系统稳定性理论：第五讲

李雅普诺夫稳定性定理（二）

讲课人：薛文超

中国科学院大学人工智能学院

中国科学院数学与系统科学研究院

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法

回顾：正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.1 连续可微函数 $W(x): U \to R$**是**

- **正定(positive definite)，若**

$$\forall x \neq 0: W(x) > 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **半正定(positive semidefinite)，若**

$$\forall x \neq 0: W(x) \geq 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **负定(negative definite)，若**

$$\forall x \neq 0: W(x) < 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **半负定(negative semidefinite)，若**

$$\forall x \neq 0: W(x) \leq 0, \text{且} W(0) = 0$$

- **变号或不定(indefinite)，若其可正可负。**

回顾：正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.2 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times U \to R$ 是

- 正定(positive definite)，若 存在正定函数 $W(x)$，使得

  $$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U: \quad V(t,x) \ge W(x), \text{且} V(t,0)=0$$

- 半正定(positive semidefinite)，若

  $$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U: \quad V(t,x) \ge 0, \text{且} V(t,0)=0$$

- 负定(negative definite)，若存在正定函数 $W(x)$，使得

  $$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U: \quad V(t,x) \le -W(x), \text{且} V(t,0)=0$$

- 半负定(negative semidefinite)，若

  $$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U: \quad V(t,x) \le 0, \text{且} V(t,0)=0$$

回顾：K类函数和正定函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.3 连续函数 $\varphi(r): R^+ \to R^+ (R^+ = \{r \mid r \ge 0\})$是***k*类函数**

(function of class K)，若 $\varphi(r)$ 严格单调递增，且 $\varphi(0) = 0$,

记为 $\varphi(r) \in K$.

引理3.1 $W(x)$是B_h 上的正定函数当且仅当存在 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le W(x) \le \varphi_2(\|x\|), \quad \forall x \in B_h$$

回顾：Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统(3.1)零解是Lyapunov稳定的。

对定常系统： $$\dot{x} = f(x),\ f(0)=0 \qquad (3.1')$$

定理3.1' 若在$[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统(3.1)零解是Lyapunov(一致)稳定的。

具有无穷小上界的函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.2' 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times U \to R$具有无穷小上界 **(admits an infinitely small upper limit)**，若存在正定函数 $W(x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U: \quad |V(t,x)| \le W_1(x).$$

定义3.2'' 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times R_h \to R$具有无穷小上界 **(admits an infinitely small upper limit)**当且仅当存在 $\varphi_1(r)\in K$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times R_h, \quad |V(t,x)| \le \varphi_1(\|x\|).$$

推论3.1 $V(t,x)$是 $R\times B_h$ 上正定函数当且仅当 $V(t,0)=0$，以及存在 $\varphi_1(r)\in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le V(t,x), \quad \forall x \in B_h.$$

具有无穷小上界与正定性为相互独立的定义

具有无穷小上界的函数

例：

1. $V(t,x)=(t+1)x^T x$ 为正定函数,但不具有无穷小上界。

2. $V(t,x_1,x_2)=x_1^2+e^t x_2^2$ 为正定函数,但不具有无穷小上界。

3. $V(t,x_1,x_2)=(1+e^{-t})(x_1^2+x_2^2)$ 具有无穷小上界的正定函数

4. $V(t,x_1,x_2)=x_1^2+\dfrac{x_2^2}{2+\sin t}$ 具有无穷小上界的正定函数

5. $V(t,x_1,x_2)=-x_1^2+\dfrac{x_2^2}{2+\sin t}$ 具有无穷小上界的变号函数

一致稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定理3.2 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数$V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

定理3.2证明:

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \| \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数$V(t,x)$,
使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

定理3.2证明: 由于$V(t,x)$ 是具有无穷小上界的正定函数，由引理**3.1**知，
$\exists \varphi_1(r),\varphi_2(r)\in K$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U, \quad \varphi_1(\|x\|)\le V(t,x)\le \varphi_2(\|x\|).$$

$$\forall \varepsilon>0(\varepsilon<h), \exists \delta=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)), s.t.\ \forall \|x_0\|<\delta,\quad \varphi_2(\|x_0\|)<\varphi_2(\delta)=\varphi_2(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)))=\varphi_1(\varepsilon)$$

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数$V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

定理3.2证明： 由于$V(t,x)$是具有无穷小上界的正定函数，由引理**3.1**知，$\exists \varphi_1(r),\varphi_2(r)\in K$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U,\quad \varphi_1(\|x\|)\le V(t,x)\le \varphi_2(\|x\|).$$

$$\forall \varepsilon>0(\varepsilon<h),\exists \delta=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)), s.t.\ \forall \|x_0\|<\delta,\quad \varphi_2(\|x_0\|)<\varphi_2(\delta)=\varphi_2(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)))=\varphi_1(\varepsilon)$$

由性质**(3.2)**知，$\forall t\ge t_0$,有

$$\varphi_1(\|x(t,t_0,x_0)\|)\le V(t,x(t,t_0,x_0))\le V(t_0,x_0)\le \varphi_2(\|x_0\|)<\varphi_1(\varepsilon).$$

因为 $\varphi_1(\|x\|)\in K$，严格单调递增，所以：

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon.$$

因为$\delta=\delta(\varepsilon)$,与$t_0$无关，因此，零解是一致稳定的。

一致稳定性定理

考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+(2+\sin t)x=0, t_0\geq 0$ 零解的一致稳定性

解： 将它写为状态方程形式：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p(t)x_2-(2+\sin t)x_1\end{cases}$

取 $V(t,x)=x_1^2+\dfrac{x_2^2}{2+\sin t}$.

因为$x_1^2+\dfrac{x_2^2}{3}\leq V(t,x)\leq x_1^2+x_2^2$， $V(t,x)$为正定且具有无穷小上界。 又因为

$$\dot{V}(t,x)=2x_1\dot{x}_1+\frac{2x_2\dot{x}_2}{2+\sin t}-\frac{\cos t}{(2+\sin t)^2}x_2^2$$

$$=2x_1x_2+\frac{2x_2(-p(t)x_2-(2+\sin t)x_1)}{2+\sin t}-\frac{\cos t}{(2+\sin t)^2}x_2^2$$

$$=-\frac{2p(t)(2+\sin t)+\cos t}{(2+\sin t)^2}x_2^2$$

所以，当$p(t)\geq\dfrac{1}{2}$时，$\dot{V}(t,x)\leq 0$，系统原点一致稳定。

$p(t)\geq\dfrac{1}{2}$ 为系统原点一致稳定的充分条件。

一致稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

定理**3.2**的逆定理，即**Lyapunov**函数的存在性成立。

*稳定性的数学理论及应用，廖晓昕，华中师范大学出版社，**1988.***

本节课内容

1. 正定函数的定义

2. Lyapunov稳定性定理

3. 一致稳定性定理

4. 一致渐近稳定性定理

5. 不稳定定理

6. 常见李雅普诺夫函数构造方法

一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.2 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

