装订线

西安邮电大学课程考试试题（A 卷）

（ 2016——2017 学年第 一 学期）

课程名称：高等数学 AI

考试专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理 2016 级

考核方式：闭卷　　　　　　　　可使用计算器：否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分：_____　一、选择题（每题 2 分，共 6 分）

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{-\frac{1}{x}}-b, & x<0,\\ a, & x=0,\\ 1-\cos x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　）.

　(A) $a=0,\ b=1$　　(B) $a=0,\ b=e$　　(C) $a=0,\ b=-e$　　(D) $a=0,\ b=e^{-1}$

2. 点 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{\sin x}$ 的（　）

　(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 无穷间断点

3. 曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为（　）

　(A) $\int_0^1 \pi(x-x^2)^2\,dx$　(B) $\int_0^1 \pi(x^2-x^4)\,dx$　(C) $\int_0^1 \pi(x^2-x)\,dx$　(D) $\int_0^1 \pi(x^4-x^2)\,dx$

得分：_____　二、填空题（每题 2 分，共 8 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{3}{x-2}$ 的水平渐近线为____________.

2. 设 $f(x)=e^{-3x}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ________________.

3. 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $f(x)=$____________.

4. 已知二阶常系数齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程有根 $r_1=1, r_2=2$，则该微分方程的通解为________________.

得分：_____　三、试解下列各题（每题 4 分，共 16 分）：

得分：_____　1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

得分：_____　2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 5x}$.

得分：_____　3. $y=x^3\ln(x+1)$，求 $y'|_{x=1}$.

得分：_____　4. $\int(3e^x+\dfrac{1}{x}+1)dx$.

得分：____ 四、试解下列各题（每题 5 分，共 20 分）：

得分：____ 1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{e^x-1}$.

得分：____ 2．设 $y=\tan^2(2+x^2)$，求 dy.

得分：____ 3．求 $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$.

得分：____ 4．求 $\int x\ln x dx$.

得分：____ 五、试解下列各题（每题 6 分，共 18 分）：

得分：____ 1．判别反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+1)^2}$ 的收敛性，如果收敛，求出其值.

得分：____ 2．设 $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=\sin t-t\cos t, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

得分：____ 3．求由方程 $\sin(xy)+e^x-e^y=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 时的导数 $y'|_{x=0}$，并求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程.

得分：____ 六、试解下列各题（每题 6 分，共 18 分）：

得分：____ 1. 求曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=2, y=0$ 所围成的平面图形的面积.

得分：____ 2. 求微分方程 $(y+1)^2\dfrac{dy}{dx}+4x^3=0$ 的通解.

得分：____ 3. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，且 $f(x)$ 满足下面等式，试求 $f(x)$.

$$f''(x)-4f'(x)=x\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{2}{x}\right)$$

得分：____ 七、（9 分）设 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$，求函数 $f(x)$ 的单调区间、极值、凹凸区间（要求列表）.

得分：____ 八、（5 分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导函数，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\,dx \quad (a<x<b)$$

西安邮电大学——2016-2017学年第一学期试题A卷

标准答案

课程：高等数学AI 类型：A卷 专业、年级：通院、电院、自动化院、计算机院、物理2016级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	6	8	16	20	18	18	9	5		100

一、选择题（每题2分，共6分）

1. D; 2.B; 3. B.

二、填空题（每题2分，共8分）

1. $y=0$; 2. $(-3)^n e^{-3x}$; 3. $y=1+\ln x$; 4. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

三、试解下列各题（每题4分，共16分）：

1. 解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ ……3分 $=-2$ ……4分

2. 解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x^2}{x\cdot 5x}$ ……3分 $=\dfrac{1}{10}$ ……4分

3. 解 $y'=3x^2\ln(x+1)+\dfrac{x^3}{x+1}$，……3分， $y'|_{x=1}=3\ln2+\dfrac{1}{2}$ ……4分

4. 解 $\int(3e^x+\dfrac{1}{x}+1)dx=3e^x+\ln|x|+x+C$ ……4分（缺C扣1分）

四、试解下列各题（每题5分，共20分）：

1. 解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\int_0^x \cos t^2\,dt)'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2}{e^x}$ ……4分 $=\dfrac{\cos 0}{e^0}=1.$ ……5分

2. 解 $y'=4x\tan(2+x^2)\sec^2(2+x^2)$ ……3分

$dy=4x\tan(2+x^2)\sec^2(2+x^2)dx$ ……5分

3. 解 $\int_0^1\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\dfrac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^1$ ……4分 $=\ln\dfrac{1+e}{2}$ ……5分

4. 解 $\int x\ \ln x dx=\int\ln x\, d\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{2}\int x dx$ ……4分 $=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$ ……5分

五、试解下列各题（每题6分，共18分）：

1. 解 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+1)^2}=[-\dfrac{1}{x+1}]_2^{+\infty}$ ……4分 $=\dfrac{1}{3}$，

