系统稳定性理论：第四讲

其它稳定性和正定函数

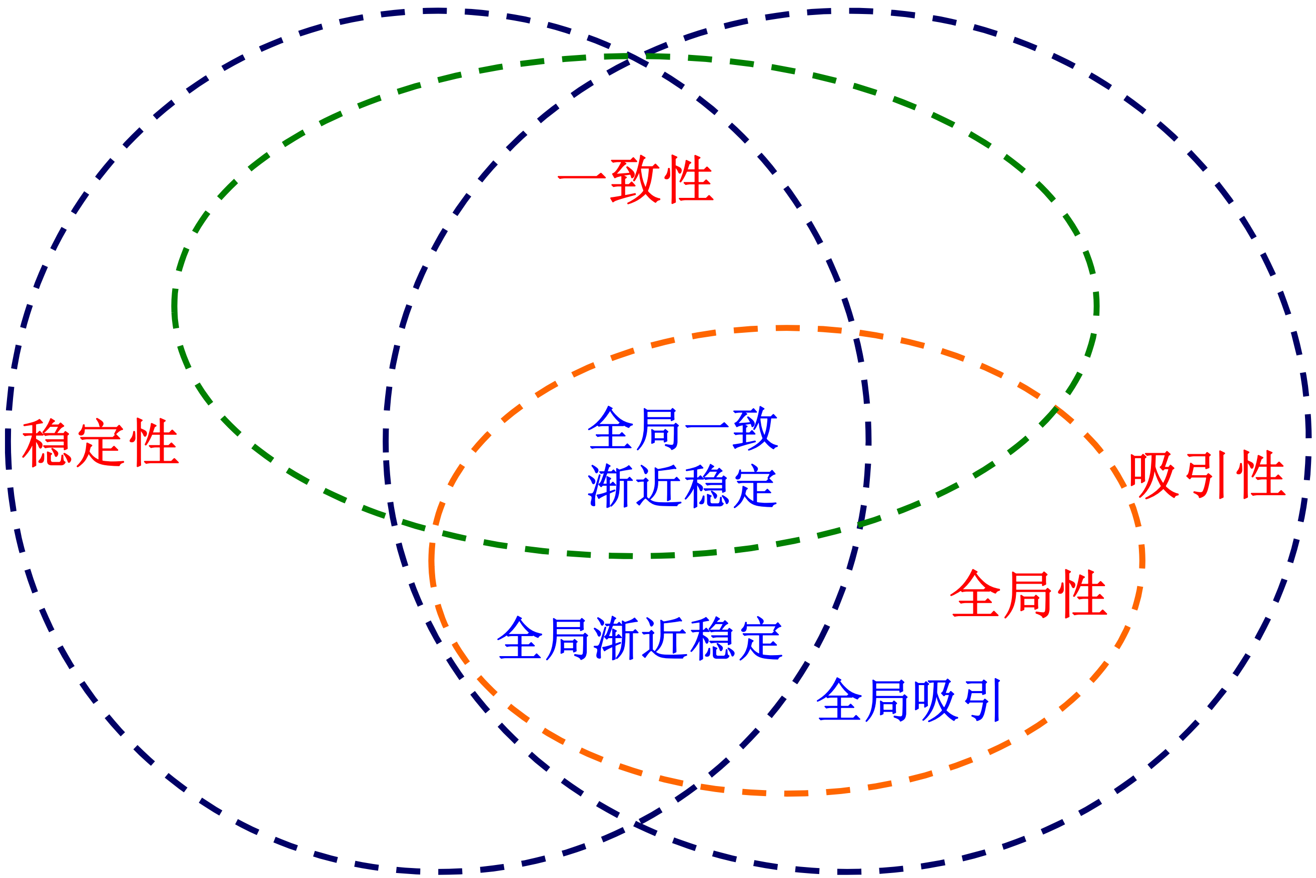
讲课人：薛文超

中国科学院大学人工智能学院

中国科学院数学与系统科学研究院

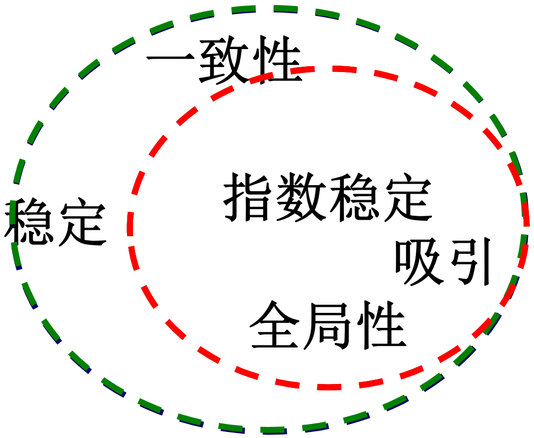
回顾

稳定性 吸引性 一致性 全局性 指数稳定



回顾

- 线性时不变系统的良好性质



- 非线性系统行为的丰富多彩
  - 多平衡点
  - 极限环 **(limit cycles)**
  - 分支（分歧、分岔）**(Bifurcations)**
  - 混沌 **(Chaos)**

其它稳定性定义

Lyapunov stability仅考察初始值的变化对解的影响，没有考虑方程右端函数或参数的变化对解的影响。

原系统：
$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

$x(t,t_0,x_0)$ 运动轨线，存在唯一

受扰系统：
$$\dot{\tilde{x}} = f(t,\tilde{x}) + g(\tilde{x},t), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \qquad (1')$$

$\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)$ 受扰运动轨线，存在唯一

误差轨线：$y(t) = \tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0) - x(t,t_0,x_0)$

其它稳定性定义

Lyapunov stability仅考察初始值的变化对解的影响，没有考虑方程右端函数或参数的变化对解的影响。

- 完全稳定或持续扰动下稳定 **(totally stable or stable under persistent disturbance)**
- 实用稳定 **(practically stable)**

完全稳定或持续扰动下稳定

原系统： $\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$

受扰系统： $\dot{\tilde{x}} = f(t,\tilde{x}) + g(t,\tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \qquad (1')$

误差轨线： $y(t) = \tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0) - x(t,t_0,x_0)$

误差轨线满足的微分方程：

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \dot{\tilde{x}}(t,t_0,\tilde{x}_0) - \dot{x}(t,t_0,x_0) \\
&= f(t,\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)) + g(t,\tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0)) - f(t,x) \\
&= f(t,y+x(t,t_0,x_0)) - f(t,x(t,t_0,x_0)) + g(t,y+x(t,t_0,x_0)) \\
&= F(t,y,t_0,x_0) + G(t,y,t_0,x_0)
\end{aligned}$$

