Chapitre 4

Linéarité Locale et Fonctions implicites

4.1 Linéarité Locale :

4.1.1 Jacobien d'une application :

rappele :(matrice jacobienne)

Définition 46 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
On suppose f *différentiable en* $a \in \mathbb{R}^n$. *La matrice de l'application différentielle de* f *qu'on l'appelle* ***matrice jacobienne*** *de* f *en* a *est :*

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Théoréme 32 *Soit* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$
Si f *est différentiable au point* $a \in \mathbb{R}^n$. *, alors les dérivées partielles* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *existent pour tout* $i \in \{1, 2, ..., p\}$ *et* $j \in \{1, 2, ..., n\}$. *La différentielle de* f *au point* a *est alors la matrice Jacobienne de* f *au point* a.
Réciproquement, si f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans* A *alors* f *est différentiable en tout point de* A.

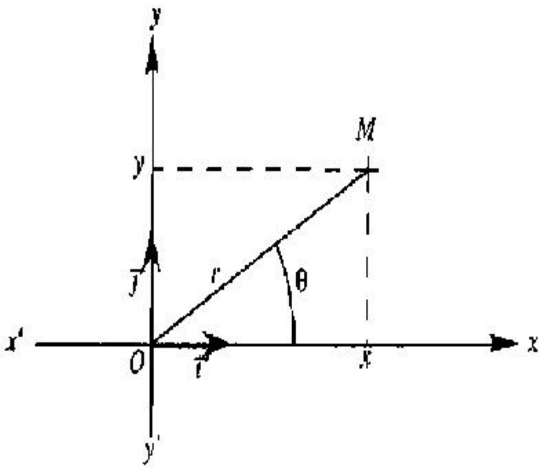
Le Jacobien

Définition 47 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application différentiable ou de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur un domaine* $D \subset \mathbb{R}^n$
Alors le jacobien de f *est le déterminant de la matrice jacobienne* $J_a(f)$ *de* f *(C'est donc une application de* D *vers* $\mathbb{R}$*). noté* $jac_f(x)$ *Ce déterminant s'écrit :*

$$jac_f(x) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} = det(J_a(f))$$

Remarque : Le jacobien d'une fonction ne peut être défini que si la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, puisque seules les matrices carrées ont un déterminant.

exemple 1 (Coordonnées polaires)



On considère la fonction φ , définie sur une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

L'interprétation graphique de ce changement de variable est classique : pour un point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, r désigne la longueur du segment $[OM]$ et θ désigne une des mesures modulo 2π de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et la demi-droite $[OM)$. En utilisant les nombres complexes, il est intéressant de noter que

$$r = |x + iy| \quad \text{et} \quad \theta = arg(x + iy)[2\pi]$$

Les fonctions coordonnées de φ sont $\varphi_1 = r\cos(\theta)$ et $\varphi_2 = r\sin(\theta)$
Elles sont clairement indéfiniment continûment dérivables, donc φ est différentiable et sa matrice jacobienne est, en (r,θ) :

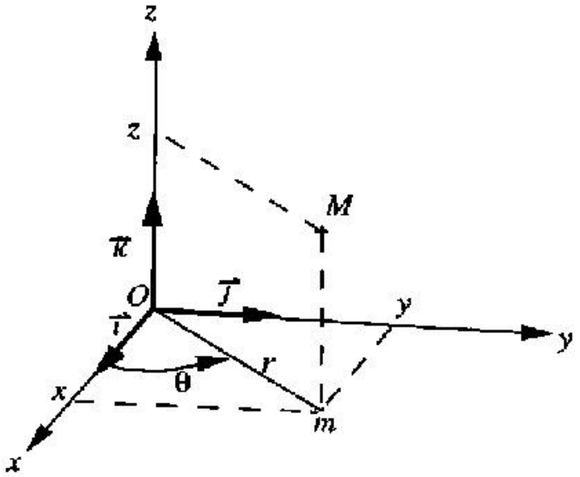
$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\varphi(r,\theta) = det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

exemple 2 (Coordonnées cylindriques)

prendre les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé direct de l'espace consiste à remplacer les deux premières coordonnées (x, y) de ce point par les coordonnées polaires (r,θ).



