Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables : Limites et continuité

2.1 Fonctions de plusieurs variables

2.1.1 Definition et Notation

Définition 23 *Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés de dimensions* n *et* m *respectivement.*
On appelle fonction de plusieurs variables une application f *d'une partie* $D \subseteq E$ *dans un ensemble* F *(* $f : D \subseteq E \to F$ *) L'ensemble* D *s'appelle le domaine de définition de* f*, qui à chaque vecteur* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *de son domaine de définition* D *de* E*, associe un unique vecteur* $y = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$
Et on note

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq E & \to & F \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x) = y = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \end{array}$$

Remarque 1

-Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ une application de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'appelle fonction numérique de plusieurs variables.

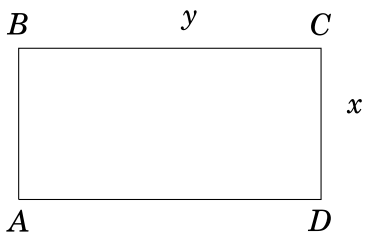
- Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}^2$ une application de E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ s'appelle fonction numérique de deux variables.

Notation :

- $\{f(x)/x \in D\}$ est appelée l'image de f.

- $\{(x, f(x))/x \in D\} \subseteq E \times F$ est appelé graphe de f.

Exemple 1 :
Considérons un rectangle ABCD. On appelle x la longueur AB et, y la longueur BC. On suppose $x > 0$ et $y > 0$.



On appelle $p(x,y)$, le périmètre de ABCD, et $S(x,y)$ l'aire de ce rectangle. On a alors : P et S sont définier sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p(x,y) = 2 \times (x+y) \quad \text{et} \quad S(x,y) = x \times y$$

donc les fonctions P et S sont des fonctions numiréque de deux variables.

Exemple 2 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :$f(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r > 0)$ est une fonction vectorielle de deux variables.(avec les coordonnées polaires).

Définition 24 *Soient D_1 et D_2 deux parties de E telles que $D_1 \subset D_2$ et f et g deux fonctions définies respectivement sur D_1 et D_2 On dit que g est un prolongement de f à D_2 si pour tout $x \in D_1$ on a $f(x) = g(x)$.*
Dans cette situation, on dit aussi que f est la restriction de g à D_1.

Exemple 3 :

$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ qu'on prolonge en une fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$
en posant $g(0,0) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

2.1.2 Fonctions Partielles

Définition 25 *(fonction partielle)*
Soit f une fonction de deux variables. La fonction partielle f_x est définie par :

$$f_x : x \mapsto f(x,y)$$

(la variable y est alors considérée comme un paramètre).
De même la fonction partielle f_y est définie par :

$$f_y : y \mapsto f(x,y)$$

(la variable x est alors considérée comme un paramètre).

2.2 Limite en un point

Définition 26 *(limite)*
Soient deux evn $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une application $f : A \to F$. Soit un point $x_0 \in \overline{A}$ adhérent à A et $\ell \in F$.
On dit que la fonction f admet ℓ comme limite au point x_0 ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

On écrit alors $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Remarque
La définition précédente s'écrit avec des boules fermées :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad f(\overline{B}(x_0,\eta) \cap A) \subset \overline{B}(\ell,\varepsilon)$$

et avec des boules ouvertes :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad f(B(x_0,\eta) \cap A) \subset B(\ell,\varepsilon)$$

Théoréme 14 *(Unicité de la limite)*
Si f a une limite en x_0, alors celle ci est unique.

Démonstration :
Supposons que f tend vers ℓ et ℓ' quand $x tend x_0$. Alors :
Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\eta_1 > 0$ (resp. $\eta_1 > 0$) on a $\|f(x) - \ell\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (resp. $\|f(x) - \ell'\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2}$)
Donc, soit $x \in A$ et $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ tel que $\|x - x_0\|_E \leq \eta$
on a $\|\ell - \ell'\|_F \leq \|f(x) - \ell\|_F + \|f(x) - \ell'\|_F \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Comme ε est quelconque, on a nécessairement $\ell = \ell'$

Remarque 2
Pour$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction d'une seule variable réelle à valeurs réelles on retrouve la définition de la limites de f au point x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 4

1. On considère la fonction

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 3x + y \end{array}$$

On montre que

$$\lim_{(x,y) \mapsto (1,1)} f(x,y) = 4$$

d'aprés la difénition de la limite, on montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists ?\eta > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(x,y) - (1,1)| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - 4| \leq \varepsilon$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists ?\eta > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (|x-1| < \eta \quad \text{et} \quad |y-1| < \eta) \Rightarrow |3x + y - 4| \leq \varepsilon$$

donc on a
$|x - 1| < \eta \Rightarrow 3 - 3\eta < 3x < 3 + 3\eta$
et $|y - 1| < \eta \Rightarrow 1 - \eta < y < 1 + \eta$
Donc $|f(x,y) - 4| < 4\eta \leq \varepsilon$
Alors $\eta \leq \frac{\varepsilon}{4}$
Donc on pose $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$
finallement