令： $F(\bullet) \triangleq f(t,y+x(t,t_0,x_0)) - f(t,x(t,t_0,x_0))$， $G(\bullet) \triangleq g(t,y+x(t,t_0,x_0))$，则：

$$\dot{y}(t) = F(t,y,t_0,y_0) + G(t,y,t_0,y_0), \quad F(t,0,t_0,y_0) \equiv 0 \qquad (2)$$

完全稳定或持续扰动下稳定

原系统： $\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$ (1)

受扰系统： $\dot{\tilde{x}} = f(t,\tilde{x}) + g(t,\tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ (1')

误差轨线： $y(t) = \tilde{x}(t,t_0,\tilde{x}_0) - x(t,t_0,x_0)$

$$\dot{y}(t) = F(t,y,t_0,y_0) + G(t,y,t_0,y_0), \quad F(t,0,t_0,y_0) \equiv 0 \qquad (2)$$

将(t_0,x_0)视为给定参数，以下将**(2)**简化写为

$$\dot{y}(t) = F(t,y) + G(t,y), \ F(t,0) \equiv 0 \qquad (2')$$

$y = 0$ 代表未被扰动运动

	稳定性	完全稳定性
系统模型	$\dot{y}(t) = F(t,y), F(t,0) \equiv 0$	$\dot{y}(t) = F(t,y) + G(t,y), F(t,0) \equiv 0$
$y = 0$	是系统的平衡点	不一定是系统的平衡点 （考虑了微分方程的右端具有扰动）

完全稳定或持续扰动下稳定

$$\dot{y}(t) = F(t, y) + G(t, y),\ F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2')$$

Definition 9 : $y = 0$ **is totally stable (or stable under persistent disturbance) (完全稳定或持续扰动下稳定) if** $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0,$ **such that the solution** $y(t, y_0, t_0)$ **of the perturbed system (2') satisfies** $\forall t_0, \forall \|y_0\| < \delta_1, \forall \|G(t, y)\| < \delta_2 (t \geq t_0, \|y\| \leq \varepsilon), \forall t \geq t_0,$

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon$$

当初始时刻初始状态和扰动充分小，误差系统(2')的轨线可以足够地接近零，那么未被扰动运动 $y = 0$ 是完全稳定的。

Total stability $\xrightarrow{\delta_2 = 0}$ **Uniform stability**

其它稳定性定义

$$\dot{y}(t) = F(t,y) + G(t,y),\ F(t,0) \equiv 0 \qquad (2')$$

Definition 1: The equilibrium $y=0$ **of system (2) is Lyapunov stable if**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t_0,\ \exists \delta(\varepsilon, t_0)$$

such that the solution of (2) satisfies

$$|y(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

otherwise it is unstable.

Lyapunov稳定性定义中: ε为任意给定, 只要求 δ存在，但可能很小。

在实际问题中:

如果 δ 太小，要求初始扰动不超过 δ 难以实现。

这时，数学上的稳定性没有实际意义！

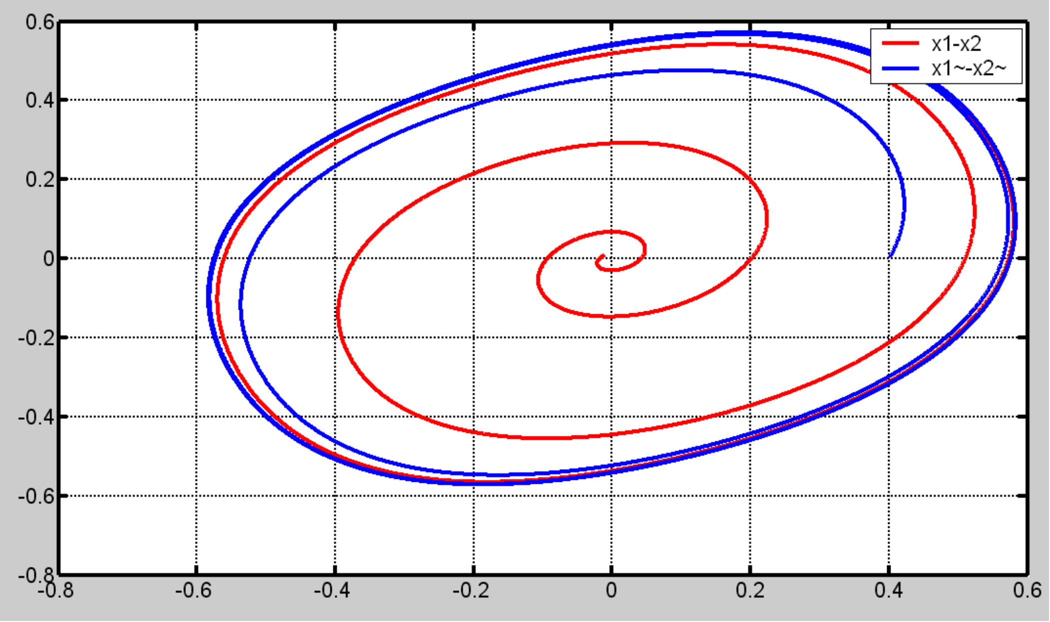
另一方面，某些所期望的系统状态虽然不具有 **Lyapunov**稳定性，

但系统在其附近工作又是可以接受的，即 ε 没有必要任意小

分支（分岐、分岔）(Bifurcations)

