ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

P.PORTO

Matemática Discreta 2022/2023

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Representação e operações sobre conjuntos

Definição 1:

Um *conjunto* é uma coleção não ordenada de objetos.

Os objetos de um conjunto são chamados os *elementos* do conjunto.

Diz-se que os elementos pertencem ao conjunto.

Notação:

Os conjuntos representam-se por letras maiúsculas e os objetos por letras minúsculas.

Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elementos do conjunto A.

Exemplo 1:

O conjunto dos números naturais menores que 5 pode ser escrito como $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Exemplo 2:

O conjunto das vogais pode ser escrito como

$$V = \{a, e, i, o, u\}.$$

Exemplo 3:

O conjunto de todos os números inteiros não negativos menores do que 1000 pode denotado por

$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 999\}.$$

A descrição dos elementos de um conjunto pode ser feita por:

- *extensão* - enumerando explicitamente todos os elementos.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, d, g, t\}$$

$$C = \{amarelo, azul, castanho\}$$

A descrição dos elementos de um conjunto pode ser feita por:

- *compreensão* - especificando uma propriedade que caracteriza todos os elementos.

$$X = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$$

conjunto de todos os números naturais menores do que 4.

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar e } n \leq 7\},$$

conjunto de todos os números ímpares menores ou iguais a 7.

A descrição dos elementos de um conjunto pode ser feita por:

- *recursividade* - especificamos o primeiro elemento do conjunto e a regra que permite determinar os restantes.

O conjunto, S, de todos os números positivos pares pode ser descrito como:

(i) $2 \in S$;

(ii) se $x \in S$ então $x + 2 \in S$.

$$S = \{2, 2+2=4, 4+2=6, \dots\}$$

Alguns conjuntos usualmente utilizados

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, conjunto dos números naturais;

Exemplo 7:

Podemos também considerar conjuntos cujos elementos são eles próprios conjuntos.

O conjunto

$$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

contém 5 elementos

cada um deles é um conjunto

Definição 2:

O *conjunto vazio* (ou conjunto nulo) é um conjunto que não tem elementos e representa-se por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Atenção!

$$\boxed{\{\emptyset\}}$$ ← conjunto formado pelo conjunto vazio

$$\boxed{\{\emptyset\} \neq \emptyset}$$

Definição 3:

O *conjunto universo* é formado por todos os elementos em consideração e representa-se por U.

Definição 4:

Dado um conjunto A com exatamente n elementos distintos, em que n é um número inteiro não negativo, dizemos que A é um *conjunto finito* e que n é o *cardinal* de A. O cardinal de A representa-se por $\#A$, $\mathrm{card}(A)$ ou $|A|$.

Exemplo 8:

$\#(\{1,2,3\}) =$ e $\#\emptyset =$.

Exemplo 9:

O conjunto $\{\emptyset\}$ é um conjunto unitário uma vez que $\#(\{\emptyset\}) = 1$.

Definição 7:

Dois conjuntos A e B dizem-se iguais se todo o elemento de A está em B e todo o elemento de B está em A. Escreve-se $A = B$.

Exemplo 10:

Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{e, i, a, o, u\}$.

Tem-se que $A = B$.

Exemplo 11:

Sejam $X = \{x : x \text{ é positivo e divide } 5\}$ e $Y = \{1, 5\}$.

Temos que $X = Y$.

Definição 8:

O conjunto A é um *subconjunto* de B se e somente se todo o elemento de A também for um elemento de B. Escreve-se $A \subseteq B$ e diz-se que A é um *subconjunto* do conjunto B.

Exemplo 12:

Sejam $X = \{1, 2, 4, 9\}$ e $Y = \{2, 4\}$.

Temos que

$$2 \in Y \text{ e } 2 \in X$$

$$4 \in Y \text{ e } 4 \in X$$

$$\boxed{\text{todos os elementos de } Y \text{ são elementos de } X}$$

Então $Y \subseteq X$.

Definição 8:

O conjunto A é um *subconjunto* de B se e somente se todo o elemento de A também for um elemento de B. Escreve-se $A \subseteq B$ e diz-se que A é um *subconjunto* do conjunto B.

