

#### Université Mohammed Premier Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima Département de Mathématiques et d'Informatique



### Examen d'analyse 3 Lundi 18 janvier 2016, durée : 2h.

CP2, Semestre 3.

Année universitaire : 2015-2016 .

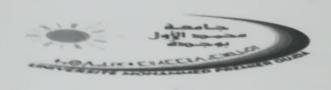
N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille.

-	de la rédaction et la clarté de la feuille.
	Exercice 1: (7points)  Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 5  V1- Déterminer le domaine de définition
1 1,5	√2- Etudier la continuité de f sur ℝ²\{(0,0)}. √3- La fonction f est-elle continue en (0,0)? justifiez votre  √4- Etudier la différentiabilité de s
1 1	$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$ 6- Montrer que f est dérivable par rapport à $x$ en $(0,0)$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$ 6- Montrer que f est dérivable par rapport à $y$ en $(0,0)$ et que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$
1	7- La fonction f est-elle différentiable en (0,0)? justifiez.
2 0,5 1	Exercice 2: (4,5points)  Soit la fonction: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par: $g(x,y) = (x \sin y + y \sin x, xy)$ 1- Déterminer la matrice jacobienne $J_g(x,y)$ .  2- Calculer le jacobien $j_g(x,y)$ .  3- Montrer que g n'est pas injective. $X$ (renores $(2\pi/6)$ ) et $(0,2\pi)$

C1

d

1	4- Montrer que g est un $C^1$ -difféomorphisme local au voisinage $de\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$
1	Exercice 3: (8,5points)  Considérons la fonction: $h(x,y) = x^3 + 3(xy^2 - 13x - 12y)$ 1- Montrer que h est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ .  2- Calculer $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ puis déterminer la différetielle
1,5	dh.
1	# 3- Montrer que h admet quatre points critiques à déterminer, 4- Calculer : $\partial^2 h$
2	$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) , \qquad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) , t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y)$
1	et $\Delta = s^2 - rt$ . $\Delta = s^2 -$
1	6- Montrer qu'au voisinage de (0,0), l'ensemble : $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\} \text{ est un arc paramétré.}$
0,5	7- Donner les coordonnées de $\overrightarrow{\tau_0}$ vecteur directeur de la tangent à $\mathbb F$ au point (0,0).
0,5	8- Donner les coordonnées de $\overrightarrow{N_0}$ la normale principale à $\mathbb T$ au point (0,0).





Université Mohammed Premier Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Al-Hoceima Département de Mathématiques et d'Informatique



#### Examen d'analyse 3

Mardi 31 janvier 2017, durée : 2h.

CP2, Semestre 3.

Année universitaire : 2016-2017 .

Prof : Fouzia MORADI.

N.B: il sera tenu compte de la rédaction et la clarté de la feuille.

