

Travaux dirigés- Série 4: Électricité II

December 11, 2014

Abstract

Electricité II
Travaux Dirigés: Série 4

Exercice I: circuits

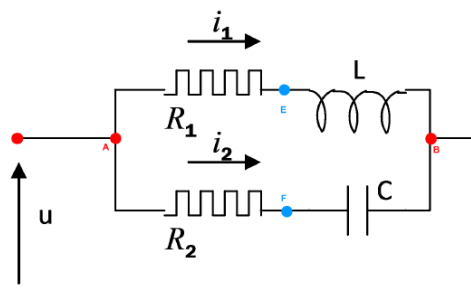
Un circuit électrique composé de 2 branches montées en parallèle: (a) une branche AB parcourue par un courant i_1 , composée d'une résistance R_1 en série avec une bobine L . (b) une branche CD avec $C = A$ et $D = B$ parcouru par un courant i_2 composée d'une résistance R_2 en série avec une capacité C .

La tension entre les deux points est $u = u_A - u_B$

Déterminer la relation entre R_1 , R_2 , L et C

pour que $(\widehat{i_1}, \widehat{i_2}) = \frac{\pi}{2}$:

- 1) par la méthode des complexes,
- 2) par la méthode graphique (facultatif).



Exercice II

Une self inductance L_1 est disposée en série avec un élément composé d'une capacité C en parallèle avec une self inductance L_2 . Le tout est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace V et de pulsation ω .

- 1) Calculer l'impédance complexe \underline{Z} du circuit,
- 2) Calculer la valeur efficace du courant parcourant L_1 ,

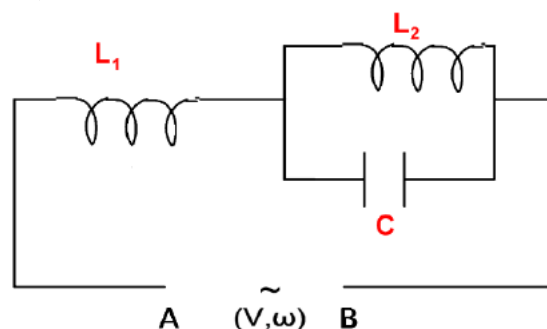
3) Déterminer la valeur de C pour que:

- a) Le courant i_1 parcourant L_1 est nul,
- b) Le courant i_1 parcourant L_1 est infini,

On notera cette valeur C_0 ,

4) Dans le cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$:

- a) Calculer le déphasage entre la tension V_{AB} et le courant dans la branche principale,
- b) Ecrire l'expression de la tension aux bornes et le courant dans la branche principale.

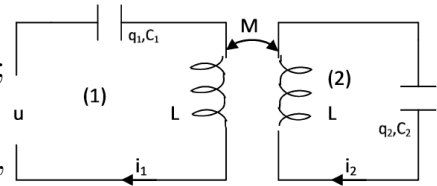


Exercice III

On considère un circuit électrique composé de 2 sous-circuits (1) et (2) couplés par inductance mutuelle de coefficient M .

Le circuit (1), parcouru par un courant i_1 , comprend:
un enroulement dépourvu de résistance,

de coefficient d'induction L_1 et d'induction mutuelle M , et un condensateur de capacité C_1 placée en série avec L_1 ; il est alimenté par un générateur de f.e.m sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω . Le circuit (2), sans tension d'alimentation, est composé d'une inductance L_2 en série avec un condensateur de capacité C_2 . Les deux inductances sont placées en juxtaposition; on prendra $L_1 = L_2 = L$.

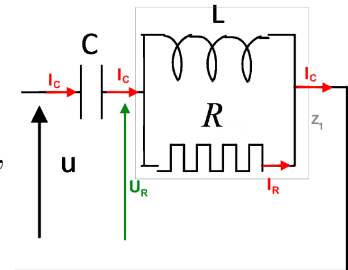


- 1) Déterminer l'impédance \underline{Z} vue aux bornes du générateur,
- 2) Etudier sa variation avec ω .

Exercice IV

Un circuit électrique composé d'un condensateur C monté en série avec un sous circuit $(L//R)$ comprenant une inductance L en parallèle avec une résistance R . Le circuit est alimenté par un générateur de f.e.m sinusoïdale $u(t)$ de pulsation ω .