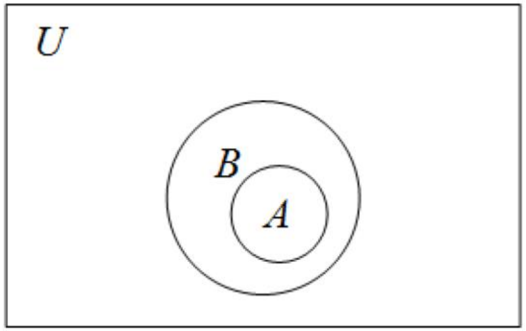
Exemplo 13:

Considerem-se os conjuntos

$A = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ e $C = \{1, 5\}$.

$$C \quad A, \qquad C \quad B, \qquad A \quad C, \qquad B \quad C$$

Diagrama de Venn



$A \subseteq B$

Teorema 1:

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Tem-se que:

(i) $\emptyset \subseteq A \subseteq U$;

(ii) $A \subseteq A$;

(iii) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;

(iv) $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Quando se pretende enfatizar que A é um subconjunto de B mas $A \neq B$

escreve-se $A \subset B$

A é um *subconjunto estrito* de B.

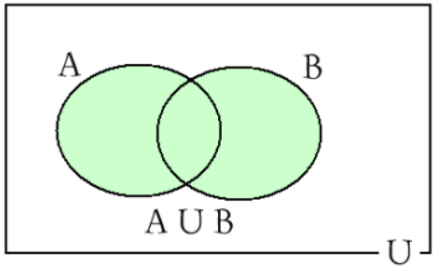
Se $A \subseteq B$ então é possível que $A = B$.

Elemento		Conjunto	Conjunto		Conjunto
	$\in$			$\subset$	
	$\notin$			$\subseteq$	
				$\supset$	
				$\supseteq$	
				$\nsubseteq$	

Note-se ainda que, um conjunto A pode ser elemento de um conjunto B, nesse caso faz sentido escrever $A \in B$.

$$\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

Operações com conjuntos



Definição 9:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *união* ou reunião dos conjuntos A e B, representada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B, i. e.,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

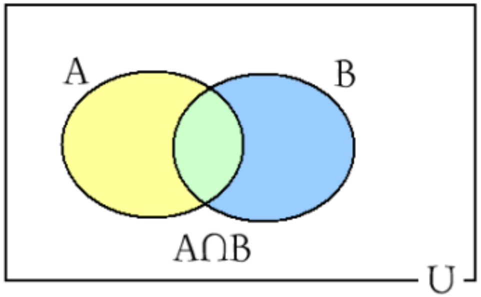
Exemplo 14:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que

$$A \cup B =$$

Operações com conjuntos



Definição 10:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *intersecção* dos conjuntos A e B, representada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a A e a B, i. e.,

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

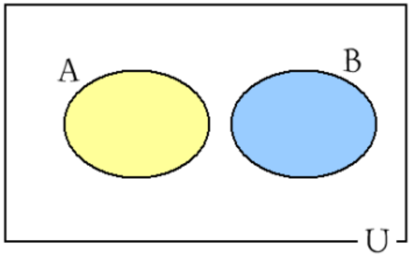
Exemplo 14:

Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que

$$A \quad A \cap B =$$

Operações com conjuntos



Definição 11:

Dois conjuntos são disjuntos se a sua intersecção é um conjunto vazio.

Exemplo 16:

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$.

Tem-se que

$$A \cap B =$$

Portanto, os conjuntos A e B são

Operações com conjuntos

Exemplo 17:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3\}$.

$$A \cup B =$$

$$A \cap B =$$

Teorema 2:

Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Então,

$$A \cup B = B \text{ e } A \cap B = A.$$

Operações com conjuntos

Teorema 3:

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Exemplo 18:

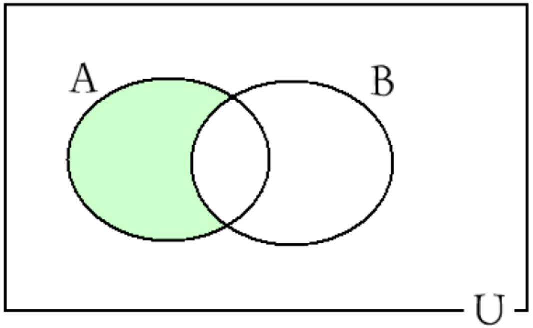
Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4\}$.

Temos que $\#A =$ e $\#B =$

$A \cup B =$, $\#(A \cup B) =$

$A \cap B =$, $\#(A \cap B) =$

Portanto, $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.



Operações com conjuntos

Definição 12:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *diferença* entre A e B, representada por $A - B$ ou $A\backslash B$, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B, i. e.,

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

A diferença ente A e B é também designada por complemento de B em relação a A.

