UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN
Centro Regional CHIVILCOY
Licenciatura en Sistemas de Información

Asignatura: MATEMÁTICA DISCRETA **II Cuatrimestre – Año 2021**

Práctica 2: Lógicas No Clásicas (Lógica Borrosa)

1. *Graficar los siguientes subconjuntos borrosos:*

$$\underset{\sim}{A} = \{(x_1 \mid 0.1), (x_2 \mid 0.6), (x_3 \mid 0), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 1), (x_6 \mid 0.2)\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \{(x_1 \mid 0.2), (x_2 \mid 0.7), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0), (x_5 \mid 0.5), (x_6 \mid 0.9)\}$$

$$\underset{\sim}{C} = \{(x_1 \mid 0.5), (x_2 \mid 0.3), (x_3 \mid 1), (x_4 \mid 0.1), (x_5 \mid 0.5), (x_6 \mid 0.7)\}$$

2. *Realizar estos ejercicios considerando que* $\cup = \max\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$*;* $\cap = \min\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$*,* $\underset{\sim}{\overline{A}} = 1 - u_{\underset{\sim}{A}}(x)$*,*

$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{\overline{B}}) \cup (\underset{\sim}{\overline{A}} \cap \underset{\sim}{B})$ *y* $\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{\overline{B}}$

a) $\underset{\sim}{A} \cup \left(\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}\right)$

b) $\left(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}\right) \cap \underset{\sim}{\overline{C}}$

c) $\underset{\sim}{\overline{A}} \cup \left(\underset{\sim}{\overline{B}} \cup \underset{\sim}{\overline{C}}\right)$

d) $\underset{\sim}{\overline{A}} - \left(\underset{\sim}{\overline{B}} \cup \underset{\sim}{\overline{C}}\right)$

e) $\underset{\sim}{A} \oplus \left(\underset{\sim}{\overline{B}} \oplus \underset{\sim}{C}\right)$

f) $\left(\left(\underset{\sim}{\overline{A}} \cup \underset{\sim}{B}\right) \oplus \underset{\sim}{\overline{C}}\right) - \underset{\sim}{\overline{B}}$

g) $\left(\left(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}\right) \cap \underset{\sim}{\overline{C}}\right) \oplus \left(\underset{\sim}{\overline{A}} - \left(\underset{\sim}{\overline{B}} \cup \underset{\sim}{\overline{C}}\right)\right)$

h) $\left(\underset{\sim}{A} \cup \left(\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}\right)\right) \cap \left(\left(\left(\underset{\sim}{\overline{A}} \cup \underset{\sim}{B}\right) \oplus \underset{\sim}{\overline{C}}\right) - \underset{\sim}{\overline{B}}\right)$

i) $\left(\left(\left(\underset{\sim}{\overline{A}} \cup \underset{\sim}{B}\right) \oplus \underset{\sim}{\overline{C}}\right) - \underset{\sim}{\overline{B}}\right) \cup \left(\underset{\sim}{\overline{A}} - \left(\underset{\sim}{\overline{B}} \cup \underset{\sim}{\overline{C}}\right)\right)$

j) $\left(\left(\left(\left(\underset{\sim}{\overline{A}} \cup \underset{\sim}{B}\right) \oplus \underset{\sim}{C}\right) - \underset{\sim}{B}\right) \cup \left(\underset{\sim}{\overline{A}} - \left(\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{\overline{C}}\right)\right)\right) \oplus \left(\underset{\sim}{A} - \left(\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}\right)\right)$

3. *Utilizando poligonales que unan los puntos correspondientes a la membresía de cada elemento de un subconjunto: grafique las siguientes operaciones realizadas con los subconjuntos del ejercicio precedente:*

a. $\underset{\sim}{A}$

b. $\underset{\sim}{\overline{A}}$

c. $\underset{\sim}{B}$

d. $\underset{\sim}{\overline{B}}$

e. $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$

f. $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$

g. $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{\overline{B}}$

h. $\underset{\sim}{\overline{A}} \cap \underset{\sim}{B}$

h. $\left(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{\overline{B}}\right) \cup \left(\underset{\sim}{\overline{A}} \cap \underset{\sim}{B}\right)$

4. *Definiendo a la Distancia de Hamming Generalizada (DHG) según la siguiente expresión:*

$$d(A,B) = \sum \left| A(x_i) - B(x_i) \right|$$

Determinar la (DHG) entre los subconjuntos borrosos del ejercicio 1.

5. *Definiendo a la Distancia Euclidiana (DE) según la siguiente expresión:*

$$d(A,B)=\sqrt{\sum\left(A(x_i)-B(x_i)\right)^2}$$

Determinar la DE (distancia cuadrática) entre los subconjuntos borrosos del ejercicio 1.