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

$0 < \lambda < 1$ 零解邻域内产生极限环 **Hopf bifurcation**：
从平衡点邻域内产生极限环



零解是不稳定的，
但是极限环把轨线约束
在了一个范围内

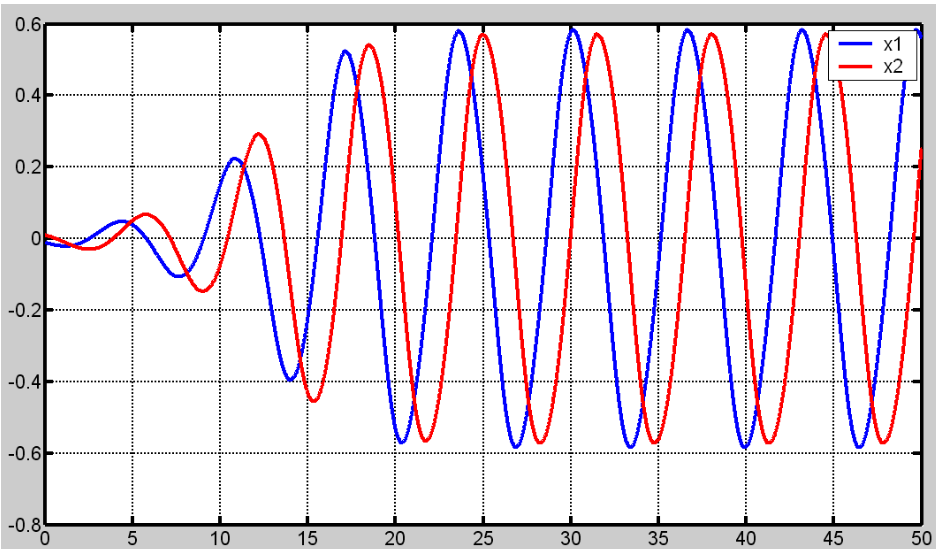
$\lambda = 0.5$

$x(t_0) = (-0.1, 0.1)$

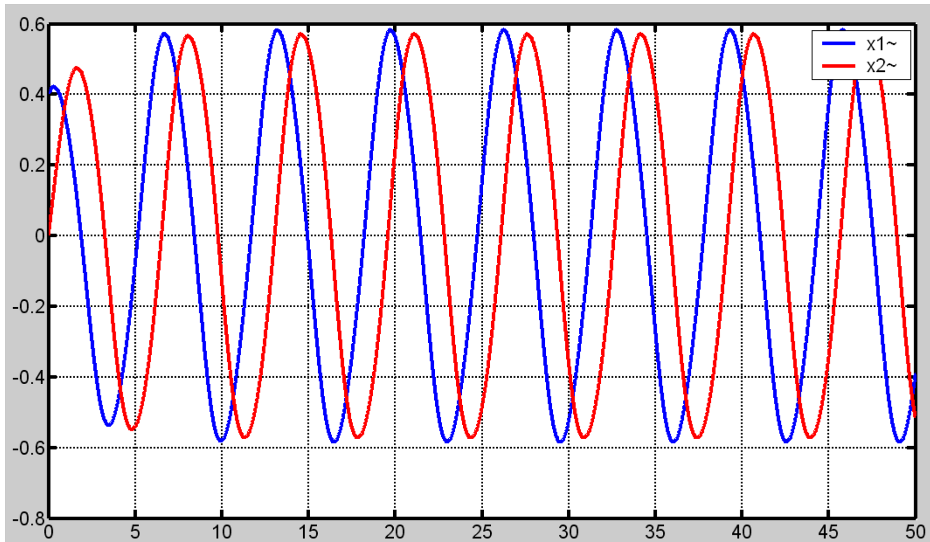
$x(t_0) = (0.4, 0)$

分支（分岐、分岔）(Bifurcations)

例：
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3\end{cases} \qquad \lambda = 0.5, \quad \begin{matrix}(-0.01, 0.01) \\ (0.4, 0.0)\end{matrix}$$



$(-0.01, 0.01)$



$(0.4, 0.0)$

零解是不稳定的，但极限环把轨线约束在了一个范围内

如果系统轨迹：虽然不具有**Lyapunov**稳定性，但又是可以接受的。

初始误差：满足预先给定的范围

扰动运动：在能接受的范围内运动

实用稳定(practically stable)

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2)$$

Definition 1: The equilibrium $y = 0$ of system (2) is Lyapunov stable if

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t_0,\ \exists \delta(\varepsilon, t_0)$$

such that the solution of (2) satisfies

$$|y(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Lyapunov稳定性定义中**:** ε为任意给定, 只要求 δ存在，但可能很小。

在实际问题中:

如果 δ 太小，要求初始扰动不超过 δ 难以实现。

这时，数学上的稳定性没有实际意义!

另一方面，某些所期望的系统状态虽然不具有 **Lyapunov**稳定性，但系统在其附近工作又是可以接受的，即 ε 没有必要任意小

因此提出了实用稳定(**practically stable**) 的研究

实用稳定(practically stable)

$$\dot{y}(t) = F(t,y) + G(t,y),\ F(t,0) \equiv 0 \qquad (2')$$

Definition 10: **Given** $\varepsilon > 0, \delta_1 > 0(\delta_1 < \varepsilon), \delta_2 > 0.$ $y = 0$ **is said to be practically stable (实用稳定) with respect to** $(\varepsilon, \delta_1, \delta_2)$, **if**

$$\forall t_0, \forall \|y_0\| < \delta_1, \forall \|G(t,y)\| < \delta_2 \ (t \ge t_0, \|y\| \le \varepsilon),$$

the solution $y(t, y_0, t_0)$ **of the system (2') satisfies**

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0$$

实用稳定性与 $(\varepsilon, \delta_1, \delta_2)$ 有关，在研究实用稳定性前，必须先判明：

- 离理想状态多近是可行的（ ε 的大小）
- 初始误差可以控制到何种程度（ δ_1 的大小）
- 容许扰动的范围(δ_2 的大小）

*实用稳定性最早见于文献：**Lasalle J. P., Lefschetz S, Stablilty by Lyapunov's direct method with applications, New York: Academic Press, 1961.***

实用稳定(practically stable)

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2)$$

$$\dot{y}(t) = F(t, y) + G(t, y), F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2')$$

Definition 1: The equilibrium $y = 0$ of system (2) is Lyapunov stable if

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0, \ \exists \delta(\varepsilon, t_0)$$

such that the solution of (2) satisfies

$$|y(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Definition 10: Given $\varepsilon > 0, \delta_1 > 0 (\delta_1 < \varepsilon), \delta_2 > 0. y = 0$ **is said to be practically stable (实用稳定) with respect to** $(\varepsilon, \delta_1, \delta_2)$, **if**

$$\forall t_0, \forall \|y_0\| < \delta_1, \forall \|G(t, y)\| < \delta_2 \ (t \geq t_0, \|y\| \leq \varepsilon),$$

the solution $y(t, y_0, t_0)$ **of the system (2') satisfies**

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

实用稳定性与**Lyapunov**稳定性为相对独立的概念

例. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + k(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2), & x_1(t_0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + k(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2), & x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$

