2016 年 1 月 日
考试用

西安邮电大学期末考试试题（A 卷）

（2015 — 2016 学年第一学期）

课程名称：高等数学 AI

试卷类型：（A、B、C） 考试专业、年级：通院、电院、自动化院、计科、物理 15 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

一、填空题（每空 2 分，共 16 分）：

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=$____________.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+k, & x<0, \\ \ln(3\cos 2x), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $k=$__________.

3. 函数 $y=x+\sqrt{1-x}$ 在闭区间 $[-3,\ 1]$ 上的最大值为________；最小值为________.

4. 设 $f'(3)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+2h)-f(3)}{h}=$__________.

5. 设函数 $f(x)=xe^{x}$，则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$____________.

6. 二阶齐次线性微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解为________________.

7. 微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的一个特解可设为____________(不求待定常数).

二、计算下列各题（每题 5 分，共 30 分）：

1. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$；

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{1}^{\cos x}e^{-t^{2}}\mathrm{d}t}{x^{2}}$；

3. 设 $y=x^{\sin x}\ (x>0)$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$；

4. 设 $y=f(\ln^{2}x)$，其中 $f(u)$ 可微，求 $\mathrm{d}y$；

5. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=3\cos t \end{cases}$ 所确定函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$；

6. 求曲线 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 在 $x=0$ 的点处的切线方程.

三、解答下列各题（每题 5 分，共 25 分）：

1. 计算 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

2. 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

3. 计算 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$；

4. 判别反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的收敛性，如果收敛，求出其值；

5. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{2y}(3x^2+x)$ 的通解.

四(5 分)、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

五(9 分)、设 $f(x)=\ln(x^2+1)$，

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；(2) 求曲线 $y=f(x)$ 的凹、凸区间与拐点.（要求列表）

六(9 分)、设 D 是由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 所围成的平面封闭图形.

(1) 求 D 的面积；　(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

七(6 分)、设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} x^2 f(x)\,dx$，证明

至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使

$$f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

西安邮电大学 2015-16 学年第一学期试题

标准答案

课程：高等数学 AI 类型：A 卷 专业、年级：通院、电院、自动化院、计科、物理 15 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、填空题（每空 2 分，共 16 分）：

1. e^2； 2. $k=\ln 3$； 3. 最大值为$\frac{5}{4}$；最小值为-1； 4. 2； 5. $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$；

6. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$； 7. $y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}$.

二、计算下列各题（每题 5 分，共 30 分）：

1. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$. （5 分）

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\sin x}{2x}=-\frac{1}{2e}$. （5 分）

3. $(x^{\sin x})'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$（4 分），$y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$. （5 分）

4. 由 $y'=\frac{2\ln x}{x}f'(\ln^2 x)$（3 分），得 $\mathrm{d}y=\frac{2\ln x}{x}f'(\ln^2 x)\mathrm{d}x$. （5 分）

5. $\frac{dy}{dx}=\frac{-3\sin t}{\cos t}=-3\tan t$（3 分），$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-3\sec^2 t}{\cos t}=-\frac{3}{\cos^3 t}$. （5 分）

6. 当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两边对 x 求导，求得曲线在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $y'|_{x=0}=2$， （4 分）

故所求切线方程为 $2x-y+1=0$. （5 分）

三、解答下列各题（每题 5 分，共 25 分）：

1. $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x}=t}{=}2\int te^t\mathrm{d}t$（2 分）$=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$. （5 分）

2. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$（3 分）$=4\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=4[x-\arctan x]_0^1=4-\pi$. （5 分）

3. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x=[x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ （5 分）

4. 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\frac{1}{x}=\left[-\sin\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=\sin 1$（4 分），所以积分收敛，且其值为 $\sin 1$.

（5 分）

5. 分离变量得 $\frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y=(3x^2+x)\mathrm{d}x$（2 分），两边积分得通解为 $\ln(1+y^2)=x^3+\frac{1}{2}x^2+C$. （5 分）

四(5 分)、证明：作变换 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，且 $y^2=Ce^{x^3+\frac{1}{2}x^2}-1$，$y=\pm\sqrt{Ce^{x^2}}$

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\,\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

所以 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$. （5 分）

五(9 分)、函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},\quad f''(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，令 $f''(x)=0$，得 $x=-1$，1. 列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	0	+

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	−	0	+	0	−

（5 分）

因此有

（1）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$. （7 分）

（2）曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$ 上是凸的，在 $[-1,1]$ 上是凹的. 拐点为 $(-1,\ln 2)$ 和 $(1,\ln 2)$. （9 分）

说明：1. 标准答案务必要正确无误。 2. 将每道大题得分和总分填入得分栏中。

六(9 分)、(1) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 的交点为（0, 0）和（2, 4），因此，D 的面积

$$S=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

或
$$S=\frac{1}{2}\times2\times4-\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$
(5 分)

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x=\pi\int_0^2(4x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{15}.$$

或
$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot4^2\cdot2-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{3}-\frac{32\pi}{5}=\frac{64\pi}{15}.$$
(9 分)

七(6 分)、因函数 $x^2f(x)$ 在闭区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 上连续，故根据积分中值定理，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{3})$，使

$3\int_0^{\frac{1}{3}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\eta^2f(\eta)$，因此由题设条件 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x$，可得 $f(1)=\eta^2f(\eta)$. (3 分)

作辅助函数 $\varphi(x)=x^2f(x)$，则由上述证明可得 $\varphi(\eta)=\varphi(1)$，又由题设条件，知 $\varphi(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，且 $\varphi'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，所以应用罗尔中值定理，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0,$$

即
$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$
(6 分)