

C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor

FTHA – Finite-Time Heat Addition Otto Engine Model

Prof. C. Naaktgeboren, PhD



<https://github.com/CNThermSci/ApplThermSci>

Compiled on 2020-08-16 19h26m01s UTC

Melhorando o Ciclo Otto Ideal

O ciclo Otto **ideal**, da termodinâmica aplicada:

- Assume todas as **hipóteses padrão a ar**;
- Assume entrada de calor **isocórica**;
- Possui parâmetros r e k , e
- Solução analítica, **hip. padrão a ar frio**:

$$\eta_i = 1 - r^{1-k} \rightarrow$$

- $\eta_i : \eta_i(r, k)$ **apenas!**

- Gás **ideal**;
- Processos **internamente reversíveis**;
- Entrada de **calor** modela a combustão;
- Saída de **calor** modela a exaustão;
- Modelo em **ciclo fechado**;
- Calores específicos **constantes**.

Desvios do ciclo Otto ideal—incluem, mas não limitados a:

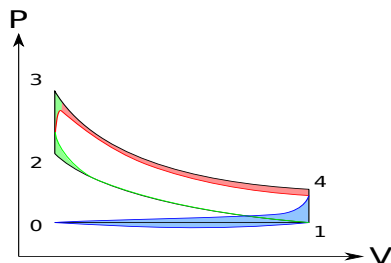


Diagrama $P - V$ ilustrativo de perdas por (i) combustão não instantânea—verde, (ii) transferência de calor—vermelho—e de (iii) bombeamento—azul. Fonte: adaptado de Wikimedia Commons.

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/P-V-diagram-deviations.to.Otto-cycle.svg>.

Ciclo Otto padrão a ar de tempo finito de adição de calor—FTHA

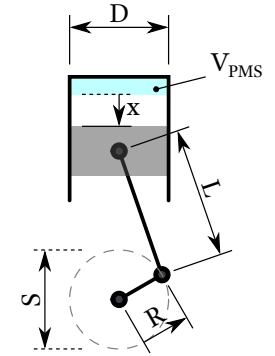
- Modela combustão (adição de calor) de forma **não instantânea**:
 - Interações **simultâneas** de **calor** e **trabalho**;
 - Tempos de motor **discretizados** em sub-processos;
 - Elemento computacional: sub-processo **localmente politrópico**;
 - Remoção** de calor permanece **isocórica** (instantânea).
- Mantém-se como modelo **padrão a ar**:
 - Transferência de calor para bloco inclui **irreversibilidades**;
 - Perdas de bombeamento envolvem **sistema e ciclo abertos**.
- Mantém-se como modelo de **substância pura**:
 - Evita **combustão e equilíbrio químico**;
 - Evita modelagem termodinâmica de **misturas reativas**.

Ciclo Otto padrão a ar de tempo finito de adição de calor—FTHA

- Inclui todos os parâmetros do **ciclo Otto ideal**:
 - Razão de compressão do motor;
 - Calores específicos do fluido de trabalho.
- Inclui parâmetros **construtivos** do motor:
 - Conjunto pistão-cilindro;
 - Mecanismo biela-manivela.
- Inclui parâmetros **operacionais** do motor:
 - Velocidade angular (rotação);
 - Ângulo de ignição e
 - Duração da combustão.

Parâmetros do mecanismo

- Diâmetro do pistão/cilindro, D ;
- Raio da manivela, R ;
- Curso do pistão, $S = 2R$;
- Comprimento da biela, L ;
- Volume morto (do PMS), V_{PMS} ;
- Volume máximo (do PMI), V_{PMI} ;
- Razão de compressão, $r = \frac{V_{PMS}}{V_{PMI}}$.

