系统稳定性理论：第六讲

李雅普诺夫稳定性定理（三）

讲课人：薛文超

中国科学院大学人工智能学院

中国科学院数学与系统科学研究院

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法
7. 全局一致渐近稳定性定理
8. 指数稳定性定理（全局指数稳定性定理）
9. 一次近似理论

一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定理3.3 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \text{为负定函数}$$

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

为了研究全局一致渐近稳定性

我们需要先将正定函数的定义扩大到全局

径向无界正定函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \left\{ x \middle| \|x\| \le h \right\}$的一个邻域。

定义3.1 连续可微函数 $W(x): U \to R$ 是正定的，若

$$\forall x \neq 0 : W(x) > 0, \text{ 且 } W(0) = 0$$

定义3.1’ 连续可微函数 $W(x): R^n \to R$ 是

径向无界**(radially unbounded)** 正定函数或无穷大正定函数，

若其为正定函数，且

$$\lim_{\|x\| \to \infty} W(x) = +\infty.$$

径向无界正定函数

定义3.1' 连续可微函数 $W(x): R^n \to R$ 是径向无界(**radially unbounded**) 正定函数或无穷大正定函数，若其为正定函数，且

$$\lim_{\|x\| \to \infty} W(x) = +\infty.$$

定义3.1'' 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times R^n \to R$ 是径向无界(**radially unbounded**) 正定函数或具有无穷大下界，若存在径向无界函数 $W(x)$ 使得

$$\forall t(t,x) \in [t_0,+\infty)\times R^n,\ V(t,x) \ge W(x)$$

无穷小上界与无穷大上界

定义3.2” 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times R_h \to R$具有无穷小上界 **(admits an infinitely small upper limit)**当且仅当存在 $\varphi_1(r)\in K$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times R_h,\quad |V(t,x)|\le \varphi_1(\|x\|).$$

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, s.t.\quad \forall \|x\|<\delta \Rightarrow |V(t,x)|<\varepsilon$$

定义3.1” 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times R^n \to R$ 是径向无界**(radially unbounded)** 正定函数或具有无穷大下界，若存在径向无界函数 $W(x)$ 使得

$$\forall t(t,x)\in[t_0,+\infty)\times R^n, V(t,x)\ge W(x)$$

$$\forall c>0, \exists r>0, s.t.\quad \forall \|x\|>r \Rightarrow |V(t,x)|>c$$

径向无界正定函数

定义3.3’ 连续函数 $\varphi(r): R^+ \to R^+ (R^+ = \{r | r \geq 0\})$是 k_∞类函数 **(function of class** k_∞**)**，若$\varphi(r) \in K$ 且$\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = +\infty.$

$$\Downarrow$$

定义3.1’ 连续可微函数 $W(x): R^n \to R$ 是径向无界 **(radially unbounded)** 当且仅当存在 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K_\infty$ 使得

$$\varphi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \varphi_2(\|x\|)$$

推论3.1” 连续可微函数 $V(t,x)$ 径向无界或者具有无穷大下界，当且仅当存在 $\varphi(r) \in K_\infty$ 使得

$$\forall t(t,x) \in [t_0, +\infty) \times R^n, \|V(t,x)\| \geq \varphi(\|x\|)$$

径向无界正定函数

例：

1. $W(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+\dfrac{x_2^2}{1+x_2^2}$ 不是径向无界正定函数

2. $W(X)=X^TX$ 是径向无界正定函数

3. $V(t,x_1,x_2)=(1+e^{-t})(\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2)$ 不是径向无界正定函数

4. $V(t,x_1,x_2)=x_1^2+\dfrac{x_2^2}{2+\sin t}$ 是径向无界正定函数

全局一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \text{为负定函数}$$

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

定理3.6 若在 $[t_0,+\infty)\times R^n$ 上存在正定且具有无穷小上界和无穷大下界的的函数 $V(t,x)$ 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times R^n : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \text{为负定函数}$$

则系统(3.1)零解是全局一致渐近稳定的。

定理3.5的证明：只需要说明在定理3.5的条件下原点的吸引域为 R^n

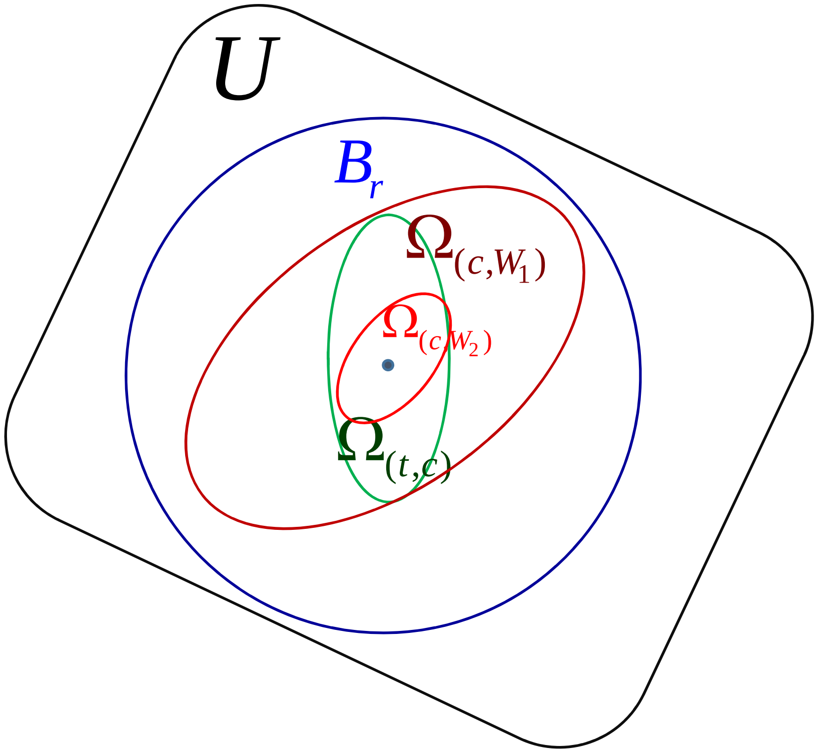
吸引域的分析

当 $V(x)$ 仅为正定函数时，则在原点的邻域内，$V(x)=c$ 是一族包围原点的、闭的且随 $c\to 0$向原点退缩的曲面族。

当$V(t,x)$为正定函数时，则在原点的小邻域内：

$$\Omega_{t,c}=\{x:V(t,x)\le c\}$$为一有界区域。

U：为定义域



$$W_1(x)\le V(t,x)\le W_2(x)$$

$$\Omega_{(c,W_1)}=\{x:x\in B_r,W_1(x)\le c\},$$

$$\Omega_{(c,W_2)}=\{x:x\in B_r,W_2(x)\le c\},$$

分析：

设 $V(t,x) \ge W_1(x)$, $W_1(x)$为正定函数。

取 $r>0, c>0$: $B_r \subset U$, $c < \min\limits_{\|x\|=r} W_1(x)$.

令 $\Omega_{(c,W_1)} = \{x : x \in B_r, W_1(x) \le c\}$, 则 $\Omega_{(c,W_1)} \subset B_r$.

令 $\Omega_{(t,c)} = \{x : x \in B_r, V(t,x) \le c\}$, 则 $\Omega_{(t,c)} \subseteq \Omega_{(c,W_1)} \subset B_r$.

(1) 当 $\forall (t,x) \in [t_0,+\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0$ 时, 由 $\Omega_{(c,W_2)}$ 出发的系统轨线均有界。

有 $\forall x_0 \in \Omega_{(t_0,c)}$, $x(t,t_0,x_0) \in \Omega_{(t,c)}, t \in [t_0,+\infty)$,

即由 (t_0,x_0) 出发的系统轨线停留在 $\Omega_{(t,c)}$ 内。

若 $W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x)$, $W_2(x)$为正定函数。

令 $\Omega_{(c,W_2)} = \{x : x \in B_r, W_2(x) \le c\}$, 则 $\Omega_{(c,W_2)} \subseteq \Omega_{(t,c)} \subseteq \Omega_{(c,W_1)} \subset B_r$,且

$$\forall x_0 \in \Omega_{(c,W_2)}, x(t,t_0,x_0) \in \Omega_{(t,c)} \subset B_r.$$

(2)当 $\forall (t,x) \in [t_0,+\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)}$负定时，$\Omega_{(c,W_2)}$为零解的一致吸引域。

吸引域的分析

设 $V(t,x)\ge W_1(x)$, $W_1(x)$为正定函数。

取 $r>0, c>0$: $B_r\subset U$, $c<\min\limits_{\|x\|=r} W_1(x)$.

令 $\Omega_{(c,W_1)}=\{x: x\in B_r, W_1(x)\le c\}$, 则 $\Omega_{(c,W_1)}\subset B_r$.

令 $\Omega_{(t,c)}=\{x: x\in B_r, V(t,x)\le c\}$, 则 $\Omega_{(t,c)}\subseteq\Omega_{(c,W_1)}\subset B_r$.

