



Université Abdelmalek ESSAADI (UAE)  
Ecole Nationale des Sciences Appliquées  
Al Hoceima, Maroc



# ANALYSE 3 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

AP2 : DEUXIÈME ANNÉE CYCLE PRÉPARATOIRE

RÉDIGÉ PAR

**MOUSSAID AHMED**

*Professeur Assistant  
Département de Mathématiques-Informatique  
ENSAH*

$\mathcal{CT}$

2020/2021



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Espace Métriques et Espace Vectoriels Normés</b>	<b>4</b>
1.1	Espace Métriques . . . . .	4
1.1.1	Distance . . . . .	4
1.1.2	Espace Métriques . . . . .	6
1.1.3	Suites et étude de la convergence dans un Espace métrique	8
1.1.4	Suites de Cauchy - Espace métrique complet. . . . .	9
1.2	Espace Vectoriels Normés . . . . .	10
1.2.1	Distance associée à une norme . . . . .	12
1.2.2	Normes Équivalentes . . . . .	13
1.2.3	Normes subordonnées . . . . .	14
1.2.4	Suites dans un K-espace vectoriel normé. . . . .	14
1.2.5	Suites extraites . . . . .	16
1.2.6	Espace vectoriel normé complet : . . . . .	18

# Chapitre 1

## Espace Métriques et Espace Vectoriels Normés

### 1.1 Espace Métriques

#### 1.1.1 Distance

**Définition 1** Soit  $X$  un ensemble. Une application :

$$\begin{aligned} d : X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

est appelée distance sur  $X$  si elle vérifie :

pour tout  $x, y$  et  $z \in X$ , on ait

1. Positivité :  $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
2. Séparation :  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. Symétrie :  $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$
4. Inégalité triangulaire :  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

#### Quelques Exemples :

1. Prenons  $X = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on a une distance définie, pour tous  $x$  et  $y \in X$  par

$$d(x, y) = |x - y|$$

appelée distance usuelle.

où  $|\cdot|$  : représente la valeur absolue dans  $\mathbb{R}$  ou le module dans  $\mathbb{C}$ .

2. Prenons  $X = \mathbb{K}^n$ , ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Pour tous  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbb{K}$ , l'application définie par :

$$d_1(x, y) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d_\infty(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

alors  $d_1$ ;  $d_2$  et  $d_\infty$  sont des distances sur  $\mathbb{K}^n$ ;  $d_2$  est appelée distance euclidienne classique sur  $\mathbb{K}^n$ .

**PROPOSITION 1** *Nous avons les propriétés suivantes.*

1. Pour  $x_1; \dots; x_n$  des points de  $X$  on a :

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

2. Pour tout  $x, y$  et  $z$  dans  $X$  on a :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

3. Pour  $x; x'$  et  $y; y'$  dans  $X$  on a :

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

**Démonstration.**

1. La démonstration de (1) est immédiate par récurrence sur  $n$ .

2. Pour (2), nous avons, en effet,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

ce qui donne

$$d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$$

En permutant  $x$  et  $z$ , on a de la même manière

$$d(z, y) - d(y, x) \leq d(x, z)$$

ce qui donne finalement

$$-d(x, z) \leq d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$$

3. Pour  $x; x'$  et  $y; y'$  dans  $X$  on a

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$$

d'où

$$d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + d(y', y)$$

En permutant les couples  $(x; y)$  et  $(x'; y')$  on a

$$d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y', y)$$

**PROPOSITION 2** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux distances sur  $X$ . On suppose qu'il existe  $\alpha, \beta > 0$  tels que

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Alors  $d_1$  et  $d_2$  sont dites équivalentes.

### 1.1.2 Espace Métriques

**Définition 2** On appelle Espace métrique tout ensemble non vide  $X$  muni d'une distance  $d$  et on le note  $(X; d)$ .

