1 Taylor-Reihe

Aufgabe: Leiten Sie die folgende Formel aus dem Additions-Theorem des Arcus-Tangens her und berechnen Sie damit π auf eine Genauigkeit von 10^{-9}:

$$\frac{\pi}{4} = 2 * \arctan\Big(\frac{1}{2}\Big) - \arctan\Big(\frac{1}{7}\Big). \tag{1}$$

Lösung: Zum Beweis der oben angegebenen Gleichung benötigen wir zwei Gleichungen. Einerseits gilt $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, andererseits haben wir das Additions-Theorem für den Arcus-Tangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\Big(\frac{x+y}{1-x*y}\Big)$$

Daher haben wir

$$\begin{array}{lrcl}
 & \frac{\pi}{4} & = & 2*\arctan\big(\frac{1}{2}\big) - \arctan\big(\frac{1}{7}\big) \\
\Leftrightarrow & \arctan(1) & = & 2*\arctan\big(\frac{1}{2}\big) - \arctan\big(\frac{1}{7}\big) \\
\Leftrightarrow & \arctan(1) + \arctan\big(\frac{1}{7}\big) & = & \arctan\big(\frac{1}{2}\big) + \arctan\big(\frac{1}{2}\big) \\
\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right) & = & \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}\right) \\
\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{\frac{8}{7}}{\frac{6}{7}}\right) & = & \arctan\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow & \arctan\left(\frac{8}{6}\right) & = & \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \quad \checkmark
\end{array}$$

Wir berechnen π nun indem wir Gleichung (1) mit 4 multizieren und den Arcus-Tangens durch eine Taylor-Reihe approximieren. Das liefert die Formel

$$\pi = 8 * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1} \tag{2}$$

In der Praxis können wir keine unendliche Summation durchführen, wir müssen die Summation irgendwann abbrechen. Die Näherung, die wir berechnen, hat also die Form

$$\pi \approx 8 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1} \tag{3}$$

Der *Abbruch-Fehler* e mißt die Differenze zwischen der durch Gleichung (3) gegebenen Näherung und dem durch Gleichung (2) gegebenen exakten Wert, es gilt also

$$\begin{array}{rcl}
e & = & \pi - \left(8 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1}\right) \\
 & = & 8 * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1} \\
 & & - \left(8 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1}\right) \\
 & = & 8 * \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} - 4 * \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1}.
\end{array}$$

Damit können wir den Betrag des Abbruch-Fehlers wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|e| &\leq 8 * \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*k+1} \right| + 4 * \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2*k+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*k+1} \right| \\
&\leq 8 * \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2*(n+1)+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*(n+1)+1} \right| + 4 * \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2*(n+1)+1} * \left(\frac{1}{7}\right)^{2*(n+1)+1} \right| \\
&\leq 8 * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*n+3} + 4 * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*n+3} \\
&\leq 12 * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*n+3}.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt dieser Abschätzung das Kriterium von Leibniz angewendet: Der Betrag einer alternierenden Reihe ist kleiner als das erste Glied dieser Reihe, also gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n * a_n \right| \leq |a_0|.$$

Wollen wir jetzt π auf eine Genauigkeit von 10^{-9} berechnen, so müssen wir n so groß wählen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&& |e| &\leq 10^{-9} \\
\Leftarrow && 12 * \left(\frac{1}{2}\right)^{2*n+3} &\leq 10^{-9} \\
\Leftrightarrow && \ln(12) - (2*n+3)*\ln(2) &\leq -9*\ln(10) \\
\Leftrightarrow && -(2*n+3)*\ln(2) &\leq -9*\ln(10) - \ln(12) \\
\Leftrightarrow && 2*n+3 &\geq \frac{9*\ln(10)+\ln(12)}{\ln(2)} \\
\Leftrightarrow && n &\geq \frac{1}{2} * \left(\frac{9*\ln(10)+\ln(12)}{\ln(2)} - 3 \right) \approx 15.24115768 \\
\Leftarrow && n &= 16.
\end{aligned}$$

Fall wir also die ersten 16 Glieder der Reihen berücksichtigen, können wir π auf eine Genauigkeit von 10^{-9} berechnen. Rechnen wir mit 20 Stellen hinter dem Komma, so erhalten wir den Wert

$$\begin{aligned}
\pi &\approx 3.1415926535951738312. \\
\text{exakt gilt} \quad \pi &= 3.1415926535897932\cdots.
\end{aligned}$$

Wir haben also π auf eine Genauigkeit von 10 Stellen hinter dem Komma berechnet.

2 Interpolation

Aufgabe: Für die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ soll im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ ein Tabelle erstellt werden, so dass der bei linearer Interpolation entstehende Interpolations-Fehler kleiner als 10^{-5} ist. Das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ soll zu diesem Zweck in gleich große Intervalle aufgeteilt werden. Berechnen Sie die Anzahl der Einträge, die für die Erstellung der Tabelle notwendig ist.

