

# 计算物理 作业报告7

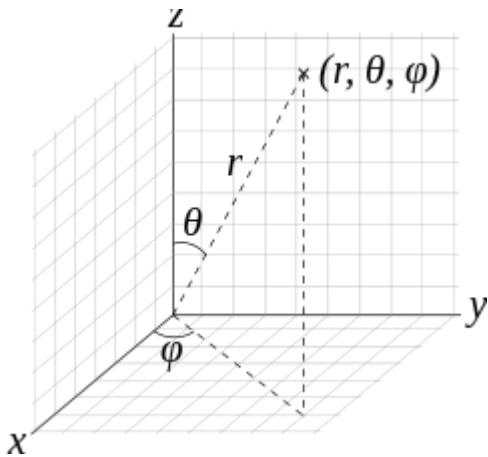
PB14203209 张静宁 2017.11.03

## 第七题

在球坐标系 $(\rho, \theta, \phi)$ 下产生球面上均匀分布的随机坐标点，给出其直接抽样方法.

### 算法思路

如下图，取单位球面 $\rho = 1$ .



在球面上随机取样，取到的点在单位面积元上的概率为 $p(\theta, \phi) = C$ ，即为与点的位置无关的常数.

且有 $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = 1$  故  $p(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi}$ .

而  $p(\theta)d\theta = (\int_0^{2\pi} p(\theta, \phi) \sin\theta d\phi) d\theta$  故  $p(\theta) = \frac{\sin\theta}{2}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ .

而  $p(\phi)d\phi = (\int_0^\pi p(\theta, \phi) \sin\theta d\theta) d\phi$  故  $p(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

则有累积函数  $s_1 = \xi_1(\theta) = \int_0^\theta p(\theta) d\theta = \frac{1-\cos\theta}{2}$ ,  $s_2 = \xi_2(\phi) = \int_0^\phi p(\phi) d\phi = \frac{\phi}{2\pi}$ .

故有直接抽样方法,  $\cos\theta = 1 - 2s_1$ ,  $\phi = 2\pi s_2$ , 其中 $s_1, s_2$ 是 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

换成直角坐标系, 其中  $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$

$$\begin{cases} x = \sin\theta * \cos\phi \\ y = \sin\theta * \sin\phi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

则可以得到球面是均匀分布的点的直接抽样。

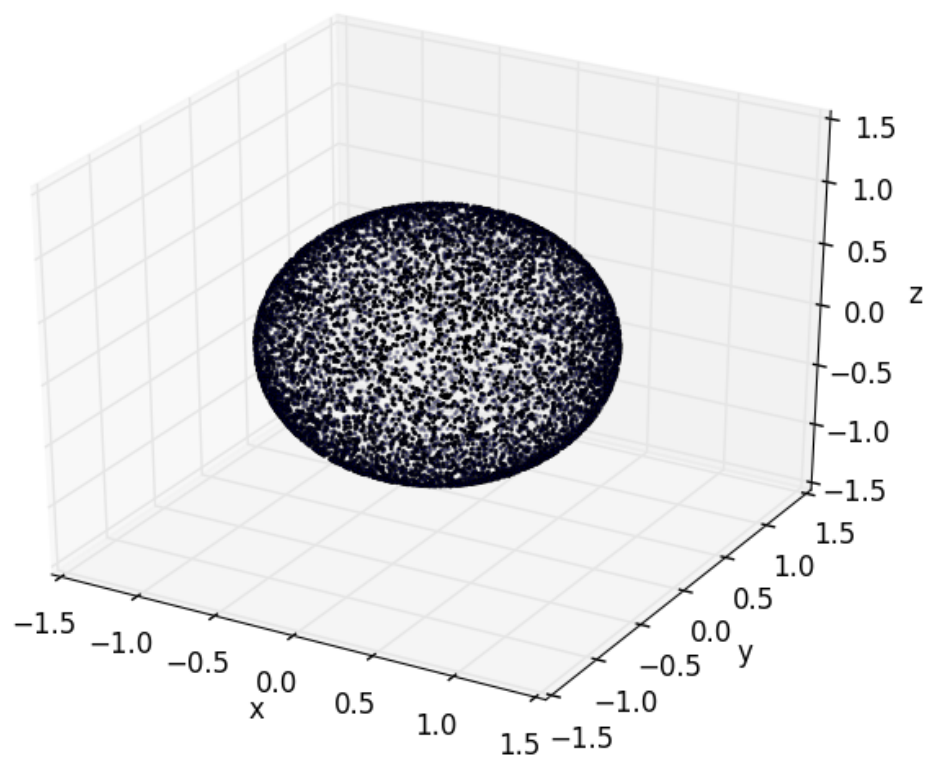
### 程序说明

simple\_sample.c 用16807随机数生成器生成 $2N$ 个 $[0, 1]$ 的随机数，作为 $s_1, s_2$ ，输出 $N$ 个 $(x, y, z)$ 点坐标。用输出的坐标绘图即可。