定理**3.3**证明：

定理3.3证明：

因为定理3.3蕴含定理3.2的条件，所以系统零解是一致稳定的。现只需证明它是一致吸引的。

Uniformly attractive: $\exists\delta \;\; s.t. \;\; \forall|x_0|<\delta, \; \forall\varepsilon>0, \; \exists T(\varepsilon), \; \forall t_0, \; \forall t>t_0+T, \; |x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon.$

定理3.3证明：

因为定理3.3蕴含定理3.2的条件，所以系统零解是一致稳定的。现只需证明它是一致吸引的。

由定理条件知，$\exists \varphi_1(r), \varphi_2(r), \varphi_3(r) \in K$， 使得

$$\forall (t, x) \in [t_0, +\infty) \times U, \quad \varphi_1(\|x\|) \le V(t, x) \le \varphi_2(\|x\|), \quad \dot{V}(t, x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -\varphi_3(\|x\|).$$

于是 $\|x\| \ge \varphi_2^{-1}(V(t, x))$， 则

$$\dot{V}(t, x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le -\varphi_3(\|x\|) \le -\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x))).$$

因为 $\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x))) > 0$， 进而有 $\dfrac{\dot{V}(t, x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)}}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x)))} \le -1.$

当 $\|x\| \ne 0$ 时， 将上式两边积分得

$$\int_{V(t_0, x_0)}^{V(t, x(t, t_0, x_0))} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x)))} = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{V}(t, x)\, dt}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x)))} \le -(t - t_0),$$

亦即

$$\int_{V(t, x(t, t_0, x_0))}^{V(t_0, x_0)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t, x)))} \ge t - t_0.$$

定理3.3证明(续):

$\forall\|x_0\|<h, \forall\varepsilon>0(\varepsilon<h),$ 利用

$$\varphi_1(\|x\|)\le V(t,x),\quad V(t_0,x_0)\le\varphi_2(\|x_0\|)\le\varphi_2(h),\quad \varphi_1(\varepsilon)<\varphi_2(h)$$

便有 $$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_2(h)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\ge\int_{V(t,x(t,t_0,x_0))}^{V(t_0,x_0)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\ge t-t_0.$$

以及 $$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}+\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\ge t-t_0.$$

取 $T=\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}$, 因为当 $\varphi_1(\varepsilon)\le V\le\varphi_2(h)$时, $\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))>0$

所以，$\boldsymbol{T}$是个有限正数。且当 $t>T+t_0$时, $\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\ge t-t_0-T>0,$

这就推出 $\varphi_1(\varepsilon)>\varphi_1(\|x(t,t_0,x_0)\|),\quad t>T+t_0.$

定理3.3证明(续):

$\forall \|x_0\| < h, \forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < h),$ 利用

$$\varphi_1(\|x\|) \le V(t,x), \quad V(t_0,x_0) \le \varphi_2(\|x_0\|) \le \varphi_2(h), \quad \varphi_1(\varepsilon) < \varphi_2(h)$$

便有 $$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \ge \int_{V(t,x(t,t_0,x_0))}^{V(t_0,x_0)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \ge t - t_0.$$

以及 $$\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} + \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \ge t - t_0.$$

取 $T = \int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}$, 因为当 $\varphi_1(\varepsilon) \le V \le \varphi_2(h)$时, $\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x))) > 0$

所以，***T***是个有限正数。且当 $t > T + t_0$时, $\int_{\varphi_1(\|x(t)\|)}^{\varphi_1(\varepsilon)} \frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))} \ge t - t_0 - T > 0,$

这就推出 $\varphi_1(\varepsilon) > \varphi_1(\|x(t,t_0,x_0)\|), \quad t > T + t_0.$

因为 $\varphi_1(\|x\|) \in K$, 严格单调递增，所以: $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon, t > T + t_0.$

因为$T = T(\varepsilon, h)$, 与 t_0, x_0 无关，所以零解是一致吸引的。

综上，系统零解是一致渐近稳定的。

一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U,\quad \varphi_1(\|x\|)\le V(t,x)\le\varphi_2(\|x\|),\quad \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)}\le-\varphi_3(\|x\|).$$

注：$$\frac{\varphi_2(h)-\varphi_1(\varepsilon)}{\varphi_3(h)}\le T\triangleq\int_{\varphi_1(\varepsilon)}^{\varphi_2(h)}\frac{dV}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))}\le\frac{\varphi_2(h)-\varphi_1(\varepsilon)}{\varphi_3(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(\varepsilon)))}$$

--------衰减时间或吸引时间

反映了一切初值发生在 $\forall\|x_0\|<h$ 内的运动，

经过时间 $T=T(\varepsilon,h)$，永远停留在 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$ 内.

当然这是一保守性估计。

一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

定理3.3的结论改为零解渐近稳定，即为1892年Lyapunov渐近稳定定理。

当时还不了解渐近稳定与一致渐近稳定的区别。

讨论1

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

定理3.2 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是一致稳定的。

对比定理3.1与定理3.2，V函数的无穷小上界主要保证一致性。

讨论1

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

猜想1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定~~且具有无穷小上界~~的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统**(3.1)**零解是~~一致~~渐近稳定的。

于是人们猜想在不要求一致性时，取消无穷小上界而得到渐近稳定的结论。

这个想法被 **J.L.Massera** 的著名反例所否定。

J. L. Massera反例，1949. 考察系统 $\dot{x}=\dfrac{\dot{g}(t)}{g(t)}x$ 的稳定性

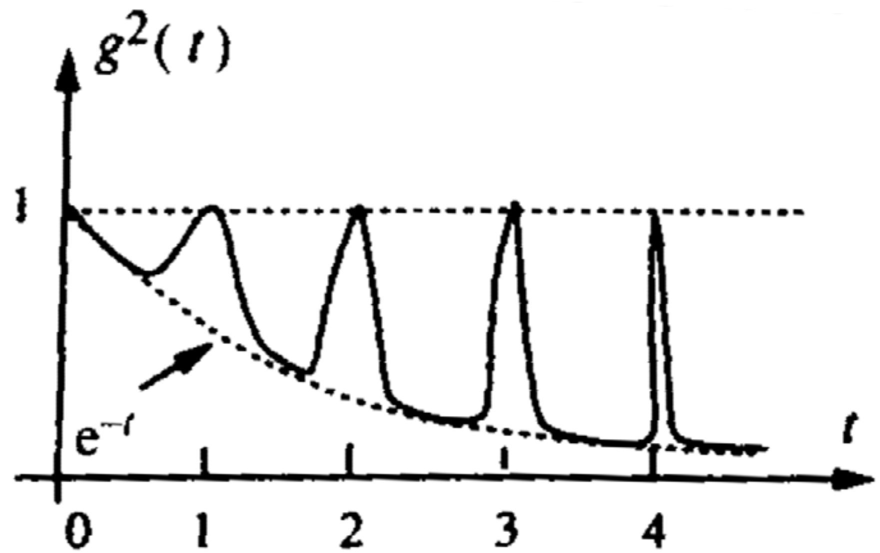
其中函数 $g(t):[0,\infty)\to R$ 具有如下性质：

（1） $g(t)$连续可微；

(2) $g(i)=1, i=1,2,.....$;

