

平等博弈

有 n 堆石子，第 i 堆有 a_i 个石子，Alice 和 Bob 在按照某种规则取石子，Alice 先手，谁不能取谁输，两人都足够聪明，问 Alice 能必赢吗？

规则：

第一种：选择一堆石子，从中只能取任意多个。(Nim 游戏, Nimber)

第二种：选择一堆石子，从中只能取 $k^m (m = 0, 1, \dots)$ 个。

第三种：选择一堆石子，从中只能取不超过石子数量的一半。

...

先考虑第一种。

举个例子，只有一堆石子，那么 Alice 可以一瞬间取完所有石子，获胜！

有两堆石子，分别是 4, 4，无论 Alice 取几个，Bob 在另外一堆也取几个，Alice 必输。

有两堆石子，分别是 4, 5，Alice 先在第二堆取一个，此时局面变成上一个例子，Alice 必胜。

以此类推，可以发现，如果当前是先手必胜态，则一定有一种取法使得下一次进入先手必败态；如果当前是先手必败态，则一定任意的取法都会进入先手必胜态。

Nimber 的必胜策略：如果 $\oplus_{i=1}^n a_i = 0$ ，则后手必胜；否则先手必胜。

SG 函数是一个用来描述博弈状态的函数，可以去定义博弈的加法。

SG 定理：两个独立的公平游戏和等于对应 SG 函数的异或。

感兴趣去了解，或者报名之后的提高课。

不平等博弈

一般通过超现实数分析，SG 是超现实数的特例。