

Analysis  
— Sommersemester 2014 —  
DHBW Mannheim

Prof. Dr. Karl Stroetmann

14. April 2014

Dieses Skript ist einschließlich der L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Quellen sowie der in diesem Skript diskutierten Programme unter

<https://github.com/karlstroetmann/Analysis>

im Netz verfügbar. Das Skript wird laufend überarbeitet. Wenn Sie auf Ihrem Rechner `git` installieren und mein Repository mit Hilfe des Befehls

```
git clone https://github.com/karlstroetmann/Analysis.git
```

klonen, dann können Sie durch Absetzen des Befehls

```
git pull
```

die aktuelle Version meines Skripts aus dem Netz laden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Überblick über die Vorlesung	3
1.2	Ziel der Vorlesung	4
1.3	Notation	4
1.4	Eine Bitte	4
<b>2</b>	<b>Die Definition der reellen Zahlen</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>8</b>
3.1	Folgen	8
3.2	Berechnung der Quadrat-Wurzel	23
3.3	Reihen	27
3.4	Potenz-Reihen	37
<b>3</b>	<b>Stetige und differenzierbare Funktionen</b>	<b>39</b>
3.1	Stetige Funktionen	39
3.2	Bestimmung von Nullstellen	42
3.2.1	Die Regula Falsi	45
3.2.2	Das Sekanten-Verfahren	50
3.2.3	Das Illinois-Verfahren	52
3.3	Differenzierbare Funktionen	53
3.4	Mittelwert-Sätze	61
3.5	Monotonie und Konvexität	67
3.6	Die Exponential-Funktion	71
<b>4</b>	<b>Anwendungen der Theorie</b>	<b>74</b>
4.1	Taylor-Reihen	74
4.1.1	Beispiele von Taylor-Entwicklungen	78
4.2	Polynom-Interpolation	85
4.2.1	Interpolation nach Newton	86
4.2.2	Der Interpolations-Fehler	88
4.3	Der Banach'sche Fixpunkt-Satz	90
4.3.1	Das Newton'sche Verfahren zur Berechnung von Nullstellen	94
4.3.2	Analyse des Newton'schen Verfahrens	96
4.4	Iterative Lösung linearer Gleichungs-Systeme	100
<b>5</b>	<b>Integral-Rechnung</b>	<b>106</b>
5.1	Einführung des Integral-Begriffs	106
5.2	Regeln zur Berechnung von Integralen	111
5.2.1	Die Substitutions-Regel	112
5.2.2	Partielle Integration	114
5.2.3	Das Integral von Umkehr-Funktionen	114

5.2.4	Beispiele . . . . .	116
5.3	Berechnung der Bogenlänge . . . . .	117
5.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	118
5.5	Numerische Integration . . . . .	121
5.5.1	Die Trapez-Regel . . . . .	121
5.5.2	Die Simpson'sche Regel . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Die Kreiszahl <math>\pi</math> und die Euler'sche Zahl <math>e</math> sind irrational</b>	<b>126</b>
6.1	Die Euler'sche Zahl $e$ ist irrational . . . . .	126
6.2	Die Kreiszahl $\pi$ ist irrational . . . . .	128
6.3	Tranzendente Zahlen . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Fourier-Analyse</b>	<b>134</b>
7.1	Berechnung der Fourier-Koeffizienten . . . . .	134
7.2	Konvergenz . . . . .	138
7.3	Beispiele . . . . .	138
7.3.1	Fourier-Analyse der Sägezahn-Funktion . . . . .	140
<b>8</b>	<b>Rundungsfehler</b>	<b>143</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Der vorliegende Text ist ein Fragment eines Vorlesungs-Skriptes für die Analysis-Vorlesung für Informatiker. Ich habe mich bei der Ausarbeitung dieser Vorlesung im wesentlichen auf die folgenden Quellen gestützt:

1. *Analysis I* von Otto Forster [1].
2. *Differential- und Integralrechnung I* von Hans Grauert und Ingo Lieb [2].
3. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1 und Teil 2* von Harro Heuser [3, 4].
4. *Differential and Integral Calculus, Volume 1* von Richard Courant [5].

Den Studenten empfehle ich das erste Buch in dieser Liste, denn dieses Buch ist auch in elektronischer Form in unserer Bibliothek vorhanden. Bei dem Buch von Richard Courant ist das Copyright mittlerweile abgelaufen, so dass Sie es im Netz unter

<https://ia700700.us.archive.org/34/items/DifferentialIntegralCalculusVolI/Courant-DifferentialIntegralCalculusVolI.pdf>

finden können.

### 1.1 Überblick über die Vorlesung

Im Rahmen der Vorlesung werden die folgenden Gebiete behandelt:

1. Im zweiten Kapitel werden die reellen Zahlen mit Hilfe von Dedekind-Schnitten definiert.
2. Das dritte Kapitel führt den Begriff des Grenzwerts für Folgen und Reihen ein.
3. Das vierte Kapitel diskutiert die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
4. Das fünfte Kapitel zeigt verschiedene Anwendungen der bis dahin dargestellten Theorie. Insbesondere werden *Taylor-Reihen* diskutiert. Diese können beispielsweise zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen verwendet werden. Außerdem diskutieren wir in diesem Kapitel Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen.
5. Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit der Integralrechnung.
6. Im siebten Kapitel zeigen wir, dass  $\pi$  und  $e$  keine rationalen Zahlen sind.
7. Im letzten Kapitel diskutieren wir Fourier-Reihen.

## 1.2 Ziel der Vorlesung

Wir werden im Rahmen der Vorlesung nicht die Zeit haben, alle Aspekte der Analysis zu besprechen. Insbesondere werden wir viele interessante Anwendungen der Analysis in der Informatik nicht diskutieren können. Das ist aber auch gar nicht das Ziel dieser Vorlesung: Mir geht es vor allem darum, Ihnen die Fähigkeit zu vermitteln, sich selbstständig in mathematische Fachliteratur hineinarbeiten zu können. Dazu müssen Sie in der Lage sein, mathematische Beweise sowohl zu verstehen als auch selber entwickeln zu können. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu der Mathematik, an die sich viele von Ihnen auf der Schule gewöhnt haben: Dort werden primär Verfahren vermittelt, mit denen sich spezielle Probleme lösen lassen. Die Kenntnis solcher Verfahren ist allerdings in der Praxis nicht mehr wichtig, denn heutzutage werden solche Verfahren programmiert und daher besteht kein Bedarf mehr dafür, solche Verfahren von Hand anzuwenden. Aus diesem Grund wird in dieser Vorlesung der mathematische Beweis-Begriff im Vordergrund stehen. Die Analysis dient uns dabei als ein Beispiel einer mathematischen Theorie, an Hand derer wir das mathematische Denken üben können.

## 1.3 Notation

In diesem Skript definieren wir die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  über die Formel

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Im Gegensatz zu der Vorlesung über Lineare Algebra im letzten Semester wird die Zahl 0 in diesem Skript also nicht als natürliche Zahl aufgefasst. Weiter definieren wir

$$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

## 1.4 Eine Bitte

Diese Skript enthält noch eine Menge Tipp-Fehler. Sollte Ihnen ein Fehler auffallen, so bitte ich um einen Hinweis unter der Adresse

[karl.stroetmann@dhbw-mannheim.de](mailto:karl.stroetmann@dhbw-mannheim.de).

## Kapitel 2

# Die Definition der reellen Zahlen

Bevor wir mit der eigentlichen Analysis beginnen müssen wir klären, was genau reelle Zahlen überhaupt sind. Anschaulich werden reelle Zahlen zur Angabe von Längen benötigt, denn in der Geometrie reicht es nicht, mit den rationalen Zahlen zu arbeiten. Das liegt daran, dass die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 nach dem [Satz des Pythagoras](#) die Länge  $\sqrt{2}$  hat. Wir hatten im letzten Semester aber gesehen, dass es keine rationale Zahl  $r$  gibt, so dass  $r^2 = 2$  ist. Folglich reichen die rationalen Zahlen nicht aus, alle in der Geometrie möglichen Längen anzugeben.

Bis jetzt haben wir so getan, als wüssten wir schon, was reelle Zahlen sind. Aus der Schule bringen Sie gewiss eine anschauliche Vorstellung der reellen Zahlen mit, aber diese Vorstellung gilt es nun zu formalisieren, denn sonst können wir den Nachweis der *Vollständigkeit* der reellen Zahlen nicht führen. Unter der Vollständigkeit der reellen Zahlen verstehen wir anschaulich die Eigenschaft, dass es auf der reellen Zahlengeraden keine Lücken gibt. Bei der formalen Darstellung der reellen Zahlen hilft uns die folgende Definition.

### Definition 1 (Dedekind-Schnitt)

Ein Paar  $\langle M_1, M_2 \rangle$  heißt *Dedekind-Schnitt* ([Richard Dedekind](#), 1831-1916) falls folgendes gilt:

1.  $M_1 \subseteq \mathbb{Q}, \quad M_2 \subseteq \mathbb{Q}.$
2.  $M_1 \neq \emptyset, \quad M_2 \neq \emptyset.$
3.  $\forall x_1 \in M_1 : \forall x_2 \in M_2 : x_1 < x_2.$
4.  $M_1 \cup M_2 = \mathbb{Q}.$
5.  $M_1$  hat kein Maximum.

**Beispiel:** Definieren wir

$$M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \vee x^2 \leq 2\} \quad \text{und} \quad M_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 > 2\},$$

so enthält  $M_1$  alle die Zahlen, die kleiner oder gleich  $\sqrt{2}$  sind, während  $M_2$  alle Zahlen enthält, die größer als  $\sqrt{2}$  sind. Das Paar  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ist dann ein Dedekind-Schnitt.  $\diamond$

Formal ist die Menge der reellen Zahlen als die Menge aller Dedekind-Schnitte definiert:

$$\mathbb{R} := \{ \langle M_1, M_2 \rangle \in 2^{\mathbb{Q}} \times 2^{\mathbb{Q}} \mid \langle M_1, M_2 \rangle \text{ ist eine Dedekind-Schnitt} \}.$$

Nach dieser Definition müssen wir nun zeigen, wie sich auf der so definierten Menge der reellen Zahlen die arithmetischen Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division definieren lassen. Zusätzlich ist zu klären, wie die Relation  $<$  für zwei Dedekind-Schnitte definiert werden kann. Die folgende Definition der Dedekind-Menge ist dabei hilfreich.

