第一章 绪论

1.1研究背景及意义

随着材料，电子和机械工业的快速发展，高性能机器人系统被越来越多地应用到生产和生活中。近些年，机器人系统不断地被应用到诸如地震救灾，探测搜索等非军事和军事领域。由于其强大的适应能力，机器人常常被应用到一些极端环境 中代替人类完成相应的工作。随着经济的发展和工业自动化水平的提高，人们对机器人系统的运动精度和跟踪品质提出了更高的要求。

机器人系统是一个高度非线性和强耦合的动力学系统。在高速运动的情况下，其非线性动力学特征十分显著，并且在实际应用中存在诸如测量误差、摩擦、负载 变化、随机扰动及未建模动态等诸多不确定因素也严重影响着机器人轨迹跟踪系统 的控制品质。由于这类机器人系统的精确模型很难确定，该机器人系统被称为“不确定机器人系统”。同时，机器人轨迹跟踪控制是当今自动化学科中十分具有挑战十分活跃的领域。因此，针对机器人轨迹跟踪系统高精度鲁棒控制的研究 具有十分重要的理论价值和实际意义。在已存在的鲁棒控制方案中，滑模控制以其对系统不确定性和外部扰动不敏感的优点受到了越来越广泛的关注。

滑模控制是一类简单有效的鲁棒控制，且它具有对 系统未建模动态和外部扰动不敏感的优点。直观上控制一阶系统（即系统由一 阶微分方程描述）比控制 𝑛 阶系统（即系统由 𝑛 阶微分方程描述）容易。滑模控制的主要工作原理为设计一类滑模控制律使系统状态轨迹有限时间稳定地收敛到滑模 面，然后系统状态轨迹沿所提出的滑模面收敛到平衡点[。由此可见，当系统的状 态轨迹稳定收敛到滑模面时，不确定机器人系统复杂的轨迹跟踪问题就转换为简单 的关于轨迹跟踪位置误差的一阶系统的稳定性问题。相比于其它鲁棒控制技术，滑模控制能够获得更高的控制精度且对系统未建模动态和外部扰动不敏感。此外，滑模控制的控制律简单且具体实现时不受系统不确定性与外部扰动的具体形式和来源干扰。

滑模控制是滑膜便变结构控制的简称，严格来讲应称为具有滑动模态的变结构控制。滑模控制理论20世纪60年代初前苏联学者Emelyanov提出，Utkin倡导的一种特殊的非线性控制理论。由于滑模控制具有对系统未建模动态和外扰动不敏感的特性，从早期的线性滑模控制和终端滑模控制到快速终端模控制，滑模控制在机器人轨迹跟踪系统中得到了广泛的应用。然而，当我们用终端滑模和快速终端滑模技术到机器人轨迹跟踪系统中时，由于机器人系统的不确定部分含有关节的加速度信息，故现有的机器人轨迹跟踪终端滑模控制和快速终端滑模控制都面临代数环问题的困扰。此外，由于滑模控制是一类有限时间稳定的控制方法，故它的收敛时间是关于系统初始状态的有界时间函数，这会影响滑模控制在机器人轨迹跟踪系统中的应用。最近，Polyakov发展了一类收敛时间不依赖系统初始状态的稳定性理论，即固定时间稳定性。随后，Zuo等将固定时间稳定理论和滑模技术结合发展了多智能体和非线性系统的固定时间滑模控制方法。固定时间稳定系统的收敛时间不依赖系统初始状态的特性为机器人轨迹跟踪滑模控制的发展提供了新的方向。由此可见，机器人轨迹跟踪系统的滑模控制依然是十分活跃且具有挑战性的研究课题。

值得注意的是，工业和电子技术的迅速发展为机器人系统的应用提供了更多的硬件和软件支撑。同时，随着机器人系统被大规模地应用到各种军事和非军事的复杂场合中，人们对机器人的适应性、收敛速度和稳态精度提出了更高的要求。由于机器人系统的工作环境越来越复杂，发展具有更高鲁棒性的机器人轨迹跟踪系统成为新的研究热点问题。近年来，越来越多的学者从事不确定机器人轨迹跟踪滑模控制的高精度运动控制的研究，致力于设计结构简单且易于实现的滑模控制器，进而改善机器人系统的轨迹跟踪性能。

1.2 滑模控制简介及研究现状

1.2.1 滑模控制简介

滑模变结构控制本质上是一类特殊的变结构非线性控制， 其非线性表现为控制的不连续性，这种控制策略与其它控制的不同之处在于系统的“结构”并不固定，而是可以在动态过程中根据系统当前的状态（如偏差及其各阶倒数等）有目的地不断变化，迫使系统按照预定“滑动模态”的状态轨迹运动。由于滑动模态可以进行设计且与对象参数及扰动无关，这就使得变结构控制具有快速响应，对参数变化及扰动不灵敏、无需系统在线辨识，物理实现简单等优点。因此，滑模控制被广泛地应用到各种非线性系统中。

