
Musterklausur mit Lösung zur Vorlesung “Analysis”

Aufgabe 1:

(a) Wie lautet die Definition des Grenzwerts einer Folge? (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition des Grenzwerts einer Folge, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

gilt.

(8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $K := \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq K$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \\ \Rightarrow n &> \frac{1}{\varepsilon} & | \cdot \varepsilon \\ \Rightarrow n \cdot \varepsilon &> 1 & | \cdot \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \varepsilon &> \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \varepsilon &> \frac{1}{n^2} & \text{denn } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da andererseits $0 < \frac{1}{n^2}$ gilt, haben wir insgesamt für alle $n > K$

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} \right| &< \varepsilon \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

gezeigt.

□

Aufgabe 2: Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Außerdem gelte

$$a_n < b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

richtig ist.

(12 Punkte)

- (b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass zusätzlich auch die Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

erfüllt ist.

(4 Punkte)

Lösung:

- (a) **Beweis:** Wir definieren

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass $b < a$ gilt. Wir definieren

$$\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot (a - b).$$

Aufgrund der Annahme $b < a$ gilt $\varepsilon > 0$. Nach der Definition des Grenzwerts einer Folge finden wir $K_1 \in \mathbb{R}_+$ und $K_2 \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq K_1 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad n \geq K_2 \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$$

gilt. Wir setzen $K := \max(K_1, K_2)$. Ist nun n eine Zahl, die größer als K ist, so gilt einerseits

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{1}{2} \cdot (a - b) = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$$

und andererseits

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{1}{2} \cdot (a - b) = \frac{1}{2} \cdot (a + b).$$

Fassen wir diese beiden Ungleichungen zusammen, so haben wir

$$b_n < \frac{1}{2} \cdot (a + b) < a_n, \quad \text{also} \quad b_n < a_n.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_n < b_n$. □

- (b) Die Ungleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ist im Allgemeinen falsch. Als Gegenbeispiel definieren wir

$$a_n := \frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{n}.$$

Mit dieser Definition gilt sicher $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber wir haben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

und somit gilt in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. □

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Konvergenz-Radien der folgenden Potenz-Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$ (5 Punkte)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot x^n.$ (5 Punkte)

Lösung: Wir berechnen den Konvergenz-Radius R in beiden Fällen nach der Formel

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Hierbei bezeichnet a_n den Koeffizienten des Terms x^n . Da in den beiden Teilaufgaben die Koeffizienten a_n jedesmal positiv sind, können wir die Betragsstriche weglassen.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Anwendung der obigen Formel für den Konvergenz-Radius ist zu beachten, dass die Formel nur angewendet werden darf, wenn der Grenzwert tatsächlich existiert.

Aufgabe 4: Die Fixpunkt-Gleichung

$$x = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$$

soll durch die Fixpunkt-Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \cos(x_n^2)$$

gelöst werden. Lösen Sie in diesem Zusammenhang die folgenden Teilaufgaben.

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$$

kontrahierend ist und bestimmen Sie den Kontraktions-Koeffizienten. (8 Punkte)

- (b) Bestimmen Sie, wie viele Iterations-Schritte ausgehend von dem Startwert $x_0 = 0$ höchstens durchgeführt werden müssen um die Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-6} zu berechnen. (8 Punkte)

- (c) Lösen Sie die Gleichung $x = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$ mit dem **Newton'schen Verfahren** in dem Sie ausgehend von dem Startwert $x_1 = 0$ drei Iterations-Schritte des Newton'schen Verfahrens durchführen. Geben Sie zunächst die Iterations-Vorschrift an und führen Sie dann die Rechnung aus. Sie müssen mit einer Genauigkeit von mindestens 7 Stellen hinter dem Komma rechnen! (10 Punkte)

Lösung:

- (a) Es gilt $f'(x) = -x \cdot \sin(x^2)$. In dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ ist die Funktion $x \mapsto x^2$ monoton steigen. Diese Funktion bildet das Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ auf das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ ab. In diesem Intervall ist die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ebenfalls monoton steigend. Damit ist auch die zusammengesetzte Funktion $x \mapsto \sin(x^2)$ in dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ monoton steigend. Da die Funktion $x \mapsto x$ offenbar ebenfalls monoton steigend ist, ist auch das Produkt dieser Funktionen in dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ monoton steigend. Dieses Produkt ist aber gerade $|f'(x)|$. Damit gilt

$$|f'(x)| \leq |f'(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{1}{4}) = 0.12370197962726147$$

Also ist die Abbildung f kontrahierend mit dem Kontraktions-Koeffizienten

$$q = 0.12370197962726147.$$

(b) Bezeichnen wir die Lösung der Fixpunkt-Gleichung $x = f(x)$ mit \bar{x} , so gilt

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Wir suchen daher ein n , so dass

$$\frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

gilt, wobei $\varepsilon = 10^{-6}$ ist. Es gilt $x_1 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{2}$. Also rechnen wir wie folgt:

$$\frac{q^n}{1 - q} \cdot \left| \frac{1}{2} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^n}{1 - q} \leq 2 \cdot \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(q) - \ln(1 - q) \leq \ln(2) + \ln(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(q) \leq \ln(2) + \ln(\varepsilon) + \ln(1 - q)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2) + \ln(\varepsilon) + \ln(1 - q)}{\ln(q)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2) + \ln(10^{-6}) + \ln(1 - q)}{\ln(q)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 6.34$$

Also benötigen wir 7 Iterationen um auf die gewünschte Genauigkeit zu kommen.

(c) Wir definieren

$$g(x) := \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2) - x.$$

Dann gilt $g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = x$. Für das Newton'sche Verfahren benötigen wir die Ableitung der Funktion g . Es gilt

$$g'(x) = -x \cdot \sin(x^2) - 1.$$

Die Newton'sche Iterations-Formel lautet damit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{-\frac{1}{2} \cdot \cos(x_n^2) - x_n}{x_n \cdot \sin(x_n^2) - 1}.$$

Damit finden wir:

1. $x_1 = 0$,
2. $x_2 = 0.5$,
3. $x_3 \approx 0.48616733847008653$,
4. $x_4 \approx 0.4861055737087093$.

Bemerkung: Der Wert x_4 ist bereits auf 8 Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 5:

- (a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$. (10 Punkte)

Hinweis: Formen Sie den Ausdruck x^x so um, dass er sich in der Form $x^x = \exp(\dots)$ schreiben lässt. Für die Pünktchen in dieser Formel müssen Sie einen geeigneten Ausdruck suchen.

- (b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$. (8 Punkte)

Lösung:

- (a) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1 \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \exp(\ln(x^x)) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \exp(x \cdot \ln(x)) \\ &= \exp\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \cdot \ln(x)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) \quad \text{nach l'Hôpital} \\ &= \exp\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x\right) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- (b) Es gilt

$$x^{\sqrt{x}} = \exp(\ln(x^{\sqrt{x}})) = \exp(\sqrt{x} \cdot \ln(x)).$$

Bezeichnen wir diese Funktion als $f(x)$, so gilt also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \cdot \exp(\sqrt{x} \cdot \ln(x)) \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 1\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln(x) + 2) \cdot x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 6:

- (a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 der Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \quad (12 \text{ Punkte})$$

- (b) Schätzen Sie den Fehler ab, der entsteht, wenn Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

an der Stelle $x = 1$ durch die Reihe $\sum_{n=0}^3 a_n \cdot x^n$ mit den oben bestimmten Koeffizienten a_i approximieren. (8 Punkte)

Lösung:

- (a) Es gilt:

1. $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, also $f(0) = 1$.
2. $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$, also $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
3. $f''(x) = \frac{3}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}}$, also $f''(0) = \frac{3}{4}$.
4. $f^{(3)}(x) = -\frac{15}{8} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}}$, also $f^{(3)}(0) = -\frac{15}{8}$.

Für die Koeffizienten a_k der Taylor-Reihe gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Damit haben wir also

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad a_3 = -\frac{5}{16}.$$

- (b) Um den Fehler abschätzen zu können, benötigen wir das Lagrange'sche Restglied. Danach ist der Abbruchfehler durch den Ausdruck

$$\frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi) \cdot x^4$$

gegeben, wenn wir die Taylor-Reihe nach dem Glied $a_3 \cdot x^3$ abbrechen. Dabei gilt $\xi \in [0, x]$. Für die vierte Ableitung finden wir

$$f^{(4)}(x) = \frac{105}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{9}{2}} \leq \frac{105}{16}.$$

Nach der Formel von Lagrange können wir den Abbruch-Fehler an der Stelle $x = 1$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi) \cdot 1^4 \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{105}{16} = \frac{35}{128} = 0.2734375$$

abschätzen. Hier haben wir benutzt, dass die Funktion $x \mapsto f^{(4)}(x)$ ihr Maximum an der Stelle $x = 0$ annimmt.

Bemerkung: Berechnen wir die Taylor-Reihe

$$1 - \frac{1}{2} \cdot x^1 + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3$$

an der Stelle $x = 1$, so erhalten wir den Wert

$$\frac{9}{16},$$

der sich von dem exakten Wert

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

um etwa 0.14461 unterscheidet. Falls die Werte von x in der Nähe von 1 liegen, werden also wesentlich mehr als nur die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe benötigt, wenn die Funktion $f(x)$ mit einer Taylor-Reihe berechnet werden soll. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, denn die Taylor-Reihe hat den Konvergenz-Radius $R = 1$ und konvergiert für Werte von x , die größer als 1 sind, gar nicht mehr. Für $x = 1$ konvergiert die Reihe gerade noch, aber wie das Beispiel zeigt, nur sehr langsam.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\int_0^\pi x \cdot \sin(x) \, dx.$

(6 Punkte)

(b) $\int_0^\pi x \cdot \sin(x^2) \, dx.$

(6 Punkte)

(c) $\int_0^1 x^2 \cdot \exp(x) \, dx.$

(8 Punkte)

Lösung:

- (a) Wir berechnen das Integral mit partieller Integration und setzen $g(x) = x$, also $g'(x) = 1$ und $f(x) = -\cos(x)$, also $f'(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi x \cdot \sin(x) \, dx \\ &= [-x \cdot \cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x) \, dx \\ &= -\pi \cdot \cos(\pi) + [\sin(x)]_0^\pi \\ &= \pi, \end{aligned}$$

denn $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

- (b) Dieses Integral berechnen wir mit der Substitution $y = x^2$. Wegen $dy = 2 \cdot x \, dx$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi x \cdot \sin(x^2) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi^2} \sin(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot [-\cos(y)]_0^{\pi^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(\pi^2)) \\ &\approx 0.9513426809665357 \end{aligned}$$

-
- (c) Wir berechnen das Integral mittels zweimaliger partieller Integration. Bei der ersten Anwendung der partiellen Integration gilt dann

$$g(x) = x^2, g'(x) = 2 \cdot x, \quad f'(x) = e^x, f(x) = e^x.$$

Bei der zweiten Anwendung der partiellen Integration haben wir

$$g(x) = x, g'(x) = 1, \quad f'(x) = e^x, f(x) = e^x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^2 \cdot e^x \, dx \\ &= \left[x^2 \cdot e^x \right]_0^1 - 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x \, dx \\ &= e - 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x \, dx \\ &= e - 2 \cdot \left[x \cdot e^x \right]_0^1 + 2 \cdot \int_0^1 e^x \, dx \\ &= e - 2 \cdot e + 2 \cdot \int_0^1 e^x \, dx \\ &= -e + 2 \cdot \left[e^x \right]_0^1 \\ &= -e + 2 \cdot (e - 1) \\ &= e - 2. \end{aligned}$$