**Definition 2 (Dedekind-Menge)** Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Q}$  ist eine *Dedekind-Menge* genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1.  $M \neq \{\}$ ,
2.  $M \neq \mathbb{Q}$ ,
3.  $\forall x, y \in \mathbb{Q} : (y < x \wedge x \in M \rightarrow y \in M)$ .

Die letzte Bedingung besagt, dass  $M$  *nach unten abgeschlossen* ist: Wenn eine Zahl  $x$  in  $M$  liegt, dann liegt auch jede Zahl, die kleiner als  $x$  ist, in  $M$ .

4. Die Menge  $M$  hat kein Maximum, es gibt also kein  $m \in M$ , so dass

$$x \leq m \quad \text{für alle } x \in M \text{ gilt.}$$

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie, dass eine Menge  $M \subseteq \mathbb{Q}$  genau dann eine Dedekind-Menge ist, wenn das Paar  $\langle M, \mathbb{Q} \setminus M \rangle$  ein Dedekind-Schnitt ist.  $\diamond$

**Aufgabe 2:** Es sei  $\mathcal{D}$  die Menge aller rationalen Dedekind-Mengen, also

$$\mathcal{D} := \{M \in 2^{\mathbb{Q}} \mid M \text{ is Dedekind-Menge}\}.$$

Auf der Menge  $\mathcal{D}$  definieren wir eine binäre Relation  $\leq$  durch die Festsetzung

$$A \leq B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subseteq B \quad \text{f.a. } A, B \in \mathcal{D}.$$

Zeigen Sie, dass die so definierte Relation  $\leq$  eine totale Ordnung auf der Menge  $\mathcal{D}$  ist.

**Definition 3 (Infimum)** Eine Menge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$  ist *in  $\mathcal{D}$  nach unten beschränkt*, falls es ein  $U \in \mathcal{D}$  gibt, so dass gilt:

$$\forall A \in \mathcal{M} : U \leq A.$$

Eine Menge  $I \in \mathcal{D}$  ist das *Infimum* einer Menge  $\mathcal{M}$ , wenn  $I$  die größte untere Schranke von  $\mathcal{M}$  ist, wenn also

$$\forall A \in \mathcal{M} : I \leq A \quad \text{und} \quad \forall T \in \mathcal{D} : \left( (\forall A \in \mathcal{M} : T \leq A) \rightarrow T \leq I \right)$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir

$$I = \inf(\mathcal{M}).$$

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie, dass jede nicht-leere und in  $\mathcal{D}$  nach unten beschränkte Menge  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$  ein Infimum  $I \in \mathcal{D}$  hat.

**Definition 4 (Addition von Dedekind-Mengen)** Es seien  $A$  und  $B$  Dedekind-Mengen. Dann definieren wir die Summe  $A + B$  wie folgt:

$$A + B := \{x + y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

**Aufgabe 4:** Es seien  $A, B \in \mathcal{D}$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $A + B \in \mathcal{D}$  ist.

**Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass die Menge

$$O := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$$

eine Dedekind-Menge ist und zeigen Sie weiter, dass die Struktur  $\langle \mathcal{D}, 0, + \rangle$  eine kommutative Gruppe ist.

**Aufgabe 6:** Überlegen Sie, wie sich auf der Menge  $\mathcal{D}$  eine Multiplikation definieren lässt, so dass  $\mathcal{D}$  mit dieser Multiplikation und der oben definierten Addition ein Körper wird.

**Bemerkung:** Da Dedekind-Mengen und Dedekind-Schnitte sich eins-zu-eins entsprechen, können wir die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen auch als die Menge  $\mathcal{D}$  der Dedekind-Mengen auffassen. Jedes  $A \in \mathcal{D}$  stellt dabei die reelle Zahl  $\inf(\mathbb{Q} \setminus A)$  dar. In dem Buch “*Grundlagen der Analysis*” von Edmund Landau [6] wird diese Konstruktion der reellen Zahlen im Detail beschrieben.

**Theorem 5 (Vollständigkeit der reellen Zahlen)** Ist  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt, so gibt es eine *Trennungszahl*  $s \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$\forall x_1 \in M_1 : x_1 \leq s \quad \text{und} \quad \forall x_2 \in M_2 : s \leq x_2. \quad \square$$

**Beweis:** Da reelle Zahlen nichts anderes als Dedekind-Schnitte sind, können wir ganz einfach

$$s = \langle M_1, M_2 \rangle$$

definieren.  $\square$

**Bemerkung:** Die Vollständigkeit der reellen Zahlen kann anschaulich als die Aussage interpretiert werden, dass die Menge der reellen Zahlen keine Löcher hat. Diese Erkenntnis geht auf Richard Dedekind [7] zurück.



# Kapitel 3

## Folgen und Reihen

Die Begriffe *Folgen* und *Reihen* sowie der Begriff des *Grenzwerts* bilden die Grundlage, auf der die Analysis aufgebaut ist. Da Reihen nichts anderes sind als spezielle Folgen, beginnen wir unsere Diskussion mit den Folgen.

### 3.1 Folgen

**Definition 6 (Folge)** Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir als eine *reellwertige Folge*. Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnen wir als eine *komplexwertige Folge*.

Ist die Funktion  $f$  eine Folge, so schreiben wir dies kürzer als  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder noch kürzer als  $(f_n)_n$ .

**Beispiele:**

1. Die Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $a(n) = \frac{1}{n}$  definiert ist, schreiben wir als die Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Die Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $a(n) = (-1)^n$  definiert ist, schreiben wir als die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Die Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $a(n) = n$  definiert ist, schreiben wir als die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Folgen können auch induktiv definiert werden. Um die Gleichung  $x = \cos(x)$  zu lösen, können wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv wie folgt definieren:

1. Induktions-Anfang:  $n = 1$ . Wir setzen

$$x_1 := 0.$$

2. Induktions-Schritt:  $n \mapsto n + 1$ . Nach Induktions-Voraussetzung ist  $x_n$  bereits definiert. Wir definieren  $x_{n+1}$  als

$$x_{n+1} := \cos(x_n).$$

◇

Wir können die ersten 40 Glieder dieser Folge mit dem in Abbildung 3.1 gezeigten **SETLX**-Programm berechnen. Wir erhalten dann die in der Tabelle 3.1 auf Seite 9 gezeigten Ergebnisse. Bei näherer Betrachtung der Ergebnisse stellen wir fest, dass die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem gewissen Sinne gegen einen festen *Grenzwert* strebt. Diese Beobachtung wollen wir in der folgenden Definition präzisieren. Vorab bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen mit  $\mathbb{R}_+$ , es gilt also

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

---

```

1  solve := procedure(k) {
2      x      := []; // x[n+1] stores x_{n}
3      x[1] := 0.0;
4      for (n in [1 .. k]) {
5          x[n+1] := cos(x[n]);
6          print("x_{$n$} = $x[n+1]$");
7      }
8  };

```

---

Abbildung 3.1: Berechnung der durch  $x_0 = 0$  und  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  definierten Folge.

$n$	$x_n$	$n$	$x_n$	$n$	$x_n$	$n$	$x_n$
0	0.000000	10	0.731404	20	0.738938	30	0.739082
1	1.000000	11	0.744237	21	0.739184	31	0.739087
2	0.540302	12	0.735605	22	0.739018	32	0.739084
3	0.857553	13	0.741425	23	0.739130	33	0.739086
4	0.654290	14	0.737507	24	0.739055	34	0.739085
5	0.793480	15	0.740147	25	0.739106	35	0.739086
6	0.701369	16	0.738369	26	0.739071	36	0.739085
7	0.763960	17	0.739567	27	0.739094	37	0.739085
8	0.722102	18	0.738760	28	0.739079	38	0.739085
9	0.750418	19	0.739304	29	0.739089	39	0.739085

Tabelle 3.1: Die ersten 40 Glieder der durch  $x_0 = 0$  und  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  definierten Folge.

**Definition 7 (Grenzwert)** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *konvergiert* gegen den *Grenzwert*  $g$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - g| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g. \quad \diamond$$

Anschaulich besagt diese Definition, dass fast alle Glieder  $a_n$  der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen beliebig kleinen Abstand zu dem Grenzwert  $g$  haben. Für die oben induktiv definierte Folge  $x_n$  können wir den Nachweis der Konvergenz erst in einem späteren Kapitel antreten. Wir betrachten statt dessen ein einfacheres Beispiel und beweisen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

gilt.

**Beweis:** Für jedes  $\varepsilon > 0$  müssen wir eine Zahl  $K$  angeben, so dass für alle natürlichen Zahlen  $n$ , die größer-gleich  $K$  sind, die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

gilt. Wir definieren  $K := \frac{1}{\varepsilon} + 1$ . Damit ist  $K$  wohldefiniert, denn da  $\varepsilon$  positiv ist, gilt sicher auch  $\varepsilon \neq 0$ . Nun benutzen wir die Voraussetzung  $n \geq K$  für  $K = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ :

$$\begin{aligned}
n &\geq \frac{1}{\varepsilon} + 1 \\
\Rightarrow n &> \frac{1}{\varepsilon} & | \cdot \varepsilon \\
\Rightarrow n \cdot \varepsilon &> 1 & | \cdot \frac{1}{n} \\
\Rightarrow \varepsilon &> \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Da andererseits  $0 < \frac{1}{n}$  gilt, haben wir insgesamt für alle  $n > K$

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{1}{n} < \varepsilon \\
\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| &< \varepsilon \\
\Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

gezeigt und damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

#### Aufgabe 7:

- (a) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition des Grenzwert-Begriffs, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

gilt.

- (b) Beweisen Sie unter Rückgriff auf die Definition des Grenzwert-Begriffs, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

gilt.

Wir formulieren und beweisen einige unmittelbare Folgerungen aus der obigen Definition des Grenzwerts.

**Satz 8 (Eindeutigkeit des Grenzwerts)** Konvergiert die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl gegen den Grenzwert  $g_1$  als auch gegen den Grenzwert  $g_2$ , so gilt  $g_1 = g_2$ .

