

计算物理 作业报告16

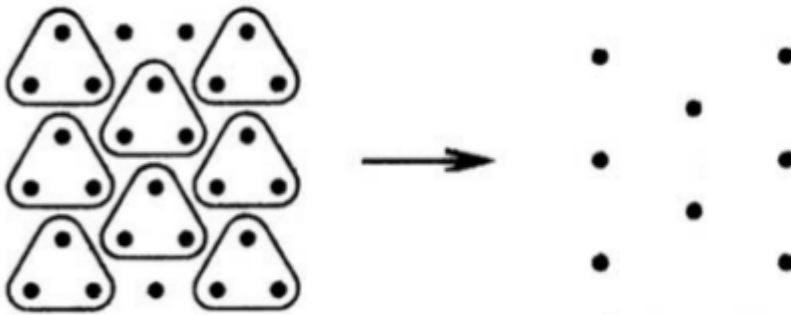
PB14203209 张静宁 2017.12.05

第十六题

推导三角格子点阵上座逾渗的重整化群变换表达式 $p' = R(p)$ ，其中端一端连接的条件是3个格点中的2个是占据态，求临界点 p_c 与临界指数 ν ，与正确值（表1.6.1.3-1）相比较。

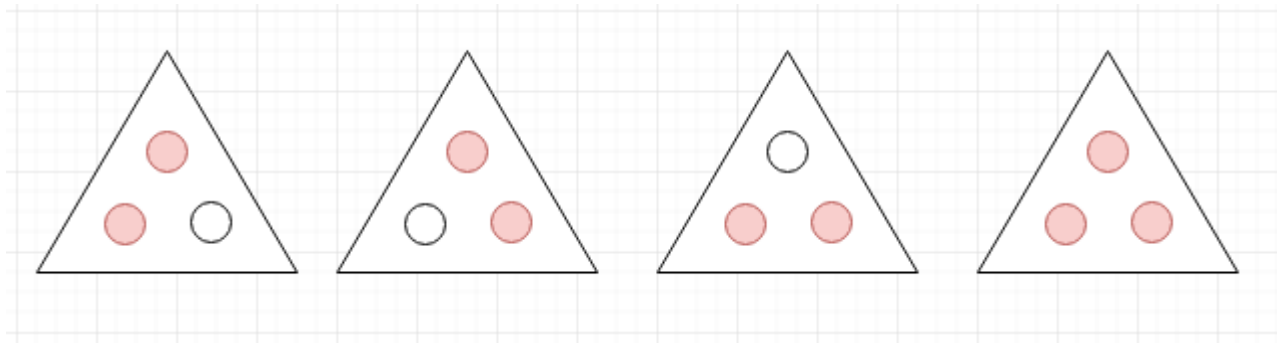
理论推导

考虑二维的情况下，座逾渗三角形点阵重整化，如下图



新产生的点阵必须缩小 $b = \sqrt{3}$ 倍才能与原来的点阵相同，新点阵中的格点数为初始点阵的 $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}$ 倍。

因为端一端连接的条件是3个格点中至少有2个是占据态，故有以下四种上下端连接构型



其重整化群变换表达式为

$$p' = R(p|b = \sqrt{3}) = 3p^2(1 - p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

临界点 p_c 满足以下方程

$$p_c = R(p_c)$$

故解得逾渗阈值为

$$p_c = \frac{1}{2}$$

考虑到重整化格子点阵中所有的长度应比原来格子点阵中的长度缩小 b 倍，这样才能保证系统在标度变换下是不变的，即关联长度是 $\xi' = \xi/b$ ，而接近 p_c 时有 $\xi(p) = |p - p_c|^{-\nu}$ ，故

$$|p' - p_c|^{-\nu} = b^{-1} |p - p_c|^{-\nu}$$

而在 p_c 附近做一阶泰勒展开

$$p' - p_c = R(p) - R(p_c) = \lambda(p - p_c), \lambda = \frac{dR(p_c)}{dp}$$

两边同时取 ν 次幂

$$|p' - p_c|^\nu = \lambda^\nu |p - p_c|^\nu$$

对比两式，有 $b = \lambda^\nu$ ，取对数后得到临界指数

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln \lambda}$$

其中

$$\lambda = \frac{dR(p_c)}{dp} = 6p(1-p)|_{p=p_c} = \frac{3}{2}$$

故临界指数

$$\nu = \frac{\ln \sqrt{3}}{\ln(3/2)} = 1.35476$$

所得逾渗阈值与下表相同.

图1.6.1.3-3 四种二维点阵的构型和配位数为3的 Bethe 点阵。

表1.6.1.3-1 各种点阵下座逾渗与键逾渗的逾渗阈值 p_c				
维数	点 阵	座逾渗 p_c	键逾渗 p_c	配位数
2	三角形	0.500000	0.34729	6
2	正方形	0.592746	0.50000	4
2	Kagome	0.6527	0.45	4
2	蜂房形	0.6962	0.65271	3
3	面心立方	0.198	0.119	12
3	体心立方	0.246	0.1803	8
3	简立方	0.3116	0.2488	6
3	金刚石	0.428	0.388	4
3	无规密堆积	0.27(实验值)		
4	简立方	0.197	0.160	8
5	简立方	0.141	0.118	10
6	简立方	0.107	0.094	12

参考文献

1. 丁泽军计算物理讲义 84-85 页