滑模控制的基本思想是：将复杂的𝑛阶系统在滑模控制的作用下转换成一个简单的一阶系统，从而克服系统未建模动态和外部扰动对控制系统控制品质的影响。滑模控制的优点是克服系统的不确定性，对干扰和未建模动态具有很强的鲁棒性，尤其是对非线性系统的控制具有良好的控制效果。滑模控制理论经过几十年的发展，目前适用的系统和控制任务已越来越广泛。

Slotine等介绍了滑模控制的基本理论, ，给出了滑模控制的可达条件，为滑模控制应用到不同非线性系统提供了坚实的理论基础。随后，线性滑模技术被应用到各种非线性系统中。区别于线性滑模仅得到渐近稳定平衡点的性质，终端滑模控制是一类可以得到有限时间稳定平衡点的滑模技术。系统状态轨迹不仅可以在有限时间内收敛到终端滑模面，而且其可以沿着终端滑模面在有限时间内收敛到平衡点。因此，终端滑模控制被广泛的应用的各种系统中。Man和Yu发展了多输入多输出系统的终端滑模控制。Wu提出了一类新的终端滑模控制，利用递归的设计方法得到了有限时间稳定的结果。Park发展了一类二阶系统的终端滑模控制,系统状态轨迹从初始状态就在滑模面上并一直保持在上面，进而有效的克服了滑模控制的颤振问题。Feng 等提出了一类新的非奇异终端滑模控制，为非奇异终端滑模控制提供了新的解决方案。在实际的滑模控制应用中，系统的状态轨迹并不能一直停留在滑模面上或者说滑模矢量不能恒等于零，而是在滑模面上下波动。 这种状态轨迹的波动会导致滑模控制系统具有较大的稳态跟踪误差和控制器颤振.在PID控制中，我们常常利用积分项来提升系统的稳态跟踪性能。受PID 控制思想的启发，Stepanenko等分别采用标准和自适应的设计方法发展了PID滑模控制，并对两类方法设计的滑模控制进行了稳定性分析。在同等条件下，仿真结果表明所提出的PI滑模控制相比较传统的PD滑模控制具有更好的收敛性能。Parra提出了一类简单的分散滑模控制，该分散控制是一类半全局指数稳定的滑模控制。特别地，所提出的分散滑模控制使得系统状态轨迹从初始状态就保持在滑模面上，进而有效地消除了滑模控制的颤振。Jafarov 等发展了一类新型的PID滑模控制，区别于滑模控制的一般设计方法，所提出的滑模控制没有采用等价控制的思想。文献提出了一类新型的PID滑模控制，通过定义了一类新的非线性函数以及基于该函数的滑模矢量，使得所提出的控制器具有更好的控制品质。文献发展了类似PID控制的滑模面使得当系统状态轨迹运动到滑模面上时，滑模控制系统能展现更好的稳态跟踪性能。Niu等发展了一类基于随机系统的积分滑模控制。文献提出了一类鲁棒积分滑模控制，实验验证了所提出积分滑模控制的有效性。Chio等提出了针对非匹配（Mismatched）扰动的不确定系统的积分滑模控制，为解决非线性系统中的非匹配扰动提供了新的方案。Laghrouche等研究了高阶系统的积分滑模控制，该滑模控制可以预先得到收敛时间并保证其鲁棒性。Sam等提出了一类新的比例积分滑模控制，滑模矢量中的积分项可以有效地提高系统的稳态跟踪精度。结合极点配置法，Abidi等发展了一类离散时间积分滑模控制，所提出的积分滑模控制无到达阶段进而可以消除滑模控制的颤振。