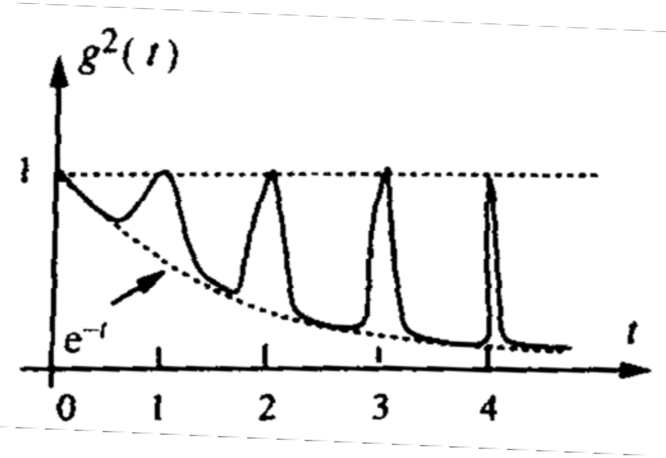
(3) 取区间$I_i=\left[i-(1/2)^{i+1}, i+(1/2)^{i+1}\right], \forall t\in I_i, e^{-t}\le g(t)\le 1$;

(4) $t\notin I_i, g^2(t)=e^{-t}$.



分析：此系统的通解为：$x(t)=\dfrac{x_0}{g(t_0)}g(t)$ 显然不是渐近稳定的。

但若取 $V(t,x)=\dfrac{x^2}{g^2(t)}\left[3-\int_0^t g^2(s)ds\right]$



因为 $\int_0^t g^2(s)ds<\int_0^\infty g^2(s)ds<\int_0^\infty e^{-s}ds+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=2$

所以 $V(t,x)=\dfrac{x^2}{g^2(t)}\left[3-\int_0^t g^2(s)ds\right]\geq\dfrac{x^2}{g^2(t)}\geq x^2.$

即 $V(t,x)$ 为正定函数，但不具有无穷小上界。而

$$\dot V(t,x)=\left(\frac{2x\dot x}{g^2(t)}-\frac{2x^2g(t)\dot g(t)}{g^4(t)}\right)\left[3-\int_0^t g^2(s)ds\right]-\frac{x^2}{g^2(t)}g^2(t)$$
$$=-x^2$$

$V(t,x)$为正定函数，$\dot V(t,x)$ 为负定函数，满足猜想条件，但系统零解不渐近稳定。

讨论1

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数,

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

对于渐近稳定而言，定理**3.3**的条件是充分的，但又不能简单地去掉具有无穷小上界的条件。

讨论2

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

对于渐近稳定而言，定理3.3的条件是充分的，但又不能简单地去掉具有无穷小上界的条件。

定理3.1：稳定

定理3.2：一致稳定

定理3.3：一致渐近稳定

对于渐近稳定而非一致渐近稳定的系统，利用构造**Lyapunov**函数的方法较困难。

讨论2

例： (渐近稳定但不存在具有无穷小上界且导数负定的正定函数).

考察系统 $\dot{x} = -\dfrac{x}{t+1}$ 的稳定性.

已经证明过：此系统通解为：$x(t,t_0,x_0) = \dfrac{1+t_0}{1+t} x_0,$

零解是渐近稳定而非一致渐近稳定

下面用反证法证明此系统不存在具有无穷小上界且导数负定的正定函数

设存在 $V(t,x),\varphi_1(\|x\|),\varphi_2(\|x\|),\varphi_3(\|x\|)$，有

$$\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times U,\quad \varphi_1(\|x\|)\le V(t,x)\le\varphi_2(\|x\|),\quad \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)}\le-\varphi_3(\|x\|).$$

取 $\|x_0\|=\delta,t_1=2t_0+1$，则

$$\forall t\in[t_0,t_1],\ \|x(t,t_0,x_0)\|=\left\|\frac{1+t_0}{1+t}x_0\right\|\ge\left\|\frac{x_0}{2}\right\|>\frac{\delta}{2}>0.$$

根据 $V(t,x)$ 的性质

$$\begin{cases}0<\varphi_1(\|x(t_1,t_0,x_0)\|)\le V(t_1,x(t_1,t_0,x_0))=V(t_0,x_0)+\int_{t_0}^{t_1}\frac{dV}{dt}dt\le V(t_0,x_0)-\int_{t_0}^{t_1}\varphi_3(\|x(t,t_0,x_0)\|)dt\\ V(t_0,x_0)-\int_{t_0}^{t_1}\varphi_3(\|x(t,t_0,x_0)\|)dt\le V(t_0,x_0)-\varphi_3\left(\frac{\delta}{2}\right)(t_1-t_0)=V(t_0,x_0)-\varphi_3\left(\frac{\delta}{2}\right)(t_0+1)\end{cases}$$

则当，$t_0\to\infty$时，$V(t_0,x_0)\to\infty$. 与 $V(t_0,x_0)\le\varphi_2(\|x\|)$矛盾。

讨论2

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数，

则系统(3.1)零解是一致渐近稳定的。

对于渐近稳定而言，定理3.3的条件是充分的，但又不能简单地去掉具有无穷小上界的条件。

关于渐近稳定方面的定理可参见:

■稳定性与鲁棒性的理论基础，黄琳，科学出版社，2003

■稳定性的理论、方法和应用，廖晓昕，华中科技大学出版社，2010.

例. 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+k_0 x=0, t_0\geq 0$ 的一致渐近稳定性

（$0<\alpha_1\leq p(t)\leq\alpha_2$是时变阻尼系数， $k_0>0$是弹性常数, $\dot{p}(t)\leq\beta<2k_0$）

例. 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+e^{-t}x=0, t_0\geq 0$ 的稳定性

取$V(t,x)=x_1^2+e^t x_2^2$.

例. 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+(2+\sin t)x=0, t_0\geq 0$ 的一致稳定性

取 $V(t,x)=x_1^2+\dfrac{x_2^2}{2+\sin t}$.

取 $V(t,x)=x_1^2+\dfrac{x_2^2}{k_0}$，正定并具有无穷小上界，而

$$\dot{V}(t,x)=2x_1\dot{x}_1+\frac{2x_2\dot{x}_2}{k_0}=2x_1x_2+\frac{2x_2(-p(t)x_2-k_0x_1)}{k_0}=-\frac{2p(t)}{k_0}x_2^2\leq 0$$

只能证明稳定性.

