ESCOLA
SUPERIOR
DE TECNOLOGIA
E GESTÃO

P.PORTO

Matemática Discreta 2022/2023

Estruturas Fundamentais, Relações e Indução

Relações

Teste os seus conhecimentos

Faça o Diagnóstico no moodle

Exemplo 74:

Uma empresa vende determinados produtos que vamos designar por x, y, z e w. Os clientes são considerados do tipo a, b ou c de acordo com a quantidade de material comprada pelo cliente no último ano civil. Relativamente a um certo dia a empresa registou as vendas de acordo com a tabela seguinte:

Cliente	Tipo	Produto	Preço
J.Costa	a	x	50
A.Santos	c	y	15
C.Cardoso	b	y	15
H.Barros	a	w	30

Considerando $C = \{\text{clientes}\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{\text{produtos}\}$ e $D = \{\text{preços dos produtos}\}$, associada a esta tabela temos uma relação quaternária constituída pelos seguintes elementos de $C \times T \times P \times D$:

$$(\text{J.Costa}, a, x, 50),\ (\text{A.Santos}, c, y, 15),\ (\text{C.Cardoso}, b, y, 15),\ (\text{H.Barros}, a, w, 30).$$

Definição 28:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos e $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ o seu produto cartesiano.
Uma *relação* R sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ consiste num conjunto de $n-$uplos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com $a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, é dada por um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Como R é uma relação constituída por $n-$uplos, R diz-se uma relação $n-$ária.

Definição 29:

Sejam A e B dois conjuntos.
Uma *relação binária* R de A para B é constituída por um conjunto de pares (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

Notação:

Se $(x, y) \in R$, dizemos que x é $R-$relacionado com y.

Escrevemos $R : A \longrightarrow B$ para exprimir que R é uma relação de A para B.

$\boxed{xRy \text{ para significar que } (x, y) \in R;}$ $\boxed{x \not{R}\, y \text{ para significar que } (x, y) \notin R.}$

Exemplo 75:

Considerem-se os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Uma relação binária de A para B poderá ser, por exemplo, o conjunto

$$R = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Tem-se,

$$1Ra,$$

$$1 \not R\, b,$$

Exemplo 76:

Considere-se o conjunto $H = \{1, 2, 3, 4\}$, e defina-se em H a relação binária R estritamente menor que.

Portanto,

$$aRb \text{ se e só se } a < b.$$

Então,

$$R = \{ \qquad \}.$$

Observações:

- Uma relação $R : A \longrightarrow B$ pode ser vista como um subconjunto de $A \times B$ e podemos expressar relações usando a notação dos conjuntos.
- $A \times B$ é uma relação a qual designamos por *relação universal* de A para B.
- A *relação vazia* não contém nenhum par.

Definição 30:

Considerem-se os conjuntos A e B e seja $R \subseteq A \times B$ uma relação binária de A para B.
Um elemento $a \in A$ pertencerá ao domínio da relação binária R, se existir um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Assim, o **domínio da relação binária** R é,

$$dom(R) = \{a \in A : \exists b \in B \text{ e } (a, b) \in R\}.$$

Um elemento $b \in B$ pertencerá ao contradomínio da relação binária R, se existir um elemento $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Assim, o **contradomínio da relação binária** R é,

$$cdom(R) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ e } (a, b) \in R\}.$$

Exemplo 77:

Considerem-se os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação binária, de A para B,

$$R = \{(a, 2), (b, 3), (a, 3), (a, 4), (b, 4)\}.$$

O domínio de R é o conjunto $dom(R) =$

O contradomínio de R é o conjunto $cdom(R) =$

Matrizes booleana

Exemplo 78:

Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Considerem-se os elementos de A e B ordenados pela ordem natural.

Seja R a relação "menor do que". Tem-se

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 4), (3, 6)\}.$$

A matriz desta relação é:

A matriz $m \times n$, $M_R = (a_{ij}^R)_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$ de uma relação $R : A \longrightarrow B$ é definida por

$$a_{ij}^R = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i \not R\, b_j \\ 1 \text{ se } a_i R b_j \end{cases}.$$

Matrizes booleana

Exercício:

Determine a relação binária R de $A = \{1, 3\}$ para $B = \{2, 4, 6\}$, definida pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Grafo orientado

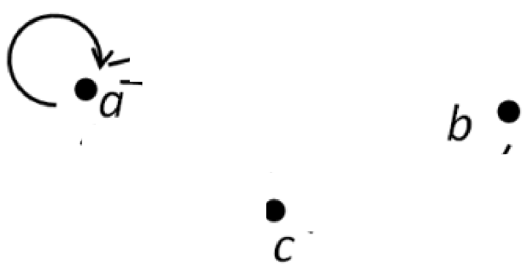
As relações podem também ser representadas por um grafo orientado (ou digrafo)

