计算物理 作业报告8

PB14203209 张静宁 2017.11.04

第八题

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在（x, y）平面上投影的几率分布函数. 并由此验证**Marsaglia**抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}$, $y = 2v\sqrt{1-r^2}$, $z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样.

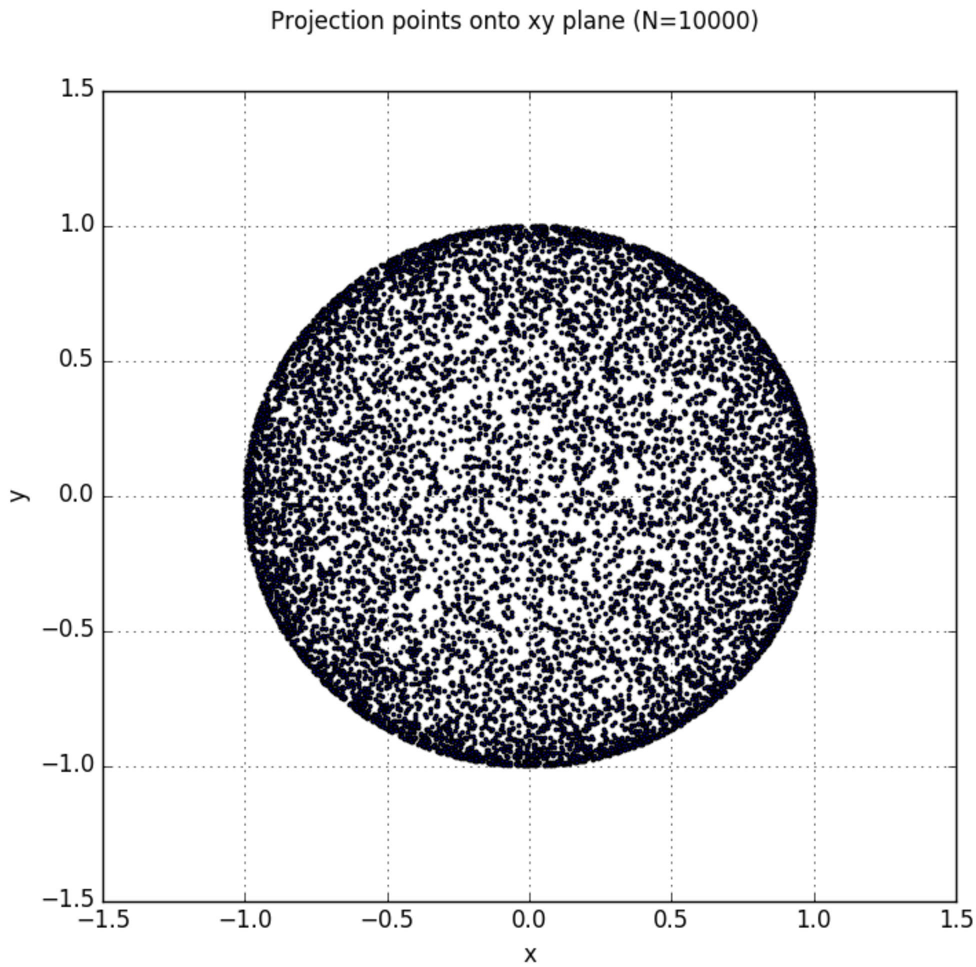
1、直接抽样投影几率分布

程序说明

- simple_sampling.c　　和第七题是同一个程序，只针对输出的坐标的(x, y)画图.

计算结果及分析

取$N = 10000$，做出由$2N$个随机数生成的N个直接取样的坐标点，在Oxy平面上的投影.



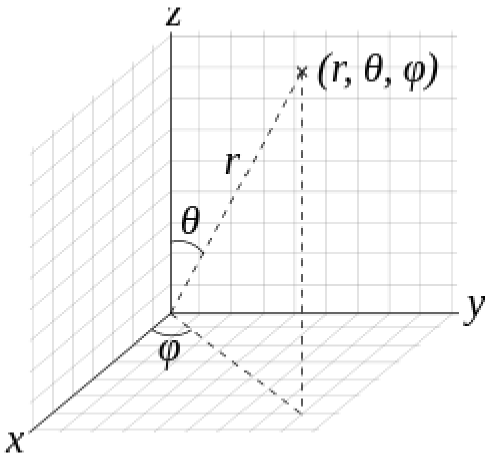
公式推导

观察粒子在Oxy平面上的分布，越靠近圆心，粒子密度越小，越远离圆心，粒子密度越大. 且为各向对称的.