其中k为正常数。

系统通解为:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{k\mu(t)}}(x_{10}\cos\theta(t) - x_{20}\sin\theta(t)) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{k\mu(t)}}(x_{10}\sin\theta(t) + x_{20}\cos\theta(t)) \end{cases}$$

$$\theta(t) = 2(t - t_0) - \frac{1}{2} ln\mu(t)$$

$$\mu(t) = \tau_0^2 + (\frac{1}{k} - \tau_0^2)\exp^{2(t-t_0)}$$

$$\tau_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

则有 $x_1^2(t) + x_2^2(t) = \dfrac{x_0^2 + y_0^2}{k\mu(t)} = \dfrac{\tau_0^2}{k(\tau_0^2 + (\frac{1}{k} - \tau_0^2)\exp^{2(t-t_0)})}$

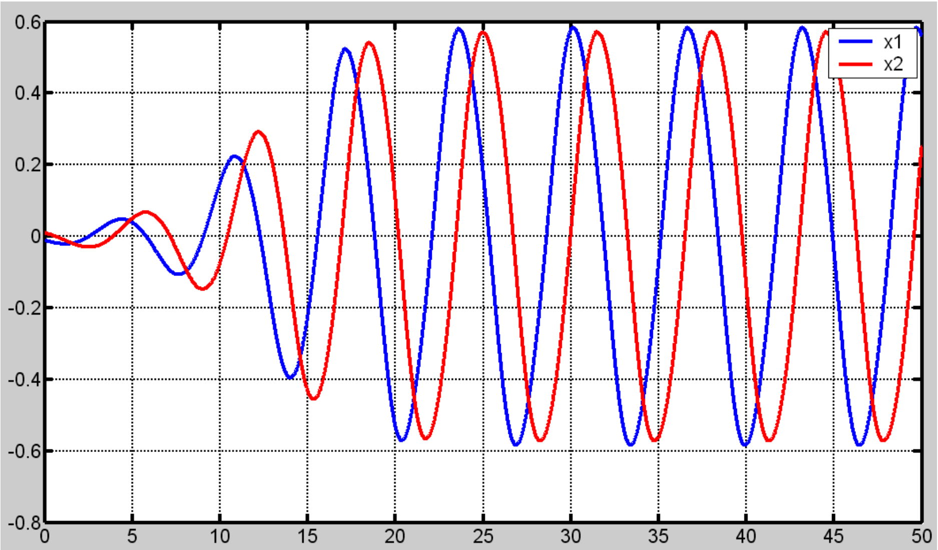
当$\tau_0 < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$时，$\mu(t)$ 单调递增，容易证明系统零解渐近稳定。

当$\tau_0 > \dfrac{1}{\sqrt{k}}$时，$\mu(t)$ 单调递减，系统的解有限时间发散。

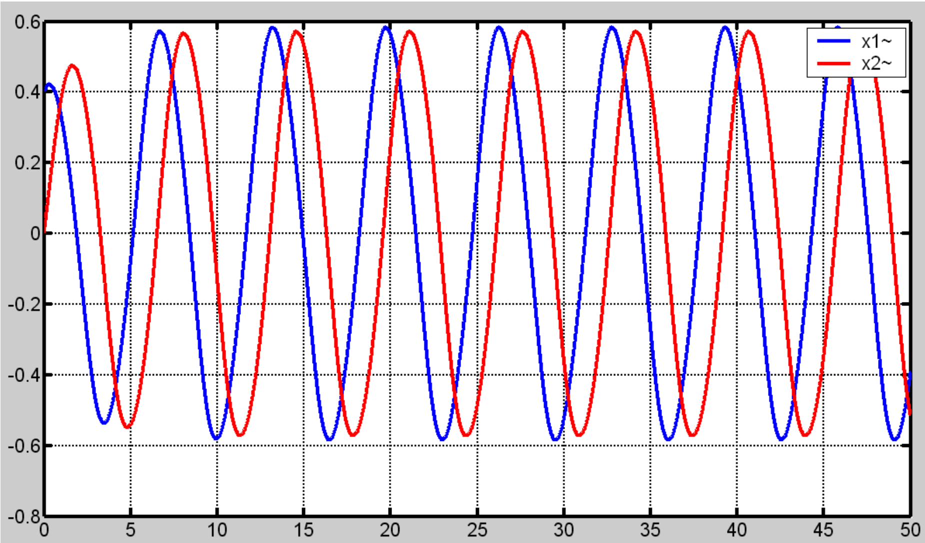
所以，系统零解**Lyapunov**稳定但非$(\varepsilon, \delta_1, \delta_2) = \left(\varepsilon, \dfrac{2}{\sqrt{k}}, \delta_2\right)$实用稳定。

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + \lambda x_1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

$$\lambda = 0.5, \quad \begin{matrix} (-0.01, 0.01) \\ (0.4, 0.0) \end{matrix}$$



$(-0.01, 0.01)$



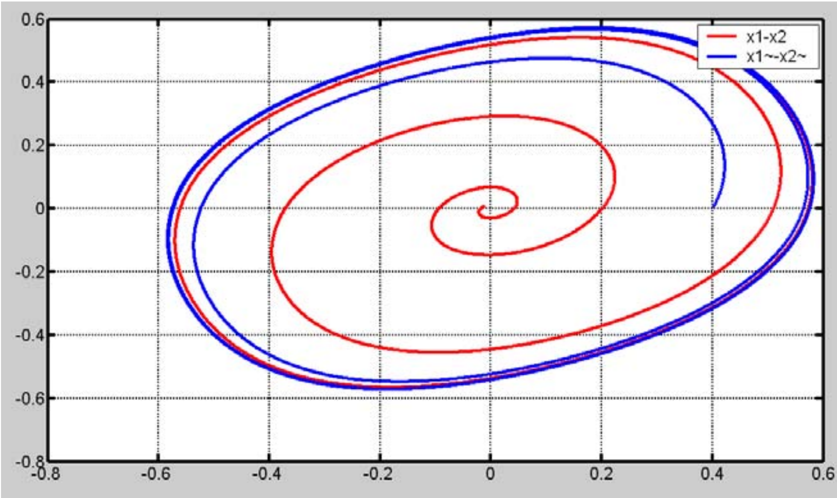
$(0.4, 0.0)$

零解是不稳定的，但极限环把轨线约束在了一个范围内

系统零解不具有Lyapunov稳定性，

但对于 $(\varepsilon = 0.6, \delta_1, \delta_2)$ （ δ_1，δ_2 足够小时）

实用稳定。



实用稳定(practically stable)

