

Cours de Magnétostatique

Rédigé par Ikharrazne L.

Première année cycle préparatoire

Électromagnétique



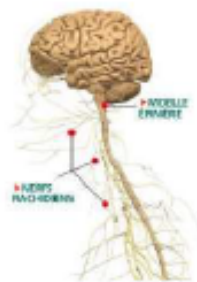
atome



Téléphone cellulaire



Lumière et Laser



Système nerveux



Appareils médicaux



Lignes de haute tension

PLAN DU COURS

I- Le champ magnétique

1. Introduction
 - a. Bref aperçu historique
 - b. Nature des effets magnétiques
2. Expressions du champ magnétique
 - a. Champ créé par une charge en mouvement
 - b. Champ créé par un ensemble de charges en mouvement
 - c. Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)
 - d. Propriétés de symétrie du champ magnétique
3. Calcul du champ dans quelques cas simples
 - a. Fil rectiligne infini
 - b. Spire circulaire (sur l'axe)
 - c. Solénoïde infini (sur l'axe)

II- Lois Fondamentales de la magnétostatique

1. Flux du champ magnétique
 - a. Conservation du flux magnétique
 - b. Lignes de champ et tubes de flux
2. Circulation du champ magnétique
 - a. Circulation du champ autour d'un fil infini
 - b. Le théorème d'Ampère
 - c. Relations de continuité du champ magnétique
 - d. Les trois façons de calculer le champ magnétique
3. Le dipôle magnétique
 - a. Champ magnétique créé par une spire
 - b. Le modèle du dipôle en physique

III- Actions et énergie magnétiques

1. Force magnétique sur une particule chargée
 - a. La force de Lorentz
 - b. Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ
 - c. Distinction entre champ électrique et champ électrostatique
2. Actions magnétiques sur un circuit fermé
 - a. La force de Laplace
 - b. Définition légale de l'Ampère
 - c. Moment de la force magnétique exercée sur un circuit
 - d. Exemple du dipôle magnétique
 - e. Complément : force de Laplace et principe d'Action et de Réaction
3. Énergie potentielle magnétique
 - a. Le théorème de Maxwell
 - b. Énergie potentielle d'interaction magnétique
 - c. Expressions générales de la force et du couple magnétiques
 - d. La règle du flux maximum

IV- Induction électromagnétique

1. Les lois de l'induction
 - a. L'approche de Faraday
 - b. La loi de Faraday
 - c. La loi de Lenz
2. Induction mutuelle et auto-induction
 - a. Induction mutuelle entre deux circuits fermés
 - b. Auto-induction
3. Régimes variables
 - a. Définition du régime quasi-statique
 - b. Forces électromotrices induites
 - c. Retour sur l'énergie magnétique
 - d. Bilan énergétique d'un circuit électrique

Chapitre I- Le champ magnétique

I.1- Introduction

I.1.1 Bref aperçu historique

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, pierre trouvée à proximité de la ville de Magnesia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles. Elles étaient constituées d'une aiguille de magnétite posée sur de la paille flottant sur de l'eau contenue dans un récipient gradué.

Au XVIII^{ème} siècle, Franklin découvre la nature électrique de la foudre (1752). Or, il y avait déjà à cette époque de nombreux témoignages de marins attirant l'attention sur des faits étranges :

- Les orages perturbent les boussoles
- La foudre frappant un navire aimante tous les objets métalliques.

Franklin en déduisit « *la possibilité d'une communauté de nature entre les phénomènes électriques et magnétiques* ».

Coulomb (1785) montre la décroissance en $1/r^2$ des deux forces.

Mais il faut attendre la fin du XIX^{ème} siècle pour qu'une théorie complète apparaisse, la théorie de l'électromagnétisme.

Tout commença avec l'expérience de Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, prouvant sans ambiguïté un lien entre le courant électrique et le champ magnétique. Par ailleurs, il observa :

- Si on inverse le sens du courant, la déviation change de sens.
- La force qui dévie l'aiguille est non radiale.

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart. Une question qui s'est ensuite immédiatement posée fut : si un courant dévie un aimant, alors est-ce qu'un aimant peut faire dévier un courant ?

Ceci fut effectivement prouvé par Davy en 1821 dans une expérience où il montra qu'un arc électrique était dévié dans l'entrefer d'un gros aimant.

L'élaboration de la théorie électromagnétique mit en jeu un grand nombre de physiciens de renom : Oersted, Ampère, Arago, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Maxwell, Weber, Helmholtz, Hertz, Lorentz et bien d'autres. Si elle débuta en 1820 avec Oersted, elle ne fut

mise en équations par Maxwell qu'en 1873 et ne trouva d'explication satisfaisante qu'en 1905, dans le cadre de la théorie de la relativité d'Einstein.

Dans ce cours de magnétostatique, nous traiterons dans les chapitres I à III de la question suivante : comment produire un champ magnétique à partir de courants permanents ? Nous n'aborderons que partiellement (chapitre IV) le problème inverse : comment produire de l'électricité à partir d'un champ magnétique ?

I.2.1- Nature des effets magnétiques

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que des particules chargées **immobiles**, ou encore des conducteurs (ensembles de particules) en équilibre. Que se passe-t-il lorsqu'on considère enfin le mouvement des particules ?

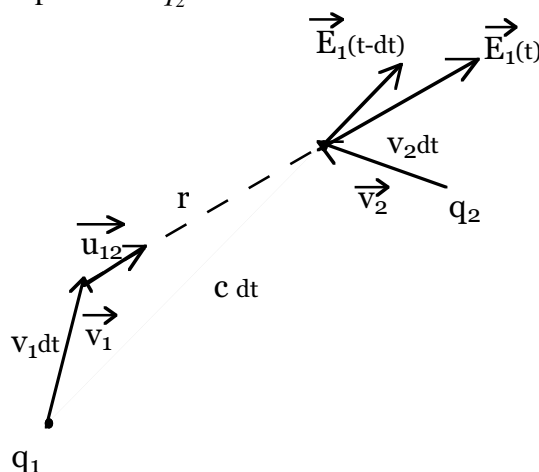
Soient deux particules q_1 et q_2 situées à un instant t aux points M_1 et M_2 . En l'absence de mouvement, la particule q_1 crée au point M_2 un champ électrostatique $\vec{E}_1(M_2)$ et la particule q_2 subit une force dont l'expression est donnée par la loi de Coulomb

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$$

Qui dit force, dit modification de la quantité de mouvement de q_2 puisque $\vec{F}_{1/2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \approx \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$.

Autrement dit, la force électrostatique due à q_1 crée une modification $\Delta \vec{p}_2$ pendant un temps Δt . Une force correspond en fait à un transfert d'information (ici de q_1 vers q_2) pendant un court laps de temps. Or, rien ne peut se propager plus vite que la vitesse c de la lumière. Cette vitesse étant grande mais **finie**, tout transfert d'information d'un point de l'espace à un autre prend nécessairement un temps fini. Ce temps pris par la propagation de l'information introduit donc un retard, comme nous allons le voir.

On peut considérer l'exemple ci-dessus comme se qui se passe effectivement dans le référentiel propre de q_1 . Dans un référentiel fixe, q_1 est animée d'une vitesse \vec{v}_1 . Quelle serait alors l'action de q_1 sur une particule q_2 animée d'une vitesse \vec{v}_2 ?



Soit dt le temps qu'il faut à l'information (le champ électrostatique créé par q_1) pour se propager de q_1 vers q_2 . Pendant ce temps, q_1 parcourt une distance $v_1 dt$ et q_2 parcourt la distance $v_2 dt$. Autrement dit, lorsque q_2 ressent les effets électrostatiques dus à q_1 , ceux-ci ne sont plus radiaux : le champ $\vec{E}_1(t - dt)$ « vu » par q_2 est dirigé vers l'ancienne position de q_1 et dépend de la distance $c dt$ et non pas de la distance r . On voit ici qu'il faut corriger la loi de

Coulomb qui nous aurait donné le champ $\vec{E}_1(t)$, qui est faux (suppose propagation instantanée de l'information ie. une vitesse infinie).

Les effets électriques ne peuvent se résumer au champ électrostatique.

Cependant, l'expérience montre que la prise en compte de cette correction ne suffit pas à expliquer la trajectoire de q_2 : une force supplémentaire apparaît, d'ailleurs plus importante que cette correction ! La force totale exercée par q_1 sur q_2 s'écrit en fait

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\vec{u}_{12} + \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left(\frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{12} \right) \right]$$

Dans cette expression (que l'on admettra) on voit donc apparaître un deuxième terme qui dépend des vitesses des deux particules ainsi que la vitesse de propagation de la lumière. Ce deuxième terme s'interprète comme la contribution d'un champ magnétique créé par q_1 . Autrement dit,

$$\vec{F}_{1/2} = q_2 \left(\vec{E}_1 + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \right)$$

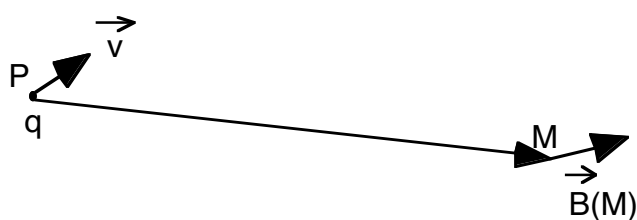
la force magnétique est une correction en $(v/c)^2$ à la force de Coulomb. Nous reviendrons plus tard (chapitre III) sur l'expression et les propriétés de la force magnétique. Cette expression n'est valable que pour des particules se déplaçant à des vitesses beaucoup plus petites que celle de la lumière (approximation de la magnétostatique).

Dernière remarque : cette expression dépend de la vitesse de la particule, ce qui implique que le champ magnétique dépend du référentiel (voir discussion chapitre III) !

I.2- Expressions du champ magnétique

I.2.1- Champ magnétique créé par une charge en mouvement

D'après ci-dessus, le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen est



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

L'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**. Une autre unité appartenant au système CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

$$1 \text{ Gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla}.$$

Le facteur μ_0 est la **perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à « laisser passer » le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \text{ (H pour Henry)}$$

Remarques :

- Cette valeur est exacte, directement liée à la définition de l'Ampère (voir Chapitre III). Le facteur 4π a été introduit pour simplifier les équations de Maxwell (cf Licence).
- Nous avons vus que les phénomènes électriques et magnétiques sont intimement reliés. Les expériences de l'époque montrèrent que la vitesse de propagation était toujours la même, à savoir c , la vitesse de la lumière. Cela signifiait qu'il y avait donc un lien secret entre le magnétisme, l'électricité et la lumière, et plongeait les physiciens dans la plus grande perplexité. On pose donc

$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1}$$

ce qui permet de définir la valeur de la permittivité du vide (caractéristique décrivant sa capacité à affaiblir les forces électrostatiques)

$$\epsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F.m}^{-1} \text{ (F pour Farad)}$$

la valeur approchée provenant de notre connaissance approchée de la valeur de la vitesse de la lumière.

Deux propriétés importantes du champ magnétique :

- De même que pour le champ électrostatique, le **principe de superposition** s'applique au champ magnétique. Si on considère deux particules 1 et 2 alors le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace sera la somme vectorielle des champs créés par chaque particule.
- Du fait du produit vectoriel, le champ magnétique est ce qu'on appelle un **pseudo-vecteur** (voir plus bas).

Quelques ordres de grandeur :

- Un aimant courant $B \approx 10 \text{ mT}$
- Un électroaimant ordinaire $B \approx \text{Tesla}$
- Une bobine supraconductrice $B \approx 20 \text{ Tesla}$
- Une bobine résistive $B \approx \text{de } 30 \text{ à } 1000 \text{ Tesla}$
- Champ magnétique interstellaire moyen : $B \approx \mu\text{G}$
- Champ magnétique dans une tache solaire $B \approx \text{kG} \approx 0.1 \text{ Tesla}$
- Champ magnétique terrestre : $B_{\perp} \approx 0,4 \text{ G}, B_{\text{horizontal}} \approx 0.3 \text{ G}$
- Champ magnétique d'une étoile à neutrons $B \approx 10^8 \text{ Tesla}$

1.2.2- Champ magnétique créé par un ensemble de charges en mouvement

Considérons N particules de charges q_i situés en des points P_i et de vitesse \vec{v}_i . En vertu du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3}}$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné et qu'on s'intéresse à des échelles spatiales bien plus grandes que la distance entre ces particules, il est avantageux

d'utiliser une description continue. Il faut donc définir des distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Mais des distributions continues de quoi ?

Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire d^3V , situé autour d'un point P' quelconque de la distribution de charges en mouvement, à une charge dq animée d'une vitesse moyenne \vec{v} . Le champ magnétique résultant s'écrit alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dq \vec{v}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3}$$

où l'intégrale porte sur le volume V total embrassé par ces charges.

En toute généralité, considérons α espèces différentes de particules (ex : électrons, ions), chacune animée d'une vitesse \vec{v}_α , de charge q_α et d'une densité numérique n_α . On peut alors écrire $dq \vec{v} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha d^3V$, où la somme porte sur le nombre d'espèces différentes et non sur le nombre de particules. On reconnaît ainsi l'expression générale du vecteur densité locale de courant $\vec{j} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha$.

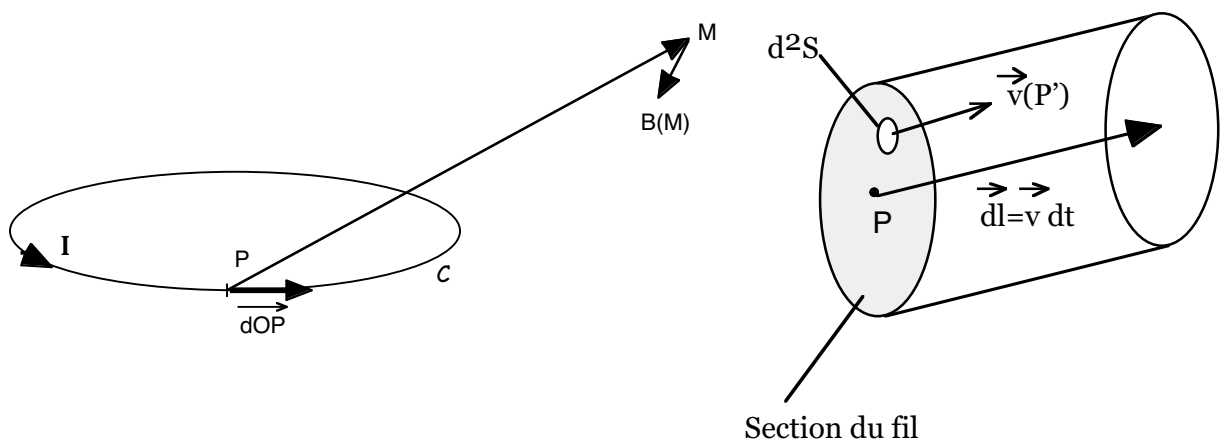
L'expression du champ magnétique créé par une distribution volumique de charges quelconque est donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3} d^3V$$

Ce résultat est général et valable quelle que soit la forme du conducteur. On peut l'appliquer, par exemple, à l'intérieur d'un métal de volume V quelconque.