- 1) Faire un schéma du circuit,
- 2) Déterminer l'impédance \underline{Z}_1 du sous circuit $(L//R)$,
- 3) Calculer le courant complexe \underline{I}_C parcourant la capacité C ,
- 4) Calculer le courant complexe \underline{I}_R parcourant la résistance R ,
- 5) En déduire la condition pour que le courant \underline{I}_R soit indépendant de la valeur de R .



Exercice V (facultatif)

Un moteur électrique alimenté par une tension alternative sinusoïdale de fréquence 50Hz sous une tension efficace 220V , absorbe la puissance active $P = 5,5\text{ kW}$. L'intensité efficace du courant qui le traverse est $I = 32\text{A}$.

- 1) Calculer le facteur de puissance de ce moteur
- 2) Calculer la puissance réactive qu'il consomme.
- 3) Pour améliorer le facteur de puissance de l'installation, on place un condensateur en dérivation aux bornes du moteur.

Calculer:

- a) L'intensité efficace I du courant qui parcourt le réseau d'alimentation
- b) La capacité C du condensateur qui permet de porter le facteur de puissance à la valeur 0.92.

On utilisera les trois méthodes:

- i) La méthode des complexes
- ii) Le diagramme vectoriel des intensités,
- iii) La conservation des puissances réactives dans un réseau.

1 Solution de la série 4

Exercice I: Relation entre R_1, R_2, L, C

1) schéma du circuit, voir fig 1:

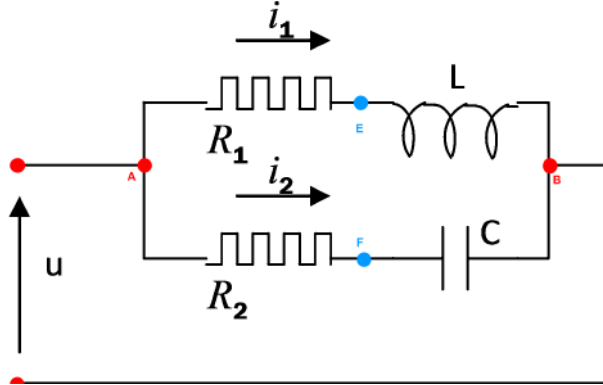


Figure 1: les courants sont décalés de $90^\circ : (\widehat{i_1, i_2}) = \frac{\pi}{2}$

2) relation entre R_1, R_2, L et C pour que $(\widehat{i_1, i_2}) = \frac{\pi}{2}$:

a) par la méthode graphique

Les courants $i_1 \rightarrow I_1$ et $i_2 \rightarrow I_2$ sont décalés de $\frac{\pi}{2}$; c'est à dire: $(\widehat{I_1, I_2}) = \frac{\pi}{2}$ qu'on peut décomposer comme suit:

$$(\widehat{I_1, U}) + (\widehat{U, I_2}) = \frac{\pi}{2}$$

La tension $U = U_{AB}$ est commune entre les deux branches:

AEB et AFB : voir fig 1

On prendra cette tension comme référence des phases

La branche $\{R_1, L\}$ est inductive $\Rightarrow i_1$ est alors en retard de phase par rapport à U

la branche capacitive $\{R_2, C\}$ $\Rightarrow i_2$ est en avance par rapport à U

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_{R_1} + \vec{U}_L \\ &= \vec{U}_{R_2} + \vec{U}_C \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{U}_{R_1} &\text{ est en phase avec } \vec{I}_1 \\ \vec{U}_L &\text{ est en avance de phase de } \frac{\pi}{2} \text{ sur } \vec{I}_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{U}_{R_2} &\text{ est en phase avec } \vec{I}_2 \\ \vec{U}_C &\text{ est en retard de phase de } \frac{\pi}{2} \text{ sur } \vec{I}_2 \end{aligned}$$

