

# 西安邮电大学期末考试试题 (A 卷)

(2018—2019 学年第一学期)

课程名称: 高等数学 A1

考试专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务 18 级

考核方式: 闭卷

可使用计算器: 否

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
评卷人										

得分: \_\_\_\_\_ 一、选择题 (每小题 2 分, 共 8 分): 每小题只有一个正确选项, 请将所选项前面的字母填在题中的括号内.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} = ( \quad )$

- (A) 1 (B) 0 (C)  $e$  (D)  $e^{-1}$

2. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小中是  $x^2$  的高阶无穷小的是 ( )

- (A)  $e^{2x} - 1$  (B)  $\ln(1 - 2x)$  (C)  $\arctan x^3$  (D)  $\cos x - 1$

3. 设函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ , 则  $x = 1$  是  $f(x)$  的 ( ) 间断点.

- (A) 可去 (B) 振荡 (C) 跳跃 (D) 无穷

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x = 0$  处 ( )

- (A) 间断 (B) 连续但不可导 (C) 可导且连续 (D) 不连续也不可导

得分: \_\_\_\_\_ 二、填空题 (每空 2 分, 共 8 分)

1. 若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\sin \Delta x} = 1$ , 则  $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 反常积分:  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^k} dx$ , 当  $k$  \_\_\_\_\_ 时收敛.

3. 设  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int e^x f(e^x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 微分方程  $y'' = \sin 2x$  的通解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}$

得分: \_\_\_\_\_ 三、计算下列各题 (每小题 4 分, 共 16 分): 应写出演算步骤.

得分: \_\_\_\_\_ 1. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1) \tan x}$

得分: \_\_\_\_\_ 2. 设  $y = \ln \sqrt{x}$ , 求  $y'$ :

得分: \_\_\_\_\_ 3. 设  $y = 2^{f(x)}$ ,  $f(x)$  为可导函数, 求  $dy$ :

得分: \_\_\_\_\_ 4. 计算不定积分  $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 10} dx$



得分: \_\_\_\_\_ 四、计算下列各题 (每小题 5 分, 共 20 分): 应写出演算步骤.

得分: \_\_\_\_\_ 1. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^t dt}{x^2}$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 2. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t + t^3 \\ y = \sin t \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 3. 计算  $\int x \ln x dx$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 4. 求微分方程  $y' = e^{3x} \cos^2 y$  满足初始条件  $y|_{x=0} = 0$  的特解 .

得分: \_\_\_\_\_ 五、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 24 分): 应写出演算步骤.

得分: \_\_\_\_\_ 1. 已知  $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$ , 求  $y'$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 2. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $xy + \ln y = 1$  所确定, 求  $y'$  及  $y'|_{x=0}$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 3. 计算  $\int_1^2 \frac{x^2 + \arctan x}{1+x^2} dx$  ;

得分: \_\_\_\_\_ 4. 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \end{cases}$ , 计算  $\int_0^2 f(x-1) dx$  .



得分: \_\_\_\_\_ 六、计算下列各题 (第一小题 7 分, 第二小题 6 分, 共 13 分): 应写出演算步骤.

得分: \_\_\_\_\_ 1. 设  $f(x) = x^3 - 3x$

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值;

(2) 求曲线  $y = f(x)$  的凹凸区间与拐点.

得分: \_\_\_\_\_ 2. 设  $D$  是由曲线  $y = x^2 + 1$  与直线  $x = 3$  以及两个坐标轴所围成的平面图形.

(1) 求  $D$  的面积;

(2) 求由  $D$  绕  $x$  旋转而成的旋转体的体积.

得分: \_\_\_\_\_ 七、(本题 7 分) 设函数  $f(x)$  连续, 且满足方程

$$f(x) = e^x - \int_0^x tf(t)dt + x \int_0^x f(t)dt, \text{ 求 } f(x).$$

得分: \_\_\_\_\_ 八、证明题 (本题 4 分): 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续

且不变号, 证明至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$  成立.



# 西安邮电大学 2018—2019 学年第一学期期末试题 (A) 卷

## 标准答案

课程: 高等数学 A1 类型: A 卷 专业、年级: 通院、电院、自动化院、计算机院、物理、信管、金融、商务 18 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	8	8	16	20	24	13	7	4		100

一、选择题: 1.D ; 2.C ; 3.A ; 4.B.

二、填空题: 1.  $\frac{1}{2}$  ; 2.  $k > 1$  ; 3.  $F(e^x) + C$  ; 4.  $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$  .

