

# 第十一次直播课

## 习题讲解

李嘉政

Dec 2023

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

$f_{i,j}$  表示前  $i$  个物品占了  $j$  空间时的最大价值和，转移显然是  
 $f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, f_{i-1,j-w_i} + v_i)$ ，时间复杂度  $\mathcal{O}(nV)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

$f_{i,j}$  表示前  $i$  个人用了  $j$  毫升水的最大满意度和。转移显然是  
 $f_{i,j} = \max(f_{i-1,j} + e_i, f_{i-1,j-a_i} + b_i, f_{i-1,j-c_i} + d_i)$ , 时间复杂度  $\mathcal{O}(nm)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

$f_{i,j}$  表示前  $i$  件物品是否能凑出  $j$  的大小，转移显然是  
 $f_{i,j} = f_{i-1,j} \vee f_{i-1,j-a_i}$ ，时间复杂度  $\mathcal{O}(n \sum_{i=1}^n a_i)$ 。



# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

需要观察到一个重要性质：若课程  $x, y$  都被购买了，则我们选择截止时间靠前的那个先买一定不劣。换句话说，我们只用将所有课程按截止时间排序，这样按序选择是合法的。有了这个顺序后，后面的 dp 都是容易的了。

设  $f_{i,j}$  表示前  $i$  个课程，花费了  $j$  时间去购买的最大价值和。显然的转移是，如果  $j > B_i$ ，则肯定买不了这个课了；否则

$f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, f_{i-1,j-A_i} + C_i)$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(nB)$ 。

注意到  $C$  很大，要使用 `__int128`。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略**
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

假设我们用钱购买了  $T$  个商品，分别是  $i_1, i_2, \dots, i_T$ ，则此刻要求  $\sum_{j=1}^T t_{i_j} \geq n - T$ ，也就是  $\sum_{j=1}^T (t_{i_j} + 1) \geq n$ ，这就又变成了标准的背包问题了，直接 dp 即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物**
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

$f_{i,j}$  表示前  $i$  个物品能否凑出体积为  $j$ ，直接转移即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(nV)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2**
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

设  $f_{i,j}$  为前  $i$  个物品组成体积为  $j$  的最大价值，转移是  
 $f_{i,j} = \max(f_{i-1,j}, f_{i,j-w_i} + v_i)$ ，注意到从小到大枚举  $j$  时仍然满足拓扑序，  
 时间复杂度  $\mathcal{O}(nV)$ 。



# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦**
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

看到最大的最小值，必须要去想一想二分。

首先显然具有二分性，其次在二分答案后，我们要判断让每个士兵达到二分值时的最小精力消耗值和。如果我们能求出至少增强  $i$  点力量时需要的最小精力消耗值就好了。这个问题能做吗？能，这不就是背包吗？

考虑  $f_{i,j}$  表示前  $i$  钟训练计划增强  $j$  点力量最小的精力消耗值，转移就是经典无限背包，即  $f_{i,j} = \min(f_{i-1,j}, f_{i,j-b_i} + c_i)$ 。求出  $f_{n,i}$  后，由于我们需要的不是恰好增强  $i$  点力量，是至少增强  $i$  点力量，此时要的是  $\min_{j \geq i} f_{n,j}$ ，这是后缀  $\min$  预处理下容易得到的。

于是时间复杂度就是  $\mathcal{O}(n \log(kA) + mkA)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3**
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

多重背包介绍两种思路。

思路一是考虑将多重背包转化成 01 背包，对于有  $s$  个物品，我们直接当作有  $s$  个物品然后做 01 背包，这样时间复杂度是  $\mathcal{O}(V \sum_{i=1}^n s_i)$ 。当然这种拆分比较笨重，更好的拆分方式是考虑二进制。对于  $s$ ，我们拆分成  $s = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^e + x$ ，其中  $x < 2^e$ 。这样的拆分好处是，只有  $\mathcal{O}(\log s)$  个物品，同时我们能表示出所有  $[0, s] \cap \mathbb{Z}$  中的所有数，证明是简单的。通过二进制，我们能表示出  $[0, 2^{e+1} - 1] \cap \mathbb{Z}$ ，而加上  $x$  能表示出  $[x, s] \cap \mathbb{Z}$  的所有数，两种取并就是  $[0, s] \cap \mathbb{Z}$ 。此时等价于  $\mathcal{O}(n \log s)$  个物品的 01 背包，时间复杂度为  $\mathcal{O}(nV \log s)$ 。

# Solution

另一种思路是单调队列优化多重背包。注意到对一个物品  $(w, v)$  而言，我们改写转移方程，即  $f_{i,j} = \max_{t=0}^s f_{i-1,j-tw} + tv$ 。更进一步，即若  $f_{i,j}$  能从  $f_{i-1,k}$  中转移过来，不仅要求  $j \equiv k \pmod{w}$ ，而且要求  $\frac{j-k}{w} \leq s$ 。这意味着首先对于  $j$  而言，能转移过来的地方一定是与  $j$  模  $w$  同余的。为了方便书写，设  $g_{\lfloor \frac{j}{w} \rfloor, j \bmod w_i} = f_{i,j}$ ,  $h_{\lfloor \frac{j}{w} \rfloor, j \bmod w_i} = f_{i-1,j}$ 。第二维相同才能转移，所以写的时候忽略第二维，此时转移方程改写成  $g_j = \max_{k=j-s}^j h_k + (j-k)v = jv + \max_{k=j-s}^j h_k - kv$ 。后者是个显然的滑动窗口，即单调队列优化（思路是对于  $k$  小的值而言，如果已经比  $k$  大的值还要小的话，则永远不可能从它这里转移）。时间复杂度  $\mathcal{O}(nV)$ 。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

同上题。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版**
- 12 新一的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化



# Solution

同上题。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新一的神秘购物之旅**
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

同上题。

# Table of Contents

- 1 小明的背包 1
- 2 倒水
- 3 盗墓分赃 2
- 4 蓝桥课程抢购
- 5 购物策略
- 6 小兰的神秘礼物
- 7 小明的背包 2
- 8 加训啦
- 9 小明的背包 3
- 10 新一的宝藏搜寻
- 11 新一的宝藏搜寻加强版
- 12 新的神秘购物之旅
- 13 多重背包单调队列优化

# Solution

同上题。