**Beweis:** Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass  $g_1 \neq g_2$  ist. Dann definieren wir  $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot |g_2 - g_1|$  und aus der Annahme  $g_1 \neq g_2$  folgt  $\varepsilon > 0$ . Aus der Voraussetzung, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $g_1$  konvergiert folgt, dass es ein  $K_1$  gibt, so dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_1 \rightarrow |a_n - g_1| < \varepsilon$$

Analog folgt aus der Voraussetzung, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $g_2$  konvergiert, dass es ein  $K_2$  gibt, so dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_2 \rightarrow |a_n - g_2| < \varepsilon$$

Wir setzen  $K := \max(K_1, K_2)$ . Alle  $n \in \mathbb{N}$ , die größer-gleich  $K$  sind, sind dann sowohl größer-gleich  $K_1$  als auch größer-gleich  $K_2$ . Unter Benutzung der *Dreiecksungleichung*<sup>1</sup> erhalten wir für alle  $n \geq K$  die folgende Kette von Ungleichungen:

<sup>1</sup> Sind  $a, b \in \mathbb{R}$ , so gilt  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Diese Ungleichung trägt den Namen *Dreiecksungleichung*.

$$\begin{aligned}
2 \cdot \varepsilon &= |g_2 - g_1| \\
&= |(g_2 - a_n) + (a_n - g_1)| \\
&\leq |g_2 - a_n| + |a_n - g_1| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2 \cdot \varepsilon
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichungs-Kette würde aber  $2 \cdot \varepsilon < 2 \cdot \varepsilon$  folgen und dass ist ein Widerspruch. Somit ist die Annahme  $g_1 \neq g_2$  falsch und es muss  $g_1 = g_2$  gelten.  $\square$

**Bemerkung:** Die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  wird durch den letzten Satz im Nachhinein gerechtfertigt.

**Aufgabe 8:** Zeigen Sie, dass die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergent ist.

**Lösung:** Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit  $s$ , so gilt also

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |(-1)^n - s| < \varepsilon$$

Daher gibt es für  $\varepsilon = 1$  eine Zahl  $K$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |(-1)^n - s| < 1$$

gilt. Da aus  $n \geq K$  sicher auch  $2 \cdot n \geq K$  und  $2 \cdot n + 1 \geq K$  folgt, hätten wir dann für  $n \geq K$  die beiden folgenden Ungleichungen:

$$|(-1)^{2 \cdot n} - s| < 1 \quad \text{und} \quad |(-1)^{2 \cdot n + 1} - s| < 1$$

Wegen  $(-1)^{2 \cdot n} = 1$  und  $(-1)^{2 \cdot n + 1} = -1$  haben wir also

$$|1 - s| < 1 \quad \text{und} \quad |-1 - s| < 1. \quad (3.1)$$

Wegen  $-1 - s = (-1) \cdot (1 + s)$  und  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$  können wir die letzte Ungleichung noch vereinfachen zu

$$|1 + s| < 1. \quad (3.2)$$

Aus den beiden Ungleichungen  $|1 - s| < 1$  und  $|1 + s| < 1$  erhalten wir nun einen Widerspruch:

$$\begin{aligned}
2 &= |1 + 1| \\
&= |(1 - s) + (s + 1)| \\
&\leq |1 - s| + |s + 1| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\
&< 1 + 1 \quad \text{wegen der Ungleichungen (3.1) und (3.2)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Fassen wir diese Ungleichungs-Kette zusammen, so haben die (offensichtlich falsche) Ungleichung  $2 < 2$  abgeleitet. Damit haben wir aus der Annahme, dass die Folge gegen den Grenzwert  $s$  konvergiert, einen Widerspruch hergeleitet.  $\square$

**Definition 9 (beschränkte Folgen)** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist *beschränkt*, falls es eine *Schranke*  $S$  gibt, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S$$

gilt.  $\diamond$

Die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist durch die Schranke  $S = 1$  beschränkt, denn offenbar gilt

$$|(-1)^n| = 1 \leq 1,$$

aber die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht beschränkt, denn sonst gäbe es eine Zahl  $S$ , so dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Ungleichung  $n \leq S$  gilt. Da es beliebig große natürliche Zahlen gibt, kann dies nicht sein.

**Satz 10 (Beschränktheit konvergenter Folgen)** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge und es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g.$$

Dann gibt es für beliebige  $\varepsilon > 0$  ein  $K$ , so dass gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - g| < \varepsilon.$$

Wir können also für  $\varepsilon = 1$  ein  $K$  finden, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - g| < 1$$

gilt. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass  $K$  eine natürliche Zahl ist, denn wenn  $K$  keine natürliche Zahl ist, können wir  $K$  einfach durch die erste natürliche Zahl ersetzen, die größer als  $K$  ist. Dann definieren wir

$$S := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_K|, 1 + |g|\}.$$

Wir behaupten, dass  $S$  eine Schranke für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, wir zeigen also, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$|a_n| \leq S$$

Um diese Ungleichung nachzuweisen, führen wir eine Fall-Unterscheidung durch:

1. Fall:  $n \leq K$ . Dann gilt offenbar

$$|a_n| \in \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_K|, 1 + |g|\}.$$

und daraus folgt sofort

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_K|, 1 + |g|\} = S.$$

2. Fall:  $n > K$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - g + g| \\ &\leq |a_n - g| + |g| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\ &< 1 + |g| \quad \text{wegen } n > K \\ &\leq S. \end{aligned}$$

□

Aus den letzten beiden Sätzen folgt nun sofort, dass die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergiert, denn diese Folge ist noch nicht einmal beschränkt.

**Satz 11 (Summe konvergenter Folgen)** Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

gilt, dann konvergiert die Folge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $a + b$ , in Zeichen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

**Beweis:** Es sei  $\varepsilon > 0$  fest vorgegeben. Wir suchen ein  $K$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es für beliebige  $\varepsilon' > 0$  ein  $K_1$  und ein  $K_2$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_1 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon' \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_2 \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon'$$

gilt. Wir setzen nun  $\varepsilon' := \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$ . Dann gibt es also  $K_1$  und  $K_2$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_1 \rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_2 \rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$$

gilt. Wir definieren  $K := \max(K_1, K_2)$ . Damit gilt dann für alle  $n \geq K$ :

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n + b_n) - (a + b)| \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\ &< \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

**Aufgabe 9:** Zeigen Sie: Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

gilt, dann konvergiert die Folge  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $a - b$ , in Zeichen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) - \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

**Satz 12 (Produkt konvergenter Folgen)** Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

gilt, dann konvergiert die Folge  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $a \cdot b$ , in Zeichen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

**Beweis:** Es sei  $\varepsilon > 0$  fest vorgegeben. Wir suchen ein  $K$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| < \varepsilon$$

gilt. Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, ist diese Folge auch beschränkt, es gibt also eine Zahl  $S$ , so dass

$$|a_n| \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es für beliebige  $\varepsilon_1 > 0$  ein  $K_1$  und für beliebige  $\varepsilon_2 > 0$  ein  $K_2$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_1 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_2 \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$$

gilt. Wir setzen nun  $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|b| + 1)}$  und  $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2 \cdot S}$ . Dann gibt es also  $K_1$  und  $K_2$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_1 \rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|b| + 1)} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K_2 \rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot S}$$

gilt. Wir definieren  $K := \max(K_1, K_2)$ . Damit gilt dann für alle  $n \geq K$ :

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |(a_n \cdot b_n - a_n \cdot b) + (a_n \cdot b - a \cdot b)| \\
&\leq |(a_n \cdot b_n - a_n \cdot b)| + |(a_n \cdot b - a \cdot b)| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\
&= |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\
&\leq S \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot (|b| + 1) \\
&< S \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot S} + \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|b| + 1)} \cdot (|b| + 1) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Aufgabe 10:** Zeigen Sie: Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

gilt und gilt  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $b \neq 0$ , so konvergiert die Folge  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen den Grenzwert  $a/b$ , in Zeichen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)}{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)} = \frac{a}{b}.$$

**Lösung:** Zunächst können wir das Problem vereinfachen, wenn wir die Folge  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als Folge von Produkten schreiben:

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \cdot \left( \frac{1}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Falls wir zeigen können, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

gilt, dann folgt die Behauptung aus dem Satz über das Produkt konvergenter Folgen. Bei unserer Suche nach einem Beweis starten wir damit, dass wir die Behauptung noch einmal hinschreiben:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad (3.3)$$

Wir müssen also für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $K$  finden, so dass für alle natürlichen Zahlen  $n > K$  die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad (3.4)$$

gilt. Irgendwie müssen wir die Voraussetzung, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $b$  konvergiert, ausnutzen. Diese Voraussetzung lautet ausgeschrieben

$$\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+ : \exists K' \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K' \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon' \quad (3.5)$$

Wir zeigen zunächst eine Abschätzung für die Beträge  $|b_n|$ , die wir später brauchen. Hier hilft uns die Voraussetzung, dass  $b \neq 0$  ist. Setzen wir in Ungleichung (3.5) für  $\varepsilon'$  den Wert  $\frac{1}{2} \cdot |b|$  ein, so erhalten wir eine Zahl  $K_1$ , so dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq K_1$

$$|b_n - b| < \frac{1}{2} \cdot |b|$$

gilt. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 |b| &= |b - b_n + b_n| \\
 \Rightarrow |b| &\leq |b - b_n| + |b_n| \\
 \Rightarrow |b| &< \frac{1}{2} \cdot |b| + |b_n| \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |b| &< |b_n| \\
 \Rightarrow \frac{2}{|b|} &> \frac{1}{|b_n|}
 \end{aligned}$$

Damit wissen wir also, dass für alle  $n > K_1$  die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot |b| < |b_n|$$

gilt. Um nun für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung (3.4) zu zeigen, setzen wir in der Voraussetzung (3.5)  $\varepsilon' = \frac{1}{2} \cdot |b|^2 \cdot \varepsilon$  und erhalten ein  $K_2$ , so dass für alle  $n > K_2$  die Ungleichung

$$|b - b_n| < \frac{1}{2} \cdot |b|^2 \cdot \varepsilon \quad (3.6)$$

gilt. Setzen wir  $K := \max(K_1, K_2)$ , so erhalten wir für alle  $n > k$  die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \\
 &= \frac{1}{|b| \cdot |b_n|} \cdot |b - b_n| \\
 &< \frac{2}{|b| \cdot |b|} \cdot |b - b_n| \quad \text{wegen } \frac{2}{|b|} > \frac{1}{|b_n|} \\
 &< \frac{2}{|b| \cdot |b|} \cdot \frac{1}{2} \cdot |b|^2 \cdot \varepsilon \quad \text{wegen (3.6)} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Damit haben wir für  $n \geq K$  die Ungleichung  $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$  hergeleitet und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

Die bisher bewiesenen Sätzen können wir benutzen um die Grenzwerte von Folgen zu berechnen. Wir geben ein Beispiel:



$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{1 + 0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

◇

**Satz 13** Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$$

gilt, dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Aufgabe 11:** Beweisen Sie den letzten Satz. ◇

**Definition 14 (monoton)** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist *monoton steigend* falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$$

gilt. Analog heißt eine Folge *monoton fallend* falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}.$$

◇

Ein Beispiel für eine monoton fallende Folge ist die Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
n+1 &\geq n && | \cdot \frac{1}{n} \\
\Rightarrow \frac{n+1}{n} &\geq 1 && | \cdot \frac{1}{n+1} \\
\Rightarrow \frac{1}{n} &\geq \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

**Satz 15** Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und beschränkt, so ist die Folge auch konvergent.

**Beweis:** Wir definieren zunächst die Menge  $M_1$  als die Menge aller unteren Schranken der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$M_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \leq a_n\}.$$

Weil wir vorausgesetzt haben, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, ist die Menge  $M_1$  sicher nicht leer. Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Die Menge  $M_1$  hat ein Maximum oder die Menge  $M_1$  hat kein Maximum. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt.