三、计算下列各题:

1. 解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$  ..... 4 分;

2. 解:  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$  ..... 4 分

3. 解:  $\because y' = 2^{f(x)} \ln 2 \cdot f'(x)$  ..... 3 分

$\therefore dy = 2^{f(x)} \ln 2 \cdot f'(x) dx$  ..... 4 分

4. 解: 原式  $= \int \frac{1}{x^2 + 3x - 10} d(x^2 + 3x - 10)$  ..... 2 分  
 $= \ln|x^2 + 3x - 10| + C$  ..... 4 分

四、计算下列各题:

1. 解: 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x}$  ..... 3 分  
 $= -\frac{e}{2}$  ..... 5 分

2. 解:  $\frac{dx}{dt} = 1 + 3t^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = \cos t$  ..... 2 分

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{1 + 3t^2}$  ..... 5 分

3. 解:  $= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx$  ..... 3 分  
 $= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$  ..... 5 分

4. 解: 分离变量:  $\sec^2 y dy = e^{3x} dx$  ..... 2 分

两边积分得:  $\tan y = \frac{1}{3} e^{3x} + C$  ..... 4 分

代人初始条件得  $C = -\frac{1}{3}$ , 所求特解:  $\tan y = \frac{1}{3}(e^{3x} - 1)$  ..... 5 分

五、计算下列各题

1. 解: 两边取对数:  $\ln y = \sin x \ln(x^2 + 1)$  ..... 2 分

两边对  $x$  求导:  $\frac{1}{y} y' = \cos x \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$  ..... 5 分

$\therefore y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \left[ \cos x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} \right]$  ..... 6 分

2. 解: 两边对  $x$  求导:  $y + xy' + \frac{1}{y} y' = 0$  ..... 3 分

$\therefore y' = -\frac{y^2}{1 + xy}$  ..... 5 分

又  $y|_{x=0} = e \therefore y'|_{x=0} = -e^2$  ..... 6 分

3. 解: 原式  $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$  ..... 1 分

$\frac{\arctan x}{1 + x^2}$  是奇函数,  $\therefore \int_{-1}^1 \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx = 0$  ..... 3 分

$\therefore$  原式  $= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx = 2(x - \arctan x)|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$  ..... 6 分

4. 解: 令  $x - 1 = t$ , 则  $\int_0^2 f(x - 1) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 e^{-t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1 + x}$  ..... 3 分

$= -e^{-t} \Big|_{-1}^0 + \ln(1 + x) \Big|_0^1$  ..... 5 分

$= e - 1 + \ln 2$  ..... 6 分



## 六、计算下列各题

1. 设  $f(x) = x^3 - 3x$  (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值; (2) 求曲线  $f(x)$  的凹凸区间与拐点.

解:  $f(x)$  在其定义域  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ,  $f''(x) = 6x$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点为  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ; 令  $f''(x) = 0$ , 解得  $x = 0$  ..... 2 分

(1) 由表

$x$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+

知,  $(-\infty, -1]$  和  $[1, +\infty)$  为增区间,  $[-1, 1]$  为减区间;

在  $x_1 = -1$  处取得极大值  $f(-1) = 2$ , 在  $x_2 = 1$  处取得极小值  $f(1) = -2$  ..... 5 分

(2) 由表

$x$	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	-	+

知, 区间  $(-\infty, 0]$  为凸区间,  $[0, +\infty)$  为凹区间;  $(0, 0)$  为拐点 ..... 7 分

2. 设  $D$  是由曲线  $y = x^2 + 1$  与直线  $x = 3$  以及两个坐标轴所围成的平面图形.

(1) 求  $D$  的面积;

(2) 求由  $D$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积.

解: (1)  $D$  的面积为

$$A = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = 12 \quad \text{..... 3 分}$$

(2)  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V = \pi \int_0^3 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^3 = \frac{348}{5} \pi. \quad \text{..... 6 分}$$

七、设函数  $f(x)$  连续且满足方程  $f(x) = e^x - \int_0^x t f(t) dt + x \int_0^x f(t) dt$ ,

求  $f(x)$ .

解:  $f'(x) = e^x - x f(x) + x f(x) + \int_0^x f(t) dt = e^x + \int_0^x f(t) dt$  ..... 2 分

$f''(x) = e^x + f(x)$  ..... 3 分, 特征方程:  $r^2 - 1 = 0$ , 特征根为:  $r = \pm 1$ ,

所以 对应齐次方程的通解为:  $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$  ..... 5 分

设特解  $y^* = k x e^x$ , 代入原方程得  $k = \frac{1}{2}$ , 所以所求通解为:  $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{x}{2} e^x$  ..... 6 分

又  $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$ , 代入得  $C_1 = \frac{1}{4}$ ,  $C_2 = \frac{3}{4}$ ,

因此  $f(x) = \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{3}{4} e^x + \frac{x}{2} e^x$  ..... 7 分

八、证明题: 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续且不变号,

证明至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ , 使  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$  成立.

证明: 不妨设  $g(x) \geq 0$ , 则  $\int_a^b g(x) dx \geq 0$ . 记  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值为  $M$ 、

最小值为  $m$ , 则有  $m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$  ..... 2 分

故有  $m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$

所以 当  $\int_a^b g(x) dx = 0$  时,  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$ , 故结论成立.

当  $\int_a^b g(x) dx > 0$  时, 有  $m \leq \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$ , 由介值定理: 至少存在一点  $\xi \in [a, b]$ ,

使  $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ , 从而结论成立 ..... 4 分