Álgebra de Boole

1

Sumário:

- Teoria dos conjuntos
- Funções Lógicas
- Tabelas de Verdade
- Funções Lógicas elementares
- Postulados da álgebra de Boole
- Propriedades da álgebra de Boole
- Teoremas da álgebra de Boole
- Formas Canónicas

Álgebra de Boole

2

Teoria dos conjuntos?

Aplica-se a sistemas matemáticos que só consideram dois elementos possíveis:

0 (Falso) e **1** (Verdadeiro)

Não exprimem quantidades mas sim estados, como por exemplo:

1 (Ligado) – **0** (Desligado)

Álgebra de Boole

3

Funções lógicas

Define-se como **Função Lógica** toda a *variável binária* cujo valor depende de uma *expressão algébrica* formada por outras *variáveis binárias* relacionadas através dos *sinais* (+) e (.).

$$F = (A \bullet B) + (B \bullet C)$$

(+) e (.) indicam relações lógicas entre as variáveis, onde (+) é interpretado como uma conjunção (OU) e (.) é interpretado como uma conjunção (E).

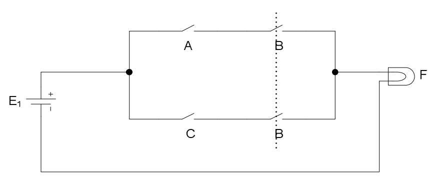
Nota: $A + A \neq 2A$

Álgebra de Boole

4

As funções lógicas representam circuitos eléctricos.

$$F = (A \bullet B) + (B \bullet C)$$



- F → lâmpada
- A, B e C → interruptores
- Cada interruptor tem apenas dois estados possíveis → ligado (1) ou desligado (0)
- A lâmpada só tem dois estados → ligada (1) ou desligada (0)

Álgebra de Boole

5

Tabelas de verdade

Toda a função lógica pode ser representada *graficamente* através de uma **Tabela de Verdade**.

Tabela de Verdade é um quadrado formado por tantas colunas quantas as variáveis que a função tem mais a correspondente a esta e por tantas linhas quantas as combinações binárias que seja possível construir com estas variáveis ($2^{\text{n.º de variáveis}}$).

$F = A$

Função lógica = F

N.º de variáveis da função lógica = 1 (A)

N.º de combinações binárias = 2^1 = 2

N.º de colunas = N.º de variáveis = 1

N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 2

Tabela de verdade

A	F
0	0
1	1

Álgebra de Boole

6

E se a função lógica tiver duas variáveis?

$F = A + B$

Função lógica = F

N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)

N.º de combinações binárias = 2^2 = 4

N.º de colunas = N.º de variáveis = 2

N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Com a tabela de verdade é possível saber qual o funcionamento do circuito para todas as combinações possíveis entre as variáveis presentes na função.

Álgebra de Boole

7

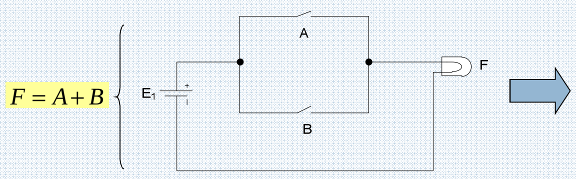


Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

O operador OU (+) indica que vão existir dois ramos em paralelo e que em cada um desses ramos estará presente um interruptor (A ou B).

Como preencher a tabela de verdade?