当 $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times U: \dot V(t,x)\big|_{\dot x=f(t,x)}\le 0 \Rightarrow \forall x_0\in\Omega_{(t_0,c)}, x(t,t_0,x_0)\in\Omega_{(t,c)}$

由 (t_0,x_0) 出发的系统轨线停留在 $\Omega_{(t,c)}$内。

要证明全局吸引性，需要分析 $r=\infty, \forall c>0$ 的情形：

但$\Omega_{(t,c)}=\{x: V(t,x)\le c\}$并非对任意$c$都是有界区域。

$\Omega_{(c,W_1)}=\{x: W_1(x)\le c\}$并非对任意$c$都是有界区域。

全局一致渐近稳定性定理

由定理3.5的条件知$V(t,x)$径向无界，即存在径向无界函数 $W_1(\cdot)$ 使得

$$W_1(\|x\|) \le V(t,x)$$

则保证了：c取任意给定整数大时$\Omega_{(t,c)}$均为有界区域。

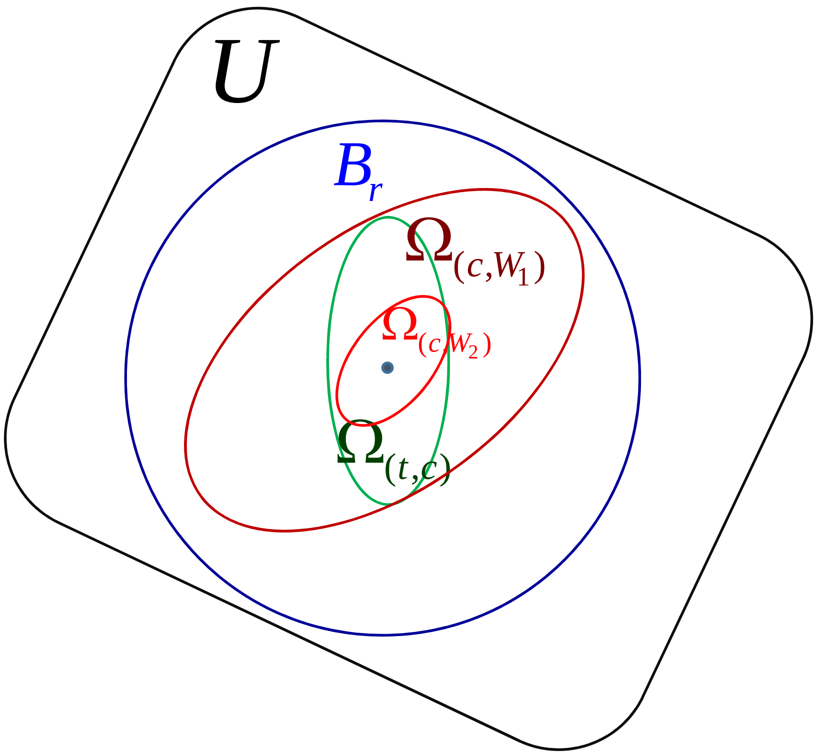
$$\Omega_{(t,c)} = \{x : V(t,x) \le c\},$$

$$\Omega_{(c,W_1)} = \{x : W_1(x) \le c\}$$

又由定理3.5的条件知

$$W_1(x) \le V(t,x) \le W_2(x), \quad W_2(x)\text{为正定}$$

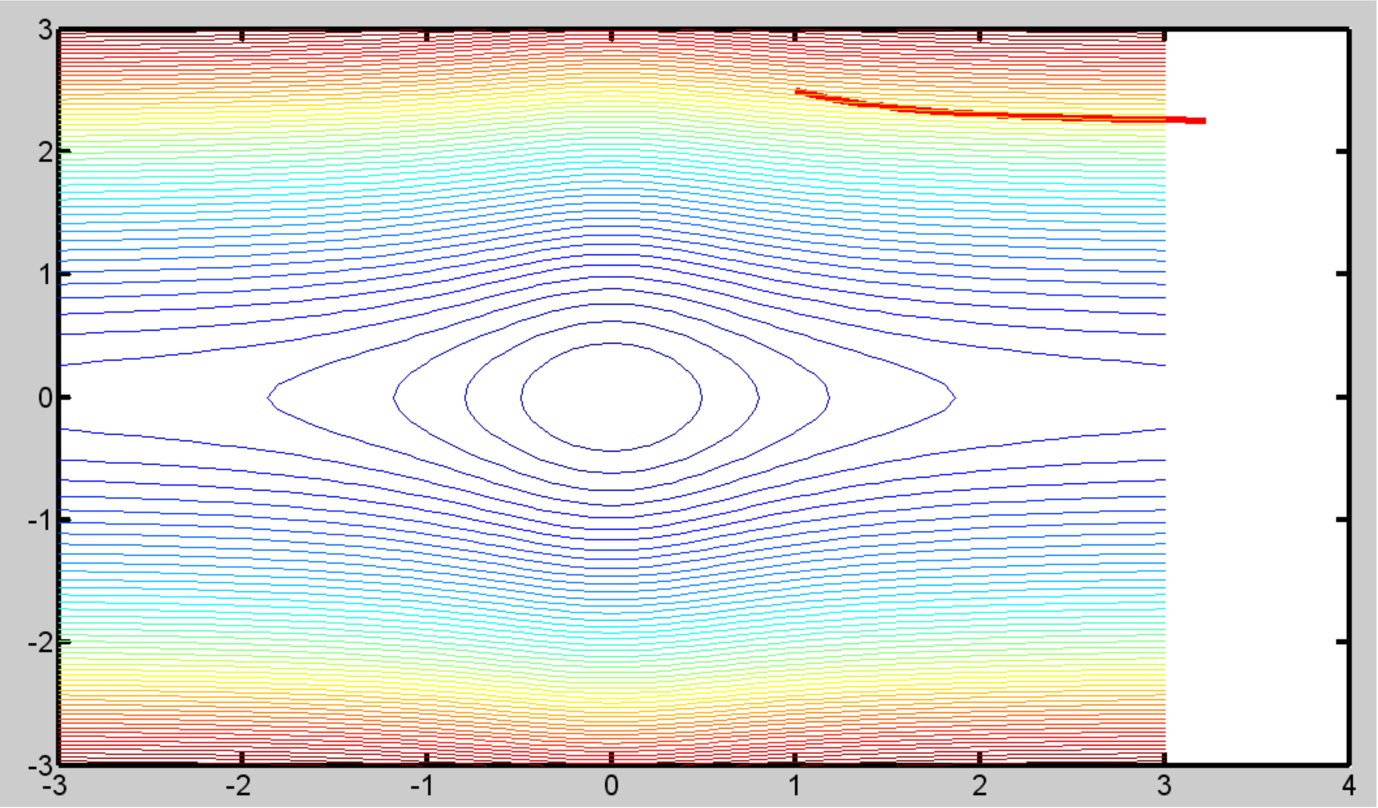
则 $W_2(x)$也为径向无界函数，则随 c 的增大 $\Omega_{(c,W_2)} = \{x : x \in B_r, W_2(x) \le c\}$可包含任意初值。



则得 $\Omega_{(c,W_2)}$ 出发的系统轨线都是有界的。

以及 $\Omega_{(c,W_2)}$ 为零解的一致吸引域。

例. $V(x_1,x_2)=\dfrac{x_1^2}{1+x_1^2}+x_2^2$



当 $0<c<1$, $V(x)=c$ 是一族包围原点的、闭的且随 $c\to 0$ 向原点退缩的曲面族。

当 $c\geq 1$, $V(x)=c$ 不是闭曲面。

此时，可能会出现，虽然 $V(x)$ 不断减小，但 $x(t)$ 却趋向无穷。

例. $V(t,x)=\dfrac{(1+e^{-t})x^2}{1+x^2}$, $\dfrac{x^2}{1+x^2}\le V(t,x)\le\dfrac{2x^2}{1+x^2}$

$V(t,x)$ ：具有无穷小上界 $V(t,x)\le\dfrac{2x^2}{1+x^2}$

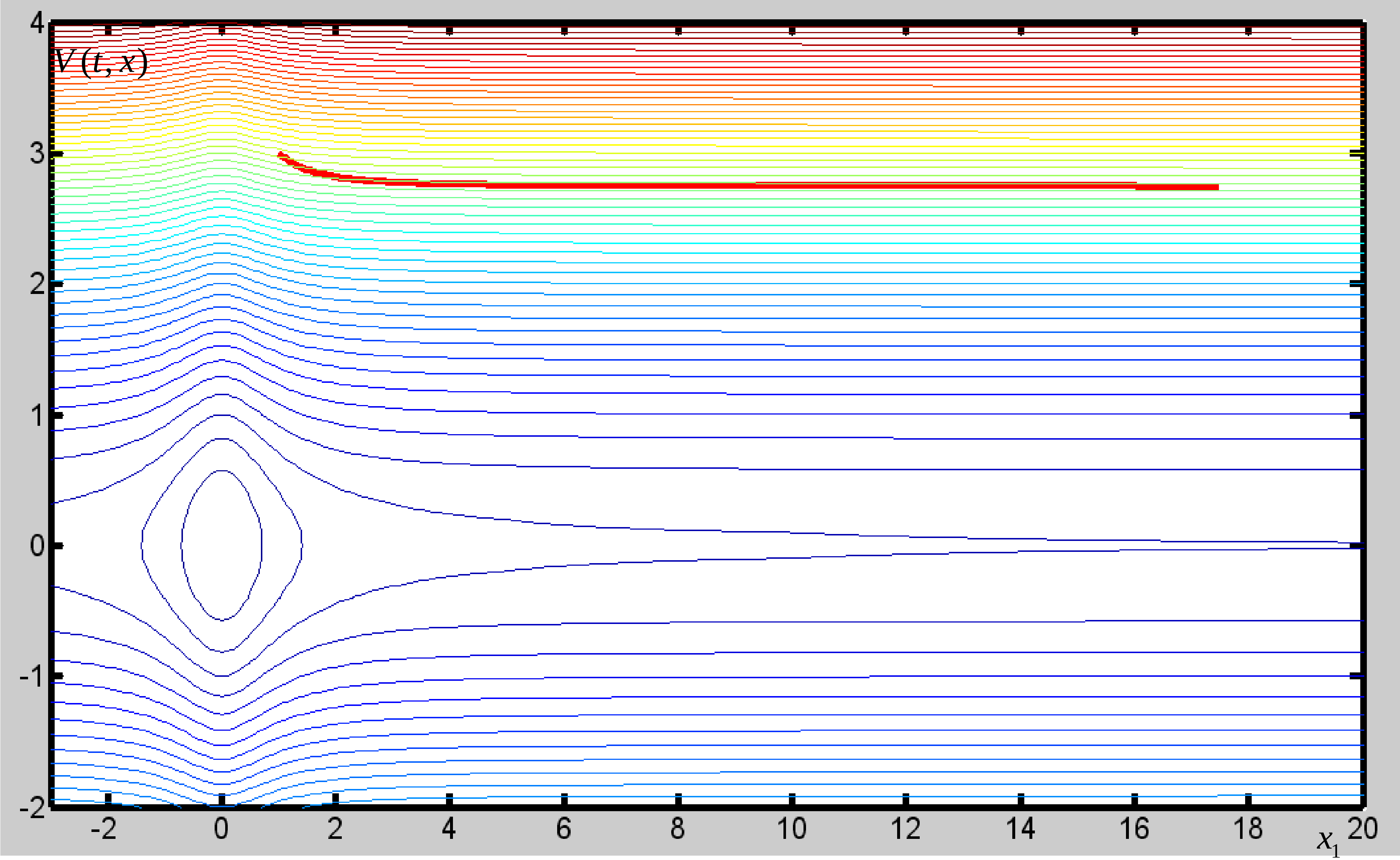
$V(t,x)$ ：不具有无穷大下界

当 $0<c<1, V(t,x)=c$ 是包围原点闭区间。

当 $c\ge 1,\ \ V(t,x)=c$ 不再是有界区间。

全局一致渐近稳定性定理

例. 考察系统
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} - \dfrac{2x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$
零解的稳定性。



