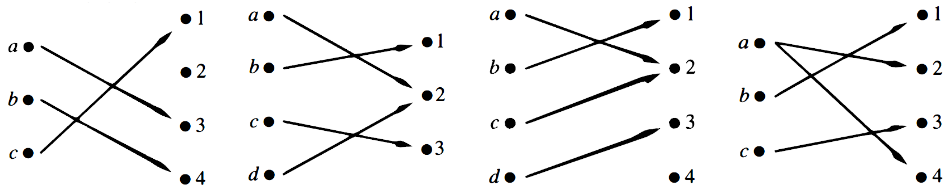


Observação:

- Uma função é injetiva se não existem objetos diferentes com a mesma imagem, i.e., $f(x) \neq f(x')$ sempre que $x \neq x'$.
- Uma função é sobrejetiva se o seu conjunto de chegada coincide com a sua imagem.

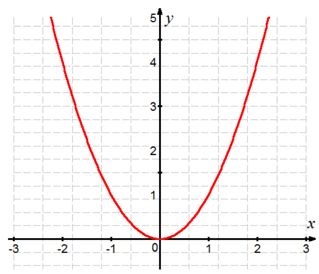
Exemplo 41:

(A) injetiva mas não é sobrejetiva $\quad$ (B) sobrejetiva mas não é injetiva $\quad$ (C) não é injetiva nem sobrejetiva $\quad$ (D) não é função



Exemplo 42:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$$



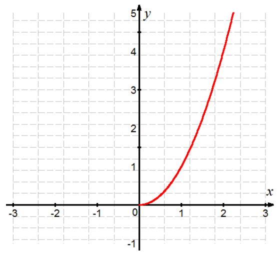
não é injetiva (por exemplo, $f_1(-1) = 1 = f(1)$),

não é sobrejetiva (por exemplo $y = -2$ não é imagem de nenhum objeto)

não é bijetiva pois não é injetiva(ou sobrejetiva);

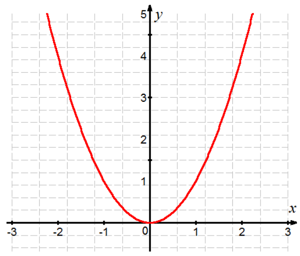
Exemplo 43:

$f_2 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ - injetiva, não é sobrejetiva, não é bijetiva;



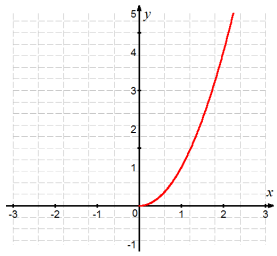
Exemplo 44:

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, f_3(x) = x^2$ - não é injetiva, sobrejetiva, não é bijetiva;



Exemplo 45:

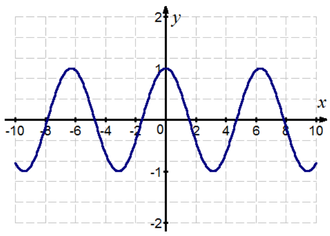
$f_4 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, f_4(x) = x^2$ - injetiva, sobrejetiva, bijetiva.



Nota: f_2, f_3, f_4 são *restrições* de f_1!

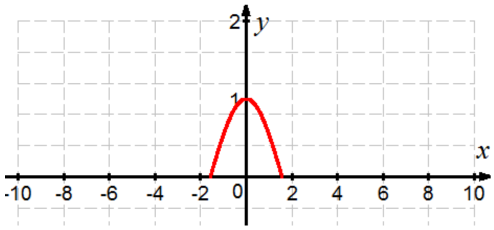
Exemplo 46:

$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_5(x) = \cos(x)$ - não é injectiva, não é sobrejectiva, não é bijetiva;



Exemplo 47:

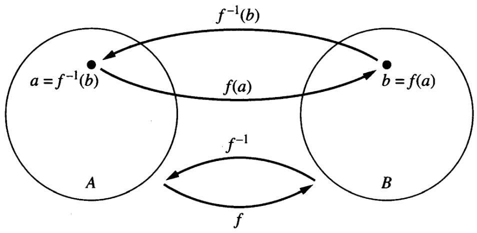
$f_6 : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [0, 1]$, $f_6(x) = \cos(x)$ - não é injectiva, é sobrejectiva, não é bijetiva;



Nota: f_6 é uma *restrição* de f_5!

Definição 22:

Seja f uma função bijetiva do conjunto A para o conjunto B. A função *inversa* de f, representada por f^{-1}, é a função que a cada elemento $b \in B$, o único elemento $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Assim, $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$.



Atenção!

- Não confundir f^{-1} com $1/f$!
- Se uma função f não é bijetiva, não podemos definir inversa de f, ou seja, f não é invertível.

Exemplo 48:

Considere a função f de $\{a, b, c\}$ para $\{1, 2, 3\}$, tal que

$f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.

Esta função é invertível pois é bijetiva.

Tem-se $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ e $f^{-1}(3) = b$.

Exemplo 49:

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Como vimos esta função não é bijetiva e consequentemente não é invertível. No entanto, restringindo o domínio a $\mathbb{R}_0^+$, ou seja, $f_1 : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, f(x) = x^2$, obtém-se uma função invertível. De facto,

f é *injetiva* pois, dados $x, x' \in \mathbb{R}_0^+$,

$f_1(x) = f_1(x') \Rightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow x^2 - x'^2 = (x - x')(x + x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$ ou $x = -x'$. Visto que $x, x' \in \mathbb{R}_0^+$, temos que $x = x'$.

f é *sobrejetiva* pois, cada número real não negativo admite raíz quadrada.

Visto que f é injetiva e sobrejetiva então é bijetiva e, portanto, admite inversa.

A sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$.

- Uma função f é invertível se e só se f é bijetiva.
- Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função invertível. Então, $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exercícios: 17 a 25.

2.2 Sucessões de números inteiros

Definição 23:

Uma *sucessão* (ou *sequência*) é uma função de um subconjunto dos números inteiros, I, (geralmente, ou do conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ou do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$) para um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$.

