A1

西安邮电大学期末考试试题（A 卷）

（2020——2021 学年第一学期）

课程名称：高等数学 A1

考试专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院及网安院各专业与物理、信管及商务等专业等

考核方式：闭卷　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

注意事项： 1. 答题必须使用黑色字迹签字笔书写，不许用铅笔答卷；2. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分：______ 一、选择题（每小题 2 分，共 6 分）：每小题只有一个正确选项，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

1. 考察函数：

①e^{-x^2}； ②e^{-x}； ③ e^{x^2}； ④ $\arctan x^2$； ⑤$\arctan x$，

当$x\to\infty$时，上述五个函数中，极限存在的函数是（　　）

A. ③④⑤； B. ②④； C. ①②④； D. ①④.

2. 下列函数在自变量的给定变化过程中不是无穷小的是（　　）

A. $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}\ (x\to\infty)$； B. $1-2^{-x}\ (x\to 0)$； C. $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$； D. $\dfrac{\sin x}{x}\ (x\to\infty)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x\ge 0, \\ (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$处连续，则 $a=$（　　）.

A. e^{-2}； B. e； C. 1； D. e^{-1}.

得分：______ 二、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. 曲线 $y=1-2x^2$ 上点$(0,1)$处的曲率为__________.

2. 设 $y=\int_0^x xe^{t^2}dt$，则 $y''=$______________.

A2

3. 设 $y=f(\tan x)$，其中 $y=f(u)$ 可微，则 $dy=$______________.

4. 已知 $y_1=e^{-x}$ 和 $y_2=e^{2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则该微分方程是______________.

5. 微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{x}$ 的一个特解可设为______________(不求待定常数).

得分：______ 三、计算下列各题（每小题 4 分，共 16 分）

得分：______ 1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-2n-2}\right)$.

得分：______ 2. 已知 $y=|x+1|^x\ (x\ne -1)$，计算 y'.

得分：______ 3. 设 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=\arcsin(3t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

得分：______ 4. 求 $\int\dfrac{\sin x}{\cos^{\frac{1}{3}}x}dx$.

A3

得分：_____ 四、解答下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

得分：_____ 1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^3}-1}$.

得分：_____ 2. 求 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x\cos x}{1+x^2}dx$.

得分：_____ 3. 判别反常积分 $\int_{1}^{+\infty}(x-1)e^{-x}dx$ 的收敛性，如果收敛，求出其值.

得分：_____ 4. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

A4

得分：_____ 五、解答下列各题（每小题 6 分，共 18 分）

得分：_____ 1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2}，求 $\int x f'(x)dx$.

得分：_____ 2. 设 $e^x+e^y=xy+e+1$，求 $y''\big|_{x=0}$.

得分：_____ 3. 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$，由此计算 $\int_0^1 x(1-x)^7 dx$.

A5

得分：______ 六、解答下列各题（共 13 分）

得分：______ 1. (7 分)求函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间与极值.

得分：______ 2. (6 分)求曲线 $y=\int_0^{2x}\ln\sqrt{1+t^2}\,dt$ 的凹凸区间与拐点.

除填空题、图解及特殊要求外，一般不留答题空间 [illegible] 折开或在框外留有任何标记，否则按零分计

A6

得分：______ 七、解答下列各题（共 17 分）

得分：______ 1. (9 分)设曲线 $y=1-x^2$ 与其在点 $(1,0)$ 处的切线和 y 轴所围成的平面图形为 D.

（1）求平面图形 D 的面积 S；

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V.

得分：______ 2. (8 分)已知可导函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,dt=x+1$，求 $f(x)$.

西安邮电大学 2020—2021 学年第-学期期末试题（A）卷
标准答案

课程：高等数学 A1　类型：A 卷

专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院及网安院各专业与物理、信管及商务等专业

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	6	10	16	20	18	13	17			100

一、 选择题（每小题 2 分，共 6 分）：1. D；2. C；3. A.

二、 填空题（每空 2 分，共 10 分）：

1. 4； 2. $2(1+x^2)e^{x^2}$； 3. $f'(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x$； 4. $y''-y'-2y=0$； 5. $y^*=(b_0x+b_1)e^x$.