$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} - \dfrac{2x_2}{(1+x_1^2)^2}
\end{cases}
$$

系统的轨线是发散的，虽然其对应的 $V(x_1, x_2)$ 是递减的。

定理3.3的如下证明方法不能用于定理3.6的证明！

定理3.3证明：

仅在原点的小领域内成立！

由定理条件知，$\exists \varphi_1(r), \varphi_2(r), \varphi_3(r) \in K$，使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times B_h, \quad \boxed{\varphi_1(\|x\|) \le V(t,x) \le \varphi_2(\|x\|), \quad \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -\varphi_3(\|x\|).}$$

于是 $\|x\| \ge \varphi_2^{-1}(V(t,x))$，则

$$\dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -\varphi_3(\|x\|) \le -\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x))).$$

当 $\|x\| \ne 0$ 时，$\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x))) > 0$，将上式两边积分得

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{V(t,x(t,t_0,x_0))} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{V}(t,x)\ dt}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \le -(t-t_0),$$

亦即

$$\int_{V(t,x(t,t_0,x_0))}^{V(t_0,x_0)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} = \int_{t}^{t_0} \frac{\dot{V}(t,x)\ dt}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \ge t-t_0.$$

$\forall \|x_0\| < h, \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < h)$，利用

$$\varphi_1(\|x\|) \le V(t,x), \quad V(t_0,x_0) \le \varphi_2(\|x_0\|) \le \varphi_2(h), \quad \varphi_1(\varepsilon) < \varphi_2(h)$$

定理3.3证明(续):

如果V不具有无穷大下界，那么V的值域可能不包含 $\varphi_2(h)$，该积分没有意义。

便有 $$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} + \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} = \int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}$$

$$\geq \int_{V(t,x(t,t_0,x_0))}^{V(t_0,x_0)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \geq t-t_0.$$

取 $T = \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}$，因为当 $\varphi_1(\varepsilon) \leq V \leq \varphi_2(h)$时，$\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x))) > 0$

所以，***T***是个有限正数。且当 $t > T + t_0$时，$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \geq t - t_0 - T > 0$,

这就推出 $\varphi_1(\varepsilon) > \varphi_1(\|x(t,t_0,x_0)\|)$, $\quad t > T + t_0$.

因为 $\varphi_1(\|x\|) \in K$，严格单调递增，所以：$\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon, t > T + t_0$.

因为 $T = T(\varepsilon, h)$，与 t_0, x_0 无关，所以零解是一致吸引的。

综上，系统零解是一致渐近稳定的。

例. 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+k_0x=0, t_0\geq 0$ 的全局一致渐近稳定性

$(0<\alpha_1\leq p(t)\leq \alpha_2$是时变阻尼系数， $k_0>0$是弹性常数, $\dot{p}(t)\leq \beta<2k_0)$

解： 将系统写为状态方程形式：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p(t)x_2-k_0x_1\end{cases}$

取 $V(t,x)=\dfrac{\left(c_1x_1+x_2\right)^2}{2}+\dfrac{c(t)x_1^2}{2}$， $0<c_1<\alpha_1, c(t)=k_0+c_1(p(t)-c_1)$

因为$k_0\leq c(t)\leq k_0+c_1(\alpha_2-c_1)$，$V(t,x)$为正定且具有无穷小上界。 又因为

$$\dot{V}(t,x)\leq -\frac{c_1}{2}(2k_0-\beta)x_1^2-(\alpha_1-c_1)x_2^2$$

为负定函数，故系统零解全局一致渐近稳定。

例. 在惯性系内一不受外力作用的刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Eular**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1$$
$$J_2\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2$$
$$J_3\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: 为刚体转动角速度的投影

J_1, J_2, J_3: 惯性主轴的转动惯量

u_1, u_2, u_3: 控制力矩输入

证明当控制输入力矩为 $u_i = -k_i\omega_i,\ k_i > 0$ 时，
$\bar{\omega} = (0,0,0)$为一致渐近稳定。

证明：取正定函数 $V(x) = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2$, 因为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= 2J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + 2J_2\omega_2\dot{\omega}_2 + 2J_3\omega_3\dot{\omega}_3 \\
&= 2\omega_1\left((J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1\right) + 2\omega_2\left((J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2\right) + 2\omega_3\left((J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3\right) \\
&= 2\omega_1 u_1 + 2\omega_2 u_2 + 2\omega_3 u_3 \\
&= -2k_1\omega_1^2 - 2k_2\omega_2^2 - 2k_3\omega_3^2
\end{aligned}$$

所以，系统原点是全局渐近稳定的。

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法
7. 全局一致渐近稳定性定理
8. 指数稳定性定理（全局指数稳定性定理）
9. 一次近似理论

指数稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.7 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$,
和正常数 k_1,k_2,k_3,α, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U: \begin{cases} k_1\|x\|^\alpha \le V(t,x) \le k_2\|x\|^\alpha \\ \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -k_3\|x\|^\alpha \end{cases}$$

则系统**(3.1)**零解是指数稳定的。

若上述性质可扩展到 $U = R^n$,
则系统**(3.1)**零解是全局指数稳定的。

指数稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.7 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$，和正常数 k_1,k_2,k_3,α,使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\begin{cases} k_1\|x\|^{\alpha} \le V(t,x) \le k_2\|x\|^{\alpha} \\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -k_3\|x\|^{\alpha} \end{cases}$$

则系统**(3.1)**零解是指数稳定的。

$\varphi_1(r),\varphi_2(r),\varphi_3(r)$与$r^{\alpha}$具有同级增势

与定理3.3比较：

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}\text{为负定函数}$$

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

指数稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.7 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$，和正常数 k_1,k_2,k_3,α，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\begin{cases} k_1\|x\|^{\alpha}\le V(t,x)\le k_2\|x\|^{\alpha} \\ \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)}\le -k_3\|x\|^{\alpha}\end{cases}$$

则系统**(3.1)**零解是指数稳定的。

若上述性质可扩展到 $U=R^n$，

则系统(3.1)零解是全局指数稳定的。

定理3.6证明：

指数稳定性定理

定理3.7证明：

由定理条件知，

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U: \quad \frac{V(t,x)}{k_2} \le \|x\|^\alpha \le \frac{V(t,x)}{k_1},$$

于是

$$\dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -k_3\|x\|^\alpha \le -\frac{k_3}{k_2}V(t,x).$$

从而

$$k_1\|x\|^\alpha \le V(t,x) \le V(t_0,x_0)e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} \le k_2\|x_0\|^\alpha e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)},$$

因此有：

$$\|x\| \le \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/\alpha}\|x_0\| e^{-\frac{k_3}{k_2\alpha}(t-t_0)}.$$

所以，系统零解指数稳定。同理，可证全局指数稳定。

例. 考察系统 $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2\end{cases}$ 零解的指数稳定性,

其中函数 $g(t)$连续可微,并满足 $\forall t \ge 0 : 0 \le g(t) \le k,\ \dot{g}(t) \le g(t).$

解: 取 $V(t,x) = x_1^2 + [1+g(t)]x_2^2$. 因为,

$$x_1^2 + x_2^2 \le V(t,x) = x_1^2 + [1+k]x_2^2$$

$x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + [1+k]x_2^2$ 均为正定二次型函数，又因为，

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= 2x_1\dot{x}_1 + \dot{g}(t)x_2^2 + 2[1+g(t)]x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 - g(t)x_2) + \dot{g}(t)x_2^2 + 2[1+g(t)]x_2(x_1 - x_2) \\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2 - (2 + 2g(t) - \dot{g}(t))x_2^2 \\ &\le -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= -[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}2 & -1 \\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \triangleq -x^TQx\end{aligned}$$

而Q为正定矩阵. 因为任一正定二次型函数 x^TPx具有性质:

$$\lambda_{\min}(P)x^Tx \le x^TPx \le \lambda_{\max}(P)x^Tx$$

因此，定理3.6条件满足，且 $\alpha = 2$，系统零解全局指数稳定。

线性时不变系统的稳定性 $\dot{x}=Ax$ (*)

其通解为 $x(t)=x(0)e^{At}$

$$=T\cdot block\ diag\{e^{J_1t},e^{J_2t},\cdots,e^{J_rt}\}\cdot T^{-1}x(0)$$

$$e^{J_it}=e^{\lambda_it}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t_2 & \cdots & \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k_i-2}}{(k_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

定理1. 线性定常系统（*）的零解

•是**Lyapunov**稳定的，当且仅当 $Re(\lambda_i)\le 0$, 且若$Re(\lambda_i)=0$, 则$m_i=1$.

•是全局（一致）渐近稳定的，当且仅当 $Re(\lambda_i)<0$.

•是全局（一致）指数稳定的，当且仅当 $Re(\lambda_i)<0$.

证明：当$Re(\lambda_i)<0$时，e^{J_1t}有界，且$\lim\limits_{t\to\infty}e^{J_1t}=0$.

当$Re(\lambda_i)=0$, m_i=1时，e^{J_1t}有界，但没有$\lim\limits_{t\to\infty}e^{J_1t}=0$.