Plus précisément, on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$\varphi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

Il n'y a pas beaucoup de différences avec les coordonnées polaires. L'interprétation graphique est la suivante :

Si M est le point de coordonnées (x,y,z) dans le repère orthonormé direct de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, et si M n'est pas un point de l'axe (Oz), on considère le projeté orthogonal m de M sur le plan (Oxy); r représente la longueur Om, et θest une mesure de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{Om}$, le plan (Oxy) étant orienté par le vecteur $\overrightarrow{k}$, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = +\frac{\pi}{2}$.
L'application φ est évidemment de classe est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ et est donc différentiable. Les fonctions coordonnées de φ sont $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\theta,z) = r\cos(\theta) \\ \varphi_2(r,\theta,z) = r\sin(\theta) \\ \varphi_3(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

Sa matrice jacobienne en (r,θ,z) est :

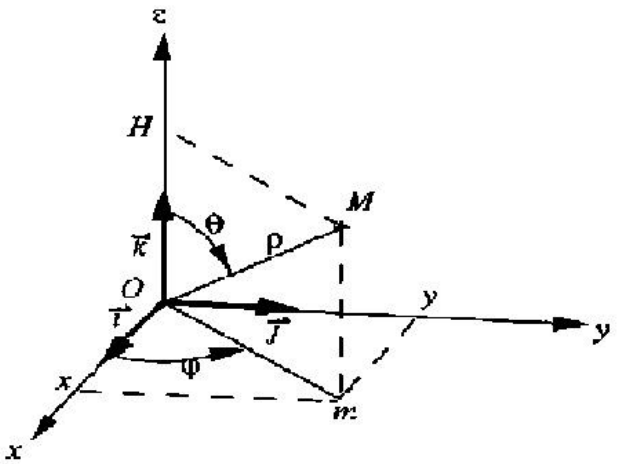
$$J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}(r,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\varphi(r,\theta) = det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

exemple 3 (Coordonnées sphériques)

Ce changement de variable dans 3 est un peu plus difficile à manier que le précédent.



Commençons par son interprétation géométrique. On considère encore un point M, de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On suppose ici aussi que $M \notin (OZ)$, et on appelle m le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy), et H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz).
On appellera ρ la longueur OM (à ne pas confondre avec $r = Om$ des coordonnées cylindriques).
θ c'est l'angle entre l'axe (Oz) orienté par $\overrightarrow{k}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Cet est toujours « positif» (il est compris entre 0 et π).
La troisième coordonnée est aussi un angle, c'est l'angle φ entre l'axe (Ox) orienté par $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{Om}$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH}$
avec d'une part

$$\overrightarrow{OH} = \rho\cos(\theta)\overrightarrow{k}$$

et d'autre part,

$$\overrightarrow{Om} = \|Om\|(\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \sin(\varphi)\overrightarrow{j}$$

tandis que

$$\|Om\| = \rho\sin(\theta)$$

de sorte que finalement

$$\overrightarrow{OM} = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{j} + \rho\cos(\theta)\overrightarrow{k}$$

C'est ce calcul qui justifie la définition rigoureuse des coordonnées sphériques :
On considère la fonction ϕ définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ (en fait, une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times]0, \pi[\times \mathbb{R}$ par

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\theta))$$

Les fonctions coordonnées de ϕ sont (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3) avec :

$$\begin{cases} \phi_1(\rho,\theta,\varphi)=\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \phi_2(\rho,\theta,\varphi)=\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \phi_3(\rho,\theta,\varphi)=\rho\cos(\theta) \end{cases}$$

Ces fonctions sont évidemment indéfiniment continûment dérivables, donc ϕ est différentiable et sa matrice jacobienne en (ρ,θ,φ) est :

$$J_\phi(\rho,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_2}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_3}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\phi(\rho,\theta,\varphi)=det(J_\phi(\rho,\theta,\varphi))=\begin{vmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}=\rho^2\sin(\theta)$$

4.1.2 Difféomorphisme :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f:U\longrightarrow V$ une application.

Définition 48 *On dit que f est un difféomorphisme si et seulement si :*

1. *f est bijective différentiable de U dans V*
2. *f ainsi que sa réciproque f^{-1} avec f^{-1} est bijective différentiable de V dans U*

Définition 49 *On dit que f est $\mathscr{C}^1$ - difféomorphisme de U si et seulement si :*

1. *f est bijective de U dans V*
2. *f est de classe $\mathscr{C}^1$ c'est à dire continûment différentiable sur U,*
3. *f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans U*

et dans ce cas, l'application

$$a\mapsto jac_f(a)$$

est continue dans $\mathbb{R}$

Définition 50 *On dit que f est $\mathscr{C}^{k+1}$ - difféomorphisme de U si et seulement si :*

1. *f est bijective de U dans V*
2. *f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur U,*
3. *f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur V*

Remarque : Dans tous les cas on a $f(U)=V$ et $f^{-1}(V)=U$

Théoréme 33 *Si f est un difféomorphisme.*
La matrice Jacobienne de f^{-1} au point $f(a)$ est la matrice inverse de la matrice Jacobienne de f au point a.
En effet :

$$M(fof^{-1})=M(f)\times M(f^{-1})=Id_{\mathbb{R}^n}$$

Où $Id_{\mathbb{R}^n}$ est la matrice identit´e sur $\mathbb{R}^n$.

