	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
ESTGF POLITÉCNICO DO PORTO	Curso Engenharia Informática		Hora 10:00
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica		Duração 2 horas

Nº de Aluno: Nome:

Observações:

- Para a realização do exame de ALGA os alunos podem utilizar:
  - máquina de calcular gráfica;
  - um formulário A4 manuscrito pelo aluno que está a realizar o teste (só frente).
- Não são admitidas fotocópias de formulários ou formulários feitos em PC
- Os alunos devem apresentar todos os cálculos necessários à resolução dos problemas e as justificações necessárias
- No caso de utilizarem as funcionalidades de matrizes da máquina de calcular devem indicar todos os passos que realizaram

Bom trabalho!

Aldina Correia, Eliana Costa e Silva e Teófilo Melo

Questão	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5	6.1	6.2.1	6.2.2	7.1	7.2	7.3	Total
Cotação	1	1,5	1	2	2	2	1	1	2	2	1	0,5	1	0,5	0,5	1	20

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere que o seguinte output do Scilab:

```
-->a=(x-2*%i)/5+(y-%i)/(2+*%i)
 a  =
    0.6 - 0.8i
-->RI=[real(a) imag(a)]
 RI  =
     0.6  - 0.8
-->[N,D]=rat(RI)
 D  =
    5.    5.
 N  =
    3   - 4.
```

1.1. Determine os números reais `x` e `y`.

$$a=\frac{x-2i}{5}+\frac{y-i}{2+i}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}-\frac{4}{5}i=\frac{x-2i}{5}+\frac{(y-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}-\frac{4}{5}i=\frac{x-2i}{5}+\frac{2y-yi-2i+i^2}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-4i}{5}=\frac{(x+2y-1)+(-4-y)i}{5}$$
$$\Leftrightarrow 3-4i=(x+2y-1)+(-4-y)i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y-1=3\\ -4-y=-4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}---\\ y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2\times 0-1=3\\ ---------\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=0\end{cases}$$

1.2. Considere $z_1=\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2=$a. Determine o número complexo $w=\frac{{z_1}^6}{z_2}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

$${z_1}^6=\sqrt{3}^6\,\text{cis}\left(6\times\frac{\pi}{6}\right)=3^3\text{cis}(\pi)=27(\cos(\pi)+\sin(\pi)\,i)=27(-1+0i)=-27$$

Então

$$w = \frac{{z_1}^6}{z_2} =$$

$$= \frac{-27}{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \frac{-27\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)}{\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)} = \frac{-27\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{-27\left(\frac{3+4i}{5}\right)}{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{-\frac{27}{5}(3+4i)}{\frac{25}{25}} = -\frac{81}{5} - \frac{108}{5}i$$

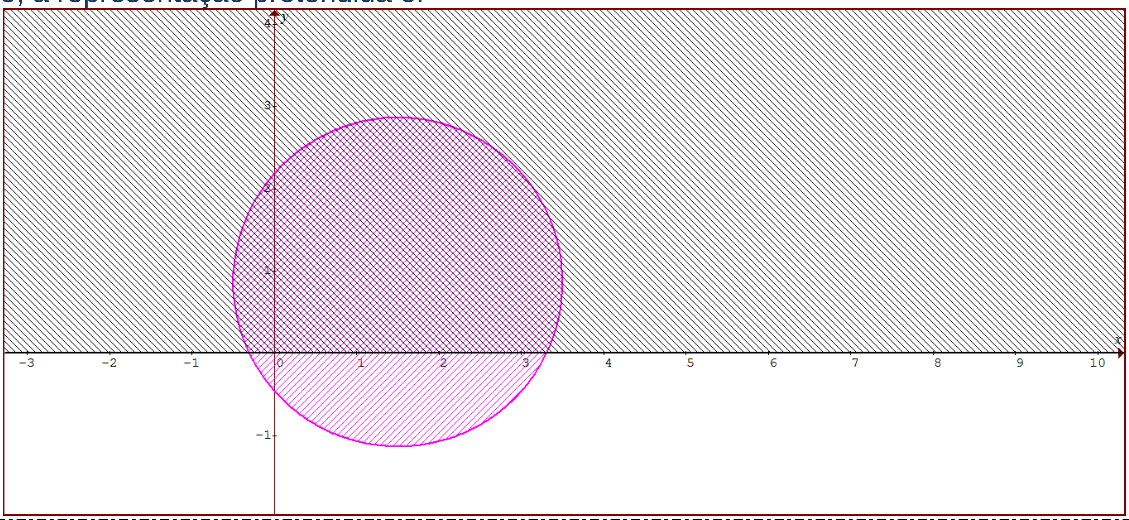
1.3. Represente no plano de Argand a seguinte condição $|z - z_1| \leq 2.|a| \wedge Im(z-2) \geq 0$.

$$z_1 = \sqrt{3}\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

a$=\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \Rightarrow |a| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = \sqrt{1} = 1$

$|z - z_1| = 2.|a| \Leftrightarrow \left|z - \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right| = 2$ representa a circunferência centrada em $C = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio 2 e $Im(z-2) = 0$ é a reta vertical de equação $y = 0$.