例. 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+k_0x=0, t_0\geq 0$ 的一致渐近稳定性

（$0<\alpha_1\leq p(t)\leq\alpha_2$是时变阻尼系数， $k_0>0$是弹性常数, $\dot{p}(t)\leq\beta<2k_0$)

解： 将系统写为状态方程形式： $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p(t)x_2-k_0x_1\end{cases}$

取 $V(t,x)=\dfrac{\left(c_1x_1+x_2\right)^2}{2}+\dfrac{c(t)x_1^2}{2}$， $0<c_1<\alpha_1, c(t)=k_0+c_1(p(t)-c_1)$

因为$k_0\leq c(t)\leq k_0+c_1(\alpha_2-c_1)$，$V(t,x)$为正定且具有无穷小上界。 又因为

$$\dot{V}(t,x)=(c_1x_1+x_2)(c_1\dot{x}_1+\dot{x}_2)+c(t)x_1\dot{x}_1+\frac{\dot{c}(t)}{2}x_1^2$$

$$=(c_1x_1+x_2)(c_1x_2-p(t)x_2-k_0x_1)+c(t)x_1x_2+\frac{c_1\dot{p}(t)}{2}x_1^2$$

$$=c_1(c_1-p(t))x_1x_2-c_1k_0x_1^2+(c_1-p(t))x_2^2-k_0x_1x_2+c(t)x_1x_2+\frac{c_1\dot{p}(t)}{2}x_1^2$$

$$=-\frac{c_1}{2}(2k_0-\dot{p}(t))x_1^2-(p(t)-c_1)x_2^2$$

$$\leq-\frac{c_1}{2}(2k_0-\beta)x_1^2-(\alpha_1-c_1)x_2^2$$

为负定函数，故系统零解一致渐近稳定。

例. 考察系统 $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + k_0 x = 0, t_0 \geq 0$ 的一致渐近稳定性

（$0 < \alpha_1 \leq p(t) \leq \alpha_2$是时变阻尼系数， $k_0 > 0$是弹性常数, $\dot{p}(t) \leq \beta < 2k_0$)

取 $V(t,x) = x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{k_0}$, 只能证明稳定性.

取 $V(t,x) = \dfrac{\left(c_1 x_1 + x_2\right)^2}{2} + \dfrac{c(t)x_2^2}{2}$, $\quad 0 < c_1 < \alpha_1, c(t) = k_0 + c_1(p(t) - c_1)$

能证明一致渐近稳定性.

分析结果依赖于所采用的V函数，

所得条件往往都是充分的。

一致渐近稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.3 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定且具有无穷小上界的函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt}$$ 为负定函数,

则系统**(3.1)**零解是一致渐近稳定的。

例. 在惯性系内一不受外力作用的刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Eular**方程描述：

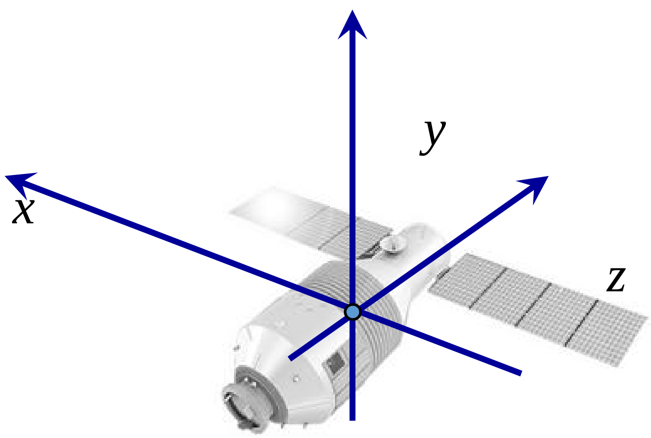
$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$:为刚体转动角速度的投影

J_1,J_2,J_3:惯性主轴的转动惯量

u_1,u_2,u_3: 控制力矩输入

证明当控制输入力矩为 $u_i=-k_i\omega_i,\ k_i>0$ 时，$\bar{\omega}=(0,0,0)$为一致渐近稳定。



例. 在惯性系内一不受外力作用的刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Eular**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$:为刚体转动角速度的投影

J_1,J_2,J_3:惯性主轴的转动惯量

u_1,u_2,u_3: 控制力矩输入

证明当控制输入力矩为 $u_i=-k_i\omega_i,\ k_i>0$ 时，$\bar{\omega}=(0,0,0)$为一致渐近稳定。

证明：取正定函数 $V(x)=J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2$，因为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2J_1\omega_1\dot{\omega}_1+2J_2\omega_2\dot{\omega}_2+2J_3\omega_3\dot{\omega}_3\\&=2\omega_1\big((J_2-J_3)\omega_2\omega_3+u_1\big)+2\omega_2\big((J_3-J_1)\omega_3\omega_1+u_2\big)+2\omega_3\big((J_1-J_2)\omega_1\omega_2+u_3\big)\\&=2\omega_1u_1+2\omega_2u_2+2\omega_3u_3\\&=-2k_1\omega_1^2-2k_2\omega_2^2-2k_3\omega_3^2\end{aligned}$$

所以，系统原点是渐近稳定的。

一致渐近稳定性定理

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad\qquad (3.1')$

定理3.3” 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上存在正定 $V(x)$, 使得对于**(3.1’)**满足：

$$\forall (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \left(U / \{0\}\right) : \dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} \triangleq \frac{dV(x)}{dt} < 0$$

则系统**(3.1’)**零解是一致渐近稳定的。

Ω 极限集

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1')$

定义：若存在时间序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$，使得对于**(3.1')**的解 $x(x_0, t_0; t_n)$：

$$\lim_{n\to\infty} x(x_0, t_0; t_n) = x^*$$

则称 x^* 为系统**(3.1')**过 x_0 点轨线的 ω 极限点，过 x_0 点轨线的所有极限点组成的集合称为 Ω 极限集，记做 Ω_{x_0}

定义：若存在时间序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$，使得对于**(3.1')**的解 $x(x_0, t_0; t_n)$：

$$\lim_{n\to\infty} x(x_0, t_0; t_n) = x^*$$

则称 x^* 为系统**(3.1')**过 x_0 点轨线的 α 极限点，过 x_0 点轨线的所有极限点组成的集合称为 A 极限集，记做 A_{x_0}

Ω 极限集和不变集

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1')$

定义：设有集合 S ， 使得 $\forall x_0 \in S$, 过 x_0 的**(3.1')**的解满足：

$$x(x_0, t_0; t) \in S, \quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

则称 S 为系统**(3.1')**的一个正不变集。

定义：设有集合 S ， 使得 $\forall x_0 \in S$, 过 x_0 的**(3.1')**的解满足：

$$x(x_0, t_0; t) \in S, \quad \forall t \in (\infty, -t_0].$$

则称 S 为系统**(3.1')**的一个负不变集。

定义：

不变集：当且仅当既为正不变集又为负不变集。

Ω 极限集和不变集

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0 \qquad (3.1')$

定义：设有集合 S， 使得$\forall x_0 \in S$，过x_0 的(3.1')的解满足：

$$x(x_0, t_0; t) \in S,\quad \forall t \in [t_0, \infty).$$

则称 S 为系统(3.1')的一个正不变集。

定义：若存在时间序列$\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$，使得对于(3.1')的解 $x(x_0, t_0; t_n)$ ：