**Définition 3** : (Boules et Sphères) Soit  $(X; d)$  un espace métrique.

1. Pour  $a \in X$  et  $r \geq 0$ , on définit les ensembles suivants :
  - $B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) < r\}$ , boule ouvert de centre  $a$  et rayon  $r$ .
  - $\overline{B}(a, r) = \{x \in X, d(x, a) \leq r\}$ , boule fermée de centre  $a$  et rayon  $r$ .
  - $S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) = r\}$ , sphère de centre  $a$  et rayon  $r$ .
2. Une partie  $U \subset X$  est dite ouverte si

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0 \quad \text{t.q.} \quad B(a, r) \subset U$$

3. Une partie  $F \subset X$  est dite fermée si son complémentaire  $F^c = X \setminus F$  est ouvert.
4. Une partie  $A \subset X$  est dite bornée si

$$\exists M > 0, \quad \forall x, y \in A, \quad d(x, y) \leq M$$

#### Lemme

Si  $x$  est dans  $X$ , pour  $\epsilon < \epsilon'$ ,  $B(x, \epsilon) \subset B(x, \epsilon')$ , et  $\overline{B(x, \epsilon)} \subset \overline{B(x, \epsilon')}$

**Théorème 1** (Propriétés des ensembles ouverts) Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Alors

1.  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts.
2. Si  $(\vartheta_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque d'ouverts, alors  $\cup_{i \in I} \vartheta_i$  est ouvert.
3. Si  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  sont des ouverts, alors  $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \dots \cap \vartheta_n$  est ouvert.

#### **Démonstration :**

1. Evident.
2. Soient  $\vartheta = \cup_{i \in I} \vartheta_i$  et  $x \in \vartheta$  alors  $\exists i_0 \in I$  tel que  $x \in \vartheta_{i_0}$  comme  $\vartheta_{i_0}$  est ouvert  $\Rightarrow \exists r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \vartheta_{i_0} \Rightarrow B(x, r) \subset \cup_{i \in I} \vartheta_i = \vartheta$  comme  $x \in \vartheta$  était quelconque  $\Rightarrow \vartheta$  est ouvert.

3. Soit  $x \in \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \dots \cap \vartheta_n$  alors  $x \in \vartheta_1$ , et  $x \in \vartheta_2$  et  $\dots$  et  $x \in \vartheta_n$ .  
 comme  $\vartheta_i$  est ouvert, il existe  $r_1 > 0, r_2 > 0, \dots, r_n > 0$  tels que  $B(x, r_1) \subset \vartheta_1$   
 et  $B(x, r_2) \subset \vartheta_2$  et,  $\dots$  et  $B(x, r_n) \subset \vartheta_n$ .  
 soit  $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) > 0$   
 Alors  $B(x, r) \subset \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \dots \cap \vartheta_n$ .  
 donc  $\vartheta_1 \cap \vartheta_2 \cap \dots \cap \vartheta_n$  est ouvert.

**Définition 4 :** (Intérieur, adhérence) Soit  $(X; d)$  un espace métrique.

Pour  $A \subset X$ ,

On définit l'intérieur de  $A$ ,  $A^\circ$ , par

$$A^\circ = \bigcup_{U \text{ Ouvert}, U \subset A} U$$

et l'adhérence de  $A$ ,  $\overline{A}$ , par

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, F \supset A} F$$

**Définition 5 :** (voisinage, intérieur) Soit  $(X; d)$  un espace métrique.

1. Soit  $V$  un sous-ensemble de  $X$  et  $x \in X$  : on dit que  $V$  est un voisinage de  $x$  s'il contient une boule ouverte de centre  $x$ .
2. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$  : on dit qu'un élément  $a$  de  $X$  est un point intérieur à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $a$  ou, ce qui est équivalent, s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a; r) \subset A$ . On appelle intérieur de  $A$  et on note  $A^\circ$  l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .

**PROPOSITION 3** Soit  $A$  est un sous ensemble d'un espace métrique  $F$ . Alors :

- $A^\circ$  est un ouvert contenu dans  $A$ .
- Si  $U$  est un ouvert et  $U \subset A$ , alors  $U \subset A^\circ$ .  
Autrement dit,  $A^\circ$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .
- $\overline{A}$  est un fermé contenant  $A$ .
- Si  $F$  est un fermé et  $F \supset A$ , alors  $F \supset \overline{A}$   
Autrement dit,  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

### Remarque

1-Si  $x$  appartient à  $A^\circ$  il existe,  $\varepsilon > 0$ , tel que  $x \in B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$

2- Un point  $x$  est dans  $\overline{A}$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon)$  intersecte  $A$ .