1.2.3- Champ créé par un circuit électrique (formule de Biot et Savart)

Dans le cas particulier d'un circuit filiforme fermé, parcouru par un courant permanent I , la formule précédente va nous fournir la loi de Biot et Savart.



Dans ce cas, le volume élémentaire s'écrit $d^3V = d^2S dl$ où d^2S est un élément de surface transverse situé en P' et dl un élément de longueur du fil.

Or, on considère toujours des cas où le point M est situé à une distance telle du fil qu'on peut considérer celui-ci comme très mince.

Plus précisément, le vecteur vitesse (ou densité de courant) a la même orientation sur toute la section du fil (\vec{j} parallèle à \vec{dl} et à $\vec{d^2S}$). Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} dl \iint_{\text{section}} \frac{\vec{j}(P') \wedge \overrightarrow{P'M}}{\|\overrightarrow{P'M}\|^3} d^2S = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[\iint_{\text{section}} \vec{j}(P') d^2S \right] dl \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[\iint_{\text{section}} \vec{j}(P') \cdot \vec{d^2S} \right] \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\overrightarrow{dOP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $P'M \gg PP'$ (donc $P'M \approx PM$), P étant un point sur le fil (centre de la section). Par ailleurs, nous avons utilisé le fait que la normale à la section ainsi que dl étaient orientés dans le sens du courant ($\vec{j} d^2S dl = (\vec{j} \cdot \vec{d^2S}) \vec{dl}$).

Formule de Biot et Savart : en un point M quelconque de l'espace, le champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant permanent I est

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}}$$

où P est un point quelconque le long du circuit et $\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{dOP}$.

La formule de Biot et Savart (1820) a été établie expérimentalement et fournit un lien explicite entre le champ magnétique et le courant. Mais ce n'est que plus tard (1880+) que les physiciens ont réalisé que le courant était dû au déplacement de particules dans un conducteur.

Règles mnémotechniques :

Dans l'utilisation de la formule de Biot et Savart, il faut faire attention au fait que le champ magnétique créé par un circuit fermé est la *somme vectorielle* de tous les \vec{dB} , engendrés par un élément de circuit, dont le sens est donné par celui du courant I,

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

Or, chaque \vec{dB} est défini par un produit vectoriel. Il faut donc faire extrêmement attention à l'orientation des circuits. Voici quelques règles mnémotechniques :

- Règle des trois doigts de la main droite
- Règle du bonhomme d'Ampère
- Règle du tire-bouchon
- Règle des pôles magnétiques

I.2.4- Propriétés de symétrie du champ magnétique

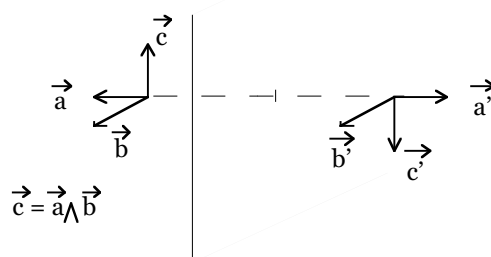
Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique. Du fait que le champ soit un effet créé par un courant, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Cette trivialité se traduit par la présence de certaines symétries et invariances si les sources de courant en possèdent également. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie de la densité de courant, on pourra connaître celles du champ magnétique.

Vecteurs et pseudo-vecteurs

Un vecteur polaire, ou vrai vecteur, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés. Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité de courant.

Un vecteur axial, ou pseudo-vecteur, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une *convention d'orientation d'espace* et dépend donc de cette convention. Exemples : le vecteur rotation instantanée, le champ magnétique, la normale à une surface.

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. Le produit vectoriel de deux vrais vecteurs (respectivement pseudo-vecteurs) est un pseudo-vecteur (resp. vrai vecteur), tandis que celui d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un pseudo-vecteur.



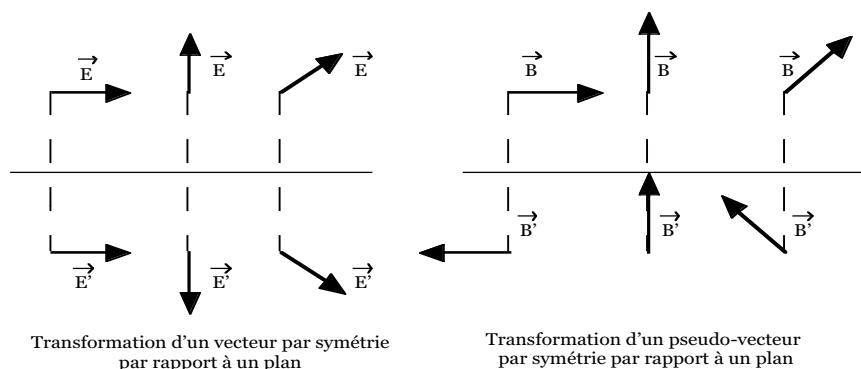
Transformation par rapport à
un plan de symétrie

Orienter l'espace revient à associer à un axe orienté un sens de rotation dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens conventionnellement choisi est déterminé par la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle du bonhomme d'Ampère (pour le champ magnétique mais aussi pour le vecteur rotation instantanée).

Transformations géométriques d'un vecteur ou d'un pseudo-vecteur

Vecteurs et pseudo-vecteurs se transforment de la même manière dans une rotation ou une translation. Il n'en est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan ou à un point. Dans ces transformations

- un vecteur est transformé en son symétrique,
- un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique.



Soit $\vec{A}'(M')$ le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan S à partir de $\vec{A}(M)$. D'après la figure ci-dessus, on voit que

1) si $\vec{A}(M)$ est un vrai vecteur

- $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que S ;
- $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à S .

2) au contraire, si $\vec{A}(M)$ est un pseudo-vecteur

- $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à S ;
- $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$ si $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que S .

Ces deux règles de transformation vont nous permettre de déterminer des règles de symétrie utiles.

Principe de Curie

« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »

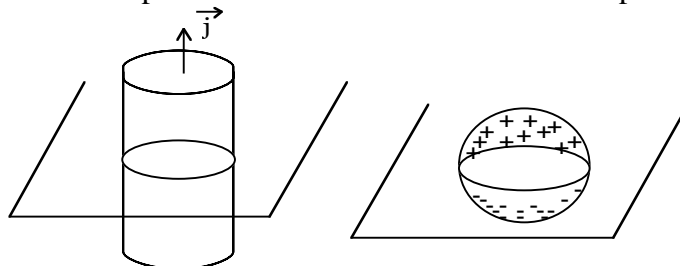
Dans une espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (ex : ensemble de particules, distribution de charges et/ou de courants) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations.

Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

Règles de symétrie

- Invariance par translation : si S est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz , les effets ne dépendent pas de z .
- Symétrie axiale : si S est invariant dans toute rotation θ autour d'un axe Oz , alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent pas de θ .
- Symétrie cylindrique : si S est invariant par translation le long de l'axe Oz et rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) ne dépendent que de la distance à l'axe ρ .
- Symétrie sphérique : si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O , alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r, θ, φ) ne dépendent que de la distance au centre r .
- Plan de symétrie Π : si S admet un plan de symétrie Π , alors en tout point de ce plan,
 - un effet à caractère vectoriel est contenu dans le plan

- un effet à caractère pseudo-vectériel lui est perpendiculaire.
- Plan d'antisymétrie Π' : si, par symétrie par rapport à un plan Π' , S est transformé en $-S$, alors en tout point de ce plan,
 - un effet à caractère vectoriel est perpendiculaire au plan
 - un effet à caractère pseudo-vectériel est contenu dans ce plan.



Exemples de plans d'antisymétrie

Voici quelques règles simples et très utiles, directement issues de la liste ci-dessus :

- Si \vec{j} est invariant par rotation autour d'un axe, \vec{B} l'est aussi.
- Si \vec{j} est poloidal (porté par \vec{u}_ρ et/ou \vec{u}_z), alors \vec{B} est toroïdal (porté par \vec{u}_θ).
- Si \vec{j} est toroïdal, alors \vec{B} est poloidal.
- Si le système de courants possède un plan de symétrie, alors \vec{j} est contenu dans ce plan et donc \vec{B} lui est perpendiculaire.

Pourquoi un vecteur $\vec{A}(x_1, x_2, x_3)$ est indépendant de la variable x_1 si le système S n'en dépend pas ?

Soit un point $M(x_1, x_2, x_3)$ dont les coordonnées sont exprimées dans un système quelconque. Soit un point M' lui étant infiniment proche. On a alors

$$\vec{A}(M') = \begin{cases} A_1(M') = A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 \\ A_2(M') = A_2(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} dx_1 \\ A_3(M') = A_3(x_1 + dx_1, x_2, x_3) \approx A_3(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial A_3}{\partial x_1} dx_1 \end{cases}$$

c'est à dire, de façon plus compacte $\vec{A}(M') = \vec{A}(M) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} dx_1$. Si le système physique S reste invariant lors d'un changement de M en M' , alors (Principe de Curie) $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$. On a donc $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} = \vec{0}$ en tout point M, ce qui signifie que $\vec{A}(x_2, x_3)$ ne dépend pas de x_1 . On peut suivre le même raisonnement pour chacune des autres coordonnées.

Pourquoi un vrai vecteur appartient nécessairement à un plan Π de symétrie ?

Quel que soit M de S, soit M' son symétrique par rapport à Π . Ce plan étant un plan de symétrie, cela signifie que $f(M) = f(M')$ pour toute fonction de M. Ceci est en particulier vrai pour chaque composante $A_i(M) = A_i(M')$ du vecteur $\vec{A}(M)$. On a donc $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$ ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est engendré par les mêmes vecteurs de base que Π .

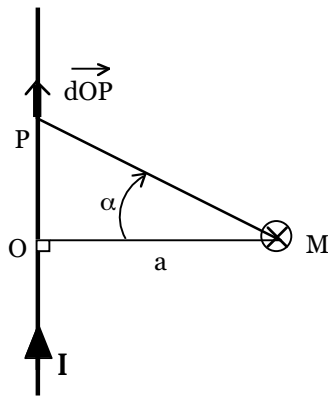
Si $\vec{A}(M)$ est un pseudo-vecteur, alors on vient de montrer que $\vec{A}(M)$ est nécessairement perpendiculaire à Π .

Pourquoi un vrai vecteur est nécessairement perpendiculaire à un plan Π d'antisymétrie ?

Ce plan étant un plan d'antisymétrie, on a $f(M') = -f(M)$ pour toute fonction de M . Ceci étant vrai pour chaque composante du vecteur $\vec{A}(M)$, on a donc $A_i(M') = -A_i(M)$, ce qui implique que $\vec{A}(M)$ est perpendiculaire à Π (ou lui appartient si $\vec{A}(M)$ est un pseudo-vecteur).

1.3- Calcul du champ dans quelques cas simples

1.3.1- Fil rectiligne infini



On considère un fil rectiligne, infini, parcouru par un courant I permanent. La densité de courant possède une invariance par translation selon l'axe z ainsi que par rotation autour de cet axe. Elle possède donc une symétrie cylindrique. Les calculs seront donc plus simples dans le système de coordonnées cylindriques. Enfin, la densité de courant étant poloïdale, c'est à dire

$$\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho) \vec{u}_z,$$

le champ magnétique est toroïdal

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B(\rho) \vec{u}_\theta$$

Calculons le champ créé en un point M situé à une distance a du fil par un élément dOP vu sous un angle α . La loi de Biot et Savart donne

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

où $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$. Comme, par raison de symétrie, seule la composante selon \vec{u}_θ est non nulle, on ne s'intéresse qu'à celle-ci, c'est à dire $B = \int d\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = \int dB_\theta$ avec

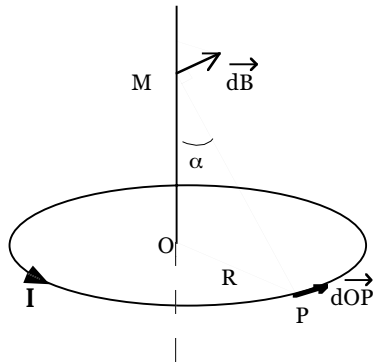
$$dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\vec{OP} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{u}_\theta}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \cdot PM \cos \alpha}{\|\vec{PM}\|^3} (\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\rho) \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \cos \alpha}{\|\vec{PM}\|^2}$$

Or, $OP = PM \sin \alpha = a \tan \alpha$ d'où $dOP = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$ et on obtient alors

$$B = \int dB_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{a} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

1.3.2- Spire circulaire (sur l'axe)

Considérons maintenant le cas d'une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant permanent I . On ne s'intéresse ici qu'au champ magnétique sur l'axe z de la spire.



La densité de courant étant toroïdale et invariante par rotation autour de l'axe z, c'est à dire

$$\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho, z) \vec{u}_\theta,$$

le champ magnétique sera poloidal

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B_\rho(\rho, z) \vec{u}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{u}_z$$

Cependant, sur l'axe z, la composante radiale du champ s'annule et il ne reste qu'une composante selon z.

En projetant la loi de Biot et Savart sur z on obtient

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \sin \alpha}{\|PM\|^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dOP \sin^3 \alpha}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha d\theta$$

$$B_z = \oint_{\text{spire}} dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

I.3.3- Solénoïde infini (sur l'axe)

Un solénoïde est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre. On suppose que ce fil est suffisamment mince pour pouvoir modéliser ce solénoïde comme une juxtaposition de spires coaxiales, avec N spires par unité de longueur. Chaque spire est alors parcourue par un courant permanent I.

Comme pour la spire simple vue plus haut, les propriétés de symétrie du courant montrent que le champ magnétique du solénoïde, qui est la somme vectorielle du champ créé par chaque spire, est suivant z uniquement.