$$\lim_{n\to\infty} x(x_0, t_0; t_n) = x^*$$

则称 x^* 为系统(3.1')过 x_0点轨线的 ω 极限点，过 x_0 点轨线的所有极限点组成的集合称为 Ω 极限集，记做 Ω_{x_0}

引理. 若 Ω_{x_0} 非空，则其为闭集，且为正不变集。

Ω 集和不变集

对定常系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0)=0 \qquad\qquad (3.1')$

定理(N.N.Krasovski[1959]). 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(x)$,

$$\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} \le 0.$$

且 $M=\{x:\dot{V}(x)=0\}$ 除原点外，不再包含系统（**3.1'**）的其它轨线，则系统**(3.1')**零解是（一致）渐近稳定的。

证明：

由定理的条件知，如下极限必存在

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t,t_0,x_0)) \triangleq c$$

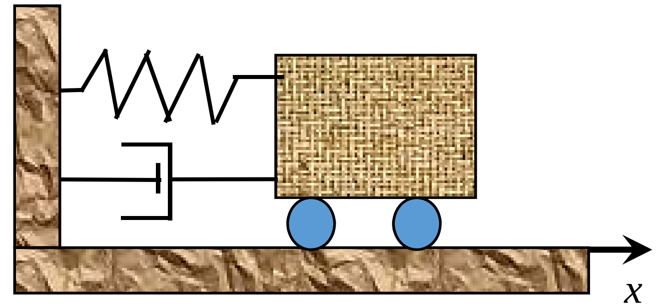
则过 x_0 点的极限集 $\Omega_{x_0} \subseteq \{\overline{x} \mid V(\overline{x})=c\}$. 因为 Ω_{x_0} 为闭集，即从 $x^* \in \Omega_{x_0}$ 出发的轨迹满足 $x(t,t_0,x^*) \in \Omega_{x_0}$，$\forall t\in[t_0,\infty)$. 则 $x(t,t_0,x^*) \in \{\overline{x} \mid V(\overline{x})=c\}$，$\forall t\in[t_0,\infty)$.

由此可得：

$$x(t,t_0,x^*) \in M=\{x:\dot{V}(x)=0\},\quad \forall t\in[t_0,\infty) \Rightarrow x(t,t_0,x^*)\equiv 0 \Rightarrow c=0$$

考察质量-阻尼-弹簧系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = -bx_2|x_2| - k_0 x_1 - k_1 x_1^3 \end{cases} \qquad (*)$$



总能量：$V(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2} m x_2^2 + \displaystyle\int_0^{x_1} (k_0 x_1 + k_1 x_1^3) dx_1$

考察能量的变化率：

$$\begin{aligned} \frac{V(x_1, x_2)}{dt} &= m x_2 \dot{x}_2 + (k_0 x_1 + k_1 x_1^3)\dot{x}_1 \\ &= x_2(-bx_2|x_2| - k_0 x_1 - k_1 x_1^3) + (k_0 x_1 + k_1 x_1^3) x_2 \\ &= -bx_2^2|x_2| \le 0 \end{aligned}$$

表明：由于阻尼的存在，系统能量不断较少，直到质点停止运动，即 $x_2 = 0.$

此时，由系统(*)知，必有 $x_1 = 0.$

即质点将最后停留于平衡点，也即系统平衡点渐近稳定。

一致渐近稳定性定理

定理(N.N.Krasovski[1959]). 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(x)$,

$$\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)}\leq 0.$$

且 $M=\{x:\dot{V}(x)=0\}$ 除原点外，不再包含系统（**3.1'**）的其它轨线，则系统**(3.1')**零解是渐近稳定的。

此定理对时变系统不成立！

◆*J-J Slotine and W.Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991， 程代展等译，机械工业出版社，2006.*

◆*H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社，2006.*

◆*高为炳，非线性控制系统导论，科学出版社，1991.*

◆*常微分方程定性与稳定性方法，马知恩，周义仓，科学出版社，2001*

◆*Stability Theory by Liapunov's Direct Method, N.Rouche, P.Habets, M.Laloy, Springer-Verlag, 1977*

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法

不稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.4 (N.G.Chetaev,1934) 若存在 $0<\varepsilon<h$, 在 $[t_0,+\infty)\times B_\varepsilon$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$, 及集合 $\psi\subset B_\varepsilon$, 并有如下性质：

(1)原点是 ψ 的一个边界点，且其余边界点在 B_ε 球面上或球内。在 ψ 位于 B_ε 球内的所有边界点上有 $V(t,x)=0,\ \forall t\in[t_0,+\infty)$,

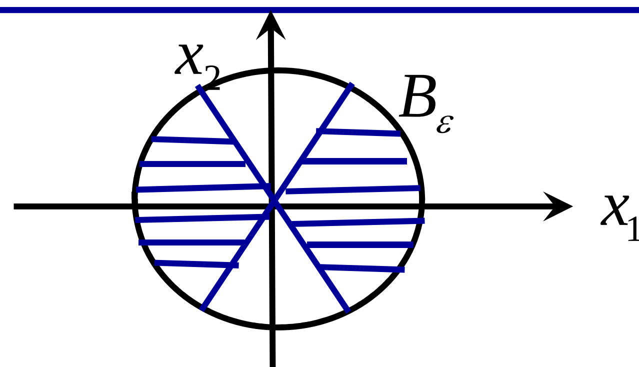
(2) $\exists c>0$ 使得 $\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ 0<V(t,x)\le c$;

(3) $\exists \varphi(r)\in K$ 使得 $\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \ge \varphi(V(t,x))$.