Usaremos a notação a_n para denotar a imagem do número inteiro n.

Chamamos a_n de termo da sucessão e denotaremos a sucessão por $\{a_n\}$.

Exemplo 50:

Considere-se a ordem de chegada da prova de 1.500 metros Masculinos do Campeonato Nacional Esperanças - Sub-23 em Pista Coberta do ano de 2010:

1	Bruno Albuquerque
2	Paulo Lopes
3	Luís Mendes
4	José Costa
5	Ruben Felizardo
6	Jorge Miranda
7	Bruno Rodrigues
8	Ricardo Fernandes

A tabela representa uma sucessão onde os elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3, \dots, 8\} \subseteq \mathbb{Z}$ representam a ordem de chegada e os elementos do conjunto S são os nomes dos atletas.

Note que a ordem é fundamental para definir a sucessão!

Exemplo 51:

Considerem-se as sucessões e os respetivos primeiros termos:

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{2}, \\ a_3 &= \frac{1}{3}, \\ &\dots. \end{aligned}$$

$$b_n = n^2 - n,\ n \in \mathbb{N}_0 \qquad \begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= 2, \\ b_3 &= 6, \\ &\dots. \end{aligned}$$

$$c_n = n!,\ n \in \mathbb{N}_0 \qquad \begin{aligned} c_0 &= 0! = 1, \\ c_1 &= 1! = 1, \\ c_2 &= 2! = 2 \times 1 = 2, \\ c_3 &= 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \\ c_4 &= 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ &\dots. \end{aligned}$$

Sucessões de números inteiros especiais

Definição 24:

Uma *progressão geométrica* é uma sucessão da forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^n, \ldots$$

em que o primeiro termo a e a razão r são números reais.

O termo geral de uma progressão geométrica é $a_n = a\,r^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Nota: Uma progressão geométrica é o análogo discreto de uma função exponencial $f(x) = ar^x$!

Exemplo 52:

A sucessão $\{c_n\}$, definida por $c_n = 2 \times 5^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ é uma progressão geométrica uma vez que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = \frac{2 \times 5^n \times 5}{2 \times 5^n} = 5, n \in \mathbb{N}_0.$$

Os termos desta sucessão são:

$$c_0 = 2, c_1 = 10, c_2 = 50, c_3 = 250, \ldots.$$

sucessões de números inteiros especiais

Definição 25:

Uma *progressão aritmética* é uma sucessão da forma

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots, a + nr, \ldots$$

em que o primeiro termo a e a razão r são números reais.

O termo geral de uma progressão aritmética é $a_n = a + n\,r$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Nota: Uma progressão aritmética é o análogo discreto de uma função linear $f(x) = a + rx$!

Exemplo 53:

A sucessão $\{d_n\}$, definida por $d_n = -2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}_0$ é uma progressão aritmética uma vez que

$$d_{n+1} - d_n = (-2 + 3(n + 1)) - (-2 + 3n) = 3, n \in \mathbb{N}_0.$$

Os termos desta sucessão são:

$$d_0 = -2, d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 7, \ldots.$$

Observação: As sucessões na forma $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são geralmente usadas em ciências da computação e são também designadas de *cadeias*. Esta cadeia é também indicada por $a_0a_1a_2\ldots a_n$.

A *extensão* da cadeia S é o número de termos da cadeia.

A *cadeia vazia*, λ, é a cadeia que não tem termos e portanto tem extensão zero.

Exemplo 54:

A cadeia *matematica* tem extensão 10.

Problema:

Encontrar a regra ou fórmula que define uma sucessão a partir dos termos iniciais.

Exemplo 55:

Considerem-se os seguintes termos iniciais de uma dada sucessão.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.$$

Temos que

$$a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Algumas sucessões usuais

n-ésimo termo $n \in \mathbb{N}$	10 primeiros termos
n	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
$(-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1$
$2n$	$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$
$2n-1$	$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$
$2n+1$	$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800$

2.3 Somatórios e produtórios

Para representar a soma dos termos de uma sucessão $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_k$ utiliza-se:

$$\sum_{i=j}^{k} a_i,$$

ou seja,

$$a_j + a_{j+1} + \ldots a_k = \sum_{i=j}^{k} a_i.$$

Exemplo 56:

Para a sucessão definida por $a_n = n^3, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{6} a_i = \sum_{i=1}^{6} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3.$$

Exemplo 57:

Para a sucessão definida por $b_n = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{i=4}^{7} b_i = \sum_{i=4}^{7} \sqrt{i} = \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}.$$

- Também se usam as notações $\sum_{i=j}^{k} a_i$, $\sum_{j\leq i\leq k} a_i$ e $\sum_{i\in C} a_i$, onde $C \subseteq \mathbb{N}_0$.
- Lê-se somatório de termo geral a_i, com índice i a variar de j até k.
- A escolha da letra i como variável é arbitrária, ou seja, podem-se também utilizar por exemplo as letras j e k. Ou seja, para $n \leq m$,

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{j=n}^{m} a_j = \sum_{k=n}^{m} a_k.$$

- A letra maiúscula grega sigma, Σ, indica o somatório.

Exemplo 58:

Calcule o valor de (a) $\sum_{i=2}^{5}(-1)^i$ e (b) $\sum_{i=2}^{4}(-1)^i$.