滑模控制的颤振会影响其在实际系统中的应用，甚至会影响系统的稳定性。产生滑模控制颤振的主要原因是：滑模控制仅能使所提出的滑模矢量在有限时间内收敛到零而不能保证滑模矢量的一阶微分也收敛到零。近年来，人们利用二阶滑模技术来消除滑模控制器颤振。二阶滑模控制的主要工作原理为：它不仅保证滑模矢量有限时间内收敛到零，同时也保证滑模矢量的一阶微分在有限时间内收敛到零。特别地，Polyakov和PoznyakShtessel 等发展了一类扭曲滑模控制(Twisting sliding mode control)并给出了Lyapunov 稳定性的分析方法。Boiko等和Polyakov和Poznyak分别从频域和时域的角度分析了二阶滑模控制的特性。此外，Boiko 等具体分析了二阶滑模控制中被忽视的执行机构颤振问题.Levant将齐次性技术拓展到了高阶滑模控制的设计中，为高阶滑模控制的应用提供了理论基础。Zhao等发展了无速度传感器的滑模控制，进一步拓宽了滑模控制的应用范围。不足的是，上述二阶滑模控制比传统滑模需要更多的系统状态变量，诸如加速度等信息被应用到滑模控制的设计中。为了消除滑模控制的颤振，文献采用传统滑模控制的设计方法发展了几类非线性系统的连续滑模控制。Golo和Milosavljevi与Du等发展了无颤振的离散非线性系统滑模控制。文献将滑模技术与自适应技术相结合，通过自适应的方式实时地调整滑模控制鲁棒部分的增益，这在一定程度上降低了滑模控制颤振的幅度。Ginoya等和Zhang等发展了两类基于扰动观测器的滑模控制，从实时调整滑模控制增益的角度出发降低滑模控制器的颤振。综上所述，人们从不同的控制角度出发，将滑模控制应用到了各种不同的非线性系统中。正是由于这些研究，滑模控制在近些年得到了长足的发展。

1.2.2 不确定机器人系统滑模控制研究现状

将滑模控制应用到不确定机器人系统时，滑模控制可以分为线性滑模控制和非线性滑模控制。Slotine和Li讨论了滑模变结构控制的基础理论及相比于其它鲁棒控制的优点。其中，Slotine和Li以线性滑模为基础着重讨论了滑模可达条件的判定，为后续滑模控制的发展提供了理论基础。Man和Palaniswami与Slotine和Sastry将线性滑模技术应用到不确定机器人系统中，为机器人轨迹跟踪系统在建模不准确的情况下保持稳定性和一致性能的问题提供了系统的方法。由线性滑模的基本原理可知，系统状态轨迹在滑模控制的作用下可以在有限时间内收敛到滑模面，随后系统状态轨迹沿线性滑模面渐近稳定地收敛到平衡点。

有限时间稳定是比渐近稳定更高效的稳定性理论，而以终端滑模技术为代表的非线性滑模控制就是有限时间稳定的滑模控制。为了得到更快收敛速度和更高跟踪精度的滑模控制，Venkataraman和Gulati发展了机器人系统终端滑模控制方案，进一步提升了机器人系统的稳态跟踪精度。Man 等发展了基于多输入多输出线性系统了机器人系统的终端滑模控制方案，为有限时间稳定的机器人轨迹跟踪系统提供了新的解决方案。Tang在前述工作的基础之上发展了一类新的终端滑模控制并应用到了不确定机器人轨迹跟踪系统中。这类终端滑模控制不仅使系统状态轨迹有限时间收敛到滑模面，并且状态轨迹沿滑模面在有限时间内可以收敛到平衡点。区别于线性滑模控制，终端滑模控制的整个过程都是有限时间稳定的，这一性质极大地提高了机器人轨迹跟踪系统滑模控制的收敛性能。不足的是，当对终端滑模矢量对时间求一阶微分时，其表达式中含有机器人系统轨迹跟踪位置误差的负数次幂，进而使得终端滑模控制输入中含有机器人轨迹跟踪位置误差的负数次幂。当位置误差趋近于零且速度误差不等于零时，滑模控制输入会趋近于无穷大，我们将这一现象称为终端滑模控制的奇异性[75]。由此可见，奇异性不仅破坏系统的稳定性和收敛精度，并且极大地限制了滑模控制的应用甚至会导致系统不稳定。

为了消除终端滑模控制的奇异性，Feng等发展了一类不确定机器人轨迹跟踪非奇异终端滑模控制方案。该方案将传统的终端滑模矢量进行了改造，使得终端滑模控制输入中不再含有机器人轨迹跟踪位置误差的负数次幂。随后，根据Feng等的工作，Yu 等发展了非线性系统的非奇异终端滑模控制方案。在此基础之上，Yu等发展了一类连续的终端滑模控制，遗憾的是所提出的连续终端滑模控制仅能使状态轨迹收敛到终端滑模矢量的邻域内而不是滑模面上。结合时延评估技术，Jin等提出了机器人轨迹跟踪系统的高精度非奇异终端滑模控制方案。所提出的非奇异终端滑模控制方案是不基于机器人系统信息，且其具有更快的收敛速度和强鲁棒性。Barambones和Etxebarria发展了机器人轨迹跟踪系统的自适应终端滑模控制，自适应技术使得所提出的终端滑模控制具有更小的滑模增益进而降低滑模控制颤振。此外，Zhao等发展了新的机器人轨迹跟踪非奇异终端滑模控制，遗憾的是所提出的终端滑模控制是无效的Su。近年来，Galicki在机器人系统的状态空间和任务空间发展了不确定机器人系统的非奇异终端滑模控制。不足的是，Galicki发展的终端滑模控制应用了机器人系统的关节加速度信息，这在现实应用中是很难获得的。