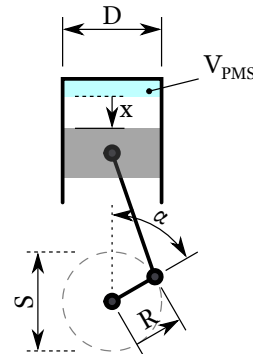


Parâmetros do mecanismo

- Posição do pistão (rel. PMS), x ;
- Ângulo do virabrequim (rel. PMS), α ;
- Volume instantâneo, V ;

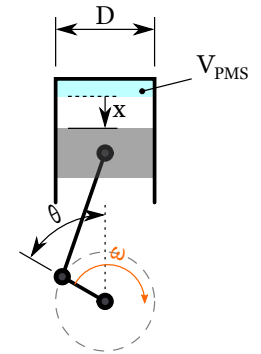
$$x(\alpha) = L \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} \right) + R(1 - \cos \alpha)$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi x(\alpha)}{4} D^2 + V_{PMS} \quad \rightarrow \quad v(\alpha) = \frac{V(\alpha)}{m_0}$$



Parâmetros de tempo do motor

- Ângulo de ignição (rel. PMS), θ ;
- Duração da combustão, Δt_c ;
- Velocidade angular, $\omega \equiv \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi N/60$;
- “Duração angular” da combustão, $\delta = \omega \Delta t_c$;
- Casos de ω constante—discretização em α :
 - Intervalo de simulação: $-\pi \leq \alpha \leq \pi$;
 - Intervalo de adição de calor: $\theta \leq \alpha \leq \theta + \delta$;
 - $\alpha_i = -\pi + i\Delta\alpha$, $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq 2I$, with
 - $\Delta\alpha = \pi/I$, $I \in \mathbb{N}^*$.
- Casos de ω variável—discretização em t .

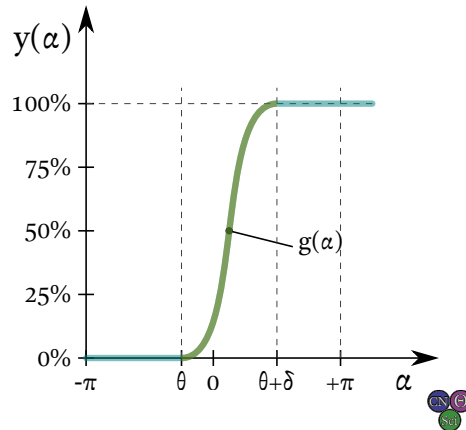


Modelo de Adição de Calor, $q(\alpha)$

$$q(\alpha) = q_{ent} \cdot y(\alpha), \quad \text{com}$$

$$y(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha < \theta, \\ g(\alpha) & \text{para } \theta \leq \alpha \leq \theta + \delta, \\ 1 & \text{para } \alpha > \theta + \delta. \end{cases}$$

- $g(\alpha)$ modela o **histórico** da ad. de calor:
 - $g(\theta) = 0$ e $g(\theta + \delta) = 1$;
 - Função $g(\alpha)$ deve ser **monotônica**;
 - $g(\alpha)$ pode basear-se em **experimentos**;
 - Lit.: $g(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\delta}(\alpha - \theta)\right)$.



Equações Termodinâmicas

No i -ésimo (sub-)processo politrópico:

- O sistema evolui do **estado- i** para o **estado- $(i + 1)$** .
- **Propriedades** P_i, T_i, v_i, u_i , etc., definidas nos **estados** $-i$ e $-(i + 1)$.
- **Interações** do i -ésimo **processo** são q_i e w_i .

Balanco de energia de processo:

$$q_i + w_i = \Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \rightarrow$$

$$u_{i+1} = u_i + q_i + w_i, \quad \text{com,}$$

Equações Termodinâmicas

$$q_i = q_{ent} \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \rightarrow$$

$$q_i = q_{ent} \cdot [y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)], \quad \text{e}$$

$$w_i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} (P_i v_i^{n_i}) v^{-n_i} dv, \quad \rightarrow$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{P_i v_i}{1 - n_i} \left[1 - \left(\frac{v_i}{v_{i+1}} \right)^{n_i - 1} \right], & \text{para } n_i \neq 1, \\ P_i v_i \ln \frac{v_i}{v_{i+1}}, & \text{para } n_i = 1, \\ 0, & \text{para } v_i \approx v_{i+1} \quad \rightarrow \quad |v_i - v_{i+1}| \leq \epsilon_v. \end{cases}$$

Solução de Sub-Processo

Conjectura (de consistência termodinâmica)

Para uma dada interação de calor, q_i , existe um **único expoente politrópico**, n_i , tal que o processo politrópico $Pv^{n_i} = C_i = \text{const.}$, aplicado entre estados (i) e $(i + 1)$ resulta em uma interação de trabalho, w_i , e em uma variação de energia interna, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$, que é **termodinamicamente consistente** com a equação P - v - T de estado da substância de trabalho em ambos estados finais e que também satisfaz o **balanço de energia** do processo.

