Wyszukiwanie geometryczne K-DTree i QuadTree

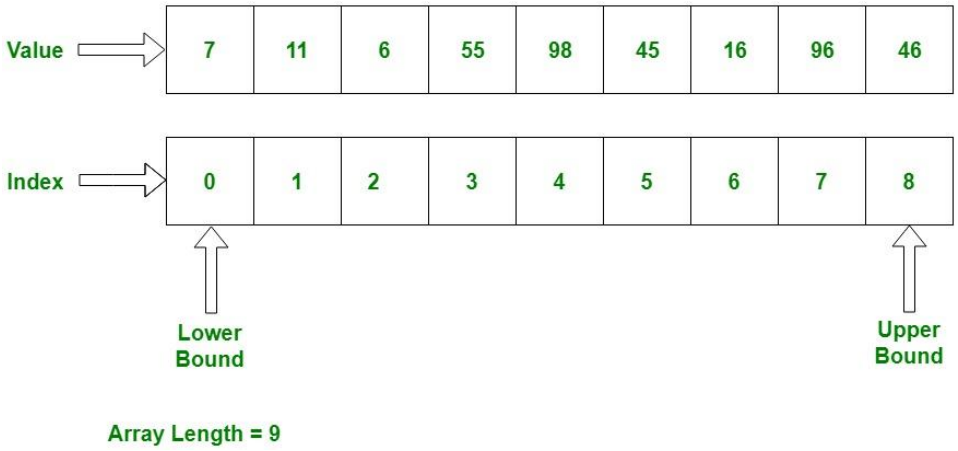
Wykonali: Cyprian Neugebauer, Bartłomiej Wiśniewski

Opis projektu

Celem projektu było zaimplementowanie odpowiednich struktur danych - quadtree oraz kd-drzew, które pozwalają na szybkie przeszukiwanie obszarów ortogonalnych. Na wejściu otrzymujemy zbiór punktów P na płaszczyźnie i należy dla zadanych x_1, x_2, y_1, y_2 znaleźć punkty q ze zbioru P takie, że $x_1 \leq q_x \leq x_2, y_1 \leq q_y \leq y_2$.

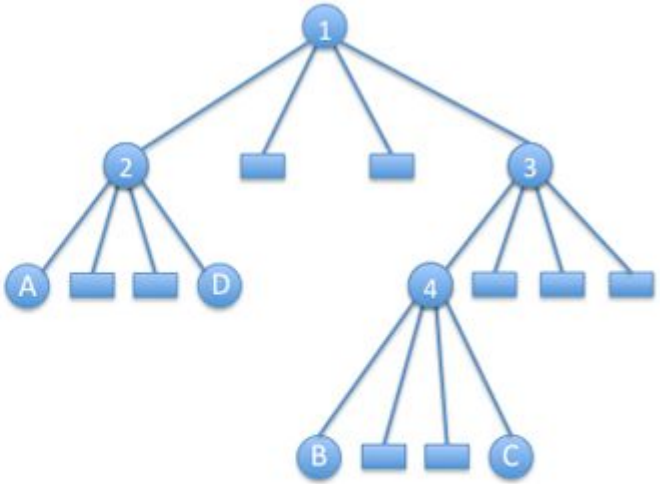
Najprostsze rozwiązanie problemu

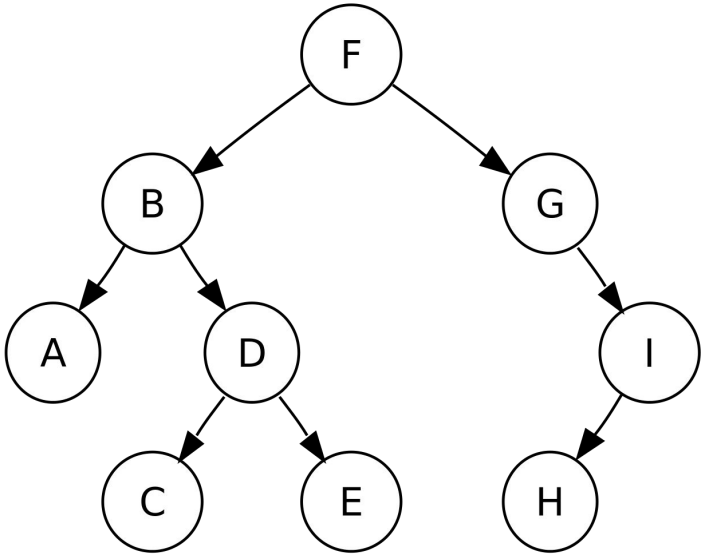
Najłatwiejszym i początkowo narzucającym się podejściem do rozwiązania tego problemu jest iteracja po punktach i sprawdzenie przynależności do danego obszaru dla każdego punktu indywidualnie.