如下图，取单位球面 $\rho=1$，且 $p(\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi}$.

坐标变换如下：

$$\begin{cases} x=sin\theta*cos\phi \\ y=sin\theta*sin\phi \\ z=cos\theta \end{cases}，|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)}|=sin\theta cos\theta$$



求球面上均匀分布的随机坐标点，在(x,y)平面上投影的几率分布函数$g(x,y)$，有：

$$p(\theta,\phi)sin\theta d\theta d\phi=g(x,y)|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\phi,\theta)}|d\theta d\phi$$

考虑到单位球 上下半球表面在 xy 平面的投影是对称的，故只计算上半球表面上粒子的投影，且令 $p(\theta,\phi)=\frac{1}{2\pi}$.

即 $g(x,y)=\frac{1}{2\pi cos\theta}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$，可以验证 $\int\int g(x,y)dxdy$ 在单位圆内的积分的确等于1.

所求得的$g(x,y)$就是直接抽样得到球面上均匀分布的随机坐标点，在xy平面上的投影几率分布函数. 显然，x^2+y^2越大，几率越小. 与做图所得结论一致.

2、验证**Marsaglia**抽样方法

程序说明

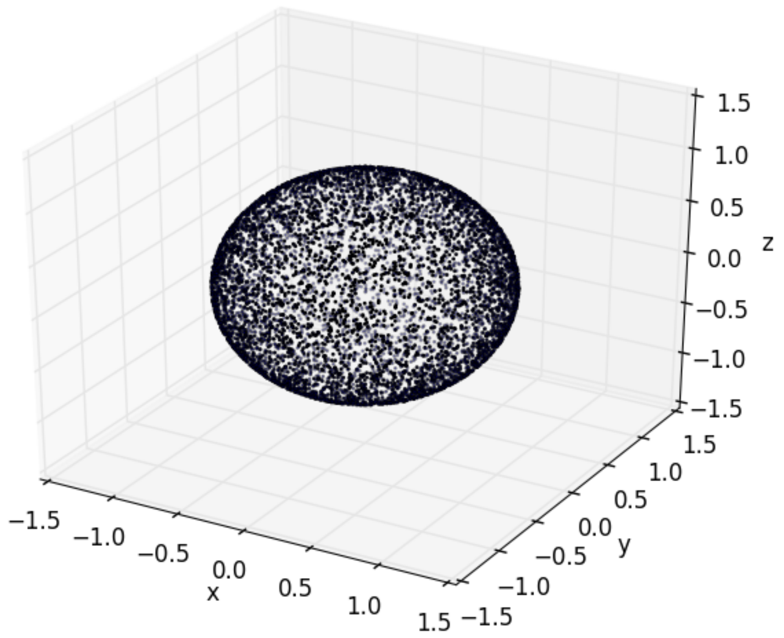
- marsaglia.c

  是用 marsaglia 抽样方法在球面上均匀抽样输出坐标点，若只针对(x,y)坐标画图得到Oxy平面投影图

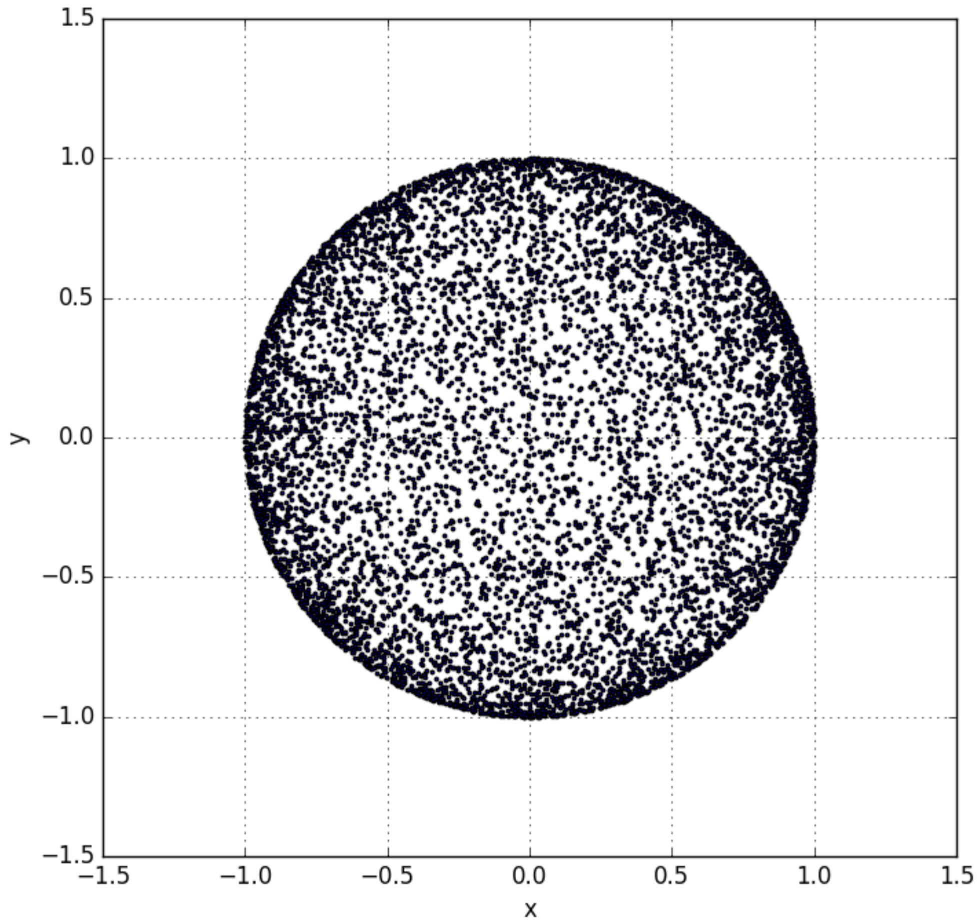
计算结果及分析

取$N=10000$，由Marsaglia方法抽样得到坐标点，做三维空间分布图和在Oxy平面上的投影图

Marsaglia Sampling (totally 10000 points)



Projection points onto xy plane (Marsaglia, N=10000)



