装订线

班内序号______ 学号______ 姓名______ 专业班级______

西安邮电大学期末考试试题（A 卷）

（2019——2020 学年第一学期）

课程名称：高等数学 A1
考试专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务等
考核方式：闭卷　　　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分：_____　一、选择题（每小题 2 分，共 8 分）：每小题只有一个正确选项，请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{\arctan x}, & x\neq 0\\ a\cos 2x, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）.

 (A) 1　　(B) -1　　(C) 0　　(D) $\frac{1}{2}$

2. $x=1$ 是 $f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin \pi x}$ 的（　　）间断点.

 (A) 可去　　(B) 跳跃　　(C) 无穷　　(D) 振荡

3. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=$（　　）.

 (A) $f'(a)$　　(B) $\dfrac{f'(a)}{2}$　　(C) $2f'(a)$　　(D) $f'(2a)$

4. 若反常积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{x^k}$ 收敛，则 k 的范围应为（　　）.

 (A) $k>1$　　(B) $k<1$　　(C) $k\geq 1$　　(D) $k\leq 1$

得分：_____　二、填空题（每空 2 分，共 8 分）

1. 设函数 $f(x)=3^x$，则 $f^{(n)}(x)=$______________.

2. 已知 f 可导，$y=f(\sin^2 x)$，则 $dy=$____________.

3. 曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点为__________.

4. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$___________.

得分：_____　三、计算下列各题（每小题 4 分，共 16 分）

得分：_____　1. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

得分：_____　2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

得分：_____　3. 设 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$，求 y'.

得分：_____　4. 求 $\int(x-1)\sin x\,dx$.

专业班级__________ 姓名__________ 学号__________

得分：_____ 四、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分）

得分：_____1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t(1+t)dt}{\tan x}$.

得分：_____ 2. 已知 $y = x^{\cos x}\quad (x>0)$，求 y'.

得分：_____3. 求 $\int_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

得分：_____ 4. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，求 $\int x f'(x)dx$.

得分：_____ 五、计算下列各题（每小题 6 分，共 18 分）

得分：_____ 1. 设 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 1 - \ln(1+t^2) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

得分：_____ 2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定，求 $y'(0)$.

得分：_____ 3. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x \ge 0 \\ e^{x+2}, & x < 0 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\,dx$.

学号______ 姓名______ 专业班级______

得分：______ 六、解答下列各题（每小题 5 分，共 10 分）

得分：_______1. 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间与极值.

得分：_______2. 求解微分方程 $\begin{cases} y'=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$.

得分：______ 七、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

得分：_____1. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 在点 $x=2$ 处的法线与该曲线及 x 轴围成平面图形 D.

（1）求平面图形 D 的面积 S_D；

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 V.

得分：_____ 2. 设对一切实数 x，函数 $f(x)$ 满足等式 $f'(x)=e^{-2x}+\int_0^x f(t)\,dt$，且 $f(0)=0$，试求 $f(x)$.

得分：_____ 八、 证明题(4 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[1,3]$ 上连续, 在开区间 $(1,3)$ 内可导, 且 $f(1)=\int_2^3 x\,f(x)\,dx$,

证明：至少存在一点 $\xi\in(1,3)$, 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

西安邮电大学 2019——2020 学年第一学期期末试题（A）卷
标准答案

课程：高等数学 A1 类型：A 卷 专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务等

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	8	8	16	20	18	10	16	4		100

一、 选择题：1. A； 2. A ； 3. C；4. B .

二、 填空题：1. $3^x(\ln 3)^n$； 2. $f'(\sin^2 x)\sin 2x dx$； 3. $(2, 2e^{-2})$； 4. 2 .

三、 计算下列各题(每小题 4 分，共 16 分)

1. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x\cdot(-1)}}$……3 分

$= \dfrac{e}{e^{-1}} = e^2$……4 分

2. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$……2 分

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$……4 分

3. 解：$y' = (e^{\arctan\sqrt{x}})' = \dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$ ……4 分

4. 解：$\int (x-1)\sin x\,dx = -\int (x-1)\,d\cos x$……2 分

$= -[(x-1)\cos x - \int \cos x\, d(x-1)] = (1-x)\cos x + \sin x + C$……4 分

四、计算下列各题（每小题 5 分，共 20 分)

1. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t(1+t)dt}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t(1+t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1+x)}{1}$ ……4 分