Lepsze rozwiązanie problemu

Lepszym podejściem jest użycie struktur drzewiastych takich jak QuadTree i KD-Tree, które pozwalają przeszukać zbiór punktów w krótszym czasie.



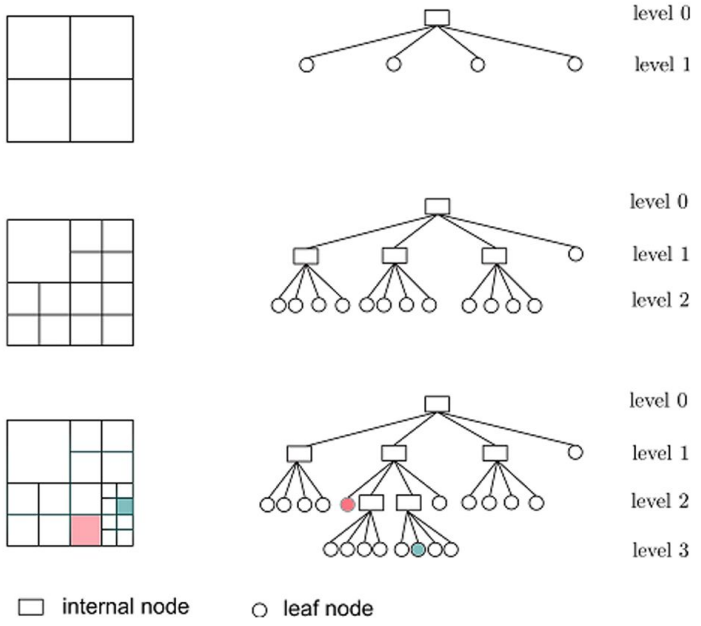


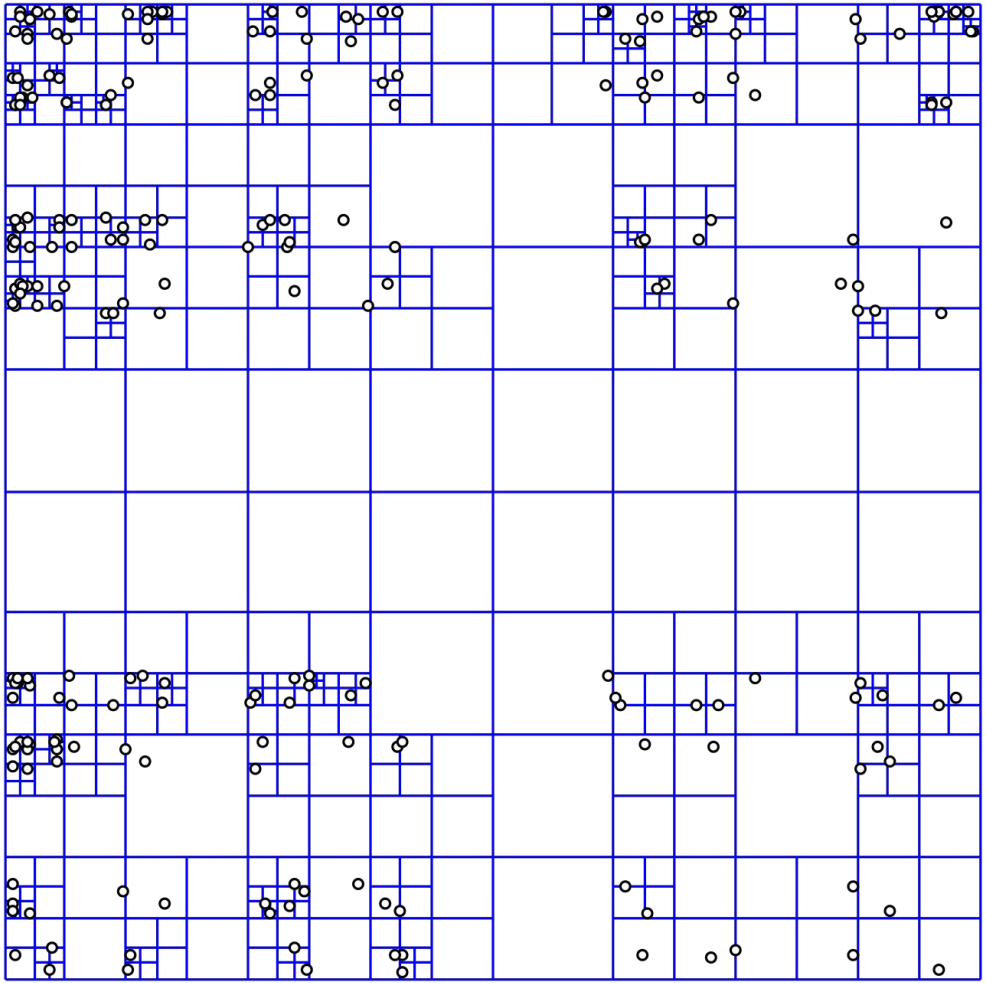
QuadTree

Drzewo czwórkowe (ang. *quadtree*) – struktura danych będąca drzewem, używana do podziału dwuwymiarowej przestrzeni na mniejsze części, dzieląc ją na cztery równe ćwiartki, a następnie każdą z tych ćwiartek na cztery kolejne itd.

Najczęściej wykorzystuje się ją do:

- wykrywania kolizji w dwóch wymiarach
- przetwarzania obrazu
- znajdowania punktów z zadanego przedziału
- generowania siatki





Podział przestrzeni przez QuadTree

QuadTree - budowanie drzewa

Drzewo czwórkowe budowane jest poprzez wstawianie punktów w kolejności w jakiej są one podane w liście. Każdy węzeł drzewa, odpowiadający pewnej płaszczyźnie może przechowywać 4 punkty. Gdy w danym węźle znajdą się już 4 punkty płaszczyzna odpowiadająca węzłowi zostaje podzielona na 4 równe części. Każda z nowych części (płaszczyzn) jest nowym węzłem w drzewie, którego rodzicem jest węzeł, w którym został