\rightarrow Processo de **estimativa** (n_i^0) e j -ésima **correção** (n_i^j) até a convergência.

\rightarrow Tolerâncias de convergência ϵ_w e ϵ_u .

Correção do Expoente Politrópico

- Com n_i^j é possível obter w_i^j e u_{i+1}^j por **balanço de energia**;
- P_{i+1}^j pode ser obtida via u_{i+1}^j e o **modelo de substância**;
- O novo expoente n_i^{j+1} pode ser achado pelo **processo politrópico**:

$$P_i v_i^{n_i^{j+1}} = P_{i+1}^j v_{i+1}^{n_i^{j+1}} \rightarrow n_i^{j+1} = \frac{\ln \frac{P_{i+1}^j}{P_i}}{\ln \frac{v_i}{v_{i+1}}}.$$

Algoritmo de Inicialização

- REQUER:** Parâmetros do motor: $\{\omega, D, L, R, V_{PMS}, \text{ e } V_{du}\}$;
REQUER: Ângulos θ e δ (via Δt_c);
REQUER: Refinamento da discretização, I ;
REQUER: Estado inicial (P_0, T_0) e modelo de substância;
REQUER: Função $g(\alpha)$ e q_{ent} ;
REQUER: Tolerâncias de convergência ε_v , ε_w e ε_u .
 1: Inicializa todas quant. com índice i como vetores vazios: α_i , v_i , q_i , w_i , n_i , P_i , T_i , and u_i ;
 2: Calcula $\Delta\alpha = \pi/I$ e todos $\alpha_i = -\pi + i\Delta\alpha$;
 3: $v_0 \leftarrow$ volume específico, de (P_0, T_0) e equação de estado;
 4: $m \leftarrow V_0/v_0$;
 5: Calcula todos $v_i = V(\alpha_i)/m$;
 6: $i \leftarrow 0$;

Algoritmo de Laço do Ciclo

- PARA** $i = 0$ até $2I$ **FAÇA**
- Calcula $q_i = q_{ent} \cdot [y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)]$;
- Resolve para w_i , n_i , u_{i+1} , P_{i+1} e T_{i+1} via algoritmo de solução de sub-processo;
- FIM**
- $i \leftarrow i + 1$;
- $q_i \leftarrow u_0 - u_i$;
- $w_i \leftarrow 0$;
- Estado-(i) = Estado-0; {Para todas as funções de estado rastreadas}

Algoritmo de Finalização

- $w_{ent} \leftarrow \sum w_i \geq 0$; {Trabalho que entra no sistema em um ciclo}
- $w_{out} \leftarrow -\sum w_i < 0$; {Trabalho realizado pelo sistema em um ciclo}
- $w_{net} \leftarrow w_{out} - w_{ent}$; {Trabalho líquido realizado pelo sistema no ciclo}
- $q_{ent} \leftarrow \sum q_i \geq 0$; {Calor que entra no sistema em um ciclo}
- $q_{rej} \leftarrow -\sum q_i < 0$; {Calor rejeitado pelo sistema em um ciclo}
- $\eta_t \leftarrow w_{net}/q_{ent}$; {Eficiência térmica}
- $r_{bw} \leftarrow w_{ent}/w_{out}$; {Razão de consumo de trabalho}
- $MEP \leftarrow w_{net}/(V_{du}/m)$; {Pressão média efetiva}
- Salva dados da simulação para o pós-processamento (relatório).

Algoritmo de Solução de Sub-Processo

```


1: SE  $|v_i - v_{i+1}| \leq \epsilon_v$  ENTÃO
2:   {Processo isocórico}
3:    $u_{i+1} \leftarrow u_i + q_i$ ;
4:   Calcula  $T_{i+1}$  via  $u_{i+1}$  pelo modelo (biblioteca) de substância;
5:   Calcula  $P_{i+1}$  pela equação de estado;
6: SENÃO
7:   {Processo politrópico}
8:   ...
9: FIM
  
