# 第十三次直播课 习题讲解

李嘉政

Dec 2023

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂包
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选过

注意到任意顺序都不影响一个区间最终的数,即全部乘起来取模。 $f_{l,r}$  表示 [l,r] 区间能获得的价值和最大值,转移就是  $f_{l,r} = \max_{k=l}^{r-1} f_{l,k} + f_{k+1,r} + \lfloor \frac{s_{l,k} \times s_{k+1,r}}{10} \rfloor$ ,其中  $s_{l,r}$  表示  $\prod_{i=l}^{r} a_i \bmod 10$ ,时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 🏻 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

注意到打地鼠一定是连续的区间。 $f_{l,r}$  表示打了 [l,r],现在在左端点的最大值, $g_{l,r}$  表示打了 [l,r],现在在右端点的最大值。转移就是枚举从哪里过来, $f_{l,r} = \max(g_{l+1,r} - 10(r-l) + a_l, f_{l+1,r} - 10 + \lfloor \frac{a_l}{2} \rfloor)$ ,g 转移同理。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂包
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

题目暂时有问题。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

观察到重要性质,对一个区间 [I,r] 而言,如果  $s_I = s_r$ ,则先将 [I,r] 涂满  $s_I$  不劣。 $f_{I,r}$  表示涂完 [I,r] 区间的最小操作数。一个显然的转移方式是标准的区间 dp,即枚举断点,然后两个子区间分别染色。这样枚举唯一剩余的问题就是可以提前整体染色,而唯一的整体染色不劣仅仅是  $s_I = s_r$  时刻,此时转移便是  $f_{I,r-1}$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

 $f_{l,r}$  表示区间 [l,r] 变成回文的最小代价。如果  $s_l = s_r$ ,则  $f_{l,r} = f_{l+1,r-1}$ ; 否则肯定要更新左端点或者右端点,设  $a_c$  表示 c 字符操作的最小代价,则此时  $f_{l,r} = \min(f_{l+1,r} + a_{s_l}, f_{l,r-1} + a_{s_r})$ 。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^2)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝
- 4 涂包
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

 $f_{l,r}$  表示 [l,r] 区间合并的最大价值。转移显然是  $f_{l,r} = \max_{k=l}^{r-1} f_{l,k} + f_{k+1,r} + a_l \times a_{k+1} \times a_{r+1}$ 。 时间复杂度  $\mathcal{O}(n^3)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 🏻 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

 $f_{i,T}$  表示计算了前 i 行,当前这一行宠物放置状态为 T。转移枚举补集的子集即可,即  $f_{i,T} = \max_{S \in \overline{T}} (f_{i-1,S} + \operatorname{popcount}(T))$ 。其中要求  $T \wedge a_i = \emptyset$  且  $T \notin Ban$ ,popcount(T) 为 T 中 1 的个数, $a_i$  为那一行食物的放置状态,Ban 是所有有相邻 1 的 m 位二进制数。时间复杂度  $\mathcal{O}(m2^m + n3^m)$ ,其中  $m2^m$  是处理 Ban 的复杂度。实际上高维前缀和可以优化到  $\mathcal{O}(nm2^m)$ ,这里不再赘述。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

 $f_S$  表示状态为 S 时的最小代价。注意到转移等价于单源正权最短路,Dijkstra 即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(2^n n^2 \log(2^n n^2)) = O(2^n n^3 + 2^n n^2 \log n)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 🏻 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

课上小游戏 小飞打地鼠 艰苦打工的小蓝 2 涂色 制作回文串 能量项链 小明的宠物袋 小蓝的灯 单词数最多的关联文本 交错矩阵 威震华夏 糖果 愤怒的 ○○

# Solution

 $f_{S,i}$  表示使用过的字符串集合为 S,最后一个字符串时  $s_i$  是否可行。转移就是枚举哪个字符串是之前最后的即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(2^n n^2)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂包
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

与小明的宠物带毫无区别。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 11 威震华夏
- 12 糖果
- 18 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

与上题没有区别。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- Ⅲ 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

课上小游戏
小飞打地鼠
艰苦打工的小蓝 2
涂色
制作回文串
能量项
小期的宠物袋
小蓝的灯
单词数最多的关联文本
交错矩阵
威震华夏
糖果
愤怒的

○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○
○○</td

# Solution

 $f_{i,S}$  表示处理了前 i 件物品,组成的糖果集合为 S 时的最小物品数。转移只需枚举当前物品选不选即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(n2^m)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 🏻 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选过

注意到杀死猪的顺序不影响结果。考虑  $f_S$  表示杀死猪的集合为 S 的最少鸟数,显然的转移即是要么只为杀一头猪,要么存在某条抛物线杀了多头猪。注意到该题中抛物线经过原点,所以只需要两点即可确定一条抛物线。而杀猪顺序无关,所以不妨每次枚举通过不在 S 中的某个点的抛物线,代码取了最小的零。解抛物线就是简单的解线性方程。时间复杂度  $\mathcal{O}(n2^n)$ 。

- 1 课上小游戏
- 2 小飞打地鼠
- 3 艰苦打工的小蓝 2
- 4 涂色
- 5 制作回文串
- 6 能量项链
- 7 小明的宠物袋
- 8 小蓝的灯
- 9 单词数最多的关联文本
- 10 交错矩阵
- 🏻 威震华夏
- 12 糖果
- 13 愤怒的小鸟
- 14 小蓝的选边

 $f_S$  表示选择的点集为 S 的最大价值和,转移就是枚举边即可。时间复杂度  $\mathcal{O}(n^22^n)$ 。