Álgebra de Boole

8

Assumindo que:

- A ou B =0 → interruptor desligado
- A ou B =1 → interruptor ligado
- F=0 → lâmpada desligada
- F=1 → lâmpada ligada

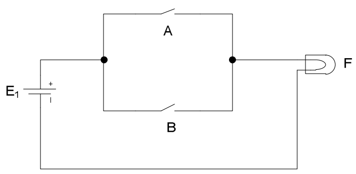
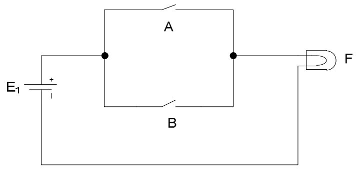


Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Álgebra de Boole

9

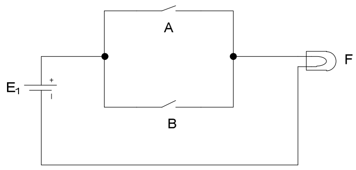


Analisando linha a linha da tabela de verdade:

- Quando A=0 e B=0, isto é, ambos os interruptores desligados, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada desliga, isto é, F=0
- Quando A=0 e B=1, isto é, interruptor A desligado e interruptor B ligado, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada liga, isto é, F=1

Álgebra de Boole

10



Analisando linha a linha da tabela de verdade:

- Quando A=1 e B=0, isto é, interruptor A ligado e interruptor B desligado, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada liga, isto é, F=1
- Quando A=1 e B=1, isto é, ambos os interruptores A e B ligados, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada liga, isto é, F=1

Álgebra de Boole

11

Agora é possível preencher toda a tabela de verdade.

$$F = A + B$$

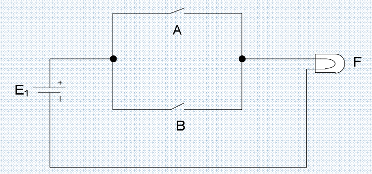


Tabela de verdade

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Com a tabela de verdade é possível saber qual o funcionamento do circuito para todas as combinações possíveis entre as variáveis presentes na função.

Álgebra de Boole

12

E agora se a minha função tiver o operador E (.)?

$$F = A \bullet B$$

Função lógica = F

N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)

N.º de combinações binárias = 2^2 = 4

N.º de colunas = N.º de variáveis = 2

N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Qual o funcionamento do circuito para todas as combinações possíveis entre as variáveis presentes na função.

Álgebra de Boole

$F = A \bullet B$

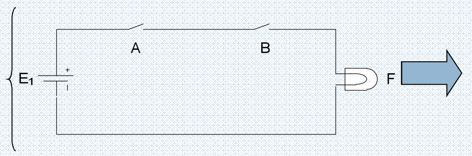


Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

O operador E (.) indica que vai existir um ramo e que nesse ramo estarão dois interruptores denominados por A e B.

Como preencher a tabela de verdade?

Álgebra de Boole

Assumindo que:

- A ou B =0 → interruptor desligado
- A ou B =1 → interruptor ligado
- F=0 → lâmpada desligada
- F=1 → lâmpada ligada

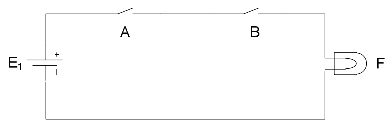
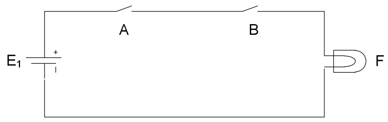


Tabela de verdade

A	B	F
0	0	?
0	1	?
1	0	?
1	1	?

Álgebra de Boole

15

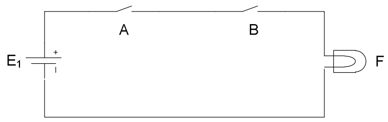


Analisando linha a linha da tabela de verdade:

- Quando A=0 e B=0, isto é, ambos os interruptores desligados, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada desliga, isto é, F=0
- Quando A=0 e B=1, isto é, interruptor A desligado e interruptor B ligado, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada desliga, isto é, F=0

Álgebra de Boole

16



Analisando linha a linha da tabela de verdade:

- Quando A=1 e B=0, isto é, interruptor A ligado e interruptor B desligado, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada desliga, isto é, F=0
- Quando A=1 e B=1, isto é, ambos os interruptores A e B ligados, o que acontece à lâmpada? Liga ou desliga?
  Resposta: a lâmpada liga, isto é, F=1

Álgebra de Boole

17

Agora é possível preencher toda a tabela de verdade.

