Modelo dinámico de un motor DC con tren de engranajes

Paulo Loma Marconi — 2020-10-22 — 2 Comments

También disponible en: English

Tabla de Contenidos

Código Fuente (inglés)

Versión PDF/HTML. Código fuente en LaTex disponible en GitHub.

Introducción

El objetivo es modelar la dinámica de un motor DC de servomotor con tren de engranajes, Fig. 1, y deducir dos puntos de equilibrio.

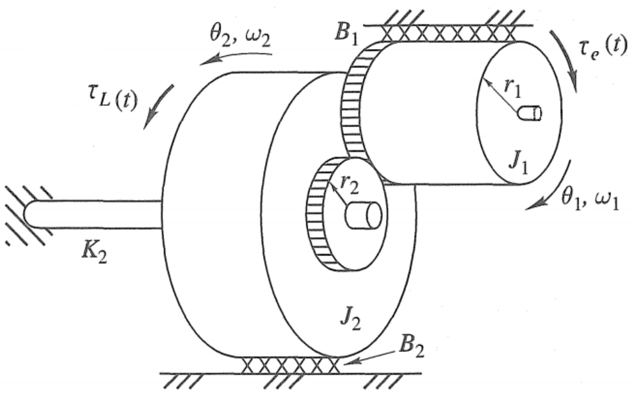

Fig.1 - Motor DC de servomotor con tren de engranajes.

Análisis del Diagrama de Cuerpo Libre

El sistema se puede descomponer en dos secciones: una mecánica rotacional y una electromecánica. La mecánica rotacional se puede derivar de la siguiente manera,

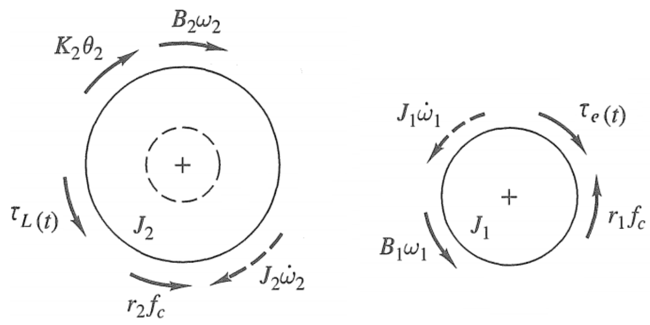

Fig.2 - Diagrama de cuerpo libre mecánico rotacional.

donde θ es el desplazamiento angular, ω es la velocidad angular, B es el coeficiente de amortiguamiento viscoso rotacional, K es el coeficiente de rigidez, J es el momento de inercia, f_c es la fuerza de contacto entre dos engranajes y r es el radio del engranaje.

La sección electromecánica (motor DC) es

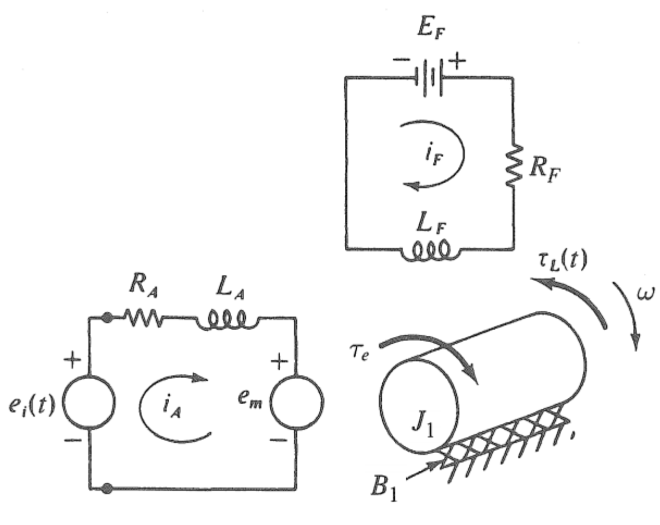

Fig.3 - Diagrama de cuerpo libre electromecánico.

donde R_F es la resistencia del campo, L_F es la inductancia del campo, E_F es la tensión de campo constante aplicada, e i_F es la corriente de campo de entrada. R_A es la resistencia estacionaria, L_A es la inductancia estacionaria, y e_m es la tensión inducida, i_A es la corriente estacionaria de entrada, y $e_i(t)$ es la tensión de armadura aplicada, y τ_e es el par electromecánico que impulsa el rotor.