dokonany podział. Punkty przypisane do węzła drzewa czwórkowego zawierają się w płaszczyźnie reprezentowanej przez dany węzeł. Dodatkowo przy wstawianiu punktu dodajemy go do listy kompresującej wszystkie punkty w poddrzewie danego węzła we wszystkich węzłach, które punkt odwiedzi, zanim zostanie wstawiony do drzewa.

QuadTree - przeszukiwanie przestrzeni 2D

Aby znaleźć wszystkie punkty w zadanym obszarze A należy schodzić rekurencyjnie w głąb drzewa.

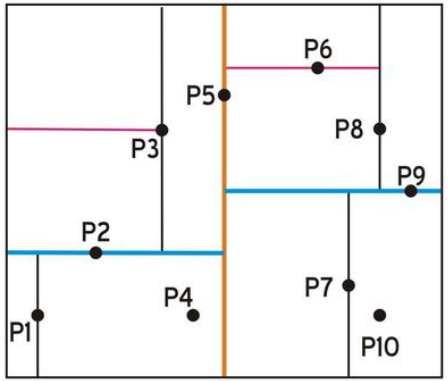
1. Jeżeli obszar reprezentowany przez aktualnie rozpatrywany węzeł nie przecina się z A, to rekurencyjnie cofamy się do rodzica.
2. Jeżeli obszar węzła zawiera się całkowicie w A, to punkty zawarte w liście kompresującej wszystkie punkty z danego poddrzewa są dodawane do listy wynikowej i rekurencyjnie cofamy się do rodzica.
3. Jeżeli obszar węzła przecina się z A, to punkty zawarte w aktualnie rozpatrywanym węźle, które należą do A dodajemy do listy wynikowej.
4. Następnie jeżeli aktualny węzeł został podzielony podczas budowania drzewa, to powtarzamy powyższe kroki dla każdej ćwiartki będącej dzieckiem aktualnie rozpatrywanego węzła.

