Álgebra Linear e Geometria Analítica

Sistemas de Equações Lineares por Condensação

LEI e LSIRC

2023/2024

Introdução

- Já aprenderam a resolver por substituição sistemas de equações lineares de 2 equações e 2 incógnitas.
- $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right.$ tem uma única solução $S = \{(x, y) = (2, 1)\}$.
- Também foi analisado que os sistemas, quanto ao número de soluções, se classificam em:
  - Sistema Possível e Determinado, se o sistema tem uma única solução.
  - Sistema Possível e Indeterminado, se o sistema tem uma infinidade de soluções.
  - Sistema Impossível, se o sistema não tem solução.

Introdução

Exemplo Prático

Uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar em: 170 unidades de vitamina A, 230 unidades de vitamina B, 250 unidades de vitamina C, 200 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E (Boldrini et al. 1980 p.54).
Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma alimentação equilibrada diariamente, utilizou-se 5 alimentos. Estes foram estudados (fixando a mesma quantidade de cada alimento, em gramas) e determinou-se que: o alimento 1 tem 1, 2, 2, 2, 2 unidades da vitamina A, B, C, D e E, respetivamente; o alimento 2 tem 9, 1, 1, 1, 1; o alimento 3 tem 2, 2, 7, 1, 2; o alimento 3 tem 2, 2, 7, 1, 2; o alimento 4 tem 1, 2, 2, 1, 2; e o alimento 5 tem 1, 1, 2, 1, 9.
Quantas gramas de cada alimento: 1, 2, 3, 4, e 5 deve-se ingerir diariamente?

Introdução

Definição

Uma equação linear pode ser escrita como uma expressão da forma:

$$ax_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são números reais conhecidos e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais a determinar (incógnitas).

Introdução

Definição

Um sistema de m equações lineares a n incógnitas é um conjunto de m equações lineares que se representa por $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, onde a_{ij} e b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots n$, são números reais conhecidos, x_1, x_2, . . ., x_n são as n incógnitas, a_{ij} é o coeficiente da i-ésima equação na j-ésima incógnita, e b_i o termo independente da i-ésima equação.

Introdução

Exemplo Prático

Os dados do exemplo podem ser mostrados na seguinte tabela:

	Vitaminas				
Alimentos	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	1	2	2	2	2
2	9	1	1	1	1
3	2	2	7	1	2
4	1	2	2	1	2
5	1	1	2	1	9
Total:	**170**	**230**	**250**	**200**	**350**

Seja x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ a quantidade do i-ésimo alimento (em g) a determinar. O problema pode ser resolvido definindo o sistema de $m = 5$ equações lineares a $n = 5$ incógnitas representado por:
$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 170 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 230 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 250 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 350 \end{cases}.$$

Introdução

Definição

Definindo-se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Então, o sistema de m equações lineares a n incógnitas é equivalente à equação matricial $AX = B$.

A matriz A designa-se por matriz dos coeficientes do sistema ou matriz do sistema, a matriz coluna B designa-se por matriz dos termos independentes e os elementos x_i da matriz coluna X são as incógnitas do sistema.

Introdução

Exemplo Prático

No exemplo temos como matrizes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 170 \\ 230 \\ 250 \\ 200 \\ 350 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Sendo, o sistema de 5 equações lineares a 5 incógnitas equivalente à equação matricial $AX = B$.

Introdução

Definição

A matriz $A' = [A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$

é designada por matriz completa (ou aumentada) do sistema $AX = B$.

Introdução

Definição

Chama-se solução do sistema $AX = B$ a uma matriz coluna S, tal que, $A \times \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} = B$
seja uma proposição verdadeira, ou seja, a solução do sistema é constituída por um

conjunto de números reais para as incógnitas $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, que verifiquem simultaneamente todas as equações.

Resolução de sistemas

Método de Condensação de Gauss - Jordan

Este método de resolução de sistemas de equações lineares baseia-se na transformação da matriz completa do sistema numa matriz triangular superior, usando as operações elementares.

Operações Elementares

- Trocar linhas;
- Trocar colunas, exceto a coluna dos termos independentes;
- Multiplicar ou dividir uma linha por um escalar diferente de zero;
- Substituir uma linha pela soma de linhas pré-multiplicadas por um escalar não nulo.

Classificação de sistemas

Definição

Considera-se um sistema de m equações lineares a n incógnitas definido na forma matricial $AX = B$. Então:

1. Se $r(A) = r(A|B) = n$, o sistema é possível e determinado (solução única).
2. Se $r(A) = r(A|B) < n$, o sistema é possível e indeterminado (infinidade de soluções), o grau de indeterminação é dado pela diferença $n - r(A)$.
3. Se $r(A) \neq r(A|B)$, o sistema é impossível.

Classificação de sistemas

Exemplo Prático

Para o exemplo e utilizando o *software* SCILAB temos que $r(A) = 5 = r(A|B)$ concluindo assim que o sistema é possível e determinado (solução única):

```
--> A=[1 9 2 1 1;2 1 2 2 1;2 1 7 2 2;2 1 1 1 1;2 1 2 2 9];

--> B=[170;230;250;200;350];

--> rank(A)
 ans  =

   5.

--> rref([A B])
 ans  =

   1.   0.   0.   0.   0.   74.764706
   0.   1.   0.   0.   0.   5.4705882
   0.   0.   1.   0.   0.   1.
   0.   0.   0.   1.   0.   29.
   0.   0.   0.   0.   1.   15.
```

Uma alimentação diária equilibrada deve conter aproximadamente 74,8 gramas do alimento 1; 5,5 gramas do alimento 2; 1 grama do alimento 3; 29 gramas do alimento 4 e 15 gramas do alimento 5.

Sistema Homogéneo

Definição

Um sistema $AX = B$ é designado por sistema homogéneo se a matriz dos termos independentes B contém todos os elementos nulos. Um sistema homogéneo é sempre possível, uma vez que, admite pelo menos a solução nula.

Sistema Homogéneo

- Considere o seguinte sistema homogéneo $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$.
- A matriz completa é definida por $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Sistema Homogéneo

- Efetuando operações elementares obtemos:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2=-2l_1+l_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_3=l_1+l_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right].$$
- Como $r(A) = r(A|B) = n = 3$ então sistema é possível e determinado.
- O sistema admite uma única solução $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Sistema Homogéneo

- Considere o seguinte sistema homogéneo $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-2y-z=0 \\ 4x-3z=0 \end{cases}$.
- Efetuando operações elementares obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2=-2l_1+l_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{l_3=-4l_1+l_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{l_3=-l_2+l_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sistema Homogéneo

- Como $r(A) = r(A|B) = 2 < 3$ (número de incógnitas) o sistema é possível simplesmente indeterminado.
- Para além da solução nula admite o conjunto de soluções $S = \{(x, y, z) = \left(\frac{3k}{4}, \frac{k}{4}, k\right), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$.