Si la densidad de flujo $\mathcal{B}$ es

$$\mathcal{B} = \frac{\phi(i_F)}{A} \tag{1}$$

el par en el rotor es

s

$$\begin{aligned} \tau_e &= \mathcal{B}la\, i_A \\ \tau_e &= \frac{la}{A}\phi(i_F)i_A \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\phi(i_F)$ es el flujo inducido por i_F, A es el área transversal de la trayectoria de flujo en la brecha de aire entre el rotor y el estator, l es la longitud total de los conductores de la armadura dentro del campo magnético, y a es el radio de la armadura.

Además, la tensión inducida en la armadura e_m puede escribirse como

$$e_m = \frac{la}{A}\phi(i_F)\omega \tag{3}$$

donde tanto τ_e como e_m dependen de la geometría del motor DC.

Sistema dinámico

Comenzamos aplicando la ley de D'Alembert (reformulación de la ley de Newton) al sistema mecánico rotacional.

$$\sum \tau_{all} = 0$$

$$J_1\dot{\omega}_1 + B_1\omega_1 + r_1 f_c = \tau_e(t) \tag{4}$$

$$J_2\dot{\omega}_2 + B_2\omega_2 + K_2\theta - r_2 f_c = \tau_L(t) \tag{5}$$

donde τ_{all} son los torques que actúan sobre un cuerpo, $K\theta$ es el torque de rigidez, $B\omega$ es el torque viscoso-friccional, $J\dot{\omega}$ es el torque inercial, $\tau_e(t)$ es el torque de conducción, $\tau_L(t)$ es el torque de carga y rf_c es el torque de contacto.

Debido a la relación entre engranajes,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= N\theta_2 \\ \omega_1 &= N\omega_2 \\ \dot{\omega}_1 &= N\dot{\omega}_2 \\ N &= \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

donde N es la relación de radio de los engranajes. Resolvemos (4) y (5) en términos de ω_2 y θ_2,

$$(J_2 + N^2 J_1)\dot{\omega}_2 + (B_2 + N^2 B_1)\omega_1 + K_2\theta_2 - N\tau_e(t) - \tau_L(t) = 0$$

definiendo las relaciones

$$\begin{aligned} J_{eq} &= J_2 + N^2 J_1 \\ B_{eq} &= B_2 + N^2 B_1 \end{aligned}$$

se convierte en

$$J_{eq}\dot{\omega}_2 + B_{eq}\omega_2 + K_2\theta_2 - N\tau_e(t) - \tau_L(t) = 0 \tag{6}$$

Ahora, derivemos las ecuaciones de la sección electromecánica utilizando la ley de Kirchhoff.

$$\sum V_{all} = 0$$

$$e_m + V_{L_A} + V_{R_A} = e_i(t) \tag{7}$$

donde V_{all} son las tensiones inducidas en el rotor y el estator, V_{L_A} es la tensión de resistencia estacionaria, V_{R_A} es la tensión de inductancia estacionaria.

Si i_F está definido como constante, entonces (2) es

$$\begin{aligned} \tau_e(t) &= \left(\frac{la}{A}\phi(i_F)\right) i_A(t) \\ \tau_e(t) &= \alpha i_A(t) \end{aligned} \tag{8}$$

donde α es el parámetro interno del motor DC.

Luego, simplificando y usando (6) y (7) el sistema dinámico es,

$$J_{eq}\dot{\omega}_2 + B_{eq}\omega_2 + K_2\theta_2 - N\tau_e - \tau_L = 0 \tag{9}$$

$$L_A\dot{i}_A + R_A i_A + \alpha\omega_1 - e_i = 0 \tag{10}$$

Ecuaciones en espacio de estados

Definamos las ecuaciones de espacio de estados parar $x = \begin{bmatrix} \theta_2 \ \dot\theta_2 \ i_A \end{bmatrix}^\intercal$. Del sistema dinámico,

$$\begin{aligned} J_{eq}\ddot\theta_2 + B_{eq}\dot\theta_2 + K_2\theta_2 - N\alpha i_A - \tau_L = 0 \\ L_A\dot i_A + R_A i_A + \alpha\omega_1 - e_i = 0 \end{aligned}$$

reordenando,

$$\begin{aligned} \ddot\theta_2 &= -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot\theta_2 - \frac{K_2}{J_{eq}}\theta_2 + \frac{N\alpha}{J_{eq}} i_A - \frac{1}{J_{eq}}\tau_L \\ \dot i_A &= -\frac{R_A}{L_A} i_A - \frac{N\alpha}{L_A}\dot\theta_2 + \frac{1}{L_A} e_i \end{aligned}$$

definiendo los estados como

$$\begin{cases} x_1 &= \theta_2, \quad \dot x_1 = \dot\theta_2 = x_2 \\ x_2 &= \dot\theta_2, \quad \dot x_2 = \ddot\theta_2 = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} x_2 - \frac{K_2}{J_{eq}} x_1 + \frac{N\alpha}{J_{eq}} x_3 - \frac{1}{J_{eq}}\tau_L \\ x_3 &= i_A, \quad \dot x_3 = \dot i_A = -\frac{R_A}{L_A} x_3 - \frac{N\alpha}{L_A} x_2 + \frac{1}{L_A} e_i \end{cases}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \\ \dot x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_2}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{N\alpha}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{N\alpha}{L_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_eq} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_A} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \tau_L \\ e_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{11}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{12}$$