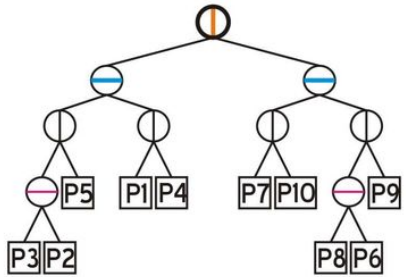
KD-Tree

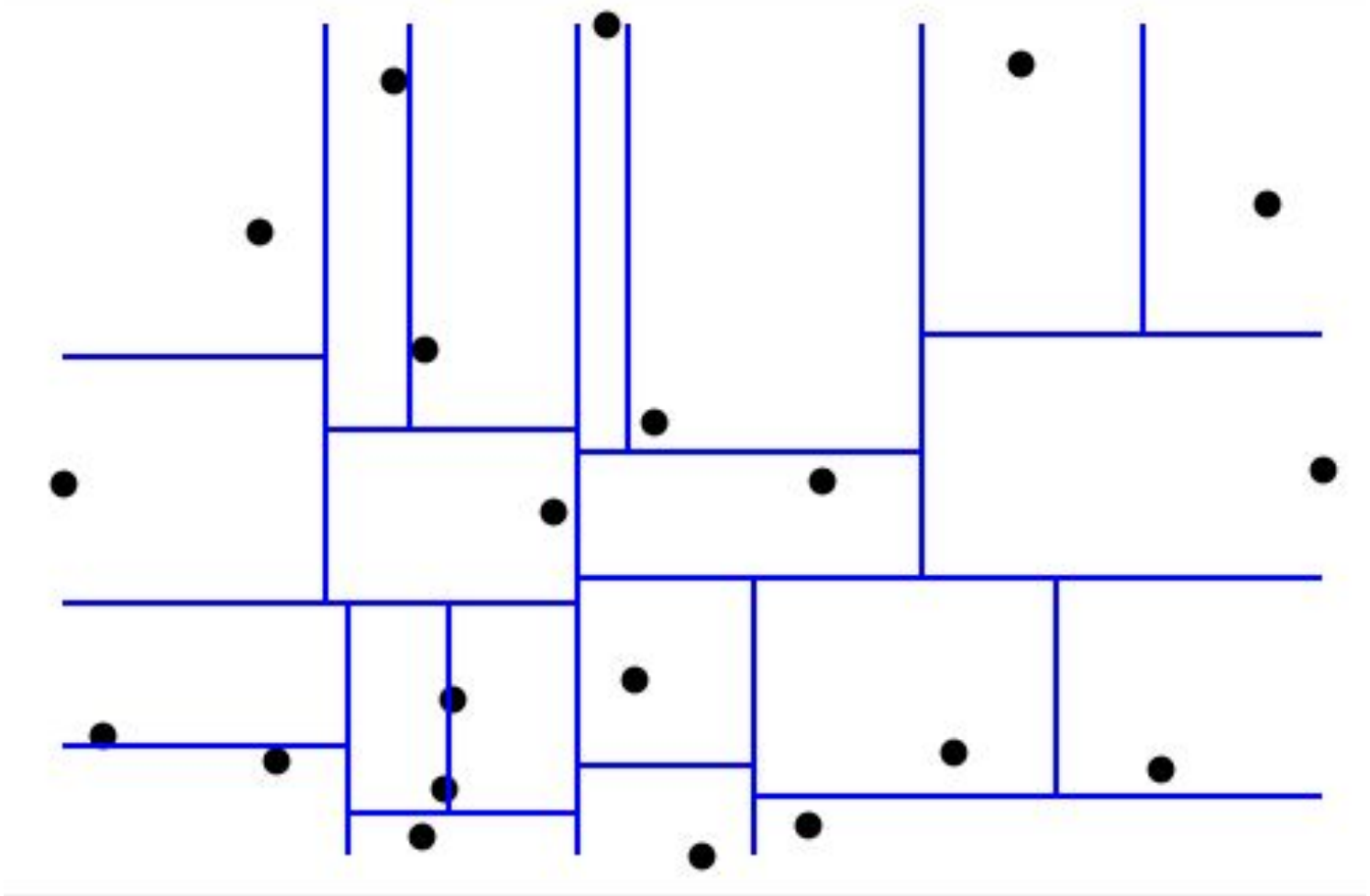
Drzewo k-wymiarowe (ang. kd-tree) – struktura danych, będąca wariantem drzew binarnych, używana do dzielenia przestrzeni. W każdym węźle następuje podział przestrzeni na dwie podprzestrzenie według jednej ze współrzędnych.