（全局指数稳定留待以后证明）

指数稳定性定理

对于线性时不变系统： $\dot{x} = Ax,$ (3.3)

当$Re(\lambda_i) < 0,$ 即其特征根均具有负实部，则矩阵A 称为**Hurwitz**矩阵。

定理3.8 A称为**Hurwitz**矩阵当且仅当对任给的正定对称矩阵Q, 存在满足方程

$$PA + A^T P = -Q \quad (3.4)$$

的正定对称矩阵P，且P是方程**(3.4)**的唯一解。

定理3.7证明：

定理3.8证明：

充分性：若存在正定对称矩阵Q和满足方程(3.4)的正定对称矩阵P，取

$V = x^T Px$, 则V为正定二次型函数。又

$$\dot{V} = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx = -x^T Qx$$

则$\dot{V}$为负定二次型函数，因此，系统(3.4)的零解渐近稳定，A的所有特征根均具有负实部。

必要性：设A的所有特征根均具有负实部，即 $Re(\lambda_i) < 0.$

对任给正定对称矩阵**Q**，取 $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt.$

因为 $Re(\lambda_i) < 0$, 所以上述积分存在。同时，由于**Q**是正定对称的，

所以**P**正定对称。$\left(\text{因为} x^T Px = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} Q e^{At} x dt > 0, \forall x \neq 0 \right)$

又因为 $Re(\lambda_i) < 0$，则

$$PA + A^T P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} A dt + \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt = \int_0^\infty d\left(e^{A^T t} Q e^{At} \right) = -Q.$$

定理3.8证明（续）：

因此，**P**是方程**(3.4)**的解。

设方程**(3.4)**存在另一解 $\tilde{P} \neq P$, 则

$$(P-\tilde{P})A + A^T(P-\tilde{P}) = 0.$$

由此得到

$$\frac{d\left(e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At}\right)}{dt} = e^{A^T t}(A^T(P-\tilde{P}) + (P-\tilde{P}A))e^{A^T t} = 0.$$

因此，$\forall t, e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At} = c.$ 因为 $Re(\lambda_i) < 0,$ 则

$$t = 0, e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At} = P-\tilde{P} = c.$$

$$t \to \infty, e^{A^T t}(P-\tilde{P})e^{At} \to 0.$$

所以，$P-\tilde{P} = c = 0.$ 即***P***是方程**(3.4)**的唯一解。

指数稳定性定理

对于线性时不变系统： $$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

当$Re(\lambda_i) < 0$，即其特征根均具有负实部，则矩阵A 称为**Hurwitz**矩阵。

定理3.8 A称为**Hurwitz**矩阵当且仅当对任给的正定对称矩阵Q, 存在满足方程

$$PA + A^T P = -Q \qquad (3.4)$$

的正定对称矩阵P，且P是方程**(3.4)**的唯一解。

方程(3.4)也称为Lyapunov方程。

指数稳定性定理

对于线性时不变系统： $\dot{x} = Ax,$ (3.3)

由定理3.6，3.7，可证

定理2.1. 线性定常系统(3.3)的零解是全局指数稳定的，当且仅当 $Re(\lambda_i) < 0.$

$V(t,x) = x^T P x$

$\dot{V}(t,x) = -x^T Q x$

$k_1 = \lambda_{\min}(P), k_2 = \lambda_{\max}(P), k_3 = \lambda_{\min}(Q), \alpha = 2,$

估计指数收敛率

$$\boxed{\|x\| \le \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/\alpha} \|x_0\| e^{-\frac{k_3}{k_2\alpha}(t-t_0)}}.$$

定理3.7 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$，和正常数 k_1, k_2, k_3, α，使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times U : \begin{cases} k_1 \|x\|^\alpha \le V(t,x) \le k_2 \|x\|^\alpha \\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x} = f(t,x)} \le -k_3 \|x\|^\alpha \end{cases}$$

则系统(3.1)零解是指数稳定的。

定理3.8 A称为Hurwitz矩阵当且仅当对任给的正定对称矩阵Q，存在满足方程

$$PA + A^T P = -Q \qquad (3.4)$$

的正定对称矩阵P，且P是方程(3.4)的唯一解。

指数稳定性定理

对于线性时不变系统： $\dot{x} = Ax + Bu \qquad (3.5)$

当 $Re(\lambda_i) < 0$, 系统**(3.5)**为有界输入有界状态的**(bounded-input bounded-output, BIBS)**。

系统(3.5)的解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

零输入响应(zero-input response)

零状态响应(zero-state response)

因为 $Re(\lambda_i) < 0$, 则存在 $k > 0, \lambda > 0$, 使得 $\left\|e^{A(t-t_0)}\right\| \le ke^{-\lambda(t-t_0)}$.

若 $u(t)$ 为分段连续函数，且 $\forall t \ge t_0, \|u(t)\| \le M$ ，则 $\forall t \ge t_0$,

$$\|x(t)\| \le \left\|e^{A(t-t_0)}x_0\right\| + \int_{t_0}^{t}\left\|e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\right\|d\tau \le ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} ke^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau \le ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\| + \frac{kM\|B\|}{\lambda}$$

所以$\|x(t)\|$ 有界.

稳定性与鲁棒性的理论基础，黄琳，科学出版社，2003

指数稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.7 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$,

和正常数 k_1,k_2,k_3,α, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\begin{cases} k_1\|x\|^\alpha \le V(t,x)\le k_2\|x\|^\alpha \\ \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -k_3\|x\|^\alpha \end{cases}$$

则系统**(3.1)**零解是指数稳定的。

若上述性质可扩展到 $U=R^n$,

则系统**(3.1)**零解是全局指数稳定的。

定理**3.7**的逆定理存在。参见

H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社，**2006**。（**Theorem 4.14**）

对线性定常系统，我们可以把**Lyapunov**函数确定出来。

$$PA + A^T P = -Q \quad \Rightarrow V(t,x) = x^T P x$$

- 估计指数收敛率
- 一次近似理论

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法
7. 全局一致渐近稳定性定理
8. 指数稳定性定理（全局指数稳定性定理）
9. 一次近似理论

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

$$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

对于线性定常系统，稳定性的判断较容易，有关性质非常丰富

渐近稳定、指数稳定、有界输入有界输出、估计指数收敛率...

要把这些结果应用于实际系统，首先要回答的问题是:

用线性时不变模型来作为实际系统近似的根据是什么？

近似系统零解的稳定性是否能保证原系统零解的某种同样的稳定性？

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

对于非线性系统**(3.1)**，考虑 $f(t,x)$对$\boldsymbol{x}$的**Jacobi**矩阵

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = A$$

若它是时不变的，则系统**(3.1)**可以写成：

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad A \in R^{n\times n} \qquad (3.6)$$

设向量**g(t,x)**满足： $\forall t \ge t_0, \quad \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \to 0, \quad 当\|x\| \to 0.$

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad s.t.\ \forall \|x\| \le \delta, \forall t \ge t_0, \|g(x)\| \le \varepsilon \|x\|.\right)$$

$$\left(\exists c > 0, \quad s.t. \quad \forall t \ge t_0, \|g(x)\| \le c\|x\|^2.\right)$$

通常称线性时不变系统 $\dot{x} = Ax$ 为系统**(3.1)**的一次近似系统

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

定理3.9

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i) < 0$ **)**

则非线性系统**(3.1)**的零解也是指数稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**至少有一个*A*的特征值在右半开平面，则非线性系统**(3.1)**的零解是不稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是临界稳定的（即 $Re(\lambda_i) \le 0,$

且若$Re(\lambda_i) = 0,$ 则$m_i = 1$)，那么由线性化系统**(3.3)**

得不到原非线性系统**(3.1)**零解稳定性的任何信息。

定理3.9证明:

定理3.9证明：

1. 如果线性化系统(3.3)零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i)<0$ ）

则由定理3.8，存在正定对称矩阵***P***,满足

$$PA+A^TP=-I$$

取 $V=x^TPx$, 则

$$\dot{V}\Big|_{\dot{x}=Ax+g(t,x)}=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=(x^TA^T+g^T(t,x))Px+x^TP(Ax+g(x))$$

$$=-x^Tx+2x^TPg(x)\le-\|x\|_2^2+2\|x\|_2\|P\|_2\|g(x)\|_2$$

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3\|P\|_2}$，则 $\exists\delta>0,\quad s.t.\ \forall\|x\|\le\delta,\forall t\ge t_0,\|g(t,x)\|\le\varepsilon\|x\|,$

因此，$\forall\|x\|\le\delta,\forall t\ge t_0,$

$$\dot{V}\Big|_{\dot{x}=Ax+g(t,x)}\le-\frac{1}{3}\|x\|_2^2$$

根据定理3.7，非线性系统(3.1)指数稳定。

定理3.9证明（续）：

2. 如果线性化系统零解是不稳定（至少有一个A的特征值在右半开平面）。

情况1：先假设A没有虚轴上的特征根，即A的特征值分为实部为正或负两组，设A有 n_1 个实部为正的特征根及 n_2 个实部为负的特征根，$n_1+n_2=n.$ 则必存在非异矩阵T，使得

$$TAT^{-1}=\begin{bmatrix}-A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}, A_1\in R^{n_1\times n_1}, A_2\in R^{n_2\times n_2}$$

且 A_1, A_2 为**Hurwitz**矩阵。根据定理**3.8**，存在存在正定对称矩阵 P_1, P_2 满足：

$$P_iA_i+A_i^TP_i=-I_i, i=1,2$$

取 $V=x^TPx, P=T^T\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & -P_2\end{bmatrix}T.$ 令 $z=Tx=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}, z_1\in R^{n_1}, z_2\in R^{n_2}.$ 则当 $z_2=0,$

在任意接近原点的邻域内，有 $V>0.$ 取$\varepsilon=\dfrac{1}{3\|P\|_2}$，则

$\exists\delta>0,\quad s.t.\,\forall\|x\|\le\delta, \forall t\ge t_0, \|g(t,x)\|\le\varepsilon\|x\|,$ 再取 $\psi=\{x:\|x\|\le\delta, V(x)>0\}.$

则在Ψ内，有

定理3.9证明（续）：

$$\dot{V}\Big|_{\dot{x}=Ax+g(t,x)} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$= (x^T A^T + g^T(t,x))Px + x^T P(Ax + g(t,x))$$

$$= x^T T^T \begin{bmatrix} -A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix} \left(T^{-1}\right)^T T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} Tx + x^T T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} TT^{-1} \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} Tx$$

$$+ 2g^T(t,x)Px$$

$$= x^T T^T \left(\begin{bmatrix} -A_1^T & 0 \\ 0 & A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) Tx + 2g^T(t,x)Px$$

$$= x^T T^T \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} Tx + 2g^T(t,x)Px$$

$$= x^T T^T Tx + 2g^T(t,x)Px$$

$$\geq \lambda_{\min}(T^T T)\|x\|_2^2 - 2\|g(t,x)\|_2 \|P\|_2 \|x\|_2$$

$$\geq \lambda_{\min}(T^T T)\|x\|_2^2 - 2\varepsilon\|P\|_2 \|x\|_2^2 = \frac{\lambda_{\min}(T^T T)}{3}\|x\|_2^2$$