Solução:

(a) $\sum_{i=2}^{5}(-1)^i = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0;$

(b) $\sum_{i=2}^{4}(-1)^i = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 1 + (-1) + 1 = 1.$

Propriedades dos Somatórios

(P1)

$$\sum_{i=j}^{k}(a_i + b_i) = \sum_{i=j}^{k} a_i + \sum_{i=j}^{k} b_i$$

Exemplo 59:

Para $a_n = n^2$ e $b_n = 3n$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{5}(i^2 + 3i) &= (3^2 + 3\times 3) + (4^2 + 3\times 4) + (5^2 + 3\times 5)\\ &= (3^2 + 4^2 + 5^2) + (3\times 3 + 3\times 4 + 3\times 5) = \sum_{i=3}^{5} i^2 + \sum_{i=3}^{5} 3i.\end{aligned}$$

(P2) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sum_{i=j}^{k} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=j}^{k} a_i$$

Exemplo 60:

Para $\alpha = 2$ e $a_n = n^3$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}(2 \times i^3) &= 2 \times 1^3 + 2 \times 2^3 + 2 \times 3^3 + 2 \times 4^3 \\ &= 2(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 2\sum_{i=1}^{4} i^3.\end{aligned}$$

(P3) Para $j < m < k$, tem-se

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = \sum_{i=j}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{k} a_i$$

Exemplo 61:

Para $a_n = n^3$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{7} i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 \\ &\quad \text{(pela propriedade associativa da adição)} \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3) + (4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3) = \sum_{i=1}^{3} i^3 + \sum_{i=4}^{7} i^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\ &\quad \text{(pela propriedade associativa da adição)} \\ &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots k^3) + (k+1)^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + \sum_{i=k+1}^{k+1} i^3\end{aligned}$$

Exemplo 62:

Mudança de índice:

$$(a) \sum_{j=1}^{5} 2^j = \sum_{k=0}^{4} 2^{k+1}; \qquad (b) \sum_{j=2}^{7} j^4 = \sum_{k=0}^{5}(k+2)^4.$$

Exemplo 63:

Somatórios duplos:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}(ij) = \sum_{i=1}^{5}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{5} 6i = 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 = 90.$$

Exemplo 64:

$$\sum_{i\in\{2,4,6\}} i = 2+4+6 = 12;$$

$$\sum_{i\in\{1,3,5\}} (i+2) = (1+2)+(3+2)+(5+2) = 15.$$

Teorema 4:

Sejam a_0 e r dois números reais e $r \neq 0$, então a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão aritmética $\{a_n\}$, de termo geral $a_n = a_0 + nr$, $n \in \mathbb{N}_0$, é dada por:

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + i\,r) = (n+1) \times \frac{a_0 + a_n}{2}.$$

$\square$

Exemplo 65:

Considere-se a progressão aritmética definida por $c_n = -2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Tem-se que o primeiro termo é $c_0 = -2$ e a razão é $r = 3$.

Assim, a soma dos 10 primeiros termos é:

$$\begin{aligned} S_{10} &= \sum_{i=0}^{9} (-2+3i) \\ &= 10 \times \frac{-2+(-2+3\times 9)}{2} \\ &= \frac{207}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 5:

Sejam a_0 e r dois números reais e $r \neq 0$, então a soma dos $n+1$ primeiros termos de uma progressão geométrica $\{a_n\}$, de termo geral $a_n = a_0\, r^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, é dada por:

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_0\, r^i = \begin{cases} a_0 \times \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se} \quad r \neq 1 \\ (n+1)\, a_0 & \text{se} \quad r = 1 \end{cases}.$$

$\square$

Exemplo 66:

Para a progressão geométrica definida por $d_n = 2 \times 5^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Tem-se que o primeiro termo é $d_0 = 2$ e a razão é $r = 5$.

Assim, a soma dos 4 primeiros termos é:

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{i=0}^{3} (2 \times 5^i) \\ &= 2 \times \frac{1-5^4}{1-5} \\ &= 312. \end{aligned}$$

Alguns Somatórios Usuais

$\sum_{i=0}^{n} ar^i, r \neq 0$ (PG)	$a \times \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1$
$\sum_{i=1}^{n} i$ (PA)	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=0}^{\infty} x^i,\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1},\ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Produtórios

Para representar o produto dos termos de uma sucessão $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_k$ utiliza-se:

$$\prod_{i=j}^{k} a_i = a_j \times a_{j+1} \times \cdots \times a_k.$$

Lê-se produtório de termo geral a_i, com índice i a variar de j até k.

Exemplo 67:

Para $a_n = n^3, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\prod_{i=2}^{6} a_i = \prod_{i=2}^{6} i^3 = 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3 \times 6^3.$$

Exemplo 68:

Para $b_n = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\prod_{i=4}^{7} b_i = \prod_{i=4}^{7} \sqrt{i} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}.$$

Propriedades dos Produtórios

(P1)

$$\prod_{i=j}^{k} (a_i \times b_i) = \prod_{i=j}^{k} a_i \times \prod_{i=j}^{k} b_i$$

Exemplo 69:

Para $a_n = n^2$ e $b_n = 3n$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\prod_{i=3}^{5}(i^2 \times 3i) &= (3^2 \times 3 \times 3) \times (4^2 \times 3 \times 4) \times (5^2 \times 3 \times 5)\\ &= (3^2 \times 4^2 \times 5^2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 3 \times 5) = \prod_{i=3}^{5} i^2 \times \prod_{i=3}^{5} 3i\end{aligned}$$

(P2) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\prod_{i=j}^{k} \alpha a_i = \alpha^{k-j+1} \prod_{i=j}^{k} a_i$$

Exemplo 70:

Para $\alpha = 2$ e $a_n = n^3$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\prod_{i=1}^{3}(2 \times i^3) = 2 \times 1^3 \times 2 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 = 2^{3-1+1}(1^3 \times 2^3 \times 3^3) = 2^3 \prod_{i=1}^{3} i^3$$

(P3) Para $j < m < k$, tem-se

$$\prod_{i=j}^{k} a_i = \prod_{i=j}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{k} a_i$$

Exemplo 71:

Para $a_n = n^3$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{7} i^3 &= 1^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times 5^3 \times 6^3 \times 7^3\\ &\quad \text{(pela propriedade associativa dos números reais)}\\ &= (1^3 \times 2^3 \times 3^3) \times (4^3 \times 5^3 \times 6^3 \times 7^3) = \prod_{i=1}^{3} i^3 \times \prod_{i=4}^{7} i^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times \cdots \times k^3 \times (k+1)^3\\ &\quad \text{(pela propriedade associativa dos números reais)}\\ &= (1^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 4^3 \times \cdots \times k^3) \times (k+1)^3 = \prod_{i=1}^{k} i^3 \times \prod_{i=k+1}^{k+1} i^3\end{aligned}$$

Cardinalidade

Definição 26:

Os conjuntos A e B têm a mesma *cardinalidade* se e somente se existir uma bijeção de A para B.