实际的机器人系统中，诸如未建模动态及外部扰动等因素都会影响机器人轨迹跟踪系统的控制品质。通常情况下，滑模控制的设计中需要足够的控制增益来消除机器人系统的不确定性。Man等发展了机器人系统的鲁棒自适应终端滑模控制，采用自适应技术来实时地估计滑模控制的增益以消除机器人不确定性对系统控制性能的影响。Neila等提出了一类无颤振的自适应终端滑模控制，其中自适应技术用来实时地评估不确定部分的上界。结合延迟技术，Jin提出了不基于系统模型的终端滑模控制方案，仿真和实验结果证明了所提出滑模控制方案具有更好的控制性能且具有结构简单易于实现等优点。Baek等提出了一类新的机器人系统自适应滑模控制方案，该方案中将自适应技术、滑模技术与时延技术相结合发展了一类不基于系统模型信息的滑模控制证明了机器人系统的跟踪误差一致有界地收敛到任意小的区域内。Lee等发展了一类自适应积分滑模控制方案，其中应用时延技术到所设计的滑模控制中用来消除参数不确定和外部扰动对控制性能的影响。

由于机器人系统存在的不确定性，滑模控制被广泛的应用到不确定机器人轨迹跟踪系统当中，这使得机器人滑模控制得到了长足的发展。然而，诸如代数环、奇异性和不连续性等问题一直困扰着滑模控制在不确定机器人系统中的应用。特别地，Man等、Feng 等和Yang在发展滑模控制的过程中，机器人系统的不确定部分含有关节加速度信息，这会给滑模控制的鲁棒部分带来影响，我们称这类问题为代数环问题。因此，代数环问题不仅会影响系统的暂态和稳态跟踪性能甚至会影响系统的稳定性。综上所述，由于奇异性和代数环等问题的困扰，探索结构更加简单、收敛速度更快和跟踪精度更高的滑模控制依然是不确定机器人轨迹跟踪系统鲁棒控制的热点问题。

1.3 论文的主要工作与结构

根据以上不确定机器人系统滑模控制设计的简要回顾，我们可以看出，发展一类无代数环和奇异性问题的有限/固定时间滑模控制依然是不确定机器人轨迹跟踪系统的热点问题。本文将分别从滑模控制的到达阶段和滑模阶段出发，探索具有更快暂态收敛速度和更高稳态跟踪精度的不确定机器人轨迹跟踪终端滑模控制。同时，该终端滑模控制要能克服常用滑模控制的奇异性和代数环问题。本文研究的主要内容包括以下四个部分：

（1） 针对常用的不确定机器人轨迹跟踪滑模控制都存在所谓的代数环问题，第一部分形成了无代数环和奇异性问题的不确定机器人轨迹跟踪线性滑模控制和终端滑模控制方案。应用Lyapunov稳定性理论分析了所提出的滑模控制的收敛性，数值仿真和实验验证了终端滑模控制比线性滑模控制具有更好的收敛性能。

（2）第二部分提出了一类对小误差具有放大功能的类指数函数与基于该函数的终端滑模控制律。相比较常用终端滑模控制，所提出的终端滑模控制具有较快的暂态收敛速度和较高的稳态跟踪精度且保有结构简单和易于实现的优点。Lyapunov分析表明，机器人系统轨迹在有限时间内收敛到所提出的滑模面，然后轨迹跟踪位置误差在有限时间内收敛到原点的邻域内，随后渐近稳定地收敛到原点。数值仿真和实验验证了所提出的终端滑模控制比常用终端滑模控制具有更好的收敛性能。

（3）第三部分是在第二部分提出的类指数函数的基础之上发展了一类具有更快暂态收敛速度和更高稳态跟踪精度的快速终端滑模控制。相比较第二部分提出的终端滑模控制，所提出的滑模控制将快速终端滑模面和指数到达律结合分别从到达阶段和滑模阶段改善机器人轨迹跟踪系统的收敛性能。Lyapunov分析了所提出快速终端滑模控制的稳定性，数值仿真和实验验证了所提出的快速终端滑模控制的收敛性能。。

（4）第四部分发展了一类收敛时间不依赖系统初始状态的机器人轨迹跟踪固定时间滑模控制。相比较于传统滑模控制，所提出滑模控制的收敛时间不依赖系统初始状态而是仅依赖控制参数的常数，这极大地方便了滑模控制在机器人轨迹跟踪系统中的应用。Lyapunov分析表明，系统状态轨迹在固定时间内收敛到所提出的固定时间滑模面，随后轨迹跟踪位置误差在固定时间内收敛到零。数值仿真和实验验证了所提出的固定时间滑模控制的收敛性能。

