

第十四次直播课

习题讲解

李嘉政

Dec 2023

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜F夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

标准的数位 dp。数位 dp 的重点是什么？是面对多组数据时的记忆化。数位 dp 的状态比较统一，设 $f_{dep, up, zero, pre}$ 表示计算所有有 dep 位， up 和 $zero$ 分别表示此时是否触顶，是否更高位全是 0，满足当 $dep + 1$ 位是 pre 也合法的数的个数。转移就是枚举当前这一位填几，和普通 dp 毫无区别地转移下去。可以发现这也可以和正常 dp 一致写成递推形式，但为什么我们一直使用递归形式？主要原因在于多组数据。通过对这个 dp 分析可知，我们的状态数差不多是 $10 \times 2 \times 2 \times 10$ ，每次转移是 $\times 10$ ，而 $T = 10^5$ ，与状态数的乘积是远远超时的。我们想要在不同的数据组中有共用的信息，这个信息就是在 $up = zero = 0$ 的时候才会是公用的。于是我们记录下 $up = zero = 0$ ， K 为确定值下的所有信息，这里的时间是 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ ，而对于不同组的数据而言，要重新算的时间是 10×10 。这样就是可以通过的了。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

$f_{dep, up, zero, sum}$ 表示计算所有有 dep 位, up 和 $zero$ 分别表示此时是否触顶, 是否更高位全是 0, 满足当前还可以有 sum 个非零数字。转移就是直接做的。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

$f_{dep, up, zero, div}$ 表示计算所有有 dep 位, up 和 $zero$ 分别表示此时是否触顶, 是否更高位全是 0, 满足当前还可以使用的数位 div 。转移就是直接做的, div 是 $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$, 注意到这个东西的数量是根号级别, 所以记忆化可以通过。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

$f_{dep, up, zero, sum}$ 表示计算所有有 dep 位, up 和 $zero$ 分别表示此时是否触顶, 是否更高位全是 0, 满足当前数位和为 sum 。转移就是直接做的, 记忆化就可以通过。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年**
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

$f_{dep, up, zero, tag}$ 表示计算所有有 dep 位, up 和 $zero$ 分别表示此时是否触顶, 是否更高位全是 0, 满足当前数的结构为 tag 。转移就是直接做的, 记忆化就可以通过。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜F夜的题目**
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

上课一边做一边讲。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

$f_{i,j}$ 表示当前玩了 i 种职业, j 种阵营, 到玩 n 种职业 m 种阵营的期望步数。转移就是枚举当前步玩了那些职业或者阵营, 那么它会从 $f_{i,j}, f_{i+1,j}, f_{i,j+1}, f_{i+1,j+1}$ 四个地方转移过来。虽然转移成环, 但可以解出 $f_{i,j}$ 与 $f_{i+1,j}, f_{i,j+1}, f_{i+1,j+1}$ 相关的表达式, 直接继续转移即可。时间复杂度 $\mathcal{O}(nm)$ 。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜^F夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串**
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼！水泡？大作战！

Solution

设 X_i 为以位置 i 为结尾，前面有连着 X_i 个 1 的随机变量。注意到 $n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$ ，于是等价于要求 $\sum E[X_i]$ 。注意到如果 $s_i = 0$ ，则 $P[X_i = 0] = 1$ ；否则如果 $s_i = 1$ ，则 $X_i = X_{i-1} + 1$ ；否则 $X_i = \frac{X_{i-1} + 1 + 0}{2}$ 。此时我们要求 $E[X_i]$ ，根据上述则有递推式，时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜^F夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋**
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!

Solution

f_i 表示从 i 走到终点所需的期望步数，转移就是暴力的，发现可以前缀和优化。时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$ 。

Table of Contents

- 1 小明数
- 2 优雅的数字
- 3 小熊的困惑
- 4 数位魔法
- 5 幸运年
- 6 十六夜[F]夜的题目
- 7 小蓝玩游戏
- 8 苏苏的 01 字符串
- 9 小蓝的飞行棋
- 10 鳄鱼! 水泡? 大作战!**

Solution

好像有点小问题。