

# 2012-2013 学年第一学期《高等数学 AI》期末试卷 (A)

授课班号 \_\_\_\_\_ 年级专业 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分						

## 一. 填空题 (4 分 × 7)

得分	阅卷人

1. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 则  $a = -\frac{3}{2}$ .
2. 函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$  的间断点为  $x = \pm 1$ .
3. 设  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \arctan \frac{x}{2} + \arcsin 2x$ , 则  $y'(0) = \frac{5}{2}$ .
4. 曲线  $y = e^{\arctan x}$  的凹区间为  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ .
5. 若  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , 且  $x = at + b$ , 则  $\int f(t) dt = F(t) + C$ .
6. 设  $f(5) = 2$ ,  $\int_0^5 f(x) dx = 3$ , 则  $\int_0^5 x f'(x) dx = 7$ .
7. 设  $F(x) = \int_{-x}^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$ , 则  $F'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + e^{x^2}$ .

## 二. 计算题 (6 分 × 6)

得分	阅卷人

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}$ .

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}$$

$$= \frac{1+2+\dots+n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

2. 设  $y = xe^{2x}$ , 求  $y^{(n)}$ .

Leibniz 法则

$$y^{(n)} = (e^{2x})^{(n)} \cdot x + C_n \cdot (e^{2x})^{(n-1)} \cdot (x)' = 2^n \cdot e^{2x} \cdot x + n \cdot 2^{n-1} \cdot e^{2x} = 2^n (2x+n) e^{2x}$$

另解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} - 1}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left( \frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n)$$



3.

设  $y = y(x)$  由方程组  $\begin{cases} x = e^t + t - 1 \\ e^y \cos t + y - 1 = 0 \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$  的

值.

$$\begin{cases} x = e^t + t - 1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t + 1 \end{cases}$$

$x=0$  时,  $t=0$  此时  $y=0$

$$e^y \cos t + y - 1 = 0 \Rightarrow y = y(t) \text{ 隐函数求导: } e^y \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \cos t - e^y \sin t + \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{e^y \sin t}{e^y \cos t + 1} \quad \therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Big|_{t=0} = \frac{e^y \sin t}{(e^y \cos t + 1)(e^t + 1)} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \Big|_{x=0} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0}}{t - 0}}{e^t + 1 \Big|_{t=0}} = \frac{1}{8} \quad (\text{用极值定理求导})$$

4. 设  $f(x)$  在  $x=1$  处可导且  $f'(1)=2$ , 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1+x)}{x}$$

$$\text{法一: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= -f'(1) - f'(1)$$

$$= -4$$

5.

求  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ , 其中  $a$  是非零常数.

不好设  $a > 0$ .

1)  $x > a$  时,  $\text{法一: } \int \frac{a \sec t \cdot \tan t}{a \sec t \cdot a \tan t} dt = \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C$

2)  $x < -a$  时,

$\text{法二: } \int \frac{-dt}{-t\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{t} + C = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C$

法三: 1, 2)

$\text{法三: } \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} + C$  (取绝对值并讨论区间)



6. 计算  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$

令  $\ln x = t$

$$\text{原式} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^3 = \ln(3 + \sqrt{10}) \quad (1')$$

(3')                      (2')

1)  $\ln |\sec(\arctan 3) + 3|$  求值

### 三. 综合题 (满分 36 分)

1. (本题 7 分)

证明函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  在点  $x=0$  处连续, 但不可导.

得分	阅卷人

1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{x}} = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  (3')

$\therefore f(x)$  在  $x=0$  处连续

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{x}} = +\infty$  (4')

$\therefore f'(0)$  不存在.  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

2. (本题 7 分)

试证: 当  $x > 0$  时,  $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$ .

证: 构造函数或 Taylor 公式或 Lagrange 中值定理.

1) 设  $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x)$

2) 设  $g(x) = \ln(1+x) - x$

$x > 0$  时,  $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0$

$x > 0$  时,  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$

$\therefore f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上

$\therefore g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上

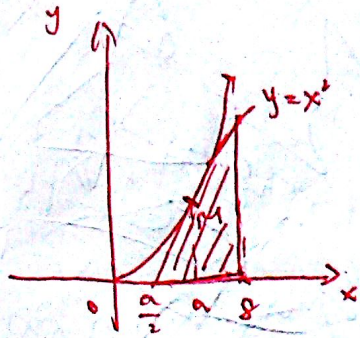
$x > 0$  时,  $g(x) < g(0) = 0$

$x > 0$  时,  $f(x) < f(0) = 0$



3. (本题 7 分)

试在曲线段  $y=x^2 (0 < x < 8)$  上求一点  $M$  的坐标, 使得由曲线在  $M$  点切线与直线  $x=8, y=0$  所围成的三角形面积最大.



设  $M$  点坐标  $(a, a^2)$

求斜率  $y'|_{x=a} = 2a$ . 切线:  $y = 2a(x-a) + a^2$

$\therefore$  切线与  $x$  轴交点为  $(\frac{a}{2}, 0)$

切线与  $x=8$  交点为  $(8, 16a-a^2)$ .

$\therefore$  三角形面积为  $f(a) = \frac{1}{2} \times (8 - \frac{a}{2}) \times (16a - a^2)$

$= \frac{a}{4} (16-a)^2 = \frac{1}{4} (a^3 - 32a^2 + 256a)$   $(0 < a < 8)$

令  $f'(a) = \frac{1}{4} (3a^2 - 64a + 256) = 0 \Rightarrow a = \frac{16}{3}$  驻点 - 驻点 且为极大值点.

$f''(a) = \frac{1}{2} (6a - 64) \Rightarrow f''(\frac{16}{3}) < 0$

$\therefore a = \frac{16}{3}$  为最大值点.

$M$  点坐标为  $(\frac{16}{3}, \frac{256}{9})$

4. (本题 7 分)

求定积分  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$ .

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^e \ln x dx$$

$$= -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + (1 - \frac{1}{e}) + e \ln e - (e - 1) = (1 - \frac{1}{e}) + 1$$

$$= 2 - \frac{1}{e}$$

5. (本题 8 分)

求由不等式  $r \leq 3 \cos \theta$  和  $r \leq 1 + \cos \theta$  所确定的公共部分的面积.

$$A = 2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3 \cos \theta)^2 d\theta \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta + 9 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3} + (2 \sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{9}{4} \sin 2\theta \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4} \pi + \frac{9}{8} \sqrt{3} = \frac{5}{4} \pi$$