1.3.1 本文组织结构

本文各章的主要内容如下：

第一章为绪论；主要介绍了当前机器人控制的主要方法和研究工作，重点介绍了滑模控制的研究现状及存在的问题，方便展开本文的主要研究内容与研究路线。第二章为有限/固定时间稳定理论与不确定机器人系统模型；介绍了机器人系统的通用模型与一些通用性质。为了后续讨论和分析的方便，简述了非线性系统有限时间与固定时间稳定Lyapunov稳定性理论，给出了后续所需通用数学公式的定义。

最后，给出了机器人轨迹跟踪系统中常用的定量分析方法以便后续评估不同滑模控制的控制品质。第三章为不确定机器人系统的线性与非线性滑模控制；从消除代数环的问题出发，采用传统滑模控制的设计方法分别设计了不确定机器人轨迹跟踪线性滑模控制和终端滑模控制，并指出该方案存在的问题。第四章为不确定机器人系统的终端滑模控制；从探索更快暂态收敛速度和更高稳态跟踪精度的角度出发，本章提出了一类结构简单易于实现且无奇异性和代数环问题的不确定机器人轨迹跟踪系统终端滑模控制。第五章为不确定机器人系统的快速终端滑模控制；本章结合快速终端滑模面指数到达律，从滑模控制的到达阶段和滑模阶段的角度出发提高不确定机器人轨迹跟踪滑模控制的暂态和稳态收敛特性。第六章为不确定机器人系统的固定时间滑模控制；探索了一类不确定机器人轨迹跟踪固定时间稳定的滑模控制，不同于上述滑模控制，该滑模控制的收敛时间不依赖于系统的初始状态且主要依赖于系统的控制参数。第七章是总结与展望；本章对本文主要完成的研究工作做了回顾，并对期望解决的问题进行了探讨。

1.4 小结

本章首先介绍了不确定机器人轨迹跟踪系统滑模控制的研究背景和意义，对滑模控制的研究现状和发展概况做了简要的介绍。随后，第三部分介绍了论文的主要工作和结构，并具体介绍了后面章节的主要研究内容。

第二章 有限/固定时间稳定理论与不确定机器人系统模型

2.1 引言

众所周知，稳定性是控制系统最重要的衡量指标之一。若一个控制系统不稳定，则由该控制系统得到的任何优异品质都被视为不可靠，并且该控制会带来很多不可控的潜在风险。在现代控制理论中，19世纪末俄国数学家Alexandr Mikhailovich Lyapunov提Lyapunov稳定性理论是分析非线性控制系统稳定性最常用的方法。Lyapunov稳定性理论将用于非线性系统稳定性分析的方法归纳为两类：Lyapunov 线性化方法（Lyapunov 第一方法）与Lyapunov直接方法（Lyapunov第二方法。Lyapunov 线性化方法根据非线性系统在平衡点附近线性化系统的稳定性来判别系统的局部稳定性。Lyapunov直接方法则从系统能量的观点出发，借助一个虚拟的能量函数即候选Lyapunov 函数来直接判定系统的稳定性。Lyapunov 直接方法已成为分析非线性系统稳定性的重要理论依据。

此外，收敛性能是评价控制系统性能优劣的一个关键指标。早期的控制系统设计方法得到的结果中，闭环系统最快的收敛速度为指数收敛，也就是说，当收敛时间趋于无穷大时，系统状态变量以指数的形式渐近稳定地收敛到平衡点。近年来，非线性系统的有限时间稳定控制得到了长足的发展。也就是说，当收敛时间趋于系统初始状态的有界时间函数的上界时，系统状态有限时间稳定地收敛到平衡点。另外，由于有限时间稳定的闭环系统控制器含有分数幂项，使得有限时间稳定的闭环控制系统与非有限时间稳定的闭环控制系统相比，具有更好的鲁棒性能和抗扰动性能。因此，人们提出了各种各样的控制方法以实现闭环系统的有限时间控制。其中，Lyapunov函数的有限时间稳定方法和齐次性技术为非线性系统的有限时间稳定控制的发展提供了强有力的数学支撑。

在有限时间控制中，控制系统的收敛时间往往与系统的初始状态有关。换句话说，有限时间控制系统的收敛时间是关于系统初始状态的有界函数。若系统初始状态从状态空间的不同位置出发，有限时间稳定的控制系统具有不同的收敛性能。这一问题极大地限制了有限时间稳定控制在机器人轨迹跟踪系统中的应用。近些年来，一类收敛时间不依赖于系统初始状态的控制方法得到越来越多学者的关注。特别地，Polyakov提出了线性系统的固定时间反馈控制，该控制方法的收敛时间不依赖于闭环系统的初始状态。Polyakov工作的启发，文献为非线性系统固定时间稳定控制的设计提供了必要的数学工具。