```


Algoritmo de Solução de Sub-Processo Politrópico

```

1:  $j \leftarrow 0$ ;
2: Inicializa vetores  $n_i, w_i, u_{i+1}, T_{i+1}$  e  $P_{i+1}$ ;
3:  $n_i^j \leftarrow 1 + R_{gas}/c_v(T_i)$ ; {Chute inicial isentrópico}
4: Calcula  $w_i^j$  com  $n_i = n_i^j$ ;
5: ENQUANTO  $j = 0$  OU  $|w_i^{j-1} - w_i^j| \geq \epsilon_w$  FAÇA
6:    $u_{i+1}^j \leftarrow u_i + q_i + w_i^j$  com  $w_i = w_i^j$ ;
7:   Calcula  $T_{i+1}$  via  $u_{i+1}$  pelo modelo (biblioteca) de substância;
8:   Calcula  $P_{i+1}$  pela equação de estado;
9:   Corrige  $n_i^{j+1}$  pelo processo politrópico;
10:   $j \leftarrow j + 1$ ;
11:  Calcula  $w_i^j$  com  $n_i = n_i^j$ ;
12: FIM
13:  $n_i, w_i, u_{i+1}, T_{i+1}$  e  $P_{i+1} \leftarrow$  seus últimos elementos  $j$ ; {Reverte vetores (linha 2)}
  
```

Tópicos de Leitura I

 Çengel, Y. A. e Boles, M. A.
Termodinâmica 7ª Edição. Seções 9–3 a 9–5.
AMGH. Porto Alegre. ISBN 978-85-8055-200-3.

 Naaktgeboren, C.
An air-standard finite-time heat addition Otto engine model.
Int. J. Mech. Eng. Educ. 45 (2), 2017.
DOI 10.1177/0306419016689447.

Importância da Validação

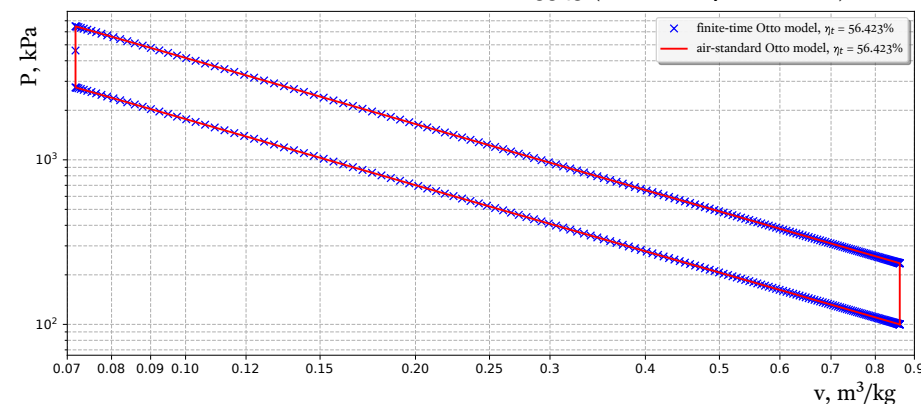
- Uma **solução numérica** é o resultado de **muitas operações**;
- Tais operações seguem um **algoritmo implementado**;
- O algoritmo é a estratégia de solução do **modelo matemático**;
- O modelo matemático é a descrição do **modelo físico**;
- O modelo físico vêm da **teoria**;
- A teoria advém de **hipóteses** formuladas e testadas por cientistas;
- As hipóteses são formuladas da **observação da realidade**.
- \therefore há um **longo caminho** entre a **realidade** e a **solução numérica**!
- Como saber se a solução numérica não retorna “garbage”? \rightarrow **Validação**!

O que é Validação?

Resultados de um modelo numérico só são **confiáveis** se o modelo for **validado**:

- Ajusta-se **parâmetros** do modelo, tal que represente algo com **solução conhecida**.
- Tal solução conhecida deve ser **confiável**:
 - Seja por ter uma relação mais direta com a **realidade**, a saber: **experimentos**;
 - Seja por comprovada exatidão, a saber: **solução analítica** do mesmo **modelo matemático**;
- O FTHA melhora o **ciclo Otto ideal** e **pode ser reduzido** a ele, via $\delta = 0$;
- O ciclo Otto ideal (padrão a ar frio) possui **solução exata**!
- FTHA é validado caso produza **resultado próximo** da solução exata!
- Quanto **mais casos** de validação forem feitos, melhor!

