Chapitre 3

Différentiabilité et Calcul différentiel

3.1 Définitions et Exemples :

3.1.1 Definition et Notation

Pour alléger les notations, Nous commençons par des fonctions de deux variables.

Dérivées partielles premières :

Rappel (DERIVEE).
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
La dérivée de f au point $x_0 \in I$ est donnée par :

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Définition 31 *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$, Les dérivées partielles de f en(x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions g_1 et g_2 tel que :*

$$g_1(x) = f(x, y_0), \quad et \quad g_1(y) = f(x_0, y)$$

sont deux fonctions de la seule variable. Si g_1 et g_2 sont dérivable en x_0 et y_0 respectévement, on aura alors

$$g_1^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(x_0 + h) - g_1(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$g_2^{'}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g_2(y) - g_2(y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{g_2(y_0 + h) - g_2(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Les deux nombres $g_1^{'}(x_0)$ et $g_2^{'}(y_0)$ sont appelés Les dérivées partielles de f par rapport à x et à y respectévement au point (x_0, y_0)

et on note

$$g_1^{'}(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f_x^{'}(x_0, y_0)$$

et

$$g_2^{'}(y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f_y^{'}(x_0, y_0)$$

Exemple 1 :

1. Soit :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2y^3 \end{array}$$

   Cherchons les dérivées partielles en (a,b).
   on a

$$f_x^{'}(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 2ab^3$$

   et

$$f_y^{'}(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 3a^2b^2$$

2. Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x\sin(xy) \end{array}$$

   Cherchons les dérivées partielles en (a,b).
   on a

$$f_x^{'}(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \sin(ab) + ab\cos(ab)$$

   et

$$f_y^{'}(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = a^2\cos(ab)$$

Définition 32 (DERIVEE PARTIELLE)) *Soient $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in E$, pour $i = 1,2,...,n$, on appelle dérivée partielle par rapport à x_i de f en $a = (a_1,a_2,...,a_n)$ et on note $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ la dérivée de la fonction partielle de f prise en a_i*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{x_i - a_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1,...,a_{i-1},h+a_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)}{h}$$

Exemple 2 :
Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 - y^2 \end{array}$$

Cherchons les dérivées partielles de f
on a

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h,y) - f(x-y)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{(x+h)^2 - y^2 - (x^2 - y^2)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \in \mathbb{R}$$

cette limite existe et donc

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

De même maniére on trouve

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

Définition 33 *Si la dérivée partielle % à la i^{eme} variable existe en tout point E . On définit l'application dérivée partielle parapport à x_i par.*

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i} & : & E \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

Notation : On peut noter $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}$
Remarque :
l'existence de dérivées partielles en un point n'entraine pas la continuité en ce point.

Exemple 2
La fonction

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a déja vu que la fonction f n'est pas continue au point $(0,0)$ (Ex.7).
Calculons les dérivées partielle au point $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{0}{x} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \in \mathbb{R}$
et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{0}{y} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \in \mathbb{R}$

Conclusion : les dérivée partielles de f existent au point $(0,0)$ mais f n'est pas continue au point $(0,0)$.
Par contre, on sait qu'une fonction d'une seule variable, dérivable en un certain réel, est automatiquement continue en ce réel et donc l'existence de dérivées partielles entraine la continuité partielle.

Fonctions dérivées partielles d'ordre 1

Définition 34 *Soit f une fonction définie sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*
Pour $i \in [\![1;n]\!]$, f admet une $i-$ème dérivée partielle sur E si et seulement si f admet une $i-$ème dérivée partielle en chaque point a de E.
Dans ce cas, on peut définir la $i-$ème fonction dérivée partielle sur E notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: c'est une fonction de n variables, définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Théoréme 21 *Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*
Soit $i \in [\![1;n]\!]$,

1. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E, alors pour tout $(\alpha;\beta) \in \mathbb{K}^2$ $\alpha f + \beta g$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

2. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E,alor $f \times g$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(f \times g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \times g + f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

3. *Si f et g admettent une $i-$ème dérivée partielle sur E, et si g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ admet une $i-$ème dérivée partielle sur E et*

$$\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \times g - f \times \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}$$

Par exemple, si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$ alors ;
pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2} = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xye^{x^2+y^2}$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{pour } (x, y) \neq (0,0) ; \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

3.1.2 Dérivée suivant un vecteur

Pour analyser l'existence et la valeur de la $i-$ème dérivée partielle en $a = (a_1, ..., a_n)$, on s'est intéressé à

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}(f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n))$$

qui peut aussi s'écrire

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a_1, ..., a_{i-1}, h + a_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n))$$

En notant $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + he_i) - f(a))$$

On dit alors qu'on a dérivé la fonction f en a suivant le vecteur e_i. On généralise cette notion :

Définition 35 *Soit f une fonction définie sur un ouvert non vide E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.*
Soit a un point de E.
Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ donné.
f est dérivable en a suivant le vecteur v si et seulement si la fonction d'une variable réelle $h \longmapsto \frac{1}{h}(f(a + hv) - f(a))$ a une limite quand h tend vers 0. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de f en a suivant le vecteur v et se note $D_v f(a)$:

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a + hv) - f(a))$$

En particulier, Si $(e_1,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i}f(a)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0. \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$.
$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ puis $\lim_{h\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$
Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Soit $v = (1,1) \neq (0,0)$.
Pour $h \neq 0$ $\frac{1}{h}(f(hv) - f(0)) = \frac{1}{h}f(h,h) = \frac{1}{h}$ expression qui n'a pas de limité quand h tend vers 0. Donc f n'est pas dérivable en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)$.