Najczęściej wykorzystuje się ją do:

- wyszukiwania najbliższych sąsiadów
- znajdowanie punktów w prostokątnych obszarach
- tworzenie chmury punktów







Podział przestrzeni przez KD-Tree

KD-tree - budowanie drzewa

Algorytm budujący drzewo polega na podziale zbioru punktów na dwa podzbiory względem hiperpłaszczyzny (w 2D prostej). Zwykle położenie takiej hiperpłaszczyzny ustala się za pomocą mediany i-tej współrzędnej punktów.

W naszej implementacji algorytm do wyznaczenia pozycji hiperpłaszczyzny podziału obszaru reprezentowanego przez węzeł “v” nie używa mediany współrzędnych punktów należących do tego obszaru, a średniej arytmetycznej i-tych współrzędnych punktów na pozycjach (n div 2 - 1) i (n div 2) w posortowanej po i-tej współrzędnej tablicy punktów gdzie n to liczba punktów należąca do obecnego podobszaru. Dla każdego węzła “i” obliczane jest jako “i = depth mod k” gdzie “depth” to głębokość na jakiej znajduje się węzeł “v”, a “k” to liczba wymiarów.

Tak więc algorytm rekurencyjnie dzieli zbiór punktów na podzbiory według i-tej współrzędnej punktów, a gdy zbiór zawiera tylko jeden punkt tworzony jest liść drzewa który zawiera ten punkt. Każdy węzeł drzewa zawiera wszystkie punkty należące do przestrzeni reprezentowanej przez ten węzeł.

KD-tree - Przeszukiwanie przestrzeni 2D

Algorytm przeszukiwania przestrzeni służy do znalezienia wszystkich punktów znajdujących się w pewnym zadanym obszarze “A”.

Algorytm przeszukuje drzewo zakorzenione w “w” w następujący sposób: jeżeli obszar reprezentowany przez węzeł “v” (będący dzieckiem “w”) w całości zawiera się w obszarze “A” to zwraca wszystkie punkty znajdujące się w obszarze reprezentowanym przez “v”. Jeżeli natomiast obszar reprezentowany przez “v” ma niepustą część wspólną z “A” to rekurencyjnie przeszukuje drzewo zakorzenione w “v”.