Definição 27:

Um conjunto diz-se *enumerável* se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Um conjunto finito ou enumerável é dito *contável*.

Um conjunto diz-se *não enumerável* (ou não contável) se não é enumerável.

Se o conjunto infinito S é enumerável escreve-se $\#S = \aleph_0$ ($\aleph$ é alef, a primeira letra do alfabeto hebraico) e diz-se que S tem cardinalidade "alef zero".

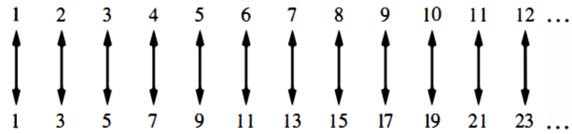
Exemplo 72:

Mostre que conjunto dos números inteiros positivos ímpares é enumerável.

Seja $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros positivos ímpares.

A função $f : \mathbb{N} \longrightarrow I$ definida por $f(n) = 2n - 1$ é uma bijeção de $\mathbb{N}$ em I.

Portanto, I é enumerável, ou seja, $\#I = \aleph_0$.



Teorema 6:

A união contável de conjuntos contáveis é contáveis, isto é, se os conjuntos $A_1, A_2, \dots$ são contáveis então

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

também é um conjunto contável. $\square$

Teorema 7:

O conjunto $[0, 1]$ é não contável. $\square$

Exemplo 73:

Mostre que o conjunto dos números reais é não contável.

De facto, o conjunto dos números reais é infinito. Por outro lado, $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Visto que $[0, 1]$ é não contável, então $\mathbb{R}$ é não contável.

Teorema 8:

(**Cantor**)

Para qualquer conjunto A temos que

$$\#A < \#\mathcal{P}(A).$$

$\square$

Exercícios: 26 a 37.

3 Relações

São enumeras as situações e contextos em que são estabelecidas relações entre conjuntos. Por exemplo, relação entre uma empresa e os seus números de telefone, um funcionário e o seu salário, etc. Para além disso, relações entre um programa e as variáveis que este usa e entre uma linguagem de programação e uma declaração válida nessa linguagem, são frequentes em Ciências da Computação.

Em Matemática a relação entre conjuntos é um subconjunto do produto Cartesiano desses conjuntos.

Definição 28:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos e $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ o seu produto cartesiano.

Uma *relação* R sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ consiste num conjunto de $n-$uplos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com $a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, é dada por um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Como R é uma relação constituída por $n-$uplos, R diz-se uma relação $n-$ária.

Exemplo 74:

Uma empresa vende determinados produtos que vamos designar por x, y, z e w. Os clientes são considerados do tipo a, b ou c de acordo com a quantidade de material comprada pelo cliente no último ano civil. Relativamente a um certo dia a empresa registou as vendas de acordo com a tabela seguinte:

Cliente	Tipo	Produto	Preço
J.Costa	a	x	50
A.Santos	c	y	15
C.Cardoso	b	y	15
H.Barros	a	w	30

Considerando $C = \{\text{clientes}\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{\text{produtos}\}$ e $D = \{\text{preços dos produtos}\}$, associada a esta tabela temos uma relação quaternária constituída pelos seguintes elementos de $C \times T \times P \times D$:

$$(\text{J.Costa}, a, x, 50),\ (\text{A.Santos}, c, y, 15),\ (\text{C.Cardoso}, b, y, 15),\ (\text{H.Barros}, a, w, 30).$$

3.1 Relações binárias

Definição 29:

Sejam A e B dois conjuntos.

Uma *relação binária* R de A para B é constituída por um conjunto de pares (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

Notação:

Se $(x, y) \in R$, dizemos que x é $R-$relacionado com y.

Escrevemos $R : A \longrightarrow B$ para exprimir que R é uma relação de A para B.

Dada uma relação R é usual escrever-se:

- xRy para significar que $(x,y) \in R$;
- $x\not R y$ para significar que $(x,y) \notin R$.

Exemplo 75:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b,c\}$. Uma relação binária de A para B poderá ser, por exemplo, o conjunto

$$R = \{(1,a),(2,b),(2,c)\}.$$

Tem-se,

$$1Ra, 2Rb, 2Rc, \text{ mas } 1\not R b, 1\not R c, 2\not R a.$$

Exemplo 76:

Considere-se o conjunto $H = \{1,2,3,4\}$, e defina-se em H a relação binária R estritamente menor que. Portanto,

$$aRb \text{ se e só se } a < b.$$

Então,

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

Observações:

- Uma relação $R : A \longrightarrow B$ pode ser vista como um subconjunto de $A \times B$ e podemos expressar relações usando a notação dos conjuntos.
- $A \times B$ é uma relação a qual designamos por *relação universal* de A para B.
- A *relação vazia* não contém nenhum par.

Definição 30:

Considerem-se os conjuntos A e B e seja $R \subseteq A \times B$ uma relação binária de A para B.

Um elemento $a \in A$ pertencerá ao domínio da relação binária R, se existir um elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in R$. Assim, o **domínio da relação binária** R é,

$$dom(R) = \{a \in A : \exists b \in B \text{ e } (a,b) \in R\}.$$

Um elemento $b \in B$ pertencerá ao contradomínio da relação binária R, se existir um elemento $a \in A$ tal que $(a,b) \in R$. Assim, o **contradomínio da relação binária** R é,

$$cdom(R) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ e } (a,b) \in R\}.$$

Exemplo 77:

Considerem-se os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação binária, de A para B,

$$R = \{(a, 2), (b, 3), (a, 3), (a, 4), (b, 4)\}.$$

O domínio de R é o conjunto $dom(R) = \{a, b\}$.