La salida $y = \dot\omega_2$ se puede definir como

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} e_i \tag{13}$$

$$y = C\dot{\mathbf{x}} \tag{14}$$

Punto de equilibrio $\mathbf{x_0}$

Usando $\dot{\mathbf{x}} = 0$ en (12), el punto de equilibrio $\mathbf{x_0}$ puede calcularse como

$$0 = A\mathbf{x_0} + B\mathbf{u} \tag{15}$$

$$\mathbf{x_0} = -A^{-1}B\mathbf{u} \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_2}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{N\alpha}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{N\alpha}{L_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_eq} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_L \\ e_i \end{bmatrix} \tag{17}$$

Resolviendo para torque externo nulo $\tau_L = 0$, voltaje de armadura aplicado cosntante $e_i = E_0$ y $K_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= x_{2_0} \\ 0 &= -\frac{K_2}{J_{eq}} x_{1_0} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}} x_{2_0} + \frac{N\alpha}{J_{eq}} x_{3_0} \\ 0 &= -\frac{N\alpha}{L_A} x_{2_0} - \frac{R_A}{L_A} x_{3_0} + \frac{1}{L_A} E_0 \end{aligned}$$

dado que to $x_{2_0} = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{K_2}{J_{eq}} x_{1_0} + \frac{N\alpha}{J_{eq}} x_{3_0} \\ 0 &= -\frac{R_A}{L_A} x_{3_0} + \frac{1}{L_A} E_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} x_{1_0} &= \frac{N\alpha}{K_2 R_A} E_0 \\ x_{3_0} &= \frac{1}{R_A} E_0 \end{aligned}$$

therefore the equilibrium point is

$$\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N\alpha}{K_2 R_A} \\ 0 \\ \frac{1}{R_A} \end{bmatrix} E_0 \tag{18}$$

Este punto de equilibrio indica que una **constante desplazamiento angular (giro)** producida por $x_{1_0} = \theta_{2_0}$ es suficiente para equilibrar la constante tensión de armadura aplicada $e_i = E_0$.

Por otro lado, si resolvemos para sin torque externo $\tau_L = 0$, tensión de armadura aplicada constante $e_i = E_0$, y sin rigidez $K_2 = 0$. El problema es

$$\begin{bmatrix} x_{1_0} \\ x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{N\alpha}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{N\alpha}{L_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_eq} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{bmatrix}$$

Si eliminamos x_{1_0} porque la primera columna de A^{-1} tiene ceros, el problema se reduce a

$$\begin{bmatrix} x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{N\alpha}{J_{eq}} \\ -\frac{N\alpha}{L_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_eq} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

resolviendo tenemos que

$$\begin{bmatrix} x_{2_0} \\ x_{3_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N\alpha}{B_{eq}R_A+(N\alpha)^2} \\ \frac{-B_{eq}}{B_{eq}R_A+(N\alpha)^2} \end{bmatrix} E_0 \tag{20}$$

lo que indica que una **velocidad angular constante** producida por $x_{2_0} = \theta_{2_0}$ es necesaria para equilibrar la constante tensión de armadura aplicada $e_i = E_0$.

Referencias

[1] Close, Charles M. and Frederick, Dean K. and Newell, Jonathan C., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2001, ISBN 0471394424.

ecuaciones diferenciales espacio de estados modelo dinámico motor DC punto de equilibrio

Publicación anterior

Siguiente publicación

Comentarios

2 Comentarios

1 Acceder ▾

G

Únete a la conversación...

INICIAR SESIÓN CON

O REGISTRARSE CON DISQUS ?

Nombre

Comparte

Mejores Más nuevos Más antiguos

D

Daniel Sun

hace un año

I think B_eq should be B_2 + N^2 B_1

0 0 Responder • Comparte ›

P

paulomarconi Moderador ➔ Daniel Sun

hace 9 meses

Solved! Thanks for spotting the typo.

0 0 Responder • Comparte ›

Suscríbete Política de Privacidad No vendan mis datos