**PROPOSITION 4** Soient  $A$  et  $B$ , deux sous ensembles d'un espace métrique  $E$ . Alors :

1. On a  $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$  et  $\overline{A} \subset \overline{B}$
2.  $x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset A$
3.  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
4.  $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A = A^\circ$
5.  $A$  fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
6.  $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A$  est une union de boules ouvertes.

**Démonstration.**(Exercice)

### 1.1.3 Suites et étude de la convergence dans un Espace métrique

**Définition 6** :(une suite extraite)

Si  $(x_n)$  est une suite, on notera une suite extraite (=sous-suite) soit par  $(x_{n_k})$ , soit par  $(x_{\varphi(n)})$ . Dans le premier cas  $n_0, n_1, \dots$ , est une suite strictement croissante d'entiers ; dans le second,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante. Par abus de notation, si tous les termes d'une suite  $(x_n)$  appartiennent à un ensemble  $X$ , on écrit  $(x_n) \subset X$ .

**Définition 7** :(une suite convergente)

Soit  $(X; d)$  un espace métrique. Si  $(x_n) \subset X$  et  $x \in X$ , alors, par définition,  $x_n \rightarrow x$ ,  $((x_n)$  converge vers  $x$ ) si et seulement si  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

Une suite  $(x_n)$  est convergente s'il existe un  $x \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x$ .

On écrit alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$

Traduction de  $x_n \rightarrow x$  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

On dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge ou est divergente si elle n'est pas convergente.

Il est évident, à partir de la définition, que si  $x_n \rightarrow x$ , et si  $(x_{n_k})$  est une sous-suite, alors  $x_{n_k} \rightarrow x$

**Rq :**

Dans  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle, cette définition coïncide avec la définition usuelle de la convergence.



**Définition 8** : (valeur d'adhérence) Soit  $(X; d)$  un espace métrique. Si  $(x_n) \subset X$  et  $x \in X$ , alors, par définition,  $x$  est une **valeur d'adhérence** de la suite  $(x_n)$  s'il existe une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que  $x_{n_k} \rightarrow x$ .

### **Exemple**

Dans  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle, soit  $x_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Alors 1 est une valeur d'adhérence de  $(x_n)$ , car  $x_{2n} \rightarrow 1$ .

**PROPOSITION 5** Soit  $(X; d)$  un espace métrique.

1. Si une suite  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  d'éléments de  $X$  converge vers  $x \in X$ , alors  $x$  est unique : on dit alors que  $x$  est la limite de la suite  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
2. on peut énoncer la définition de la convergence d'une suite avec le langage des voisinages : une suite  $(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  d'éléments de  $X$  converge vers  $x \in X$  si pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in V$
3. Si  $x_n \rightarrow x$ , alors  $x$  est la seule valeur d'adhérence de la suite  $(x_n)$ .
4. une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $X$  converge vers  $x \in X$  si et seulement si la suite de réels positifs  $(d(x_n; x))_n$  converge vers 0.

### 1.1.4 Suites de Cauchy - Espace métrique complet.

**Définition 9** : (Suites de Cauchy) Soit  $(x_n)_n$  une suite dans un espace métrique  $(X; d)$ . On dit que  $(x_n)_n$  est suite de Cauchy si elle satisfait :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall m \geq n_0, \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

### **Remarque**

La définition est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq 0, \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon$$

### **Exemple**

dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $(\frac{1}{n})$  est de Cauchy.

Autrement dit, une suite de Cauchy est une suite dont les éléments sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang. En effet, on peut aisément montrer qu'une suite est de Cauchy si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une boule  $B_\varepsilon$  (ouverte ou fermée, cela ne change rien) de rayon  $\varepsilon$  (dont le centre n'est pas précisé mais dépend possiblement de  $\varepsilon$ ) qui contient tous les éléments de la suite à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \geq 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad x_n \in B_\varepsilon$$

La remarque essentielle concernant les suites de Cauchy est la suivante.

