

第六次直播课

习题讲解

李嘉政

Dec 2023

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

排序后，对于第 i 个数，二分找到第一个 l 满足 $a_l + a_i \geq L$ 和第一个 r 满足 $a_r + a_i \leq R$ 即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

一个关键性质， $x + y$ 和 $x \oplus y$ 的大小关系，其中 \oplus 为异或运算。

实际上， $x + y \geq x \oplus y$ ，证明是容易的。注意到异或是将每一位不同的加起来，而如果某一位 x, y 都是 1 则变成 0，此时 $x + y$ 这一位是 2，所以 $x + y \geq x \oplus y$ 。

证明的同时也给出取等的条件，即 $x \wedge y = 0$ ，而对于值域 $\leq 2^{20}$ 的数而言，除非遇到 0，否则最多只能异或 20 次就必然遇到 $x \wedge y \neq 0$ 的情况了。于是只需提前维护 $zero_i$ 表示从 i 开始向后有多少个 0 (包括自己)，枚举区间左端点，右端点跳 0 的次数和移动次数相等，移动次数不超过 20 次，所以时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log A)$ ，其中 A 为值域。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

假设答案为 x ，此时若本来数量就大于等于 x 的花可以在每束中都出现，而其余的花只要加起来能填满剩余的空即可。发现 x 具有二分性，二分答案即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log(nA))$ ，其中 A 为值域。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 **最大通过数**
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

枚举第二个闯了多少关，那么剩下下来的后备能源都会给第一个人。随着第二个人闯得越多，第一个人能闯的关数一定是单调不升的。于是递增枚举第二个人闯的关数，第一个人直接单调判断即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(n + m)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂**
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

假设答案的高度为 x ，此时对于原材料高度为 y 的而言，它能切出 $\lfloor \frac{y}{x} \rfloor$ 个答案。注意到 x 具有二分性，二分答案即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(nA)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险**
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

排序后，如果我们每次枚举最小值是谁，假设是第 i 个数，则剩下两个数的挑选方案是 $\binom{n-i}{2}$ 。对于询问 k ，一个暴力的想法就是枚举是第几个数，直到加起来大于等于 k 为止。注意到求这个加起来等价于前缀和，提前维护出 $\sum_{i=1}^j \binom{n-i}{2}$ 即可。每次询问二分出最小的 j 满足 $\sum_{i=1}^j \binom{n-i}{2} \geq k$ 就是答案。时间复杂度 $\mathcal{O}(n + q \log n)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将**
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

和上次的小蓝的礼物一题没区别。时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂**
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

求快速幂说是倍增也还可以，一般写法是，若指数为奇数时就乘，用二进制拆分更好理解。时间复杂度 $\mathcal{O}(\log p)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询**
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

lca 有十万种求法，这里讲一下最基础也是最好用的倍增。

考虑 $F_{x,i}$ 表示从 x 开始，向上跳 2^i 步是谁，如果越过了根就返回 0。这是 dfs 时容易维护出的，即递推式为 $F_{x,i} \leftarrow F_{F_{x,i-1},i-1}$ 。预处理时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

然后求 lca 就是对于两个点 x, y ，不妨假设 x 更深。我们先利用 F 将 x 跳到和 y 一样的深度，此时判断下 x, y 是否相等。若相等则说明 x, y 的 lca 就是 y ；否则两个点一起跳，从小到大枚举，等价于找到第一个两者跳同样步数时是同一个点的点。这可以二分 + 用 F 倍增，二者的结合等价于从大到小的倍增。单次询问时间复杂度 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

总时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n + q \log n)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1**
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

等价于一个基环森林，求从 1 开始走 k 步的结束节点。

如果 k 很小，直接模拟即可。但 k 很大真的会有影响吗？答案是没有的。

注意到当我们走到一个环上时，接下来再重复走就没意义了。只需要将剩下的步数模环长，我们就能知道终点了。时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换**
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

有趣的一道题。

从直观上会有什么感觉呢？当 $B \geq 2$ 时，如果没有那个 $+C$ ，区区 \log 次就会让答案变成 0。另一方面，也即过程中的答案很难变得非常大，因为每次的贡献是除以 2 的。如何很好地证明这一点呢？我们知道， $x \geq \lfloor x \rfloor$ ，当我们将下取整去掉时，对于表达式 $\sum_{i=0}^N \frac{A}{2^i}$ 而言，它的最大值毫无疑问就是 $N \rightarrow \infty$ 时取到 $2A$ 。也即中间过程不可能超过 $2A$ 。这给了我们什么样的启发呢？对于很大的 Q ，而中间过程又不大，我们能否用一种手段加速中间过程的计算呢？什么办法呢？倍增！

考虑 $F_{x,i}$ 表示起始为 x ，操作 2^i 轮后的数是几。递推式是经典的倍增，即 $F_{x,i} = F_{F_{x,i-1},i-1}$ 。于是对于 Q ，我们只要枚举其二进制表达即可。

注意特判 $B = 1$ 。

时间复杂度 $\mathcal{O}(A \log Q)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增**
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

和第九题重复了。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC**
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

构造题。

一个显然的想法是枚举 B ，此时 $C = X \pmod{B}$ 或者 B ， A 也可以直接算出。

但时间复杂度不对！怎么办呢？

换个思路，我们去枚举 A 。注意到要求 B 最小，而 $B = \frac{X-C}{A}$ ，在 A 固定时 B 也被固定了。那么此时 A 越大， B 就可能越小。所以应该让 A 取 10^6 。