D'où le diagramme de Fresnel suivant

On a donc

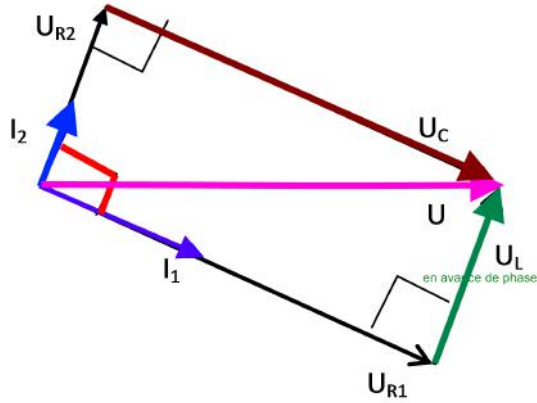


Figure 2:

$$\begin{cases} U_{R1} = U_C \\ U_{R2} = U_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 I_1 = \frac{1}{C\omega} I_2 \\ R_2 I_2 = L\omega I_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 C\omega I_1 = I_2 \\ R_2 R_1 = \frac{L}{C} \end{cases}$$

la relation est

$$R_2 R_1 = \frac{L}{C}$$

b) par la méthode des complexes

Nous avons

$$\begin{aligned} U &= R_1 I_1 + jL\omega I_1 = (R_1 + jL\omega) I_1 \\ &= R_2 I_2 + \frac{I_2}{jC\omega} = \left(R_2 + \frac{1}{jC\omega} \right) I_2 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \phi_1 = (I_1, U) &\Rightarrow \tan \phi_1 = \frac{L\omega}{R_1} \\ \phi_2 = (U, I_2) &\Rightarrow \tan \phi_2 = \frac{1}{R_2 C\omega} \end{aligned}$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\phi_1 + \phi_2) = \begin{cases} = 0 \\ = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_1 \sin \phi_2 &= \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ \frac{\sin \phi_1 \sin \phi_2}{\cos \phi_1 \cos \phi_2} &= 1 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\tan \phi_1 \tan \phi_2 = \begin{cases} = 1 \\ = \frac{L\omega}{R_1} \times \frac{1}{R_2 C\omega} \end{cases}$$

soit

$$\frac{L\omega}{R_1 R_2 C\omega} = 1 \Rightarrow R_1 R_2 = \frac{L}{C}$$

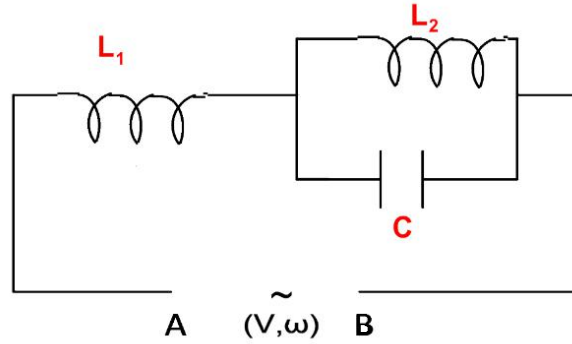


Figure 3:

Exercice II

1) schéma, voir fig 3

2) impédence complexe du circuit entre A et B

$$\bar{Z} = jL_1\omega + \bar{Z}_2$$

avec

$$\frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{jL_2\omega} + jC\omega = \frac{1 - L_2C\omega^2}{jL_2\omega}$$

d'où

$$\bar{Z}_2 = \frac{jL_2\omega}{1 - L_2C\omega^2}$$

Résultat

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j \left(L_1\omega + \frac{L_2\omega}{1 - L_2C\omega^2} \right) \\ &= j \left(\frac{L_1 + L_2 - L_1L_2C\omega^2}{1 - L_2C\omega^2} \omega \right) \end{aligned}$$

3) valeur efficace du courant parcourant L_1

Elle est exprimée en fonction de la tension \bar{V} et l'impédence \bar{Z} par le biais de la loi d'Ohm

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}_{L_1}$$

soit

$$I_{L_1} = \frac{V}{\bar{Z}} = \frac{V}{\left| L_1\omega + \frac{L_2\omega}{1 - L_2C\omega^2} \right|}$$

résultat

$$I_{L_1} = \frac{V(1 - L_2C\omega^2)}{\omega |L_1(1 - L_2C\omega^2) + L_2|}$$

4) valeur de C pour que:

a) le courant i_1 parcourant L_1 est nul,

$$I_{L_1} = 0 \Rightarrow \frac{V(1 - L_2 C \omega^2)}{\omega |L_1(1 - L_2 C \omega^2) + L_2|} = 0$$