Autour d'un point P situé en z, sur une épaisseur dOP=dz, il y a Ndz spires. Ces spires créent donc un champ en un point M quelconque de l'axe

$$dB = \frac{\mu_0 N I dz}{2R} \sin^3 \alpha$$

où la position z est reliée à l'angle par $\tan \alpha = \frac{R}{z}$. Si on prend la différentielle de cette expression, on obtient

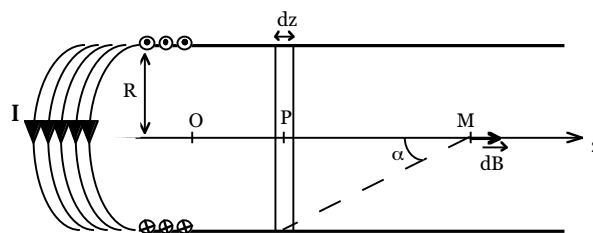
$$dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Attention au signe de dz qui doit être cohérent avec notre convention de signe. Ici, dz>0 pour un dα > 0. Le champ magnétique total s'écrit donc

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB = \frac{\mu_0 N I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 N I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Pour un solénoïde infini, on a α₁ → 0 et α₂ → π, d'où un champ sur l'axe

$$B = \mu_0 N I$$



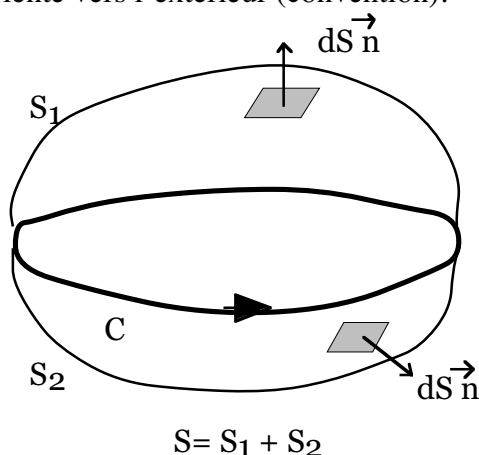
Chapitre II- Lois fondamentales de la magnétostatique

Aucune des lois fondamentales citées ici ne sera démontrée. Elles constituent des faits d'expérience traduits dans un formalisme mathématique, apuré au fil des ans. En Licence, ces lois seront énoncées sous forme d'équations de Maxwell, postulats de l'électromagnétisme.

II.1- Flux du champ magnétique

II.1.1- Conservation du flux magnétique

Considérons une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur une courbe C fermée et orientée, c'est à dire pour laquelle on peut définir localement un élément de surface $\vec{dS} = dS\vec{n}$ dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (convention).



Le flux du champ magnétique à travers cette surface fermée vaut

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0}$$

Cette loi est générale et reste valable même en régime variable.

La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique. Nous avons vu, avec le théorème de Gauss, que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques contenues à l'intérieur de la surface

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Si la charge totale est positive, le flux est positif et il « sort » de cette surface un champ électrostatique (source). Si la charge est négative, le flux est négatif et le champ « rentre », converge vers la surface (puits). Cette propriété reste d'ailleurs également valable en régime variable. Rien de tel n'a jamais été observé pour le champ magnétique. On ne connaît pas de charge magnétique analogue à la charge électrique (se serait un « monopôle magnétique ») :

tout le champ qui rentre dans une surface fermée doit également en ressortir. La source la plus élémentaire de champ magnétique est un dipôle (deux polarités), comme l'aimant dont on ne peut dissocier le pôle nord du pôle sud.

On peut aisément montrer que le flux à travers une surface S s'appuyant sur un contour fermé C est indépendant du choix de cette surface. Prenons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur C et telles que $S = S_1 + S_2$ soit une surface fermée. En orientant cette surface vers l'extérieur, la conservation du flux magnétique impose

$$\Phi_S = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

donc $\Phi_{S_1} = -\Phi_{S_2}$, ce qui rentre d'un côté ressort de l'autre. La différence de signe provient de la convention d'orientation de la normale : le flux est le même dans les deux cas.

II.1.2- Lignes de champ et tubes de flux

Le concept de *lignes de champ* (également appelées lignes de force) est très utile pour se faire une représentation spatiale d'un champ de vecteurs. Ce sont ces lignes de champ qui sont tracées par la matière sensible au champ magnétique, telle que la limaille de fer au voisinage d'un aimant.

Définition : Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent.

Considérons un déplacement élémentaire \vec{dl} le long d'une ligne de champ magnétique C . Le fait que le champ magnétique \vec{B} soit en tout point de C parallèle à \vec{dl} s'écrit :

$$\boxed{\vec{B} \wedge \vec{dl} = \vec{0}}$$

En coordonnées cartésiennes, $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant

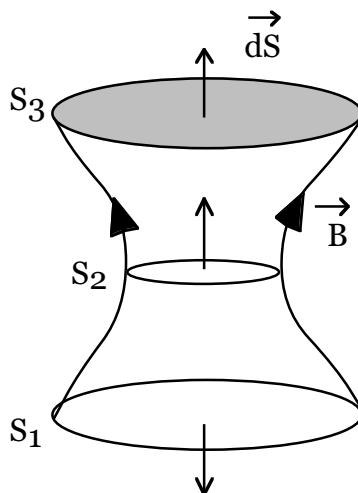
$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$ et l'équation des lignes de champ devient

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{B_\varphi}$$

La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes.

Un *tube de flux* est une sorte de « rassemblement » de lignes de champ. Soit une surface S_1 s'appuyant sur une courbe fermée C telle que le champ magnétique y soit tangent (c'est à dire $\vec{B} \perp \vec{dl}$ où \vec{dl} est un vecteur élémentaire de C). En chaque point de C passe donc une ligne de champ particulière. En prolongeant ces lignes de champ on construit ainsi un tube de flux.



Tout au long de ce tube, le flux magnétique est conservé. En effet, considérons une portion de tube cylindrique entre S_1 et S_3 , ayant un rétrécissement en une surface S_2 . La surface $S = S_1 + S_3 + S_L$, où S_L est la surface latérale du tube, constitue une surface fermée. Donc le flux du champ à travers S est nul. Par ailleurs, le flux à travers la surface latérale est également nul, par définition des lignes de champ ($\vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$ sur S_L). Donc, le flux en S_1 est le même qu'en S_3 . On peut faire le même raisonnement pour S_2 . Cependant puisque $S_1 > S_2$ pour un flux identique, cela signifie que le champ magnétique est plus concentré en S_2 . D'une manière générale, plus les lignes de champ sont rapprochées et plus le champ magnétique est localement élevé.

Les exemples les plus célèbres de tubes de flux rencontrés dans la nature sont les taches solaires.

II.2- Circulation du champ magnétique

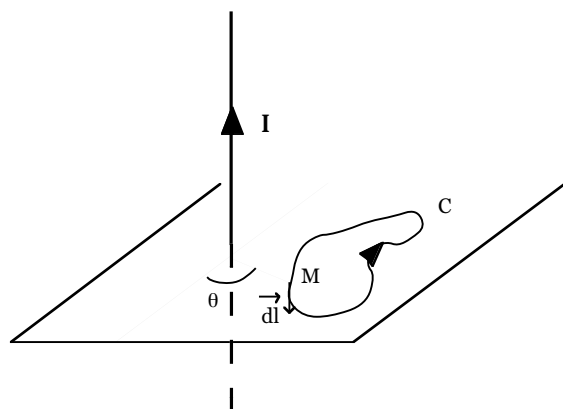
II.2.1- Circulation du champ autour d'un fil infini

Nous avons vu que le champ \vec{B} créé par un fil infini en un point $M(\rho, \theta, z)$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{u}_\theta$$

Considérons maintenant une courbe fermée quelconque C . Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit $d\vec{l} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$. La circulation de \vec{B} sur la courbe fermée C vaut alors

$$\oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \oint_{\text{courbe}} \frac{d\theta}{2\pi}$$



Plusieurs cas de figure peuvent se présenter :

- Si C n'enlace pas le fil, $\oint_C d\theta = 0$.
- Si C enlace le fil une fois, $\oint_C d\theta = 2\pi$.
- Si C enlace le fil N fois, $\oint_C d\theta = 2N\pi$.

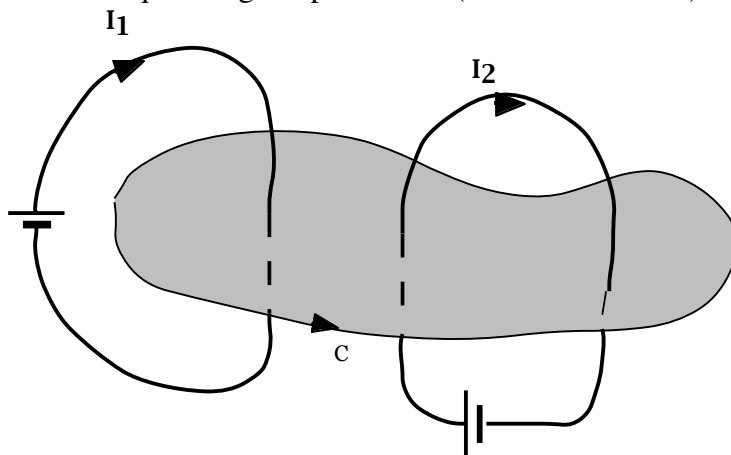
La circulation de \vec{B} sur une courbe fermée est donc directement reliée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe. C'est Ampère qui, en recherchant une explication du magnétisme dans une théorie de la dynamique des courants, découvrit cette propriété du champ magnétique. Démontrée ici sur un cas particulier à partir de la loi de Biot et Savart, nous ne démontrerons pas que ce résultat est général, c'est à dire valable pour un conducteur quelconque.

II.2.2- Le théorème d'Ampère

Théorème : La circulation de \vec{B} le long d'une courbe C quelconque, orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent la surface délimitée par C

$$\oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Cette relation fondamentale est l'équivalent du théorème de Gauss pour le champ électrostatique : elle relie le champ (\vec{B} ou \vec{E}_s) à ses sources (le courant I ou la charge Q) dans le vide (à l'intérieur d'un matériau il faut les corriger). Cependant, à la différence du théorème de Gauss, elle n'est valable qu'en régime permanent (courants continus).



$$I_{\text{int}} = -I_1 + I_2 - I_2 = -I_1$$

Remarques :

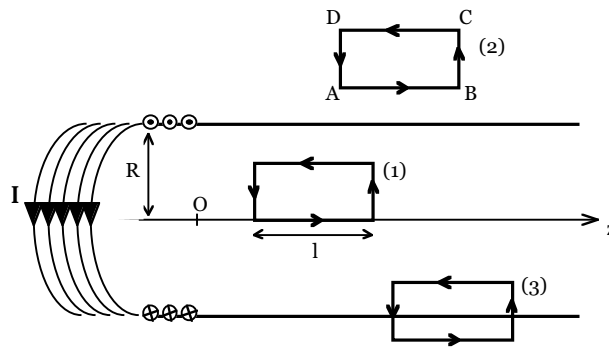
- Le théorème d'Ampère et la loi de Biot et Savart ont la même cause originelle.
- Le choix du sens de la circulation sur le contour d'Ampère choisi est purement arbitraire. Une fois ce choix fait, la règle du bonhomme d'Ampère permet d'attribuer un signe aux courants qui traversent la surface ainsi délimitée.
- Comme pour le théorème de Gauss, ce qui compte c'est la somme algébrique des sources : par exemple, si deux courants de même amplitude mais de sens différents traversent la surface, le courant total sera nul (voir figure ci-dessus).

Exemple: le solénoïde infini

Considérons un solénoïde infini, comportant N spires par unité de longueur, chacune parcourue par un courant I permanent. Etant donné la géométrie cylindrique du solénoïde, on se place en coordonnées cylindriques, l'axe z étant l'axe du solénoïde. La densité de courant est toroïdale et s'écrit $\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho)\vec{u}_\theta$ puisqu'il y a invariance par rotation autour de l'axe z et translation le long de ce même axe. Donc, le champ magnétique est poloïdal et s'écrit

$$\vec{B}(\rho, \theta, z) = B(\rho)\vec{u}_z$$

On choisit trois contours d'Ampère différents (voir figure) :



Contour (1) :

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot dz\vec{u}_z - \int_{CD} \vec{B} \cdot dz\vec{u}_z = 0$$

$$B_{AB}l = B_{DC}l$$

Donc, le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde (parce qu'il est infini).

Contour (2) : on obtient le même résultat, c'est à dire un champ uniforme à l'extérieur. Mais comme ce champ doit être nul à l'infini, on en déduit qu'il est nul partout.

Contour (3) :

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -Nl\mu_0 I$$

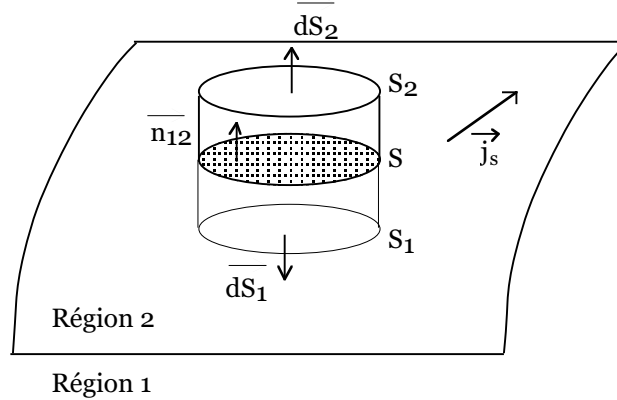
$$- \int_{CD} B\vec{u}_z \cdot dz\vec{u}_z = -Nl\mu_0 I$$

$$B = \mu_0 NI$$

II.2.3- Relations de continuité du champ magnétique

Puisque le courant est la source du champ magnétique, on peut se demander ce qui se passe à la traversée d'une nappe de courant infinie. Comme pour le champ électrostatique, va-t-on voir une discontinuité dans le champ ?

Soit une distribution surfacique de courant \vec{j}_s séparant l'espace en deux régions 1 et 2.



Considérons une surface fermée fictive, traversant la nappe de courant. La conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

où S_L est la surface latérale. Lorsqu'on fait tendre cette surface vers zéro (S_1 tend vers S_2), on obtient

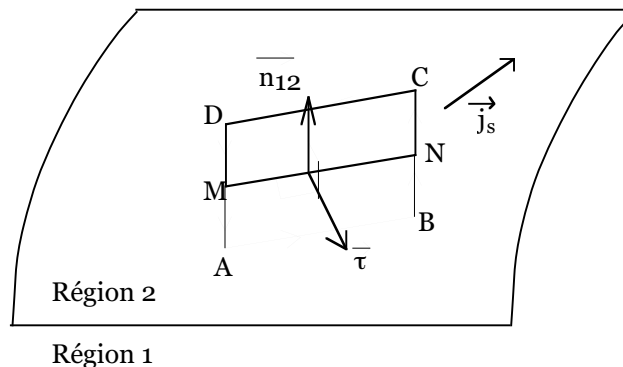
$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} dS = 0$$

puisque $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2 = -dS\vec{n}_{12}$ dans cette limite. Ce résultat étant valable quelque soit la surface S choisie, on vient donc de démontrer que

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

Pour la composante tangentielle, nous allons utiliser le théorème d'Ampère. Considérons le contour d'Ampère suivant :



Le théorème d'Ampère s'écrit alors

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Le courant I est celui qui circule sur la nappe, autrement dit, il est défini par la densité de courant surfacique

$$I = \iint_{ABCD} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_{MN} (\vec{j}_s \cdot \vec{\tau}) dl$$

où $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{n_{12}}, \vec{\tau})$ est un trièdre direct. Dans la limite $DA \rightarrow 0$, le théorème d'Ampère fournit

$$\int_{MN} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{dl} = \int_{MN} (\mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{\tau}) dl$$

Puisque MN est quelconque, on doit avoir

$$\begin{aligned} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{dl} &= \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{\tau} dl \\ &= (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot dl (\vec{\tau} \wedge -\vec{n_{12}}) \\ &= [(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n_{12}}] \cdot \vec{\tau} dl \end{aligned}$$

c'est à dire (puisque la direction de $\vec{\tau}$ est arbitraire)

$$\boxed{(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n_{12}} = \mu_0 \vec{j}_s}$$

En résumé, à la traversée d'une nappe de courant,

- la composante normale du champ magnétique reste continue,
- la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

III.2.4- Les trois façons de calculer le champ magnétique

En guise de résumé voici des conseils sur les méthodes à employer pour calculer le champ magnétique.