根据不稳定定理，非线性系统(3.1)零解不稳定。

定理3.9证明（续）：

情况2：除右半开平面特征值外，***A***还有虚轴上的特征根，设***A***有 m_1 个特征 λ_i 位于右半开平面，且 $\min\limits_{i\in \underline{m1}}\left(\mathrm{Re}(\lambda_i)\right)>\eta>0$，则矩阵 $\tilde{A}=\left[A-\frac{\eta}{2}I\right]$ 依然有 m_1 个特征根位于右半开平面，但没有虚轴上的特征根，与前面的分析类似，此时，存在对称矩阵 $\tilde{P}$ ，使得

$$\tilde{P}\left[A-\frac{\eta}{2}I\right]+\left[A-\frac{\eta}{2}I\right]^T\tilde{P}=I$$

并存在任意接近原点的邻域，有 $\tilde{V}=X^T\tilde{P}X>0.$ 取 $\tilde{\varepsilon}=\dfrac{1}{3\left\|\tilde{P}\right\|_2}$，则

$\exists\tilde{\delta}>0,\quad s.t.\ \forall\|x\|\le\tilde{\delta},\forall t\ge t_0,\|g(t,x)\|\le\tilde{\varepsilon}\|x\|$，再取 $\tilde{\psi}=\left\{x:\|x\|\le\tilde{\delta},\tilde{V}(x)>0\right\}.$

则在 $\tilde{\psi}$ 内，有

$$\begin{aligned}\dot{V}\Big|_{\dot{x}=Ax+g(t,x)}&=\dot{x}^T\tilde{P}x+x^T\tilde{P}\dot{x}=(x^TA^T+g^T(t,x))\tilde{P}x+x^T\tilde{P}(Ax+g(t,x))\\&=x^TA^T\tilde{P}x+x^T\tilde{P}Ax+2g^T(t,x)\tilde{P}x=x^T(I+\eta\tilde{P})x+2g^T(t,x)\tilde{P}x\\&=x^Tx+2g^T(t,x)\tilde{P}x+\eta V(x)>\|x\|_2^2-2\|g(t,x)\|_2\left\|\tilde{P}\right\|_2\|x\|_2\\&\ge\|x\|_2^2-2\tilde{\varepsilon}\left\|\tilde{P}\right\|_2\|x\|_2^2=\frac{1}{3}\|x\|_2^2\end{aligned}$$

根据不稳定定理，非线性系统**(3.1)**零解不稳定。

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

定理3.9

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i) < 0$ **)**

则非线性系统**(3.1)**的零解也是指数稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**至少有一个*A*的特征值在右半开平面，则非线性系统**(3.1)**的零解是不稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是临界稳定的（即 $Re(\lambda_i) \le 0$,

且若$Re(\lambda_i) = 0$, 则$m_i = 1$)，那么由线性化系统**(3.3)**

得不到原非线性系统**(3.1)**零解稳定性的任何信息。

定理3.9证明:

定理3.9证明（定理的第三条）：

3. 通过下面例子说明：

例. 讨论系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + a x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2^3 \end{cases}$ 零解的稳定性。

解：此系统的线性部分为：$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ 系统特征根为一对纯虚根。

取 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$，则

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1(-x_2 + a x_1^3) + x_2(x_1 + a x_2^3) = a(x_1^4 + x_2^4)$$

可见当 $a < 0$ 时，系统零解渐近稳定，

当 $a > 0$ 时，系统零解是不稳定的。

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad\qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax, \qquad\qquad (3.3)$$

定理3.9

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i) < 0$ **)**

则非线性系统**(3.1)**的零解也是指数稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**至少有一个***A***的特征值在右半开平面，则非线性系统**(3.1)**的零解是不稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是临界稳定的（即 $Re(\lambda_i) \le 0,$

且若$Re(\lambda_i) = 0,$ 则$m_i = 1$)，那么由线性化系统**(3.3)**

得不到原非线性系统**(3.1)**零解稳定性的任何信息。

如果线性化系统零解是临界稳定的，则原系统的稳定性取决于其非线性部分的性质。

Lyapunov一次近似定理

若系统为非自治系统，则定理**3.9**不一定成立！

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0$$

$$\dot{x} = Ax + g(t,x), \quad A \in R^{n\times n}$$

例如：

$$\dot{x} = -x + tx^2$$

对这些系统不能使用一次近似理论。

对于非自治系统，需要系统**(3.6)**中非线性部分 $g(t,x)$ 满足条件：

$$\forall t \geq t_0, \quad \frac{\|g(t,x)\|}{\|x\|} \to 0, \quad 当\|x\| \to 0.$$

才能利用定理**3.9**

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad A \in R^{n\times n} \qquad (3.6)$$

- 一次近似是将原系统在零点附近展开

尽管线性定常部分的零解指数稳定性是全局的，但原非线性系统零解虽然具有同类的稳定性，却是局部的。

如何确定非线性系统的最大吸引区域是个困难的问题。

Lyapunov一次近似定理

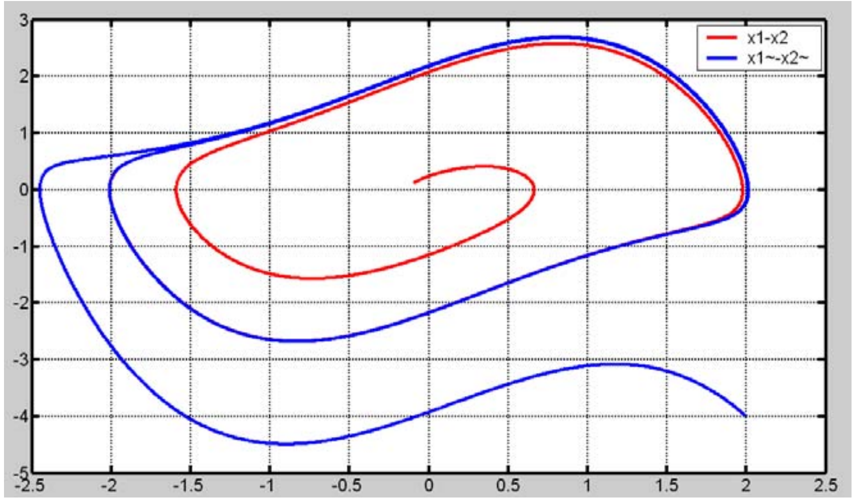
$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad A \in R^{n\times n} \qquad (3.6)$$

- **Lyapunov**线性化方法是关于非线性系统局部稳定性的命题。
- 它将“一个非线性系统与其线性逼近在一个小运动区域内应当有相似的行为”这种直觉严格化了。
- 由于一切物理系统本质上都是非线性的，**Lyapunov**线性化方法在实践中成为利用线性控制技术的基本依据。

极限环(limit cycles)

例. **Van der Pol Equation** $\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x$



$\mu = 1$, 零解为系统不稳定平衡点

系统线性部分为 $\ddot{x} = \mu\dot{x} - x$

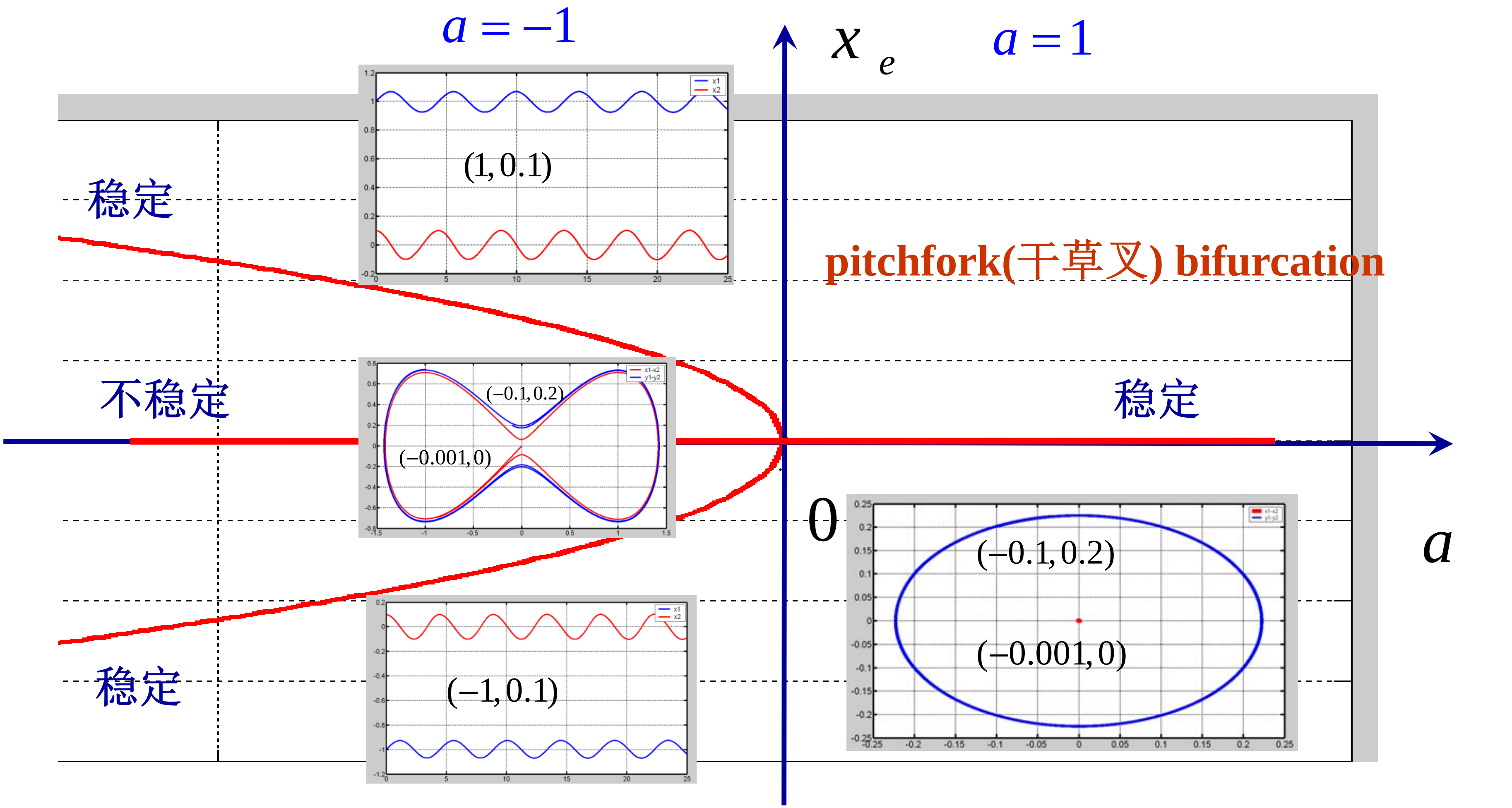
其特征方程为： $s^2 - \mu s + 1 = 0$

当 $\mu > 0$ 时， 零解为不稳定平衡点

分支（分歧、分岔）(Bifurcations)