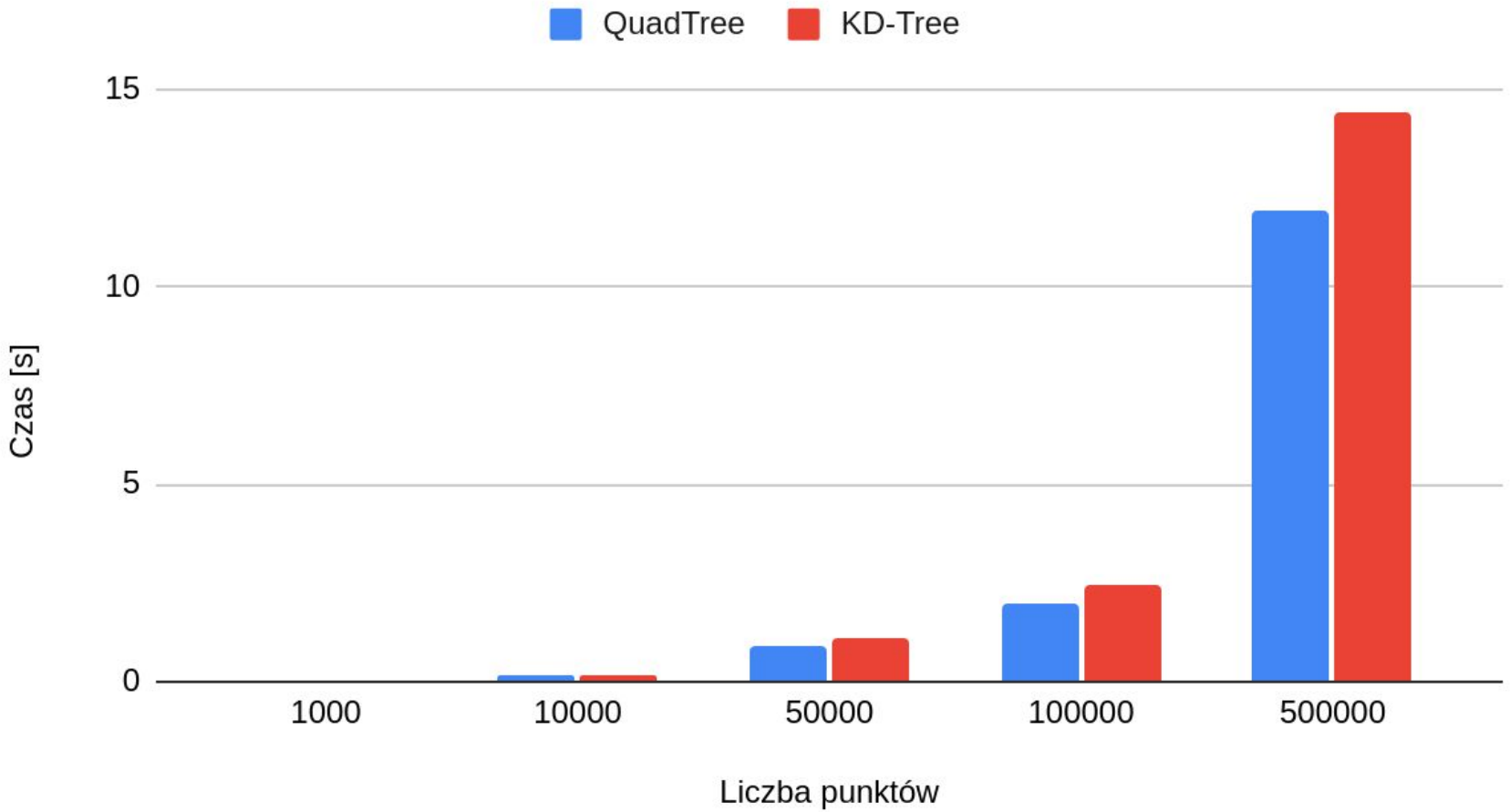
Porównanie

- Obydwa drzewa realizują ideę podziału przestrzeni na mniejsze części
- KD-Tree ma znacznie większą wysokość niż QuadTree
- Umiejscowienie punktu w QuadTree jest ściśle związane z jego fizyczną pozycją na płaszczyźnie, w KD-Tree umiejscowienie punktu w drzewie jest determinowana przez względną pozycję wobec innych punktów
- Zbalansowanie QuadTree jest zależne od fizycznego rozmieszczenia punków, natomiast odpowiedni wybór hiperpłaszczyzny podziału podczas procesu budowy KD-Tree zapewnia jego zbalansowanie
- QuadTree umożliwia łatwe dodawanie nowych punktów. Dodawanie punktów do KD-Tree po zakończeniu jego budowy jest trudne
- jak sama nazwa sugeruje KD-Tree jest znacznie lepiej przystosowane do realizacji dla dowolnej liczby wymiarów
- Złożoność czasowa pesymistyczna zapytania o wszystkie punkty z zadanego przedziału dla QuadTree wynosi O(n), a w przypadku K-DTree O(sqrt(n) + k), gdzie n to liczba punktów, a k to liczba punktów w zadanym przedziale.