1. Das Maximum der Menge  $M_1$  existiert. In diesem Fall definieren wir

$$s := \max(M_1).$$

**Aufgabe 12:** Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$$

gilt.

2. Die Menge  $M_1$  hat kein Maximum. In diesem Fall definieren wir die Menge  $M_2$  als das Komplement der Menge  $M_1$ :

$$\begin{aligned} M_2 &= \mathbb{Q} \setminus M_1 \\ &= \mathbb{Q} \setminus \{x \in \mathbb{Q} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \leq a_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q} \mid \neg \forall n \in \mathbb{N} : x \leq a_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \neg x \leq a_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} : a_n < x\} \end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass  $M_1 \cup M_2 = \mathbb{Q}$  ist. Wir wissen schon, dass  $M_1 \neq \emptyset$ , aber es gilt auch  $M_2 \neq \emptyset$ , denn offenbar liegt die Zahl  $a_0 + 1$  in der Menge  $M_2$ .

Um zu zeigen, dass das Paar  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt ist, müssen wir noch

$$\forall x_1 \in M_1 : \forall x_2 \in M_2 : x_1 < x_2$$

zeigen. Sei also  $x_1 \in M_1$  und  $x_2 \in M_2$ . Nach Definition von  $M_2$  gibt es dann eine natürliche Zahl  $n$ , für die  $a_n < x_2$  ist. Nach Definition von  $M_1$  gilt für alle natürlichen Zahlen  $m$  die Ungleichung  $x_1 \leq a_m$ . Insbesondere gilt die Ungleichung dann auch für die natürliche Zahl  $n$ , wir haben also

$$x_1 \leq a_n < x_2 \quad \text{und damit} \quad x_1 < x_2.$$

Folglich ist  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt und wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gibt es eine Trennungs-Zahl  $s$  mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x_1 \in M_1 : x_1 \leq s \quad \text{und} \quad \forall x_2 \in M_2 : s \leq x_2$$

gilt. Wir zeigen, dass diese Zahl  $s$  der gesuchte Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, wir zeigen also, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$$

gilt. Dazu beweisen wir zunächst, dass  $s \in M_1$  ist. Wir führen diesen Nachweis indirekt und nehmen an, dass  $s \in M_2$  ist. Dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass

$$a_n < s$$

ist. Der arithmetische Mittelwert von  $a_n$  und  $s$  liegt zwischen  $a_n$  und  $s$ , es gilt also

$$a_n < \frac{1}{2} \cdot (a_n + s) < s.$$

Nach Definition der Trennungs-Zahl  $s$  folgt aus  $\frac{1}{2} \cdot (a_n + s) < s$ , dass

$$\frac{1}{2} \cdot (a_n + s) \in M_1$$

ist. Nach Definition von  $M_1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (a_n + s) &\leq a_n \\ \Rightarrow a_n + s &\leq 2 \cdot a_n \\ \Rightarrow s &\leq a_n. \end{aligned}$$

Das steht im Widerspruch zu  $a_n < s$  und widerlegt die Annahme  $s \in M_2$ . Folglich gilt  $s \in M_1$  und nach Definition von  $M_1$  haben wir damit für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$s \leq a_n.$$

Sei nun ein  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wir betrachten die Zahl  $s + \varepsilon$ . Wegen  $s < s + \varepsilon$  muss diese Zahl ein Element der Menge  $M_2$  sein. Nach Definition von  $M_2$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$a_{n_0} < s + \varepsilon$$

gilt. Aufgrund der Monotonie folgt dann aber für alle  $n \geq n_0$

$$a_n \leq a_{n_0} < s + \varepsilon.$$

Insgesamt haben wir

$$s \leq a_n \leq a_{n_0} < s + \varepsilon$$

und daraus folgt

$$|a_n - s| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_0$  und damit ist bewiesen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$  gilt.  $\square$

**Aufgabe 13:** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei monoton steigend und beschränkt. Zeigen Sie, dass der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

existiert.

**Aufgabe 14:** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und es gelte  $a < b$ . Zeigen Sie, dass dann auch

$$a < \frac{1}{2} \cdot (a + b) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot (a + b) < b$$

gilt.

**Definition 16 (Infimum, Supremum)** Eine Teilmenge  $M$  der reellen Zahlen ist nach *oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls es eine Schranke  $o \in \mathbb{R}$  (bzw.  $u \in \mathbb{R}$ ) gibt, so dass gilt:

$$\forall x \in M : x \leq o \quad (\text{bzw. } \forall x \in M : x \geq u).$$

Eine Zahl  $s$  ist das *Supremum* einer Menge  $M$ , wenn  $s$  die kleinste obere Schranke von  $M$  ist, es muss also gelten:

$$\forall x \in M : x \leq s \quad \text{und} \quad \forall t \in \mathbb{R} : \left( (\forall x \in M : x \leq t) \rightarrow s \leq t \right)$$

In diesem Fall schreiben wir

$$s = \sup(M).$$

Analog ist eine Zahl  $s$  das *Infimum* einer Menge  $M$ , wenn  $s$  die größte untere Schranke von  $M$  ist, es muss also gelten:

$$\forall x \in M : s \leq x \quad \text{und} \quad \forall t \in \mathbb{R} : \left( (\forall x \in M : t \leq x) \rightarrow t \leq s \right)$$

In diesem Fall schreiben wir

$$s = \inf(M).$$

$\diamond$

**Aufgabe 15:** Zeigen Sie unter Verwendung der Vollständigkeit der reellen Zahlen: Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge  $M$  besitzt ein Infimum.

**Lösung:** Wir konstruieren das Infimum als Trennungs-Zahl eines Dedekind-Schnitts. Wir definieren den Dedekind-Schnitt  $\langle M_1, M_2 \rangle$  wie folgt:

1.  $M_1 := \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in M : u \leq x\}$ .

$M_1$  ist also die Menge der unteren Schranken von  $M$ . Da wir vorausgesetzt hatten, dass  $M$  nach unten beschränkt ist, ist klar dass  $M_1 \neq \emptyset$  gilt.

2. Damit  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt wird, muss  $M_2$  das Komplement von  $M_1$  in der Menge  $\mathbb{R}$  sein:

$$\begin{aligned}
 M_2 &:= \mathbb{R} \setminus M_1 \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in M : u \leq x\} \\
 &= \mathbb{R} \setminus \{v \in \mathbb{R} \mid \forall x \in M : v \leq x\} \\
 &= \{v \in \mathbb{R} \mid \neg (\forall x \in M : v \leq x)\} \\
 &= \{v \in \mathbb{R} \mid \exists x \in M : \neg(v \leq x)\} \\
 &= \{v \in \mathbb{R} \mid \exists x \in M : x < v\}
 \end{aligned}$$

$M_2$  ist also die Menge der Zahlen, die keine unteren Schranken von  $M$  sind. Da die Menge  $M$  nicht leer ist, gibt es ein  $x \in M$ . Wegen  $x < x + 1$  ist  $x + 1$  keine untere Schranke von  $M$ , also gilt  $x + 1 \in M_2$  und damit gilt  $M_2 \neq \emptyset$ .

Um nachzuweisen, dass  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt ist, müssen wir nur noch zeigen, dass für alle  $u \in M_1$  und alle  $v \in M_2$  die Ungleichung  $u < v$  gilt. Seien also  $u \in M_1$  und  $v \in M_2$  gegeben. Aus der Definition von  $M_2$  folgt dann, dass es eine Zahl  $x \in M$  gibt, so dass

$$x < v$$

gilt. Da  $M_1$  die Menge der unteren Schranken von  $M$  ist, folgt aus  $x \in M$  sofort

$$u \leq x.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt nun

$$u \leq x < v \quad \text{also} \quad u < v.$$

Also ist  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt und nach dem Vollständigkeits-Axioms gibt es eine Trennungszahl  $s$ . Wir behaupten, dass  $s$  das Infimum der Menge  $M$  ist. Dazu müssen wir zwei Dinge zeigen:

1.  $s$  ist eine untere Schranke von  $M$ .

Wir nehmen an, dass  $s \in M_2$  ist. Nach Definition von  $M_2$  gibt es dann eine Zahl  $z \in M$ , so dass

$$z < s$$

gilt. Wir betrachten den arithmetischen Mittelwert von  $s$  und  $z$ , der natürlich zwischen diesen beiden Zahlen liegen muss:

$$z < \frac{1}{2} \cdot (z + s) < s.$$

Da  $s$  die Trennungszahl des Dedekind-Schnitts  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ist, folgt aus  $\frac{1}{2} \cdot (z + s) < s$  sofort  $\frac{1}{2} \cdot (z + s) \in M_1$ . Da  $M_1$  aber die Menge der unteren Schranken der Menge  $M$  ist, und  $z \in M$  ist, folgt

$$\frac{1}{2} \cdot (z + s) \leq z.$$

Das steht im Widerspruch zu der Ungleichung  $z < \frac{1}{2} \cdot (z + s)$  und zeigt, dass die Annahme  $s \in M_2$  falsch ist. Also muss  $s \in M_1$  sein. Da  $M_1$  die Menge der unteren Schranken der Menge  $M$  ist, ist auch  $s$  eine untere Schranke der Menge  $M$ :

$$\forall x \in M : s \leq x.$$

2.  $s$  ist die größte untere Schranke von  $M$ .