本章在重点介绍了Lyapunov稳定性理论以及根据Bhat和Bernstein与Zuo等获得的有限时间稳定与固定时间稳定的通用定理之后，还简介了机器人系统的动力学模型及其通用特性。最后，定义了本文中通用的一些符号，以便后续的讨论和分析。本章为后续章节讨论和分析奠定了理论基础。

2.2 Lyapunov稳定性理论

在动力学系统的研究中会出现各种不同的稳定性问题，考虑到后续章节闭环控制系统的设计与分析，本节将给出Lyapunov稳定性理论的基础。

2.2.1 基本概念

在介绍Lyapunov稳定性理论之前，我们首先介绍下列关于稳定性和渐近稳定性的概念。

定义 2.1：通常情况下，非线性动力学系统被描述为如下所示的微分方程

𝑥˙= 𝑓(𝑥, 𝑡)其中𝑥 ∈ Rn表示为系统的状态变量，𝑓 : Rn → Rn 为 𝑛 维非线性矢量函数。所示的系统在状态空间中的解通常被称为状态轨迹。

定义 2.2：稳定性和渐近稳定性对于如式(2-1)所示的闭环系统，假设它的平衡点为 𝑥 = 0。若系统状态满足如下关系：

（1）对于任意小的正实数 𝜀 > 0，存在关于 𝜀 的任意小的函数 𝛿 = 𝛿(𝜀) > 0，以至于‖𝑥(𝑡)‖ < 𝜀, ∀𝑡 ≥ 0, ‖𝑥(0)‖ < 𝛿

（2） 闭环系统(2-1)的状态变量满足如式(2-2)所示的稳定性条件，且选择合适

的 𝛿 满足𝑥(𝑡) = 0, ∀ ‖𝑥(0)‖ < 𝛿，则我们称该系统具有渐近稳定的平衡点。由任意小的 𝜀 > 0 所确定的原点的邻域𝐵𝜀 = {𝑥| ‖𝑥(𝑡)‖ < 𝜀} 通常被称为吸引域，该吸引域是指这类最大的球域。上述的定义表征了系统的局部渐近稳定性，即描述了系统状态从平衡点附近的邻域出发后收敛到平衡点的过程。局部稳定性并不能充分说明系统状态从状态空间的任意位置出发的情况下，还能稳定地收敛到平衡点。此时，我们就需要全局稳定的概念来进一步拓展闭环系统的稳定性理论。

定义 2.3：全局渐近稳定性

全局渐近稳定性定义为，无论系统的状态初值处在状态空间的任何位置，系统状态轨迹都能渐近稳定地收敛到平衡点。那么，我们称满足这种稳定性的系统具有全局渐近稳定的平衡点。也就是说，所示的条件要变换为：若存在 𝑥(0) ∈ n以致于𝑥(𝑡) = 0。此时，我们称满足这类条件的控制系统为全局渐近稳定的控制系统。

在现代控制理论中，渐近稳定一直是人们追求的稳定形态之一。特别地，在确定机器人轨迹跟踪系统的控制中，我们很难得到精确已知平衡点的吸引域。此时，全局渐近稳定的平衡点显得更有实际意义。本节给出了全局渐近稳定的定义，但并没有给出直接判定统渐近稳定的通用方法。因此，我们需要找到一类有效的方法来直接判定系统的全局渐近稳定性。

2.2.2 Lyapunov直接方法

由定义2.2与2.3可知，如果要证明如所示系统的稳定性，我们需要求解微分方程。遗憾的是，在非线性系统的实际应用中，我们很难得到微分方程的解。因此，Lyapunov定理常常被应用到非线性系统的稳定性证明中，这极大地方便了非线性系统稳定性的判定。Lyapunov直接方法不需要求解系统的微分方程，而是从能量的角度来分析非线性系统的稳定性。在实际的物理系统中，如果一个系统储存的能量随时间逐渐耗散且在平衡点处系统的能量达到最小，我们称这样的平衡点为稳定的平衡点。相反，如果系统的储能随时间的推移而不断增加，我们称这类平衡点是不稳定的平衡点。此外，如果系统的储能随着时间的推移既不增加又不耗散，则称这类平衡点为Lyapunov意义下的稳定平衡点。对于某一具体的非线性系统，直接建立系统的储能函数是不现实的。通常情况下，我们会虚拟类似能量的正定标量函数，通过对该虚拟的能量函数沿系统动态方程的运动情况来直接判定系统的稳定性，这极大地简化了系统稳定性的证明过程。

定义 2.4：正定函数

存在一个连续的标量函数 𝑉(𝑥)，若当 𝑥 = 0 时 𝑉(0) = 0 且满足如下关系：𝑉(𝑥) > 0, ∀𝑥 ̸= 0，则我们称 𝑉(𝑥) 为正定函数。如果上述性质在 𝑥 ∈ n时成立，则我们称该连续的标量函数 𝑉(𝑥) 为全局正定的函数。