Lösung: Wir untersuchen den Interpolations-Fehler, der innerhalb eines beliebigen Intervalls $[x_0, x_1] \subseteq [0, \frac{\pi}{2}]$ auftritt. Die Länge dieses Intervalls ist $h := x_1 - x_0$. Bei linearer Interploation gilt für den Interpolations-Fehler

$$e(x) := \sin(x) - p(x) = \frac{\sin^{(2)}(\xi)}{2!} * (x - x_0) * (x - x_1) \quad \text{mit } \xi \in [x_0, x_1],$$

denn bei linearer Interploation gilt $n = 1$ und folglich $n + 1 = 2$. Da die zweite Ableitung von $x \mapsto \sin(x)$ die Funktion $x \mapsto -\sin(x)$ ist und da weiter $|\sin(x)| \leq 1$ ist, können wir für den Betrag des Interpolations-Fehlers schreiben

$$|e(x)| \leq \frac{1}{2} * |(x - x_0) * (x - x_1)|. \tag{4}$$

Wir definieren

$$w(x) := (x - x_0) * (x - x_1).$$

Um $|e(x)|$ näher bestimmen zu können, müssen wir die Funktion $w(x)$ in dem Intervall $[x_0, x_1]$ untersuchen. Insbesondere interessiert uns die Frage, wo die Funktion $w(x)$ in dem Intervall $[x_0, x_1]$ Extremwerte (also Minima oder Maxima) annimmt. Falls die Funktion $w(x)$ an der Stelle χ einen Extremwert hat, dann muss die Ableitung $\frac{d}{dx}w(\chi)$ den Wert 0 haben:

$$\frac{d}{dx}w(\chi) = 0.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dx}w(x) = \frac{d}{dx}\Big(x^2 - (x_0 + x_1) * x + x_0 * x_1\Big) = 2 * x - (x_0 + x_1).$$

Für einen Extremwert im Innern des Intervalls $[x_0, x_1]$ muss also gelten:

$$0 = 2 * \chi - (x_0 + x_1), \quad \text{also} \quad \chi = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Falls die Funktion $w(x) = (x - x_0) * (x - x_1)$ in dem Intervall einen Extremwert annimmt, so liegt dieser entweder an der Stelle $\chi = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ oder an den Intervall-Grenzen x_0 bzw. x_1. Setzen wir diese Punkte ein, so erhalten wir

$$w(x_0) = (x_0 - x_0) * (x_1 - x_0) = 0,$$

$$w(x_1) = (x_1 - x_0) * (x_1 - x_1) = 0, \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}
w\Big(\tfrac{1}{2}(x_0 + x_1)\Big) &= \big(\tfrac{1}{2}(x_0 + x_1) - x_0\big) * \big(\tfrac{1}{2}(x_0 + x_1) - x_1\big) \\
&= \big(\tfrac{1}{2}(x_1 - x_0)\big) * \big(\tfrac{1}{2}(x_0 - x_1)\big) \\
&= -\tfrac{1}{4}(x_1 - x_0)^2 \\
&= -\tfrac{1}{4}h^2.
\end{aligned}$$

Damit ist klar, dass wir in Gleichung (4) den Term $\big|(x - x_0) * (x - x_1)\big|$ durch $\frac{h^2}{4}$ abschätzen können, wir haben also für den Interpolations-Fehler die Abschätzung

$$|e(x)| = \big|\sin(x) - p(x)\big| \leq \frac{h^2}{8} \tag{5}$$

gefunden. Wir erreichen bei linearer Interploation eine Genauigkeit von 10^{-5} falls wir h so wählen, dass $|e(x)| < 10^{-5}$ gilt. Also bestimmen wir h wie folgt:

$$\frac{h^2}{8} \leq 10^{-5} \;\Leftrightarrow\; h \leq \sqrt{8 * 10^{-5}} \approx 0.008944271908.$$

Wegen

$$\frac{\pi}{2h} \approx 175.6203682$$

müssen wir das Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ also in 176 Intervalle aufteilen. Die Tabelle hat dann 177 Einträge.

Aufgabe: Lösen Sie für $y = 10^6$ und $y = 10^{-6}$ die Gleichung $x * \exp(x) = y$ durch eine einfache Fixpunkt-Iteration. Berechnen Sie die Lösung x jeweils auf eine Genauigkeit von 10^{-3}.

Lösung: Es gibt zwei auf der Hand liegende Möglickeiten um die Gleichung $x*\exp(x) = y$ in eine Fixpunkt-Gleichung zu verwandeln.

1. $x * \exp(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = y * \exp(-x)$.