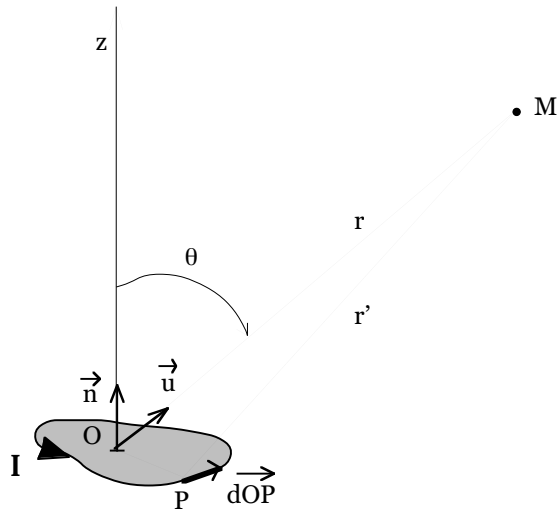
- **La formule de Biot et Savart :** elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition vectorielle des champs \vec{dB} créés par un petit élément du circuit (souvent des circuits filiformes).
- **La conservation du flux :** à n'utiliser que si l'on connaît déjà son expression dans une autre région de l'espace (voir un exemple d'utilisation à la section précédente).
- **Le théorème d'Ampère :** il faut être capable de calculer la circulation du champ sur un contour choisi. Cela nécessite donc une symétrie relativement simple des courants.

Dans tous les cas, il faut prendre en compte les propriétés de symétrie de la densité de courant.

II.3- Le dipôle magnétique

II.3.1- Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire plane, de forme quelconque, de centre d'inertie O , parcourue par un courant permanent I . Nous allons calculer le champ magnétique créé par cette spire en tout point M de l'espace, situé à grande distance de la spire (précisément, à des distances grandes comparées à la taille de la spire).



On pose

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OM} & \vec{r}' &= \overrightarrow{PM} \\ \vec{\rho} &= \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{r}' & \vec{u} &= \frac{\vec{r}'}{r}\end{aligned}$$

On va donc utiliser la formule de Biot et Savart, dans la limite $r \gg \rho$, pour tout point P appartenant à la spire

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{r}'}{r'^3}$$

Evaluons le terme \vec{r}'/r'^3 pour des points M situés à grande distance de la spire :

$$\begin{aligned}\frac{\vec{r}'}{r'^3} &= \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{(r^2 + \rho^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{\rho})^{3/2}} \approx \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{r^3 \left(1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r^2}\right)^{3/2}} \\ &\approx \frac{\vec{r} - \vec{\rho}}{r^3} \left(1 + 3\frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{r^2}\right) \\ &\approx \frac{\vec{u}}{r^2} - \frac{\vec{\rho}}{r^3} + 3\frac{\vec{u} \cdot \vec{\rho}}{r^3} \vec{u}\end{aligned}$$

où nous avons fait un développement limité à l'ordre 1. En reportant cette expression dans la formule de Biot et Savart on obtient

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[\oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} - \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{\rho}}{r} + \frac{3}{r} \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) \right]$$

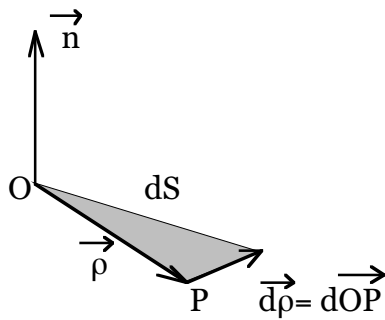
Evaluons séparément chaque terme intervenant dans la parenthèse :

$$\bullet \quad \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} = \left[\oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \right] \wedge \vec{u} = [\vec{\rho}(P_0) - \vec{\rho}(P_0)] \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

puisque le vecteur \vec{u} est indépendant du point P sur la spire et qu'on fait une intégration sur toute la spire, en revenant au point de départ P_0 .

$$\bullet \quad - \oint_{\text{spire}} \frac{d\vec{\rho} \wedge \vec{\rho}}{r} = \frac{1}{r} \oint_{\text{spire}} \vec{\rho} \wedge d\vec{\rho} = \frac{2S}{r} \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur normal au plan de la spire (vecteur de base de l'axe z) et S sa surface. Ce calcul est général, valable quelle que soit la surface.



En effet, une surface élémentaire dS , telle que

$$\boxed{\frac{1}{2} \vec{\rho} \wedge d\vec{\rho} = dS \vec{n}}$$

est toujours engendrée lors d'un petit déplacement du vecteur $\vec{\rho}$.

$$\bullet \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} \wedge \vec{u} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) = -\vec{u} \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u})$$

Prenons une surface S plane quelconque. Sur cette surface, on a $\oint d(xy) = [xy]_{P_0}^P = 0$ puisqu'on revient au même point départ P_0 . On a donc l'égalité $\oint x dy = -\oint y dx$. Par ailleurs,

$$\text{on a également la propriété suivante } \oint x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^{x_0} = \oint y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y_0}^{y_0} = 0.$$

On va utiliser ces propriétés générales pour calculer l'intégrale inconnue ci-dessus.

Si on décompose les vecteurs $\vec{\rho}$ et \vec{u} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) engendrant le plan de la spire, on obtient

$$d\vec{\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) = d\rho_1 (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \vec{e}_1 + d\rho_2 (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2) \vec{e}_2$$

or,

$$\oint_{\text{spire}} \rho_1 u_1 d\rho_1 = \frac{u_1}{2} [\rho_1^2(P_0) - \rho_1^2(P_0)] = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \oint_{\text{spire}} d\vec{\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{u}) &= u_2 \oint_{\text{spire}} \rho_2 d\rho_1 \vec{e}_1 + u_1 \oint_{\text{spire}} \rho_1 d\rho_2 \vec{e}_2 \\ &= -u_2 S \vec{e}_1 + u_1 S \vec{e}_2 \\ &= S \vec{n} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, on obtient un champ magnétique

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \left[\frac{2S}{r} \vec{n} - \frac{3\vec{u}}{r} \wedge (S \vec{n} \wedge \vec{u}) \right]$$

On voit donc apparaître une grandeur importante car décrivant complètement la spire « vue » depuis une grande distance, à savoir le **moment magnétique dipolaire**

$$\boxed{\vec{M} = IS \vec{n}}$$

En utilisant l'égalité $\vec{u} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{u}) = \vec{M} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{M})$, on obtient alors l'expression du champ magnétique créé par un dipôle

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3\vec{u} (\vec{M} \cdot \vec{u}) - \vec{M} \right] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\vec{M} \cdot \vec{u}}{r^2} \end{aligned}}$$

En coordonnées sphériques, $\vec{u} \cdot \vec{M} = M \cos \theta$ et les composantes poloidales du champ s'écrivent

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 2M \cos \theta \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} M \sin \theta \end{cases}$$

Lignes de champ :

Comme nous l'avons vu précédemment, les lignes de champ ne sont pas des courbes où la norme du champ magnétique est constante. Ici, l'équation des lignes de champ en coordonnées sphériques fournit :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{\frac{\mu_0 2M}{4\pi r^3} \cos \theta} &= \frac{rd\theta}{\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin \theta} \\ \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} \\ \ln \frac{r}{r_0} &= 2 \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \\ r &= r_0 \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \end{aligned}$$

où le rayon sphérique r_0 correspond à un angle θ_0 arbitraire.

Remarques :

1. Ces expressions ne sont pas à retenir : il faut par contre comprendre et savoir reproduire la démonstration.
2. Pour établir l'expression du champ créé par un dipôle, nous avons fait un développement limité en ne conservant que les termes d'ordre un. Les termes d'ordre supérieur (multipolaires) ne jouent un rôle qu'à proximité immédiate de la spire.

II.3.2- Le modèle du dipôle en physique

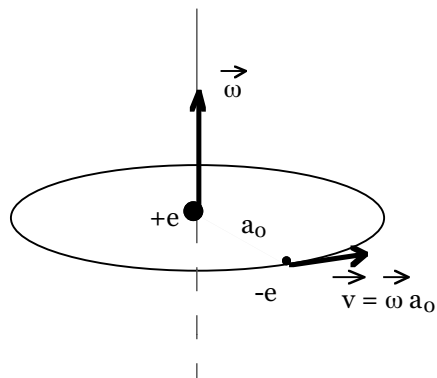
Il est intéressant de remarquer que l'expression du champ magnétique créé par une spire de courant (dipôle magnétique $\vec{M} = IS\vec{n}$) est formellement équivalente à celle du champ électrostatique créé par un système de deux charges opposées (dipôle électrique $\vec{p} = q\vec{d}$)

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

Cependant, pour le champ magnétique, il s'avère impossible de séparer le dipôle en une charge magnétique « + » et une autre « - ». Le dipôle est la première source de champ magnétique. C'est la raison pour laquelle il joue un si grand rôle dans la modélisation des effets magnétiques observés dans la nature, au niveau microscopique comme macroscopique.

L'origine du champ magnétique d'un matériau quelconque (ex : aimant) doit être microscopique. En utilisant le modèle atomique de Bohr, on peut se convaincre que les

atomes (du moins certains) ont un **moment magnétique dipolaire intrinsèque**. Le modèle de Bohr de l'atome d'Hydrogène consiste en un électron de charge $q=-e$ en mouvement circulaire uniforme autour d'un noyau central (un proton) avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



Si on regarde sur des échelles de temps longues par rapport à T , tout se passe comme s'il y avait un courant

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi}$$

On a donc une sorte de spire circulaire, de rayon moyen la distance moyenne au proton, c'est à dire le rayon de Bohr a_0 . L'atome d'Hydrogène aurait donc un moment magnétique intrinsèque

$$\begin{aligned}\vec{M} &= I S \vec{n} = \frac{q\omega}{2} a_0^2 \vec{n} = \frac{q}{2m} (m\omega a_0^2 \vec{n}) \\ &= \frac{q}{2m} \vec{L}\end{aligned}$$

où \vec{L} est le moment cinétique de l'électron et $\left(\frac{q}{2m}\right)$ est appelé le facteur gyromagnétique.

Ce raisonnement peut se généraliser aux autres atomes. En effet, un ensemble de charges en rotation autour d'un axe vont produire un moment magnétique proportionnel au moment cinétique total. Cela se produit même si la charge totale est nulle (matériau ou atome neutre) : ce qui compte c'est l'existence d'un courant. Il suffit donc d'avoir un décalage, même léger, entre les vitesses des charges « + » et celles des charges « - ».

Du coup, on peut expliquer qualitativement les propriétés magnétiques des matériaux en fonction de l'orientation des moments magnétiques des atomes qui les composent :

- *Matériaux diamagnétiques* : les moments sont distribués aléatoirement, il n'y a pas de champ magnétique intrinsèque.
- *Matériaux paramagnétiques* : ceux pour lesquels les moments peuvent s'orienter dans une direction privilégiée en présence d'un champ magnétique extérieur, pouvant donc être ainsi aimantés momentanément.
- *Matériaux ferromagnétiques* : ceux dont les moments sont déjà orientés dans une direction particulière, de façon permanente (aimants naturels).

La Terre est connue pour avoir un champ magnétique dipolaire, où le pôle Nord magnétique correspond au pôle Sud géographique (à un angle près).

Au niveau macroscopique, l'explication de l'existence du champ magnétique observé sur les planètes et sur les étoiles est encore aujourd'hui loin d'être satisfaisante. La théorie de l'**effet dynamo** essaye de rendre compte des champs observés par la présence de courants, essentiellement azimutaux, dans le cœur des astres.

Plusieurs faits connus restent partiellement inexpliqués :

- *Les cycles magnétiques* : le Soleil a un champ magnétique à grande échelle qui ressemble à celui de la Terre, approximativement dipolaire. Cependant, il y a une inversion de polarité tous les 11 ans. Pour la Terre, on a pu mettre en évidence qu'il y avait eu une inversion il y a environ 700.000 ans. Par ailleurs, on observe des fluctuations du champ.
- *Non-alignement avec le moment cinétique de l'astre* : s'il est de l'ordre d'une dizaine de degrés pour la Terre (avec une modification de la direction de l'axe magnétique d'environ 15° par an), il est de 90° pour celui de Neptune !

Chapitre III- Actions et énergie magnétiques

III.1- Force magnétique sur une particule chargée

Ce qui a été dit aux chapitres précédents concerne plus particulièrement les aspects macroscopiques, l'influence mesurable d'un champ magnétique sur un circuit électrique. Or, le courant circulant dans un circuit est dû au déplacement de particules chargées. Nous prendrons donc le parti ici de poser l'expression de la force magnétique s'exerçant sur une particule (sans la démontrer) puis de montrer comment s'exprime cette force sur un circuit. Historiquement bien sûr, c'est la force de Laplace qui a été mise en évidence la première, la force de Lorentz n'est venue que bien plus tard...

III.1.1- La force de Lorentz

La force totale, électrique et magnétique (on dit électromagnétique) subie par une particule de charge q et de vitesse \vec{v} mesurée dans un référentiel galiléen est

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

On appelle cette force **la force de Lorentz**. On peut la mettre sous la forme

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad \text{où} \quad \begin{cases} \vec{F}_e = q\vec{E} \\ \vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

où \vec{F}_e est la composante électrique et \vec{F}_m la composante magnétique. La composante magnétique de la force de Lorentz (parfois appelée force magnétique) possède un ensemble de propriétés remarquables :

1. **La force magnétique ne fournit pas de travail.** Si on applique la relation fondamentale de la dynamique pour une particule de masse m et charge q , on obtient

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0.$$

L'énergie cinétique de la particule est donc bien conservée.

2. **La force magnétique est une correction en $(v/c)^2$ à la force de Coulomb**, où c est la vitesse de la lumière (cf chapitre I).
3. **Violation du principe d'action et de réaction.** On peut aisément vérifier sur un cas particulier simple que la force magnétique ne satisfait pas au 3^{ème} principe de Newton. Pour cela, il suffit de prendre une particule 1 se dirigeant vers une particule 2. Le champ magnétique créé par 1 sera alors nul à l'emplacement de la particule 2,

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 q_1}{4\pi r^2} \vec{v}_1 \wedge \vec{u}_{12} = \vec{0},$$

et donc la force $\vec{F}_{1/2}$ sera nulle. Mais si la deuxième particule ne se dirige pas vers la première, son champ magnétique sera non nul en 1 et il y aura une force $\vec{F}_{2/1}$ non nulle...

