

## C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor

FTHA – Finite-Time Heat Addition Otto Engine Model

Prof. C. Naaktgeboren, PhD


<https://github.com/CNThermSci/AplThermSci>

Compiled on 2020-09-15 00h28m11s UTC



Prof. C. Naaktgeboren, PhD

C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor



## Parte I

## Apresentação do Modelo FTHA



Prof. C. Naaktgeboren, PhD

C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor

Introdução  
Modelagem FTHA  
Tópicos de LeituraLimitações do Ciclo Otto Ideal  
Proposta do Ciclo Otto FTHA

## Melhorando o Ciclo Otto Ideal

O ciclo Otto **ideal**, da termodinâmica aplicada:

- Assume todas as hipóteses padrão a ar;
  - Assume entrada de calor isocórica;
  - Possui parâmetros  $r$  e  $k$ , e
  - Solução analítica, hip. padrão a ar frio:
- $$\eta_i = 1 - r^{1-k} \rightarrow$$
- $\eta_i : \eta_i(r, k)$  apenas!
  - Gás ideal;
  - Processos internamente reversíveis;
  - Entrada de calor modela a combustão;
  - Saída de calor modela a exaustão;
  - Modelo em ciclo fechado;
  - Calores específicos constantes.



Prof. C. Naaktgeboren, PhD

C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor

Introdução  
Modelagem FTHA  
Tópicos de LeituraLimitações do Ciclo Otto Ideal  
Proposta do Ciclo Otto FTHA

## Desvios do ciclo Otto ideal—incluem, mas não limitados a:

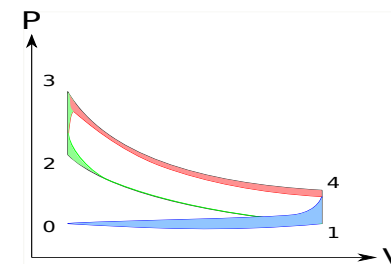


Diagrama  $P - V$  ilustrativo de perdas por (i) combustão não instantânea—verde, (ii) transferência de calor—vermelho—e de (iii) bombeamento—azul. Fonte: adaptado de Wikimedia Commons.

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/P-V-diagram-deviations.to.Otto-cycle.svg>.



Prof. C. Naaktgeboren, PhD

C.01.01 – Ciclo Otto de Tempo Finito de Adição de Calor



## Ciclo Otto padrão a ar de tempo finito de adição de calor—FTHA

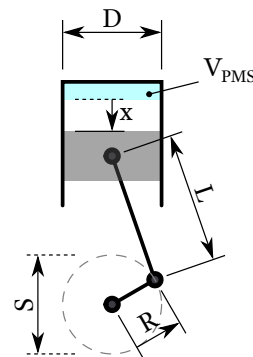
- Modela combustão (adição de calor) de forma não instantânea:
  - Interações simultâneas de calor e trabalho;
  - Tempos de motor discretizados em sub-processos;
  - Elemento computacional: sub-processo localmente politrópico;
  - Remoção de calor permanece isocórica (instantânea).
- Mantém-se como modelo padrão a ar:
  - Transferência de calor para bloco inclui irreversibilidades;
  - Perdas de bombeamento envolvem sistema e ciclo abertos.
- Mantém-se como modelo de substância pura:
  - Evita combustão e equilíbrio químico;
  - Evita modelagem termodinâmica de misturas reativas.

## Ciclo Otto padrão a ar de tempo finito de adição de calor—FTHA

- Inclui todos os parâmetros do ciclo Otto ideal:
  - Razão de compressão do motor;
  - Calores específicos do fluido de trabalho.
- Inclui parâmetros construtivos do motor:
  - Conjunto pistão-cilindro;
  - Mecanismo biela-manivela.
- Inclui parâmetros operacionais do motor:
  - Velocidade angular (rotação);
  - Ângulo de ignição e
  - Duração da combustão.