例：无阻尼 **Duffing Equation** $\ddot{x} = -ax - x^3$

a**=0** 称为临界分歧值（**bifurcation values**）



分支（分歧、分岔）(Bifurcations)

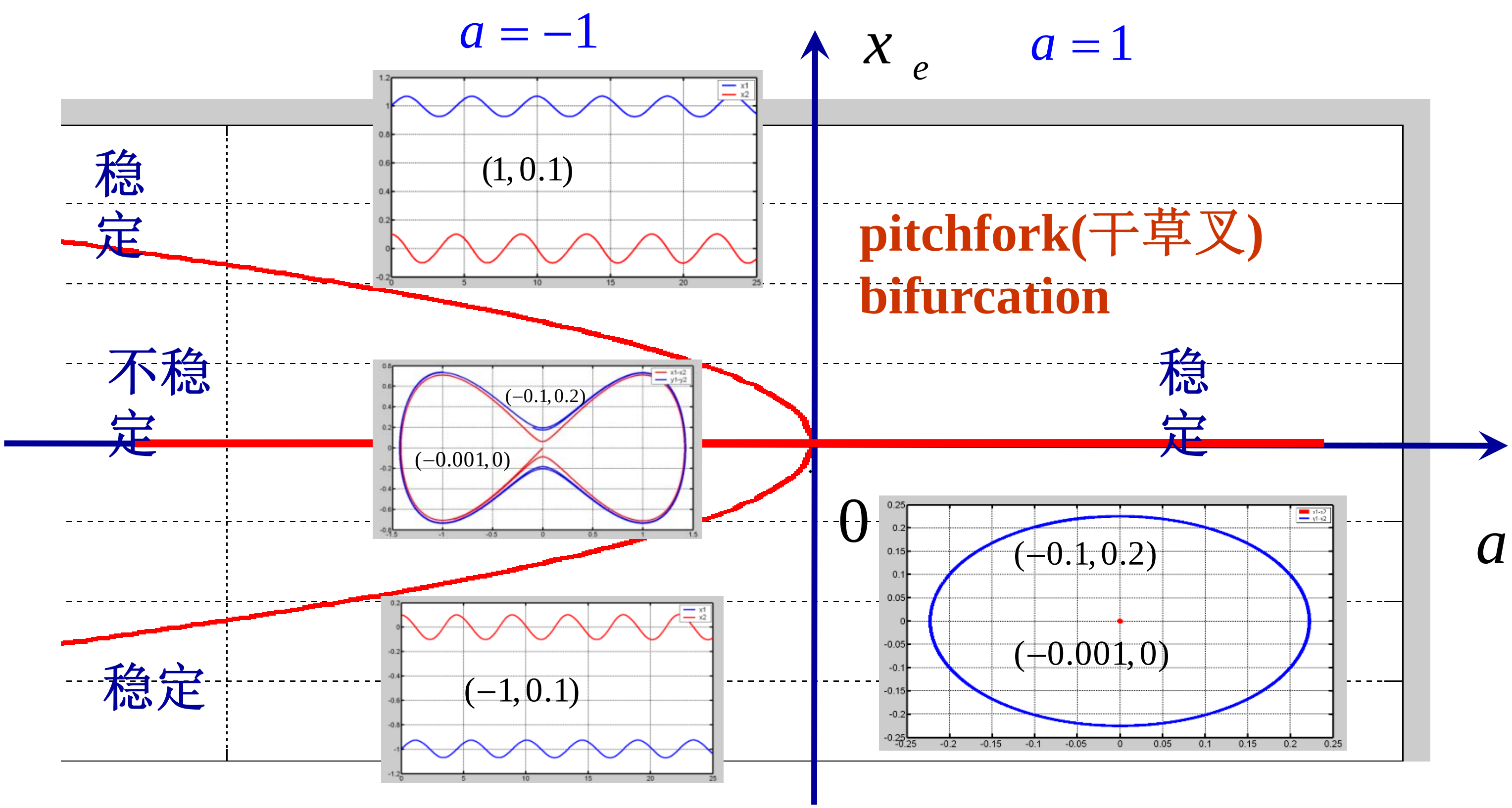
例：无阻尼 **Duffing Equation** $\ddot{x} = -ax - x^3$

***a*=0** 称为临界分歧值（**bifurcation values**）

系统线性部分为 $\ddot{x} = -ax$

其特征方程为：$s^2 + a = 0$

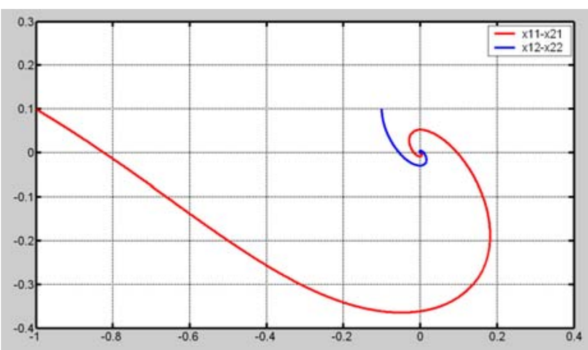
当 $a < 0$ 时，
零解为不稳定平衡点



分支（分歧、分岔）(Bifurcations)

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

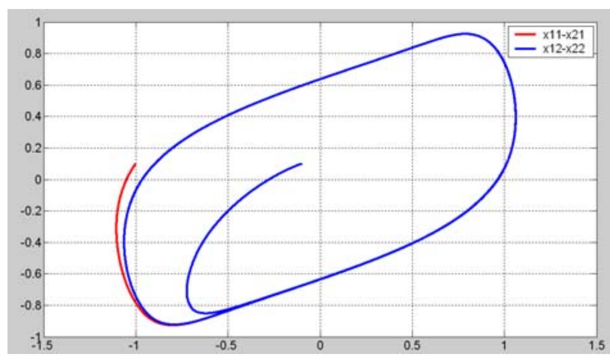
$\lambda = -1$



零解是稳定平衡点

$x_0 = (-0.1, 0.1)$; $(-1, 0.1)$

$\lambda = 1.5$



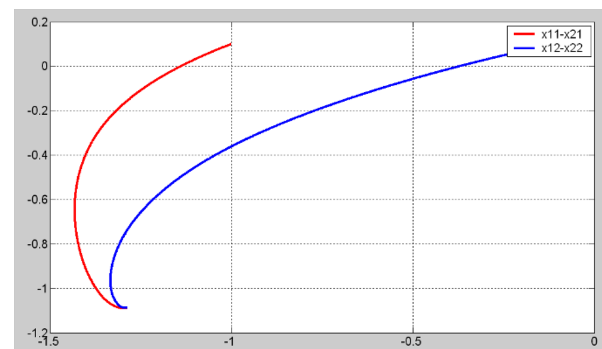
零解邻域内产生极限环

Hopf bifurcation:

从平衡点邻域内产生极限环

$x_0 = (-0.1, 0.1)$; $(-1, 0.1)$

$\lambda = 2.5$



收敛到非零平衡点

$x_0 = (-0.1, 0.1)$; $(-1, 0.1)$

分支（分岐、分岔）(Bifurcations)

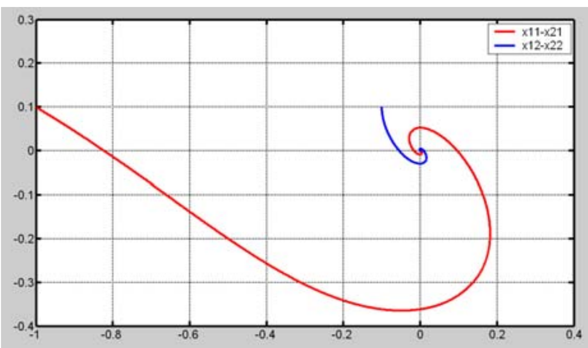
例： $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$ 系统线性部分为 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$

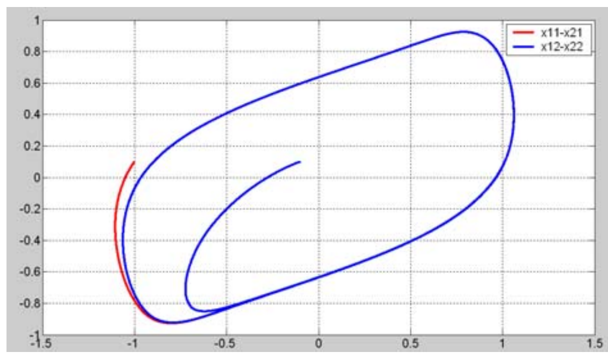
其特征方程为： $s^2 - \lambda s + 1 = 0$

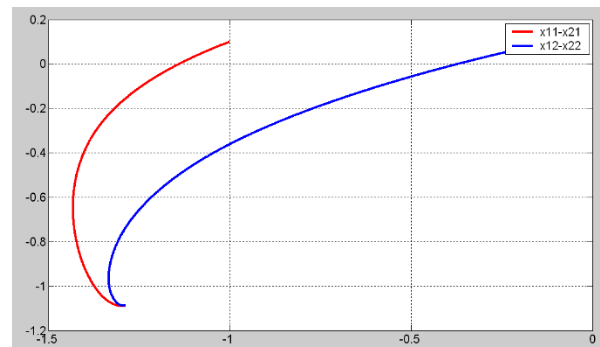
当 $\lambda < 0$ 时，
零解为稳定平衡点。

当 $\lambda > 0$ 时，
零解为不稳定平衡点。

$\lambda = -1$ 　 0 　 $\lambda = 1.5$ 　 $\lambda = 2.5$ 　 λ







零解是稳定平衡点

$x_0 = (-0.1, 0.1);\quad (-1, 0.1)$

零解邻域内产生极限环

Hopf bifurcation：

从平衡点邻域内产生极限环

$x_0 = (-0.1, 0.1);\quad (-1, 0.1)$

收敛到非零平衡点

$x_0 = (-0.1, 0.1);\quad (-1, 0.1)$

例. 刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Euler**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$: 为刚体转动角速度分量

J_1,J_2,J_3: 主轴的转动惯量，设 $J_2<J_1<J_3$.