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta = \frac{\varepsilon}{4} > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |(x,y) - (1,1)| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - 4| \leq \varepsilon$$

donc

$$\lim_{(x,y) \mapsto (1,1)} f(x,y) = 4$$

2. Considérons la fonction de 2 variables $f : (\mathbb{R}^2, \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par

$$f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$$

Montrons par la difénition de la limite, que

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = 0$$

i.e

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists?\eta > 0, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)-(0,0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y)-0| \le \varepsilon$$

C'est à dire

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists?\eta > 0, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sqrt{x^2+y^2} < \eta \Rightarrow |\frac{6x^2y}{x^2+y^2}| \le \varepsilon$$

on a $\forall(x,y) \neq (0,0) \quad x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$
or $|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}| = 6 \times \frac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le 6|y|$
et on a $y^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow 6|y| \le 6\sqrt{x^2+y^2}$
Par conséquent $6\sqrt{x^2+y^2} \le \varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{\varepsilon}{6} = \eta$
finallement on donne $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$
donc

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\eta = \frac{\varepsilon}{6} > 0, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)-(0,0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y)-0| \le \varepsilon$$

alors

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = 0$$

Remarque 2

la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et,$\mathbb{R}^p$ qui sont des espaces de dimensions finies.car toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes ($\|.\|_\infty \le \|.\|_2 \le \|.\|_1 \le n\|.\|_\infty$)

Théoréme 15 *(Caractérisation séquentielle de la limite)*
Soient deux e.v.n. de dimension finie $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une application $f : A \to F$, Soit un point $x_0 \in \overline{A}$ adhérent à A et $\ell \in F$ On a l'équivalence entre :

1. $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.
2. $\forall(x_n)_n \in A, \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration

$\Rightarrow$ Supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.
soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$, tel que pour tout x de A, si $\|x - x_0\|_E \le \eta$, alors $\|f(x) - \ell\|_F \le \varepsilon$.
puisque x_0 est adhérent à A, il existe au moins une suite d'éléments de A convergeant vers x_0.
Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A convergeant vers x_0 . Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que , pour $n \ge n_0, \quad \|x_n - x_0\|_E \le \eta$. alors pour $n \ge n_0, \quad \|f(x_n) - \ell\|_F \le \varepsilon$.
On a monré que $\varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \ge n_0, \quad \|f(x_n) - \ell\|_F \le \varepsilon$ et donc la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ. Ainsi, si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ alors , pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, convergente , de limite x_0 , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ.

$\Leftarrow$ Supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A convergente , de limite x_0 , la suite $(f(x_n))_n$ converge vers ℓ.
Supposons par l'absurde que $f(x)$ ne tende pas vers ℓ quand x tend vers x_0. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in A/ \quad (\|x - x_0\|_E \leq \eta \quad \text{et} \quad \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon)$$

ε est ainsi fixé.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il exixte $u_n \in A$ tel que $\|u_n - x_0\|_E \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(u_n) - \ell\|_F > \varepsilon$.
Puisque $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la suite $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de A, convergente, de limite x_0. D'aprés ce qui précéde, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$ ce qui contredit le fait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f(u_n) - \ell\|_F > \varepsilon$.
Donc, $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0.

Théoréme 16 *(Théorème de majoration)*
On considère une norme $\|.\|_E$ sur E.
On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un voisinage $V \in \vartheta_{x_0}$ tels que :

1. $\forall x \in V, \quad \|f(x) - \ell\|_F \leq g(\|x - x_0\|_E$
2. $g(\theta) \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$
   Alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$

Démonstration
Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{0} g = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\theta| < \eta$ alors $0 \leq g(\theta) < \varepsilon$
Mais alors si $x \in V \cap B(x_0, \eta)$.
alors $\theta = \|x - x_0\|_E \leq \eta$ et $\|f(x) - \ell\|_F \leq g(\|x - x_0\|_E \leq \varepsilon$
Donc $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$

Remarque : On se sert souvent de ce théorème pour montrer qu'une application n'admet pas de limite en un point.
Posons par exemple pour $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (0,0).

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

On a $f(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pourtant $(0, \frac{1}{n}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (0,0)$ $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} (0,0)$.
Donc par le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, f ne peut avoir de limite en $(0,0)$.

PROPOSITION 20 *(On définit également des limites « infinies ») :*

1. *Si $f : X \subset E \to \mathbb{R}$, on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ lorsque*

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$$

2. *Si $f : \mathbb{R} \to (F, \|.\|_F)$,on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

3. *Si* $f : X \subset E \to F$, *on dit que* $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell$ *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R > 0, \quad \forall x \in X \quad \|x\|_E \geq R \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

Théoréme 17 *(THEOREME DES GENDARMES)*
Soient f ; g et h trois fonctions de $E \to F$ *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$
2. *il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ *tel que pour tout* $x \in \{x \in E / 0 < \|x - x_0\| < \alpha\}$
   tel que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

   Alors $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$

PROPOSITION 21 *(PERMUTATION DES LIMITES)*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$
Supposons de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ *existe*
et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ *existe. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} (\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = \lim_{y\to y_0} (\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \ell$$