## Parâmetros do mecanismo

- Diâmetro do pistão/cilindro,  $D$ ;
- Raio da manivela,  $R$ ;
- Curso do pistão,  $S = 2R$ ;
- Comprimento da biela,  $L$ ;
- Volume morto (do PMS),  $V_{PMS}$ ;
- Volume máximo (do PMI),  $V_{PMI}$ ;
- Razão de compressão,  $r = \frac{V_{PMS}}{V_{PMI}}$ .

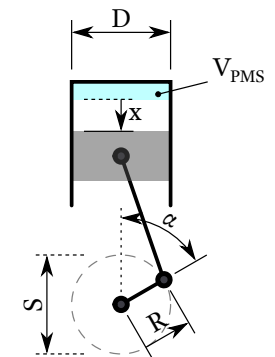


## Parâmetros do mecanismo

- Posição do pistão (rel. PMS),  $x$ ;
- Ângulo do virabrequim (rel. PMS),  $\alpha$ ;
- Volume instantâneo,  $V$ ;

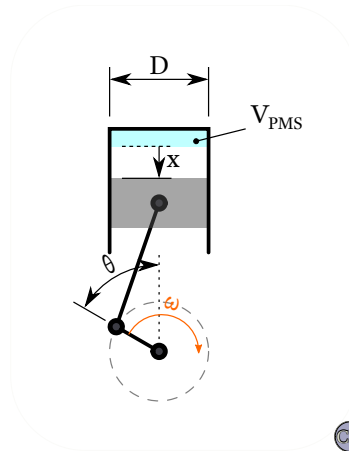
$$x(\alpha) = L \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} \right) + R(1 - \cos \alpha)$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi x(\alpha)}{4} D^2 + V_{PMS} \quad \rightarrow \quad v(\alpha) = \frac{V(\alpha)}{m_0}$$



## Parâmetros de tempo do motor

- Ângulo de ignição (rel. PMS),  $\theta$ ;
- Duração da combustão,  $\Delta t_c$ ;
- Velocidade angular,  $\omega \equiv \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi N/60$ ;
- “Duração angular” da combustão,  $\delta = \omega \Delta t_c$ ;
- Casos de  $\omega$  constante—discretização em  $\alpha$ :
  - Intervalo de simulação:  $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$ ;
  - Intervalo de adição de calor:  $\theta \leq \alpha \leq \theta + \delta$ ;
  - $\alpha_i = -\pi + i\Delta\alpha$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq i \leq 2I$ , with
  - $\Delta\alpha = \pi/I$ ,  $I \in \mathbb{N}^*$ .
- Casos de  $\omega$  variável—discretização em  $t$ .

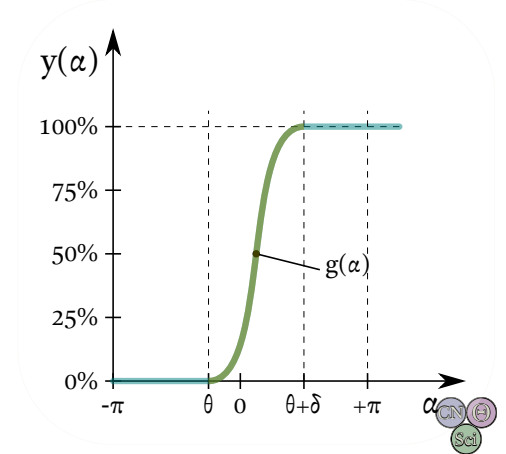


## Modelo de Adição de Calor, $q(\alpha)$

$$q(\alpha) = q_{ent} \cdot y(\alpha), \quad \text{com}$$

$$y(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha < \theta, \\ g(\alpha) & \text{para } \theta \leq \alpha \leq \theta + \delta, \\ 1 & \text{para } \alpha > \theta + \delta. \end{cases}$$

- $g(\alpha)$  modela o histórico da ad. de calor:
  - $g(\theta) = 0$  e  $g(\theta + \delta) = 1$ ;
  - Função  $g(\alpha)$  deve ser monotônica;
  - $g(\alpha)$  pode basear-se em experimentos;
  - Lit.:  $g(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\delta}(\alpha - \theta)\right)$ .