定义 2.5： Lyapunov函数

对 𝑥 ∈ 𝐵𝑟 且 𝐵𝑟 = {𝑥| |𝑥| ≤ 𝑟} 时，存在连续一阶可微的标量正定函数 𝑉(𝑥)，若它沿系统(2-1)对时间求一阶微分后满足如下所示的关系：𝑉˙(𝑥) ≤ 0，则这样的 𝑉(𝑥) 被称为闭环系统(2-1)的候选Lyapunov函数。

定理 2.1：全局渐近稳定的Lyapunov定理

存在连续一阶可微的标量函数 𝑉(𝑥)，若 𝑥 ∈ Rn 时 𝑉(𝑥) 沿非线性系统满足

（1） 𝑉(𝑥) 正定；（2） ˙𝑉(𝑥) 负定；

（3）当 ‖𝑥‖ →∞，𝑉(𝑥) →∞。

此时我们称非线性系统有全局渐近稳定的平衡点。

由稳定性定理2.1可知，运用Lyapunov直接方法的关键在于寻找一个满足条件的候选Lyapunov函数 𝑉(𝑥)。但是，Lyapunov稳定性理论本身并没有提供构造 𝑉(𝑥) 的一般方法。由于确定候选Lyapunov函数没有一个通用的方法，故我们只能依靠经验去试探满足条件的候选Lyapunov函数。

2.3 有限时间控制理论

在2.2节中，我们重点介绍了关于非线性系统(2-1)的全局渐近稳定性。也就是说，当系统状态轨迹渐近稳定地收敛到平衡点时，无论系统状态从状态空间的任何位置出发，收敛时间都不能精确已知，即 𝑡 → ∞。在实际应用中，这一性质不利于设计具有更优异品质的控制系统。有限时间稳定可以得到比渐近稳定鲁棒性能更强、收敛速度更快和跟踪精度更高的控制系统。由此，Bhat和Bernstein提出了有限时间稳定的概念，即当 𝑡 > 𝑇(𝑥0) 𝑥 = 0，其中 𝑥0 = 𝑥(0) 和 𝑇(𝑥0) 分别为非线性系统初始状态和关于系统初始状态的有限时间。本节将介绍有限时间稳定的一般通用方法，以便后续章节的讨论和分析。

定义 2.6：有限时间稳定

对于如式(2-1)所示的非线性系统，如果系统的收敛时间 𝑇(𝑥0) 是关于系统初始状态的有界函数，则我们称该系统具有有限时间稳定的平衡点。也就是说，存在一个依赖系统初始状态的时间常数 𝑇max(𝑥0) ∈ ℜ+ 以致于当 𝑡 ≥ 𝑇 和 𝑇 ≤ 𝑇max(𝑥0) 时𝑥 = 0。此时我们就称如式(2-1)所示的非线性系统具有有限时间稳定的平衡点。定理 2.2：全局有限时间稳定的Lyapunov函数定理对于如式(2-1)所示的非线性系统，假设存在一个连续的正定函数 𝑉(𝑥) : 𝐷 → ℜ和两个正常数 𝜂 ∈ ℜ+ 和 𝛼 ∈ (0, 1)，以至于正定函数 𝑉(𝑥) 在原点的邻域 𝑊 ⊆ 𝐷 ⊆ℜ𝑛 内满足

𝑉˙(𝑥) + 𝜂𝑉𝛼(𝑥) ≤ 0, 𝑥 ∈ 𝑊∖ {0}

此时，原点是一个有限时间稳定的平衡点且收敛时间 𝑇 为

𝑇(𝑥0) ≤1𝜂(1 − 𝛼)𝑉1−𝛼(𝑥(𝑡0)), 𝑥 ∈ 𝑊∖ {0} ⊂ D

其中 𝑡0 为系统的初始状态。此时，我们就称如式(2-1)所示的系统是有限时间稳定的。

定理 2.3：全局快速有限时间稳定的Lyapunov函数定理

对于如式(2-1)所示的非线性系统，假设存在一个连续的正定函数 𝑉(𝑥) : 𝐷 → ℜ和两个正常数 𝜅1, 𝜅2 ∈ ℜ+ 和 𝛽 ∈ (0, 1)，使得正定函数 𝑉(𝑥) 在原点的邻域𝑊 ⊆ 𝐷 ⊆ ℜ𝑛 内满足