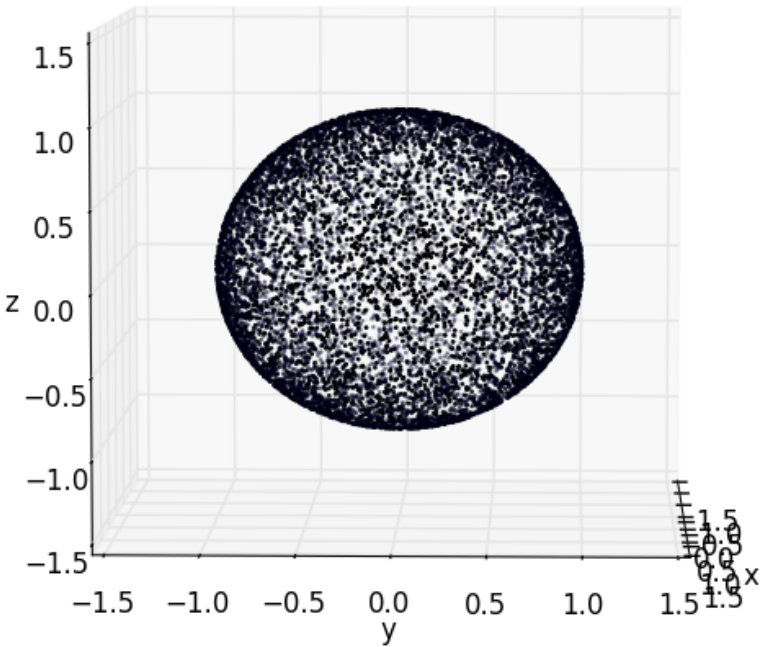
### 结果分析

取 $N = 10000$ ，即做出由 $2N$ 个随机数生成的 $N$ 个直接取样的坐标点。如下图为旋转坐标轴查看的效果：

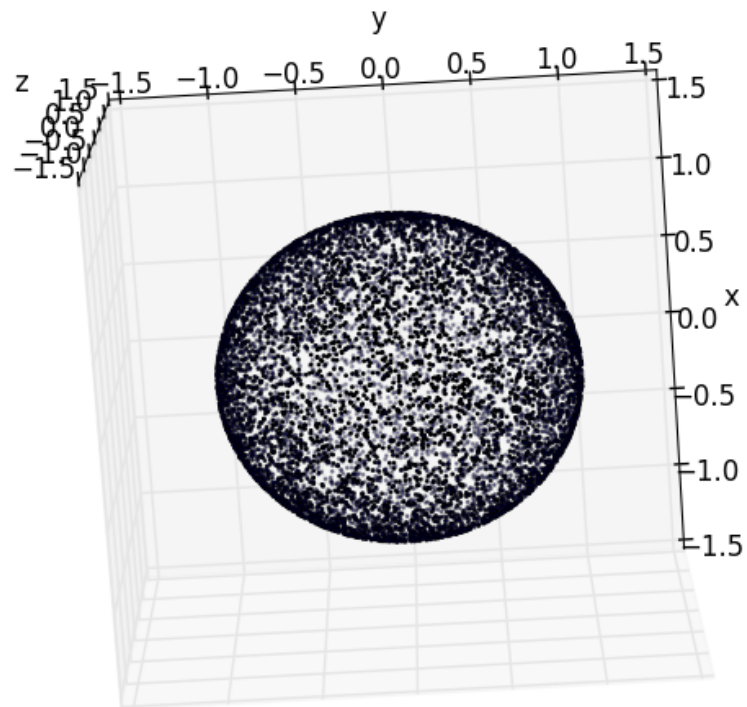
Direct Sampling (totally 10000 points)



Direct Sampling (totally 10000 points)



Direct Sampling (totally 10000 points)



## 总结评价

如图，通过旋转可以看出该直接抽样方法生成的点，在球面上的确是均匀分布的。故方法正确。