Então, a representação pretendida é:



2. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, determine a matriz X, tal que $AX^T = BC - C^2$ (Sugestão: Comece por mostrar que $X = [A^{-1}(BC - C^2)]^T$).

$$AX^T = BC - C^2 \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X^T = A^{-1}(BC - C^2) \Leftrightarrow X^T = A^{-1}(BC - C^2) \Leftrightarrow (X^T)^T = [A^{-1}(BC - C^2)]^T$$

$$\Leftrightarrow X = [A^{-1}(BC - C^2)]^T \; c.q.m$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{L_1 \to L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + 3\times 0 & 2\times 0 + 3\times 8 \\ 1\times 1 + 5\times 0 & 1\times 0 + 5\times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 24 \\ 1 & 40 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$BC - C^2 = \begin{bmatrix} 2 & 24 \\ 1 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 1 & -24 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(BC - C^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 24 \\ 1 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -24 \end{bmatrix}$$

$$X = [A^{-1}(BC - C^2)]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}$$

3. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}.$$

3.1. Considere que A é a matriz do sistema. Determine a de forma a que exista A^{-1}.

Para $\exists\ A^{-1}$: $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a^3 + 1 + 1) - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a + 2 = 0$

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\Leftrightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-1)(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -2$

Assim, $\exists\ A^{-1}$ se e só se $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$.

3.2. Discuta o sistema em função do parâmetro a.

O sistema é de Cramer se:
- m=nº de equações=nº de incógnitas=n. Verifica-se porque m=3=n.
- $|A| \neq 0$. Vejamos:

Pela alínea anterior $|A| \neq 0$ se e só se $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$, então, para estes valores o sistema é de Cramer, pelo que é possível e determinado.

Se $a = -2$ então $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Como $|A| = a^3 - 3a + 2 = 0$, o sistema não é de Cramer, pelo que é um sistema geral.

Pesquisa de Δ_p:

$|-2| = 2 \neq 0$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$

Equações principais: 1ª e 2ª; Equações secundárias: 3ª

Incógnitas principais: x e y; Incógnitas secundárias: z ⇒se o sistema for possível é simplesmente indeterminado.

Sistema Principal: $\begin{cases} -2x + y = 1 - z \\ x - 2y = -2 - z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Compatibilidade da equação secundária:

$\Delta_{3^a} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, logo a 3ª equação é incompatível com o sistema principal pelo que o sistema é impossível.

Se $a = 1$ então $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $|A| = 0$, o sistema não é de Cramer, pelo que é um sistema geral.

Pesquisa de Δ_p:

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$. Os determinantes de ordem 2 dão todos zero, logo $\Delta_p = |1| = 1$.

Equações principais: 1ª ; Equações secundárias: 2ª e 3ª

Incógnitas principais: x; Incógnitas secundárias: y e z ⇒se o sistema for possível é duplamente indeterminado.

Sistema Principal:

$$\begin{cases} -2x = 1 - z - y \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Compatibilidade das equações secundárias:

$\Delta_{2^a} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, logo a 2ª equação é compatível com o sistema principal

$\Delta_{3^a} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, logo a 3ª equação é compatível com o sistema principal

Assim, o sistema é possível e duplamente indeterminado.

Regra de Cramer generalizada:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta_p} = \dfrac{1 - y - z}{1} = 1 - y - z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução: $(x, y, z) = (1 - k_1 - k_2, k_1, k_2), k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Conclusão:

- O sistema é possível e determinado se $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$
- O sistema é impossível se $a = -2$
- O sistema é possível e duplamente indeterminado se $a = 1$.

4. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x,y,z e t, cuja matriz do sistema A e a matriz dos termos independentes B, definidas em Scilab, são:

```
-->A=[1 2 3 4;0 1 -1 2;1 1 1 2;0 2 -2 4];

-->B=[1 1 1 1]';
```

4.1. Averigue se o sistema é de Cramer;

O sistema é de Cramer se:

- m=nº de equações=nº de incógnitas=n. Verifica-se porque m=4=n.
- $|A| \neq 0$. Vejamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= [(4 - 4 - 4) - (4 - 4 - 4)] + [(-8 - 8 + 12) - (-4 - 8 + 12)] = 0$$

Pelo que o sistema não é de Cramer.