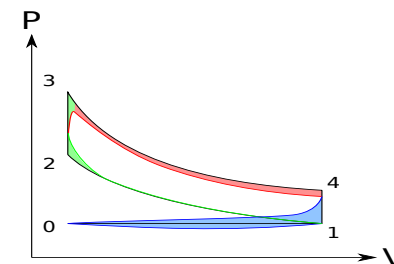
Model validation for $r = 12$ and $k = 1.3343$ (constant c_v for hot air)



Estudos de Caso

- Estudos de caso é a **aplicação** do modelo em **situações desejadas**:
 - É onde se coleta as **previsões** do modelo!
 - É onde **expectativas** educadas podem ser ou não confirmadas!
 - É de onde se **aprende** com o modelo, pela **análise das previsões**.
- O artigo que traz o FTHA contém um estudo de caso, um **teste de rotação**:
 - Para Δt_c fixo, δ **aumenta com a rotação**.
 - **Espera-se** ciclos parecidos com o Otto ideal para baixos valores de δ ;
 - **Espera-se** desvios progressivos e queda na eficiência com aumento de δ ;
 - **Espera-se** quedas progressivas na pressão máxima com aumento de δ ;
 - **Espera-se** diagramas P - v parecidos com o ilustrado anteriormente:

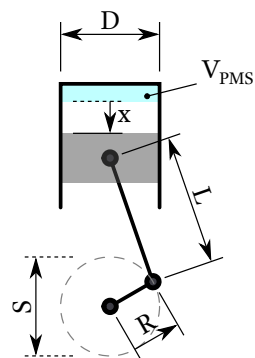
Recapitulando: Desvios do ciclo Otto ideal



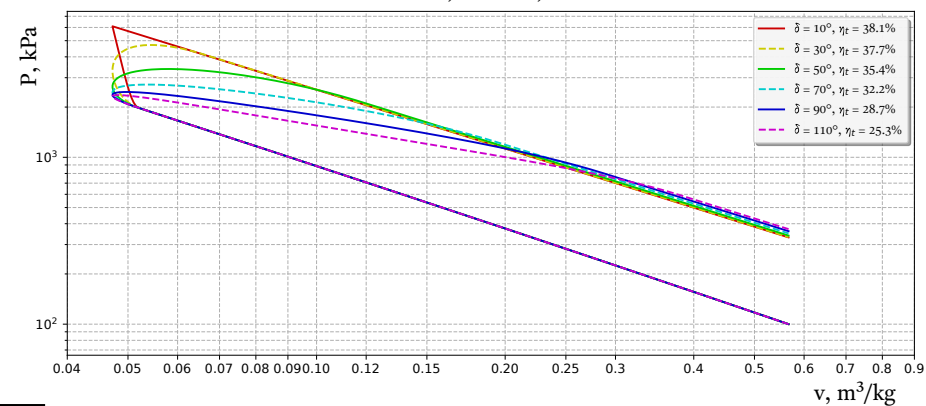
Espera-se que o FTHA prediga ciclos incorporando efeitos de combustão não instantânea—verde, e não os demais efeitos de transferência de calor—vermelho—e de bombeamento—azul. Fonte: adaptado de Wikimedia Commons. https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/P-V_diagram_deviations_to_Otto_cycle.svg.