1pt	Exercice 1 (7 points):  Soit la fonction: $h(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$ 1- Calculer $h(1,0)$ et $h(-1,0)$ . Que peut—on dire de h?  2- Déterminer la matrice jacobienne $J_h(x,y)$ de h et son
2pt 1pt 1pt 1pt 1pt 1pt	<ul> <li>jacobien /h(x,y).</li> <li>3- Soit (a, b) ∈ ℝ² \ {(0,0)}. Montrer que h est un control of the contro</li></ul>
	Exercice 2 (13 points): Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ , $(x_0,y_0,z_0) \in U$ tels que: $\mathbb{R}^3$ , $(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ . Soit V un voisinage de $(x_0,y_0,z_0)$ , W un voisinage de $(x_0,y_0)$ et une fonction $\varphi: W \to \mathbb{R}$ de $C^1$ tels que: $z_0 = \varphi(x_0,y_0)$ et une fonction $\varphi: W \to \mathbb{R}$ de $C^1$ tels que: $z_0 = \varphi(x_0,y_0)$ et

```
f(x, y, z) = 0
                                                     (x, y, z)eV
                                      1- Donner les formules de \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) et \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) en fonction
                                 de \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) et \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) pour tout (x,y)\epsilon W.
                                     2- Soit \psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 définie par : \psi(x,y) = (x,y,\varphi(x,y))
                                    a- Montrer que \psi est de C^1 sur W.
                        Ipt
                                    b- Déterminer sa matrice jacobienne J_{\psi}(x,y).
                        Ipt
                                   c- En déduire \psi'(x,y)(u,v).
                        1pt
                                   3- Soit g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} une fonction de classe C^1 sur V et
                                      G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} définie par: G(x,y) = go\psi(x,y).
                                  a- Déterminer VG(x,y).
                     1,5pt
                     1pt
                                  b- En déduire \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) et \frac{\partial G}{\partial y}(x,y).
                                 c- Montrer que si (x_0, y_0) est un extrémum local de G
                                   \int \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)
                  1,5pt
                                   \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)
                              Application:
                             Soit g(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z
                             et f(x, y, z) = x + y + z - 3\alpha où \alpha > 0.
                            1- Montrer que si (x, y, z) est un extrémum local de g avec
               1pt
                                f(x, y, z) = 0 alors x = y = z = \alpha.
                           2- Posons: x = \alpha + u, y = \alpha + v et z = \alpha + w
                           a- Donner la formule de Taylor Young à l'ordre 2 de
             1pt
                               ln(\alpha + u). =
                          b- En déduire la formule de g(x,y,z)-g(\alpha,\alpha,\alpha).
             1pt
                        c- Montrer que le point (\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}) est un minimum local de g.
            1pt
   Tayloryong f(a)=f(a)+h of +1
f(n) = f(\alpha + \mu) = f(\alpha) + \int_{\Omega} u f'(\alpha \beta ON) COURAGE!
                                      + of we f2(x)+ - +
```

ENSA d'Al-Hocelma

CP-II.

Analyse 3

Devoir surveillé 1

Mardi 22 décembre 2015, durée: 1h30.

#### Exercice 1: (5points)

Notons par  $A(\mathbb{R})$  l'ensemble des applications affines sur  $\mathbb{R}$  .

1- Pour 
$$f(x) = ax + b$$
 et  $g(x) = a'x + b'$  dans  $A(\mathbb{R})$  on pose :   

$$\begin{cases} d(f,g) = 2 \\ d(f,g) = 1 \\ d(f,g) = 0 \end{cases}$$
 si  $a = a'$  et  $b \neq b'$  si  $f = g$ 

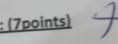
Montrer que d'est une distance sur A(R).

2- On pose: 
$$N_1(f) = |a| + |b|$$
 et  $N_2(f) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$   
Montrer que  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $A(\mathbb{R})$ .

3pt

201

# Exercice 2: (7points)



Soit  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  une fonction définie par :

Soit f: 
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
 the total  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 

1- Déterminer le domaine de définition D<sub>f</sub>.

tet /	j.	Etudier	la conti	nuité	de	f S
10	W. 0	Salt	0.604	Was a state		

sur Dr. Soit  $x_0 > 0$  fixé. Etudier la dérivabilité de  $f(x_0, 0)$  en 0.

Soft  $y_0 \neq 0$  fixé. Etudier la dérivabilité de  $f(.,y_0)$  en 0 et en déduire  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$ . f(7, 40)

8- Etudier la dérivabilité de f par rapport à x et à y en (x, y) tels que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ 

et calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  .

m, y)

## Exercice 3: (8points)

1.5

3DI

2pt

2pt

2pt

2pt

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

1- Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

a- 
$$f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
 définie par :  $f_1(x,y) = f(x^2 + y, y^3)$ ,  
b-  $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  définie

b- 
$$f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
 définie par :  $f_2(x,y) = f(\cos x, \cos y)$ ,

$$f(\cos x, \cos y) = f(\cos x, \cos y)$$
 $f(\cos x, \cos y) = f(\cos x, \cos y)$ 

Déterminer la matrice :

2- Déterminer la matrice jacobienne de la fonction  $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  définie

$$g(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$
 avec  $f(x,y) = xy$ .