则系统**(3.1)**零解是不稳定的。

$$\psi = \{x\in B_\varepsilon, V(x)>0\}$$

$$V(x) = x_1^2 - x_2^2$$



$V(t,x)$ 不一定正定

定理3.4证明：

由性质(1)知，$\forall \delta > 0, \exists (t_0, x_0) \in [t_0, +\infty) \times \psi$, 且$\|x_0\| < \delta$, 有$V(t_0, x_0) > 0$

若$x(t, t_0, x_0)$一直留在ψ内，则由(2)和(3)可知，当$t \geq t_0$时,

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq V(t_0, x_0) > 0, \quad \text{且}$$

$$c \geq V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau \geq V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi(V(\tau, x(\tau))) d\tau$$

$$\geq V(t_0, x_0) + \varphi(V(t_0, x_0))(t - t_0)$$

因为$V(t, x)$在ψ中有界，所以 $x(t, t_0, x_0)$ 必在某一时刻后离开ψ，

并且离开瞬间$V(t, x) > 0$,所以$x(t, t_0, x_0)$不可能从ψ位于 B_ε 内部的边界处离开，必从 $\|x\| = \varepsilon$ 的边界处离开，故系统零解是不稳定的。

不稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.4 **(N.G.Chetaev,1934)** 若存在 $0<\varepsilon<h$, 在 $[t_0,+\infty)\times B_\varepsilon$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$, 及集合 $\psi\subset B_\varepsilon$, 并有如下性质：

(1)原点是 ψ 的一个边界点，且其余边界点在 B_ε 球面上或球内。在 ψ 位于 B_ε 球内的所有边界点上有 $V(t,x)=0,\ \forall t\in[t_0,+\infty)$,

(2) $\exists c>0$ 使得 $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ 0<V(t,x)\le c$;

(3) $\exists\varphi(r)\in K$ 使得 $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)}\ge\varphi(V(t,x))$.

则系统**(3.1)**零解是不稳定的。

推论3.2 **(Lyapunov第一不稳定性定理)** 上述定理的**(2)**和**(3)**可改为

(2) $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ V(t,x)>0$且具有无穷小上界

(3) $\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times\psi,\ \dot{V}(t,x)>0$正定

不稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.4 (N.G.Chetaev,1934) 若存在 $0 < \varepsilon < h$, 在 $[t_0, +\infty) \times B_\varepsilon$ 上存在连续可微函数 $V(t,x)$, 及集合 $\psi \subset B_\varepsilon$, 并有如下性质：

(1)原点是 ψ 的一个边界点，且其余边界点在 B_ε 球面上或球内。在 ψ 位于 B_ε 球内的所有边界点上有 $V(t,x) = 0$, $\forall t \in [t_0, +\infty)$,

(2) $\exists c > 0$ 使得 $\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times \psi,\ 0 < V(t,x) \le c$;

(3) $\exists \varphi(r) \in K$ 使得 $\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times \psi,\ \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \ge \varphi(V(t,x))$.

则系统**(3.1)**零解是不稳定的。

推论3.3 (Lyapunov第二不稳定性定理) 推论**3.2**中的**(3)**可改为

(2) $\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times \psi,\ V(t,x) > 0$ 且具有无穷小上界

(3) $\forall (t,x) \in [t_0, +\infty) \times \psi,\ \dot{V}(t,x) = cV(t,x) + W(t,x),\ c > 0, W(t,x) \ge 0$ 且连续

不稳定性定理

对定常系统： $\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0$ (3.1’)

定理3.4’ **(N.G.Chetaev,1934)** 若存在 $0 < \varepsilon < h$, 在 $[t_0, +\infty) \times B_\varepsilon$ 上存在连续可微函数 $V(x)$, 及集合 $\psi \subset B_\varepsilon$, 并有如下性质：

(1)原点是ψ 的一个边界点，且其余边界点在B_ε 球面上或球内。在 ψ 位于 B_ε 球内的所有边界点上有 $V(t, x) = 0,\ \ \forall t \in [t_0, +\infty)$,

(2) $\forall x \in \psi, V(x) > 0$

(3) $\exists \varphi(r) \in K$ 使得 $\forall x \in \psi, \dot{V}(x)\big|_{\dot{x}=f(x)} > 0.$

则系统**(3.1’)**零解是不稳定的。

不稳定定理的本质在于给出一个条件，以便确定在原点的任何邻域内偏离原点的解总是存在的。

ψ 集合就是保证这一情形必然发生的域。

例. 刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Euler**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3$$
$$J_2\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1$$
$$J_3\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: 为刚体转动角速度分量

J_1, J_2, J_3: 主轴的转动惯量，设 $J_2 < J_1 < J_3$.

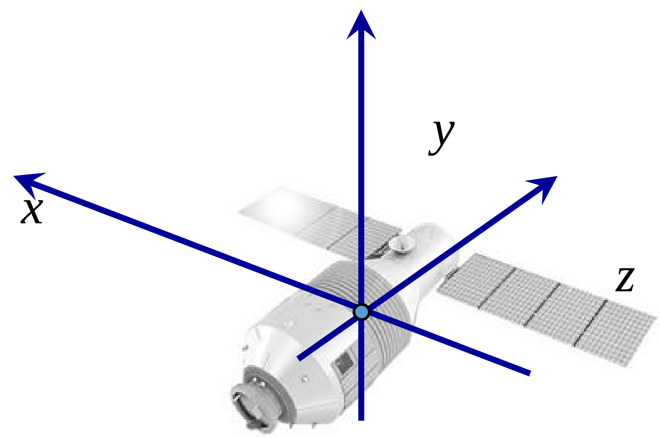
研究其关于惯量居中的主轴转动 $(\omega_1 = \omega_{10} > 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0)$的稳定性。

解. 设扰动运动状态为：

$$y_1 = \omega_1 - \omega_{10}, y_2 = \omega_2, y_3 = \omega_3$$

则扰动运动方程为：

$$J_1\dot{y}_1 = (J_2 - J_3)y_2y_3$$
$$J_2\dot{y}_2 = (J_3 - J_1)y_3(y_1 + \omega_{10})$$
$$J_3\dot{y}_3 = (J_1 - J_2)y_2(y_1 + \omega_{10})$$



解. 设扰动运动状态为： $y_1=\omega_1-\omega_{10},\ y_2=\omega_2,\ y_3=\omega_3$

则扰动运动方程为：

$$
\begin{aligned}
J_1\dot{y}_1&=(J_2-J_3)y_2y_3\\
J_2\dot{y}_2&=(J_3-J_1)y_3(y_1+\omega_{10})\\
J_3\dot{y}_3&=(J_1-J_2)y_2(y_1+\omega_{10})
\end{aligned}
$$

取 $V(y_1,y_2,y_3)=y_2y_3$

$$\psi=\left\{(y_1,y_2,y_3):y_2>0,y_3>0,y_1^2+y_2^2+y_3^2\le\varepsilon^2\right\}$$

则原点为 ψ 的边界点，且在 ψ 的其它边界点上，或者 $V(y_1,y_2,y_3)=0$,

或者 $y_1^2+y_2^2+y_3^2=\varepsilon^2$. 因为

$$\dot{V}(y_1,y_2,y_3)_1=\dot{y}_2y_3+y_2\dot{y}_3=\frac{J_3-J_1}{J_2}y_3^2(y_1+\omega_{10})+\frac{J_1-J_2}{J_3}y_2^2(y_1+\omega_{10})$$