III.1.2- Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique

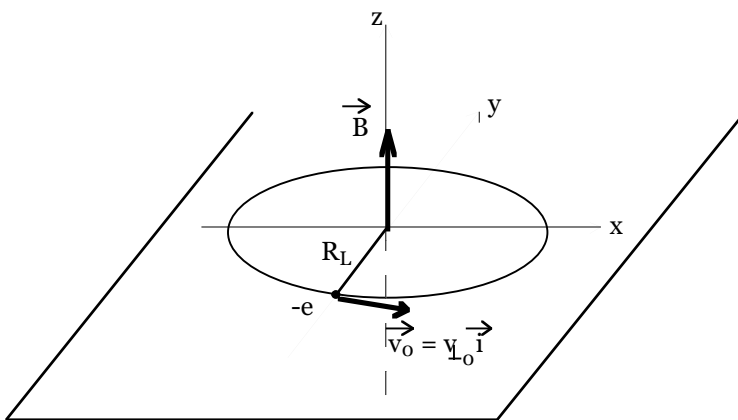
Considérons une particule de masse m et charge q placée dans un champ magnétique uniforme avec une vitesse initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Puisque la force magnétique est nulle dans la direction du champ, cette direction est privilégiée. On va donc tirer parti de cette information et décomposer la vitesse en deux composantes, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au champ, $\vec{v}(t) = \vec{v}_p + \vec{v}_\perp$. L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{d\vec{v}_p}{dt} = \vec{0} \\ \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v}_\perp \wedge \vec{B} \end{cases}$$

La trajectoire reste donc rectiligne uniforme dans la direction du champ. Prenons un repère cartésien dont l'axe z est donné par le champ $\vec{B} = B\vec{k}$.



L'équation portant sur la composante perpendiculaire se décompose alors en deux équations

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \omega v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x \end{cases} \quad \text{où } \omega = \frac{qB}{m}$$

Cas particulier d'une particule de charge négative (rotation dans le sens direct)

Ce système se ramène à deux

équations de la forme $\frac{d^2 v_i}{dt^2} = -\omega^2 v_i$ (pour $i = x, y$) et a donc pour solution

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = v_{\perp 0} \cos \omega t \\ \frac{dy}{dt} = v_y = -v_{\perp 0} \sin \omega t \end{cases}$$

où l'on a choisi une vitesse initiale suivant x , $\vec{v}_{\perp 0} = v_{\perp 0} \vec{i}$. En intégrant une deuxième fois ce système on obtient

$$\begin{cases} x = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} \sin \omega t \\ y = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} \cos \omega t \end{cases}$$

où les constantes d'intégration ont été choisies nulles (choix arbitraire). La trajectoire est donc un cercle de rayon $R_L = \left| \frac{mv_{\perp 0}}{qB} \right|$, le **rayon de Larmor**, décrit avec la pulsation $\omega = \frac{|q|B}{m}$, dite

pulsation gyro-synchrotron. Ce cercle est parcouru dans le sens conventionnel positif pour des charges négatives.

Le rayon de Larmor correspond à la « distance » la plus grande que peut parcourir une particule dans la direction transverse avant d'être déviée de sa trajectoire. Cela correspond donc à une sorte de distance de piégeage. A moins de recevoir de l'énergie cinétique supplémentaire, une particule chargée est ainsi piégée dans un champ magnétique.

Il est intéressant de noter que plus l'énergie cinétique transverse d'une particule est élevée (grande masse ou grande vitesse transverse) et plus le rayon de Larmor est grand. Inversement, plus le champ magnétique est élevé et plus ce rayon est petit.

Remarque : Nous avons vu au Chapitre II qu'une charge en mouvement crée un champ magnétique. Donc, une particule mise en rotation par l'effet d'un champ magnétique extérieur va créer son propre champ. Il n'en a pas été tenu compte dans le calcul précédent, celui-ci étant la plupart du temps négligeable.

III.1.3- Distinction entre champ électrique et champ électrostatique

Nous allons traiter ici un problème un peu subtil. En mécanique classique, il y a trois principes fondamentaux : le principe d'inertie, la relation fondamentale de la dynamique et le principe d'action et de réaction. Nous avons déjà vu que la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne satisfaisait pas au 3^{ème} principe. Mais il y a pire. Pour pouvoir appliquer la relation fondamentale de la dynamique, il faut se choisir un référentiel galiléen. Ce choix étant arbitraire, les lois de la physique doivent être indépendantes de ce choix (invariance galiléenne). Autrement dit, les véritables forces doivent être indépendantes du référentiel. Il est clair que ce n'est pas le cas de la force magnétique \vec{F}_m . En effet, considérons une particule q se déplaçant dans un champ magnétique avec une vitesse constante dans le référentiel du laboratoire. Dans ce référentiel, elle va subir une force magnétique qui va dévier sa trajectoire. Mais si on se place dans le référentiel propre de la particule (en translation uniforme par rapport au laboratoire, donc galiléen), sa vitesse est nulle. Il n'y a donc pas de force et elle ne devrait pas être déviée ! Comment résoudre ce paradoxe ?

C'est Lorentz qui a donné une solution formelle à ce problème, mais c'est Einstein qui lui a donné un sens grâce à la théorie de la relativité. La véritable force, électromagnétique, est la force de Lorentz

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

Supposons que cette particule soit soumise à un champ électrostatique \vec{E}_s et un champ magnétique \vec{B} , mesurés dans le référentiel \mathbf{R} du laboratoire. Dans un référentiel \mathbf{R}' où la particule est au repos, le terme magnétique sera nul. Si on exige alors l'invariance de la force, on doit écrire

$$\vec{F}' = q\vec{E}' = \vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Le champ \vec{E}' « vu » dans le référentiel \mathbf{R}' est donc la somme du champ électrostatique \vec{E}_s et d'un autre champ, appelé **champ électromoteur** $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$. Ainsi, on a bien conservé l'invariance de la force lors d'un changement de référentiel, mais au prix d'une complexification du champ électrique qui n'est plus simplement un champ électrostatique !

Deux conséquences importantes :

1. La circulation d'un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$ est en générale non nulle à cause du terme électromoteur (d'où son nom d'ailleurs) : celui-ci peut donc créer une différence de potentiel qui va engendrer un courant, ce qui n'est pas possible avec un champ purement électrostatique.
2. Le champ électrique « vu » dans \mathbf{R}' dépend du champ magnétique « vu » dans \mathbf{R} . On ne peut donc pas appliquer la règle de changement de référentiel classique (transformation galiléenne) mais une autre, plus complexe (transformation de Lorentz). Champs électrique et magnétique dépendent tous deux du référentiel, la compréhension de ce phénomène électromagnétique ne pouvant se faire que dans le contexte de la relativité.

Ceci dit, nous utiliserons tout de même l'expression de la force magnétique ou de Lorentz pour calculer, par exemple, des trajectoires de particules dans le formalisme de la mécanique classique. On ne devrait pas obtenir des résultats trop aberrants *tant que leurs vitesses restent très inférieures à celle de la lumière*.

Une dernière remarque : nous avons implicitement supposé que la charge q de la particule était la même dans les deux référentiels. Cela n'est a priori pas une évidence. Nous pouvons en effet imposer que toute propriété fondamentale de la matière soit effectivement invariante par changement de référentiel. Le concept de masse, par exemple, nécessite une attention particulière. En effet, tout corps massif possède un invariant appelé « masse au repos ». Cependant sa « masse dynamique » (impulsion divisée par sa vitesse) sera d'autant plus élevée que ce corps aura une vitesse s'approchant de celle de la lumière.

Nous admettrons donc que la charge électrique est bien un invariant (dit relativiste).

III.2- Actions magnétiques sur un circuit fermé

III.2.1- La force de Laplace

Nous avons vu que la force subie par une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique, la force de Lorentz, s'écrit ; $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Considérons un milieu comportant α espèces différentes de particules chargées, chaque espèce ayant une densité volumique n_α , et une vitesse \vec{v}_α . Ces divers porteurs de charges sont donc responsables d'une densité locale de courant

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}.$$

Par ailleurs, chaque particule étant soumise à la force de Lorentz, la force s'exerçant sur un élément de volume d^3V comportant $\sum_{\alpha} n_{\alpha} d^3V$ particules s'écrit

$$\overrightarrow{d^3F} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} (\vec{E} + \vec{v}_{\alpha} \wedge \vec{B}) d^3V$$

On voit donc apparaître une force due au champ électrique. Cependant, si le volume élémentaire que l'on considère est suffisamment grand pour que s'y trouve un grand nombre de particules et si le conducteur est électriquement neutre, on doit avoir

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0$$

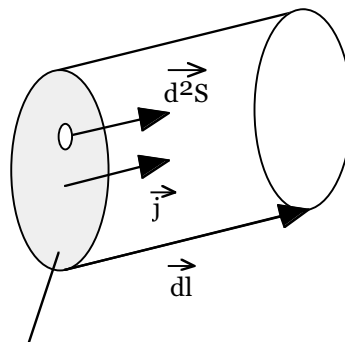
ce qui annule la force électrique.

On obtient alors $\overrightarrow{d^3F} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \wedge \vec{B} d^3V = (\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \wedge \vec{B} d^3V$, c'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{d^3F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d^3V}$$

Nous avons donc ci-dessus l'expression générale de la force créée par un champ magnétique extérieur sur une densité de courant quelconque circulant dans un conducteur neutre (la résultante est évidemment donnée par l'intégrale sur le volume).

Dans le cas particulier d'un conducteur filiforme, l'élément de volume s'écrit $d^3V = \overrightarrow{d^2S} \cdot \vec{dl}$, où \vec{dl} est un élément de longueur infinitésimal orienté dans la direction de \vec{j} et $\overrightarrow{d^2S}$ une surface infinitésimale.



S: section du fil

Dans le cas d'un circuit filiforme (très mince donc où l'on peut considérer que le champ est constant), la force qui s'exerce par unité de longueur s'écrit

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dF} &= \iint_S (\vec{j} \wedge \vec{B}) d^2S dl = \left(\iint_S \vec{j} d^2S \right) dl \wedge \vec{B} \\ &= \left(\iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{d^2S} \right) \vec{dl} \wedge \vec{B} \\ &= I \vec{dl} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

La force qui s'exerce sur un conducteur fermé, parcouru par un courant permanent I, appelée **force de Laplace**, vaut

$$\boxed{\vec{F} = I \oint_{\text{circuit}} \vec{dl} \wedge \vec{B}}$$

Cette force s'applique sur un circuit qui est un solide. Dans ce cours, on ne considèrera que des circuits pour lesquels on pourra appliquer le principe fondamental de la mécanique, en

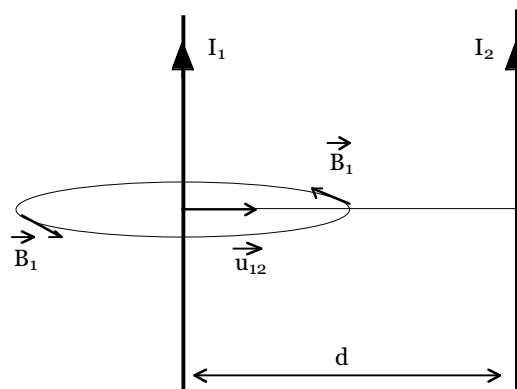
assimilant ceux-ci à des points matériels (leur centre d'inertie). Aucun élément de longueur ne sera privilégié : la force $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ s'applique au milieu de chaque portion dl .

Remarques :

1. Ayant été établie à partir d'équations valables uniquement en régime permanent, cette expression n'est vraie que pour un courant permanent. Il faut en particulier faire attention à intégrer la force sur le circuit fermé.
2. Pour des circuits fermés de forme complexe, il devient difficile de calculer la force magnétique à partir de l'expression de la force de Laplace. Dans ce cas, il vaut mieux utiliser une méthode énergétique (travaux virtuels, voir plus bas).
3. A partir de la force de Lorentz, qui est une force microscopique agissant sur des particules individuelles et qui ne travaille pas, nous avons obtenu une force macroscopique agissant sur un solide. Cette force est capable de déplacer le solide et donc d'exercer un travail non nul. Comment comprendre ce résultat ? Il faut interpréter la force de Laplace comme la résultante de l'action des particules sur le réseau cristallin du conducteur. C'est donc une sorte de réaction du support à la force de Lorentz agissant sur ses constituants chargés. Au niveau microscopique cela se traduit par la présence d'un champ électrostatique, **le champ de Hall**.
4. Bien que la force de Lorentz ne satisfasse pas le principe d'Action et de Réaction, la force de Laplace entre deux circuits, elle, le satisfait ! La raison profonde réside dans l'hypothèse du courant permanent parcourant les circuits (I le même, partout dans chaque circuit) : en régime permanent, il n'y a plus de problème de délai lié à la vitesse de propagation finie de la lumière.

III.2.2- Définition légale de l'Ampère

Considérons le cas de deux fils infinis parcourus par un courant I_1 et I_2 , situés à une distance d l'un de l'autre.



Grâce au théorème d'Ampère, il est alors facile de calculer le champ magnétique créé par chaque fil. La force par unité de longueur subie par le fil 2 à cause du champ \vec{B}_1 vaut

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1/2} &= I_2 d\vec{l} \wedge \vec{B}_1 = -I_1 d\vec{l} \wedge \vec{B}_2 = -d\vec{F}_{2/1} \\ &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{u}_{12} \end{aligned}$$

Cette force est attractive si les deux courants sont dans le même sens, répulsive sinon. Puisqu'il y a une force magnétique agissant sur des circuits parcourus par un courant, on peut

mesurer l'intensité de celui-ci. C'est par la mesure de cette force qu'a été établie la définition légale de l'Ampère (A) :

L'Ampère est l'intensité de courant passant dans deux fils parallèles, situés à 1 mètre l'un de l'autre, et produisant une attraction réciproque de $2 \cdot 10^{-7}$ Newtons par unité de longueur de fil.

II.2.3- Moment de la force magnétique exercée sur un circuit

Puisqu'un circuit électrique est un solide, il faut utiliser le formalisme de la mécanique du solide (2ème année de DEUG). On va introduire ici les concepts minimaux requis.

