

**ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO**

P.PORTO

Matemática Discreta 2022/2023

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Indução e recursividade

Teste os seus conhecimentos

Faça o Diagnóstico no moodle

Exemplo 90:

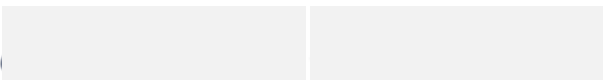
Mostre que, se a e b são dois números reais tais que $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

Resolução:

Sejam a e b dois números reais tais que $0 < a < b$.

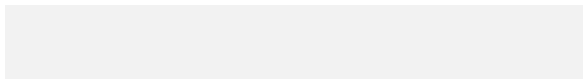
Temos que

$$a < b \Rightarrow$$



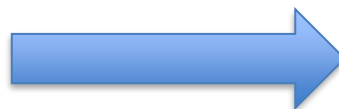
Por outro lado,

$$a < b \Rightarrow$$



Assim,

$$a^2 < ab < b^2$$



$$a^2 < b^2$$

Prova por contradição ou redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*)

Por forma a provar p , podemos assumir $\neg p$ e procurar uma contradição.

Exemplo 91:

Existe um número infinito de números primos.

Resolução:

Admitamos, por absurdo, que existem apenas n números primos, denotados por p_1, p_2, \dots, p_n .

Consideremos o número $x = p_1 p_2 \dots p_n + 1$  não é divisível por nenhum dos números p_1, p_2, \dots, p_n

Então x é um número primo

Portanto, não existem n números primos como tínhamos suposto!!

Logo, existem um número infinito de números primos.

Prova por contradição ou redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*)

Por forma a provar p , podemos assumir $\neg p$ e procurar uma contradição.

$p \rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge \neg q)$

A redução ao absurdo consiste em

assumir a veracidade da conjunção $p \vee \neg q$ e procurar uma contradição.

Portanto, $\neg(p \wedge \neg q)$ será verdadeira,

$$p \rightarrow q$$

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0 , se

(i) **Passo base:**

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo:**

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k (k \geq n_0)$ - **Hipótese**,
então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0 , se

(i) **Passo base:**

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo:**

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k$ ($k \geq n_0$) - **Hipótese**,
então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo base: $P(1)$

Para um conjunto com um único elemento $A_1 = \{a\}$ ($n = 1$),

temos que $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, A_1\}$, portanto,

$$P(1) : \#\mathcal{P}(A_1) = 2^1, \text{ com } \#A_1 = 1.$$

Um proposição é verdadeira para todos os números naturais maiores ou iguais a n_0 , se

(i) **Passo base:**

For verdadeira para $n = n_0$;

(ii) **Passo indutivo:**

Supondo que a proposição é verdadeira para $n = k$ ($k \geq n_0$) - **Hipótese**,
então a proposição também é válida para $n = k + 1$ - **Tese**.

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

Hipótese: $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

Tese: $P(k + 1)$ é verdadeira, ou seja,

Exemplo 92:

Vamos provar que $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$, para um conjunto A não vazio qualquer.

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k)$ é verdadeira, ou seja,

Tese: $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja,

Seja $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ e seja $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$

Os subconjuntos de A_{k+1} podem ser agrupados em dois grupos:

(i) os que não incluem a_{k+1}

(ii) os que incluem o novo elemento a_{k+1}

$\mathcal{P}(A_k)$

são obtidos acrescentando o novo elemento a_{k+1}

Assim,

$$\#\mathcal{P}(A_{k+1}) =$$

--	--	--	--

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$,

proposição é válida para todo o n .

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}, \text{ para um conjunto } A \text{ não vazio qualquer}$$

Exemplo 93:

Mostre que para qualquer número inteiro positivo n

$$\text{temos } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Passo base: $P(1)$

Substituímos n por 1

$$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} \text{ é verdadeira.}$$

Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótese: $P(k) :$

Tese: $P(k+1) :$

Hipótese: $P(k)$ $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Tese: $P(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.



Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + 1 &= 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Reduzindo ao mesmo
denominador

Logo, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é.

Visto que $P(1)$ e $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$,

então a proposição é válida para todo o n , ou seja,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}, n \geq 1$$

Indução matemática

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(k) \text{ Verd.} \rightarrow P(k + 1) \text{ Verd.}, \end{array} \right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1$$

Indução matemática

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(k) \text{ Verd.} \rightarrow P(k+1) \text{ Verd.}, \end{array} \right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1$$

Indução completa (ou segundo princípio da indução matemática ou indução forte)–

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) \text{ Verd.} \\ (\forall k) P(r) \text{ Verd.}, \forall r, 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \text{ Verd.}, \end{array} \right. \longrightarrow P(n) \text{ Verd.}, \forall n \geq 1 .$$

Uma *definição recursiva* de uma função

- **Passo base:**

Especificar o(s) valor(es) inicial(is) da função;

- **Passo recursivo:**

Fornecer uma regra para encontrar o valor num número inteiro a partir de valores nos números inteiros menores.