## Equações Termodinâmicas

No  $i$ -ésimo (sub-)processo politrópico:

- O sistema evolui do estado- $i$  para o estado- $(i+1)$ .
- Propriedades  $P_i$ ,  $T_i$ ,  $v_i$ ,  $u_i$ , etc., definidas nos estados  $-i$  e  $-(i+1)$ .
- Interações do  $i$ -ésimo processo são  $q_i$  e  $w_i$ .

Balanco de energia de processo:

$$q_i + w_i = \Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \rightarrow$$

$$u_{i+1} = u_i + q_i + w_i, \quad \text{com,}$$

## Equações Termodinâmicas

$$q_i = q_{ent} \cdot (y_{i+1} - y_i) \quad \rightarrow$$

$$q_i = q_{ent} \cdot [y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)], \quad \text{e}$$

$$w_i = \int_{v_i}^{v_{i+1}} (P_i v_i^{n_i}) v^{-n_i} dv, \quad \rightarrow$$

$$w_i = \begin{cases} \frac{P_i v_i}{1 - n_i} \left[ 1 - \left( \frac{v_i}{v_{i+1}} \right)^{n_i - 1} \right], & \text{para } n_i \neq 1, \\ P_i v_i \ln \frac{v_i}{v_{i+1}}, & \text{para } n_i = 1, \\ 0, & \text{para } v_i \approx v_{i+1} \quad \rightarrow \quad |v_i - v_{i+1}| \leq \epsilon_v. \end{cases}$$

## Solução de Sub-Processo

### Conjectura (de consistência termodinâmica)

Para uma dada interação de calor,  $q_i$ , existe um *único expoente politrópico*,  $n_i$ , tal que o processo politrópico  $Pv^{n_i} = C_i = \text{const.}$ , aplicado entre estados  $(i)$  e  $(i+1)$  resulta em uma interação de trabalho,  $w_i$ , e em uma variação de energia interna,  $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ , que é termodinamicamente consistente com a equação  $P$ - $v$ - $T$  de estado da substância de trabalho em ambos estados finais e que também satisfaz o balanço de energia do processo.

→ Processo de estimativa ( $n_i^0$ ) e  $j$ -ésima correção ( $n_i^j$ ) até a convergência.

→ Tolerâncias de convergência  $\epsilon_w$  e  $\epsilon_u$ .

## Correção do Expoente Politrópico

- Com  $n_i^j$  é possível obter  $w_i^j$  e  $u_{i+1}^j$  por balanço de energia;
- $P_{i+1}^j$  pode ser obtida via  $u_{i+1}^j$  e o modelo de substância;
- O novo expoente  $n_i^{j+1}$  pode ser achado pelo processo politrópico:

$$P_i v_i^{n_i^{j+1}} = P_{i+1}^j v_{i+1}^{n_i^{j+1}} \quad \rightarrow \quad n_i^{j+1} = \frac{\ln \frac{P_{i+1}^j}{P_i}}{\ln \frac{v_i}{v_{i+1}}}.$$

## Algoritmo de Inicialização

**REQUER:** Parâmetros do motor:  $\{\omega, D, L, R, V_{\text{PMS}}, \text{ e } V_{du}\}$ ;  
**REQUER:** Ângulos  $\theta$  e  $\delta$  (via  $\Delta t_c$ );  
**REQUER:** Refinamento da discretização,  $I$ ;  
**REQUER:** Estado inicial  $(P_0, T_0)$  e modelo de substância;  
**REQUER:** Função  $g(\alpha)$  e  $q_{ent}$ ;  
**REQUER:** Tolerâncias de convergência  $\epsilon_v$ ,  $\epsilon_w$  e  $\epsilon_u$ .  
 1: Inicializa todas quant. com índice  $i$  como vetores vazios:  $\alpha_i$ ,  $v_i$ ,  $q_i$ ,  $w_i$ ,  $n_i$ ,  $P_i$ ,  $T_i$ , and  $u_i$ ;  
 2: Calcula  $\Delta\alpha = \pi/I$  e todos  $\alpha_i = -\pi + i\Delta\alpha$ ;  
 3:  $v_0 \leftarrow$  volume específico, de  $(P_0, T_0)$  e equação de estado;  
 4:  $m \leftarrow V_0/v_0$ ;  
 5: Calcula todos  $v_i = V(\alpha_i)/m$ ;  
 6:  $i \leftarrow 0$ ;