Ainsi, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables en $(0,0)$ mais n'est pas dérivable suivant tout vecteur en $(0,0)$.

3.2 Fonction différentiable.

Définition 36 *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *2 e v n ; U ouvert de E et* $f : U \longrightarrow F$ *une application.*

Cas ou $E = \mathbb{R}$
f est dérivable en x_0 ; de derivée $f'(x_0)$ si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f'x_0)}{h} - f'(x_0) = 0$$

c à d.

$$f(x_0+h) - f'x_0 - hf'(x_0) = h\xi(h); \quad avec \quad \xi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

L'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R} & \to & F \\ h & \mapsto & L(h) = hf'(x_0) \end{array}$$

est continue .
Elle est appelée differentielle de f au pt. x_0.

Cas ou $E = \mathbb{R}^2$

Soit f une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, et $(x_0, y_0) \in U$.
On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe deux constantes réelles A et B telles que telle que

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) = Ah_1 + Bh_2 + \|h\|\zeta(h) \quad avec \quad h = (h_1,h_2)$$

où ζ est une fonction à 2 variables telle que $\zeta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Cas ou $E=\mathbb{R}^n$

f est différentiable en $x_0 \in U \subset E$ si il existe une application linéaire continue $L \in \mathscr{L}(E,F)$ et une application ζ définie d'un voisinage de 0 dans E à valeur dans F tel que

$$\forall h \quad / \quad x_0+h \in U, \quad on\ a \quad f(x_0+h)-f(x_0)=Lh+(\|h\|\zeta(h))$$

avec L est appelé : la différentielle de f en x_0 .

PROPOSITION 26 *L'application L si elle existe, elle est unique.*

Théoréme 22 *Si f est différentiable au point x_0 alors elle admet des dérivées partielles premières en x_0.*

dans cas $\mathbb{R}^2$
$A=f_x^{'}(x_0,y_0)$ et $B=f_y^{'}(x_0,y_0)$

PROPOSITION 27 *Si f est différentiable au point x_0 alors ; elle est continue en ce point.*

preuve

Si f est différentiable au point x_0 alors,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=L(x_0).h+\|h\|\zeta(h)$$

$$\Rightarrow \|f(x_0+h)-f(x_0)\| \leq (L(x_0)+\zeta(h)).\|h\|$$

PROPOSITION 28 *Si $E=\mathbb{R}$*
Si f est différentiable au point x_0 SSi elle est dérivable en x_0 et on a

$$df(x_0)(h)=hf^{'}(x_0)$$

.

PROPOSITION 29 *Si f admet des dérivées partielles sur un voisinage de x_0 et si les applications $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues en ce point, alors f est différentiable au point x_0.*

Remarque

L'existence des dérivées partielles au point x_0 n'entraîne pas la différentiabilité de f au point x_0.

PROPOSITION 30 *Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au point $x_0 \in U$. f admet des dérivées partielles en x_0 par rapport à chaque variable x_i et la différentielle totale s'écrit : pour tout $h=(h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$*

$$df(x_0)(h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i=\sum_{i=1}^{n}D_if(x_0)h_i$$

Cas de $\mathbf{R}^2$

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $(x_0,y_0)\in U$. f admet des dérivées partielles en (x_0,y_0) par rapport à chaque variable et la différentielle totale s'écrit : pour tout $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$$

Notons dx la différentielle de : $(h_1,h_2) \mapsto h_1$ ie $dx(h_1,h_2) = h_1$

dy la différentielle de : $(h_1,h_2) \mapsto h_2$ ie $dx(h_1,h_2) = h_2$

Alors

$$df(h_1,h_2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy)(h_1,h_2)$$

Donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

Exemple : 1
Calculons la différentielle de la fonction f définie par

$$f(x,y) = e^x \cos(x^2+y^2)$$

On a :

$$df = (\cos(x^2+y^2-2x\sin(x^2+y^2))e^x dx - 2ye^x \sin(x^2+y^2)dy$$

Définition 37 *On dit que f est différentiable sur E si f est différentiable en tout point de E*

Exemple 2

Soit une fonctionnelle f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = x^4 + 3x^2y$$

on a point $(1,-1)$

$$\begin{aligned}
f(1+h_1,-1+h_2) - f(1,-1) &= (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) + 2 && (3.1)\\
&= 1 + 4h_1 + 6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 + (3 + 6h_1 + 3h_1^2)(-1+h_2) + 2 && (3.2)\\
&= 1 - 3 + 2 + (4-6)h_1 + 3h_2 + [6h_1^2 + 4h_1^3 + h_1^4 - 3h_1^2 + 6h_1h_2 + 3h_1^2h_2] && (3.3)\\
&= -2h_1 + 3h_2 + \|(h_1,h_2)\|\varepsilon(h_1,h_2). && (3.4)
\end{aligned}$$

On vérifie bien que $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ quand $(h_1,h_2) \mapsto (0,0)$.
Donc f est différentiable au point $(1,-1)$ et sa différentielle est l'application linéaire :

$$Df(1,-1) : (h_1,h_2) \longmapsto -2h_1 + 3h_2$$

On remarque que :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 + 6xy$$

et

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2$$

et donc

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial x} = 4 - 6 = -2$$

et

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial y} = 3$$

3.2.1 Opérations sur les différentielles