

# 第十三次直播课

## 习题讲解

李嘉政

Dec 2023

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

注意到任意顺序都不影响一个区间最终的数，即全部乘起来取模。 $f_{l,r}$  表示  $[l, r]$  区间能获得的价值和最大值，转移就是  $f_{l,r} = \max_{k=l}^{r-1} f_{l,k} + f_{k+1,r} + \lfloor \frac{s_{l,k} \times s_{k+1,r}}{10} \rfloor$ ，其中  $s_{l,r}$  表示  $\prod_{i=l}^r a_i \bmod 10$ ，时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

注意到打地鼠一定是连续的区间。 $f_{l,r}$  表示打了  $[l, r]$ ，现在在左端点的最大值， $g_{l,r}$  表示打了  $[l, r]$ ，现在在右端点的最大值。转移就是枚举从哪里过来， $f_{l,r} = \max(g_{l+1,r} - 10(r-l) + a_l, f_{l+1,r} - 10 + \lfloor \frac{a_l}{2} \rfloor)$ ， $g$  转移同理。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2**
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

题目暂时有问题。



# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色**
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

观察到重要性质，对于一个区间  $[l, r]$  而言，如果  $s_l = s_r$ ，则先将  $[l, r]$  涂满  $s_l$  不劣。 $f_{l,r}$  表示涂完  $[l, r]$  区间的最小操作数。一个显然的转移方式是标准的区间 dp，即枚举断点，然后两个子区间分别染色。这样枚举唯一剩余的问题就是可以提前整体染色，而唯一的整体染色不劣仅仅是  $s_l = s_r$  时刻，此时转移便是  $f_{l,r-1}$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串**
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_{l,r}$  表示区间  $[l, r]$  变成回文的最小代价。如果  $s_l = s_r$ , 则  $f_{l,r} = f_{l+1,r-1}$ ; 否则肯定要更新左端点或者右端点, 设  $a_c$  表示  $c$  字符操作的最小代价, 则此时  $f_{l,r} = \min(f_{l+1,r} + a_{s_l}, f_{l,r-1} + a_{s_r})$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链**
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_{l,r}$  表示  $[l, r]$  区间合并的最大价值。转移显然是

$f_{l,r} = \max_{k=l}^{r-1} f_{l,k} + f_{k+1,r} + a_l \times a_{k+1} \times a_{r+1}$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

实际上高维前缀和可以优化到  $O(nm2^m)$ ，这里不再赘述。



# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯**
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_S$  表示状态为  $S$  时的最小代价。注意到转移等价于单源正权最短路，Dijkstra 即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(2^n n^2 \log(2^n n^2)) = O(2^n n^3 + 2^n n^2 \log n)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本**
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_{S,i}$  表示使用过的字符串集合为  $S$ ，最后一个字符串时  $s_i$  是否可行。转移就是枚举哪个字符串是之前最后的即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(2^n n^2)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵**
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

与小明的宠物带毫无区别。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏**
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

与上题没有区别。



# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果**
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_{i,S}$  表示处理了前  $i$  件物品，组成的糖果集合为  $S$  时的最小物品数。转移只需枚举当前物品选不选即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(n2^m)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟**
- 14 小蓝的选边

# Solution

注意到杀死猪的顺序不影响结果。考虑  $f_S$  表示杀死猪的集合为  $S$  的最少鸟数，显然的转移即是要么只为杀一头猪，要么存在某条抛物线杀了多头猪。注意到该题中抛物线经过原点，所以只需要两点即可确定一条抛物线。而杀猪顺序无关，所以不妨每次枚举通过不在  $S$  中的某个点的抛物线，代码取了最小的零。解抛物线就是简单的解线性方程。时间复杂度  $\mathcal{O}(n2^n)$ 。

# Table of Contents

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

# Solution

$f_S$  表示选择的点集为  $S$  的最大价值和，转移就是枚举边即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2 2^n)$ 。