Álgebra Linear e Geometria Analítica

Conjunto dos Números Complexos (Revisão)

LEI e LSIRC

2023/2024

Introdução

- Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o conceito de quantidade imaginária para representar $\sqrt{-1}$.
- $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.
- $\mathbb{C}$ é conjunto dos números complexos.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{\text{imaginário}\}$.
- $\{\text{imaginário}\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Forma algébrica

Definição

Seja $z \in \mathbb{C}$ um número complexo. A sua forma algébrica (cartesiana ou retangular) é definida por:

$$z = a + bi$$

onde a, $b \in \mathbb{R}$ e i designa a unidade imaginária.

Definição

Diz-se que z é um número imaginário puro se $a = 0$ e $b \neq 0$. Por outro lado, se $b = 0$ então z é um número real.

Igualdade

Definição

Dois números complexos são iguais, se e só se, têm partes reais e imaginárias iguais, isto é:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Conjugado

Definição

Chama-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\bar{z} = a - bi$, isto é, aquele que tem a mesma parte real e parte imaginária simétrica.

Propriedades

Seja $z \in \mathbb{C}$ um número complexo.

1. $\bar{z} = z$ se e só se $z \in \mathbb{R}$, isto é, só os números reais são conjugados de si próprios.
2. $\bar{\bar{z}} = z$, isto é, todo o número complexo é conjugado do seu conjugado.

Adição de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A adição de dois números (ou mais) complexos é ainda um número complexo em que a parte real é a adição das partes reais, e a parte imaginária é a adição das partes imaginárias, ou seja:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Subtração de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A subtração de z_1 por z_2 não é mais que a soma de z_1 com o simétrico de z_2, ou seja:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$$

Multiplicação de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A multiplicação de dois números complexos procede-se como se estivéssemos a multiplicar dois números reais, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica e tendo em conta que $i^2 = -1$, isto é:

$$z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Divisão de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Tem-se que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Inverso de um número complexo

Definição

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. O inverso de z que se representa por z^{-1}, é determinado da seguinte forma:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Potência de base i e expoente $n \in \mathbb{Z}$

Definição

Sabendo que $i^4 = 1$ tem-se que:

$$i^n = i^{4q+r} = \left(i^4\right)^q \times i^r = i^r,$$

$n \in \mathbb{Z}$, q e r é o quociente e o resto da divisão de n por 4.

Exemplos

$$i^{16} = \left(i^4\right)^4 \times i^0 = i^0 = 1.$$

$$i^{17} = \left(i^4\right)^4 \times i^1 = i.$$

$$i^{18} = \left(i^4\right)^4 \times i^2 = -1.$$

Scilab

adição	+
subtração	-
multiplicação	*
divisão	/
potenciação	^
unidade imaginária	% i

Tabela: Operadores aritméticos

$a + bi$	`complex(a,b)`
conjugado	`conj(x)`
parte real	`real(x)`
parte imaginária	`imag(x)`
módulo	`abs(x)`

Tabela: Funções matemáticas