于是，当 $|y_1|<\omega_{10}$ 时，

$$\forall(y_1,y_2,y_3)\in\psi,V(y_1,y_2,y_3)>0,\dot{V}(y_1,y_2,y_3)>0,$$

所以，飞行器关于惯量居中的主轴转动是不稳定的。

本节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理
6. 常见李雅普诺夫函数构造方法

李雅普诺夫函数构造方法

- **Krasovskii**方法
- 待定梯度法
- 由物理概念产生的方法

Krasovskii方法

考虑自治系统： $\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0$ (3.1')

定理3.5 若在 $[t_0, +\infty) \times U$ 上有

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T \right)$$为负定函数

则系统**(3.1')**零解是一致渐近稳定的**,** 而这个系统的一个**Lyapunov**函数可选为

$$V(x) = f(x) f(x)^T$$

Krasovskii方法

定理3.5证明：

首先：$V(0)=f(0)^T f(0)=0$

令： $A(x)\triangleq\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$

因为 $A(x)+A^T(x)$ 为负定矩阵，所以$\forall x,\ x^T\left(A(x)+A^T(x)\right)x=2x^T A(x)x<0$

进而可得 $\forall x,\ A(x)$ 可逆。

由中值定理得:$\forall x\neq 0,\ f(x)=f(0)+A(z)_{z=\theta x}x=A(z)_{z=\theta x}x\neq 0,\quad \theta\in[0,1].$

所以：$\forall x\neq 0,\ V(x)>0$ ，所以 $V(x)=f(x)^T f(x)$ 为正定函数。

另外：

$$\frac{dV(x)}{dt}=f(x)^T A(x)f(x)+f(x)^T A(x)^T f(x)=f(x)^T\left(A(x)+A(x)^T\right)f(x)$$

为负定函数，即证。

Krasovskii方法

考虑自治系统： $\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0$ (3.1')

定理3.5 若在 $[t_0, +\infty)\times U$ 上有

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T \right)$$为负定函数

则系统**(3.1')**零解是一致渐近稳定的**,** 而这个系统的一个**Lyapunov**函数可选为

$$V(x) = f(x) f(x)^T$$

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{cases}$$

$$A(x) + A(x)^T = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)^T = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

可验证 $A(x) + A^T(x)$ 为负定矩阵，所以 $V(x) = f(x) f(x)^T$ 可为李雅普诺夫函数，且系统零解为一致渐近稳定。

待定梯度法

考虑自治系统：$\dot{x} = f(x),\ f(0) = 0$ (3.1')

一个标量函数 $V(x)$ 的梯度为 $\nabla_V(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{V,1}(x) \\ \nabla_{V,2}(x) \\ \vdots \\ \nabla_{V,n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

$V(x)$ 可由其梯度重构需要：

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_j \partial x_i},\ \forall i, \forall j$$ （旋度条件或雅克比矩阵对称）

当满足旋度条件时，积分 $\int_0^x \sum_{i=1}^n \nabla_{V,i}(s)\, ds$ 与积分路径无关，即

$$V(x) = \int_0^x \sum_{i=1}^n \nabla_{V,i}(s)\, ds$$

$$= \int_0^{x_1} \nabla_{V,i}(s_1, 0, \ldots 0) ds + \int_0^{x_2} \nabla_{V,i}(s_1, s_2, \ldots 0) ds + \ldots \int_0^{x_n} \nabla_{V,i}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, 0) ds$$

待定梯度法的基本原理就是假设梯度 ∇_V 有某种特殊结构，而不是假定 $V(x)$本身具有特殊结构。

一种简单方法是假定 ∇_V 具有的形式为：

$$\nabla_{V,i} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (*)$$

待定梯度法构造李雅普诺夫函数的一般步骤

1. 假定 ∇_V 满足(*)式

2. 解出系数 a_{ij} ： 满足 $\dot{V}(x)$ 负定以及旋度条件

3. 检验 ∇_V 是否正定

$$\nabla_{V,i} = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (*)$$

待定梯度法构造李雅普诺夫函数的一般步骤

1. 假定 ∇_V 满足(*)式
2. 解出系数 a_{ij} ：满足 $\dot{V}(x)$ 负定以及旋度条件
3. 检验 ∇_V 是否正定

例： $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 \end{cases}$ 设 $\nabla_V(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{V,1}(x) \\ \nabla_{V,2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \end{bmatrix}$

则由旋度条件得： $a_{1,2} = a_{2,1}$

由 $\dot{V}(x)$ 负定得： $\dot{V}(x) = x_1 x_2 (a_{11} - a_{21} - a_{22}) + x_2^2 (a_{12} - a_{22}) - a_{21} x_1^2 < 0$

一个充分条件为： $\begin{cases} (a_{11} - a_{21} - a_{22}) = 0 \\ (a_{12} - a_{22}) < 0 \\ a_{21} > 0 \end{cases}$ 取 $\begin{cases} a_{22} > a_{21} = a_{12} > 0 \\ (a_{11} - a_{21} - a_{22}) = 0 \end{cases}$

例： $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 \end{cases}$ 设 $\nabla_V(x) = \begin{bmatrix} \nabla_{V,1}(x) \\ \nabla_{V,2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \end{bmatrix}$

则由旋度条件得： $a_{1,2} = a_{2,2}$

由 $\dot{V}(x)$ 负定得： $\dot{V}(x) = x_1x_2(a_{11} - a_{21} - a_{22}) + x_2^2(a_{12} - a_{22}) - a_{21}x_1^2 < 0$

一个充分条件为： $\begin{cases} (a_{11} - a_{21} - a_{22}) = 0 \\ (a_{12} - a_{22}) < 0 \\ a_{21} > 0 \end{cases}$ 取 $\begin{cases} a_{22} > a_{21} = a_{12} > 0 \\ (a_{11} - a_{21} - a_{22}) = 0 \end{cases}$

当满足旋度条件时，积分 $\int_0^x \sum_{i=1}^{n} \nabla_{V,i}(s)\, ds$ 与积分路径无关，即

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla_{V,i}(s_1, 0)ds + \int_0^{x_2} \nabla_{V,i}(s_1, s_2)ds +$$

$$= \int_0^{x_1} a_{1,1}s_1 ds + \int_0^{x_2} a_{2,1}s_1 + a_{2,2}s_2 ds$$

$$= \frac{1}{2}(a_{21} + a_{22})x_1^2 + a_{2,1}x_1x_2 + \frac{1}{2}a_{2,2}x_2^2$$