O contradomínio de R é o conjunto $cdom(R) = \{2, 3, 4\}$.

3.2 Representação de relações binárias

Matrizes booleana

As relações finitas podem ser representadas por *matrizes booleanas*, i.e., matrizes cujas entradas são constituídas por 0's e 1's.

Com efeito, sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ e consideremos A e B ordenados segundo a ordem natural dos índices dos seus elementos.

A matriz $m \times n$, $M_R = (a_{ij}^R)_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ de uma relação $R : A \longrightarrow B$ é definida por

$$a_{ij}^R = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i \not R\, b_j \\ 1 \text{ se } a_i R b_j \end{cases}.$$

Exemplo 78:

Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Considerem-se os elementos de A e B ordenados pela ordem natural.

Seja R a relação "menor do que". Tem-se

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6)\}.$$

A matriz desta relação é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício:

Determine a relação binária R de $A = \{1, 3\}$ para $B = \{2, 4, 6\}$, definida pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Grafo orientado

As relações podem também ser representadas por um grafo orientado (ou digrafo)[1].

Considere-se $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

A cada elemento $a \in A$ e a cada elemento $b \in B$ corresponde um **vértice** (nodo) do grafo com a etiqueta a.

A cada par $(a, b) \in R$ corresponde um **ramo** unindo cada vértice $a \in A$ a um vértice $b \in B$.

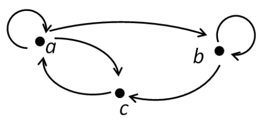
O ramo correspondendo a um par ordenado $(a, a) \in R$ diz-se um **lacete**.

Exemplo 79:

Seja $A = \{a, b, c\}$ e considere-se a relação binária

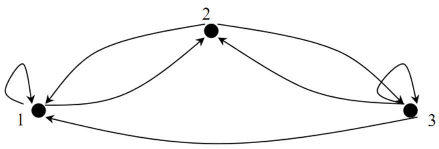
$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, a)\}.$$

O grafo orientado desta relação é:



Exercício:

Determine a relação dada pelo grafo orientado:



Exemplo 80:

No conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a relação "x é maior que y" determina o conjunto

$$R = \{(5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}.$$

Exercício:

Represente a relação anterior por uma matriz booleana e por um grafo orientado.

Exemplo 81:

Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$,

$$R = \{(1, a), (2, e), (3, i), (1, o), (2, u)\}$$

é uma relação de A em B.

[1]Teoria de Grafos será abordada em mais pormenor mais adiante nesta UC

Exercício:

Represente a relação anterior por uma matriz booleana.

Observações:

- Se A é um conjunto e R e uma relação de A para A, dizemos que R é uma *relação em* A ou *sobre* A. Esta relação designa-se por relação identidade e denota-se por $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

- Se $R : A \longrightarrow B$, então a *relação inversa* $R^{-1} : B \longrightarrow A$ é constituída por todos os pares (b, a) tais que $(a, b) \in R$.

Tem-se assim:

- $bR^{-1}a$ sse aRb;
- $(R^{-1})^{-1} = R$.

Exemplo 82:

A relação inversa da relação $R = \{(1, x), (2, z), (3, y)\}$ de $A = \{1, 2, 3\}$ para $B = \{x, y, z\}$ é:

$$R^{-1} = \{(x, 1), (z, 2), (y, 3)\}.$$

- Todas as operações efetuadas sobre conjuntos podem ser também efectuadas sobre relações. Assim, dadas duas relações R e S, com os mesmos conjuntos de partida e os mesmos conjuntos de chegada, tem-se:

$$\begin{aligned}
x(R \cap S)y &\Leftrightarrow xRy \wedge xSy \\
x(R \cup S)y &\Leftrightarrow xRy \vee xSy \\
x(R - S)y &\Leftrightarrow xRy \wedge x\not{S}y \\
x\overline{R}y &\Leftrightarrow x\not{R}y
\end{aligned}$$

Definição 31:

Sejam $R : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow Z$ duas relações.

A *composição* de R e S, denotada por $S \circ R$, tem X como conjunto de partida, Z como conjunto de chegada e é constituída por todos os pares (x, y) para os quais existe algum objeto $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S$. Ou seja,

$$x(S \circ R)z \text{ se existe algum } y \in Y \text{ para o qual } xRy \text{ e } ySz.$$

Isto é,

$$S \circ R = \{(x, z) : \text{ se existe } y \in Y \text{ para o qual } (x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in S\}.$$

Exemplo 83:

Considere as relações $R = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ e $S = \{(1,2),(2,1),(3,1)\}$.

Tem-se que,

$$\begin{array}{lll} 1(S \circ R)1, & \text{pois} & 1R3 \text{ e } 3S1 \\ 2(S \circ R)1, & \text{pois} & 2R2 \text{ e } 2S1 \\ 3(S \circ R)2, & \text{pois} & 3R1 \text{ e } 1S2. \end{array}$$

Portanto,

$$S \circ R = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}.$$

- A composição de relações é associativa, i.e., $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
- Seja R uma relação sobre um conjunto A.

Geralmente abreviamos $R \circ R$ por R^2, $R \circ R \circ R$ por R^3, etc.

3.3 Propriedades das relações binárias

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

Reflexiva: Se para todo o $x \in A$, $(x,x) \in R$.

Irreflexiva: Se para todo o $x \in A$, $(x,x) \notin R$.

Simétrica: Se para todo o $x, y \in A$, $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$.

Anti-Simétrica: Se para todo $x, y \in A : ((x,y) \in R \text{ e } (y,x) \in R) \Rightarrow x = y$.

Transitiva: Se para todo o $x, y, z \in A$, $((x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in R) \Rightarrow (x,z) \in R$.

Observação:

Mostrar que uma dada relação R num conjunto A satisfaz alguma das propriedades anteriores implica mostrar a propriedade em causa é válida para todos os elementos de R.

Por outro lado, para mostrar que R não satisfaz uma dada propriedade basta arranjar um contra-exemplo.