6. *Definiendo a la Distancia de Hamming Generalizada Relativa (DHGR) según la siguiente expresión:*

$$d(A,B)=\frac{\sum\left|A(x_i)-B(x_i)\right|}{n}$$

Determinar la DHGR entre los subconjuntos borrosos del ejercicio 1.

7. *Definiendo a la Distancia Euclidiana (DE) según la siguiente expresión:*

$$d(A,B)=\frac{\sqrt{\sum\left(A(x_i)-B(x_i)\right)^2}}{n}$$

Determinar la distancia de euclidiana relativa entre los subconjuntos borrosos del ejercicio 1.

8. *Determinar cuáles son los conjuntos ordinarios más pequeños* $\left(\underset{\cong}{A}\right)$ *respecto a los subconjuntos dados en el ejercicio 1, y a los que surjen de las operaciones efectuadas con los mismos (se conviene que* $u_{\underset{\cong}{A}}(x_i)=0 \ si \ u_{\underset{\sim}{A}}(x_i)=0.5$*)*

9. *Siendo el índice lineal de borrosidad definido de la siguiente manera:* $v(\underset{\sim}{A})=\frac{2}{n}d(\underset{\sim}{A},\underset{\cong}{A})$

y el índice cuadrático de borrosidad de ésta: $\eta(\underset{\sim}{A})=\frac{2}{\sqrt{n}}e(\underset{\sim}{A},\underset{\cong}{A})$

determinar $v(\underset{\sim}{X})$ *y* $\eta(\underset{\sim}{X})$ *de los subconjuntos borrosos del ejercicio 1 y de los subconjuntos que surgen después de la aplicar las operaciones del mismo apartado*

10. *Además de por los índices de borrosidad, podríamos evaluar la borrosidad de un subconjunto mediante su entropía. Sabido es que la entropía de un sistema mide el nivel de desorden de sus componentes. En subconjuntos borrosos la entropía esta definida por la siguiente fórmula:*

$$H(p_1,p_2,p_3,p_4,\ldots,p_n)=-\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}p_i \ln p_i$$

Determinar la entropía de los subconjuntos borrosos del ejercicio 1 y de los subconjuntos que surgen después de la aplicar las operaciones del mismo apartado.

11. *Se denomina subconjunto ordinario de nivel* α *a:*

$$A_\alpha=\left\{x \mid u_{\underset{\sim}{A}}(x)\geq\alpha\right\}$$

Determinar los subconjuntos ordinarios de nivel: 4, 5, 6 y 7 de los subconjuntos borrosos del ejercicio 1.

12. *Siendo X = [0, 1], se definen los conjuntos A = {x, (1+x)/2, x Є X}; B = {(a, a/3), si 0<=a<0.5; (a, 0.7) si a >=0.5}* *Graficar:* $A\cup B,\ A\cap B$

13. *Cuestiones para investigar profundizando en la lógica borrosa:*
    a. *Teniendo en cuenta lo que usted conoce sobre Teoría de Conjuntos (Clásicos) estudie qué propiedades (asociatividad, conmutatividad, distributividad, idempotencia, existencia de neutro) satisfacen las operaciones definidas por Zadeh.*
    b. *Utilizando el ítem anterior, indicar qué estructura podría definir entre subconjuntos difusos de un universo dado*

c. Es la operación de complemento de Zadeh una operación involutiva, es decir, ¿es A''=A?
d. Son válidas las leyes de De morgan?
e. ¿Es válida la igualdad A U A' = U (donde U es el conjunto clásico universo)?
f. Enuncie alguna propiedad que conozca sobre conjuntos clásicos que no se cumpla para conjuntos borrosos.
g. Defina la suma disyuntiva y la diferencia entre conjuntos difusos. Utilice los conjuntos definidos en el ejercicio 1 para graficar estos nuevos conjuntos difusos.

14. Aparecen en la literatura sobre conjuntos difusos otras operaciones entre conjuntos borrosos, que satisfacen otras propiedades y su utilidad depende de la aplicación en la cual se van a emplear. Pudiendo decir que con las operaciones de Zadeh se puede definir una estructura muy importante, no sólo por su interés matemático, sino en muchas aplicaciones de computación, la de reticulado pseudo-complementado. Mencionaremos algunas de estas definiciones alternativas:

A + **B** (Unión Producto) $u_{A+B}(x) = u_A(x) + u_B(x) - u_A(x)u_B(x)$

A . **B** (Intersección Producto) $u_{A.B}(x) = u_A(x).u_B(x)$

$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$ (Unión de Lukazsiewicz) $u_{\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}}(x) = (u_{\underset{\sim}{A}}(x) + u_{\underset{\sim}{B}}(x)) \wedge 1$