**PROPOSITION 6** - Dans un espace métrique  $(X; d)$  toute suite convergente est de Cauchy.

**Preuve :** Soit  $(x_n)_n$  une suite qui converge vers une limite  $x$ . Pour  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  fixé, on peut trouver  $n_0$  tel que  $d(x_n; x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $n \geq n_0$ . Ainsi, si  $n \geq n_0$  et  $m \geq n_0$ , on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

Ceci montre bien que la suite est de Cauchy.

**PROPOSITION 7** 1. Dans un espace métrique  $(X; d)$  Toute suite de Cauchy est bornée. Ceci résulte essentiellement du fait que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $x_n \in B_f(x_{n_0}; \varepsilon)$ .

2. Si les métriques  $d$  et  $d'$  sont équivalentes sur  $X$ , alors toute suite de Cauchy pour  $d$  est une suite de Cauchy pour  $d'$ .

**Définition 10 :** (Espaces métriques complets)

Un espace métrique  $(X; d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy dans  $(X; d)$  est convergente.

**PROPOSITION 8** 1. Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $F \subset X$ . Alors  $(F, d)$  est complet si et seulement si  $F$  est fermé dans  $X$

2. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Si  $X$  est compact alors il est borné : il existe  $M > 0$  tel que  $\forall x, y \in X, d(x, y) \leq M$ .

## 1.2 Espace Vectoriels Normés

On étudie des espaces vectoriels sur le corps  $K$  avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$

**Définition 11 :** (Norme)

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel réel. Une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est appelée norme sur  $E$  si elle vérifie

1. Positivité :

$$\forall x \in E, \quad N(x) \geq 0$$

2. Séparation :

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3. Homogénéité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

4. Inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

**Rq :** Le plus souvent, on note une norme par  $\|\cdot\|$ .

### - Exemples classiques

1. Les applications définies par  $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$

(a)  $N_1(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|X\|_1$

(b)  $N_2(X) = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

(c)  $N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \|X\|_\infty$

Sont des Normes dans  $K^n$

2. Les applications définies par  $\forall f \in C^0([a, b], K)$

(a)  $N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt$

(b)  $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

(c)  $N_\infty(f) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$

Sont des normes sur  $C^0([a, b], K)$

### **Req**

Lorsque seules les propriétés (1), (3) et (4) de la définition sont vérifiées, on dit que  $N$  est une semi norme.

**Définition 12 :** (Espace Vectoriels Normés) Un espace **vectoriel normé** est un couple  $(E, N)$  où  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel et  $N$  est une norme sur  $E$  (en abrégé. e.v.n.).

**PROPOSITION 9** Soient  $E$  un  $K$ - espace vectoriel et  $N$  une norme sur  $E$  alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$$

Démonstration :

Soit  $(x, y) \in E^2$

$$N(x) = N(x + y + (-y)) \leq N(x + y) + N(-y) = N(x + y) + N(y) \text{ car } N(-y) = N(y)$$

$$\text{donc } N(x) - N(y) \leq N(x + y)$$

En échangeant les rôle de  $x$  et  $y$ , on obtient

$$N(y) - N(x) \leq N(x + y)$$

et finalement

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$$

$$\textbf{PROPOSITION 10} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|x_k\|$$

### 1.2.1 Distance associée à une norme

**Définition 13** : Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

Pour  $(x, y) \in E^2$ , la distance de  $x$  à  $y$  est  $d(x, y) = \|x - y\|$

**PROPOSITION 11** Si  $N$  est une norme sur  $E$ , l'application définie par :

$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = N(x - y)$ , est une distance sur  $E$  appelée distance associée (ou liée) à la Norme  $N$ .

Démonstration :

- $d$  est bien une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}^+$  ie.  $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) \geq 0$ .
- pour  $(x, y) \in E^2$ 

$$d(x, y) = 0 \iff N(x - y) = 0$$

$$\iff x - y = 0$$

$$\iff x = y$$
- pour  $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned} d(y, x) &= N(y - x) \\ &= N(-(x - y)) \\ &= |-1|N(x - y) \\ &= N(x - y) \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

— pour  $(x, y, z) \in E^3$

$$\begin{aligned} d(x, z) &= N(x - z) \\ &= N((x - y) + (y - z)) \\ &\leq N(x - y) + N(y - z) \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

### 1.2.2 Normes Équivalentes

**Définition 14** : Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel puis  $N$  et  $N'$  deux normes sur  $E$ ,  $N'$  est équivalente à  $N$  si et seulement si il existe deux réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

#### Exercice

Dans  $E = \mathbb{R}^n$  Montrer que  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  des normes deus à deux équivalentes.