   In diesem Fall definieren wir $f(x) := y * \exp(-x)$. Dann gilt

   $$f'(x) = -y * \exp(-x).$$

   Da $x > 0$ sein muß, können wir den Betrag $|f'(x)|$ durch y abschätzen:

   $$|f'(x)| \le y$$

   Falls nun y klein ist, wird die Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ schnell konvergieren, in dem konkreten Fall $y = 10^{-6}$ ist f kontrahierend mit dem Kontraktions-Koeffizienten 10^{-6}. Wählen wir als Startwert $x_0 = 0$, so erhalten wir $x_1 = 10^{-6}$ und mit dem Banach'schen Fixpunkt-Satz erhalten wir als Abschätzung für den Fehler nach n-Iterationen

   $$|x_n - \bar{x}| \le \frac{\left(10^{-6}\right)^n}{1 - 10^{-6}} * |x_1 - x_0| \approx 10^{-6\cdot n} * |10^{-6}| = 10^{-6\cdot(n+1)}$$

   Setzen wir hier $n = 1$ so sehen wir

   $$|x_1 - \bar{x}| \le 10^{-12}.$$

   Damit ist die geforderte Genauigkeit bereits nach einer Iteration erreicht und der gesuchte Wert ist $\bar{x} \approx 10^{-6}$.

2. $x * \exp(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = \ln(y) - \ln(x)$.

   In diesem Fall definieren wir $f(x) := \ln(y) - \ln(x)$. Dann gilt

   $$f'(x) = -\frac{1}{x}.$$

   Diese Funktion ist auf den Intervallen kontrahierend, auf denen x größer als 1 ist. Sie ist geeignet, die Lösung der Gleichung für $y = 10^6$ zu finden. Setzen wir $x_0 := 1$, so erhalten wir die Werte

   $$x_1 = 13.815510, \quad x_2 = 11.18971, \quad x_3 = 11.40051, \quad x_4 = 11.38185, \quad x_5 = 11.38349.$$

   Wir vermuten, dass die geforderte Genauigkeit im fünften Schritt erreicht ist. Nach dem ersten Schritt sind alle Werte von x jedenfalls größer als 10, so dass wir den Kontraktions-Koeffizienten q durch $\frac{1}{10}$ abschätzen können. In der Vorlesung wurde allgemein gezeigt, dass

   $$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q} * |x_n - x_{n-1}|$$

   gilt. Setzen wir die konkreten Werte ein, so finden wir

   $$|x_5 - \bar{x}| \le \frac{q}{1-q} * |x_5 - x_4| \approx \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} * |11.38185 - 11.38349| \approx \frac{1}{9} * 0.00163 \approx 1.8 * 10^{-4}$$

   Damit hat x_5 tatsächlich die geforderte Genauigkeit.

Aufgabe: Untersuchen Sie mit Hilfe des Integral-Vergleichskriteriums, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n * (n+1)}$$

konvergiert.

Lösung: Nach dem Integral-Vergleichskriterium konvergiert die Reihe genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t \cdot (t+1)}\, dt$$

existiert. Um das Integral ausführen zu können, führen wir eine Partialbruch-Zerlegung des Integranden durch:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t \cdot (t+1)} &=& \frac{\alpha}{t} + \frac{\beta}{t+1} \\ \Leftrightarrow\ & 1 &=& \alpha \cdot (t+1) + \beta \cdot t \\ \Leftrightarrow\ & 1 &=& t \cdot (\alpha + \beta) + \alpha \end{aligned}$$

Damit haben wir zur Bestimmung von α und β die Gleichungen

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad 0 = \alpha + \beta, \quad \text{also} \quad \beta = -1$$

gefunden und damit gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t \cdot (t+1)}\, dt && = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ = & \lim_{x\to\infty} \Big(\ln(t) - \ln(t+1)\Big)\Big|_1^x && = \lim_{x\to\infty} \ln\Big(\frac{t}{t+1}\Big)\Big|_1^x \\ = & \lim_{x\to\infty} \ln\Big(\frac{x}{x+1}\Big) - \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) && = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) + \ln(2) \\ = & \ln\left(\frac{1}{1+0}\right) + \ln(2) && = \ln(1) + \ln(2) \\ = & \ln(2). \end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, konvergiert die obige Reihe.

Aufgabe: Berechnen Sie, in wie viele Teil-Intervalle das Intervall $[0,1]$ aufgeteilt werden muss, wenn das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

mit Hilfe der Trapez-Regel mit einer Genauigkeit von 10^{-6} berechnet werden soll.