4.2. Observe o excerto de código Scilab seguinte e respetivo output:

```
--> rref([A B])
 ans  =

    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    2.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    1.
```

Classifique o sistema, justificando.

O sistema é impossível porque $C(A) = 3 \neq C(A|B) = 4$.

4.3. Classifique e resolva, se possível, o sistema que se obtém se se eliminar a última equação.

Eliminando a última equação obtém-se:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim_{L_3 \to L_3 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim_{L_3 \to L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$C(A) = 3 = C(A|B) = C$, logo o sistema é possível.

Como n=nº de incógnitas=4, então $\delta = n - C = 4 - 3 = 1$, logo o sistema é simplesmente indeterminado.

Incógnitas principais: x, y e z; incógnitas secundárias: t

Equações principais: todas

Sistema principal:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 - 4t \\ y - z = 1 - 2t \\ -3z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{— — — —} \\ \text{— — — —} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{— — — —} \\ y + \frac{1}{3} = 1 - 2t \\ \text{— — — —} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{— — — —} \\ y = \frac{2}{3} - 2t \\ \text{— — — —} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\left(\frac{2}{3} - 2t\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 - 4t \\ \text{— — — —} \\ \text{— — — —} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} + 4t + 2 - 4t \\ \text{— — — —} \\ \text{— — — —} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} - 2t \\ z = -\frac{1}{3} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução: $(x, y, z, t) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} - 2k, -\frac{1}{3}, k\right), k \in \mathbb{R}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule os valores próprios e vectores próprios associados à matriz A.

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda = 0 \lor 1-\lambda = 0 \lor 3-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \lor \lambda = 1 \lor \lambda = 3.$$

Assim, os valores próprios de A são 2, 1 e 3.

Vetores próprios $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + 5v_3 = 0 \\ -v_2 + 4v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ -v_2 + 0 = 0 \\ -- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ v_2 = 0 \\ -- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ -- \\ -- \end{cases}$$

O vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$ é $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + 5v_3 = 0 \\ 4v_3 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 \\ -- \\ v_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{cases}$$

O vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ é $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 + 5v_3 = 0 \\ -2v_2 + 4v_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -- \\ v_2 = 2v_3 \\ v_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + 5v_3 \\ -- \\ v_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 2v_3 + 5v_3 \\ -- \\ -- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 7v_3 \\ -- \\ -- \end{cases}$$

O vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$ é $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7v_3 \\ 2v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, v_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

6. Considere o espaço vetorial das matrizes reais do tipo 2×2:

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

6.1. Mostre que o conjunto $\mathrm{S} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}): a_{11} = -a_{21}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

S é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se:

1) $S \neq \phi$

2) $\forall u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in S \Rightarrow \alpha . u \in S$

Vejamos:

1) Considere-se o zero de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como $a_{11} = 0 = -a_{21}$, então $0_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})} \in S \Rightarrow S \neq \phi$.

2) Sejam $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{S}$. Então verificam a condição $a_{11} = -a_{21}$, isto é:

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{11} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{21} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Logo

$$\mathrm{u} + v = \begin{bmatrix} -\mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_{21} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{u}_{21} - v_{21} & \mathrm{u}_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & \mathrm{u}_{22+}v_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = -\mathrm{u}_{21} - v_{21} = -(\mathrm{u}_{21} + v_{21}) = -a_{21}$, logo $u + v \in \mathrm{S}$.

3) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{u} \in \mathrm{S}$.

Seja $\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{11} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix}$, como $\mathrm{u} \in \mathrm{S}$ então $u_{11} = -u_{21}$, isto é:

$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_{11} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix}$, logo $\alpha . u = \alpha . \begin{bmatrix} -\mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{12} \\ \mathrm{u}_{21} & \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix} = \alpha . \begin{bmatrix} -\alpha . \mathrm{u}_{21} & \alpha . \mathrm{u}_{12} \\ \alpha . \mathrm{u}_{21} & \alpha . \mathrm{u}_{22} \end{bmatrix}$

$a_{11} = -\alpha . \mathrm{u}_{21} = -(\alpha . \mathrm{u}_{21}) = -a_{21}$, logo $\alpha u \in \mathrm{S}$.

Assim, de 1), 2) e 3) S é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

6.2. Considere os vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

6.2.1. Averigue se $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3 \rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - 3\gamma \\ 5 = 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ -1 = -\alpha + \gamma \\ 1 = -2\beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema não é de Cramer porque o nº de equações $= m = 4 \neq 3 = n =$nº de incógnitas.

