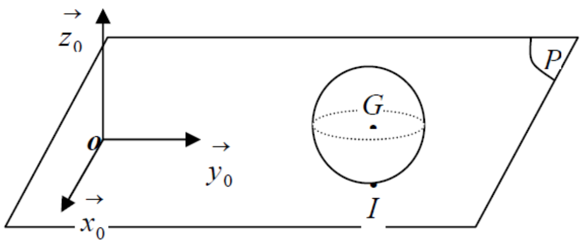
Exercice 1 :

Une sphère ***(S)*** pleine et homogène, de centre ***G,*** de rayon a, roule de manière quelconque sur un plan fixe horizontal (P). Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe lié au plan tel que $\vec{z}_0 \perp (P)$. Soit $R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ un repère orthonormé direct, lié à la sphère tel que : $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$. L'orientation du repère R_S par rapport à R_0 se fait par les angles d'Euler classiques ψ,θ,φ. On prendra R_0 comme repère de projection.

1. Etablir les figures planes de rotation de la sphère ;
2. Donner l'expression du vecteur rotation instantané de la sphère ;
3. Déterminer la vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe.
4. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.



Solution :

(S) : est une sphère homogène de rayon ***a*** ; ***(P) :*** un plan fixe ; $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ; $(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \in (P)$ et $\vec{z}_0 \perp (P)$

$R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$: repère lié à la sphère.

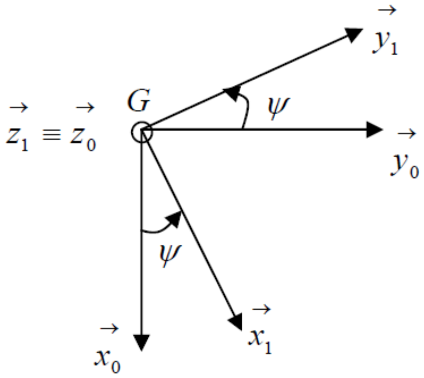
Le passage du repère R_S vers le repère R_0 se fait par trois rotations utilisant les angles d'Euler (ψ,θ,φ) et deux repères intermédiaires R_1 et R_2

1. Les figures planes :

a) *Passage du repère* R_1 *vers* R_0 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

Matrice de passage du repère R_1 vers R_0

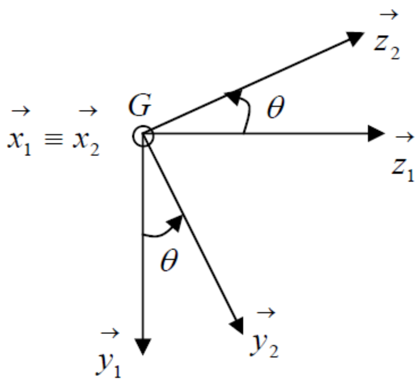
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_0}} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$



b) *Passage du repère* R_2 *vers* R_1 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$

Matrice de passage de R_2 vers R_1

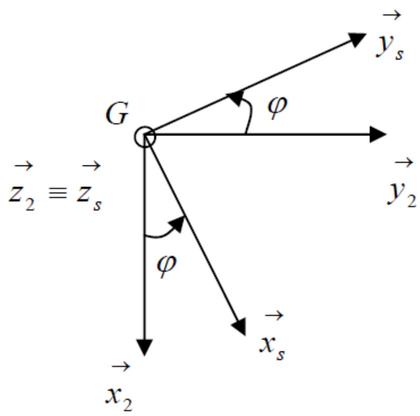
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_2 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$



c) *Passage du repère* R_S *vers* R_2 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_s$

Matrice de passage de R_s vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_s \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur rotation instantané de la sphère dans le repère R_0

$$\vec{\Omega}_s^0 = \vec{\Omega}_s^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$

Exprimons $\vec{x}_1$ *et* $\vec{z}_0$ dans le repère R_0. D'après les matrices de passage nous avons :

$$\vec{x}_1 = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{z}_2 = -\sin\theta\,\vec{y}_1 + \cos\theta\,\vec{z}_1 = -\sin\theta\left(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0\right) + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_2 = \sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

ce qui donne : $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0\right) + \dot{\theta}\left(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0\right) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\vec{x}_0 + \left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{y}_0 + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{array}\right.}$$

3. Vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe

Les points G et I appartiennent à la sphère. Par la cinématique du solide, nous pouvons connaître la vitesse du point I à partir de celle de G, en effet nous avons : $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{GI}$