Exercício:

Para o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, considere as relações

$$\begin{array}{lll} R_1 & = & \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\} \\ R_2 & = & \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\ R_3 & = & \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\} \\ R_4 & = & \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\} \\ R_5 & = & \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \\ R_6 & = & \{(3,4)\} \end{array}$$

Quais destas relações são:

(i) Reflexivas; Resposta: R_3 e R_5, pois ...

(ii) Simétricas; Resposta: R_2 e R_3, pois ...

(iii) Anti-simétricas; Resposta: R_4, R_5 e R_6, pois ...

(iv) Transitivas; Resposta: R_4, R_5 e R_6, pois ...

Exercício:

Represente as relações anteriores por um grafo orientado e confirme os resultados obtidos anteriormente.

Observação:

Do ponto de vista gráfico:

- uma relação é reflexiva se para todo o vértice existir um ramo ligando-o a ele mesmo (ou seja, existe um lacete para todo o vértice).
- a relação será simétrica sempre que ao haver uma aresta de a para b também haja uma aresta de b para a;
- a relação será transitiva sempre que ao haver uma aresta da a para b e outra de b para c, também haja uma aresta de a para c.

Fecho de uma relação

Considerem-se um conjunto A e o conjunto de todas as relações em A. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de uma dessas relações, como a transitividade ou a simetria.
Uma relação com a propriedade $\mathcal{P}$ é designada uma $\mathcal{P}$-relação.
O *$\mathcal{P}$-fecho* de relação arbitrária R em A, denotado por $\mathcal{P}(R)$, é uma relação tal que,

$$R \subseteq \mathcal{P}(R) \subseteq S,$$

para a $\mathcal{P}$-relação S contendo R. Usaremos a notação

$$\text{reflexivo}(R),\ \text{simétrico}(R) \text{ e transitivo}(R),$$

para os fecho reflexivo, simétrico e transitivo de R.

Dados um conjunto A com n elementos e uma relação R em A:

- reflexivo(R) é obtido adicionando a R os elementos (x, x) que não pertencem a R;
- simétrico(R) é obtido adicionando a R os elementos (y, x) tais que (x, y) pertencem a R;

- transitivo(R)=$R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$.

Exemplo 84:

Considerem-se o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Então,

reflexivo(R)=$R \cup \{(1, 1), (2, 2)\}$,

simétrico(R)=$R \cup \{(2, 1), (3, 2)\}$

e

transitivo(R)=$R \cup R^2 \cup R^3 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 3)\}$.

Relação de equivalência

Definição 33:

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma *relação de equivalência* se R for simultaneamente uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 85:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

A relação

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

é uma relação de equivalência.

Provar!!

Classes de equivalência

Definição 34:

Sendo R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio e sendo $a \in A$, o conjunto:

$$C_a = \frac{a}{R} = [a]_R = \{x \in A : xRa\}$$

chama-se *classe de equivalência* do elemento a.

Exemplo 86:

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ um conjunto e

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, c)\}$$

uma relação de equivalência em A (Provar!).

Temos,

$$[a]_R = \{a\}, [b]_R = \{b\}, [c]_R = \{c, d\} = [d]_R \text{ e } [e]_R = \{e\}. \quad (1)$$

Observação:

Classe de equivalência do elemento a é o conjunto de todos os elementos que estão em relação com a.

Definição 35:

O conjunto de todas as classes de equivalência duma relação R, chama-se conjunto quociente de A por R e denota-se:

$$\frac{A}{R} = A/R = \{C_x : x \in A\}.$$

Exercício

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ um conjunto e

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (c, d), (d, c)\}$$

uma relação de equivalência em A.

Construa o conjunto quociente.

Teorema 9:

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto quociente A/R é uma partição de A, isto é:

- $[a]_R \neq \emptyset$ (De facto, para cada $a \in A$, temos $a \in [a]_R$);
- $A = \cup_{a \in A}[a]_R$;
- $a \not{R} b \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

□

Relação de ordem

Definição 36:

Uma relação binária R num conjunto A diz-se:

- R é uma *relação de ordem parcial (fraca)* (r.o.p.) em A sse é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Ao par (A, R) chama-se um *conjunto parcialmente ordenado* ou *c.p.o.* ou *poset*.
- R é uma *relação de ordem parcial estrita* em A sse é irreflexiva, anti-simétrica e transitiva;
- R é uma *relação de ordem total* em A sse é uma r.o.p. em que cada elemento de A está relacionado com todos os outros elementos de A, ou seja, para todo o $x \in A$ se tem $xRy, \forall y \in A$.
  O para (A, R) chama-se um *conjunto totalmente ordenado* ou *c.t.o.*.

Exemplo 87:

A relação inclusão de conjuntos é uma relação de ordem parcial pois:

- $A \subseteq A$ para todo o conjunto $A \Longrightarrow$ Reflexiva;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B \Longrightarrow$ Anti-simétrica;
- Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C \Longrightarrow$ Transitiva.

Definição 37:

Seja $\preceq$ (que se lê "menor ou igual geral") uma relação de ordem parcial em A.

- Denotamos por $\prec$ (que se lê "menor geral") a correspondente ordem parcial estrita, i.e., a ordem parcial estrita obtida de $\preceq$ tirando-lhe todos os pares (x, x), com $x \in A$.
- A inversa de $\prec$ denota-se por $\succ$ e a inversa de $\preceq$ denota-se por $\succeq$.
- Se $(A, \preceq)$ é um c.p.o., então $(A, \succeq)$ também é um c.p.o. e diz-se o dual de $(A, \preceq)$.
- Seja $(A, \preceq)$ é um c.p.o.. Se $x \prec y$ dizemos que x é um *predecessor* de y, ou que y é um *sucessor* de x.
- Se $x \prec y$ e não existem elementos entre x e y , i.e., não existe nenhum $z \in A$ tal que $x \prec z \prec y$, dizemos que x é um predecessor imediato de y, ou que y é um sucessor imediato de x.