Exemplo 94:

Considere a função S definida recursivamente por:

$$\begin{cases} S(0) = 3 \\ S(n) = 2S(n-1) + 3, n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 94:

Considere a função S definida recursivamente por:

$$\begin{cases} S(0) = 3 \\ S(n) = 2S(n-1) + 3, n \geq 1 \end{cases}$$

Encontre $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$ e $S(4)$.

$$S(1) = 2S(0) + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9,$$

$$S(2) = 2S(1) + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21,$$

$$S(3) = 2S(2) + 3 = 2 \times 21 + 3 = 45,$$

$$S(4) = 2S(3) + 3 = 2 \times 45 + 3 = 93.$$

Exemplo 95:

Dê uma definição recursiva da função fatorial $F(n) = n!$.

$$\begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n) = n \times F(n-1), n \geq 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} F(0) = 0! = 1 \\ F(n+1) = (n+1) \times F(n), n \geq 0 \end{cases}$$

Uma *fórmula de recorrência linear* pode ser escrita como

$$S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \cdots + f_k(n)S(n-k) + g(n)$$

onde f_i e g são expressões envolvendo n .

Exemplo 97:

Considere a relação de recorrência definida por

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 97:

Considere a relação de recorrência definida por

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

$$S(1) = 2$$

$$S(2) = 2S(1) = 4 = 2^2$$

$$S(3) = 2S(2) = 8 = 2^3$$

$$S(4) = 2S(3) = 16 = 2^4$$

...

$$S(n) = 2^n.$$

$S(n) = 2^n$ é a [Sem título] fórmula fechada (*closed-form solution*) de S .

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

- **Expand:** Usando a fórmula de recorrência tem-se que:

$$S(n) = 2S(n-1)$$

$$\Rightarrow S(n) = 2(2S(n-2)) = 2^2 S(n-2)$$

$$\Rightarrow S(n) = 2^2(2S(n-3)) = 2^3 S(n-3)$$

...

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

- **Guess:** Observando o desenvolvimento em cima, podemos conjecturar que

$$S(n) = 2^k S(n-k).$$

Para $n-k=1$ então $k=n-1$, donde

$$S(n) = 2^{n-1} S(1) = 2^{n-1} \times 2 = 2^n.$$

Exemplo 98:

Mostre que $S(n) = 2^n$ para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 2 \\ S(n) = 2S(n-1), n \geq 2 \end{cases}$$

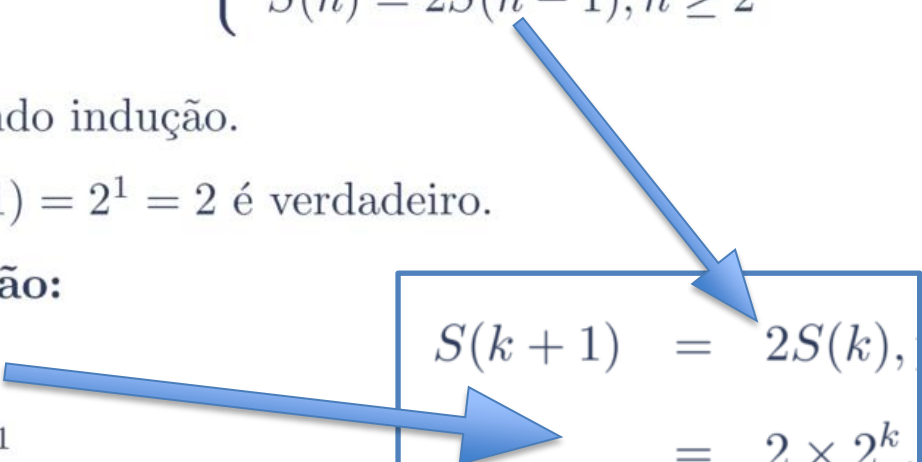
- **Verify:** Verificar usando indução.

Passo Base: $S(1) = 2^1 = 2$ é verdadeiro.

Passo de Indução:

Hipótese: $S(k) = 2^k$

Tese: $S(k+1) = 2^{k+1}$


$$\begin{aligned} S(k+1) &= 2S(k), \\ &= 2 \times 2^k, \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Fica assim provado que $S(n) = 2^n$.

1. Começando por $S(n)$, que é função de $S(n - 1)$:

- Calcular $S(n - 1)$ e substituir em $S(n)$,

obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n - 2)$.

- Calcular $S(n - 2)$ e substituir em $S(n)$,

obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n - 3)$.

- Calcular $S(n - 3)$ e substituir em $S(n)$,

obtendo-se assim $S(n)$ em função de $S(n - 4)$.

- ...

2. Repetir o processo até ser capaz de definir $S(n)$ em função de $S(n - k)$.

Fazer $n - k = 1$ e deduzir $S(n)$ em função de apenas n .

3. Usando indução, demonstrar que a fórmula fechada está correta.

Exercício:

Encontre a fórmula fechada para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

1. Expand:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 3 \\ &= (T(n-2) + 3) + 3 = T(n-2) + 2 \times 3 \\ &= (T(n-3) + 3) + 2 \times 3 = T(n-3) + 3 \times 3 \end{aligned}$$

2. Guess:

$$T(n) = T(n-k) + k \times 3.$$

Para $n - k = 1$ então $k = n - 1$,

$$T(n) = T(1) + (n-1) \times 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2.$$

Exercício:

Encontre a fórmula fechada para a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

3. Verify:

Passo Base: $T(1) = 3 \times 1 - 2 = 3 - 2 = 1$ é Verdadeira.

Passo de Indução:

Hipótese: $T(k) = 3k - 2$

Tese: $T(k+1) = 3(k+1) - 2 = 3k + 1$

$$T(k+1) = T(k) + 3 = 3k - 2 + 3 = 3k + 1$$

Logo, tem-se que $T(n) = 3n - 2$.