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2)$$

$$\dot{y}(t) = F(t, y) + G(t, y), F(t, 0) \equiv 0 \qquad (2')$$

Definition 1: The equilibrium $y = 0$ **of system (2) is Lyapunov stable if**

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0, \ \exists \delta(\varepsilon, t_0)$$

such that the solution of (2) satisfies

$$|y(t_0)| < \delta \Rightarrow |y(t, t_0, y_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

Definition 10: Given $\varepsilon > 0, \delta_1 > 0 (\delta_1 < \varepsilon), \delta_2 > 0. y = 0$ **is said to be practically stable (实用稳定) with respect to** $(\varepsilon, \delta_1, \delta_2)$, **if**

$$\forall t_0, \forall \|y_0\| < \delta_1, \forall \|G(t, y)\| < \delta_2,$$

the solution $y(t, y_0, t_0)$ **of the system (2') satisfies**

$$\|y(t, y_0, t_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0$$

实用稳定性与Lyapunov稳定性为相对独立的概念

稳定性定义小结

- 稳定性(stability) (A.M.Lyapunov[1892])

  一致稳定性(uniform stability) (K.P.Persidski[1933])

- 渐近稳定性(asymptotic stability) (A.M.Lyapunov[1892])

  一致渐近稳定性(uniform asymptotic stability) (I.G.Malkin[1954])

  全局渐近稳定性(global asymptotic stability) (E.A.Barbashin, N.N.Krasovski[1952])

  全局一致渐近稳定性(global uniform asymptotic stability) (..)

- 指数稳定性(exponential stability)

  全局指数稳定性(global exponential stability)

- 完全稳定性(total stability)

- 实用稳定性(practical stability) (Lasalle J. P., Lefschetz S[1961])

更多稳定性定义

- 轨道稳定性(**Poincaré stability**)
- 部分变元稳定性(**partial stability**)
- 有界性(**boundedness, Lagrange stability**)
- 绝对稳定性(**Absolute stability**)
- 输入输出稳定性(**Input-output stability**)
- 输入状态稳定性(**Input-to-state stability**)
- 限定初始扰动的条件稳定性
- 非常稳定性
- 集合稳定性
- 超稳定性
- 同步
- 泊松稳定性
- 鲁棒稳定性

Stability Theory by Liapunov's Direct Method, N.Rouche, P.Habets, M.Laloy, Springer-Verlag, 1977

稳定性的数学理论及应用，廖晓昕，华中师范大学出版社，1988.

稳定性与鲁棒性的理论基础，黄琳，科学出版社，2003

Nonlinear Systems (Third Edition), H.Khalil, Prentice Hall, 电子工业出版社，2006.

更多稳定性定义（续）

- **Lp**稳定性
- 以概率**1(W.P.1)**稳定
- 半全局稳定性
- 离散系统的稳定性定义及稳定性判据的相关定理
- 小增益定理**(Small Gain Theorem)**
- 圆判据**(Circle Criterion)**
- **Kharitonov's Theorem**
- 正实引理**(KYP**引理**)**

Stability Theory by Liapunov's Direct Method, N.Rouche, P.Habets, M.Laloy, Springer-Verlag, 1977

稳定性的数学理论及应用，廖晓昕，华中师范大学出版社，1988.

稳定性与鲁棒性的理论基础，黄琳，科学出版社，2003

Nonlinear Systems (Third Edition), H.Khalil, Prentice Hall, 电子工业出版社，2006.

第四次作业

查阅一个（课堂没有讲过的）其它稳定性的定义

- 因何问题而提出，最早出处
- 完整定义和描述
- 与其它稳定性概念的区别与联系
- 定理或主要应用在哪些稳定性的研究中
- 例
- ……

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

通过求出微分方程解析解来分析系统稳定性的局限性：

描述实际系统的微分方程往往是很复杂的，特别是非线性系统，难以求出解析解。

Lyapunov稳定性理论给出了从方程本身来判断稳定性的一种途径，从而避开求解非线性微分方程的困难。

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

基本物理现象：如果一个力学（或电）系统的全部能量连续耗散，那么系统（不管是线性的还是非线性的）都将最终停止在一个平衡点处。

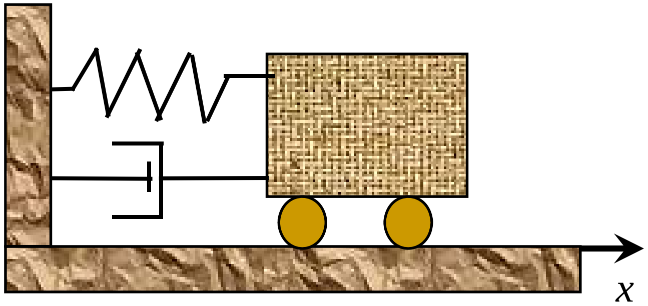
基本物理现象：如果一个力学（或电）系统的全部能量连续耗散，那么系统（不管是线性的还是非线性的）都将最终停止在一个平衡点处。

考察质量-阻尼-弹簧系统：

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}|\dot{x}| - (k_0 x + k_1 x^3), \qquad b > 0, k_0 > 0, k_1 > 0$$

非线性阻尼（摩擦力）

非线性弹簧



设弹簧处于自然长度的位置（平衡点）为未受扰运动，该平衡点是否稳定？

这个非线性方程的一般解很难得到！

系统的状态空间模型为：

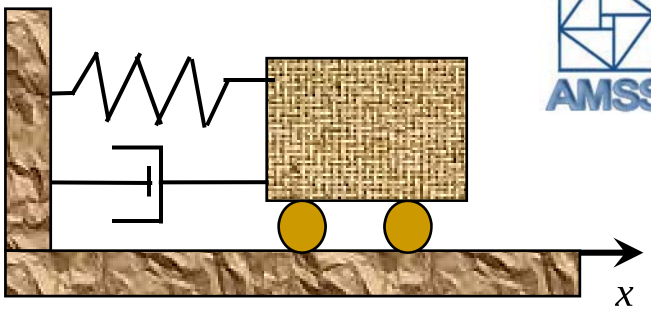
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = -bx_2|x_2| - k_0 x_1 - k_1 x_1^3 \end{cases}$$

考察系统总能量，即动能与势能之和：

$$V(x_1, x_2) = \boxed{\frac{1}{2} m x_2^2} + \boxed{\int_0^{x_1} (k_0 x_1 + k_1 x_1^3) dx_1}$$

考察质量-阻尼-弹簧系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = -bx_2|x_2| - k_0x_1 - k_1x_1^3 \end{cases} \quad (*)$$