## Algoritmo de Laço do Ciclo

1: **PARA**  $i = 0$  até  $2I$  **FAÇA**  
 2:   Calcula  $q_i = q_{ent} \cdot [y(\alpha_{i+1}) - y(\alpha_i)]$ ;  
 3:   Resolve para  $w_i$ ,  $n_i$ ,  $u_{i+1}$ ,  $P_{i+1}$  e  $T_{i+1}$  via algoritmo de solução de sub-processo;  
 4: **FIM**  
 5:  $i \leftarrow i + 1$ ;  
 6:  $q_i \leftarrow u_0 - u_i$ ;  
 7:  $w_i \leftarrow 0$ ;  
 8: Estado- $(i)$  = Estado-0; {Para todas as funções de estado rastreadas}

## Algoritmo de Finalização

```

1:  $w_{ent} \leftarrow \sum w_i \geq 0$ ; {Trabalho que entra no sistema em um ciclo}
2:  $w_{out} \leftarrow -\sum w_i < 0$ ; {Trabalho realizado pelo sistema em um ciclo}
3:  $w_{net} \leftarrow w_{out} - w_{ent}$ ; {Trabalho líquido realizado pelo sistema no ciclo}
4:  $q_{ent} \leftarrow \sum q_i \geq 0$ ; {Calor que entra no sistema em um ciclo}
5:  $q_{rej} \leftarrow -\sum q_i < 0$ ; {Calor rejeitado pelo sistema em um ciclo}
6:  $\eta_t \leftarrow w_{net}/q_{ent}$ ; {Eficiência térmica}
7:  $r_{bw} \leftarrow w_{ent}/w_{out}$ ; {Razão de consumo de trabalho}
8:  $MEP \leftarrow w_{net}/(V_{du}/m)$ ; {Pressão média efetiva}
9: Salva dados da simulação para o pós-processamento (relatório).

```

## Algoritmo de Solução de Sub-Processo

```

1: SE  $|v_i - v_{i+1}| \leq \epsilon_v$  ENTÃO
2:   {Processo isocórico}
3:    $u_{i+1} \leftarrow u_i + q_i$ ;
4:   Calcula  $T_{i+1}$  via  $u_{i+1}$  pelo modelo (biblioteca) de substância;
5:   Calcula  $P_{i+1}$  pela equação de estado;
6:   Calcula  $n_i$  pelo processo politrópico ou faz  $n_i \leftarrow +\infty$  em caso de excessão;
7: SENÃO
8:   {Processo politrópico}
9:   ...
10: FIM

```



## Algoritmo de Solução de Sub-Processo Politrópico

```

1:  $j \leftarrow 0$ ;
2: Inicializa vetores  $n_i, w_i, u_{i+1}, T_{i+1}$  e  $P_{i+1}$ ;
3:  $n_i^j \leftarrow 1 + R_{gas}/c_v(T_i)$ ; {Chute inicial isentrópico}
4: Calcula  $w_i^j$  com  $n_i = n_i^j$ ;
5: ENQUANTO  $j = 0$  OU  $|w_i^{j-1} - w_i^j| \geq \epsilon_w$  FAÇA
6:    $u_{i+1}^j \leftarrow u_i + q_i + w_i^j$  com  $w_i = w_i^j$ ;
7:   Calcula  $T_{i+1}$  via  $u_{i+1}$  pelo modelo (biblioteca) de substância;
8:   Calcula  $P_{i+1}$  pela equação de estado;
9:   Corrige  $n_i^{j+1}$  pelo processo politrópico;
10:   $j \leftarrow j + 1$ ;
11:  Calcula  $w_i^j$  com  $n_i = n_i^j$ ;
12: FIM
13:  $n_i, w_i, u_{i+1}, T_{i+1}$  e  $P_{i+1} \leftarrow$  seus últimos elementos  $j$ ; {Reverte vetores (linha 2)}