Avec : $\overrightarrow{OG} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ a \end{array}\right.} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{array}\right.}$

et $\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ 0 \end{array}\right.} \Rightarrow \overrightarrow{GI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -a \end{array}\right.}$

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -a \end{cases}$$, on obtient finalement :

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

4. Condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite il faut que la vitesse du point I soit

nulle : $\vec{V}^0(I) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}_{R_0}$

On multiplie l'équation *(1)* par $\sin\psi$ et l'équation *(2)* par $\cos\psi$ puis on fait la différence des deux

équations : $\begin{cases} \dot{x}\sin\psi - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\sin\psi + \dot{\theta}\sin^2\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y}\cos\psi + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\cos\psi + \dot{\theta}\cos^2\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1) \quad \Rightarrow \quad -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta} = 0$

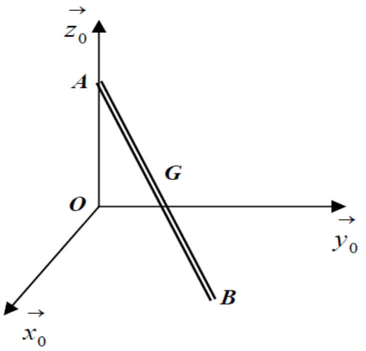
comme nous avons aussi : $\sin\psi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\cos\psi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

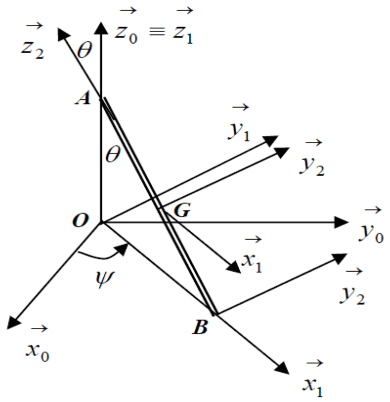
L'équation devient : $\dfrac{\dot{y}x - \dot{x}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + a\dot{\theta} = 0$

Exercice 2 :

Une tige homogène de longueur $\boldsymbol{AB = L}$ et de centre $\boldsymbol{G}$ est en mouvement tel que, son extrémité $\boldsymbol{A}$ soit assujetti à se déplacer suivant l'axe vertical $(O,\vec{z}_0)$ d'un repère orthonormé fixe $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. L'autre extrémité $\boldsymbol{B}$ est en mouvement quelconque dans le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$.

1. Déterminer le nombre de paramètres nécessaires pour décrire totalement le mouvement de la tige et construire les différents repères permettant de faire l'étude cinématique de la tige ;
2. Déterminer la vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0
3. Déterminer les différentes figures planes et les matrices de passage;
4. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue des points A, B et G exprimé dans le repère R_1 .





Solution :

1. Repères et paramètres permettant l'étude du mouvement de la tige

$AB = L$; $A \in (O,\vec{z}_0)$ tous le temps, $B \in (x_0 O y_0)$

$R_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ un repère tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$, $(\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) = \psi$ et $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$

$R_2(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère tel que : $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$, $(\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2) = \psi$ et $\vec{\Omega}_2^1 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 = -\dot{\theta}\,\vec{y}_2$

on a ainsi : $AB \in R_2$ tel que : $\overrightarrow{BA} = L\,\vec{z}_2$

Les deux angles ψ et θ sont suffisant pour décrire entièrement le mouvement de la barre par rapport au repère R_0 .

2. Vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0

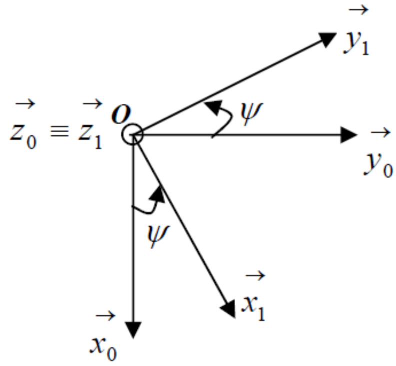
Nous avons : $\vec{\Omega}_2^0 \equiv \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}}$

3. Figure plane de chaque repère ;

3.1. Matrice de passage du repère R_0 vers R_1

Matrice de passage de R_0 vers R_1

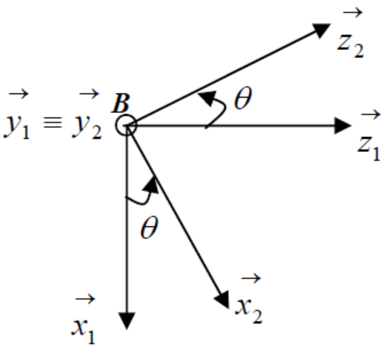
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad P_{R_0 \to R_1}$$