三、 计算下列各题（每小题 4 分，共 16 分）：

1.解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-2n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}$ (3 分) $=\dfrac{5}{2}$.　(4 分)

2.解：取对数，得 $\ln y=x\ln|x+1|$，两端求导，得 $\dfrac{y'}{y}=\ln|x+1|+\dfrac{x}{1+x}$ (3 分)，解得

$$y'=|x+1|^x\left(\ln|x+1|+\frac{x}{1+x}\right)$$　(4 分)

3.解：由 $x'(t)=3t^2+3$，$y'(t)=\dfrac{3}{\sqrt{1-9t^2}}$ (2 分)，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1}{(t^2+1)\sqrt{1-9t^2}}.$$　(4 分)

4. 解：$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^{\frac{3}{2}}x}\mathrm{d}x=-\int(\cos x)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\cos x$ (2 分) $=\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$.　(4 分)

四、解答下列各题（每小题 5 分，共 20 分）：

1. 解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)e^{\cos x}}{\frac{1}{2}x^3}=2e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ (2 分) $=2e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=2e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{e}{3}$.　(5 分)

2. 解：$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (2 分) $\displaystyle=4\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=4[x-\arctan x]_0^1=4-\pi$.　(5 分)

3. 解：由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty}(x-1)e^{-x}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}(x-1)\mathrm{d}e^{-x}=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty}=\frac{1}{e}$ (4 分)，所以积分收敛，且其值为 $\dfrac{1}{e}$.　(5 分)

4. 解：当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ (2 分)，由导数的定义，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

综上所述，$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　(5 分)

五、解答下列各题（每小题 6 分，共 18 分）：

1. 解：由已知可得 $f(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$ (2 分)，于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+C=(2x^2-1)e^{x^2}+C.$$　(6 分)

2. 解：将 $x=0$ 代入所给方程，得 $y=1$ (1 分)．方程两端对 x 求导，得

$$e^x+e^y\cdot y'=y+xy' \qquad (1)$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入式（1），得 $y'(0)=0$ (4 分)．式（1）两端再对 x 求导，得

$$e^x+e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''=2y'+xy'' \qquad (2)$$

将 $x=0$，$y=1$ 及 $y'(0)=0$ 代入式（2），解得 $y''(0)=-\dfrac{1}{e}$，即 $y''|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$.　(6 分)

说明：1. 标准答案务必要正确无误。　2. 将每道大题得分和总分填入得分栏中。

3. 证明：作变换 $x=1-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=-\int_1^0(1-t)^m t^n\mathrm{d}x=\int_0^1 t^n(1-t)^m\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x\,. \qquad (3\text{ 分})$$

利用上述结论，得

$$\int_0^1 x(1-x)^7\mathrm{d}x=\int_0^1 x^7(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^7-x^8)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{9}x^9\right]_0^1=\frac{1}{72}\,. \qquad (6\text{ 分})$$

六、解答下列各题（共 13 分）

1(7 分). 函数在其定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 内连续．求导，得

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\quad(x\neq1)\,.$$

令 $y'=0$，解得驻点为 $x=0$ 及 $x=3$（3 分）．列表分析如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+

由此表知，函数在区间 $(-\infty,1)$ 内及 $[3,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(1,3]$ 上单调递减．函数在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=\dfrac{27}{4}$，且没有其它极值． （7 分）

2(6 分). 解：函数在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续．求导，得

$$y'=2\ln\sqrt{1+4x^2}\,,\quad y''=\frac{8x}{1+4x^2}\,.$$

令 $y''=0$，解得 $x=0$（2 分）．列表分析如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	−	0	+

由此表知，曲线在区间 $(-\infty,0]$ 上是凸的；在区间 $[0,+\infty)$ 上是凹的．注意 $x=0$ 时，$y=0$，所以曲线的拐点为 $(0,0)$． （6 分）

七、解答下列各题（共 17 分）

1(9 分). 解：曲线 $y=1-x^2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=-2(x-1)\text{，即 }y=-2(x-1)\,.$$

题中平面图形如图． （2 分）

(1) $$S=\int_0^1[-2x+2-(1-x^2)]\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2-2x+1)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}\,.$$

或 $$S=\frac{1}{2}\times1\times2-\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=1-\left[x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\,. \qquad (6\text{ 分})$$

(2) $$V=\tfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot2^2\cdot1-\int_0^1\pi\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi-\pi\int_0^1\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\pi-\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi\,.$$

或 $$V=\int_0^1\pi[-2(x-1)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1\pi\left(1-x^2\right)^2\mathrm{d}x=4\pi\frac{1}{3}\left[(x-1)^3\right]_0^1-\pi\int_0^1\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\pi-\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{4}{5}\pi\,. \qquad (9\text{ 分})$$

2(8 分). 解：方程两边求导，得 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x+2f(x)\sin x=1$，整理得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\text{，即 }f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$$

可见 $f(x)$ 满足一阶线性微分方程 $y'+\tan x\cdot y=\sec x$（4 分），由求解公式，得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\cdot\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)=\mathrm{e}^{\ln|\cos x|}\left(\int\sec x\cdot\mathrm{e}^{-\ln|\cos x|}\mathrm{d}x+C_1\right)$$

$$=|\cos x|\left(\int\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{|\cos x|}\mathrm{d}x+C_1\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2x}\mathrm{d}x+C\right)\ (C=\pm C_1)$$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x\,.$$

在方程中令 $x=0$，得 $f(0)=1$，将其代入上式解得 $C=1$，于是所求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$． （8 分）