Caractérisation

Propriété 1 Si $f \in \mathscr{L}(U,U)$ et P désigne la matrice de f dans la base canonique de U, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijection.
2. $detP \neq 0$

Propriété 2 Si f est un difféomorphisme alors :

1. $\forall a \in U$: $J_f(a)$ est inversible et $[J_f(a)]^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a))$
2. Le jacobien ne s'annule pas.
   Autrement dit, $\forall a \in U$: $jac_f(a) \neq 0$
   $\forall a \in U$: $jac_{f^{-1}}(f(a)) = \frac{1}{jac_f(a)}$

Exemple 1

on considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[(x,y)\longmapsto(x+y,x-y)]{} \mathbb{R}^2$
Il est clair que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$. car les fonctions coordonnées sont des fonctions linéaires.
Montrons à présent que f définit une bijection.
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

On en déduit que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$
f est donc un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 (des coordonnées polaires)

Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^{*+} \times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow[(r,\theta)\longmapsto(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))]{} \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$
l'application ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijection.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$

$$\psi^{-1}(x,y) = (r,\theta) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})$$

Soit $\psi^{-1} = \phi$
Soient (ϕ_1,ϕ_2) les fonctions coordonnées de ϕ Ce sont des fonctions indéfiniment continûment dérivables et on a

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi_1(x,y) = \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

ϕ est donc différentiable et on peut déterminer la matrice jacobienne de $\psi^{-1} = \phi$

$$J(\psi^{-1})(x,y) = J(\phi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\phi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Donc

$$J(\psi^{-1})(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le Jacobien de ψ^{-1}

$$det(J(\psi^{-1})(x,y))=\begin{vmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Comparons maintenant ce résultat avec ce qu'on avait obtenu pour $J(\psi)$ à savoir

$$J_\varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est

$$(J_\varphi(r,\theta))^{-1}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & r\sin(\theta)\\ -\frac{1}{r}\sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

D'autre part, en remplaçant x et y par leurs valeurs respectives $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$ dans l'expression de $J(\phi)(x,y)$ on retrouve bien que

$$J(\phi)(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{r\cos(\theta)}{r} & \frac{r\sin(\theta)}{r}\\ -\frac{r\sin(\theta)}{r^2} & \frac{r\cos(\theta)}{r^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\frac{1}{r}\sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

De même, le Jacobien de ψ^{-1} est égal à $\frac{1}{r}$: c'est bien l'inverse du jacobien de ψ

4.1.3 Théorème d'inversion locale :

On considère une application f de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 38 *On suppose que f réalise un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme de U dans $V \subset \mathbb{R}^n$ Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'inverse*

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$$

Démonstration :

La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle d'une fonction composée : On a $f^{-1}of = Id_U$. En différentiant on obtient que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

$$d_{f(a)}od_a f = Id_{\mathbb{R}^n}$$

De même on a $fof^{-1} = Id_V$ donc pour tout $b \in V$.

$$d_{f^{-1}(b)}fod_b f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a fod_{f(a)}f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Cela prouve que $d_a f$ et $d_{f(a)}f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Théoréme 34 *(**Théorème de l'inversion locale 1**).*
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k \geq 1$) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Soit $a \in U$. Si $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
Alors $n = p$ et il existe un voisinage W de a dans U tel que la restriction de f à W réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de W dans $f(W)$.

Théoréme 35 *(**Théorème de l'inversion locale 2**).*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que la matrice jacobienne $J_f(a)$ est inversible.
Alors, il existe un voisinage V de a et un voisinage W de $f(a)$ tels que : $f : V \longrightarrow W$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

COROLLAIRE 3 *(Théorème de l'inversion globale).*
Soit f une application de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, On suppose que f est bijective, de classe $\mathscr{C}^k$ et que pour tout $a \in U$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme.
Alors f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans V

Exemple (les coordonées polaires)

Soit $\phi : \mathbb{R}^{*+} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, définie par

$$\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)$$

Alors

1. ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$
2. ϕ est injective. En effet $\phi(r,\theta) = \phi(r',\theta') \Rightarrow r = r'$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$
   $\Rightarrow \quad r = r'$ et $\theta = \theta'$ Finalement $(r,\theta) = (r',\theta')$, donc ϕ est injective
3. pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $det j_\phi(r,\theta) \neq 0$
   en effet,
   $$j_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   et donc
   $det j_\phi(r,\theta) = r \neq 0$

Le théorème d'inversion globale, nous affirme alors que ϕ est difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$

4.2 Fonctions implicites :