公式推导

三维球面上的Marsaglia 抽样方法为

1. 随机抽样一对均匀分布的随机数 $u,\ v\in[-1,1]$.
2. 计算 $r^2=u^2+v^2$，如果 $r^2>1$ 则重新抽样直至 $r^2=u^2+v^2\le 1$
3. 得 $x=2u\sqrt{1-r^2},\ y=2v\sqrt{1-r^2},\ z=1-2r^2$

xy平面投影分布函数

以下计算 Marsaglia 抽样方法抽样得到的坐标点，在(x,y)平面上的投影几率分布函数$g(x,y)$.

注意，虽然 $u,\ v\in[-1,1]$，但需满足 $r^2=u^2+v^2\le 1$，故 $p(u,v)=\frac{1}{\pi}$

$|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|=4(1-2(u^2+v^2))=4\sqrt{1-x^2-y^2}$

注意，由于 uv 平面上，单位圆周和原点都对应于 xy 平面上的$(0,0)$点，可知当扫过 uv 平面上的单位圆时，xy 平面上的单位圆不一定也是被少过一次. 这里的对应关系有点复杂，不妨在适中加入常数 C 来表示这个复杂的对应关系

$Cp(u,v)dudv=g(x,y)|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$

则有 $g(x,y)=\frac{C}{4\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$，归一化条件 $\int\int_D g(x,y)dxdy=1$，可得$C=2$.

即Marsaglia抽样方法在 xy 平面个上的投影几率分布函数和直接抽样得到的投影分布函数完全相同.

yz平面投影分布函数

由于Marsaglia中 $z=1-2r^2$，且容易验证 r^2 是$[0,1]$上均匀分布的随机数，而从第七题可知直接抽样方法得到 $z=cos\theta,\ cos\theta=1-2s_1$，$s_1$是$[0,1]$上均匀分布的随机数. 又由于Marsaglia 抽样方法公式关于 x,y 对称，所以 yz,yx平面投影分布函数也和随机抽样得到的相同.

3、总结

无论从计算得到的图片、还是公式推导，都说明了 Marsaglia抽样方法的确为球面是均匀分布的随机抽样.