$F = A \bullet B$

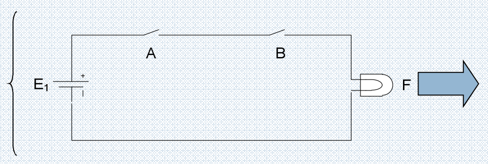


Tabela de verdade

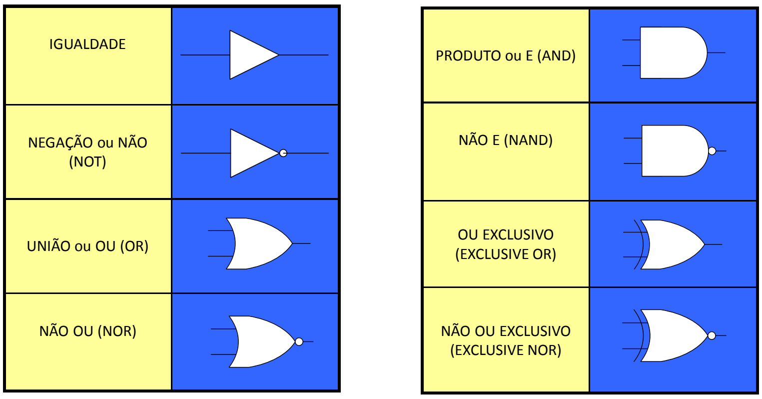
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Com a tabela de verdade é possível saber qual o funcionamento do circuito para todas as combinações possíveis entre as variáveis presentes na função.

Álgebra de Boole

18

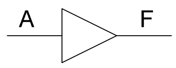
Funções lógicas elementares



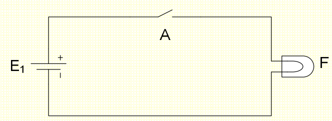
Álgebra de Boole

19

Função lógica *Igualdade*



Símbolo lógico



0 – interruptor aberto / lâmpada desligada
1 – interruptor fechado / lâmpada ligada

$F = A$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 1 (A)
- N.º de combinações binárias = $2^1 = 2$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 1
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 2

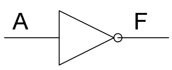
Tabela de verdade da função IGUALDADE

A	F
0	0
1	1

Álgebra de Boole

20

Função lógica *Negação* (NOT)



Símbolo lógico

Tabela de verdade da função IGUALDADE

A	F
0	0
1	1

$F = \overline{A}$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 1 (A)
- N.º de combinações binárias = $2^1 = 2$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 1
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 2

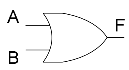
Tabela de verdade da função NOT

A	F
0	1
1	0

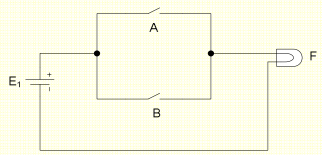
Álgebra de Boole

21

Função lógica *OU* (OR)



Símbolo lógico



0 – interruptor aberto / lâmpada desligada
1 – interruptor fechado / lâmpada ligada

$F = A + B$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

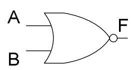
Tabela de verdade da função OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Álgebra de Boole

22

Função lógica *Não OU* (NOR)



Símbolo lógico

Tabela de verdade da função OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$F = \overline{A + B}$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

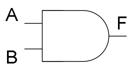
Tabela de verdade da função NOR

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

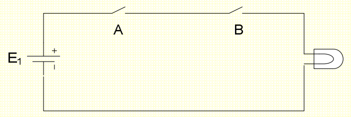
Álgebra de Boole

23

Função lógica *E* (AND)



Símbolo lógico



0 – interruptor aberto / lâmpada desligada
1 – interruptor fechado / lâmpada ligada

$F = A \bullet B$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

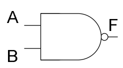
Tabela de verdade da função AND

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

24

Função lógica *Não E* (NAND)