𝑉˙(𝑥) + 𝜅1𝑉(𝑥) + 𝜅2𝑉𝛽(𝑥) ≤ 0, 𝑥 ∈ 𝑊∖ {0}

此时，原点是一个有限时间稳定的平衡点且收敛时间 𝑇 为

𝑇(𝑥0) ≤1𝜅1(1 − 𝛽)ln𝜅1𝑉1−𝛽(𝑥(𝑡0)) + 𝜅2𝜅2, 𝑥 ∈ 𝑊∖ {0} ⊂ D

此时，我们就称如式所示的系统是快速有限时间稳定的系统。

2.4 固定时间控制理论

在2.2和2.3节中，我们分别讨论了非线性系统全局渐近稳定和有限时间稳定的理论依据。需要指出的是，无论全局渐近稳定还是有限时间稳定都不能预先根据设计的控制参数确定一个固定的收敛时间。文献发展了收敛时间不依赖系统初始状态的固定时间稳定控制方法。

定义 2.7：固定时间稳定

对于如式(2-1)所示的非线性系统，如果系统的收敛时间 𝑇 全局有界且为不依赖系统初始状态的常数，则我们称该系统具有固定时间稳定的平衡点。也就是说，存在一个不依赖系统初始状态的常数 𝑇max ∈ ℜ+ 以至于当 𝑡 ≥ 𝑇和𝑇 ≤ 𝑇max 时 𝑥 = 0。此时，我们就称如式(2-1)所示的非线性系统具有固定时间稳定的平衡点。

定理 2.4：全局固定时间稳定的定理

考虑如下所示的标量系统

值得注意的是，式(3-15)和式(3-54)分别采用了如注解3.5所示的边界层技术以消除滑模控制的颤振。

图3.3描述了机器人系统在TSMC作用下的实际关节位置轨迹与期望位置轨迹。如图3.3所示，在经过一个短暂的暂态过程之后，实际轨迹都能够很好地跟踪上期望轨迹。图3.4和3.5分别描述了LSMC和TSMC的轨迹跟踪位置误差和控制力矩的比较。如图3.4所示，TSMC比LSMC具有更快的收敛速度。如图3.4和3.5所示的结果进一步验证了两类滑模控制之间收敛性能的递进关系。

通过如图3.4和3.5所示的定性分析，可以得到TSMC 比LSMC具有更快的暂态收敛速度和更高的稳态跟踪精度。现在，我们对两类不确定机器人轨迹跟踪滑模控制的控制品质进行定量分析。在定量分析中，我们常常定lg‖𝑒‖来衡量该控制器的收敛率。图3.6描述了TSMC 和LSMC收敛率的比较，明显地，从图中可以看出TSMC比LSMC具有更好的收敛率。

根据式(2-22)和(2-23)，表3.3给出了LSMC和TSMC控制性能的定量分析。其中，𝑡𝑟 表示轨迹跟踪位置误差收敛到 2 × 10−2 (rad) 时两个关节所需的收敛时间。如表3.3所示，相比较于LSMC，TSMC在不使用更大控制力矩和更多收敛时间的情况下可以得到更低的均方轨迹跟踪位置误差。表3.3 所示的结果进一步验证了两类滑模控制收敛性能之间的递进关系。

3.4 实验验证

在本节中，我们将在如图3.7所示的一自由度机器人系统上进一步验证本章提出的两类滑模控制的控制品质。图3.7所示的机器人系统主要由两部分组成，即研华工控机与固高三轴并联机器人系统。固高机器人系统的每一个关节分别由交流电机、17位绝对值编码器、电机驱动器与关节连杆组成。研华工控机主要由可接入多块功能板的ISA底板和基于ISA接口的PCL-833与PCL-726板卡组成。其中，PCL-833的主要任务是从固高平台上的编码器中定时读取当前的关节位置信息。PCL-833实现定时采样的功能是通过它自带的定时中断，该中断接入研华工控机用以定时提醒工控机来读取编码器上的关节位置信息。该计时器区别于操作系统的软计时器，是一类硬件计时器且具有更高的采样精度。PCL-726的主要作用为输出工控机根据当前位置信息计算出来的控制力矩到驱动器中，以驱动交流电机转动完成轨迹跟踪的任务。总而言之，该一自由度机器人系统的工作原理为：PCL-833从编码器中定时读取关节的位置信息并传送给研华工控机，工控机根据当前的位置信息计算出当前的控制力矩，该控制力矩通过PCL-726 输出到固高机器人平台中的驱动器以驱动电机完成轨迹跟踪。此外，工控机用软件Micros Visual C++ 6.0来完成控制力矩的计算和输出。

该一自由度机器人的重力矢量为𝑔(𝑞) = 0.145g1cos(𝑞) (Nm)，实验仿真的采样率为 2 ms，期望轨迹为 𝑞𝑑 = 1.25 + exp(−t) − 0.25 exp(−4t) (rad)，不确定机器人系统的初始状态都为零，TSMC和LSMC的控制参数可归纳为如表