

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

**Observações:**

- Para a realização do exame de ALGA os alunos podem utilizar:
  - máquina de calcular gráfica;
  - um formulário A4 manuscrito pelo aluno que está a realizar o teste (só frente).
- Não são admitidas fotocópias de formulários ou formulários feitos em PC
- Os alunos devem apresentar todos os cálculos necessários à resolução dos problemas e as justificações necessárias
- No caso de utilizarem as funcionalidades de matrizes da máquina de calcular devem indicar todos os passos que realizaram

Bom trabalho!

Aldina Correia, Eliana Costa e Silva e Teófilo Melo

Questão	1.1	1.2	1.3	2	3.1	3.2	4.1	4.2	4.3	5	6.1	6.2.1	6.2.2	7.1	7.2	7.3	Total
Cotação	1	1,5	1	2	2	2	1	1	2	2	1	0,5	1	0,5	0,5	1	20

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere que o seguinte output do Scilab:

```
-->a=(x-2*%i)/5+(y-%i)/(2+*%i)
a =
    0.6 - 0.8i
-->RI=[real(a) imag(a)]
RI =
    0.6 - 0.8
-->[N,D]=rat(RI)
D =
    5.    5.
N =
    3    - 4.
```

1.1. Determine os números reais  $x$  e  $y$ .

1.2. Considere  $z_1 = \sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$  e  $z_2 = a$ . Determine o número complexo  $w = \frac{z_1^6}{z_2}$ . Apresente o resultado na forma algébrica.

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

1.3. Represente no plano de Argand a seguinte condição  $|z - z_1| \leq 2$ .  $|a| \wedge \text{Im}(z - 2) \geq 0$ .



2. Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ , determine a matriz  $X$ , tal que  $AX^T = BC - C^2$  (Sugestão: Comece por mostrar que  $X = [A^{-1}(BC - C^2)]^T$ ).

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

3. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

3.1. Considere que  $A$  é a matriz do sistema. Determine  $a$  de forma a que exista  $A^{-1}$ .

3.2. Discuta o sistema em função do parâmetro  $a$ .

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

4. Considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas  $x, y, z$  e  $t$ , cuja matriz do sistema  $A$  e a matriz dos termos independentes  $B$ , definidas em Scilab, são:

```
-->A=[1 2 3 4;0 1 -1 2;1 1 1 2;0 2 -2 4];
-->B=[1 1 1 1]';
```

- 4.1. Averigue se o sistema é de Cramer;

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

4.2. Observe o excerto de código Scilab seguinte e respetivo output:

```
--> rref([A B])
ans =

    1.    0.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    2.    0.
    0.    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.    1.
```

Classifique o sistema, justificando.

4.3. Classifique e resolva, se possível, o sistema que se obtém se se eliminar a última equação.

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

5. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Calcule os valores próprios e vectores próprios associados à matriz  $A$ .

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

6. Considere o espaço vetorial das matrizes reais do tipo  $2 \times 2$ :

$$\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

6.1. Mostre que o conjunto  $S = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a_{11} = -a_{21}\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

6.2. Considere os vetores  $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  e  $v_3 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ .

6.2.1. Averigue se  $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ;

6.2.2. Verifique se o conjunto  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  constitui uma base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , sendo

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

7. Dada a reta  $r$  de equações cartesianas  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ , o plano  $\alpha$  de equação cartesiana  $x + y + z = 2$  e o ponto  $A = (1, 1, -1)$ , determine:

7.1. As equações cartesianas da reta  $s$  que passa pelo ponto  $A$  e é paralela à reta  $r$ .

7.2. Os ângulos que a reta  $r$  faz com o plano  $\alpha$ .

<b>ESTGF</b>   <b>POLITÉCNICO DO PORTO</b>	Tipo de Prova Exame da Época Normal	Ano lectivo 2012/2013	Data 18-06-2013
	Curso Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica	Duração 2 horas	

Nº de Aluno:

Nome:

7.3. A distância do ponto A ao plano  $\alpha$ .