Soit un point P quelconque appartenant à un circuit électrique et le point O, le centre d'inertie de ce circuit. Si ce circuit est parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} , alors chaque élément de circuit $d\vec{l} = d\vec{OP}$, situé autour de P, subit une force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Le moment par rapport à O de la force de Laplace sur l'ensemble du circuit est alors

$$\vec{\Gamma} = \oint_{\text{circuit}} \vec{OP} \wedge d\vec{F}$$

Soient trois axes Δ_i , passant par le centre d'inertie O du circuit et engendrés par les vecteurs unitaires \vec{u}_i . Le moment de la force s'écrit alors $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i$. L'existence d'un moment non nul se traduit par la mise en rotation du circuit autour d'un ou plusieurs axes Δ_i . Autrement dit, par une modification de la « quantité de rotation » du solide, c'est à dire son moment cinétique. Le moment cinétique du solide par rapport à O est

$$\vec{J} = \oint_{\text{circuit}} \vec{OP} \wedge \vec{v} dm$$

où dm est la masse élémentaire située sur l'élément dOP, et \vec{v} sa vitesse. Dans tous les cas de figure étudiés dans ce cours, on admettra que le moment cinétique d'un circuit peut se mettre sous la forme

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i \vec{u}_i = [\mathbf{I}] \vec{\Omega}$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur instantané de rotation et I_i les 3 moments d'inertie du circuit par rapport aux 3 axes Δ_i ([I] est la matrice d'inertie, ici diagonale). Le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ_i est défini par

$$I_i = \int_{\text{circuit}} dm r_i^2$$

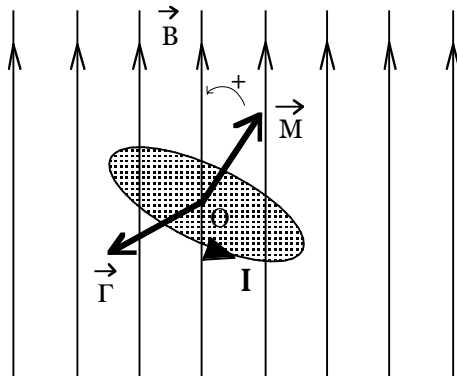
où r_i est la distance d'un point P quelconque du circuit à l'axe Δ_i . La dynamique d'un circuit soumis à plusieurs moments de forces extérieures est donnée par le théorème du moment cinétique (pour un solide)

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}$$

Dans le cas d'un circuit tournant autour d'un seul axe Oz, avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z = \theta' \vec{u}_z$ et un moment d'inertie I_z constant, on obtient l'équation simplifiée suivante

$$I_z \theta'' = \sum \Gamma_z$$

II.2.4- Exemple du dipôle magnétique



Considérons le cas simple d'un dipôle magnétique, c'est à dire d'une spire parcourue par un courant I permanent, plongé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} constant (soit dans tout l'espace, soit ayant une variation spatiale sur une échelle bien plus grande que la taille de la spire).

La force de Laplace s'écrit alors

$$\vec{F} = \oint_{\text{spire}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \left(\oint_{\text{spire}} d\vec{l} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Un champ magnétique constant ne va donc engendrer aucun mouvement de translation de la spire. Le moment de la force de Laplace par rapport au centre d'inertie O de la spire s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \oint_{\text{spire}} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\text{spire}} \overrightarrow{OP} \wedge (I d\overrightarrow{OP} \wedge \vec{B}) \\ &= I \oint_{\text{spire}} d\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) - I \vec{B} \cdot \oint_{\text{spire}} (\overrightarrow{OP} \cdot d\overrightarrow{OP}) = I \oint_{\text{spire}} d\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{B}) - 0 \\ &= I \oint_{\text{spire}} (dx \vec{i} + dy \vec{j}) \cdot (xB_x + yB_y) = IB_y \vec{i} \oint_{\text{spire}} ydx + IB_x \vec{j} \oint_{\text{spire}} xdy \\ &= (IB_x \vec{j} - IB_y \vec{i}) \oint_{\text{spire}} xdy = (IB_x \vec{j} - IB_y \vec{i}) S \\ &= IS \vec{n} \wedge \vec{B} \quad (\text{où } \vec{n} = \vec{k}, \text{ voir calcul du dipôle}) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}}$$

Malgré une résultante des forces nulle, le champ magnétique exerce un moment qui va avoir tendance à faire tourner la spire sur elle-même, de telle sorte que son moment magnétique dipolaire \vec{M} s'aligne dans la direction de \vec{B} .

Remarques :

1. Cette expression n'est valable que dans le cas d'un dipôle.
2. On utilise souvent le terme « couple magnétique » pour décrire le moment des forces magnétiques sur un circuit, ceci pour éviter de confondre avec le moment magnétique dipolaire.
3. Les matériaux ferromagnétiques sont ceux pour lesquels on peut assimiler leurs atomes à des dipôles alignés dans le même sens. Mis en présence d'un champ magnétique externe, ils auront tendance à se mettre dans la direction du champ, ce qui va produire un mouvement macroscopique d'ensemble.

II.2.5- Complément : force de Laplace et principe d'Action et de Réaction

On va démontrer que le principe d'Action et de Réaction est bien vérifié pour la force de Laplace s'exerçant entre deux circuits C_1 et C_2 quelconques, parcourus par des courants permanents I_1 et I_2 . La force exercée par C_1 sur C_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1/2} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{P}_2 \wedge \vec{B}_1 = \oint_{C_2} I_2 d\vec{P}_2 \wedge \left[\oint_{C_1} \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{d\vec{P}_1 \wedge \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2} \right] = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} d\vec{P}_2 \wedge \frac{d\vec{P}_1 \wedge \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2}$$

où P_1 (resp. P_2) est un point quelconque de C_1 (resp. C_2) et $\vec{P}_1 \vec{P}_2 = P_1 P_2 \vec{u}_{12}$. La force exercée par C_2 sur C_1 vaut

$$\vec{F}_{2/1} = \oint_{C_1} I_1 d\vec{P}_1 \wedge \vec{B}_2 = \oint_{C_1} I_1 d\vec{P}_1 \wedge \left[\oint_{C_2} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{P}_2 \wedge \vec{u}_{21}}{P_2 P_1^2} \right] = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} d\vec{P}_1 \wedge \frac{d\vec{P}_2 \wedge \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2}$$

puisque $\vec{u}_{21} = -\vec{u}_{12}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} d\vec{P}_2 \wedge (d\vec{P}_1 \wedge \vec{u}_{12}) &= d\vec{P}_1 (d\vec{P}_2 \cdot \vec{u}_{12}) - \vec{u}_{12} (d\vec{P}_2 \cdot d\vec{P}_1) \\ d\vec{P}_1 \wedge (d\vec{P}_2 \wedge \vec{u}_{12}) &= d\vec{P}_2 (d\vec{P}_1 \cdot \vec{u}_{12}) - \vec{u}_{12} (d\vec{P}_1 \cdot d\vec{P}_2) \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de calculer le premier terme puisque le second est identique dans les deux expressions des forces. Mathématiquement, les expressions

$$\oint_{C_1} \oint_{C_2} [] = \oint_{C_2} \oint_{C_1} []$$

sont effectivement équivalentes si ce qui se trouve dans le crochet (la fonction à intégrer) est symétrique par rapport aux variables de chacune des deux intégrales. Mais dans celle de gauche, le point P_1 reste d'abord constant lors de l'intégrale portant sur C_2 , tandis que dans celle de droite, c'est le point P_2 qui est maintenu constant lors de l'intégration sur C_1 .

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \frac{d\vec{P}_1 (d\vec{P}_2 \cdot \vec{u}_{12})}{P_1 P_2^2} &= d\vec{P}_1 \cdot \oint_{C_2} \frac{d\vec{P}_2 \cdot \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2} \\ \oint_{C_1} \frac{d\vec{P}_2 (d\vec{P}_1 \cdot \vec{u}_{12})}{P_1 P_2^2} &= d\vec{P}_2 \cdot \oint_{C_1} \frac{d\vec{P}_1 \cdot \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2} \end{aligned}$$

Posant $\vec{r} = \vec{P}_1 \vec{P}_2$ et remarquant que $d\vec{P}_2 = d\vec{P}_1 \vec{P}_2 + d\vec{P}_1$, on obtient

$$\oint_{C_2} \frac{d\vec{P}_2 \cdot \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2} = \oint_{C_2} \frac{d\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^3} = \oint_{C_2} \frac{d(r^2)}{2r^3} = 0$$

puisque l'on fait un tour complet sur C_2 et l'on revient donc au point de départ. Le résultat est évidemment le même pour l'intégrale portant sur C_1 . En résumé, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{F}_{1/2} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} d\vec{P}_2 \wedge \frac{d\vec{P}_1 \wedge \vec{u}_{12}}{P_1 P_2^2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \vec{u}_{12} \cdot (d\vec{P}_2 \cdot d\vec{P}_1) = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \vec{u}_{12} \cdot (d\vec{P}_1 \cdot d\vec{P}_2) \\ &= -\vec{F}_{2/1} \end{aligned}$$

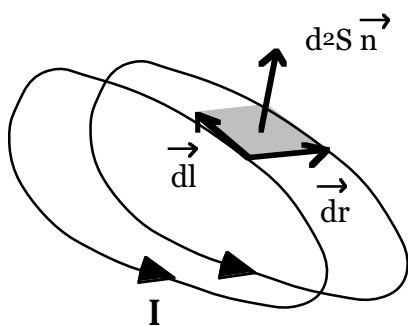
Ceci achève la démonstration.

III.3- Energie potentielle d'interaction magnétique

III.3.1- Le théorème de Maxwell

Un circuit électrique parcouru par un courant produit un champ magnétique engendrant une force de Laplace sur un deuxième circuit, si celui-ci est lui-même parcouru par un courant. Chaque circuit agit sur l'autre, ce qui signifie qu'il y a une énergie d'origine magnétique mise en jeu lors de cette interaction. D'une façon générale, un circuit parcouru par un courant permanent placé dans un champ magnétique ambiant possède une énergie potentielle d'interaction magnétique.

Pour la calculer, il suffit d'évaluer le travail de la force de Laplace lors d'un déplacement virtuel de ce circuit (méthode des travaux virtuels, comme en électrostatique).



Considérons un élément \vec{dl} d'un circuit filiforme, orienté dans la direction du courant I . Cet élément subit une force de Laplace \vec{dF} . Pour déplacer le circuit d'une quantité \vec{dr} , cette force doit fournir un travail

$$\begin{aligned} d^2W &= \vec{dF} \cdot \vec{dr} \\ &= I(\vec{dl} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dr} \\ &= I(\vec{dr} \wedge \vec{dl}) \cdot \vec{B} \\ &= Id^2\vec{S} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

où $d^2\vec{S}$ est la surface élémentaire décrite lors du déplacement de l'élément de circuit (les trois vecteurs $\vec{dr}, \vec{dl}, \vec{n}$ forment un trièdre direct). On reconnaît alors l'expression du flux magnétique à travers cette surface balayée, appelé flux coupé. Pour l'ensemble du circuit, le travail dû à un déplacement élémentaire \vec{dr} est

$$dW = \oint_{\text{circuit}} d^2W = \oint_{\text{circuit}} Id^2\Phi_c = Id\Phi_c$$

Théorème de Maxwell :

Le déplacement d'un circuit électrique fermé dans un champ magnétique extérieur engendre un travail des forces magnétiques égal au produit du courant traversant le circuit par le flux coupé par celui-ci lors de son déplacement.

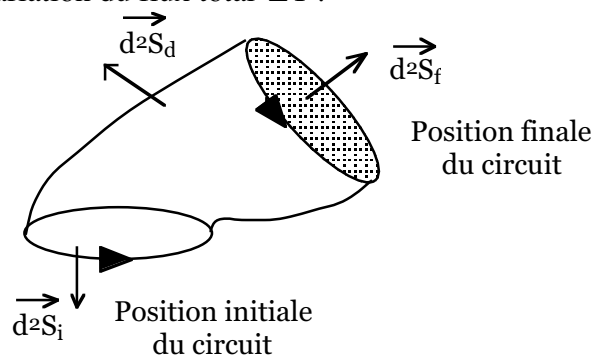
$$\boxed{W = I\Phi_c}$$

Commentaires sur la notion de Flux coupé

Le nom de flux coupé provient de notre représentation du champ magnétique sous forme de lignes de champ. Lors du déplacement du circuit, celui-ci va en effet passer à travers ces lignes, donc les « couper ».

La notion de flux coupé est très importante car elle permet parfois considérablement de simplifier les calculs. Par ailleurs, dans le cas d'un champ magnétique constant dans le temps,

nous allons démontrer que le flux coupé par le circuit Φ_c lors de son déplacement est exactement égal à la variation du flux total $\Delta\Phi$.



Soit un circuit C orienté, parcouru par un courant I et déplacé dans un champ magnétique extérieur. Ce circuit définit à tout instant une surface S s'appuyant sur C . Lors du déplacement de sa position initiale vers sa position finale, une surface fermée $\Sigma = S_i + S_f + S_d$ est ainsi décrite, où S_d est la surface balayée lors du déplacement. On choisit d'orienter les normales à chaque surface vers l'extérieur. La conservation du flux magnétique impose alors

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{S_i} + \Phi_{S_f} + \Phi_{S_d} = 0$$

c'est à dire

$$\Phi_{S_d} = -\Phi_{S_i} - \Phi_{S_f}$$

Si on réoriente les normales par référence au courant, on a $\Phi_{S_f} \rightarrow \Phi_{S_f}$, $\Phi_{S_i} \rightarrow -\Phi_{S_i}$ et $\Phi_{S_d} \rightarrow \pm \Phi_{S_d}$. Autant il est possible de définir correctement et en toute généralité le signe des flux totaux, celui du flux à travers la surface balayée, autrement dit, le flux coupé, dépend de chaque situation. Cependant, on a donc bien

$$\boxed{\Phi_c = \Delta\Phi}$$

qui est vérifié algébriquement. Ne pas oublier que ce raisonnement n'est valable que pour un champ magnétique extérieur statique (pas de variation temporelle du champ au cours du déplacement du circuit).

III.3.2- Energie potentielle d'interaction magnétique

Considérons un circuit électrique parcouru par un courant permanent I et placé dans un champ magnétique statique. Le circuit est donc soumis à la force de Laplace : cela signifie qu'il est susceptible de se déplacer et donc de développer une vitesse. On pourra calculer cette vitesse en appliquant, par exemple, le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = W = I\Delta\Phi$. Mais d'où provient cette énergie ?

Si l'on en croit le principe de conservation de l'énergie, cela signifie que le circuit possède un réservoir d'énergie potentielle W_m , lié à la présence du champ magnétique extérieur. L'énergie mécanique du circuit étant $E = E_c + W_m$, on obtient $dW_m = -dW$.

L'énergie potentielle magnétique d'un circuit parcouru par un courant permanent I et placé dans un champ magnétique extérieur est donc

$$\boxed{W_m = -I\Phi + \text{Constante}}$$

La valeur de la constante, comme pour toute énergie potentielle d'interaction, est souvent choisie arbitrairement nulle à l'infini.