总能量：$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \int_0^{x_1}(k_0x_1 + k_1x_1^3)dx_1$

比较稳定性定义与系统总能量之间的关系：

(1). 能量为零对应于平衡点 $(x_1 = 0, x_2 = 0)$,平衡点之外能量大于零；

(2). 渐近稳定意味着从非自然长度开始总能量能减少并收敛到零；

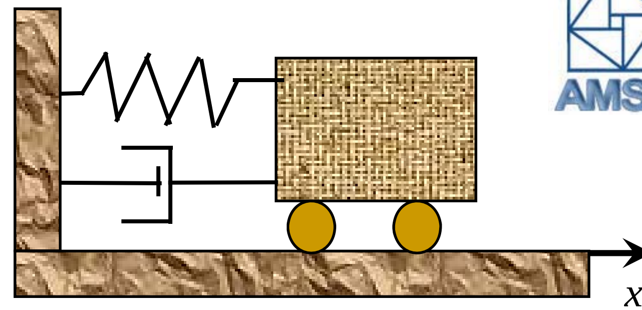
(3). 不稳定意味着能量的增长。

这些关系表明，系统的稳定性可以通过系统能量的变化来研究。

而能量的变化率则可以通过 $\dfrac{dV(x_1, x_2)}{dt}$ 来考察。

考察质量-阻尼-弹簧系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = -bx_2|x_2| - k_0x_1 - k_1x_1^3 \end{cases} \qquad (*)$$



总能量：$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}mx_2^2 + \int_0^{x_1}(k_0x_1 + k_1x_1^3)dx_1$

考察能量的变化率：

$$\begin{aligned} \frac{V(x_1, x_2)}{dt} &= mx_2\dot{x}_2 + (k_0x_1 + k_1x_1^3)\dot{x}_1 \\ &= x_2(-bx_2|x_2| - k_0x_1 - k_1x_1^3) + (k_0x_1 + k_1x_1^3)x_2 \\ &= -bx_2^2|x_2| \le 0 \end{aligned}$$

表明：由于阻尼的存在，系统能量不断较少，直到质点停止运动，即 $x_2 = 0.$

此时，由系统(*)知，必有 $x_1 = 0.$

即质点将最后停留于平衡点，也即系统平衡点渐近稳定。

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

基本物理现象：如果一个力学（或电）系统的全部能量连续耗散，那么系统（不管是线性的还是非线性的）都将最终停止在一个平衡点处。

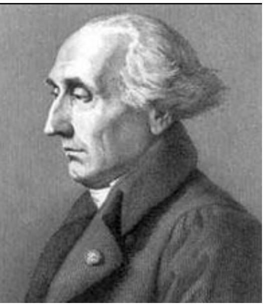
系统的稳定性可以通过系统能量的变化来研究

Laplace, Lagrange等利用正定函数研究多体问题稳定性。

星体及太阳系的稳定性

N-body Problem $m_i\ddot{\vec{r}}_i = G\sum_{j\neq i}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^{\ 3}}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right), \quad i, j = 1, \ldots, N$

Laplace, Lagrange等利用正定函数研究多体问题稳定性。



Joseph-Louis Lagrange (1736 –1813, French and Italian mathematician and astronomer)

Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827, French mathematician and astronomer)

A system of N satellites: ellipses with varying parameters round a body with relatively large mass

$$V_1(e_1,\ldots,e_N) = \sum_{j=1}^{N} m_j\left(a_j\right)^{1/2} e_j^2 = const$$

$$V_1(i_1,\ldots,i_N) = \sum_{j=1}^{N} m_j\left(a_j\right)^{1/2} \tan^2 i_j = const$$

m_j : *mass*, a_j : major semi-axis of ellipse (=const)

e_j : eccentricity, i_j:inclined angle to a fixed reference plane

e_j, i_j *are initially small, they will remain so.(stability)*

Wikipedia/互动百科

A.G.J. Macfarlane, A.T. Fuller, Editorial: Routh centenary issue, Int. J. Control, 1977, Vol.26, No.2, 167-168.

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$

引入一个作为工具的辅助函数，即**Lyapunov**函数或**V**函数：$V(t,x)$：

$V(t,x)$ 与系统状态有关的类似能量的标量函数，具有两个性质：

(1) 除***x=0***外严格正；

(2) 当状态***x***依照变化时, $V(t,x)$ 单调下降：

$$\frac{dV(t,x)}{dt} = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x) \le 0, t > t_0$$

第一个性质被概括为正定函数。

具有性质**(1)**和**(2)**的函数称为系统**(1)**的**Lyapunov**函数。

Lyapunov稳定性理论

1. 正定函数的定义

正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.1 连续可微函数 $W(x): U \to R$**是**

- 正定(**positive definite**)，若

$$\forall x \ne 0: W(x) > 0, \text{且} W(0) = 0$$

- 半正定(**positive semidefinite**)，若

$$\forall x \ne 0: W(x) \ge 0, \text{且} W(0) = 0$$

- 负定(**negative definite**)，若

$$\forall x \ne 0: W(x) < 0, \text{且} W(0) = 0$$

- 半负定(**negative semidefinite**)，若

$$\forall x \ne 0: W(x) \le 0, \text{且} W(0) = 0$$

- 变号或不定(**indefinite**)，若其可正可负。

正定函数的定义

例：

1. $W(x_1,x_2)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$ 为正定函数

2. $W(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$ 为半正定函数

3. $W(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+3x_1x_2$ 为变号函数

4. $W(x)=1+x^Tx$ 不是正定函数（虽然$\forall x\neq 0: W(x)>0$, 但$W(0)=1\neq 0$）

5. $W(x)=x^TPx, P=P^T\in R^{n\times n}$，$W(x)$ 正定当且仅当**P**是正定对称矩阵。

6. $V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}mx_2^2+\int_0^{x_1}(k_0x_1+k_1x_1^3)dx_1$ 为正定函数　　$m>0,\ k_0>0 \text{ or } k_1>0$

7. $V(x_1,x_2)=\sin(x_1)x_1^{\ 2}+\cos(x_2)x_2^{\ 2}$ 不定函数

正定函数的定义

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.2 连续可微函数 $V(t,x):[t_0,+\infty)\times U \to R$ 是

- 正定(**positive definite**)，若 存在正定函数 $W(x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\ge W(x),\ \text{且} V(t,0)=0$$