故反常积分收敛. ……6分

2. 解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\sin t}{2t}=\dfrac{\sin t}{2}$ ……4分 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\cos t}{4t}$ ……6分

3. 解 $\cos(xy)(y+xy')+e^x-e^y y'=0$ $y'(0)=1$ ……5分

切线方程：$y-0=(x-0)$，$y=x$ ……6分

六、试解下列各题（每题6分，共18分）：

1. 解 $A=\int_0^2 x^3dx$ ……2分 $=[\dfrac{x^4}{4}]_0^2=4$ ……6分

2. 解 分离变量得 $(y+1)^2dy=-4x^3dx$，两边积分 $\int(y+1)^2dy=\int-4x^3dx$，……3分

通解为：$\dfrac{(y+1)^3}{3}=-x^4+C_1$ 或 $(y+1)^3+3x^4=C$. ……6分

3. 解：由题意得：$f(0)=\sin0=0$，$f'(0)=(\sin x)'|_{x=0}=\cos0=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(\frac{2}{x})\cdot2(\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'}=\lim\limits_{x\to\infty}2f'(0)=2$（或 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{x})-f(0)}{\frac{2}{x}-0}\cdot2=2f'(0)=2$） ……2分

故 $f(x)$ 满足的等式为：$f''(x)-4f'(x)=2x$， 其对应的齐次方程的特征方程为：$r^2-4r=0$，得 $r_1=0$，$r_2=4$，该齐次方程的通解为：$y=C_1+C_2e^{4x}$ ……4分

特解可设为 $y^*=x(Ax+B)$ 得 $A=\dfrac{-1}{4}$，$B=\dfrac{-1}{8}$，故 $y^*=-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{8}$，

$f''(x)-4f'(x)=2x$ 的通解为 $Y=y+y^*=C_1+C_2e^{4x}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{8}$.

由 $f(0)=0$，$f'(0)=1$ 得 $C_1=\dfrac{-9}{32}$，$C_2=\dfrac{9}{32}$ 故 $f(x)=y+y^*=\dfrac{9}{32}(e^{4x}-1)-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{8}$ ……6分

七、(9分) 解：$y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$，驻点 $x_1=-1,x_2=1$，不可导点 $x_3=0$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	不存在	−	0	+

函数在 $(-\infty,-1]$，$[1,\infty)$ 上单调递增，在 $[-1,0)$，$(0,1]$ 上单调递减，……4分

极小值 $y|_{x=1}=0$，极大值 $y|_{x=-1}=-4$ ……6分

$y''=\dfrac{2}{x^3}$ 在 $x=0$ 二阶导不存在.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
y''	−	不存在	+

曲线在 $(-\infty,0)$ 为凸的，在 $(0,\infty)$ 为凹的 ……9分

八、(5分) 证明：因 $f(a)=f(b)=0$，故

$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)=f(x)$，$\int_b^x f'(t)dt=f(x)-f(b)=f(x)$ ……2分

$|f(x)|=|\int_a^x f'(t)dt|\le\int_a^x|f'(t)|dt$，$|f(x)|=|\int_b^x f'(t)dt|=|\int_x^b f'(t)dt|\le\int_x^b|f'(t)|dt$

$2|f(x)|\le\int_a^x|f'(t)|dt+\int_x^b|f'(t)|dt=\int_a^b|f'(t)|dt$ 即 $|f(x)|\le\dfrac{1}{2}\int_a^b|f'(t)|dt$ ……5分

说明：1. 标准答案务必要正确无误。 2. 将每道大题得分和总分填入得分栏中。

六(9 分)、(1) 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 的交点为 (0, 0) 和 (2, 4)，因此，D 的面积

$$S=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

或

$$S=\frac{1}{2}\times2\times4-\int_0^2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$ (5 分)

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2x^4\mathrm{d}x=\pi\int_0^2(4x^2-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{15}.$$

或

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot4^2\cdot2-\pi\int_0^2x^4\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{3}-\frac{32\pi}{5}=\frac{64\pi}{15}.$$ (9 分)

七(6 分)、因函数 $x^2f(x)$ 在闭区间 $[0,\frac{1}{3}]$ 上连续，故根据积分中值定理，存在 $\eta\in(0,\frac{1}{3})$，使 $3\int_0^{\frac{1}{3}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\eta^2f(\eta)$，因此由题设条件 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x^2f(x)\,\mathrm{d}x$，可得 $f(1)=\eta^2f(\eta)$. (3 分)

作辅助函数 $\varphi(x)=x^2f(x)$，则由上述证明可得 $\varphi(\eta)=\varphi(1)$，又由题设条件，知 $\varphi(x)$ 在 $[\eta, 1]$ 上连续，在 $(\eta, 1)$ 内可导，且 $\varphi'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，所以应用罗尔中值定理，至少存在一点 $\xi\in(\eta, 1)\subset(0, 1)$，使

$$\varphi'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0,$$

即

$$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$ (6 分)