Exemplo 79:

Seja $A = \{a, b, c\}$ e considere-se a relação binária

$$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,a)\}.$$

O grafo orientado desta relação é:



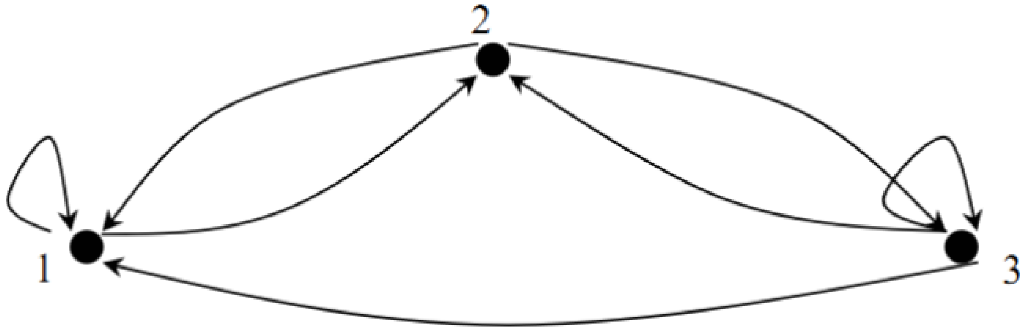
A cada par $(a,b) \in R$ corresponde um **ramo** unindo cada vértice $a \in A$ a um vértice $b \in B$.

O ramo correspondendo a um par ordenado $(a,a) \in R$ diz-se um **lacete**.

Grafo orientado

Exercício:

Determine a relação dada pelo grafo orientado:



Exemplo 80:

No conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a relação "x é maior que y" determina o conjunto

$$R = \{(5, 4), \qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

Exercício:

Represente a relação anterior por uma matriz booleana e por um grafo orientado.

Exemplo 81:

Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$,

$$R = \{(1, a), (2, e), (3, i), (1, o), (2, u)\}$$

é uma relação de A em B.

Exercício:

Represente a relação anterior por uma matriz booleana.

Observações:

- Se A é um conjunto e R e uma relação de A para A, dizemos que R é uma *relação em* A ou *sobre* A.

Esta relação designa-se por relação identidade e denota-se por $I_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

- Se $R : A \longrightarrow B$, então a *relação inversa* $R^{-1} : B \longrightarrow A$ é constituída por todos os pares (b,a) tais que $(a,b) \in R$.

Tem-se assim:

- $bR^{-1}a$ sse aRb;
- $(R^{-1})^{-1} = R$.

Exemplo 82:

A relação inversa da relação $R = \{(1,x),(2,z),(3,y)\}$ de $A = \{1,2,3\}$ para $B = \{x,y,z\}$ é:

$$R^{-1} = $$

Todas as operações efetuadas sobre conjuntos podem ser também efectuadas sobre relações.

$$x(R \cap S)y \Leftrightarrow$$

$$x(R \cup S)y \Leftrightarrow$$

$$x(R - S)y \Leftrightarrow$$

$$x\overline{R}y \Leftrightarrow$$

Definição 31:

Sejam $R : X \longrightarrow Y$ e $S : Y \longrightarrow Z$ duas relações.

A *composição* de R e S, denotada por $S \circ R$, tem X como conjunto de partida, Z como conjunto de chegada e é constituída por todos os pares (x, y) para os quais existe algum objeto $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S$. Ou seja,

$$x(S \circ R)z \text{ se existe algum } y \in Y \text{ para o qual } xRy \text{ e } ySz.$$

Isto é,

$$S \circ R = \{ \qquad \}.$$

Exemplo 83:

Considere as relações $R = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ e $S = \{(1,2),(2,1),(3,1)\}$.

Tem-se que,

$$1(S \circ R)1, \quad \text{pois}$$

$$2(S \circ R)1, \quad \text{pois}$$

$$3(S \circ R)2, \quad \text{pois}$$

Portanto,

$$S \circ R = \{(\qquad)\}.$$

- A composição de relações é associativa, i.e., $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
- Seja R uma relação sobre um conjunto A.

Geralmente abreviamos $R \circ R$ por R^2, $R \circ R \circ R$ por R^3, etc.

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

Reflexiva: Se para todo o $x \in A$, $(x, x) \in R$.