- 半正定(**positive semidefinite**)，若

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\ge 0,\ \text{且} V(t,0)=0$$

- 负定(**negative definite**)，若存在正定函数 $W(x)$，使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\le -W(x),\ \text{且} V(t,0)=0$$

- 半负定(**negative semidefinite**)，若

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U:\quad V(t,x)\le 0,\ \text{且} V(t,0)=0$$

正定函数的定义

例：

1. $V(t,x_1,x_2)=(a+e^{-t})(x_1^2+x_2^2)(a>0)$为正定函数

2. $V(t,x_1,x_2)=e^{-t}(x_1^2+x_2^2)$ 是半正定的，但不是正定的。

3. $V(t,x)=\dfrac{x^T x}{1+t^2}$ 是半正定的，但不是正定的。

K类函数和正定函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.3 连续函数 $\varphi(r): R^+ \to R^+ (R^+ = \{r \mid r \ge 0\})$是***k*类函数** **(function of class K)**，若 $\varphi(r)$ 严格单调递增，且 $\varphi(0)=0$, 记为 $\varphi(r) \in K$.

引理3.1 $W(x)$是B_h 上的正定函数当且仅当存在 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K$使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le W(x) \le \varphi_2(\|x\|),\quad \forall x \in B_h$$

证明：充分性：若有 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K$，使得 $\varphi_1(\|x\|) \le W(x) \le \varphi_2(\|x\|)$，则显然有

$$\forall x \ne 0 : W(x) > 0, \text{且} W(0) = 0.$$

故 $W(x)$ 为正定函数.

必要性：若 $W(x)$ 为正定函数，定义函数：

$$\varphi_1(r) = \frac{r}{h} \min_{r \le \|x\| \le h} W(x)$$

由 $W(x)$ 的正定性和连续性知，$\varphi_1(r)$ 连续，$\varphi_1(0) = 0$，

且 $r > 0$ 时，$\varphi_1(r) > 0$.

当 $0 < r_1 < r_2 \le h$ 时，

$$\varphi_1(r_1) = \frac{r_1}{h} \min_{r_1 \le \|x\| \le h} W(x) \le \frac{r_1}{h} \min_{r_2 \le \|x\| \le h} W(x) < \frac{r_2}{h} \min_{r_2 \le \|x\| \le h} W(x) = \varphi_1(r_2)$$

因此，$\varphi_1(r)$ 严格单调递增，$\varphi_1(r) \in K$.

又当 $0 < \|x\| \le h$ 时，$\varphi_1(\|x\|) = \frac{\|x\|}{h} \min_{\|x\| \le \|y\| \le h} W(y) \le \min_{\|x\| \le \|y\| \le h} W(y) \le W(x)$

因此，$\varphi_1(r)$ 是满足 $\varphi_1(\|x\|) \le W(x)$ 的K类函数。

同理，定义函数 $\varphi_2(r) = \max_{\|x\| \le r} W(x) + r$,

按前面类似的过程可证明 $\varphi_2(r)$ 是满足 $\varphi_2(\|x\|) \ge W(x)$ 的K类函数。

K类函数和正定函数

设$U \subset R^n$为R^n中包含闭球$B_h = \{x \mid \|x\| \le h\}$的一个邻域。

定义3.3 连续函数 $\varphi(r): R^+ \to R^+ (R^+ = \{r \mid r \ge 0\})$是**k类函数** **(function of class K)**，若 $\varphi(r)$ 严格单调递增，且 $\varphi(0) = 0$, 记为 $\varphi(r) \in K$.

引理3.1 $W(x)$是 B_h 上的正定函数当且仅当存在 $\varphi_1(r), \varphi_2(r) \in K$,使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le W(x) \le \varphi_2(\|x\|), \quad \forall x \in B_h$$

推论3.1 $V(t,x)$ 是 $R \times B_h$上正定函数当且仅当 $V(t,0) = 0$，以及存在 $\varphi_1(r) \in K$, 使得

$$\varphi_1(\|x\|) \le V(t,x), \quad \forall x \in B_h.$$

Lyapunov稳定性理论

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

定理3.1证明： 由于 $V(t,x)$ 正定，由推论**3.1**知，$\exists\varphi(r)\in K$, 使得

$$\forall(t,x)\in[t_0,+\infty)\times B_h,\quad V(t,x)\geq\varphi(\|x\|).$$

因为 $V(t_0,0)=0$, 且 $V(t,x)$ 连续，则 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<h),\exists\delta(t_0,\varepsilon)>0,$

使得 $\forall\|x_0\|<\delta$, 有$V(t_0,x_0)<\varphi(\varepsilon).$

再由**(3.2)**知，$\forall t\geq t_0$, 有

$$\varphi(\|x(t,t_0,x_0)\|)\leq V(t,x(t,t_0,x_0))\leq V(t_0,x_0)<\varphi(\varepsilon).$$

因为$\varphi(\|x\|)\in K$, 严格单调递增，所以：

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon.$$

因此，零解是稳定的。

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

若定理**3.1**中 $V(t,x)$正定的条件换为 $V(t,x)>0(x\neq 0), V(t,0)=0.$

则结论不一定成立!

Lyapunov稳定性理论

例：

$$\dot{x} = 0.5x.$$

其通解为：$x = x_0 e^{\frac{1}{2}(t-t_0)}$. 显然，零解是不稳定的。

做 $V(t,x) = x^2 e^{-2t}$， 则 $V(t,0)=0, V(t,x)>0(x\neq 0)$， 且

$$\dot{V}(t,x) = 2x\dot{x}e^{-2t} - 2x^2e^{-2t} = x^2e^{-2t} - 2x^2e^{-2t} = -x^2e^{-2t} \le 0.$$

原因：

若 $V(t,x)>0(x\neq 0), V(t,0)=0$ 当V单调下降时，$\|x\|$不一定减小。

$V(t=0,x) = x^2(0),$

$V(t=0.5,x) = x^2(0.5)e^{-1},$

$V(t=1,x) = x^2(1)e^{-2},$

$\ldots,$

若 $V(t,x) \ge \varphi(\|x\|)$, 则 $\|x\| \le \varphi^{-1}(V(t,x))$. 当$V$单调下降时，$\|x\|$单调下降。

$V(t,x)>0(x\neq 0), V(t,0)=0.$
$V(t,x)$ 是正定函数：存在 $\varphi(r)\in K$,使得 $V(t,x)\ge\varphi(\|x\|)$.