Für die Trennungs-Zahl  $s$  des Dedekind-Schnitts  $\langle M_1, M_2 \rangle$  gilt:

$$\forall u \in M_1 : u \leq s.$$

Setzen wir hier die Definition von  $M_1$  ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \forall u \in M_1 : u \leq s \\ \Rightarrow & \forall u \in \mathbb{R} : u \in M_1 \rightarrow u \leq s \\ \Rightarrow & \forall u \in \mathbb{R} : u \in \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in M : u \leq x\} \rightarrow u \leq s \\ \Rightarrow & \forall u \in \mathbb{R} : (\forall x \in M : u \leq x) \rightarrow u \leq s \end{aligned}$$

Diese Formel drückt aus, dass alle unteren Schranken der Menge  $M$  unterhalb von  $s$  liegen. Da wir oben schon gezeigt haben, dass  $s$  eine untere Schranke von  $M$  ist, folgt also, dass  $s$  die größte untere Schranke ist.  $\square$

Die Begriffe *Supremum* und *Infimum* sind Verallgemeinerungen der Begriffe Minimum und Maximum. Betrachten wir die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0 \right\}.$$

Diese Menge hat kein Minimum, aber 0 ist die größte untere Schranke dieser Menge, es gilt also

$$0 = \inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n > 0 \right\}.$$

#### Definition 17 (Cauchy-Folge)

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *Cauchy-Folge* (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857), falls gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq K \wedge n \geq K \rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon. \quad \diamond$$

In einer Cauchy-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liegen also die einzelnen Folgenglieder  $a_n$  mit wachsendem  $n$  immer dichter zusammen. Wir werden sehen, dass eine Folge genau dann konvergent ist, wenn die Folge eine Cauchy-Folge ist.

**Satz 18** Jede konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.

**Beweis:** Es sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Aufgrund der Konvergenz der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es dann ein  $K$ , so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Damit gilt für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq K$  und  $n \geq K$  die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - a) + (a - a_n)| \\ &\leq |a_m - a| + |a - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist.  $\square$

**Satz 19** Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Wenn  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, dann finden wir eine Zahl  $K$ , so dass für alle natürlichen Zahlen  $m, n$ , die größer-gleich  $K$  sind, die Ungleichung

$$|a_n - a_m| < 1$$

gilt. Sei nun  $h$  eine natürliche Zahl, die größer als  $K$  ist. Wir definieren

$$S := \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_h|, 1 + |a_h|\}$$

und zeigen, dass  $S$  eine Schranke der Cauchy-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, wir zeigen also

$$\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S.$$

Falls  $n \leq h$  ist, ist diese Ungleichung evident. Für alle  $n > h$  haben wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |a_n - a_h + a_h| \\ &\leq |a_n - a_h| + |a_h| \\ &< 1 + |a_h| \\ &\leq S. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Theorem 20** Jede Cauchy-Folge ist konvergent.

**Beweis:** Der Beweis verläuft ähnlich wie der Nachweis, dass eine monotone und beschränkte Folge konvergent ist. Wir definieren zunächst ein Paar von Mengen  $\langle M_1, M_2 \rangle$  wie folgt:

1.  $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow x \leq a_n\}$ .

Anschaulich ist  $M_1$  die Menge aller unteren Grenzen für die Mehrheit der Folgenglieder: Ist  $x \in M_1$ , so müssen von einem bestimmten Index  $K$  an alle weiteren Folgenglieder  $a_n$  durch  $x$  nach unten abgeschätzt werden.

Die Beschränktheit der Cauchy-Folge impliziert, dass die Menge  $M_1$  nicht leer ist, denn wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $|a_n| \leq S$  gilt, dann gilt insbesondere  $-S \leq a_n$  und daraus folgt  $-S \in M_1$ .

2. Da das Paar  $\langle M_1, M_2 \rangle$  eine Dedekind-Schnitt werden soll, definieren wir  $M_2$  als das Komplement von  $M_1$  in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} M_2 &:= \mathbb{R} \setminus M_1 \\ &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \exists K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow x \leq a_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \neg \exists K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow x \leq a_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall K \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n \geq K \wedge a_n < x\} \end{aligned}$$

Die Menge  $M_2$  enthält also alle die reellen Zahlen  $x$ , für die wir Folgenglieder  $a_n$  mit beliebig großem Index  $n$  finden können, die kleiner als  $x$  sind.

Auch  $M_2$  ist nicht leer. Dies folgt wieder aus der Beschränktheit von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , denn wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $|a_n| \leq S$  erfüllt ist, dann gilt offenbar  $S + 1 \in M_2$ .

Als nächstes zeigen wir, dass

$$\forall x_1 \in M_1 : \forall x_2 \in M_2 : x_1 < x_2$$

gilt. Wegen  $x_1 \in M_1$  gibt es nach Definition von  $M_1$  eine natürliche Zahl  $K$ , so dass alle Folgenglieder  $a_n$ , deren Index  $n \geq K$  ist, die Ungleichung

$$x_1 \leq a_n \tag{3.7}$$

erfüllen. Wegen  $x_2 \in M_2$  gibt es nach Definition von  $M_2$  dann eine natürliche Zahl  $n_0 \geq K$ , so dass

$$a_{n_0} < x_2 \tag{3.8}$$

gilt. Für dieses  $n_0$  gilt natürlich auch die Ungleichung (3.7), so dass wir insgesamt

$$x_1 \leq a_{n_0} < x_2$$

und damit

$$x_1 < x_2$$

haben. Damit ist das Paar  $\langle M_1, M_2 \rangle$  ein Dedekind-Schnitt. Aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen folgt nun, dass eine Trennungs-Zahl  $s$  mit der Eigenschaft

$$\forall x_1 \in M_1 : x_1 \leq s \quad \text{und} \quad \forall x_2 \in M_2 : s \leq x_2$$

existiert. Wir zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$$

gilt. Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir suchen eine Zahl  $K$ , so dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq K$  die Ungleichung

$$|a_n - s| < \varepsilon$$

gilt. Wir betrachten zunächst die Zahl  $s - \frac{\varepsilon}{2}$ . Wegen  $s - \frac{\varepsilon}{2} < s$  folgt  $s - \frac{\varepsilon}{2} \in M_1$ . Damit existiert dann eine Zahl  $K_1$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq K_1$  die Ungleichung

$$s - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n \tag{3.9}$$

gilt. Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es eine Zahl  $K_2$ , so dass für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m > K_2$  und  $n > K_2$  die Ungleichung

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

gilt. Wir setzen nun  $K = \max(K_1, K_2)$  und betrachten die Zahl  $s + \frac{\varepsilon}{2}$ , die wegen  $s < s + \frac{\varepsilon}{2}$  sicher in  $M_2$  liegt. Nach Definition von  $M_2$  finden wir dann eine natürliche Zahl  $m$ , die größer als  $K$  ist, so dass

$$a_m < s + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.11}$$

gilt. Für diese Zahl  $m$  gilt sicher auch die Ungleichung (3.9), so dass wir insgesamt

$$s - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_m < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

haben. Daraus folgt sofort

$$|a_m - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.12}$$

Aufgrund der Ungleichung (3.10) haben wir jetzt für alle natürlichen Zahlen  $n > K$ :

$$\begin{aligned} |a_n - s| &= |(a_n - a_m) + (a_m - s)| \\ &\leq |a_n - a_m| + |a_m - s| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

### 3.2 Berechnung der Quadrat-Wurzel

Wir präsentieren nun eine Anwendung der bisher entwickelte Theorie und zeigen, wie die Quadrat-Wurzel einer reellen Zahl berechnet werden kann. Es sei eine reelle Zahl  $a > 0$  gegeben. Gesucht ist eine reelle Zahl  $b > 0$ , so dass  $b^2 = a$  ist. Unsere Idee ist es, die Zahl  $b$  iterativ als Lösung einer Fixpunkt-Gleichung zu berechnen. Wir definieren eine Folge  $b_n$  induktiv wie folgt:

I.A.:  $n = 0$ .

$$b_0 := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq 1, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

I.S.:  $n \mapsto n + 1$ .

$$b_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left( b_n + \frac{a}{b_n} \right).$$

Um diese Definition zu verstehen, nehmen wir zunächst an, dass der Grenzwert dieser Folge existiert und den Wert  $b \neq 0$  hat. Dann gilt

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left( b_n + \frac{a}{b_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \frac{a}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left( b + \frac{a}{b} \right) \end{aligned}$$

Damit ist  $b$  also eine Lösung der Gleichung  $b = \frac{1}{2} \cdot \left( b + \frac{a}{b} \right)$ . Wir formen diese Gleichung um:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \cdot \left( b + \frac{a}{b} \right) & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot b &= b + \frac{a}{b} & | -b \\ \Leftrightarrow b &= \frac{a}{b} & | \cdot b \\ \Leftrightarrow b^2 &= a & | \sqrt{\phantom{x}} \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

Falls die oben definierte Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Grenzwert hat, dann ist dieser Grenzwert also die Wurzel der Zahl  $a$ . Wir werden die Konvergenz der Folge nachweisen indem wir zeigen, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einerseits monoton fallend und andererseits nach unten beschränkt ist. Dazu betrachten wir zunächst die Differenz  $b_{n+1}^2 - a$ :



$$\begin{aligned}
b_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \cdot \left( b_n + \frac{a}{b_n} \right)^2 - a \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( b_n^2 + 2 \cdot a + \frac{a^2}{b_n^2} \right) - a \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( b_n^2 - 2 \cdot a + \frac{a^2}{b_n^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left( b_n - \frac{a}{b_n} \right)^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

denn das Quadrat einer reellen Zahl ist immer größer-gleich Null. Addieren wir auf beiden Seiten der Ungleichung

$$b_{n+1}^2 - a \geq 0$$

die Zahl  $a$ , so haben wir

$$b_{n+1}^2 \geq a \quad \text{und damit auch} \quad b_{n+1} \geq \sqrt{a} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gezeigt. Nach unserer Definition der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt diese Ungleichung auch für den ersten Wert  $n = 0$ , so dass wir also insgesamt die Ungleichung

$$b_n^2 \geq a \quad \text{und} \quad b_n \geq \sqrt{a} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gezeigt haben. Daraus folgt, dass  $\sqrt{a}$  eine untere Schranke der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Dividieren wir die erste Ungleichung durch  $b_n$ , so folgt

$$b_n \geq \frac{a}{b_n}.$$

Die Zahl  $\frac{1}{2} \cdot \left( b_n + \frac{a}{b_n} \right)$  ist der arithmetische Mittelwert der Zahlen  $b_n$  und  $\frac{a}{b_n}$  und muss daher zwischen diesen beiden Zahlen liegen:

$$b_n \geq \frac{1}{2} \cdot \left( b_n + \frac{a}{b_n} \right) \geq \frac{a}{b_n}.$$

Dieser Mittelwert ist aber gerade  $b_{n+1}$ , es gilt also

$$b_n \geq b_{n+1} \geq \frac{a}{b_n}.$$

Dies zeigt, dass die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist und damit muß die Folge auch konvergieren. Wir hatten oben schon gezeigt, dass der Grenzwert dieser Folge dann den Wert  $\sqrt{a}$  haben muss, es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{a}$$

Abbildung 3.2 auf Seite 25 zeigt die Definition einer Prozedur `mySqrt()` in SETLX, die die ersten 9 Glieder der Folge berechnet und dann jeweils mit Hilfe der Funktion `nDecimalPlaces()` die ersten 100 Stellen der Werte ausgibt.