Estudo de Caso

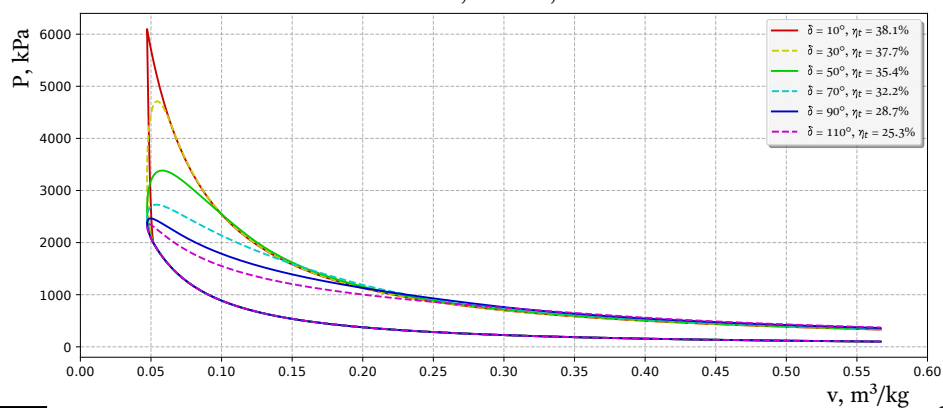
- Motor quadrado, $S = D$, com
- $V_{du} = 250 \text{ cm}^3$, $L/R = 5$ e $r = 12:1$;
- Fluido de trabalho CO_2 como gás ideal e
- $\bar{c}_v(T)$ como polinômio de 5º grau;
- $\Delta\alpha = 0.5^\circ$ na adição de calor $q_{ent} = 1000 \text{ kJ/kg}$;
- Ignição $\theta = -10^\circ$ em todos os casos;
- Variação de δ em $\{10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ, 110^\circ\}$.
- Caso $\delta = 10^\circ$: adição de calor termina no PMS!



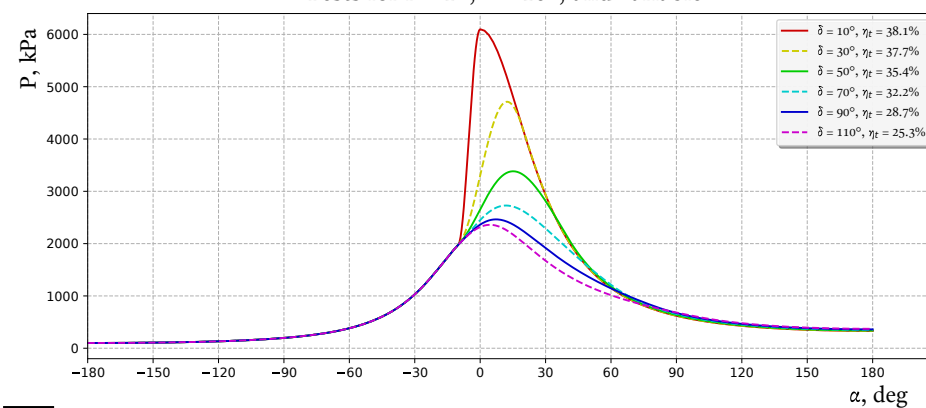
Tests for $r = 12$, $\theta = -10^\circ$, and variable δ



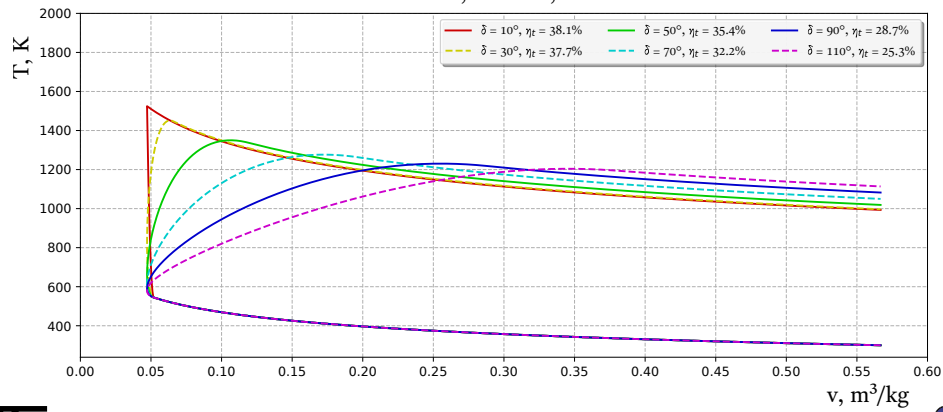
Tests for $r = 12$, $\theta = -10^\circ$, and variable δ



Tests for $r = 12$, $\theta = -10^\circ$, and variable δ



Tests for $r = 12$, $\theta = -10^\circ$, and variable δ



Tópicos de Leitura I



Çengel, Y. A. e Boles, M. A.

Termodinâmica 7ª Edição. Seções 9–3 a 9–5.

AMGH. Porto Alegre. ISBN 978-85-8055-200-3.



Naaktgeboren, C.

An air-standard finite-time heat addition Otto engine model.

Int. J. Mech. Eng. Educ. 45 (2), 2017.

DOI 10.1177/0306419016689447.