$=1$……5 分

2.解： $\ln y = \cos x \ln x$……2 分

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y} = -\sin x\ln x + \dfrac{\cos x}{x}$……4 分

$\Rightarrow y' = x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right)$……5 分

3. 解：$\int_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^e \dfrac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}$……2 分

$= 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^e$ ……4 分

$= 2\sqrt{2}-2$……5 分

4.解：$\int xf'(x)dx = \int x df(x) = xf(x) - \int f(x)dx$ ……2 分

$= x(\dfrac{\sin x}{x})' - \dfrac{\sin x}{x} + C$……4 分

$= \cos x - \dfrac{2\sin x}{x} + C$……5 分

五、计算下列各题(每小题 6 分，共 18 分)

1.解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{-2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = -2t$……3 分； $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-2}{\frac{1}{1+t^2}} = -2(1+t^2)$……6 分

2.解： $x=0 \Rightarrow y=1$……1 分

方程两边对 x 求导得：$e^{2x+y}(2+y') + \sin xy\cdot(y+xy') = 0$……4 分

将 $x=0, y=1$ 代入上式求得 $y'(0) = -2$……6 分

3. 解：令 $x-1=t$，则 $\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt$ ……2 分

$=\int_{-1}^{0}e^{t+2}dt+\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=e^{t+2}\Big|_{-1}^{0}+\ln(1+t)\Big|_0^1$ ……5 分

$=e^2-e+\ln 2$ ……6 分

六、解答下列各题（每小题 5 分，共 10 分）

1.求函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的单调区间与极值.

解：$f(x)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内连续，且 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 令 $f'(x)=0$，得驻点为 $x=e$ ……2 分

由表

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−

知 $(0,e]$ 为增区间，$[e,+\infty)$ 为减区间，极大值 $f(e)=\frac{1}{e}$ ……5 分

2. 解：$\frac{dy}{dx}=2xy\Rightarrow\frac{dy}{y}=2xdx$ ……2 分

两端积分得 $\ln|y|=x^2+c_1$ 即 $y=ce^{x^2}$ ……4 分

由 $y(0)=1$ 得 $c=1$，故所求解为：$y=e^{x^2}$ ……5 分

七、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 解：(1) $y=\frac{x^2}{2}$，$y'=x$，$y'(2)=2$，$x=2$ 时 $y=2$.

曲线在点 $x=2$ 处的法线方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+3$ ……2 分

$S_D=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx+\int_2^6\left(-\frac{1}{2}x+3\right)dx=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$ ……5 分

(2) $V=\pi\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)^2dx+\pi\int_2^6\left(-\frac{x}{2}+3\right)^2dx=\frac{8}{5}\pi+\frac{16}{3}\pi=\frac{104}{15}\pi$ ……8 分

2. 解：对 $f'(x)=e^{-2x}+\int_0^x f(t)\,dt$ 两边求导得：$f''(x)=-2e^{-2x}+f(x)$，

设 $y=f(x)$，$y''-y=0$ 的特征根为 $r_1=1$，$r_2=-1$ ……2 分

齐次的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$ ……4 分

设特解：$y^*=Ae^{-2x}\Rightarrow A=\frac{-2}{3}\Rightarrow y^*=\frac{-2}{3}e^{-2x}$，

非齐次的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{2}{3}e^{-2x}$ ……6 分

$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}+\frac{4}{3}e^{-2x}$，将 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 代入求得 $C_1=\frac{1}{6}$，$C_2=\frac{1}{2}$，

故 $f(x)=\frac{1}{6}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{2}{3}e^{-2x}$ ……8 分

八、证明题（4 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上连续，在区间 $(1,3)$ 内可导，且 $f(1)=\int_2^3 x\,f(x)dx$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：设 $F(x)=xf(x)$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上连续，在区间 $(1,3)$ 内可导，所以函数 $F(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，在区间 $(1,3)$ 内可导.

$=\xi f(\xi)\cdot(3-2)$

由积分中值定理可知：$\exists\eta\in[2,3]$，使得 $\int_2^3 xf(x)dx=\eta f(\eta)=F(\eta)$ ……2 分

因而有：$F(1)=f(1)=\int_2^3 xf(x)dx=F(\eta)$，

由罗尔定理得至少存在一点 $\xi\in(1,\eta)\subseteq(1,3)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ ……4 分.