```

## Tópicos de Leitura I

-  Çengel, Y. A. e Boles, M. A.  
*Termodinâmica 7ª Edição*. Seções 9–3 a 9–5.  
AMGH. Porto Alegre. ISBN 978-85-8055-200-3.
-  Naaktgeboren, C.  
*An air-standard finite-time heat addition Otto engine model*.  
Int. J. Mech. Eng. Educ. 45 (2), 2017.  
DOI 10.1177/0306419016689447.

## Parte II

# Validação e Estudo de Caso com FTHA

## Importância da Validação

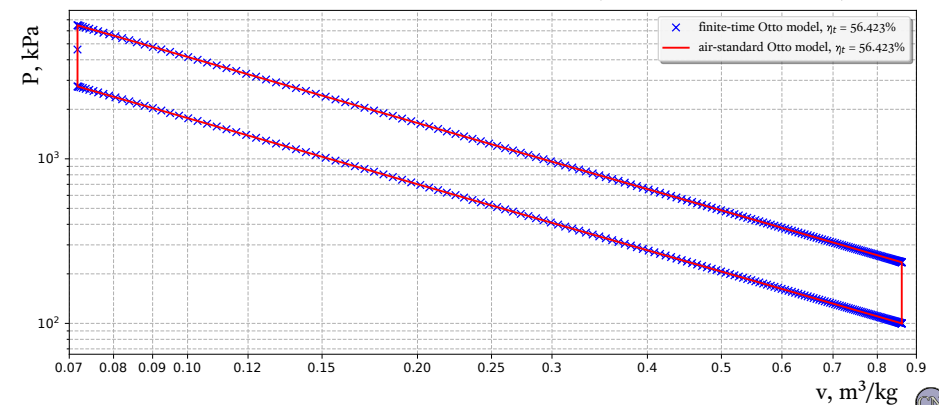
- Uma solução numérica é o resultado de muitas operações;
- Tais operações seguem um algoritmo implementado;
- O algoritmo é a estratégia de solução do modelo matemático;
- O modelo matemático é a descrição do modelo físico;
- O modelo físico vem da teoria;
- A teoria advém de hipóteses formuladas e testadas por cientistas;
- As hipóteses são formuladas da observação da realidade.
- $\therefore$  há um longo caminho entre a realidade e a solução numérica!
- Como saber se a solução numérica não retorna “garbage”?  $\rightarrow$  Validação!

## O que é Validação?

Resultados de um modelo numérico só são confiáveis se o modelo for validado:

- Ajusta-se parâmetros do modelo, tal que represente algo com solução conhecida.
- Tal solução conhecida deve ser confiável:
  - Seja por ter uma relação mais direta com a realidade, a saber: experimentos;
  - Seja por comprovada exatidão, a saber: solução analítica do mesmo modelo matemático;
- O FTHA melhora o ciclo Otto ideal e pode ser reduzido a ele, via  $\delta = 0$ ;
- O ciclo Otto ideal (padrão a ar frio) possui solução exata!
- FTHA é validado caso produza resultado próximo da solução exata!
- Quanto mais casos de validação forem feitos, melhor!

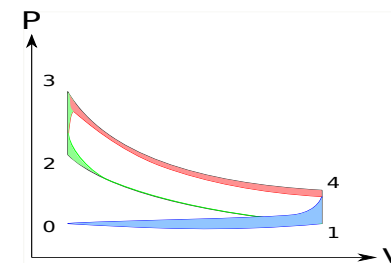
## Model validation for $r = 12$ and $k = 1.3343$ (constant $c_v$ for hot air)