**Définition 15** : Si  $F$  est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé  $E$ , la restriction à  $F$  de la norme de  $E$  est une norme sur  $F$ , appelée norme induite.

#### **Rq :**

Evident car les propriétés sont vraies pour tous les éléments de  $E$ , donc pour ceux de  $F$ . La norme induite sur  $F$  sera notée comme la norme sur  $E$ .

**Théorème 2** Si  $E = \prod_{k=1}^n E_k$  est un produit d'espaces vectoriels  $E_k$  normés par la norme  $N_k$ , l'application  $N$  définie sur  $E$  par  $N(x) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k)$  si  $x = (x_1, \dots, x_p)$  est une norme sur  $E$  appelée norme produit.

#### **Démonstration :**

C'est évidemment une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

\*  $N(x) = 0$  si et seulement si  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $N_k(x_k) = 0$ , donc si  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $x_k = 0$  donc  $x = 0$

\* Soit  $\lambda \neq 0$  :

$$N(\lambda x) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(\lambda x_k) = \max_{1 \leq k \leq p} |\lambda| N_k(x_k)$$

$$\text{Or } \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad N_k(x_k) \leq N(x).$$

$$\text{Donc : } \forall x \in E, \quad N(\lambda x) \leq |\lambda| N(x). \text{ Donc } \forall x \in E, \quad N\left(\frac{1}{|\lambda|} \lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda x)$$

Donc :  $\forall x \in E, \quad |\lambda|N(x) \leq N(\lambda x)$ .

Donc si  $\lambda \neq 0$  on a  $\forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Pour  $\lambda = 0$ , l'égalité est évidente.

Donc :  $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in K \quad |\lambda|N(x) \leq N(\lambda x)$ .

$$* \quad N(x + y) = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k + y_k).$$

Or  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad N_k(x_k + y_k) \leq N_k(x_k) + N_k(y_k)$

Donc  $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad N_k(x_k + y_k) \leq N(x) + N(y)$ .

Donc  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

### 1.2.3 Normes subordonnées

**Définition 16** : Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés et  $T$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . La norme de  $T$  est :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

dite norme subordonnée à la norme  $\|\cdot\|$ .

### 1.2.4 Suites dans un K-espace vectoriel normé.

#### Suites bornées

**Définition 17** Soit  $(E, N)$  un K-espace vectoriel normé.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  (une suite d'éléments de  $E$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ )

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $\exists M \in \mathbb{R}^+$  telque  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(U_n) \leq M$

**Théorème 3** Soit  $E$  un K-espace vectoriel.

Soient  $N$  et  $N'$  deux normes sur  $E$ .

Si  $N$  et  $N'$  sont équivalents, alors pour toute suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$ ,

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de l'espace vectoriel normé  $(E, N)$  si et seulement si

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de l'espace vectoriel normé  $(E, N')$

#### Démonstration :

Par hypothèse, il existe deux réels strictement positifs telque  $\alpha N \leq N' \leq \beta N$ .

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $E$ .

On suppose la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée pour la norme  $N$ .

il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  telque  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(U_n) \leq M$ .

Mais alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$N'(U_n) \leq \beta N(U_n) \leq \beta M$$

Donc, la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par la norme  $N'$ .

En échangeant les rôles de  $N$  et  $N'$ , on a aussi, si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par

la norme  $N'$ , alors la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est borné par la norme  $N$ .

Finalement, pour toute suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'élément de  $E$ , la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par la norme  $N$  ssi  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée par la norme  $N'$ .

### Suites convergentes

**Définition 18** Soit  $(E, N)$  un  $K$ -espace vectoriel normé.

Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  et  $l \in E$ .

La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $l$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow N(U_n - l) \leq \varepsilon)$ .

La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge ssi il existe  $l \in E$  telque la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $l$ . Dans le cas contraires la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est diverge.