但 A 取 10^6 时， X 不能小于等于 10^6 。而 X 小于等于 10^6 时， $B = C = 1, A = X - 1$ 即可。

注意 $X = 1$ 时无解。

时间复杂度 $\mathcal{O}(T)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

神必构造题。

首先无解是显然的，即 A 或 B 为 1。

其次，容易注意到答案不超过 1。因为我们可以拿 2, 3 构造出两个序列，此时答案就已经不大于 1 了。

于是，我们只要证明答案是否可以 0 即可。

答案为 0 是什么情况呢？很明显，当两个序列都由一个相同的数 p 构造出来。也就是说 $A = np, B = mp, p > 1$ 。这意味着什么呢？

$p \mid \gcd(A, B)$ ！如果 $\gcd(A, B) > 1$ ，则 $\gcd(A, B)$ 的一个质因子一定可以是 p 。也就是说，当 $\gcd(A, B) > 1$ 时，答案为 0，否则为 1。

时间复杂度 $\mathcal{O}(T)$ 。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案**
- 16 小蓝的无限集

Solution

非常麻烦的构造。

假设我们知道答案为 p ，此时我们想要去构造序列。若 $a_i > a_{i-1}$ ，此时我们只需要在后面添加 $a_i - a_{i-1}$ 个 a 即可；否则，等价于将上一个字符串后面 $a_{i-1} - a_i$ 个都删掉，然后让第 a_i 个字符加一。若加一后大于 $a+p$ ，则让它变成 a ，让 $a_i - 1$ 个字符加一... 直到加个不大于 $a+p$ ，或者加无可加了。加无可加是不合法情况。

注意到 p 具有二分性，我们考虑二分答案。但问题在于维护上面那个过程。由于 a_i 很大，好像不太好维护。怎么办呢？

一个很好的想法是，我们直接维护当前字符串还可以加多少次。每次加上新的长度等价于乘幂次，减去等价于整除幂次。好像很不错？但 a_i 太大，高精度都无法维护。

具体来说，我们定义操作 $\text{push}(x)$ 为使 a_x 处字符加一。用一个单调栈结构维护二元组 (u, v) ，表示 u 处的字符为 $a + v$ ；结构中没出现的位置会被认为这个位置的字符为 a 。我们只会在 $a_i \leq a_{i-1}$ 时用到，即 $a_i \leq a_{i-1}$ ，我们执行一次 $\text{push}(a_i)$ 。对于 $\text{push}(x)$ 而言，我们先弹出所有满足 $(u, v), u > x$ 的二元组。然后若不存在 (x, v) 二元组，则加入 $(x, 0)$ ；否则让 $(x, v) \leftarrow (x, v + 1)$ ；若此时 $v + 1 = p$ ，则执行弹出 $(x, v + 1)$ ，并执行 $\text{push}(x - 1)$ ，再加入 $(x, 0)$ 。

Solution

考虑时间复杂度。这是很经典的计数器。弹出操作和弹入操作数一致，我们只用分析弹入的操作数。注意到弹入一个二元组，如果是直接弹入的，最多 $\mathcal{O}(n)$ 次；如果是间接弹入的，我们考虑一个时间复杂度显然大于等于该问题的子问题。

有一个若干位的二进制数，每次修改一位的代价是 $\mathcal{O}(1)$ ，现加 n 次 2 的幂次，问修改的总代价。

注意到带来额外代价的操作是进位。而进位一次需要之前的一次铺垫。很容易发现，一次进位至少需要一次铺垫。这意味着进位的次数也是 $\mathcal{O}(n)$ 的。所以修改的总代价就是 $\mathcal{O}(n)$ 。(实际上存在一种更为合适的分析手段，感兴趣可以了解势能分析法)

回到这道题，于是总时间复杂度就是 $\mathcal{O}(n \log n)$ 了。 $\log n$ 来自于二分。

Table of Contents

- 1 聪明的小羊肖恩
- 2 神奇的数组
- 3 可凑成的最大花束数
- 4 最大通过数
- 5 妮妮的月饼工厂
- 6 基德的神秘冒险
- 7 体育健将
- 8 快速幂
- 9 最近公共祖先 LCA 查询
- 10 如今仍是遥远的理想之城 1
- 11 数的变换
- 12 LCA 树上倍增
- 13 小浩的 ABC
- 14 小新的质数序列挑战
- 15 小蓝找答案
- 16 小蓝的无限集

Solution

诈骗构造题。

观察两个操作，发现是经典的线性变换。即若将数写成 $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ ，则操作

一等价于左乘 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，操作二等价于左乘 $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

对下面的两个线性变换张成的线性空间很明显是 $\begin{pmatrix} a^i & bF(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，其中

$F(a)$ 是 a 的幂次张成的系数都为 1 的多项式。此时再去乘起始的 1，则有 x 的表达式为 $a^i + bF(a)$ 。好像还是和 $F(a)$ 有关？但注意到实际上 $F(a)$ 的常数项是任意的，即我们通过一直执行操作二使得加上任意数量的 b 。于是再去除 a^i 后，该空间的数必然是 b 的倍数。排除了 $a = 1$ 后，剩下来我们只需要枚举 a^i ，判断是不是 b 的倍数即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(T \log A)$ 。