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Não é uma relação reflexiva, pois

$(3,3) \notin R_1$

$$\boxed{R_1 \quad = \quad \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}}$$

É uma relação reflexiva

$$\boxed{R_5 \quad = \quad \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}}$$

Observação:

Mostrar que uma dada relação R num conjunto A satisfaz alguma das propriedades anteriores implica mostrar a propriedade em causa é válida para todos os elementos de R.

Por outro lado, para mostrar que R não satisfaz uma dada propriedade basta arranjar um contra-exemplo.

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

Irreflexiva: Se para todo o $x \in A$, $(x, x) \notin R$.

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

É uma relação irreflexiva

$$\boxed{R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}}$$

Não é uma relação irreflexiva, pois

$$\boxed{R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}}$$

$(1,1) \in R_1$

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

Simétrica: Se para todo o $x, y \in A$, $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

É uma relação simétrica

$$\boxed{R_2 \quad = \quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}}$$

Não é uma relação simétrica, pois

$$\boxed{R_1 \quad = \quad \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}}$$

$(4,1) \in R_1$ mas $(1,4) \notin R_1$

$$\boxed{R_6 \quad = \quad \{(3, 4)\}}$$

Não é uma relação simétrica, pois

$(3,4) \in R_6$ mas $(4,3) \notin R_6$

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

***Anti-Simétrica*:** Se para todo $x, y \in A : ((x, y) \in R$ e $(y, x) \in R) \Rightarrow x = y$.

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

É uma relação anti-simétrica

$$\boxed{R_4 \quad = \quad \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}}$$

Não é uma relação anti-simétrica

$$\boxed{R_2 \quad = \quad \{(1,1),(1,2),(2,1)\}}$$

$$\boxed{R_6 \quad = \quad \{(3,4)\}}$$

Não é uma relação anti-simétrica

Definição 32:

Uma relação binária R num conjunto A (ou seja, $R \subseteq A \times A$) diz-se:

Transitiva: Se para todo o $x, y, z \in A$, $((x, y) \in R \text{ e } (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$.

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

É uma relação transitiva

$$\boxed{R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}}$$

É uma relação transitiva

$$\boxed{R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}}$$

Não é uma relação transitiva, pois

$$\boxed{R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}}$$

$(2,1) \in R_2$ e $(1,2) \in R_2$ mas $(2,2) \notin R_2$

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere as relações

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\} \\
R_2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\
R_3 &= \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\} \\
R_4 &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\} \\
R_5 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \\
R_6 &= \{(3,4)\}
\end{aligned}$$

Reflexivas; <u>Resposta</u>: R_3 e R_5, pois ...

Simétricas; <u>Resposta</u>: R_2 e R_3, pois ...

Para o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, considere as relações

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\} \\
R_2 &= \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \\
R_3 &= \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\} \\
R_4 &= \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\} \\
R_5 &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\} \\
R_6 &= \{(3,4)\}
\end{aligned}$$

Anti-simétricas; Resposta: R_4, R_5 e R_6, pois ...

Transitivas; Resposta: R_4, R_5 e R_6, pois ...

Exercício:

Represente as relações anteriores por um grafo orientado e confirme os resultados obtidos anteriormente.

Observação:

Do ponto de vista gráfico:

- uma relação é reflexiva se para todo o vértice existir um ramo ligando-o a ele mesmo (ou seja, existe um lacete para todo o vértice).
- a relação será simétrica sempre que ao haver uma aresta de a para b também haja uma aresta de b para a;
- a relação será transitiva sempre que ao haver uma aresta da a para b e outra de b para c, também haja uma aresta de a para c.

Fecho de uma relação

Considerem-se um conjunto A e o conjunto de todas as relações em A. Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de uma dessas relações, como a transitividade ou a simetria.

Uma relação com a propriedade $\mathcal{P}$ é designada uma $\mathcal{P}$-relação.

O $\mathcal{P}$-*fecho* de relação arbitrária R em A, denotado por $\mathcal{P}(R)$, é uma relação tal que,

$$R \subseteq \mathcal{P}(R) \subseteq S,$$

para a $\mathcal{P}$-relação S contendo R. Usaremos a notação

$$\text{reflexivo}(R),\ \text{simétrico}(R) \text{ e transitivo}(R),$$

para os fecho reflexivo, simétrico e transitivo de R.

