Álgebra Linear e Geometria Analítica

Ficha de Trabalho n.º 0

1. Conjunto dos Complexos

Exercício 1

Indique $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$ em cada um dos casos seguintes:

a) $z = 2 - 5i$

b) $z = -2$

c) $z = 3i$

d) $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{3}$

Exercício 2

Efetue e apresente o resultado na forma **a + bi**.

a) $(5 - 2i) + (7 + 3i)$

b) $(2 - 3i) - (4 + 5i)$

c) $(-1 + 4i) - (-6 + i)$

d) $(3 - i) + (-5 + 7i)$

Exercício 3

Efetue:

a) $3i(2 + 4i)$

b) $-5i(1 - 2i)$

c) $(1 - i)(4 + 3i)$

d) $(3 + 2i)(-5 - i)$

e) $(1 - 5i)^2$

f) $(2 - 3i)^2$

Exercício 4

Conjugado de um número complexo:
Seja $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
Então o conjugado de z é:
$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Simétrico de um número complexo:
Seja $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
Então o simétrico de z é:
$$-z = -(a + bi) = -a - bi$$

$|z| = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o **módulo** de z.

Indique o conjugado, o simétrico e o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = 3 - 2i$

b) $z = 4 + 2i$

c) $z = -3i$

d) $z = \frac{1}{2}$

Exercício 5

Divisão de dois números complexos:
Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ com $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $z_2 \neq 0$. Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i$$

Exemplo:
Para dividirmos dois complexos, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador: $\frac{(3+4i)}{(2+5i)} = \frac{(3+4i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}$

$$= \frac{6 - 15i + 8i - 20i^2}{2^2 - (5i)^2}$$

Propriedade distributiva

Dif. de quadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{6 - 15i + 8i - 20.(-1)}{4 - 25i^2} = \frac{6 - 15i + 8i + 20}{4 - 25.(-1)} = \frac{26 - 7i}{29} = \frac{26}{29} - \frac{7}{29} i$$

Potenciação de um número complexo:
De uma forma geral, podemos escrever, se $k \in \mathbb{N}$:

$$i^k = i^{\text{resto da divisão de } k \text{ por } 4}$$

Se k é um **múltiplo de 4** (+ **0**), $i^k = i^0 = 1$.
Se k é um **múltiplo de 4 + 1**, $i^k = i^1 = i$.
Se k é um **múltiplo de 4 + 2**, $i^k = i^2 = -1$.
Se k é um **múltiplo de 4 + 3**, $i^k = i^3 = -i$.

Escreva na forma **a + bi**:

a) $\frac{5}{3-i}$

b) $\frac{2+i}{2-i}$

c) $\frac{3+2i}{5i}$

d) i^{101}

e) $i^{1999} - 2$

f) $i^{107} - i^{123}$

Exercício 6

Sendo $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 3 + 4i$, determine na forma algébrica:

a) $z_1 . z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

c) o inverso de z_2

d) $2z_1 - \overline{z_2}$

e) $\mathrm{Re}(z_1 + z_2)$

f) $\mathrm{Im}(\overline{z_1} - 3z_2)$

Exercício 7

Determine na forma algébrica:

a) $(-2+i)+(3-5i)+(2-3i)$

b) $(2-5i)-(2+3i)-(5-3i)$

c) $3(1-2i)-4(1-5i)$

d) $(-2-i)(3+5i)+2-i$

e) $\frac{2-i}{1+i}$

f) $\frac{6-2i}{1+3i}+12i$

g) $\frac{(3+i)^2}{2-i}+2$

h) $(2-i)(3+2i)-(i-3)^2$

i) $\frac{2i^{28}-3i^{42}+2i^{19}}{i^5+2i^6}$

Exercício 8

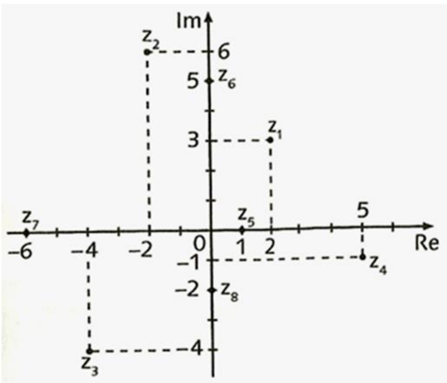
Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $z^2+4=0$.

Exercício 9

Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $-z^2+2z-2=0$.

Exercício 10

No plano complexo da figura abaixo estão representadas as imagens geométricas dos números complexos $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ e z_8:



Determine, na forma algébrica $(a+bi)$:

a) z_3, z_5, z_6, z_7 e z_8;

b) $z_1+z_2-z_3$

c) $\text{Im}(\overline{z_2}+3z_4)$

d) $z_3 . z_4$

e) o inverso de z_1

f) $\frac{8-11i+i^{19}}{z_4}+4i^{97}$