III.3.3- Expressions générales de la force et du couple magnétiques

L'existence d'une énergie potentielle se traduit par une action possible (reconversion de cette énergie). Ainsi, la résultante $\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} d\vec{F}$ des forces magnétiques exercées sur le circuit est donnée par

$$dW_m = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W_m}{\partial x_i} dx_i = -dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\sum_{i=1}^3 F_i dx_i$$

où les dx_i mesurent les déplacements (translations) dans les trois directions de l'espace par rapport au centre d'inertie du circuit (là où s'applique la force magnétique). On obtient ainsi l'expression générale de la force de Laplace agissant sur un circuit parcouru par un courant permanent, c'est à dire

$$F_i = -\frac{\partial W_m}{\partial x_i}$$

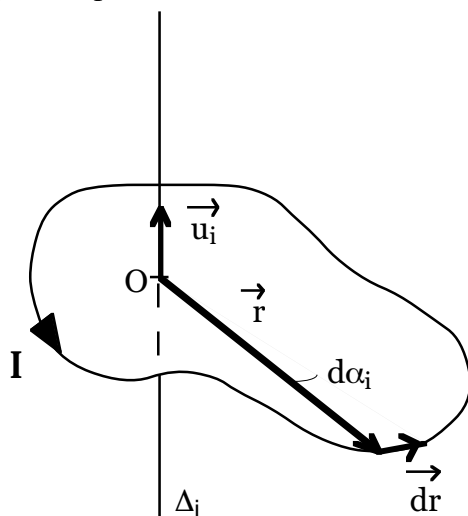
ou, sous forme vectorielle

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad } W_m = I \text{ grad } \Phi}$$

Remarques :

1. La force totale (s'exerçant donc sur le centre d'inertie du circuit) a tendance à pousser le circuit vers les régions où le flux sera maximal.
2. Cette expression est valable uniquement pour des courants permanents. Noter qu'elle s'applique néanmoins pour des circuits déformés et donc pour lesquels il y aura aussi une modification du flux sans réel déplacement du circuit.

On peut faire le même raisonnement dans le cas d'un mouvement de rotation pure du circuit. Prenons le cas général de rotations d'angles infinitésimaux $d\alpha_i$ autour de trois axes Δ_i , passant par le centre d'inertie O du circuit et engendrés par les vecteurs unitaires \vec{u}_i .



Soit le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\vec{u}$ reliant un point P quelconque d'un circuit et le point O. La vitesse du point P s'écrit en toute généralité (voir cours de mécanique)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$$

où le premier terme correspond à une translation pure et le second à une rotation pure, décrite par le vecteur

$$\text{instantané de rotation } \vec{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \frac{d\alpha_i}{dt} \vec{u}_i.$$

L'expression générale du moment de la force magnétique par rapport à O est $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i$.

Le travail dû à la force de Laplace lors d'une rotation pure ($r = OP$ reste constant) s'écrit

$$\begin{aligned}
 dW &= \oint_{\text{circuit}} \vec{dF} \cdot \vec{dr} = \oint_{\text{circuit}} \vec{dF} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{r} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \left(\oint_{\text{circuit}} \vec{r} \wedge \vec{dF} \right) = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{\Gamma} \\
 &= Id\Phi \\
 &= \sum_{i=1}^3 I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i
 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}}$$

Autrement dit, le moment de la force magnétique par rapport à un axe Δ_i passant par le centre d'inertie O du circuit, dépend de la variation de flux lors d'une rotation du circuit autour de cet axe.

Exemple : Le dipôle

En supposant que le champ magnétique extérieur est constant à l'échelle d'un dipôle de moment magnétique dipolaire $\vec{M} = IS\vec{n}$, on obtient un flux $\Phi = \vec{B} \cdot S\vec{n}$.

La force magnétique totale s'écrit alors

$$\vec{F} = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{\nabla} (IS\vec{n} \cdot \vec{B})$$

c'est à dire

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{M} \cdot \vec{B})}$$

Le moment de la force magnétique (couple magnétique) s'écrit

$$\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = I \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\vec{B} \cdot \vec{n} S) = \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial IS\vec{n}}{\partial \alpha_i} \right) = \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i}$$

Or, le moment magnétique dipolaire varie de la façon suivante lors d'une rotation

$$d\vec{M} = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{M} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i$$

et on obtient donc

$$\Gamma_i = \vec{B} \cdot \left(\vec{u}_i \wedge \vec{M} \right) = \left(\vec{M} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{u}_i$$

c'est à dire l'expression vectorielle

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}}$$

Remarquer que ce calcul est bien plus facile que le calcul direct effectué à la section II.2.4.

III.3.4- La règle du flux maximum

Un solide est dans une position d'équilibre stable si les forces et les moments auxquels il est soumis tendent à le ramener vers cette position s'il en est écarté. D'après le théorème de Maxwell on a

$$dW = Id\Phi = I(\Phi_f - \Phi_i) = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Si la position est stable, cela signifie que l'opérateur doit fournir un travail, autrement dit un déplacement \vec{dr} dans le sens contraire de la force (qui sera une force de rappel), donc $dW < 0$ ou $\Phi_f < \Phi_i$.

Un circuit tend toujours à se placer dans des conditions d'équilibre stable, où le flux du champ est maximum.

Cette règle est très utile pour se forger une intuition des actions magnétiques.

Chapitre IV- Induction électromagnétique

IV.1- Les lois de l'induction

IV.1.1- L'approche de Faraday

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés essentiellement à la création d'un champ magnétique à partir d'un courant permanent. Ceci fut motivé par l'expérience de Oersted. A la même époque, le physicien anglais Faraday était préoccupé par la question inverse : puisque ces deux phénomènes sont liés, comment produire un courant à partir d'un champ magnétique ?

Il fit un certain nombre d'expériences qui échouèrent car il essayait de produire un courant permanent. En fait, il s'aperçut bien de certains effets troublants, mais ils étaient toujours transitoires.

Exemple d'expérience : on enroule sur un même cylindre deux fils électriques. L'un est relié à une pile et possède un interrupteur, l'autre est seulement relié à un galvanomètre, permettant ainsi de mesurer tout courant qui serait engendré dans ce second circuit. En effet, Faraday savait que lorsqu'un courant permanent circule dans le premier circuit, un champ magnétique serait engendré et il s'attendait donc à voir apparaître un courant dans le deuxième circuit. En fait rien de tel n'était observé : lorsque l'interrupteur était fermé ou ouvert, rien ne se passait. Par contre, lors de son ouverture ou de sa fermeture, une déviation fugace de l'aiguille du galvanomètre pouvait être observée (cela n'a pas été perçu immédiatement). Une telle déviation pouvait également s'observer lorsque, un courant circulant dans le premier circuit, on déplaçait le deuxième circuit.

Autre expérience : prenons un aimant permanent et plaçons le à proximité d'une boucle constituée d'un fil conducteur relié à un galvanomètre. Lorsque l'aimant est immobile, il n'y a pas de courant mesurable dans le fil. Par contre, lorsqu'on déplace l'aimant, on voit apparaître un courant dont le signe varie selon qu'on approche ou qu'on éloigne l'aimant. De plus, ce courant est d'autant plus important que le déplacement est rapide.

Ces deux types d'expériences ont amené Faraday à écrire ceci : « *Quand le flux du champ magnétique à travers un circuit fermé change, il apparaît un courant électrique.* »

Dans les deux expériences, si on change la résistance R du circuit, alors le courant I apparaissant est également modifié, de telle sorte que $e=RI$ reste constant. Tous les faits expérimentaux mis en évidence par Faraday peuvent alors se résumer ainsi :

Loi de Faraday : la variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre une fém induite

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{expression I})$$

L'induction électromagnétique est donc un phénomène qui dépend intrinsèquement du temps et, au sens strict, sort du cadre de la magnétostatique (étude des phénomènes magnétiques)

stationnaires). Nous allons toutefois l'étudier, l'induction étant l'équivalent magnétique de l'influence électrostatique.

IV.1.2- La loi de Faraday

Posons-nous la question de Faraday. Comment crée-t-on un courant ?

Un courant est un déplacement de charges dans un matériau conducteur. Ces charges sont mises en mouvement grâce une différence de potentiel (ddp) qui est maintenue par une force électromotrice ou fém (elle s'exprime donc en Volts). Une pile, en convertissant son énergie chimique pendant un instant dt , fournit donc une puissance P (travail W par unité de temps) modifiant l'énergie cinétique des dQ porteurs de charge et produisant ainsi un courant I .

Soit P_q la puissance nécessaire pour communiquer une vitesse \vec{v} à une particule de charge q . Sachant que dans un conducteur il y a n porteurs de charge par unité de volume, la puissance totale P que doit fournir le générateur (par ex une pile) est

$$\begin{aligned} P &= \iiint_V nP_q dV = \oint_{\text{circuit}} dl \iint_{\text{section}} nP_q dS = \oint_{\text{circuit}} dl \iint_{\text{section}} n\vec{F} \cdot \vec{v} dS \\ &= \oint_{\text{circuit}} \iint_{\text{section}} (nq\vec{v} \cdot \vec{dS}) \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{q} = \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{q} \iint_{\text{section}} (\vec{j} \cdot \vec{dS}) \\ &= I \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{F} \cdot \vec{dl}}{q} = Ie \end{aligned}$$

On pose donc que la fém d'un circuit est

$$e = \frac{P}{I} = \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{F}}{q} \cdot \vec{dl}$$

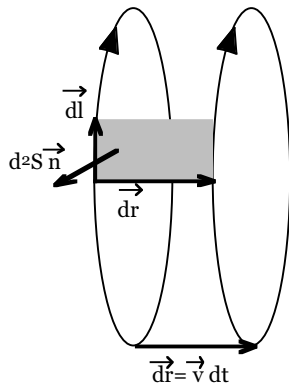
où \vec{F} est la force qui s'exerce sur les charges mobiles q . Or, la force de Coulomb est incapable de produire une fém, puisque la circulation du champ **électrostatique** (donc le travail) est nulle sur un circuit fermé,

$$e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_s \cdot \vec{dl} = V(A) - V(A) = 0$$

Pour créer un courant continu dans un circuit fermé, il faut donc un champ électromoteur dont la circulation le long du circuit ne soit pas nulle. L'expérience de Faraday montre donc que c'est l'existence d'un champ magnétique qui permet l'apparition d'un courant. Cela signifie que la force de Lorentz doit être responsable de l'apparition d'une fém, c'est à dire

$$e = \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl} \quad (\text{expression 2})$$

Reprenons maintenant l'expérience qui consiste à déplacer un circuit fermé avec une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} et un champ électrique \vec{E}_s statiques. Que se passe-t-il pendant un instant dt ?



La force de Lorentz (due à ce mouvement d'ensemble) agissant sur chaque particule q du conducteur s'écrit $\vec{F} = q(\vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B})$, fournissant ainsi une fém

$$e = \oint_{\text{circuit}} (\vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} (\vec{v} dt \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B}$$

$$= -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} d^2\vec{S} \vec{n} \cdot \vec{B}$$

où $d^2\vec{S} \vec{n}$ est la surface orientée élémentaire, décrite lors du déplacement $\vec{v} dt$ du circuit. On reconnaît alors l'expression du flux coupé à travers cette surface élémentaire. On a donc

$$e = -\frac{1}{dt} \oint_{\text{circuit}} d^2\Phi_c = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

puisque la variation du flux coupé est égale à celle du flux total à travers le circuit (conservation du flux magnétique, cf théorème de Maxwell).

Attention au sens de $d\vec{l}$: il doit être cohérent avec $d\Phi_c = d\Phi$.

Nous venons de démontrer la loi de Faraday dans le cas d'un circuit rigide, déplacé dans un champ électromagnétique statique. Nous avons vu apparaître naturellement l'expression du flux coupé. En fait, la seule chose qui compte, c'est l'existence d'un mouvement d'ensemble du tout ou d'une partie du circuit (revoir démonstration pour s'en convaincre). Ainsi, l'expression de la fém induite

$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt} \quad (\text{expression 3})$$

reste valable pour un circuit déformé et/ou déplacé dans un champ magnétique statique. Cette démonstration s'est faite à partir de la force de Lorentz et est donc a priori indépendante du référentiel choisi.

Première difficulté

Prenons l'expérience de la roue de Barlow. L'appareil consiste en un disque métallique mobile autour d'un axe fixe, plongeant dans un champ magnétique et touchant par son bord extérieur une cuve de mercure. Un circuit électrique est ainsi établi entre la cuve et l'axe et on ferme ce circuit sur un galvanomètre permettant de mesurer tout courant. Lorsqu'on fait tourner le disque, un courant électrique est bien détecté, en cohérence avec la formule ci-dessus. Cependant, il n'y a pas de variation du flux total à travers la roue ! Ce résultat expérimental semble donc contradictoire avec $e = -\frac{d\Phi}{dt}$!

Comment comprendre cela ? Même si, globalement, il n'y a pas de variation du flux total, il n'en reste pas moins que les charges du disque conducteur se déplacent dans un champ magnétique. On pourrait donc faire fi de l'égalité $d\Phi_c = d\Phi$ et utiliser l'expression 3 et calculer ainsi une fém non nulle.

Cependant, la cause physique fondamentale de son existence réside dans l'expression 2. Il faut donc utiliser les expressions 1 et 3 uniquement comme des moyens parfois habiles de calculer cette fém.

Deuxième difficulté

Si on se place maintenant dans le référentiel du circuit rigide, on verra un champ magnétique variable (c'est le cas, par ex, lorsqu'on approche un aimant d'un circuit immobile). Dans ce cas, le flux coupé est nul et on devrait donc avoir une fém nulle, ce qui n'est pas le cas d'après l'expérience de Faraday. Ce résultat expérimental semble cette fois-ci en contradiction avec

$$e = - \frac{d\Phi_c}{dt} !$$

Résolution de ce paradoxe

Puisque, dans ce dernier cas, le champ magnétique dépend du temps, il n'y a plus de lien direct entre le flux coupé et le flux total à travers le circuit. Si on revient à l'expression 2, on voit que dans le référentiel du circuit la force « magnétique » est nulle et il ne reste plus que le terme « électrique ». Or, nous avons déjà vu que ce champ électrique n'est pas simplement constitué d'un champ électrostatique. Si on rassemble ce que nous dit d'un côté la théorie et de l'autre l'expérience, on obtient

$$\begin{aligned} e &= - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{expérience de Faraday}) \\ &= \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad (\text{notre théorie}) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{circuit}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Autrement dit, la seule façon de concilier notre théorie avec l'expérience, c'est d'admettre *qu'une variation temporelle du champ magnétique engendre un champ électrique*.

Nous avons ici un nouvel effet physique, totalement indépendant de tout ce que nous avons vu jusqu'à présent : l'induction est un phénomène électromagnétique.

Résumé/Bilan

Que se passe-t-il si on déplace un circuit (rigide ou non) dans un champ magnétique variable ? Quelle expression faut-il utiliser ? En fait, il faut revenir à la force de Lorentz dans le cas général de champs variables. On aura alors une fém induite

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} - \frac{d\Phi_c}{dt} \\ &= - \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_{\text{circuit}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \frac{d\Phi_c}{dt} \end{aligned}$$

Le premier terme décrit la circulation non nulle d'un champ électromoteur, associé à la variation temporelle du champ magnétique, tandis que le deuxième terme décrit la présence d'un flux coupé dû au déplacement du circuit et/ou à sa déformation.