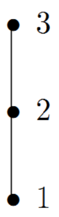
Diagrama de Hasse

Um c.o.p. pode ser representado por um *diagrama de Hasse* do seguinte modo:

representamos os elementos do conjunto e sempre que x é um predecessor imediato de y ligamos x a y por um arco com x situado num nível inferior a y.

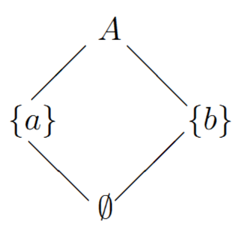
Exemplo 88:

O diagrama de Hasse do conjunto $\{1, 2, 3\}$ com a relação $\leq$ habitual é:



Exemplo 89:

O diagrama de Hasse para o c.o.p. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, com $A = \{a, b\}$ é:



Exercícios: 38 a 56.

4 Indução e recursividade

Provas diretas de implicações

A formulação de um resultado do tipo $p \to q$ é bastante frequente. Para demonstrar diretamente a veracidade de um tal resultado, temos de encontrar uma prova de q, assumindo a veracidade de p.

Exemplo 90:

Mostre que, se a e b são dois números reais tais que $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

Resolução:

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < a < b$. Temos que

$$a < b \Rightarrow a \times a < a \times b \Leftrightarrow a^2 < ab.$$

Por outro lado,

$$a < b \Rightarrow a \times b < b \times b \Leftrightarrow ab < b^2.$$

Assim,

$$a^2 < ab < b^2.$$

donde, $a^2 < b^2$.

Prova por contradição ou redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*)

Por forma a provar p, podemos assumir $\neg p$ e procurar uma contradição.

Exemplo 91:

Existe um número infinito de números primos.

Resolução:

Admitamos, por absurdo, que existem apenas n números primos, denotados por $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Consideremos o número $x = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. É obvio que x não é divisível por nenhum dos números $p_1, p_2, \ldots, p_n$, já que o resto da divisão é 1. Então x é um número primo, o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos. Logo, essa hipótese está errada, e portanto, existe um número infinito de números primos.

Observação:

Note-se que $p \to q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge \neg q)$. A redução ao absurdo consiste em assumir a veracidade da conjunção $p \vee \neg q$ e procurar uma contradição. Portanto, $\neg(p \wedge \neg q)$ será verdadeira, tal como $p \to q$.

4.1 Indução Matemática

A *indução matemática* é uma técnica simples, muito usada para demonstrar resultados sobre diversos objetos discretos.

Pode ser aplicada para demonstrar resultados sobre:

- complexidade de algoritmos,
- verificação de programas,
- teoremas sobre grafos e árvores, identidades e
- inequações.

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0, se

(i) **Passo base**:

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo**:

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k (k \geq n_0)$ - **Hipótese**,

então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo base: $P(1)$

Para um conjunto com um único elemento $A_1 = \{a\}$ $(n = 1)$, temos que $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, A_1\}$, portanto,

$$P(1) : \#\mathcal{P}(A_1) = 2^1, \text{ com } \#A_1 = 1.$$

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

Hipótese: $P(k)$ é verdadeira, ou seja, $\#\mathcal{P}(A_k) = 2^k$, para $\#A_k = k$.

Tese: $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja, $\#\mathcal{P}(A_{k+1}) = 2^{k+1}$, para $\#A_{k+1} = k + 1$.

Seja $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e seja $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ resultante de acrescentar o novo elemento a_{k+1} ao conjunto A_k.

Os subconjuntos de A_{k+1} podem ser agrupados em dois grupos:

(i) os que não incluem a_{k+1} - que são precisamente os que constituem o conjunto das partes de A_k, ou seja, $\mathcal{P}(A_k)$, constituído, por hipótese de indução, por 2^k elementos;

(ii) os que incluem o novo elemento a_{k+1} - que são obtidos acrescentando o novo elemento a_{k+1} a cada subconjunto de A_k, num total de 2^k novos conjuntos.

Assim,

$$\#\mathcal{P}(A_{k+1}) = \#\mathcal{P}(A_k) + 2^k = 2^k + 2^k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}.$$

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, então a proposição é válida para todo o n.

Exemplo 93:

Mostre que para qualquer número inteiro positivo n temos $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Passo base: $P(1)$

$P(1): 1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ é verdadeira.

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k): 1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Tese: $P(k+1): 1+2+\cdots+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Temos que

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+1 &= 1+2+\cdots+k+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1), \text{ por hipótese de indução.} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Logo, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é.

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, então a proposição é válida para todo o n, ou seja,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1.$$

Uma forma de indução matemática, chamada *indução completa*, é geralmente usada quando não podemos facilmente demonstrar o resultado usando indução matemática.

A indução completa compreende dois passos e difere da indução matemática no passo de indução, no facto se partir da hipótese de indução que P(r) é verdadeira para todos os valores de r que não excedem k, ou seja,

Indução matemática

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(k) \text{ Verd.} \rightarrow P(k+1) \text{ Verd.}, \end{array}\right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1 .$$

Indução completa (ou segundo princípio da indução matemática ou indução forte)

$$\left\{\begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(r) \text{ Verd.}, \forall r, 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \text{ Verd.}, \end{array}\right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1 .$$

Propriedade da boa ordenação:

Todo o conjunto não vazio de números inteiros não negativos contem pelo menos um menor elemento.

$$\boxed{\text{Indução Matemática} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Indução Completa} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Boa ordenação}}$$

4.2 Recursividade

Nem sempre um determinado objeto (função, conjunto, estrutura) pode ser definido explicitamente. Pode ser mais fácil defini-lo em termos dele próprio.

Uma *definição recursiva* de uma função com o conjunto dos números inteiros não negativos é definida em duas partes:

- **Passo base:** Especificar o(s) valor(es) inicial(is) da função;
- **Passo recursivo:** Fornecer uma regra para encontrar o valor num número inteiro a partir de valores nos números inteiros menores.

Exemplo 94:

Considere a função S definida recursivamente por:

$$\begin{cases} S(0) = 3 \\ S(n) = 2\,S(n-1) + 3, n \geq 1 \end{cases}.$$

Encontre $S(1), S(2), S(3)$ e $S(4)$.