## Estudos de Caso

- Estudos de caso é a aplicação do modelo em situações desejadas:
  - É onde se coleta as previsões do modelo!
  - É onde expectativas educadas podem ser ou não confirmadas!
  - É de onde se aprende com o modelo, pela análise das previsões.
- O artigo que traz o FTHA contém um estudo de caso, um teste de rotação:
  - Para  $\Delta t_c$  fixo,  $\delta$  aumenta com a rotação.
  - Espera-se ciclos parecidos com o Otto ideal para baixos valores de  $\delta$ ;
  - Espera-se desvios progressivos e queda na eficiência com aumento de  $\delta$ ;
  - Espera-se quedas progressivas na pressão máxima com aumento de  $\delta$ ;
  - Espera-se diagramas  $P$ - $v$  parecidos com o ilustrado anteriormente:

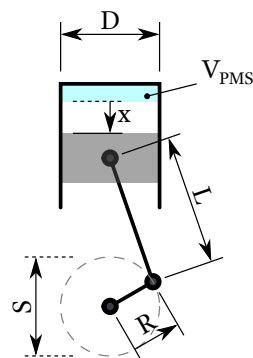
## Recapitulando: Desvios do ciclo Otto ideal



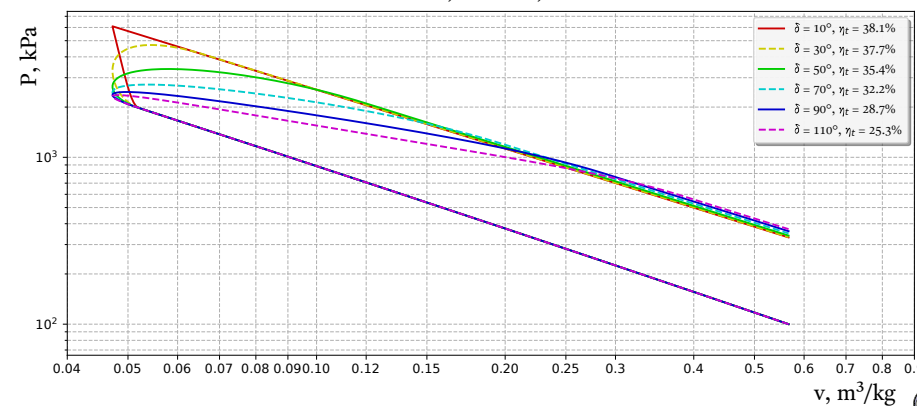
Espera-se que o FTHA prediga ciclos incorporando efeitos de combustão não instantânea—verde, e não os demais efeitos de transferência de calor—vermelho—e de bombeamento—azul. Fonte: adaptado de Wikimedia Commons. [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/P-V\\_diagram\\_deviations\\_to\\_Otto\\_cycle.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6c/P-V_diagram_deviations_to_Otto_cycle.svg).

## Estudo de Caso

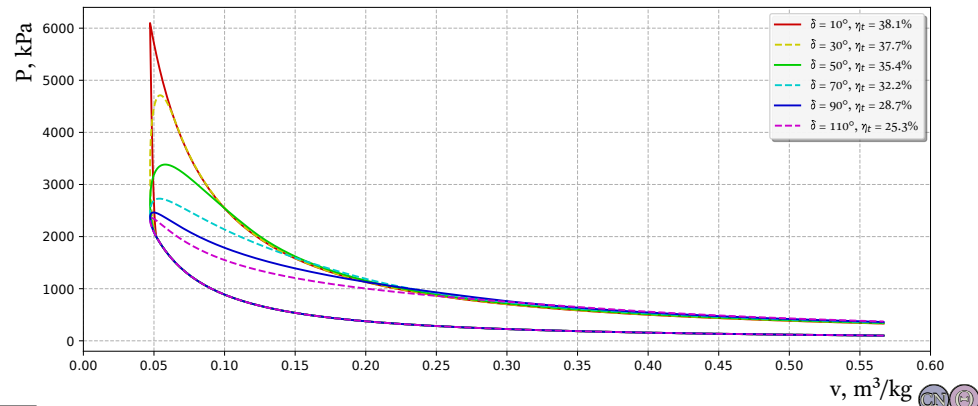
- Motor quadrado,  $S = D$ , com
- $V_{du} = 250 \text{ cm}^3$ ,  $L/R = 5$  e  $r = 12:1$ ;
- Fluido de trabalho  $\text{CO}_2$  como gás ideal e
- $\bar{c}_v(T)$  como polinômio de 5º grau;
- $\Delta\alpha = 0.5^\circ$  na adição de calor  $q_{ent} = 1000 \text{ kJ/kg}$ ;
- Ignição  $\theta = -10^\circ$  em todos os casos;
- Variação de  $\delta$  em  $\{10^\circ, 30^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 90^\circ, 110^\circ\}$ .
- Caso  $\delta = 10^\circ$ : adição de calor termina no PMS!