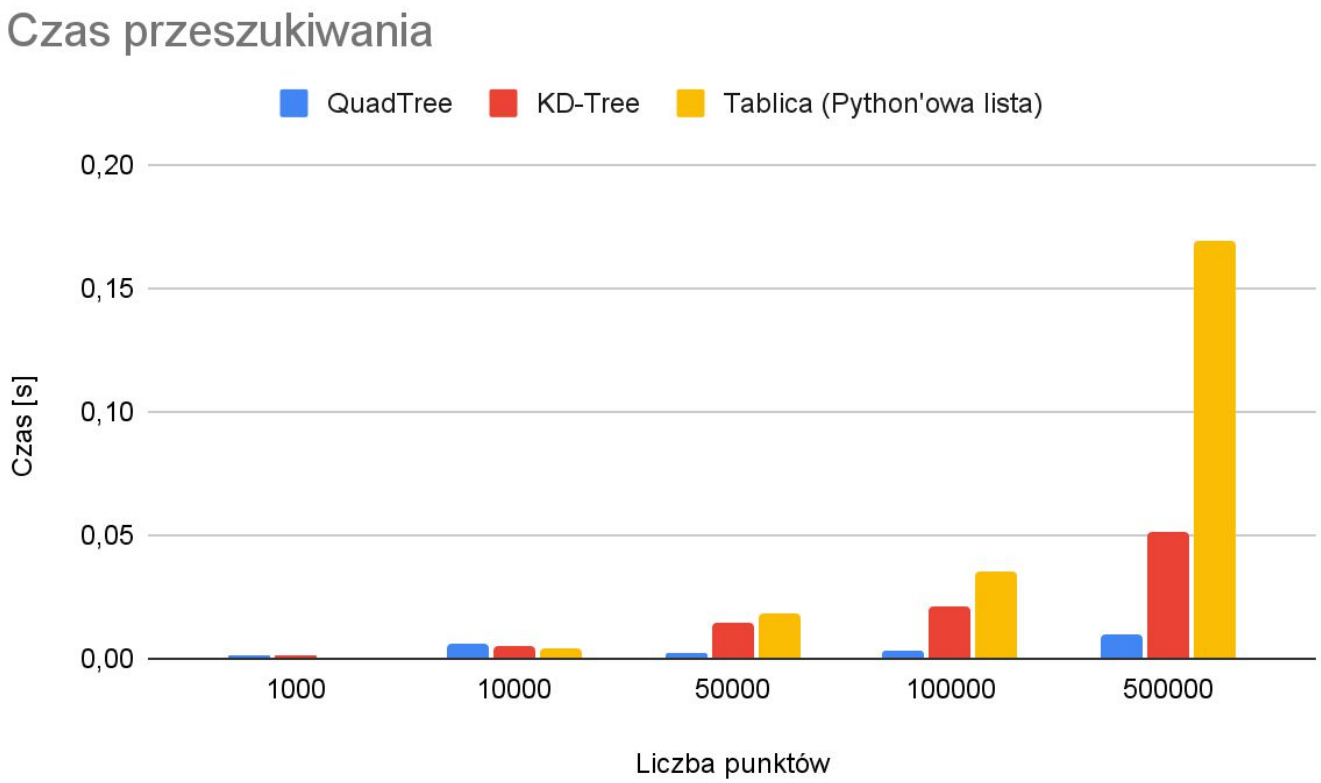
Pomiary wydajności

Zmierzyliśmy czas wykonania zaimplementowanych operacji dla każdego z drzew i porównaliśmy te czasy ze sobą. W przypadku wyszukiwania punktów czasy operacji na drzewach są zestawione dodatkowo z czasem potrzebnym na odnalezienie tych samych punktów poprzez prostą iterację po tablicy wszystkich punktów. Pomiary wykonane były dla zbiorów punktów o różnych rozmiarach.