### Commentaire

une définition équivalente est :

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow U_n \in B_f(l, \varepsilon))$

**Théorème 4**  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $l \Leftrightarrow (u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $0_E \Leftrightarrow (N(U_n - l))_{n \in \mathbb{N}}$  Converge vers  $0_E$ .

**Théorème 5** Si une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , alors  $l$  est unique.

### Commentaire

Si une suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , on peut dire que  $l$  est la limite de  $U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ .

**Théorème 6** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel, soient  $N$  et  $N'$  deux Normes sur  $E$ . Si  $N$  et  $N'$  sont équivalentes, alors pour tout  $l \in E$ , et toute suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans  $(E, N)$  si et seulement si  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans  $(E, N')$ .

### Démonstration.

Soient  $N$  et  $N'$  deux normes équivalentes. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs tels que  $\alpha N \leq N' \leq \beta N$ .

Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ . Supposons que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans dans l'espace vectoriel normé  $(E, N)$ . Alors,

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow N(U_n - l) \leq \varepsilon)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$   $N(U_n - l) \leq \frac{\varepsilon}{\beta}$ .

Pour  $n \geq n_0$ , on a

$$N'(U_n - l) \leq \beta N(U_n - l) \leq \beta \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow N'(U_n - l) \leq \varepsilon)$$

et donc que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans l'espace vectoriel normé  $(E, N')$ . En échangeant les rôles de  $N$  et  $N'$ , ceci montre aussi que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans l'espace vectoriel normé  $(E, N')$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans l'espace vectoriel normé  $(E, N)$ .

### Exemple.

Reprenons l'exemple des normes  $N$  et  $N'$  définies sur  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  par  $N(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , posons  $f_n(x) = x^n$ . La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $E$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,  $N(f_n) = \frac{1}{n+1}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $N'(f_n) = 1$ . Donc, la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 dans l'espace vectoriel normé  $(E, N)$  et ne converge pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé  $(E, N')$ . On en déduit que les normes  $N$  et  $N'$  ne sont pas des normes équivalentes.

**Théorème 7** *Si la suite  $(U_n)_n$  converge (pour la norme  $N$ ), alors  $(U_n)_n$  est bornée (pour la même norme  $N$ ).*

### Démonstration.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  convergeant vers un certain élément  $l$  de  $E$ . Il existe un entier  $n_0$  strictement positif tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $N(U_n - l) \leq 1$ . Pour  $n \geq n_0$ , on a

$$N(U_n) = N(U_n - l + l) \leq N(U_n - l) + N(l) \leq 1 + N(l)$$

Mais alors, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$N(U_n) \leq \max(N(U_0 - l), \dots, N(U_{n_0-1} - l), 1 + N(l))$$

Ceci montre que la suite  $(u_n)_n$  est bornée.

**Théorème 8** 1. *Si la suite  $(U_n)_n$  converge vers  $l$  et la suite  $(V_n)_n$  converge vers  $l'$ , Alors pour tout  $(\alpha, \beta) \in K^2$ , la suite  $(\alpha U_n + \beta V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha l + \beta l'$*   
 2. *Si la suite  $(U_n)_n$  converge vers  $l$  et la suite  $(V_n)_n$  converge vers  $l'$ , alors la suite  $(U_n V_n)_n$  converge vers  $ll'$*

**Théorème 9** *(Liens entre suite et suites coordonnées dans une base de l'espace)*

Soit  $E$  un espace de dimension finie  $p \in \mathbb{N}^*$

Soit  $\beta = (e_1, \dots, e_p)$  une base donnée de  $E$ .

Soient  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et  $l$  un élément de  $E$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $U_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k$  et  $l = \sum_{k=1}^p l_k e_k$

la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$  la suite numérique  $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l_k$ .



### 1.2.5 Suites extraites

**Définition 19** Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

une suite extraite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de la forme  $(U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  strictement croissante sur  $\mathbb{N}$ .

**Théorème 10** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de l'espace normée  $(E, N)$ .

Si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $(E, N)$ , alors toute suite extraite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de même limite que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ce résultat s'énonce encore de la façon suivante : toute suite extraite d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé est convergente dans cet espace de même limite.