Símbolo lógico

Tabela de verdade da função AND

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$F = \overline{A \bullet B}$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

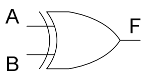
Tabela de verdade da função NAND

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Álgebra de Boole

25

Função lógica *OU Exclusivo* (Exclusive OR)



Símbolo lógico

Tabela de verdade da função OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$F = A \oplus B$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

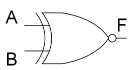
Tabela de verdade da função OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Álgebra de Boole

26

Função lógica *Não OU Exclusivo* (Exclusive NOR)



Símbolo lógico

Tabela de verdade da função EXCLUSIVE OR

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$F = \overline{A \oplus B}$

Função lógica

- Função lógica = F
- N.º de variáveis da função lógica = 2 (A e B)
- N.º de combinações binárias = $2^2 = 4$
- N.º de colunas = N.º de variáveis = 2
- N.º de linhas = N.º de combinações binárias = 4

Tabela de verdade da função EXCLUSIVE NOR

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra de Boole

27

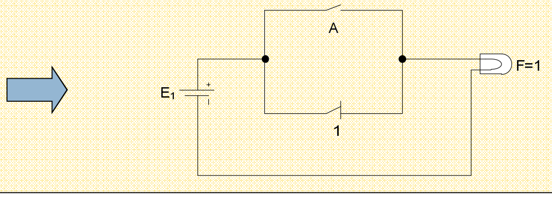
Postulados da álgebra de Boole

Postulado 1	a soma algébrica de uma variável mais um 1 lógico equivale a 1 lógico	$A+1=1$
Postulado 2	a soma algébrica de uma variável mais um 0 lógico equivale ao valor da variável	$A+0=A$
Postulado 3	o produto lógico de uma variável por um 1 lógico é igual ao valor da variável	$A\bullet 1=A$
Postulado 4	o produto lógico de uma variável por um 0 lógico é igual a zero	$A\bullet 0=0$
Postulado 5	a soma algébrica de duas variáveis iguais equivale ao valor dessa variável	$A+A=A$
Postulado 6	o produto lógico de duas variáveis iguais equivale ao valor dessa variável	$A\bullet A=A$
Postulado 7	a soma algébrica de uma variável mais a mesma variável negada equivale a 1 lógico	$A+\overline{A}=1$
Postulado 8	o produto lógico de uma variável mais a mesma variável negada equivale a 0 lógico	$A\bullet\overline{A}=0$
Postulado 9	se uma variável é negada duas vezes, esta não varia	$\overline{\overline{A}}=A$
Postulado 10	se invertem dois membros de uma igualdade esta não sofre nenhuma variação	$F=A+B\rightarrow\overline{F}=\overline{A+B}$

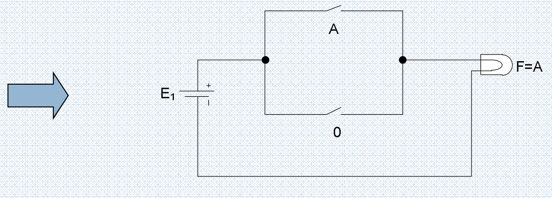
Álgebra de Boole

28

$A+1=1$



$A+0=A$



Álgebra de Boole

29

Propriedades da álgebra de Boole

Propriedade Comutativa	$A+B=B+A$ $A\bullet B=B\bullet A$
Propriedade Associativa	$A+B+C=A+(B+C)$ $A\bullet B\bullet C=A\bullet(B\bullet C)$
Propriedade Distributiva	$A\bullet(B+C)=(A\bullet B)+(A\bullet C)$ $A+(B\bullet C)=(A+B)\bullet(A+C)$