容易验证其正定。

由物理概念产生的方法

一个**m**连杆机器人的非线性动力学问题可表示为：

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+D\dot{q}+g(q)=u$$

其中**q**是**m**维广义坐标向量，表示关节位置，

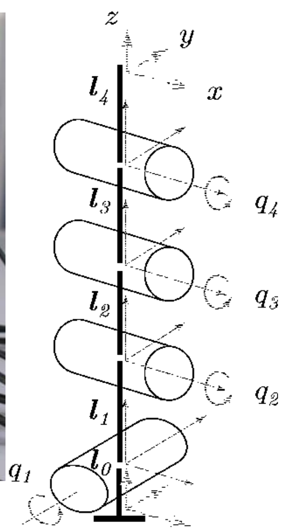
u是**m**维控制输入（转动力矩），

$M(q)$ 是对称惯性矩阵，并且是正定的，

$C(q,\dot{q})\dot{q}$ 表示离心力及**Coliolis**力，且 $dM(q)/dt-2C(q,\dot{q})$斜对称矩阵，

$D\dot{q}$ 为粘性阻尼，**D**为半正定矩阵，

$g(q)$ 表示重力，$g(q)=\left[\partial P(q)/\partial q\right]^T$，**P(q)**是由重力产生的所有连杆的全部势能 。



No.	Length (m)	Joint angle	Rotation axis	Mass (kg)	Mass center (m)
0	l_0=0.02275				
1	l_1=0.04180	q_1	y	m_1=0.08	r_1=0.0418
2	l_2=0.03500	q_2	x	m_2= 0.08	r_2= 0.0350
3	l_3=0.03500	q_3	x	m_3= 0.08	r_3= 0.0350
4	l_4=0.06278	q_4	x	m_4= 0.06	r_4= 0.0400

H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社，2006。（4.19）

R. M. Murray, Z. Li, S.S.Sastry, A mathematical introduction to robotic manipulation, CRC Press, 1994

由物理概念产生的方法

一个**m**连杆机器人的非线性动力学问题可表示为：

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+D\dot{q}+g(q)=u$$

其中**q**是**m**维广义坐标向量，表示关节位置，

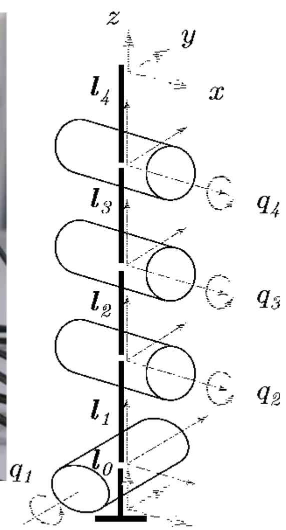
u是**m**维控制输入（转动力矩），

$M(q)$ 是对称惯性矩阵，并且是正定的，

$C(q,\dot{q})\dot{q}$ 表示离心力及**Coliolis**力，且 $dM(q)/dt-2C(q,\dot{q})$斜对称矩阵，

$D\dot{q}$ 为粘性阻尼，**D**为半正定矩阵，

$g(q)$ 表示重力，$g(q)=\left[\partial P(q)/\partial q\right]^T$，**P(q)**是由重力产生的所有连杆的全部势能 。



No.	Length (m)	Joint angle	Rotation axis	Mass (kg)	Mass center (m)
0	l_0=0.02275				
1	l_1=0.04180	q_1	y	m_1=0.08	r_1=0.0418
2	l_2=0.03500	q_2	x	m_2= 0.08	r_2= 0.0350
3	l_3=0.03500	q_3	x	m_3= 0.08	r_3= 0.0350
4	l_4=0.06278	q_4	x	m_4= 0.06	r_4= 0.0400

H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社，2006。（4.19）

R. M. Murray, Z. Li, S.S.Sastry, A mathematical introduction to robotic manipulation, CRC Press, 1994

由物理概念产生的方法

一个**m**连杆机器人的非线性动力学问题可表示为：

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+D\dot{q}+g(q)=u$$

假设**P(q)**是**q**的正定函数，且**g(q)=0**有一个孤立解**q=0.**

总能量函数 $V(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}+P(q)$ 作为**Lyapunov**函数，

$\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$： 机器人的动能

$P(q)$： 模拟的势能（模拟弹簧）

$$V(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}+P(q)\text{正定}$$

$$\text{并且}\dot{V}(q,\dot{q})=\dot{q}^T M(q)\ddot{q}+\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q}+g^T(q)\dot{q}$$

$$=\dot{q}^T(-C(q,\dot{q})\dot{q}-D\dot{q}-g(q))+\frac{1}{2}\dot{q}^T\dot{M}(q)\dot{q}+g^T(q)\dot{q}$$

$$=\frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\dot{M}(q)-2C(q,\dot{q})\right]\dot{q}-\dot{q}^T D\dot{q}-\dot{q}^T g(q)+g^T(q)\dot{q}$$

$$=-\dot{q}^T D\dot{q}\le 0$$

第五次作业

1. 考虑由如下方程描述的电阻-电感-电容（**RLC**）电路系统：

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(t)} x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C(t)} x_1 - \frac{R(t)}{L(t)} x_2$$

$$0 < k_1 \le L(t) \le k_2$$

$$0 < k_3 \le C(t) \le k_4$$

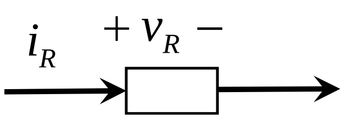
$$1 < k_5 \le R(t) \le k_6 < 2$$

如果用如下函数做**Lyapunov**函数：

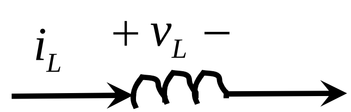
$$V(t,x) = \left[R(t) + \frac{2L(t)}{R(t)C(t)} \right] x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{2}{R(t)} x_2^2$$

(1) 证明 $V(t,x)$正定并具有无穷小上界。

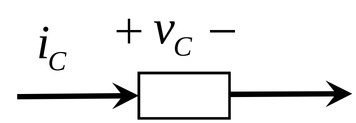
(2) $\dot{L}(t), \dot{C}(t), \dot{R}(t)$满足什么条件时，系统原点是一致渐近稳定的



$$v_R = R(t) i_R$$



$$v_L = L(t) \frac{di_L}{dt}$$



$$i_C = C(t) \frac{dv_C}{dt}$$

H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社**, 2006.**（**4.38**）

第五次作业

2. 考察系统：

$$\ddot{x}+h(x)\dot{x}+g(x)=0,\quad h(x),g(x)\text{连续可微，且原点为其孤立平衡点。}$$

(1) 若用 $V(x_1,x_2)=\int_0^{x_1} g(y)dy+\frac{1}{2}x_2^2,\quad (x_1=x,x_2=\dot{x})$

做**Lyapunov**函数，则 $h(y),g(y)$ 满足什么条件时，原点渐近稳定。

(2) 若用 $V(x_1,x_2)=\int_0^{x_1} g(y)dy+\frac{1}{2}\left(x_2+\int_0^{x_1} h(y)dy\right)^2$

做**Lyapunov**函数，则 $h(y),g(y)$ 满足什么条件时，原点渐近稳定。

H.Khalil, Nonlinear Systems (Third Edition), Prentice Hall, 电子工业出版社**, 2006.**（**4.38**）

谢谢！