Remarque importante :

Dans le calcul ci-dessus, nous n'avons pris en compte que la vitesse communiquée au circuit et non la vitesse totale des particules. En effet, s'il existe un courant, cela signifie que les particules chargées se déplacent à l'intérieur du circuit. En fait, la force magnétique associée à

cette composante de la vitesse est, en régime quasi-statique, exactement compensée par le champ électrostatique de Hall.

IV.1.3- La loi de Lenz

Enoncé : *l'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.*

Cette loi est, comme la règle du flux maximum, déjà contenue dans les équations et donc n'apporte rien de plus, hormis une intuition des phénomènes physiques. En l'occurrence, la loi de Lenz n'est que l'expression du signe « - » contenu dans la loi de Faraday.

Exemple : si on approche un circuit du pôle nord d'un aimant, le flux augmente et donc la fém induite est négative. Le courant induit sera alors négatif et produira lui-même un champ magnétique induit opposé à celui de l'aimant. Deux conséquences :

1. L'augmentation du flux à travers le circuit est amoindrie.
2. Il apparaît une force de Laplace $\vec{F} = I \overline{\text{grad}} \Phi$ négative, s'opposant à l'approche de l'aimant.

Ce signe « - » dans la loi de Faraday (la loi de Lenz) décrit le fait que dans des conditions normales, il n'y a pas d'emballement possible (ex, courant ne faisant qu'augmenter).

Remarque sur la convention de signe

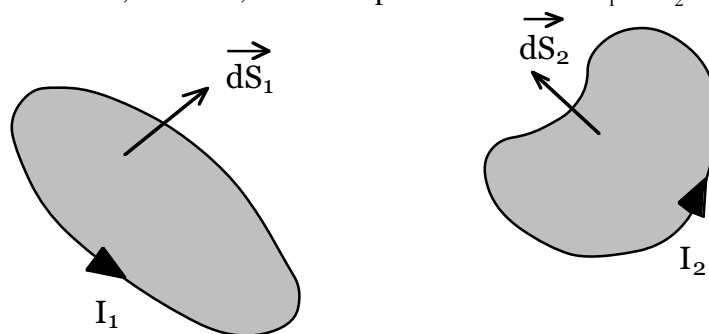
La détermination du sens du courant induit se fait de la façon suivante :

1. On se choisit arbitrairement un sens de circulation le long du circuit.
2. Ce sens définit, grâce à la règle du bonhomme d'Ampère, une normale au circuit.
3. Le signe du flux est alors déterminé en faisant le produit scalaire du champ magnétique par cette normale.
4. En utilisant ensuite la loi de Faraday, on obtient la valeur et le signe de la fém.
5. Enfin, le courant est obtenu à partir de la loi d'Ohm (son signe peut aussi être directement connu en utilisant la loi de Lenz).

IV.2- Induction mutuelle et auto-induction

IV.2.1- Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Soient deux circuits fermés, orientés, traversés par des courants I_1 et I_2 .



Le premier crée un champ magnétique \vec{B}_1 dont on peut calculer le flux Φ_{12} à travers le deuxième circuit,

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot d\vec{S}_2 \right] I_1$$

où P est un point quelconque du circuit C_1 (l'élément de longueur valant $d\vec{l} = d\vec{OP}$) et M un point quelconque de la surface délimitée par C_2 , à travers laquelle le flux est calculé. De même, on a pour le flux créé par le circuit C_2 sur le circuit C_1

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot d\vec{S}_1 \right] I_2$$

où P est cette fois-ci un point du circuit C_2 et M un point de la surface délimitée par C_1 , à travers laquelle le flux est calculé. Les termes entre crochets dépendent de la distance entre les deux circuits et de facteurs uniquement géométriques liés à la forme de chaque circuit. Comme, dans le cas général, ils sont difficiles voire impossible à calculer, il est commode de poser

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1$$

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2$$

Le signe des coefficients dépend de l'orientation respective des circuits et suit la même logique que pour le courant induit. D'après les choix pris pour le sens de circulation le long de chaque circuit (voir figure), les flux sont négatifs pour des courants I_1 et I_2 positifs. Donc les coefficients sont négatifs.

Théorème : Le coefficient d'induction mutuelle ou inductance mutuelle (unités : Henry, H)

$$\boxed{M = M_{12} = M_{21}}$$

Il met en jeu une énergie potentielle d'interaction magnétique entre les deux circuits

$$\boxed{W_m = -MI_1 I_2 + \text{Constante}}$$

Il nous faut démontrer que les inductances sont bien les mêmes pour chaque circuit. La raison profonde réside dans le fait qu'ils sont en interaction, donc possèdent chacun la même énergie potentielle d'interaction. Si on déplace C_2 , il faut fournir un travail

$$dW_2 = I_2 d\Phi_{12} = I_2 I_1 dM_{12}$$

Mais ce faisant, on engendre une variation du flux à travers C_1 et donc un travail

$$dW_1 = I_1 d\Phi_{21} = I_2 I_1 dM_{21}$$

Puisqu'ils partagent la même énergie d'interaction (chaque travail correspond au mouvement relatif de C_1 par rapport à C_2), on a $dW_1 = dW_2$ et donc

$$dM_{12} = dM_{21} \Rightarrow M_{12} = M_{21} + \text{Constante}$$

Cette constante d'intégration doit être nulle puisque, si on éloigne les circuits l'un de l'autre à l'infini, l'interaction tend vers zéro et donc les inductances s'annulent.

IV.2.2- Auto-induction

Si on considère un circuit isolé, parcouru par un courant I , on s'aperçoit qu'on peut produire le même raisonnement que ci-dessus. En effet, le courant I engendre un champ magnétique dans tout l'espace et il existe donc un flux de ce champ à travers le circuit lui-même,

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot d\vec{S} \right] I$$

qu'on peut simplement écrire

$$\boxed{\Phi = LI}$$

où L est le coefficient d'auto-induction ou auto-inductance (ou self), exprimé en Henry. Il ne dépend que des propriétés géométriques du circuit et est nécessairement positif (alors que le signe de l'inductance mutuelle dépend de l'orientation d'un circuit par rapport à l'autre).

IV.3- Régimes variables

IV.3.1- Définition du régime quasi-statique

Avec les lois que nous avons énoncé jusqu'à présent, nous sommes en mesure d'étudier certains régimes variables. En effet, tous les raisonnements basés sur la notion d'un champ (électrique ou magnétique) constant au cours du temps peuvent aisément être appliqués à des systèmes physiques variables (champs dépendant du temps), pourvu que cette variabilité s'effectue sur des échelles de temps longues par rapport au temps caractéristique d'ajustement du champ. Voici tout de suite un exemple concret.

La plupart des lois de la magnétostatique supposent un courant permanent, c'est à dire le même dans le tout le circuit. Lorsqu'on ferme un interrupteur, un signal électromagnétique se propage dans tout le circuit et c'est ainsi que peut s'établir un courant permanent : cela prend un temps de l'ordre de l/c , où l est la taille du circuit et c la vitesse de la lumière. Si l'on a maintenant un générateur de tension sinusoïdale de période T , alors on pourra malgré tout utiliser les relations déduites de la magnétostatique si

$$T \gg l/c$$

Ainsi, bien que le courant soit variable, la création d'un champ magnétique obéira à la loi de Biot et Savart tant que le critère ci-dessus reste satisfait. Ce type de régime variable est également appelé régime quasi-statique.

IV.3.2- Forces électromotrices (fém) induites

Considérons tout d'abord le cas d'un circuit isolé rigide (non déformable). Nous avons vu qu'une fém induite apparaissait dès lors que le flux variait. D'après la loi de Faraday et l'expression ci-dessus, cette fém vaudra

$$e = -L \frac{dI}{dt}$$

(L étant constant pour un circuit rigide). En régime variable, si le courant diminue, on verra donc apparaître une fém positive engendrant un courant induit qui va s'opposer à la

décroissance du courant dans le circuit. La self d'un circuit tend donc à atténuer les variations de courant.

Dans les schémas électriques la self est symbolisée par une bobine. C'est en effet la façon la plus commode de produire une self : plus le nombre de spires est élevé et plus grande sera l'auto-inductance L (le cylindre sur lequel on fait l'enroulement est d'ailleurs constitué de fer doux, matériau ferromagnétique, pour amplifier le champ, donc L). Ceci se comprend aisément. La fém s'écrit en effet

$$e = \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = N \int_{\text{spire}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

ce qui d'ailleurs justifie la règle

$$\Phi_{\text{circuit}} = N \Phi_{\text{spire}}$$

Si l'on considère maintenant deux circuits couplés C_1 et C_2 , alors l'expression des flux totaux à travers ces circuits s'écrit

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 I_2 + M I_1 \end{cases}$$

On aura donc en régime variable des fém induites dans chaque circuit

$$\begin{cases} e_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

Ceci peut avoir des conséquences importantes (parfois désastreuses), comme l'apparition soudaine d'un courant dans un circuit fermé non alimenté. En effet, supposons que I_2 soit nul à un instant et qu'il y ait à ce moment là une variation de courant I_1 . L'induction mutuelle va alors engendrer un courant I_2 induit, qui va à son tour modifier I_1 .

IV.3.3- Retour sur l'énergie magnétique

Dans le Chapitre III, nous avons vu que l'énergie magnétique d'un circuit parcouru par un courant permanent I placé dans un champ magnétique extérieur B s'écrit $W_m = -I\Phi$. Or, un tel circuit produit un flux $\Phi = LI$ à travers lui-même, ce qui semblerait impliquer une énergie magnétique... négative. Etrange. D'autant plus que nous avons interprété cette énergie comme une énergie potentielle d'interaction entre le circuit et le champ extérieur. Peut-on parler d'énergie d'interaction du circuit avec lui-même ? Manifestement, cela n'a pas de sens.

Il nous faut raisonner autrement. Tout effet a nécessité un travail (hélas) et est donc porteur d'énergie. Un conducteur portant une charge électrique Q possède une énergie électrostatique

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

où C est la capacité du conducteur. Cette énergie est stockée dans (portée par) le champ électrostatique. Nous avons calculé cette énergie en évaluant le travail fourni pour constituer ce réservoir de charges. Il nous faut faire un raisonnement similaire ici.

S'il existe un courant I , c'est qu'un générateur a fourni une puissance $P = ei$ pendant un certain temps. Cela signifie que le circuit (décrit par une self L) a reçu une puissance

$$P_m = -ei = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right)$$

puisque celui-ci crée un champ magnétique (on néglige ici toute dissipation). Partant d'un courant nul à $t=0$, on obtient après un temps t un courant I et une énergie emmagasinée

$$W_m = \int_0^t P_m dt = \frac{1}{2} LI^2$$

Cette énergie est stockée dans le champ magnétique qui est créé par un courant d'amplitude I , circulant dans un circuit de self L . Le facteur $1/2$ provient de l'action du circuit sur lui-même. Si l'on prend en compte la dissipation (voir plus bas), on obtient que l'énergie nécessaire à la création d'un courant I (ou la génération du champ B associé) doit être supérieure.

Si l'on place maintenant ce circuit dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} , l'énergie magnétique totale sera

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 - I\Phi_{ext}$$

où l'on a supposé implicitement que l'existence du circuit ne perturbe pas la source du champ \vec{B}_{ext} (celui-ci n'est pas affecté par des variations éventuelles du courant circulant dans le circuit). En général, de tels cas correspondent à une énergie d'interaction dominante sur l'énergie emmagasinée.

Prenons maintenant le cas de deux circuits en interaction. Chacun est parcouru par un courant permanent et engendre ainsi un champ magnétique. L'énergie magnétique totale emmagasinée est alors

$$\begin{aligned} W_m &= -\int_0^t e_1 I_1 dt - \int_0^t e_2 I_2 dt \\ &= \int_0^t \left[L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + MI_1 \frac{dI_2}{dt} \right] dt + \int_0^t \left[L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + MI_2 \frac{dI_1}{dt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} (L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2) + MI_1 I_2 \end{aligned}$$

On voit donc que $W_m \neq W_1 + W_2$: il y a un troisième terme, correspondant à l'interaction entre les deux circuits.

IV.3.4- Bilan énergétique d'un circuit électrique

D'après la relation établie en électrocinétique, la tension entre deux points A et B d'un circuit vaut

$$V_A - V_B = RI - e$$

où e est la fém située entre A et B, R la résistance totale et le courant I circulant de A vers B. Etant parcouru par un courant, ce circuit (ou cette branche du circuit) va engendrer un champ

magnétique, donc produire un flux à travers lui-même qui, si le champ varie, va engendrer une fém (loi de Faraday) et on aura alors

$$V_A - V_B = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Si le circuit est placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B}_{ext} , le champ total sera la somme du champ induit et du champ \vec{B}_{ext} et l'équation sera

$$V_A - V_B = RI + L \frac{dI}{dt} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt}$$

Ainsi, un circuit composé d'un générateur délivrant une tension U, d'une résistance R, d'une bobine de self L et d'un condensateur de capacité C (circuit RLC) aura pour équation

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

où $I = \frac{dQ}{dt}$ est le courant circulant dans le circuit et Q la charge sur l'une des armatures du condensateur.

La puissance fournie par le générateur se transmet au circuit qui l'utilise alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P &= UI \\ &= I \left(RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \right) = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{P = P_J + \frac{d}{dt} (W_m + W_e)}$$

Une partie de la puissance disponible est donc convertie en chaleur (dissipation par effet Joule), tandis que le reste sert à produire des variations de l'énergie électro-magnétique totale du circuit.

Dans un circuit « libre » (où U=0), on voit que cette énergie totale diminue au cours du temps, entièrement reconvertie en chaleur.

Formulaire de Magnétostatique

Champ magnétostatique

Créé par une particule en mouvement:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Créé par n charges en mouvement:

$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Créé par une distribution continue:

$$\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3V$$

Créé par un circuit filiforme

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Propriétés fondamentales

Flux conservatif

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Circulation (Th. d'Ampère):

$$\oint_{\text{contour}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Dipôle magnétique

Moment dipolaire magnétique

$$\vec{M} = IS\vec{n}$$

Couple magnétique sur un dipôle

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Force magnétique sur un dipôle

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})$$

Actions et énergie magnétiques

Sur une particule chargée (force de Lorentz)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Sur un circuit filiforme (force de Laplace)

$$\vec{F} = \oint_{\text{circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Force (à partir de l'énergie)

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} W_m = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

Couple (à partir de l'énergie)

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i \quad \text{avec} \quad \Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}$$

Théorème de Maxwell

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Id\Phi_c$$

Energie d'interaction magnétique

$$W_m = -I\Phi + Cst$$

Energie magnétique emmagasinée

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Induction

Loi de Faraday

$$\begin{aligned} e &= - \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \frac{d\Phi_c}{dt} \\ &= \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

Coefficient d'induction mutuelle

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Coefficient d'auto-induction

$$L = \frac{\Phi}{I}$$