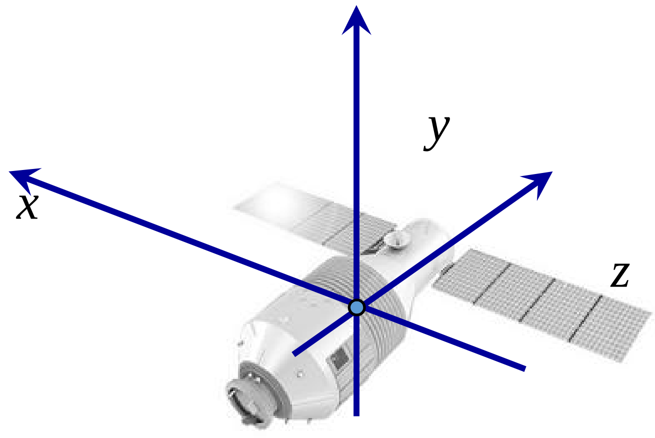
研究其关于惯量居中的主轴转动 $(\omega_1=\omega_{10}>0,\omega_2=0,\omega_3=0)$的稳定性。

解. 设扰动运动状态为：

$$y_1=\omega_1-\omega_{10},y_2=\omega_2,y_3=\omega_3$$

则扰动运动方程为：

$$J_1\dot{y}_1=(J_2-J_3)y_2y_3$$
$$J_2\dot{y}_2=(J_3-J_1)y_3(y_1+\omega_{10})$$
$$J_3\dot{y}_3=(J_1-J_2)y_2(y_1+\omega_{10})$$



解. 设扰动运动状态为：$y_1=\omega_1-\omega_{10}, y_2=\omega_2, y_3=\omega_3$

则扰动运动方程为：

$$
\begin{aligned}
J_1\dot{y}_1 &= (J_2-J_3)y_2y_3 \\
J_2\dot{y}_2 &= (J_3-J_1)y_3(y_1+\omega_{10}) \\
J_3\dot{y}_3 &= (J_1-J_2)y_2(y_1+\omega_{10})
\end{aligned}
$$

取 $V(y_1,y_2,y_3)=y_2y_3$

$$\psi=\left\{(y_1,y_2,y_3): y_2>0, y_3>0, y_1^2+y_2^2+y_3^2\le\varepsilon^2\right\}$$

则原点为 ψ 的边界点，且在 ψ 的其它边界点上，或者 $V(y_1,y_2,y_3)=0$，

或者 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=\varepsilon^2$. 因为

$$\dot{V}(y_1,y_2,y_3)_1=\dot{y}_2y_3+y_2\dot{y}_3=\frac{J_3-J_1}{J_2}y_3^2(y_1+\omega_{10})+\frac{J_1-J_2}{J_3}y_2^2(y_1+\omega_{10})$$

于是，当 $|y_1|<\omega_{10}$ 时，

$$\forall(y_1,y_2,y_3)\in\psi, V(y_1,y_2,y_3)>0, \dot{V}(y_1,y_2,y_3)>0,$$

所以，飞行器关于惯量居中的主轴转动是不稳定的。

解. 设扰动运动状态为：$y_1 = \omega_1 - \omega_{10}, y_2 = \omega_2, y_3 = \omega_3$

则扰动运动方程为：

$$J_1\dot{y}_1 = (J_2 - J_3)y_2y_3$$
$$J_2\dot{y}_2 = (J_3 - J_1)y_3(y_1 + \omega_{10})$$
$$J_3\dot{y}_3 = (J_1 - J_2)y_2(y_1 + \omega_{10})$$

其线性部分为：

$$J_1\dot{y}_1 = 0$$
$$J_2\dot{y}_2 = (J_3 - J_1)\omega_{10}y_3$$
$$J_3\dot{y}_3 = (J_1 - J_2)\omega_{10}y_2$$

其特征方程为：$s^3 - \dfrac{J_3 - J_1}{J_2}\dfrac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_{10}^2 s = 0$

当 $J_3 > J_1 > J_2$ 时，线性部分具有不稳定特征根，

所以，飞行器关于惯量居中的主轴转动是不稳定的。

但当 $J_3 \geq J_1 > J_2$或 $J_3 > J_1 \geq J_2$ 时，则无法根据线性近似系统的稳定性确定原系统的稳定性

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

对于非线性系统**(3.1)**，考虑 $f(t,x)$对***x***的**Jacobi**矩阵

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = A(t)$$

线性定常系统的许多好性质在线性时变系统中并不成立，如：

仅由系数矩阵“特征值”的符号无法确定零解的稳定性。

例. 考察系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = (-1 + a\cos^2 t)x_1 + (1 - a\sin t\cos t)x_2 \\ \dot{x}_2 = (-1 - a\sin t\cos t)x_1 + (-1 + a\sin^2 t)x_2 \end{cases}$

零解的稳定性。

Lyapunov一次近似定理

解： 系统通解为 $x(t)=\Phi(t)x(0)$，　$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{(a-1)t}\sin t & e^{-t}\cos t \end{bmatrix}$

由解可知，当 $a>1$ 时，系统零解不稳定，

当 $a=1$时，系统零解稳定，

当 $a<1$时，系统零解渐近稳定。

如果形式上计算系统系数矩阵的特征值，其特征方程为：

$$\lambda^2+(2-a)\lambda+2-a=0$$

特征方程与t无关，且当$1<a<2$时，特征根有负实部，但此时系统零解是不稳定的。

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (3.1)''$$

线性时变系统 $\dot{x} = A(t)x$ 的稳定性分析难度大很多

很多结果或依赖于状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$的性质，

或矩阵微分方程 $-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t)$

（若存在连续可微、对称、有界、正定矩阵 $P(t)\ (0 < c_1 I \le P(t) \le c_2 I, \forall t \ge 0)$
及连续、对称、正定矩阵 $Q(t)\ (Q(t) \ge c_3 I > 0, \forall t \ge 0)$ 满足上述方程，
线性时变系统 $\dot{x} = A(t)x$ 零解全局指数稳定）

但求解状态转移矩阵或解上述矩阵微分方程本身就是很困难的。
用一件困难的事情替代另一件困难的事情，困难并没有解决！

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad (3.1)'$$

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

定理3.9

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i) < 0$ **)**

则非线性系统**(3.1)**的零解也是指数稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**至少有一个A的特征值在右半开平面，则非线性系统**(3.1)**的零解是不稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是临界稳定的（即 $Re(\lambda_i) \le 0,$

且若$Re(\lambda_i) = 0$, 则$m_i = 1$)，那么由线性化系统**(3.3)**

得不到原非线性系统**(3.1)**零解稳定性的任何信息。

小结

1. 全局一致渐近稳定性定理

径向无界（**radially unbounded**）正定函数

2. 指数稳定性定理(全局指数稳定性定理）

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\begin{cases} k_1\|x\|^\alpha \le V(t,x)\le k_2\|x\|^\alpha \\ \dot V(t,x)\big|_{\dot x=f(t,x)}\le -k_3\|x\|^\alpha \end{cases}$$

具有同级增势

3. 一次近似定理

如果线性近似系统 $Re(\lambda_i)<0$ ，

或至少有一个A的特征值在右半开平面，

则非线性系统具有和其线性近似部分同样的稳定性. （局部）

第6次作业

1. 单摆（single pendulum）系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad\qquad a > 0, b \geq 0$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2$$

有两个平衡点：$\left(x_1 = 0, x_2 = 0\right), \left(x_1 = \pi, x_2 = 0\right).$

试用线性化方法研究这两个平衡点的稳定性。

回顾:

$$\dot{y}(t)=F(t,y(t)),\quad F(t,0)\equiv 0 \tag{2}$$

Stable: $\forall\varepsilon>0,\ \forall t_0,\ \exists\delta(\varepsilon,t_0)\ \ s.t.\ \ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \left|y(t,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$

Attractive: $\forall t_0,\ \exists\delta(t_0),\ \ s.t.\ \ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists T\left(t_0,\varepsilon,y_0\right),\ \forall t>t_0+T,\ \left|y(t_0+T,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$

Uniformly stable: $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)\ \ s.t.\ \ \forall t_0,\ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall t\in[t_0,\infty),\ \left|y(t,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$

Uniformly attractive: $\exists\delta\ \ s.t.\ \ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists T\left(\varepsilon\right),\ \forall t_0,\ \forall t>t_0+T,\ \left|y(t,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$

Exponentially stable: $\exists\left(c,\lambda,k\right),\ \forall t_0,\ \forall\left\|y_0\right\|<c,\ \forall t\ge t_0,\ \left\|y(t,y_0,t_0)\right\|<k\left\|y_0\right\|e^{-\lambda(t-t_0)}.$

Globally attractive:

$$\forall t_0,\ \forall\delta,\ \ s.t.\ \ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists T\left(t_0,\varepsilon,y_0\right),\ \forall t>t_0+T,\ \left|y(t_0+T,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