Lyapunov稳定性理论

例： 考察系统 $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+e^{-t}x=0, t_0\geq 0$ 零解的稳定性

将它写为状态方程形式：$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-p(t)x_2-e^{-t}x_1\end{cases}$

取 $V(t,x)=x_1^2+e^t x_2^2$.因为$V(t,x)\geq x_1^2+x_2^2$，$V(t,x)$为正定的。 又因为

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x)&=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2e^t+x_2^2e^t\\ &=2x_1x_2+2x_2e^t(-p(t)x_2-e^{-t}x_1)+x_2^2e^t\\ &=(1-2p(t))x_2^2e^t\end{aligned}$$

所以，当$p(t)\geq\dfrac{1}{2}$时，$\dot{V}(t,x)\leq 0$, 系统原点稳定。

$p(t)\geq\dfrac{1}{2}$ 为系统原点稳定的充分条件。

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0) = 0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x) \in [t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

➢定理**3.1**的逆定理，即系统零解稳定时，满足**(3.2)**的**Lyapunov**函数的存在性成立。

*稳定性的数学理论及应用，廖晓昕，华中师范大学出版社，**1988.***

Lyapunov稳定性理论

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统(3.1)零解是Lyapunov稳定的。

对定常系统: $$\dot{x} = f(x),\ f(0)=0 \qquad (3.1')$$

定理3.1' 若在$[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(x)\big|_{\dot{x}=f(t,x)} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统(3.1)零解是Lyapunov(一致)稳定的。

Lyapunov稳定性理论

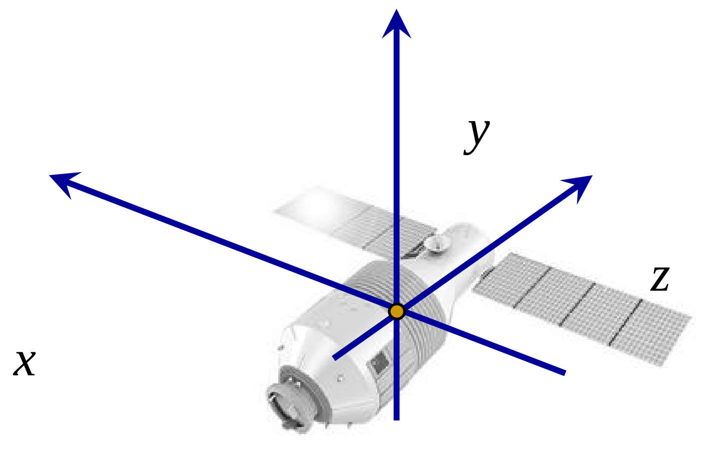
例. 在惯性系内一不受外力作用的刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Eular**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$：为刚体转动角速度的投影

J_1,J_2,J_3：惯性主轴的转动惯量

研究其关于原点 $\bar{\omega}=(0,0,0)$的稳定性。



http://epaper.qdcaijing.com/cjrb/html/2011-10/01/content_67507.htm

Lyapunov稳定性理论

例. 在惯性系内一不受外力作用的刚性飞行器绕固定点转动的动态可用**Eular**方程描述：

$$J_1\dot{\omega}_1=(J_2-J_3)\omega_2\omega_3$$
$$J_2\dot{\omega}_2=(J_3-J_1)\omega_3\omega_1$$
$$J_3\dot{\omega}_3=(J_1-J_2)\omega_1\omega_2$$

$\omega_1,\omega_2,\omega_3$:为刚体转动角速度的投影

J_1,J_2,J_3:惯性主轴的转动惯量

研究其关于原点 $\vec{\omega}=(0,0,0)$的稳定性。

解：取正定函数 $V(x)=J_1\omega_1^2+J_2\omega_2^2+J_3\omega_3^2$，因为

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=2J_1\omega_1\dot{\omega}_1+2J_2\omega_2\dot{\omega}_2+2J_3\omega_3\dot{\omega}_3\\&=2\omega_1(J_2-J_3)\omega_2\omega_3+2\omega_2(J_3-J_1)\omega_3\omega_1+2\omega_3(J_1-J_2)\omega_1\omega_2=0\end{aligned}$$

所以，系统原点是稳定的。

小结

- 稳定性定义
- **Lyapunov**稳定性理论

稳定性定义

- 稳定性(stability) (A.M.Lyapunov[1892])

  一致稳定性(uniform stability) (K.P.Persidski[1933])

- 渐近稳定性(asymptotic stability) (A.M.Lyapunov[1892])

  一致渐近稳定性(uniform asymptotic stability) (I.G.Malkin[1954])

  全局渐近稳定性(global asymptotic stability) (E.A.Barbashin, N.N.Krasovski[1952])

  全局一致渐近稳定性(global uniform asymptotic stability) (..)

- 指数稳定性(exponential stability)

  全局指数稳定性(global exponential stability)

- 完全稳定性(total stability)

- 实用稳定性(practical stability) (Lasalle J. P., Lefschetz S[1961])

Lyapunov稳定性理论

1. 正定函数的定义

定义**3.1** $W(x):U \to R,$

定义**3.2** $V(t,x):[t_0,+\infty)\times U \to R$

定义3.3 ***k*类函数(function of class K)**

引理3.1，推论3.1

2. Lyapunov稳定性定理

$$\dot{x} = f(t,x),\ f(t,0)=0 \qquad (3.1)$$

定理3.1 若在 $[t_0,+\infty)\times U$ 上存在正定函数 $V(t,x)$, 使得

$$\forall (t,x)\in[t_0,+\infty)\times U : \dot{V}(t,x)\Big|_{\dot{x}=f(t,x)} \triangleq \frac{dV(t,x)}{dt} \le 0 \qquad (3.2)$$

则系统**(3.1)**零解是**Lyapunov**稳定的。

第四次作业

查阅一个（课堂没有讲过的）其它稳定性的定义

- 因何问题而提出，最早出处
- 完整定义和描述
- 与其它稳定性概念的区别与联系
- 定理或主要应用在哪些稳定性的研究中
- 例
- ……

第四次作业

考虑系统：

$$\dot{x}_1 = a(t)x_2 + b(t)x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -a(t)x_1 + b(t)x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

利用定理**3.1**，给出一个***a*(*t*),*b*(*t*)**满足的条件，使得系统原点是**Lyapunov**稳定的。

下节课内容

1. 正定函数的定义
2. Lyapunov稳定性定理
3. 一致稳定性定理
4. 一致渐近稳定性定理
5. 不稳定定理

谢谢！