Die von diesem Programm berechnete Ausgabe ist in Abbildung 3.3 gezeigt. Sie können sehen, dass die Folge sehr schnell konvergiert.  $b_2$  stimmt auf 2 Stellen hinter dem Komma mit dem Ergebnis überein, bei  $b_3$  sind es bereits 5 Stellen, bei  $b_4$  sind es 11 Stellen, bei  $b_5$  sind es 23 Stellen, bei  $b_6$  sind es 47 Stellen, bei  $b_7$  haben wir 96 Stellen und ab dem Folgeglied  $b_8$  ändern sich die ersten 100 Stellen hinter dem Komma nicht mehr.

In modernen Mikroprozessoren wird übrigens eine verfeinerte Version des in diesem Abschnitt beschriebenen Verfahrens eingesetzt. Die Verfeinerung besteht im wesentlichen darin, dass zunächst ein guter Startwert  $b_0$  in einer Tabelle nachgeschlagen wird, die restlichen Folgeglieder werden dann

in der Tat über die Rekursionsformel  $b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(b_n + \frac{a}{b_n}\right)$  berechnet.

```

1  mySqrt := procedure(a) {
2      if (a <= 1) {
3          b := 1;
4      } else {
5          b := a;
6      }
7      for (n in [1 .. 9]) {
8          b := 1/2 * (b + a/b);
9          print("$n$: $nDecimalPlaces(b, 100)$");
10     }
11     return b;
12 };

```

Abbildung 3.2: Ein *SetIX*-Programm zur iterativen Berechnung der Quadrat-Wurzel.

[illegible]

Abbildung 3.3: Berechnung der Quadrat-Wurzel mit Hilfe der Folge  $b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (b_n + \frac{a}{b_n})$ .



### 3.3 Reihen

**Definition 21 (Reihe)** Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, so definieren wir die Folge der *Partial-Summen*  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch die Festsetzung

$$s_n := \sum_{i=0}^n a_i.$$

Diese Folge bezeichnen wir auch als unendliche *Reihe*. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnen wir als die der Reihe  $(\sum_{i=0}^n a_i)_{n \in \mathbb{N}}$  *zugrunde liegende Folge*. Falls die Folge der Partial-Summen konvergiert, so schreiben wir den Grenzwert als

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i.$$

Gelegentlich treten in der Praxis Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf, für welche die Folgenglieder  $a_i$  erst ab einem Index  $k > 0$  definiert sind. Beispielsweise ist die Folge  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  erst ab  $k = 1$  definiert. Um auch aus solchen Folge bequem Reihen bilden zu können, definieren wir in einem solchen Fall die Partial-Summen  $s_n$  durch

$$s_n = \sum_{i=k}^n a_i,$$

wobei wir vereinbaren, dass  $\sum_{i=k}^n a_i = 0$  ist, falls  $k > n$  ist.

**Satz 22 (Bernoullische Ungleichung)** Es sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und es gelte  $x \geq -1$ . Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x.$$

Diese Ungleichung wird als *Bernoullische Ungleichung* (Jakob Bernoulli, 1655-1705) bezeichnet.

**Beweis:** Wir beweisen die Ungleichung durch vollständige Induktion nach  $n$ .

I.A.:  $n = 0$ . Es gilt

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x. \quad \checkmark$$

I.S.:  $n \mapsto n+1$ . Nach Induktions-Voraussetzung gilt

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x \tag{3.13}$$

Da  $x \geq -1$  ist, folgt  $1+x \geq 0$  positiv, so dass wir die Ungleichung 3.13 mit  $1+x$  multiplizieren können. Dann erhalten wir die folgende Ungleichungs-Kette

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x) \\ &= 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$$

gezeigt. □

**Satz 23** Es sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, dass  $q$  positiv ist. Aus  $q < 1$  folgt dann

$$1 < \frac{1}{q} \quad \text{und damit} \quad 0 < \frac{1}{q} - 1.$$

Wir definieren nun

$$x := \frac{1}{q} - 1.$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung sehen wir nun, dass Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} &= \left(1 + \left(\frac{1}{q} - 1\right)\right)^n \\ &\geq 1 + n \cdot \left(\frac{1}{q} - 1\right) \\ &= 1 + n \cdot x. \end{aligned}$$

Durch Invertierung dieser Ungleichung erhalten wir

$$q^n \leq \frac{1}{1 + n \cdot x}$$

Ist nun ein  $\varepsilon > 0$  gegeben, so definieren wir

$$K := \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \frac{1}{x} + 1.$$

Dann gilt für alle  $n \geq K$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \frac{1}{x} + 1 &\leq n \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \frac{1}{x} &< n \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) &< n \cdot x \\ \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} &< 1 + n \cdot x \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + n \cdot x} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir nun für alle  $n \geq K$  gezeigt, dass

$$0 < q^n \leq \frac{1}{1 + n \cdot x} < \varepsilon$$

gilt, also haben wir für  $n \geq K$

$$|q^n| < \varepsilon.$$

Für  $q = 0$  ist diese Ungleichung offenbar auch gültig und wenn  $q$  negativ ist, gilt  $-q > 0$ , so dass die Ungleichung für  $-q$  gilt:

$$|(-q)^n| < \varepsilon.$$

Wegen  $|(-q)^n| = |q^n|$  folgt daraus also, dass für alle  $q$  die Ungleichung

$$|q^n| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq K$$

gültig ist und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir präsentieren nun einige Beispiele für konvergente Reihen:

1. Wir betrachten die Folge  $(\frac{1}{n \cdot (n+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ , die nur für  $n \geq 1$  definiert ist. Für die Partial-Summen zeigen wir durch Induktion über  $n$ , dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (3.14)$$

- (a) (Induktions-Anfang)  $n = 1$ : Einerseits haben wir für  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2},$$

andererseits gilt

$$1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- (b) (Induktions-Schritt)  $n \mapsto n+1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &\stackrel{IV}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (3.14) folgt nun sofort

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

2. Wir betrachten die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für eine Zahl  $q \in \mathbb{R}$ . Für die Partial-Summen gilt

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i.$$

Wir betrachten den Ausdruck  $(1-q) \cdot s_n$ :

$$\begin{aligned} (1-q) \cdot s_n &= (1-q) \cdot \sum_{i=0}^n q^i \\ &= \sum_{i=0}^n q^i - q \cdot \sum_{i=0}^n q^i \\ &= \sum_{i=0}^n q^i - \sum_{i=0}^n q^{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^n q^i - \sum_{i=1}^{n+1} q^i \\ &= \left(q^0 + \sum_{i=1}^n q^i\right) - \left(\sum_{i=1}^n q^i + q^{n+1}\right) \\ &= q^0 - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(1 - q) \cdot \sum_{i=0}^n q^i = 1 - q^{n+1}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch  $(1 - q)$ , so erhalten wir für die Partial-Summen den Ausdruck

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Falls  $|q| < 1$  ist, konvergiert die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0. Damit gilt für  $|q| < 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1 - q}.$$

Die Reihe  $\left(\sum_{i=0}^n q^i\right)_{n \in \mathbb{N}}$  wird als *geometrische Reihe* bezeichnet.

**Definition 24 (Alternierende Reihe)** Hat eine Reihe die Form

$$\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot a_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

und gilt entweder

$$\forall i \in \mathbb{N} : a_i \geq 0 \quad \text{oder} \quad \forall i \in \mathbb{N} : a_i \leq 0$$

so sprechen wir von einer *alternierenden Reihe*.