3.1. Matrice de passage du repère R_2 vers R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_2 \to R_1}$$



$$\vec{\Omega}_2^0 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = -\dot{\theta}(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \left\{\begin{array}{c} \dot{\theta}\sin\psi \\ -\dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\psi} \end{array}\right._{R_0}$$

On prendra R_1 comme repère de projection car les expressions cinématiques sont plus simples dans ce repère.

4. Vitesse et Accélération absolue des points *A, B* et *G* exprimé R_1.

Nous avons : $\vec{OA} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ L\cos\theta \end{array}\right._{R_1}$, $\vec{OB} = \left\{\begin{array}{c} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{array}\right._{R_1}$, $\vec{OG} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{L}{2}\sin\theta \\ 0 \\ \dfrac{L}{2}\cos\theta \end{array}\right._{R_1}$

4.1. calcul de $\vec{V}^0(A)$: $\vec{V}^0(A) = \dfrac{d^0\,\vec{OA}}{dt} = \dfrac{d^1\,\vec{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}$

$$\vec{V}^0(A) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right._{R_1} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array}\right._{R_1} \wedge \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ L\cos\theta \end{array}\right._{R_1} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right._{R_1}$$

4.2. *calcul de* $\vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0 \overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{V}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{cases}}$$

La vitesse du point B peut aussi s'obtenir à partir de celle de A par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L\sin\theta \\ 0 \\ -L\cos\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ -L\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{cases}}$$

4.3. *calcul de* $\vec{V}^0(G)$: $\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG}$

$$\vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ 0 \\ \frac{L}{2}\cos\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}}$$

La vitesse du point G peut aussi s'obtenir à partir de celle de A où de B par la cinématique du solide, en effet nous avons :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ 0 \\ -\frac{L}{2}\cos\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta \\ -L\dot{\theta}\sin\theta + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}}$$

4.4. calcul de $\vec{\gamma}^0(A)$: $\vec{\gamma}^0(A)=\dfrac{d^0\,\vec{V}^0(A)}{dt}=\dfrac{d^1\,\vec{V}^0(A)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{V}^0(A)$

$$\vec{V}^0(A)={}_{R_1}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\-L\ddot{\theta}\sin\theta-L\dot{\theta}^2\cos\theta\end{array}\right.+{}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}0\\0\\\dot{\psi}\end{array}\right.\wedge{}_{R_1}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{array}\right.={}_{R_1}\left\{\begin{array}{c}0\\0\\-L\ddot{\theta}\sin\theta-L\dot{\theta}^2\cos\theta\end{array}\right.$$

4.5. calcul de $\vec{\gamma}^0(B)$: $\vec{\gamma}^0(B)=\dfrac{d^0\,\vec{V}^0(B)}{dt}=\dfrac{d^1\,\vec{V}^0(B)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B)={}_{R_1}\left\{\begin{array}{c}L\ddot{\theta}\cos\theta-L\dot{\theta}^2\sin\theta\\L\ddot{\psi}\sin\theta+L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\0\end{array}\right.+{}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}0\\0\\\dot{\psi}\end{array}\right.\wedge{}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\\quad 0\end{array}\right.$$

$$\vec{V}^0(B)={}_{R_1}\left\{\begin{array}{c}L\ddot{\theta}\cos\theta-L(\dot{\theta}^2+L\dot{\psi}^2)\sin\theta\\L\ddot{\psi}\sin\theta+2L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\0\end{array}\right.$$

4.6. calcul de $\vec{\gamma}^0(G)$: $\vec{\gamma}^0(G)=\dfrac{d^0\,\vec{V}^0(G)}{dt}=\dfrac{d^1\,\vec{V}^0(G)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{V}^0(G)$

$$\vec{\gamma}^0(B)={}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\\\frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta+\frac{L}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\-\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\end{array}\right.+{}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}0\\0\\\dot{\psi}\end{array}\right.\wedge{}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{array}\right.$$

$$\vec{\gamma}^0(B)={}_{R_1}\left\{\begin{array}{l}\frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\psi}^2\sin\theta\\\frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta+L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\\-\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta-\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta\end{array}\right.$$