soit

$$V(1 - L_2 C \omega^2) = 0$$

Résultat

$$C = \frac{1}{L_2 \omega^2}$$

b) le courant i_1 parcourant L_1 est infini, On notera cette valeur C_0

$$I_{L_1} = \infty \Rightarrow |\bar{Z}| = \frac{(1 - L_2 C \omega^2)}{\omega |L_1(1 - L_2 C \omega^2) + L_2|} = \infty$$

soit

$$\omega |L_1(1 - L_2 C \omega^2) + L_2| = 0$$

Résultat

$$C = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 \omega^2} = C_0$$

5) Dans le cas particulier $L_1 = L_2 = L$ et $C > C_0$:

$$L_1 = L_2 = L, \quad C > C_0 = \frac{2}{L \omega^2}$$

a) le déphasage entre la tension V_{AB} et le courant dans la branche principale

Le déphasage

$$\varphi = \arg \bar{V} - \arg \bar{I}_{L_1}$$

est obtenu à partir de la relation

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \bar{Z} \bar{I}_{L_1} \\ \arg \bar{V} &= \arg \bar{Z} + \arg \bar{I}_{L_1} \end{aligned}$$

soit alors

$$\varphi = \arg \bar{Z}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j\omega \left(\frac{(L_1 + L_2 - L_1 L_2 C \omega^2)}{1 - L_2 C \omega^2} \right) \\ &= j\omega \left(\frac{L(2 - LC \omega^2)}{1 - LC \omega^2} \right) \end{aligned}$$

qui est un imaginaire pur; donc φ est:

$$\text{soit } \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2}$$

Pour déterminer le signe, nous utilisons les relations suivantes

$$\begin{aligned}
 C > \frac{2}{L\omega^2} &\Rightarrow CL\omega^2 > 2 \\
 &\Rightarrow 2 - CL\omega^2 < 0 \\
 &\Rightarrow 1 - CL\omega^2 < 0 \\
 &\Rightarrow \omega \left(\frac{L(2 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2} \right) > 0 \\
 &\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

b) expression de la tension aux bornes A-B et le courant dans la branche principale.

i) Tension aux bornes A-B

$$v(t) = V\sqrt{2}\cos\omega t$$

ii) *courant parcourant* L_1

$$i(t) = I_{L_1}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

avec

$$I_{L_1} = \frac{V(1 - LC\omega^2)}{L\omega(2 - LC\omega^2)}$$

Exercice III

1) schéma, voir fig 4

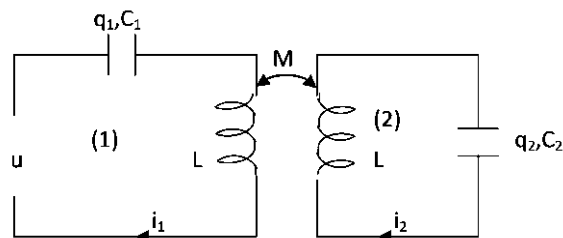


Figure 4: circuits mutuellement couplés

2) impédance \bar{Z} vue aux bornes du générateur,

Appliquons la *loi d'Ohm* pour les 2 circuits:

a) *circuit* (1)

$$u = \frac{q_1}{C} + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

avec

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad q_1 = \int i_1 dt$$

b) *circuit* (2)

$$0 = \frac{q_2}{C} + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

avec

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

En notation complexe

$$i_1 = I_1 e^{j\omega t}$$

$$\bar{U} = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) I_1 + jM\omega I_2 \quad (1)$$

$$0 = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) I_2 + jM\omega I_1 \quad (2)$$

$$\text{eq}(2) \Rightarrow I_2 = \frac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{eq}(1) + \text{eq}(3) \Rightarrow \bar{U} &= \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) I_1 + jM\omega \left(\frac{-jM\omega I_1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \right) \\ &= \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + \frac{M^2\omega^2}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \right) I_1 \\ &= \bar{Z} I_1 \end{aligned}$$

Résultat: l'impédance est:

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \right) \\ &= j \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \\ &= j \frac{\frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \frac{1}{LC})^2 - M^2\omega^2}{\frac{L}{\omega} (\omega^2 - \frac{1}{LC})} \end{aligned}$$

$$|\bar{Z}| = Z = \left| \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 - M^2\omega^2}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \right|$$

