Álgebra Linear e Geometria Analítica

Determinantes

LEI e LSIRC

2023/2024

Noção de Determinante

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante associado à matriz A é um número real e representa-se por $det(A)$ ou $|A|$.

Scilab

```
-->A=[1 2 3;0 5 3;3 -2 -4]
 A  =

    1.    2.    3.
    0.    5.    3.
    3.  - 2.  - 4.

-->det(A)
 ans  =

  - 41.
```

Cálculo de Determinantes de 2ª Ordem

Definição

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 2. O valor do determinante da matriz A é dado por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$

Cálculo de Determinantes de 3ª Ordem - Regra de Sarrus

Definição

Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. O valor do determinante pode ser calculado por $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{21} \times a_{32} \times a_{13} +$
$+ a_{31} \times a_{12} \times a_{23} - a_{13} \times a_{22} \times a_{31} - a_{23} \times a_{32} \times a_{11} - a_{33} \times a_{12} \times a_{21}$.

Cálculo de Determinantes de 3ª Ordem - Regra de Sarrus

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times 0 + 2 \times 1 \times 3 + 0 \times (-1) \times (-2) -$
$- 3 \times 0 \times 0 - (-2) \times 1 \times 1 - 0 \times (-1) \times 2 = 6 + 2 = 8.$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

Cada parcela de um determinante contém um e um só elemento de qualquer fila.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-1) \times 4 = 7.$$

Propriedade

São iguais os determinantes associados a matrizes transpostas, isto é, $|A| = \left|A^T\right|$.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

Multiplicando os elementos de uma fila por um número real, o determinante vem multiplicado por esse número.

Exemplo

$$2 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 \times (-1) & 2 \times 3 \end{vmatrix} = 2 \times 7 = 14.$$

$$2 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \times 1 & 4 \\ 2 \times (-1) & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \times 4 \\ -1 & 2 \times 3 \end{vmatrix} = 2 \times 7 = 14.$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

O valor do determinante muda de sinal quando se trocam duas filas paralelas.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 \text{ (troca de linhas).}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \text{ (troca colunas).}$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

É nulo um determinante com duas filas paralelas de elementos proporcionais

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} = 0, \ (l_2 \to 5l_1).$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} = 0, \ (c_2 \to 5c_1).$$

Propriedade

É nulo um determinante com uma fila de elementos iguais a zero.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} = 0.$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

Se os elementos de uma fila de um determinante são a soma de k parcelas, então, o determinante é igual à soma de k determinantes da mesma ordem, em que os elementos daquela fila são cada uma das parcelas, isto é, só é possível adicionar determinantes que difiram de uma fila.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 5+2 & 1 & 2 \\ 3-1 & 0 & 0 \\ 3+10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 26 = 39 + (-13).$$

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

O determinante associado a uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos principais.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) \times (-3) = 12.$$

Propriedade

O determinante do produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes, isto é, $|AB| = |A||B|$.

Exemplo

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

$|AB| = -48$, $|A| = -8$, $|B| = 6$.

Propriedades dos Determinantes

Propriedade

Somando aos elementos de uma fila, os elementos homólogos de uma ou mais filas paralelas, depois de multiplicadas por constantes diferentes de zero, então, o determinante não muda de valor.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9 \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \underset{l_2 \to 2l_1 + l_2}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \underset{c_2 \to -2c_1 + c_2}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 9.$$

Propriedades dos Determinantes

Nota

Ao trabalharmos com determinantes não é indiferente efetuar a operação $l_2 \to 2l_2 - 3l_1$ ou $l_2 \to l_2 - 3l_1$. A operação correta é a segunda já que ao usar a primeira operação está-se a multiplicar o valor do determinante por 2.

Menor Complementar

Definição

Seja A uma matriz de ordem n, designa-se por menor complementar do elemento a_{ij} e representa-se por M_{ij} ao determinante de ordem $n-1$ que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, então $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$=-9.

Complemento Algébrico

Definição

Seja A uma matriz de ordem n, designa-se por complemento algébrico a_{ij} e representa-se por A_{ij} ao produto do menor complementar correspondente por $(-1)^{i+j}$, isto é $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 10 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, então $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9.$

Teorema de Laplace

Definição (fixando a linha i)

Seja A uma matriz de ordem n, o valor do determinante é igual à soma dos produtos de uma fila (linha i) pelos respetivos complementos algébricos, isto é $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$.

Definição (fixando a coluna j)

Seja A uma matriz de ordem n, o valor do determinante é igual à soma dos produtos de uma fila (coluna j) pelos respetivos complementos algébricos, isto é $|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$.

Teorema de Laplace

Exemplo, fixando a coluna 1

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \times (-1)^{1+1} \times M_{11} + 0 \times (-1^{2+1} \times M_{21} +$$

$$+3 \times (-1)^{3+1} \times M_{31} = M_{11} + 3M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -14 + 3 \times (-9) = -41.$$

Matriz Adjunta

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, chama-se matriz adjunta A e representa-se por $Adj(A)$, à matriz transposta da matriz que se obtém de A substituindo os elementos pelos respetivos complementos algébricos A_{ij}.

Propriedades

1. $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.
2. $\left|Adj(A)\right| = |A|^{n-1}$.
3. $Adj\left[Adj(A)\right] = |A|^{n-2}A$.

Matriz Adjunta

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$, com $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 4$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -3$, $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -2$,

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1$.

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inversão de Matrizes

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se o seu determinante é diferente de zero, $|A| \neq 0$, então a matriz A é invertível e a sua inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj(A)$.

Inversão de Matrizes

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T =$

$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$