Exemplo 19:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que,

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} =$$

$$\boxed{A - B \neq B - A}$$

$$B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\} =$$

Operações com conjuntos

Definição 13:

Sejam A e B dois conjuntos.

A *diferença simétrica* entre A e B, representada por $A \oplus B$, é o conjunto de todos os objetos que são membros de exatamente um dos conjuntos A e B, i.e.

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Exemplo 20:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Tem-se que,

$$A \oplus B =$$

Operações com conjuntos

Definição 14:

Considere-se U como sendo o conjunto universo. O complementar absoluto, ou simplesmente, complementar do conjunto A, representado por $\bar{A}$ ou A^c ou ainda A', é o conjunto de elementos que pertencem ao conjunto universal U mas que não pertencem ao conjunto A, i. e.,

$$\bar{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

Exemplo 21:

Considere $A = \{a, e, i, o, u\}$ e o conjunto universo formado por todas as letras do alfabeto Português.

Então, $\bar{A} =$

Operações com conjuntos

Definição 15:

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *produto cartesiano* de A e B, e designa-se por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$, i. e.,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 22:

Considere-se os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

O produto cartesiano de A por B é

$$A \times B =$$

Exemplo 23:

Considere-se o conjunto $A = \{1, 2\}$. O produto cartesiano de A por A é

$$A \times A = A^2 =$$

Operações com conjuntos

Exemplo 24:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{0, 4\}$, o produto cartesiano $A \times B \times C$ é

$$A \times B \times C =$$

Propriedades 1:

- O produto cartesiano não é comutativo.

Exemplo 25:

Vejamos que para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$

se tem $A \times B \neq B \times A$.

Temos que

$$A \times B =$$

$$B \times A =$$

Operações com conjuntos

Exemplo 26:

Dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{0, 4\}$, tem-se

$$\#(A \times B \times C) =$$

Operações com conjuntos

Definição 17:

Dado um conjunto A, o *conjunto das partes* de A é o conjunto constituído por todos os subconjuntos de A. O conjuntos das partes representa-se por $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 27:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$ (conjunto constituído por 3 elementos),

8 elementos

$$\mathcal{P}(A) =$$

Exemplo 28:

Seja $B = \emptyset$ (0 elementos), então $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ (1 elemento).

Operações com conjuntos

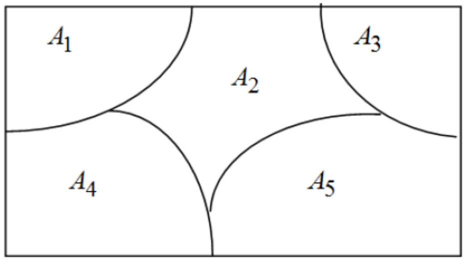
Definição 17:

Dado um conjunto A, o *conjunto das partes* de A é o conjunto constituído por todos os subconjuntos de A. O conjuntos das partes representa-se por $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 29:

Seja $C = \{a, b\}$ (2 elementos), então

- Para qualquer conjunto, o conjunto vazio e o próprio conjunto são elementos do conjunto das partes.
- $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}$



Operações com conjuntos

Definição 18:

Seja A um conjunto não vazio. Uma *partição* de A é um subconjunto de $\mathcal{P}(A)$, cujos elementos $A_i, i = 1, \ldots, n$ são tais que:

(i) A_i são subconjuntos não vazios de A;

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$;

(ii) A_i são mutuamente disjuntos, i.e., para $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

A cada A_i chamamos uma célula.

Exemplo 30:

Seja $A = \{a, b, c\}$. Duas partições de A são, por exemplo:

-
-

$A \cup \emptyset = A$ (P1a), $A \cap \emptyset = \emptyset$ (P1b) $A \cap U = A$ (P1c), $A \cup U = U$ (P1d)	Propriedades dos elementos neutros
$A \cup A = A$ (P2a) $A \cap A = A$ (P2b)	Propriedades idempotentes
$\overline{\overline{A}} = A$ (P3a), $\overline{\emptyset} = U$ (P3b), $\overline{U} = \emptyset$ (P3c) $A \cup \overline{A} = U$ (P3d) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (P3e)	Propriedades dos complementares
$A \cup B = B \cup A$ (P4a) $A \cap B = B \cap A$ (P4b)	Propriedades comutativas
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (P5a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (P5b)	Propriedades associativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (P6a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (P6b)	Propriedades distributivas
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (P7a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (P7b)	Leis de De Morgan

Considere os conjuntos A, B e C.

Mostre que $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\overline{C} \cap \overline{B}) \cup \overline{A}$.