3) variation $\bar{Z} = \bar{Z}(\omega)$

a) $\bar{Z}(\omega)$ est nulle pour:

$$(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = \pm M\omega \Rightarrow (L \mp M) \omega^2 = \frac{1}{C}$$

$$\begin{aligned} (L + M) \omega_1^2 &= \frac{1}{C} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{C(L+M)}} \\ (L - M) \omega_2^2 &= \frac{1}{C} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{C(L-M)}} \end{aligned}$$

avec comme condition

$$L \neq M$$

ce qui est toujours vrai puisque on a toujours

$$M^2 < L_1 L_2 = L^2 \Rightarrow M < L$$

b) $\bar{Z}(\omega)$ est infini pour

$$\begin{aligned} Z &= j \frac{\frac{L^2}{\omega^2} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 - M^2 \omega^2}{\frac{L}{\omega} \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)} \\ &= j \frac{L^2 \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)^2 - M^2 \omega^4}{L \omega \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pour

$$\omega_3 = 0 \quad , \quad \omega_4 = \frac{1}{LC}$$

c) *conclusion*

Le système se comporte comme

- un circuit *résonant* au voisinage de ω_1 et ω_2 ; c'est-à-dire laisse passer un courant infini débité par le générateur de pulsation ω_1 ou ω_2 .
- Par contre il se comporte comme un circuit bouchon (anti - résonance) au voisinage de ω_4 ; c'est-à-dire arrête totalement le courant débité par un générateur de pulsation ω_4 .

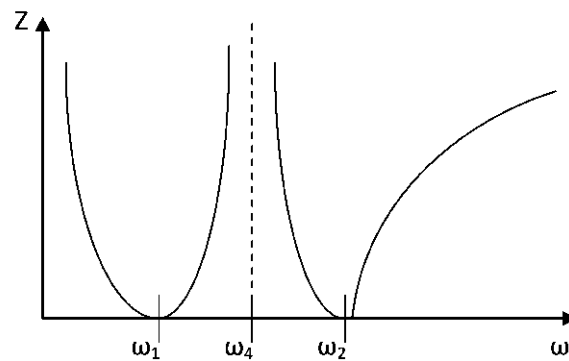


Figure 5:

Exercice IV

1) schéma du circuit

Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale u de pulsation ω .

2) impédance \bar{Z}_1 du sous circuit ($L//R$)

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega} \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$$

3) Expression complexe I_C du courant traversant la capacité C

$$U = Z I_C$$

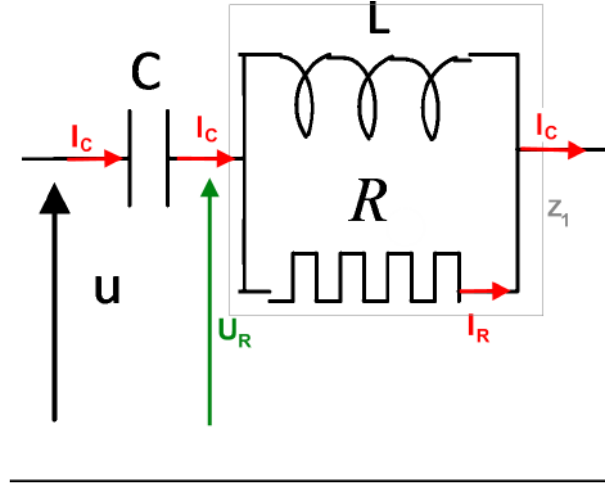


Figure 6:

avec

$$Z = \frac{1}{jC\omega} + Z_1$$

donc

$$I_C = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + Z_1} = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}$$

4) Expression complexe I_R du courant traversant R en fonction de Z_1 , I_C et R

$$U_R = RI_R = Z_1 I_C$$

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{Z_1 I_C}{R} \\ &= \frac{jRL\omega}{R(R+jL\omega)} \times \frac{U}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}} \\ &= \frac{jL\omega U}{\frac{R+jL\omega}{jC\omega} + jRL\omega} \\ &= \frac{LC\omega^2 U}{R(LC\omega^2 - 1) - jL\omega} \end{aligned}$$

5) la condition pour que le courant I_R soit indépendant de la valeur de R :

$$LC\omega^2 - 1 = 0$$

d'où

$$I_R = jC\omega U = \frac{U}{\frac{1}{jC\omega}}$$

qui est indépendant de R .

2 Exercice V