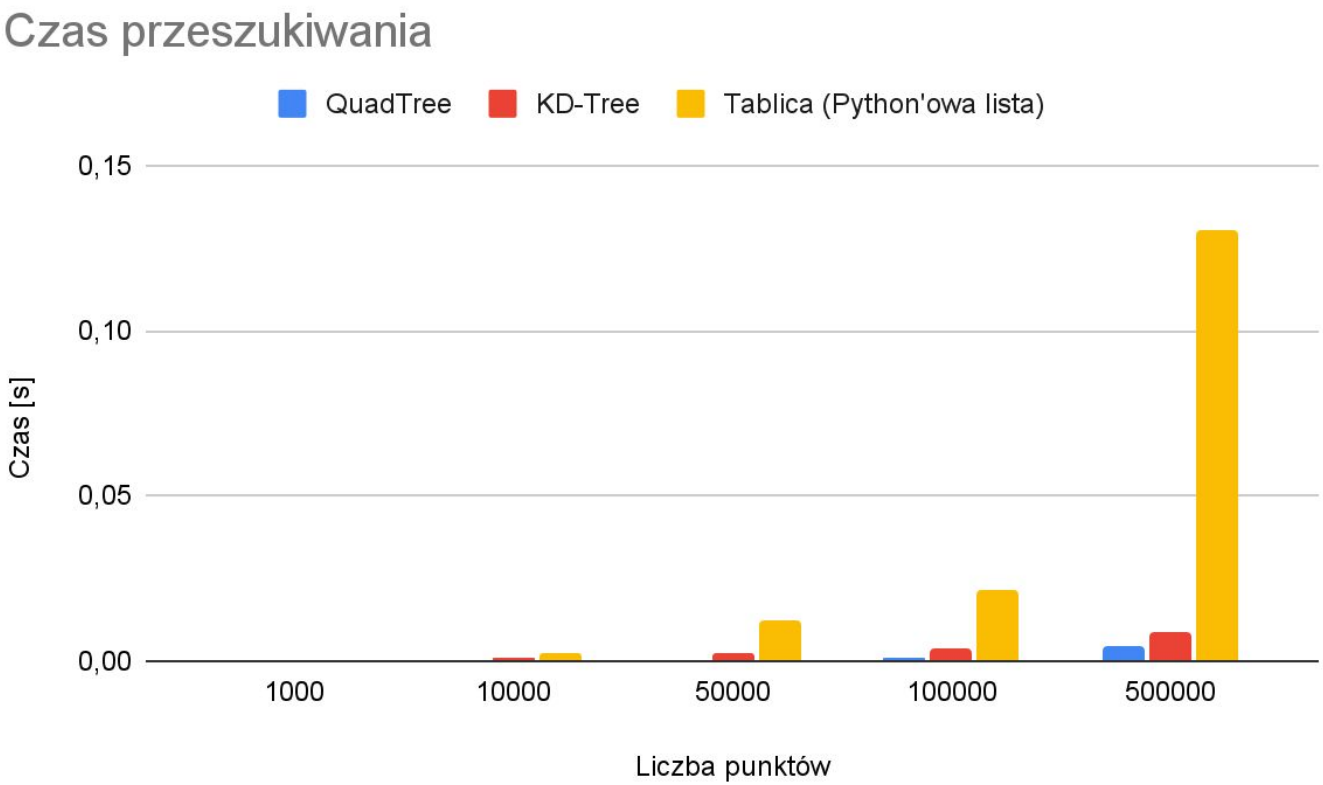
Czas budowania drzewa



Punkty z przedziału (0 - 200, 0 - 200), zapytanie z przedziału (50, 50) - (150, 150)



Punkty z przedziału (0 - 200, 0 - 200), zapytanie z przedziału (40, 40) - (60, 60)



Bibliografia

- https://en.wikipedia.org/wiki/Quadtree
- https://en.wikipedia.org/wiki/K-d_tree
- Wykład - wyszukiwanie geometryczne

Dziękujemy za uwagę :)