Álgebra de Boole

30

Teoremas da álgebra de Boole

Teorema 1 – Lei da Absorção	$a)\quad A+(A\bullet B)=A$ $b)\quad A\bullet(A+B)=A$
Teorema 2	$a)\quad A+(\overline{A}\bullet B)=A+B$ $b)\quad B\bullet(A+\overline{B})=B\bullet A$
Teorema 3 – Leis de Morgan	$a)\quad \overline{A+B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$ $b)\quad \overline{A\bullet B}=\overline{A}+\overline{B}$

Álgebra de Boole

31

Demonstração do Teorema 1 – Lei da Absorção

a) $A+(A\bullet B)=A$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &A+(A\bullet B)= && \text{Propriedade Distributiva}\\ &=A\bullet(1+B)= && \text{Postulado 1}\\ &=A\bullet 1= && \text{Postulado 3}\\ &=A \end{aligned}$$

b) $A\bullet(A+B)=A$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &A\bullet(A+B)= && \text{Propriedade Distributiva}\\ &=A\bullet A+A\bullet B= && \text{Postulado 6}\\ &=A+A\bullet B= && \text{Teorema 1 } (a)\\ &=A \end{aligned}$$

Álgebra de Boole

32

Demonstração do Teorema 2

a) $A+(\overline{A}\bullet B)=A+B$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &A+(\overline{A}\bullet B)= && \text{Propriedade Distributiva}\\ &=(A+\overline{A})\bullet(A+B)= && \text{Postulado 7}\\ &=1\bullet(A+B)= && \text{Postulado 3}\\ &=A+B \end{aligned}$$

b) $B\bullet(A+\overline{B})=B\bullet A$

Demonstração:

$$\begin{aligned} &B\bullet(A+\overline{B})= && \text{Propriedade Distributiva}\\ &=B\bullet A+B\bullet\overline{B}= && \text{Postulado 7}\\ &=B\bullet A+0= && \text{Postulado 3}\\ &=B\bullet A \end{aligned}$$

Álgebra de Boole

33

Demonstração do Teorema 3 – Leis de Morgan

$$a)\quad \overline{A+B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

Demonstração:

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \bullet \overline{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Álgebra de Boole

34

Demonstração do Teorema 3 – Leis de Morgan

$$b)\quad \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Demonstração:

A	B	$A \bullet B$	$\overline{A \bullet B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Álgebra de Boole

35

Formas canónicas

Uma função lógica é uma expressão constituída por um **produto de somas** ou uma **soma de produtos** na qual aparecem todas as variáveis intervenientes em forma directa ou complementada.

$$F_1 = \left(A \bullet B \bullet \overline{C}\right) + \left(A \bullet \overline{B} \bullet C\right)$$

$$\Downarrow$$

1ª Forma canónica (minterms):

soma de produtos

$$F_2 = \left(A + B + \overline{C}\right) \bullet \left(A + \overline{B} + C\right)$$

$$\Downarrow$$

2ª Forma canónica (maxterms):

produto de somas

Álgebra de Boole

36

1ª forma canónica

Uma função lógica escrita na 1ª forma canónica é uma expressão constituída por uma **soma de produtos** na qual aparecem todas as variáveis intervenientes em forma directa ou complementada.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabela de verdade

1ª forma canónica: obtém-se somando os produtos lógicos que dão à função o valor lógico 1.

$$F = \left(\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}\right) + \left(A \bullet \overline{B} \bullet C\right) + \left(A \bullet B \bullet \overline{C}\right) + \left(A \bullet B \bullet C\right)$$

Álgebra de Boole

37

2ª forma canónica

Uma função lógica escrita na 2ª forma canónica é uma expressão constituída por um **produto de somas** na qual aparecem todas as variáveis intervenientes em forma directa ou complementada.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabela de verdade

2ª forma canónica: obtém-se multiplicando as somas lógicas que dão à função o valor lógico 0.

$$F=\left(A+B+\overline{C}\right)\bullet\left(A+\overline{B}+C\right)\bullet\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)\bullet\left(\overline{A}+B+C\right)$$