Fecho de uma relação

Dados um conjunto A com n elementos e uma relação R em A:

reflexivo(R) é obtido adicionando a R os elementos (x, x) que não pertencem a R;

Exemplo 84:

Considerem-se o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Então,

$$\text{reflexivo}(R) = R \cup$$

Fecho de uma relação

Dados um conjunto A com n elementos e uma relação R em A:

simétrico(R) é obtido adicionando a R os elementos (y, x) tais que (x, y) pertencem a R;

Exemplo 84:

Considerem-se o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Então,

$$\text{simétrico}(R) = R \cup$$

Fecho de uma relação

Dados um conjunto A com n elementos e uma relação R em A:

$$\text{transitivo}(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n.$$

Exemplo 84:

Considerem-se o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e a relação $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Então,

$$\text{transitivo}(R) = R \cup R^2 \cup R^3 =$$

Relação de equivalência

Definição 33:

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma *relação de equivalência* se R for simultaneamente uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Exemplo 85:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$.

A relação

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

é uma relação de equivalência.

Provar!!

Classes de equivalência

Definição 34:

Sendo R uma relação de equivalência sobre um conjunto A não vazio e sendo $a \in A$, o conjunto:

$$C_a = \frac{a}{R} = [a]_R = \{x \in A : xRa\}$$

chama-se *classe de equivalência* do elemento a.

Exemplo 86:

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ um conjunto e

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d),(d,c)\}$$

uma relação de equivalência em A (Provar!).

Temos,

$[a]_R =$ $\qquad [b]_R =$ $\qquad [c]_R =$ $\qquad [e]_R =$

Observação:

Classe de equivalência do elemento a é o conjunto de todos os elementos que estão em relação com a.

Definição 35:

O conjunto de todas as classes de equivalência duma relação R, chama-se conjunto quociente de A por R e denota-se:

$$\frac{A}{R} = A/R = \{C_x : x \in A\}.$$

Exercício

Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ um conjunto e

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (c,d), (d,c)\}$$

uma relação de equivalência em A.

Construa o conjunto quociente.

Teorema 9:

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto quociente A/R é uma partição de A, isto é:

- $[a]_R \neq \emptyset$ (De facto, para cada $a \in A$, temos $a \in [a]_R$);
- $A = \cup_{a \in A} [a]_R$;
- $a \not R b \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Relação de ordem

Definição 36:

Uma relação binária R num conjunto A diz-se:

- R é uma *relação de ordem parcial (fraca)* (r.o.p.) em A sse é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
  Ao par (A, R) chama-se um *conjunto parcialmente ordenado* ou *c.p.o.* ou *poset*.
- R é uma *relação de ordem parcial estrita* em A sse é irreflexiva, anti-simétrica e transitiva;
- R é uma *relação de ordem total* em A sse é uma r.o.p. em que cada elemento de A está relacionado com todos os outros elementos de A, ou seja, para todo o $x \in A$ se tem $xRy, \forall y \in A$.
  O para (A, R) chama-se um *conjunto totalmente ordenado* ou *c.t.o.*.

Exemplo 87:

A relação inclusão de conjuntos é uma relação de ordem parcial pois:

Reflexiva;

Anti-simétrica;

Transitiva.

Definição 37:

Seja $\preceq$ (que se lê "menor ou igual geral") uma relação de ordem parcial em A.

- Denotamos por $\prec$ (que se lê "menor geral") a correspondente ordem parcial estrita, i.e., a ordem parcial estrita obtida de $\preceq$ tirando-lhe todos os pares (x, x), com $x \in A$.
- A inversa de $\prec$ denota-se por $\succ$ e a inversa de $\preceq$ denota-se por $\succeq$.
- Se $(A, \preceq)$ é um c.p.o., então $(A, \succeq)$ também é um c.p.o. e diz-se o dual de $(A, \preceq)$.
- Seja $(A, \preceq)$ é um c.p.o.. Se $x \prec y$ dizemos que x é um *predecessor* de y, ou que y é um *sucessor* de x.
- Se $x \prec y$ e não existem elementos entre x e y , i.e., não existe nenhum $z \in A$ tal que $x \prec z \prec y$, dizemos que x é um predecessor imediato de y, ou que y é um sucessor imediato de x.

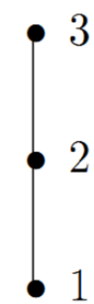
Diagrama de Hasse

Um c.o.p. pode ser representado por um *diagrama de Hasse* do seguinte modo:

representamos os elementos do conjunto e sempre que x é um predecessor imediato de y ligamos x a y por um arco com x situado num nível inferior a y.

Exemplo 88:

O diagrama de Hasse do conjunto $\{1, 2, 3\}$ com a relação $\leq$ habitual é:



Exemplo 89:

O diagrama de Hasse para o c.o.p. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, com $A = \{a, b\}$ é: