Musterklausur mit Lösung zur Vorlesung "*Analysis*"

Aufgabe 1:

(a) Wie lautet die Definition des Grenzwerts einer Folge? (2 Punkte)

(b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition des Grenzwerts einer Folge, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

gilt. (8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - g| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $K := \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Sei weiter $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq K$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \\
\Rightarrow\quad & n > \frac{1}{\varepsilon} && \mid \cdot\, \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & n \cdot \varepsilon > 1 && \mid \cdot\, \frac{1}{n} \\
\Rightarrow\quad & \varepsilon > \frac{1}{n} \\
\Rightarrow\quad & \varepsilon > \frac{1}{n^2} && \text{denn } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Da andererseits $0 < \frac{1}{n^2}$ gilt, haben wir insgesamt für alle $n > K$

$$\begin{aligned}
& 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

gezeigt. $\square$

Aufgabe 2: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Außerdem gelte

$$a_n < b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass dann die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

richtig ist. (12 Punkte)

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass zusätzlich auch die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

erfüllt ist. (4 Punkte)

Lösung:

(a) **Beweis**: Wir definieren

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass $b < a$ gilt. Wir definieren

$$\varepsilon := \frac{1}{2}\cdot(a-b).$$

Aufgrund der Annahme $b < a$ gilt $\varepsilon > 0$. Nach der Definition des Grenzwerts einer Folge finden wir $K_1 \in \mathbb{R}_+$ und $K_2 \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n \ge K_1 \to |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad n \ge K_2 \to |b_n - b| < \varepsilon$$

gilt. Wir setzen $K := \max(K_1, K_2)$. Ist nun n eine Zahl, die größer als K ist, so gilt einerseits

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{1}{2}\cdot(a-b) = \frac{1}{2}\cdot(a+b)$$

und andererseits

$$a_n > a - \varepsilon = a - \frac{1}{2}\cdot(a-b) = \frac{1}{2}\cdot(a+b).$$

Fassen wir diese beiden Ungleichungen zusammen, so haben wir

$$b_n < \frac{1}{2}\cdot(a+b) < a_n, \quad \text{also} \quad b_n < a_n.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a_n < b_n$. □

(b) Die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

ist im Allgemeneinen falsch. Als Gegenbeispiel definieren wir

$$a_n := \frac{1}{n^2} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{1}{n}.$$

Mit dieser Definition gilt sicher $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

und somit gilt in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. □

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Konvergenz-Radien der folgenden Potenz-Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. (5 Punkte)

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot x^n$. (5 Punkte)

Lösung: Wir berechnen den Konvergenz-Radius R in beiden Fällen nach der Formel

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Hierbei bezeichnet a_n den Koeffizienten des Terms x^n. Da in den beiden Teilaufgaben die Koeffizienten a_n jedesmal positiv sind, können wir die Betragsstriche weglassen.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Anwendung der obigen Formel für den Konvergenz-Radius ist zu beachten, dass die Formel nur angewendet werden darf, wenn der Grenzwert tatsächlich existiert.

Aufgabe 4: Die Fixpunkt-Gleichung

$$x = \frac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$$

soll durch die Fixpunkt-Iteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \cos(x_n^2)$$

gelöst werden. Lösen Sie in diesem Zusammenhang die folgenden Teilaufgaben.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ mit

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \cdot \cos(x^2)$$

kontrahierend ist und bestimmen Sie den Kontraktions-Koeffizienten. (8 Punkte)

(b) Bestimmen Sie, wie viele Iterations-Schritte ausgehend von dem Startwert $x_0 = 0$ höchstens durchgeführt werden müssen um die Lösung mit einer Genauigkeit von 10^{-6} zu berechnen. (8 Punkte)

(c) Lösen Sie die Gleichung $x = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x^2\right)$ mit dem **Newton'schen Verfahren** in dem Sie ausgehend von dem Startwert $x_1 = 0$ drei Iterations-Schritte des Newton'schen Verfahrens durchführen. Geben Sie zunächst die Iterations-Vorschrift an und führen Sie dann die Rechnung aus. Sie müssen mit einer Genauigkeit von mindestens 7 Stellen hinter dem Komma rechnen! (10 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt $f'(x) = -x \cdot \sin\left(x^2\right)$. In dem Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ist die Funktion $x \mapsto x^2$ monoton steigen. Diese Funktion bildet das Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ auf das Intervall $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ ab. In diesem Intervall ist die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ ebenfalls monoton steigend. Damit ist auch die zusammengesetzte Funktion $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ in dem Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ monoton steigend. Da die Funktion $x \mapsto x$ offenbar ebenfalls monoton steigend ist, ist auch das Produkt dieser Funktionen in dem Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ monoton steigend. Dieses Produkt ist aber gerade $|f'(x)|$. Damit gilt

$$|f'(x)| \leq \left|f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| \leq \tfrac{1}{2} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{4}\right) = 0.12370197962726147$$

Also ist die Abbildung f kontrahierend mit dem Kontraktions-Koeffizienten

$$q = 0.12370197962726147.$$

(b) Bezeichnen wir die Lösung der Fixpunkt-Gleichung $x = f(x)$ mit $\bar{x}$, so gilt

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|.$$

Wir suchen daher ein n, so dass

$$\frac{q^n}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

gilt, wobei $\varepsilon = 10^{-6}$ ist. Es gilt $x_1 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{2}$. Also rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{q^n}{1-q} \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right| \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{q^n}{1-q} \leq 2 \cdot \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & n \cdot \ln(q) - \ln(1-q) \leq \ln(2) + \ln(\varepsilon) \\
\Leftrightarrow \quad & n \cdot \ln(q) \leq \ln(2) + \ln(\varepsilon) + \ln(1-q) \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \frac{\ln(2) + \ln(\varepsilon) + \ln(1-q)}{\ln(q)} \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq \frac{\ln(2) + \ln(10^{-6}) + \ln(1-q)}{\ln(q)} \\
\Leftrightarrow \quad & n \geq 6.34
\end{aligned}$$

Also benötigen wir 7 Iterationen um auf die gewünschte Genauigkeit zu kommen.

(c) Wir definieren

$$g(x) := \frac{1}{2} \cdot \cos\bigl(x^2\bigr) - x.$$

Dann gilt $g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = x$. Für das Newton'sche Verfahren benötigen wir die Ableitung der Funktion g. Es gilt

$$g'(x) = x \cdot \sin\bigl(x^2\bigr) - 1.$$

Die Newton'sche Iterations-Formel lautet damit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos\bigl(x_n^2\bigr) - x_n}{x_n \cdot \sin\bigl(x_n^2\bigr) - 1}.$$

Damit finden wir:

1. $x_1 = 0$,
2. $x_2 = 0.5$,
3. $x_3 \approx 0.48616733847008653$,
4. $x_4 \approx 0.4861055737087093$.

Bemerkung: Der Wert x_4 ist bereits auf 8 Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 5:

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$. (10 Punkte)

Hinweis: Formen Sie den Ausdruck x^x so um, dass er sich in der Form $x^x = \exp(\cdots)$ schreiben lässt. Für die Pünktchen in dieser Formel müssen Sie einen geeigneten Ausdruck suchen.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$. (8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1 \\
= \; & \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\big(\ln\big(x^x\big)\big) \\
= \; & \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \exp\big(x \cdot \ln(x)\big) \\
= \; & \exp\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \cdot \ln(x)\right) \\
= \; & \exp\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) \\
= \; & \exp\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) \qquad \text{nach l'Hôpital} \\
= \; & \exp\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\right) \\
= \; & \exp(0) \\
= \; & 1
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$x^{\sqrt{x}} = \exp\Big(\ln\big(x^{\sqrt{x}}\big)\Big) = \exp\big(\sqrt{x} \cdot \ln(x)\big).$$

Bezeichnen wir diese Funktion als $f(x)$, so gilt also

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) \cdot \exp\big(\sqrt{x} \cdot \ln(x)\big) \\
&= \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\sqrt{x}} \\
&= \left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\sqrt{x}} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \ln(x) + 1\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(\ln(x) + 2\big) \cdot x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 der Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ für die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. (12 Punkte)

(b) Schätzen Sie den Fehler ab, der entsteht, wenn Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

an der Stelle $x = 1$ durch die Reihe $\sum_{n=0}^{3} a_n \cdot x^n$ mit den oben bestimmen Koeffizienten a_i approximieren. (8 Punkte)

Lösung:

(a) Es gilt:

1. $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, also $f(0) = 1$.
2. $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{2}}$, also $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
3. $f''(x) = \frac{3}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{5}{2}}$, also $f''(0) = \frac{3}{4}$.
4. $f^{(3)}(x) = -\frac{15}{8} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{2}}$, also $f^{(3)}(0) = -\frac{15}{8}$.

Für die Koeffizienten a_k der Taylor-Reihe gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Damit haben wir also

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{8} \quad \text{und} \quad a_3 = -\frac{5}{16}.$$

(b) Um den Fehler abschätzen zu können, benötigen wir das Lagrange'sche Restglied. Danach ist der Abbruchfehler durch den Ausdruck

$$\frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi) \cdot x^4$$

gegeben, wenn wir die Taylor-Reihe nach dem Glied $a_3 \cdot x^3$ abbrechen. Dabei gilt $\xi \in [0, x]$. Für die vierte Ableitung finden wir

$$f^{(4)}(x) = \frac{105}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{9}{2}} \leq \frac{105}{16}.$$

Nach der Formel von Lagrange können wir den Abbruch-Fehler an der Stelle $x = 1$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{4!} \cdot f^{(4)}(\xi) \cdot 1^4 \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{105}{16} = \frac{35}{128} = 0.2734375$$

abschätzen. Hier haben wir benutzt, dass die Funktion $x \mapsto f^{(4)}(x)$ ihr Maximum an der Stelle $x = 0$ annimmt.

Bemerkung: Berechnen wir die Taylor-Reihe

$$1 - \frac{1}{2} \cdot x^1 + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{5}{16} \cdot x^3$$

an der Stelle $x = 1$, so erhalten wir den Wert

$$\frac{9}{16},$$

der sich von dem exakten Wert

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

um etwa 0.14461 unterscheidet. Falls die Werte von x in der Nähe von 1 liegen, werden also wesentlich mehr als nur die ersten vier Glieder der Taylor-Reihe benötigt, wenn die Funktion $f(x)$ mit einer Taylor-Reihe berechnet werden soll. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, denn die Taylor-Reihe hat den Konvergenz-Radius $R = 1$ und konvergiert für Werte von x, die größer als 1 sind, gar nicht mehr. Für $x = 1$ konvergiert die Reihe gerade noch, aber wie das Beispiel zeigt, nur sehr langsam.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, dx.$

(6 Punkte)

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin\bigl(x^2\bigr)\, dx.$

(6 Punkte)

(c) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot \exp(x)\, dx.$

(8 Punkte)

Lösung:

(a) Wir berechnen das Integral mit partieller Integration und setzen $g(x) = x$, also $g'(x) = 1$ und $f(x) = -\cos(x)$, also $f'(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, dx \\
=\;& \bigl[-x \cdot \cos(x)\bigr]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\, dx \\
=\;& -\pi \cdot \cos(\pi) + \bigl[\sin(x)\bigr]_0^\pi \\
=\;& \pi,
\end{aligned}$$

denn $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$.

(b) Dieses Integral berechnen wir mit der Substitution $y = x^2$. Wegen $dy = 2 \cdot x\, dx$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi x \cdot \sin\bigl(x^2\bigr)\, dx \\
=\;& \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi^2} \sin(y)\, dy \\
=\;& \frac{1}{2} \cdot \bigl[-\cos(y)\bigr]_0^{\pi^2} \\
=\;& \frac{1}{2} \cdot \bigl(1 - \cos(\pi^2)\bigr) \\
\approx\;& 0.9513426809665357
\end{aligned}$$

(c) Wir berechnen das Integral mittels zweimaliger partieller Integration. Bei der ersten Anwendung der partiellen Integration gilt dann

$$g(x) = x^2,\ g'(x) = 2 \cdot x, \quad f'(x) = e^x,\ f(x) = e^x.$$

Bei der zweiten Anwendung der partiellen Integration haben wir

$$g(x) = x,\ g'(x) = 1, \quad f'(x) = e^x,\ f(x) = e^x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x^2 \cdot e^x \, dx \\
= \quad & \Big[x^2 \cdot e^x\Big]_0^1 - 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x \, dx \\
= \quad & e - 2 \cdot \int_0^1 x \cdot e^x \, dx \\
= \quad & e - 2 \cdot \Big[x \cdot e^x\Big]_0^1 + 2 \cdot \int_0^1 e^x \, dx \\
= \quad & e - 2 \cdot e + 2 \cdot \int_0^1 e^x \, dx \\
= \quad & -e + 2 \cdot \Big[e^x\Big]_0^1 \\
= \quad & -e + 2 \cdot (e - 1) \\
= \quad & e - 2.
\end{aligned}$$