Resolução:

$$S(1) = 2S(0) + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9, \qquad S(2) = 2S(1) + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21,$$
$$S(3) = 2S(2) + 3 = 2 \times 21 + 3 = 45, \quad S(4) = 2S(3) + 3 = 2 \times 45 + 3 = 93.$$

Exemplo 95:

Dê uma definição recursiva da função fatorial $F(n) = n!$.

Resolução:

Temos que

$$\begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n) = n \times F(n-1), n \geq 1 \end{cases}, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n+1) = (n+1) \times F(n), n \geq 0 \end{cases}.$$

Definição 38:

Os números de *Fibonacci*, $f_0, f_1, f_2, \ldots$, são definidos por

$$\begin{cases} f_0 = 0, f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Exemplo 96:

Encontre os números de Fibonacci f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6.

Resolução:

$$\begin{aligned}
&f_0 = 0,\ f_1 = 1\\
&f_2 = f_1 + f_0 = 1\\
&f_3 = f_2 + f_1 = 2\\
&f_4 = f_3 + f_2 = 3\\
&f_5 = f_4 + f_3 = 5\\
&f_6 = f_5 + f_4 = 8
\end{aligned}$$

Uma *fórmula de recorrência linear* pode ser escrita como

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \cdots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

onde f_i e g são expressões envolvendo n.

Uma relação de recorrência:

- tem *coeficientes constantes* quando f_i são constantes.
  Exemplo: $S(n) = S(n-1) + 3S(n-2) + n^3$.
- é de *primeira ordem* quando o $n-$ésimo termo depende apenas do $n-1-$ésimo termo.
  Exemplo: $S(n) = 2S(n-1) + n$.
- *homogénea* quando $g(n) = 0$.
  Exemplo: $S(n) = 2S(n-1)$.

Exemplo 97:

Considere a relação de recorrência definida por

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&S(1) = 2\\
&S(2) = 2S(1) = 4 = 2^2\\
&S(3) = 2S(2) = 8 = 2^3\\
&S(4) = 2S(3) = 16 = 2^4\\
&\ldots\\
&S(n) = 2^n.
\end{aligned}$$

A expressão $S(n) = 2^n$ permite determinar $S(n)$ sem ter de determinar valores anteriores de S. Dizemos que $S(n) = 2^n$ é a *fórmula fechada* (*closed-form solution*) de S.

Resolver a relação recursiva consiste em encontrar a sua fórmula fechada.

Uma técnica para resolver relações de recorrência é o algoritmo **Algoritmo EGV** (Expand, Guess, Verify = Desenvolver, Estimar, Verificar).

Algoritmo EGV

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}.$$

Resolução:

- **Expand**: Usando a fórmula de recorrência tem-se que:

$$\begin{aligned} & S(n) = 2S(n-1) \\ \Rightarrow \quad & S(n) = 2(2S(n-2)) = 2^2 S(n-2) \\ \Rightarrow \quad & S(n) = 2^2(2S(n-3)) = 2^3 S(n-3) \\ & \ldots \end{aligned}$$

- **Guess**: Observando o desenvolvimento em cima, podemos conjeturar que

$$S(n) = 2^k S(n-k).$$

Para $n - k = 1$ então $k = n - 1$, donde

$$S(n) = 2^{n-1} S(1) = 2^{n-1} \times 2 = 2^n.$$

- **Verify**: Verificar usando indução.

Passo Base: $S(1) = 2^1 = 2$ é verdadeiro.

Passo de Indução:

Hipótese: $S(k) = 2^k$

Tese: $S(k+1) = 2^{k+1}$

$$\begin{aligned} S(k+1) &= 2S(k), \text{pela definição da fórmula de recorrência} \\ &= 2 \times 2^k, \text{pela hipótese de indução} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Fica assim provado que $S(n) = 2^n$.

Algoritmo EGV

1. Começando por $S(n)$, que é função de $S(n-1)$:
   - Calcular $S(n-1)$ e substituir em $S(n)$, obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-2)$.
   - Calcular $S(n-2)$ e substituir em $S(n)$, obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-3)$.
   - Calcular $S(n-3)$ e substituir em $S(n)$, obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n-4)$.
   - ...

2. Repetir o processo até ser capaz de definir $S(n)$ em função de $S(n-k)$.

   Fazer $n-k=1$ e deduzir $S(n)$ em função de apenas n.

3. Usando indução, demonstrar que a fórmula fechada está correta.

Exercício:

Encontre a fórmula fechada para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

Resolução:

1. **Expand**:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3 \\ &= (T(n-2) + 3) + 3 = T(n-2) + 2 \times 3 \\ &= (T(n-3) + 3) + 2 \times 3 = T(n-3) + 3 \times 3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

2. **Guess**: $T(n) = T(n-k) + k \times 3$.

   Para $n-k=1$ então $k=n-1$, donde

$$T(n) = T(1) + (n-1) \times 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2.$$

3. **Verify**:

   Passo Base: $T(1) = 3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$ é Verdadeira.

   Passo de Indução:

   Hipótese: $T(k) = 3k - 2$

   Tese: $T(k+1) = 3(k+1) - 2 = 3k + 1$

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + 3, \text{pela definição da fórmula de recorrência} \\ &= 3k - 2 + 3, \text{pela hipótese de indução} \\ &= 3k + 1 \end{aligned}$$

   Logo, tem-se que $T(n) = 3n - 2$.

Exercícios: 57 a 62.

Bibliografia

[1] J. L. Gersting. *Mathematical Structures for Computer Science: A Modern Approach to Discrete Mathematics.* W.H. Freeman & Company, 6th edition edition, 2007.

[2] H. Liebeman. *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill, 8th edition edition, 2007.

[3] S. Lipschutz and M. Lipson. *Matemática Discreta.* Bookman, 3.ª edição edition, 2013.

[4] K.H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill, 7th edition edition, 2012.