**Beispiel:**

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i}\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ist eine alternierende Reihe.}$$

**Definition 25 (Null-Folge)** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine *Null-Folge* wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**Satz 26 (Leibniz-Kriterium, (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716))**

Wenn die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Null-Folge ist, dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot a_i\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Beweis:** Die Partial-Summen  $s_n$  sind durch

$$s_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot a_i$$

definiert. Wir betrachten zunächst die Folge der Partial-Summen mit geraden Indizes, wir betrachten also die Folge  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und zeigen, dass diese Folge monoton fallend ist. Es gilt

$$s_{2 \cdot (n+1)} = s_{2 \cdot n} + (-1)^{2 \cdot n+1} \cdot a_{2 \cdot n+1} + (-1)^{2 \cdot n+2} \cdot a_{2 \cdot n+2} = s_{2 \cdot n} - a_{2 \cdot n+1} + a_{2 \cdot n+2}. \quad (3.15)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} s_{2 \cdot (n+1)} &\leq s_{2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow s_{2 \cdot n} - a_{2 \cdot n+1} + a_{2 \cdot n+2} &\leq s_{2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow a_{2 \cdot n+2} &\leq a_{2 \cdot n+1} \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist aber nicht anderes als die Monotonie der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Als nächstes zeigen wir durch vollständige Induktion, dass die Folge der Partial-Summen mit geraden Indizes nach unten beschränkt ist, genauer gilt

$$s_{2 \cdot n} \geq a_0 - a_1.$$

Um dies nachzuweisen, zeigen wir durch vollständige Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$s_{2 \cdot n+1} \geq a_0 - a_1.$$

I.A.:  $n = 0$ .

$$s_{2 \cdot 0+1} = s_1 = a_0 - a_1.$$

I.S.:  $n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned} s_{2 \cdot (n+1)+1} &= s_{2 \cdot n+1} + a_{2 \cdot n+2} - a_{2 \cdot n+3} \\ &\geq a_0 - a_1 + a_{2 \cdot n+2} - a_{2 \cdot n+3} \quad \text{nach Induktions-Voraussetzung} \\ &\geq a_0 - a_1 \quad \text{wegen } a_{2 \cdot n+2} \geq a_{2 \cdot n+3}. \end{aligned}$$

Nun gilt für  $n \geq 1$

$$s_{2 \cdot n} = s_{2 \cdot n-1} + a_{2 \cdot n} \geq s_{2 \cdot n-1} \geq a_0 - a_1$$

und für  $n = 0$  ist  $s_0 = a_0 \geq a_0 - a_1$ . Da wir nun gezeigt haben, dass die Folge  $(s_{2 \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$  sowohl monoton fallend als auch nach unten beschränkt ist, folgt aus Satz 15, dass diese Folge konvergent ist. Der Grenzwert dieser Folge sei  $s$ :

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2 \cdot n}.$$

Dann konvergiert auch die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$ . Dies sehen wir wie folgt: Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Weil  $(s_{2 \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$  konvergiert gibt es eine Zahl  $K_1$ , so dass für alle  $n \geq K_1$  die Ungleichung

$$|s_{2 \cdot n} - s| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \tag{3.16}$$

erfüllt ist. Weil  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Null-Folge ist gibt es außerdem eine Zahl  $K_2$ , so dass für alle  $n \geq K_2$  die Ungleichung

$$|a_n - 0| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \tag{3.17}$$

gilt. Wir setzen  $K := \max(2 \cdot K_1 + 1, K_2)$  und zeigen, dass für alle  $n \geq K$  die Ungleichung

$$|s_n - s| < \varepsilon$$

gilt. Wir erbringen diesen Nachweis über eine Fall-Unterscheidung:

1.  $n$  ist gerade, also gilt  $n = 2 \cdot m$ .

$$\begin{aligned} |s_n - s| &= |s_{2 \cdot m} - s| \\ &< \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

denn aus  $n = 2 \cdot m$  und  $n > K$  folgt  $m > K_1$ .

2.  $n$  ist ungerade, also gilt  $n = 2 \cdot m + 1$ .



$$\begin{aligned}
|s_n - s| &= |s_{2 \cdot m+1} - s| \\
&= |s_{2 \cdot m+1} - s_{2 \cdot m} + s_{2 \cdot m} - s| \\
&\leq |s_{2 \cdot m+1} - s_{2 \cdot m}| + |s_{2 \cdot m} - s| \\
&< |a_{2 \cdot m+1}| + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \\
&< \frac{1}{2} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

denn aus  $n = 2 \cdot m + 1$  und  $n > K$  folgt  $m > K_1$  und  $n \geq K_2$ .

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Aufgabe 16:** Wenn die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Null-Folge ist, dann gilt für den Grenzwert der zugehörigen alternierende Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot a_i \leq a_0.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie durch vollständige Induktion über  $n$ , dass für die Partial-Summen  $s_n$  gilt:

$$s_n \leq a_0.$$

**Lösung:**

I.A.:  $n = 0$ .

$$s_0 = a_0 \leq a_0.$$

I.S.:  $n \mapsto n + 1$ .

Wir führen eine Fall-Unterscheidung durch:

(a)  $n$  ist gerade, also gilt  $n = 2 \cdot m$  für ein geeignetes  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_{2 \cdot m+1} \\
&= s_{2 \cdot m} + (-1)^{2 \cdot m+1} \cdot a_{2 \cdot m+1} \\
&= s_n - a_{2 \cdot m+1} \\
&\leq a_0 - a_{2 \cdot m+1} && \text{nach Induktions-Voraussetzung} \\
&\leq a_0 && \text{denn } a_{2 \cdot m+1} \geq 0
\end{aligned}$$

(b)  $n$  ist ungerade, also gilt  $n = 2 \cdot m + 1$  für ein geeignetes  $m \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_{2 \cdot m+2} \\
&= s_{2 \cdot m} + (-1)^{2 \cdot m+1} \cdot a_{2 \cdot m+1} + (-1)^{2 \cdot m+2} \cdot a_{2 \cdot m+2} \\
&= s_n - a_{2 \cdot m+1} + a_{2 \cdot m+2} \\
&\leq s_n && \text{denn } a_{2 \cdot m+2} \leq a_{2 \cdot m+1} \\
&\leq a_0 && \text{nach IV}
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass  $\leq$ -Beziehungen zwischen konvergenten Folgen für die Grenzwerte erhalten bleiben.

**Satz 27 (Cauchy'sches Konvergenz-Kriterium für Reihen)**

Die Reihe  $(\sum_{i=0}^n a_i)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $K$  gibt, so dass gilt:

$$\forall n, l \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{n+l} a_i \right| < \varepsilon.$$

**Beweis:** Nach den Sätzen aus dem Abschnitt über Folgen ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der durch

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

definierten Partial-Summen genau dann konvergent, wenn  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, wenn also gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall m, n \in \mathbb{N} : m > K \wedge n \geq K \rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon.$$

In der letzten Formel können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $n \leq m$  gilt. Dann ist  $m = n + l$  für eine natürliche Zahl  $l$ . Setzen wir hier die Definition der Partial-Summen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |s_{n+l} - s_n| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n+l} a_i - \sum_{i=0}^n a_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=n+1}^{n+l} a_i \right| \end{aligned}$$

und damit ist klar, dass die Ungleichung des Satzes äquivalent dazu ist, dass die Folge der Partial-Summen eine Cauchy-Folge ist.  $\square$

**Korollar 28**

Wenn die Reihe  $(\sum_{i=0}^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, dann ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Null-Folge.

**Beweis:** Nach dem Cauchy'schen Konvergenz-Kriterium gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n, l \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{n+l} a_i \right| < \varepsilon.$$

Setzen wir hier  $l = 1$  so haben wir insbesondere

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i \right| < \varepsilon.$$

Wegen

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i \right| = |a_{n+1}|$$

folgt also

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists K \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Diese Formel drückt aus, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Null-Folge ist.  $\square$

Mit Hilfe des letzten Satzes können wir zeigen, dass die *harmonische Reihe*

$$\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

divergiert. Wäre diese Reihe konvergent, so gäbe es nach dem Cauchy'schen Konvergenz-Kriterium eine Zahl  $K$ , so dass für alle  $n \geq K$  und alle  $l$  die Ungleichung

$$\sum_{i=n+1}^{n+l} \frac{1}{i} < \frac{1}{2}$$

gilt. Insbesondere würde diese Ungleichung dann für  $l = n$  gelten. Für beliebige  $n$  gilt aber die folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=n+1}^{n+n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=n+1}^{2 \cdot n} \frac{1}{2 \cdot n} = n \cdot \frac{1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}$$

Damit erfüllt die harmonische Reihe das Cauchy'sche Konvergenz-Kriterium nicht.

**Satz 29 (Majoranten-Kriterium)** Für die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$ .
2. Der Grenzwert  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  existiert.

Dann existiert auch der Grenzwert  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ .

**Beweis:** Es gilt

$$\sum_{i=0}^n a_i \leq \sum_{i=0}^n b_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} b_i.$$

Also ist die Folge  $\left( \sum_{i=0}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und beschränkt und damit konvergent.

**Bemerkung:** Oft wird im Majoranten-Kriterium die Voraussetzung  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$  abgeschwächt zu

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Hierbei ist  $K$  dann eine geeignet gewählte Schranke. Die Gültigkeit dieser Form des Majoranten-Kriteriums folgt aus der Tatsache, dass das Abändern endlich vieler Glieder einer Reihe für die Frage, ob eine Reihe konvergent ist, unbedeutend ist.

**Aufgabe 17:** Zeigen Sie mit dem Majoranten-Kriterium, dass die Reihe  $\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

**Lösung:** Es gilt

$$\begin{aligned} i+1 &\geq i & | \cdot (i+1) \\ \Rightarrow (i+1)^2 &\geq i \cdot (i+1) & | \frac{1}{\cdot} \\ \Rightarrow \frac{1}{(i+1)^2} &\leq \frac{1}{i \cdot (i+1)} \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe  $\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Majorante der Reihe  $\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2}$$

folgt die Konvergenz aus dem Majoranten-Kriterium.

**Bemerkung:** Wir werden später zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{gilt.}$$

**Satz 30 (Minoranten-Kriterium)** Für die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n$ .
2. Der Grenzwert  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  existiert nicht.

Dann existiert auch der Grenzwert  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  nicht.

**Beweis:** Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  existiert. Nach dem Majoranten-Kriterium müßte dann auch der Grenzwert  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  existieren und dass steht im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**Aufgabe 18:** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{i+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

nicht konvergiert.