Nach dem Satz über die Fehlerabschätzung bei der Trapez-Regel kann der Fehler, der bei der Approximation des Integrals mit der Trapez-Regel entsteht, durch den Ausdruck

$$\frac{K}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

abgeschätzt werden. Hier bezeichnen a und b die Integrations-Grenzen, in unserem Fall gilt also $a=0$ und $b=1$. Die Zahl n gibt die Anzahl der Teil-Intervalle an und K ist eine obere Grenze für den Betrag der zweiten Ableitung der zu integrierenden Funktion in dem Intervall $[a,b]$. Die Aufgabe besteht also zunächst darin, die zweite Ableitung der Funktion $f(x)=\exp(-x^2)$ zu berechnen und dann das Maximum zu finden, dass die zweite Ableitung in dem Intervall $[0,1]$ annimmt. Es gilt

$$f'(x) = -2\cdot x\cdot e^{-x^2} \quad \text{und} \quad f^{(2)}(x) = -2\cdot e^{-x^2} + 4\cdot x^2\cdot e^{-x^2} = (4\cdot x^2-2)\cdot e^{-x^2}.$$

Um das Maximum von $\left|f^{(2)}(x)\right|$ zu finden, bilden wir die Ableitung der Funktion $f^{(2)}(x)$, wir berechnen also $f^{(3)}(x)$:

$$f^{(3)}(x) = \big(8\cdot x - 2\cdot x\cdot(4\cdot x^2-2)\big)\cdot e^{-x^2} = (12\cdot x - 8\cdot x^3)\cdot e^{-x^2}$$

Die Funktion $f^{(2)}$ kann Extremwerte an den Randpunkten des Intervalls $[0,1]$ annehmen und an den Stellen, wo die Ableitung dieser Funktion den Wert 0 hat. Das führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned}
& 0 = (12\cdot x - 8\cdot x^3)\cdot e^{-x^2} \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = (12\cdot x - 8\cdot x^3) \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \ \lor\ 3 - 2\cdot x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \ \lor\ \frac{3}{2} = x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \ \lor\ x = \tfrac{1}{2}\sqrt{6} \ \lor\ x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

Da die beiden Werte $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ und $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$ nicht in dem Intervall $[0,1]$ liegen, können Extremwerte der zweiten Ableitung nur an den Stellen 0 und 1 auftreten. Es gilt

$$f^{(2)}(0) = -2\cdot e^{-0^2} = -2 \quad \text{und} \quad f^{(2)}(1) = (4-2)\cdot e^{-1} = 2/e \approx 0.7357588824 \quad \text{und}$$

Also ist der Betrag von $f^{(2)}(x)$ bei $x=0$ maximal und hat den Wert 2. Damit haben wir $K=2$ gefunden und die Formel für den Approximations-Fehler e lautet

$$e \le \frac{1}{6\cdot n^2}$$

Um das Integral mit einer Genauigkeit von 10^{-6} zu berechnen muss gelten

$$\frac{1}{6\cdot n^2} \le 10^{-6} \ \Leftrightarrow\ n^2 = 6 * 10^6 \ \Leftrightarrow\ n = \sqrt{6}\cdot 10^3 \approx 2449.489743$$

Als müssen wir das Intervall in 2450 Teil-Intervalle aufteilen um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen.

Aufgabe: Die Funktion p sei auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert durch

$$p(x) = x^2.$$

Die Funktion werde so auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, dass die resultierende Funktion die Periode $2 \cdot \pi$ hat.

1. Berechnen Sie die Fourier-Reihe von p.
2. Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Reihe von p einen Wert für die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst die Fourier-Reihe. Da die Funktion p gerade ist, haben die Koeffizienten b_k alle den Wert 0. Für den Koeffizienten a_0 gilt

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi p(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi^2.$$

Für $k > 0$ berechnen wir die Koeffizienten a_k durch zweimalige partielle Integration.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} \cdot a_k &= \int_0^\pi x^2 \cdot \cos(n\cdot x)\,dx \\
&= x^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(n\cdot x)\Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \cdot \int_0^\pi x \cdot \sin(n\cdot x)\,dx \\
&= -\frac{2}{n}\left(x \cdot \frac{-1}{n} \cdot \cos(n\cdot x)\Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \cos(n\cdot x)\,dx\right) \\
&= -\frac{2}{n}\left(\pi \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n\cdot x)\Big|_0^\pi\right) \\
&= \frac{2 \cdot \pi}{n^2} \cdot (-1)^n
\end{aligned}$$

Damit haben für a_k den Wert

$$a_k = 4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}$$

gefunden. Also gilt

$$p(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(n\cdot x)$$

Setzen wir in dieser Gleichung für x den Wert π ein, so folgt wegen $p(\pi) = \pi^2$ und $\cos(n\pi) = (-1)^n$ die Gleichung:

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= \frac{1}{3} \cdot \pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \cdot \pi^2 &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} \cdot \pi^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$