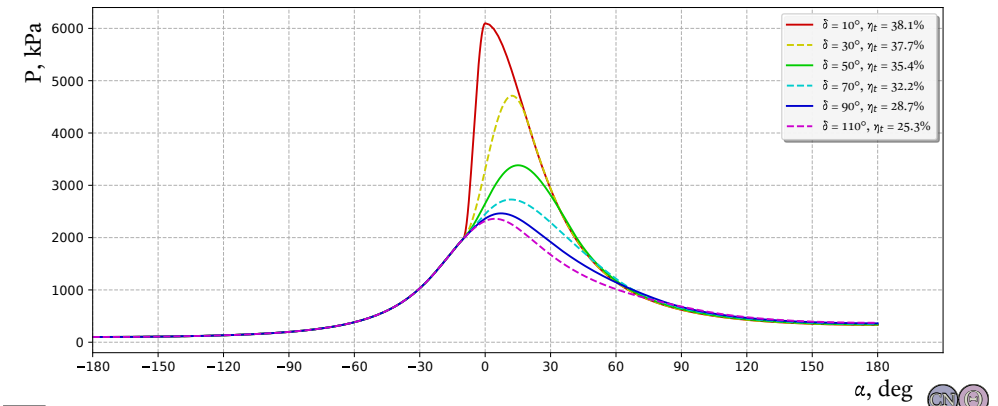
## Tests for $r = 12$ , $\theta = -10^\circ$ , and variable $\delta$



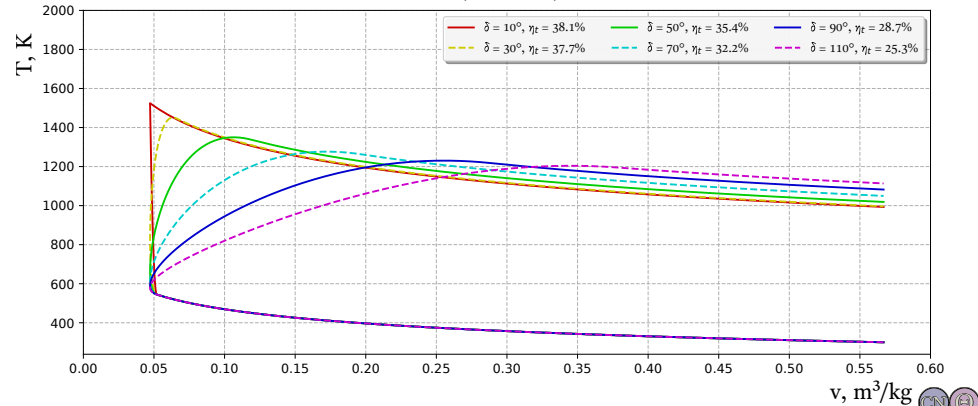
Tests for  $r = 12$ ,  $\theta = -10^\circ$ , and variable  $\delta$



Tests for  $r = 12$ ,  $\theta = -10^\circ$ , and variable  $\delta$



Tests for  $r = 12$ ,  $\theta = -10^\circ$ , and variable  $\delta$



## Tópicos de Leitura I



Brunetti, F.

*Motores de combustão interna. Capítulos 1 e 2.*

Blücher. São Paulo. ISBN 978-85-2120-708-5.



Naaktgeboren, C.

*An air-standard finite-time heat addition Otto engine model.*

Int. J. Mech. Eng. Educ. 45 (2), 2017.

DOI 10.1177/0306419016689447.