Logo é um sistema geral:

Pesquisa de Δ_p: $|2| = 2 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2 + 0 + 2) - (-3 + 0 + 3) = 0$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2 + 18 + 0) - (0 + 8 - 3) = 15 \neq 0$$

Incógnitas principais: α, β e γ; Incógnitas secundárias: nenhuma, logo se o sistema for possível é determinado.

Equações principais: 1ª, 2ª e 4ª; Equações secundárias: 3ª

Sistema principal:

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - 3\gamma \\ 5 = 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ 1 = -2\beta - \gamma \end{cases}$$

Compatibilidade da 3ª equação:

$$\Delta_{3^a} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_4 \to L_4 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5[(0 + 0 + 1) - (-6 + 4 + 0) - [(0 + 18 + 2) - (-3 + 8 + 0)]$$

$$= 5(1 + 2) - (20 - 5) = 15 - 15 = 0$$

Logo a 3ª equação é compatível com o sistema principal, pelo que o sistema é possível.

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - 3\gamma \\ 5 = 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ 1 = -2\beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta_p} \\ \beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta_p} \\ \gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta_p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{15} \\ \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{15} \\ \gamma = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{30}{15} \\ \beta = \dfrac{-15}{15} \\ \gamma = \dfrac{15}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Como o sistema é possível e determinado $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

6.2.2. Verifique se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ constitui uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sendo $v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\dim(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$ e o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tem 4 vetores, resta verificar se são linearmente independentes, para constituírem uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - 3\gamma + \delta \\ 0 = 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ 0 = -\alpha + \gamma \\ 0 = -2\beta - \gamma + \delta \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} m = 4 = n \\ |A| = -3 \end{matrix}\right\}$ logo o sistema é de Cramer, logo possível e determinado.

Resta ver se a solução é a solução trivial $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,0,0,0)$. Vejamos:

$$\begin{cases} 0 = 2\alpha + \beta - 3\gamma + \delta \\ 0 = 3\alpha - \beta - 2\gamma \\ 0 = -\alpha + \gamma \\ 0 = -2\beta - \gamma + \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\Delta} \\ \beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\Delta} \\ \gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\Delta} \\ \delta = \dfrac{\Delta_\delta}{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0; \; \beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0;$$

$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{0}{-3} = 0$; $\delta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} \frac{0}{-3} = 0$ c. q.v.

Então o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ constitui uma base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

7. Dada a reta r de equações cartesianas $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$, o plano α de equação cartesiana $x+y+z=2$ e o ponto $A=(1,1,-1)$, determine:

7.1. As equações cartesianas da reta s que passa pelo ponto A e é paralela à reta r.

Se s é paralela a r tem o mesmo vetor diretor u.

$$P: \begin{cases} x=0 \\ x+y=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ y=1 \\ 2\times 0-1+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow P=(0,1,1)$$

$$Q: \begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ y=0 \\ 2\times 1-0+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow Q=(1,0,-2)$$

$$u=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,0,-2)-(0,1,1)=(1,-1,-3)$$

$s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-3}$ →equações cartesianas da reta s

7.2. Os ângulos que a reta r faz com o plano α.

$\angle(r,\alpha)=arcsin\left|\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|}\right|$, onde u é o vetor diretor da reta e v é o vetor $\perp$ ao plano α

$u.v=(1,-1,-3).(1,1,1)=1-1-3=-3$

$\|u\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$

$\|v\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

$\angle(r,\alpha)=arcsin\left|\frac{-3}{\sqrt{11}.\sqrt{3}}\right|=arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{33}}\right)\approx 31,5^o$

7.3. A distância do ponto A ao plano α.

→equação da reta que passa por A e é $\perp$ a α

α: $x+y+z=2$ então o vetor $\perp$ a α é $u=(A,B,C)=(1,1,1)$ e a equação da reta será:

$$(x,y,z)=(1,1,-1)+\lambda(1,1,1), \lambda\in\mathbb{R}$$

→intersecção da reta com o plano α, ponto Q

$$\begin{cases}(x,y,z)=(1,1,-1)+\lambda(1,1,1),\lambda\in\mathbb{R}\\ x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-1+\lambda\\ 1+\lambda+1+\lambda-1+\lambda=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}---\\ ---\\ ---\\ 3\lambda=2-1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}---\\ ---\\ ---\\ \lambda=\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+\frac{1}{3}\\ y=1+\frac{1}{3}\\ z=-1+\frac{1}{3}\\ ---\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{4}{3}\\ z=-\frac{2}{3}\\ ---\end{cases}\text{ então } Q=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

→distância de A a Q

$$d(A,Q)=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+\left(-\frac{2}{3}+1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim,

$$d(A,\alpha)=d(A,Q)=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u.m.$$