**PROPOSITION 12** Une suite extraite d'une suite convergente est convergente. Toute suite extraite d'une suite  $(u_n)$  convergeant vers une limite  $l$  est une suite convergeant vers  $l$

**COROLLAIRE 1 (Critère de divergence d'une suite)** Soit  $(u_n)$  une suite d'un evn  $(E, \|\cdot\|)$ . On suppose qu'il existe deux suites extraites  $u_{\varphi(n)}$  et  $u_{\varphi'(n)}$  telles que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{\varphi'(n)} = \ell'$
- $\ell \neq \ell'$

Alors la suite  $(u_n)$  est divergente.

**PROPOSITION 13** Deux suites extraites particulières

Si les deux suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite  $\ell \in E$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Exemple :**

Si  $\overline{U_n} = (-1)^n$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$  donc la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est diverge.

**Définition 20** Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  et soit  $\ell \in E$ .

$\ell$  est une valeur d'adhérence de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si et seulement si il existe une suite extraite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite  $\ell$ .

**Théorème 11** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

Si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une valeur d'adhérence et une seule, à savoir sa limite. Ainsi, si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

**Théorème 12** (Théorème de Bolzano-Weierstrass.)

Soit  $E$  un  $K$ -espace de dimension finie.

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente ou encore toute suite bornée d'éléments de  $E$  admet au moins une valeur d'adhérence.

**Définition 21** (SUITES DE CAUCHY)

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$ . On dit que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tous

$$n, m \geq N \Rightarrow \|U_n - U_m\| < \varepsilon$$

**Théorème 13** Toute suite convergente  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est une suite de Cauchy.

**Démonstration :**

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|U_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Donc si } n \geq n_0, \quad \text{et } m \geq n_0 : \quad \|U_n - U_m\| \leq \|U_n - \ell\| + \|U_m - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

**PROPOSITION 14** Soit  $(E, N)$ , un espace vectoriel normé. Alors :

1- Si deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes sur  $E$ , alors, toute suite de Cauchy pour  $N_1$  est également une suite de Cauchy pour  $N_2$ .

2- Toute suite de Cauchy est bornée

**PROPOSITION 15** Caractérisation séquentielle des fermés.

Soit  $(E, N)$ , un espace vectoriel normé, et  $A$ , un sous-ensemble de  $E$ . Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est fermé dans  $E$ .
2. Toute suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\ell \in E$  implique que  $\ell \in A$

**1.2.6 Espace vectoriel normé complet :**

**Définition 22** Espace Vectoriel Normé complet. Soit  $(E, N)$ , un espace vectoriel normé. On dit que  $E$  est complet si, et seulement si toute suite de Cauchy de  $E$  converge dans  $E$ .

**PROPOSITION 16** L'espace vectoriel  $\mathbb{R}$  muni de la norme euclidienne est un espace vectoriel normé complet.

**Démonstration.**(exercice)

**PROPOSITION 17** Soient  $(E_1, N_1)$  et  $(E_2, N_2)$ , deux espaces vectoriels normés complets. Alors, l'espace produit  $E_1 \times E_2$  est également complet.

**PROPOSITION 18** Soit  $(E, N)$ , un espace vectoriel normé complet. Soit  $X$ , une partie de  $E$ . Alors,  $X$  est complète si, et seulement si  $X$  est fermée.

**Démonstration** : On va démontrer les deux implications :

- Sens  $\Rightarrow$  :

supposons  $X$  complète dans  $E$  complet. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de  $X$  convergent dans  $E$ . On note  $\ell$  sa limite dans  $E$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy (car convergente) dans  $E$ , donc en particulier dans  $X$  qui est complet. On en déduit l'existence de  $\ell' \in X$  tel que  $U_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{dans } X} \ell'$ . Or,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant convergente dans  $E$ , par unicité de la limite,  $\ell' = \ell \in X$ . On retrouve la caractérisation séquentielle des fermés. Ainsi,  $X$  est une partie fermée.

- Sens  $\Leftarrow$

supposons  $X$  fermée. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de Cauchy d'éléments de  $X$ . En particulier,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy de  $E$ , donc est convergente vers  $\ell \in E$ . Mais puisque  $X$  est fermée, toujours d'après la caractérisation séquentielle des fermés, il s'ensuit que  $\ell \in X$ . Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , converge dans  $X$ .

□