**Lösung:** Wir benutzen das Minoranten-Kriterium und zeigen, dass die Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine divergente Minorante der Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} & | & \frac{1}{\cdot} \\ \Leftrightarrow n+1 &\geq \sqrt{n+1} & | & \cdot^2 \\ \Leftrightarrow (n+1)^2 &\geq n+1 & | & \cdot \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow n+1 &\geq 1 & | & -1 \\ \Leftrightarrow n &\geq 0 \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung offenbar für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr ist, ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Satz 31 (Quotienten-Kriterium)** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $q \in \mathbb{R}$  eine Zahl, so dass gilt:

1.  $0 \leq q < 1$
2.  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n$
3.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq q \cdot a_n$

Dann konvergiert die Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** Wir zeigen, dass die geometrische Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n a_0 \cdot q^i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Majorante der Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Dazu zeigen wir durch Induktion über  $n$  dass folgendes gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_0 \cdot q^n$$

I.A. :  $n = 0$ . Wegen  $q^0 = 1$  gilt trivialerweise

$$a_0 \leq a_0 \cdot q^0.$$

I.S. :  $n \mapsto n + 1$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq q \cdot a_n && \text{nach Voraussetzung} \\ &\leq q \cdot a_0 \cdot q^n && \text{nach Induktions-Voraussetzung} \\ &= a_0 \cdot q^{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Beim Quotienten-Kriterium sind eigentlich nur die Beträge der Folgenglieder  $|a_n|$  wichtig, denn es lässt sich folgende Verschärfung des Quotienten-Kriteriums zeigen: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge,  $q \in \mathbb{R}$  und  $K \in \mathbb{R}$ , so dass

$$0 \leq q < 1 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n a_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beispiel:** Wir zeigen mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums, dass die Reihe  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{z^i}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert. Für  $z = 0$  ist die Konvergenz der Reihe trivial und sonst betrachten wir den Quotienten  $a_{n+1}/a_n$  für diese Reihe, setzen  $K = 2 \cdot |z|$  und  $q = \frac{1}{2}$  und zeigen, dass das Quotienten-Kriterium erfüllt ist, denn für alle  $n \geq K$  gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} = \frac{|z^{n+1}| \cdot n!}{|z^n| \cdot (n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{|z|}{K} = \frac{|z|}{2 \cdot |z|} = \frac{1}{2}.$$

**Satz 32 (Wurzel-Kriterium)** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $q \in \mathbb{R}$  eine Zahl, so dass

1.  $0 \leq q < 1$
2.  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n$
3.  $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0 \rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q$

gilt. Dann konvergiert die Reihe  $\left(\sum_{i=0}^n a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** Auch hier können wir den Nachweis der Konvergenz dadurch führen indem wir zeigen, dass die geometrische Reihe  $\left(\sum_{i=0}^n q^i\right)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Majorante ist: Für  $n > 0$  gilt

$$a_n \leq q^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q. \quad \square$$

**Bemerkung:** Beim Wurzel-Kriterium sind eigentlich nur die Beträge der Folgenglieder  $|a_n|$  wichtig, denn es läßt sich folgende Verschärfung des Quotienten-Kriteriums zeigen: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge,  $q \in \mathbb{R}$  und  $K \in \mathbb{R}$ , so dass

$$0 \leq q < 1 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq K \rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe  $\left(\sum_{i=0}^n a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beispiel:** Wir zeigen mit dem Wurzel-Kriterium, dass die Reihe  $\left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Wir

setzen  $K = 4$  und  $q = \frac{1}{2}$ . Zunächst können Sie mit vollständiger Induktion leicht zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 4$  die Ungleichung  $n! \geq 2^n$  gilt. Damit haben wir für  $n \geq 4$ :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow n! \geq 2^n.$$

### 3.4 Potenz-Reihen

Es bezeichne  $x$  eine Variable und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine Folge von Zahlen. Dann bezeichnen wir den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

als *formale Potenz-Reihe*. Wichtig ist hier, dass  $x$  keine feste Zahl ist, sondern eine Variable, für die wir später reelle (oder auch komplexe) Zahlen einsetzen. Wenn wir in einer Potenz-Reihe für  $x$  eine feste Zahl einsetzen, wird aus der Potenz-Reihe eine gewöhnliche Reihe. Der Begriff der Potenz-Reihen kann als eine Verallgemeinerung des Begriffs des Polynoms aufgefaßt werden.

**Beispiele:**

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ist eine formale Potenz-Reihe. Wir haben oben mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums gezeigt, dass diese Reihe für beliebige reelle Zahlen konvergiert.
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  ist eine formale Potenz-Reihe. Setzen wir für  $x$  den Wert 1 ein, so erhalten wir die divergente harmonische Reihe. Für  $x = -1$  erhalten wir eine alternierende Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist.

In der Theorie der Potenz-Reihen ist die Frage entscheidend, welche Zahlen wir für die Variable  $x$  einsetzen können, so dass die Reihe konvergiert. Diese Frage wird durch die folgenden Sätze beantwortet.

**Satz 33** Wenn die Potenz-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

für einen Wert  $u \in \mathbb{C}$  konvergiert, dann konvergiert die Reihe auch für alle  $v \in \mathbb{C}$ , für die  $|v| < |u|$  ist.

**Beweis:** Da die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n$  konvergiert, folgt aus dem Korollar zum Cauchy'schen Konvergenzkriterium, dass die Folge  $(a_n \cdot u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Null-Folge ist. Also gibt es eine Zahl  $K$ , so dass für alle  $n \geq K$  die Ungleichung

$$|a_n \cdot u^n| \leq 1$$

gilt. Wir definieren

$$q := \left| \frac{v}{u} \right|.$$

Aus  $|v| < |u|$  folgt  $q < 1$ . Dann haben wir für alle  $n \geq K$  die folgende Abschätzung:

$$|a_n \cdot v^n| = |a_n \cdot u^n| \cdot \left| \frac{v^n}{u^n} \right| = |a_n \cdot u^n| \cdot q^n \leq q^n.$$

Diese Abschätzung zeigt, dass die geometrische Reihe eine konvergente Majorante der Reihe  $a_n \cdot v^n$  ist. Damit folgt die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot v^n$  aus dem Majoranten-Kriterium.  $\square$

**Satz 34** Wenn die Potenz-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  für einen Wert  $u \in \mathbb{C}$  divergiert, dann divergiert die Reihe auch für alle  $v \in \mathbb{C}$ , für die  $|u| < |v|$  ist.

**Beweis:** Würde die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot v^n$  konvergieren, dann müßte nach Satz 33 auch die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n$  konvergieren.  $\square$

Die letzten beiden Sätze ermöglichen es nun, den Begriff *Konvergenz-Radius* zu definieren. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

eine formale Potenz-Reihe. Wenn diese Reihe für alle  $x \in \mathbb{C}$  konvergiert, dann sagen wir, dass der Konvergenz-Radius den Wert  $\infty$  hat. Andernfalls definieren wir den Konvergenz-Radius als

$$R := \sup \left\{ |u| \mid u \in \mathbb{C} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n \text{ konvergiert} \right\}.$$

Aus den letzten beiden Sätzen folgt dann:

1.  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < R \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$  konvergiert.
2.  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| > R \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$  divergiert.

In der Gauß'schen Zahlen-Ebene ist die Menge  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  das Innere eines Kreises mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt. Der folgende Satz gibt uns eine effektive Möglichkeit, den Konvergenz-Radius zu berechnen.

**Satz 35** Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

eine formale Potenz-Reihe und die Folge

$$\left( \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiere. Dann ist der Konvergenz-Radius  $R$  durch folgende Formel gegeben:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

**Beweis:** Es sei  $u \in \mathbb{C}$  mit  $|u| < R$ . In diesem Fall müssen wir zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n$$

konvergiert. Wir werden diesen Nachweis mit Hilfe Quotienten-Kriteriums erbringen. Wir setzen  $q := \frac{|u|}{R} < 1$  und zeigen, dass für alle hinreichend großen  $n$  die Ungleichung

$$\frac{|a_{n+1} \cdot u^{n+1}|}{|a_n \cdot u^n|} \leq q$$

erfüllt ist. Aus

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

folgt, dass es für beliebige  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $K$  gibt, so dass für alle  $n \geq K$  die Ungleichung

$$\left| \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| - R \right| < \varepsilon$$

gilt. Wir setzen  $\varepsilon := \frac{1}{2}(R - |u|)$ . Wir zeigen, dass dann für alle  $n \geq K$  die Ungleichung  $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \frac{1}{2}(R + |u|)$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| + \left( R - \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) \right| = |R| = R \\ \Rightarrow & \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| + \left| \left( R - \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) \right| \geq R \\ \Rightarrow & \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| + \varepsilon > R \\ \Rightarrow & \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| + \frac{1}{2}(R - |u|) > R \\ \Rightarrow & \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > R - \frac{1}{2}(R - |u|) \\ \Rightarrow & \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > \frac{1}{2}(R + |u|). \end{aligned}$$

Jetzt können wir zeigen, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n$  das Quotienten-Kriterium erfüllt, denn für alle  $n \geq K$  gilt:

$$\left| \frac{a_{n+1} \cdot u^{n+1}}{a_n \cdot u^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |u| = \frac{|u|}{\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} < \frac{|u|}{\frac{1}{2}(R + |u|)} < \frac{|u|}{\frac{1}{2}(R + R)} = \frac{|u|}{R} = q$$

Um den Beweis abzuschließen müssen wir noch zeigen, die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u^n$  divergiert wenn  $R < |u|$  ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Folge  $(a_n \cdot u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $|u| > R$  keine Null-Folge ist. Die Details bleiben dem Leser überlassen.  $\square$

**Bemerkung:** Der obige Satz bleibt auch richtig, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$$

ist, denn dann ist die Potenz-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  für alle  $u \in \mathbb{C}$  konvergent.

**Beispiel:** Die Potenz-Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  hat den Konvergenz-Radius  $R = 1$ , denn es gilt



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

**Satz 36 (Hadamard)** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  eine Potenz-Reihe und die Folge  $\left( \sqrt[n]{|a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere. Dann gilt

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**Bemerkung:** Setzen wir  $\frac{1}{\infty} = 0$ , so bleibt die Formel

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

auch in dem Fall  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  richtig, denn dann gilt  $R = \infty$ .

**Beispiel:** Die Potenz-Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$  hat den Konvergenz-Radius  $R = \infty$ , denn es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

# Literaturverzeichnis

- [1] Forster, Otto: *Analysis I, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Vieweg+Teubner, 11te Auflage, 2011.
- [2] Grauert, Hans und Ingo Lieb: *Differential- und Integralrechnung I*. Springer, 1967.
- [3] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner, 15te Auflage, 2003.
- [4] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, 14te Auflage, 2008.
- [5] Courant, Richard: *Differential and Integral Calculus*, Band 1. Blackie & Son Limited, 2nd Auflage, 1937.
- [6] Landau, Edmund: *Grundlagen der Analysis*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1930. <http://www.scribd.com/doc/2452802/Landau-Edmund-Grundlagen-der-Analysis>.
- [7] Dedekind, Richard: *Essays on the Theory of Numbers*. The Open Court Publishing Company, 1901.
- [8] Dowell, M. und P. Jarrat: *A modified regula falsi method for computing the root of an equation*. BIT Numerical Mathematics, 11(2):168–174, 1971.
- [9] Rosenlicht, Maxwell: *Integration in finite terms*. The American Mathematical Monthly, 79(9):963–972, November 1972.
- [10] Goldberg, David: *What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic*. ACM Computing Surveys, 23(1):5–48, 1991. Available from <http://www.validlab.com/goldberg/paper.ps>.