Université Mohammed 1er, Oujda

EWSA d'Al-Hoceima

Semestre 1,

Année 2016/2017

Analyse 3

Devoir surveillé 1

durée: 1h30mn. 19 décembre 2016,

de

# Exercice 1: (7points)

Notons  $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$  l'ensemble des applications continues de [0,1] dans R.

On définit sur E les deux applications suivantes :

Pour feE,

 $N_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx$  et  $N_\infty(f) = \sup\{|f(x)|: x \in [0,1]\}.$ 

1- Montrer que N<sub>1</sub> et N<sub>12</sub> sont deux normes sur E.

2- Montrer que:

2pt

3- Considérons la suite de fonctions suivante;  $N_1(f) \leq N_{\infty}(f)$ AfeE: pour n≥3:  $(n^3 - n^2)x + n$ 

 $f_n(x) = \left\{ -(n^3 - n^2)x + 2n^2 - n \right.$  $\left(\frac{n^2}{2-n}(x-1)\right)$ 

 $si \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n}$ 

si  $0 \le x \le \frac{1}{-}$ 

 $(\frac{2-n}{2-n}(x-1)) \qquad \qquad si = x \le 1$  a- En encadrant  $f_n(x)$  sur les intervalles  $\left[0,\frac{1}{n}\right],\, \left]\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right[$  et

 $\left[\frac{2}{n},1\right]$ , montrer que:

8

 $\forall x \in [0,1]: \ 0 \le f_n(x) \le f_n(\frac{1}{n}) = n^2$ 

b- En déduire  $N_{\infty}(f_n)$ .

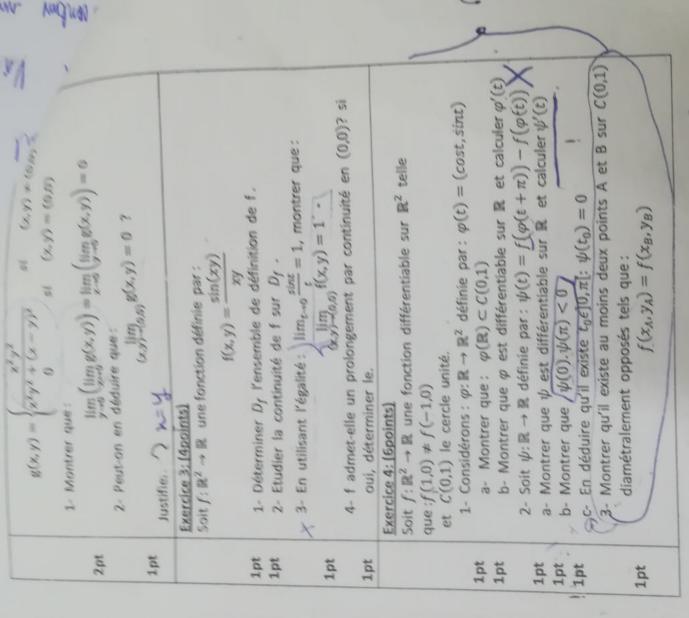
0.5pt 1pt 1pt

d- Ces deux normes sont-elles équivalentes ? justifier. 6- Montrer que:  $\forall n \geq 3$ :  $N_1(f_n) = \frac{3}{2}n$ 

Exercice 2: (3points)

 $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  une fonction définie par :

(m) 8 dns 5 (m) 8



017

0 1,

4(4)=0 => f(p(text))= f(p(t)) (cot) set = 1+25 5 8 (-cot 1-24) +8 (at) > } (Co(Mast) / se (WBonne chance