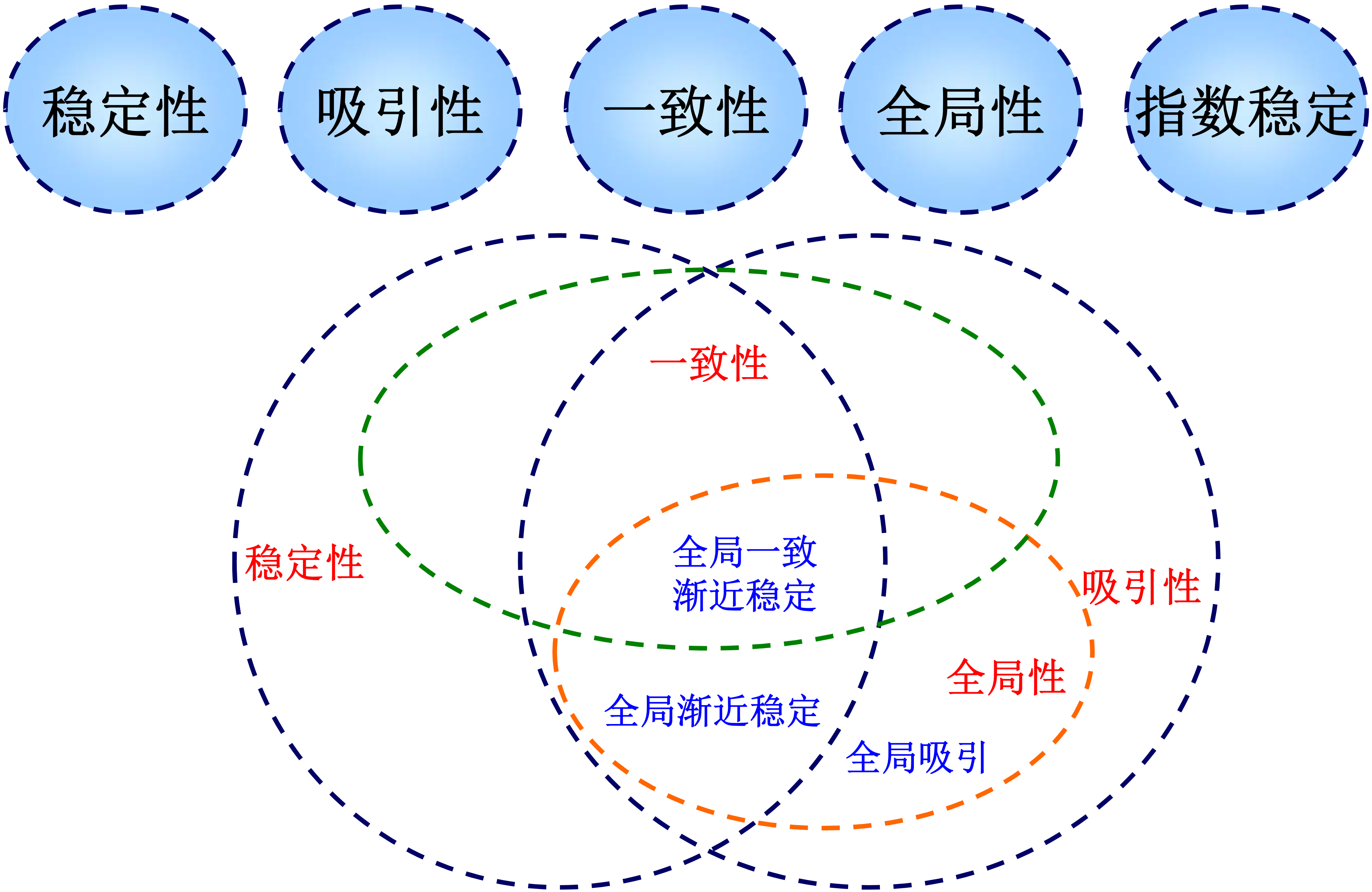
Globally uniformly attractive:

$$\forall t_0,\ \forall\delta,\ \ s.t.\ \ \forall\left|y(t_0)\right|<\delta,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists T\left(\varepsilon,\delta\right),\ \forall t>t_0+T,\ \left|y(t_0+T,t_0,y_0)\right|<\varepsilon.$$

Globally exponentially stable:

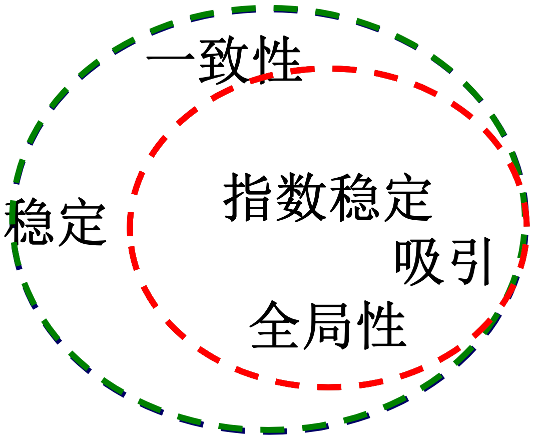
$$\exists\left(\lambda,k\right),\ \forall t_0,\ \forall\left\|y_0\right\|,\ \forall t\ge t_0,\ \left\|y(t,y_0,t_0)\right\|<k\left\|y_0\right\|e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

回顾



回顾

- 线性时不变系统的良好性质



- 非线性系统行为的丰富多彩
  - 多平衡点
  - 极限环 **(limit cycles)**
  - 分支（分歧、分岔）**(Bifurcations)**
  - 混沌**(Chaos)**

回顾：正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.1 连续可微函数 $W(x): U \to R$**是**

- **正定(positive definite)**，若

$$\forall x \ne 0: W(x) > 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **半正定(positive semidefinite)**，若

$$\forall x \ne 0: W(x) \ge 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **负定(negative definite)**，若

$$\forall x \ne 0: W(x) < 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **半负定(negative semidefinite)**，若

$$\forall x \ne 0: W(x) \le 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **变号或不定(indefinite)**，若其可正可负。

回顾：正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.2 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times U \to R$ 是

- 正定(**positive definite**)，若 存在正定函数 $W(x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\ge W(x),\ 且V(t,0)=0$$

- 半正定(**positive semidefinite**)，若

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\ge 0,\ 且V(t,0)=0$$

- 负定(**negative definite**)，若存在正定函数 $W(x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\le -W(x),\ 且V(t,0)=0$$

- 半负定(**negative semidefinite**)，若

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\le 0,\ 且V(t,0)=0$$

回顾：K类函数和正定函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \,|\, \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.3 连续函数 $\varphi(r): R^+ \to R^+ (R^+ = \{r \,|\, r \ge 0\})$是***k*类函数** **(function of class K)**，若 $\varphi(r)$ 严格单调递增，且 $\varphi(0) = 0$，记为 $\varphi(r) \in K$.

引理3.1 $W(x)$是 B_h 上的正定函数当且仅当存在 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le W(x) \le \varphi_2(\|x\|), \quad \forall x \in B_h$$

回顾：Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

对定常系统： $$\dot{x} = f(x),\ f(0)=0 \qquad (3.1')$$

定理3.1' 若在$[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov(一致)**稳定的。

回顾：Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统(3.1)零解是一致稳定的。

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

回顾：Lyapunov稳定性理论

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1')$

定理3.3” 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定 $V(x)$, 使得对于**(3.1’)**满足：

$$\forall (t, x) \in [t_0, +\infty) \times (U / \{0\}) : \dot{V}(x)\big|_{\dot{x}=f(x)} \triangleq \frac{dV(x)}{dt} < 0$$

则系统**(3.1’)**零解是一致渐近稳定的。

定理(N.N.Krasovski[1959]). 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定函数 $V(x)$,

$$\dot{V}(x)\big|_{\dot{x}=f(x)} \le 0.$$

且 $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ 除原点外，不再包含系统（**3.1’**）的其它轨线，则系统**(3.1’)**零解是（一致）渐近稳定的。

不稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.4 (N.G.Chetaev,1934) 若存在 $0<\varepsilon<h$, 在 $[t_0,+\infty)\times B_\varepsilon$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$, 及集合 $\psi\subset B_\varepsilon$, 并有如下性质:

(1)原点是 ψ 的一个边界点，且其余边界点在 B_ε 球面上或球内。在 ψ 位于 B_ε 球内的所有边界点上有 $V(t,x)=0,\ \forall t\in[t_0,+\infty)$,

(2) $\exists c>0$ 使得 $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ 0<V(t,x)\le c$;

(3) $\exists\varphi(r)\in K$ 使得 $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)}\ge\varphi(V(t,x))$.

则系统**(3.1)**零解是不稳定的。

推论3.2 (Lyapunov第一不稳定性定理) 上述定理的**(2)**和**(3)**可改为

(2) $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ V(t,x)>0$且具有无穷小上界

(3) $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ \dot{V}(t,x)>0$正定

李雅普诺夫函数构造方法

- **Krasovskii**方法
- 待定梯度法
- 由物理概念产生的方法

全局一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \text{为负定函数}$$

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

定理3.6 若在 $[t_0,+\infty)\times R^n$ 上存在正定且具有无穷小上界和无穷大下界的的函数 $V(t,x)$ 使得

$$\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times R^n : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \text{为负定函数}$$

则系统(3.1)零解是全局一致渐近稳定的。

定理3.5的证明：只需要说明在定理3.5的条件下原点的吸引域为 R^n

指数稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.7 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$,
和正常数 k_1,k_2,k_3,α, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\begin{cases} k_1\|x\|^\alpha \le V(t,x)\le k_2\|x\|^\alpha \\ \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -k_3\|x\|^\alpha \end{cases}$$

则系统(3.1)零解是指数稳定的。

若上述性质可扩展到 $U = R^n$,
则系统(3.1)零解是全局指数稳定的。

指数稳定性定理

对于线性时不变系统： $\dot{x} = Ax,$ (3.3)

当$Re(\lambda_i) < 0$，即其特征根均具有负实部，则矩阵***A*** 称为**Hurwitz**矩阵。

定理3.8 ***A***称为**Hurwitz**矩阵当且仅当对任给的正定对称矩阵***Q***, 存在满足方程

$$PA + A^T P = -Q \tag{3.4}$$

的正定对称矩阵***P***，且***P***是方程**(3.4)**的唯一解。

定理3.7证明：

Lyapunov一次近似定理

$$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1)$$

$$\dot{x} = Ax, \qquad (3.3)$$

定理3.9

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是指数稳定的（即 $Re(\lambda_i) < 0$ **)**
则非线性系统**(3.1)**的零解也是指数稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**至少有一个A的特征值在右半开平面，则非线性系统**(3.1)**的零解是不稳定的。

◆如果线性化系统**(3.3)**零解是临界稳定的（即 $Re(\lambda_i) \le 0,$
且若$Re(\lambda_i) = 0,$ 则$m_i = 1),$ 那么由线性化系统**(3.3)**
得不到原非线性系统**(3.1)**零解稳定性的任何信息。

课程时间安排

第1次	2017.11.20	稳定性理论发展简史
第2次	2017.11.20	稳定性，一致稳定性和吸引性
第3次	2017.12.04	指数稳定性和全局稳定性
第4次	2017.12.11	Lyapunov稳定性理论-1
第5次	2017.12.18	Lyapunov稳定性理论-2
第6次	2017.12.25	Lyapunov稳定性理论-3
考试成绩：平时作业成绩 + 闭卷考试成绩		

谢谢！