$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}$ (Intersección de Lukazsiewicz) $u_{\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}}(x) = (u_{\underset{\sim}{A}}(x) + u_{\underset{\sim}{B}}(x) - 1) \vee 0$

a. Encontrar alguna propiedad que diferencie estas uniones de la unión definida por Zadeh.
b. Comparar las tres uniones definidas teniendo en cuenta la inclusión entre conjuntos difusos. Ídem para las intersecciones.
c. Para los conjuntos A y B definidos en el ejercicio 2, graficar por un lado las tres uniones y por otro las tres intersecciones.
d. Se plantean los siguientes ejercicios (con respecto a los subconjuntos planteados en el ejercicio 1):

i. $\underset{\sim}{A} . \underset{\sim}{B}$
ii. $\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$
iii. $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$
iv. $\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}$
v. $\left(\underset{\sim}{A} . \underset{\sim}{B}\right) + \underset{\sim}{C}$
vi. $\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\right) \otimes C$
vii. $\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}\right) + \underset{\sim}{C}$

15. Simplificar la expresión siguiente: $\left(\underset{\sim}{A} \cap \left(\left(\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}\right) \cup \left(\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{C}}\right)\right)\right) \cup \overline{\underset{\sim}{C}}$

16. Los problemas de selección de personal constituyen una de las constantes preocupaciones en la gestión de las empresas, habida cuenta de la dificultad que existe en formalizar adecuadamente relaciones en las cuales el hombre aparece de manera fundamental.. En todos ellos la subjetividad está presente como una característica permanente, lo que llevó a pensar en la posibilidad de la aplicación de la matemática borrosa para su planteo y solución. Se descubrió entonces, que la misma brinda grandes posibilidades en el campo de la gestión de personal.

Resolver el siguiente problema:
Se considera una empresa en la cual se deben cubrir cuatro cargos. Se supone que se ha definido un conjunto de cualidades que cada postulante debe cumplir en mayor o menor grado según el puesto a cubrir.
Se denomina C al conjunto de cualidades y "a,b,c,d,e,f,g,h" a cada cualidad exigida, el mismo será el conjunto referencial:

C = { a , b , c, d , e , f , g , h }

Para cada uno de los cuatro cargos a cubrir se ha definido el perfil correspondiente al grado de cumplimiento de cada una de las cualidades requeridas. Cada perfil está representado por un subconjunto borroso de C.
Estos perfiles son:

$T_{\approx 1}$ = {(a/.8) , (b/.3) , (c/.1) , (d/1) , (e/.4) , (f/.6) , (g/1) , (h/1)}

$\underset{\approx 2}{T}$ = *{(a/.2) , (b/.3) , (c/.5) , (d/.6) , (e/1) , (f/1) , (g/1) , (h/.4)}*

$\underset{\approx 3}{T}$ = *{(a/.9) , (b/.8) , (c/.1) , (d/.4) , (e/.5) , (f/.8) , (g/.2) , (h/.3)}*

$\underset{\approx 4}{T}$ = *= {(a/1) , (b/1) , (c/.4) , (d/1) , (e/.2) , (f/0) , (g/.3) , (h/1)}*

Sean cinco los aspirantes a los cuatro cargos. Estos aspirantes podrán ser externos a la organización, o bien ser candidatos a una promoción.

Los evaluadores establecerán, con la metodología propia de su cuerpo de conocimientos, el grado de cumplimiento de cada cualidad requerida para cada uno de los aspirantes P1 , P2 , P3 , P4 y P5 , obteniéndose para cada postulante un subconjunto borroso de C.

$\underset{\approx 1}{P}$ = *{(a/1) , (b/.3) , (c/.8) , (d/0) , (e/.4) , (f/.6) , (g/.5) , (h/.7)}*

$\underset{\approx 2}{P}$ = *{(a/.6) , (b/1) , (c/.4) , (d/.5) , (e/1) , (f/0) , (g/.5) , (h/.6)}*

$\underset{\approx 3}{P}$ =*{(a/.8) , (b/0) , (c/.4) , (d/.5) , (e/.3) , (f/.7) , (g/1) , (h/1)}*

$\underset{\approx 4}{P}$ = *{(a/.6) , (b/.3) , (c/1) , (d/1) , (e/0) , (f/.7) , (g/.9) , (h/.8)}*

$\underset{\approx 5}{P}$ = *{(a/.9) , (b/.3) , (c/.3) , (d/.6) , (e/.8) , (f/1) , (g/.9) , (h/.4)}*

A partir de estos datos se desarrollará una metodología para obtener el postulante más adecuado para cada tarea, no siendo la única posible de aplicar para resolver el problema.

- *La metodología aplicada consiste en **calcular la distancia de Hamming relativa** de cada "aspirante" a cada "tarea", para luego **construir una matriz de distancias**.*
- *Supongamos que se desea elegir al postulante que mejor se adecue a todos los cargos, a los efectos de realizar una tarea polivalente. ¿Cómo se les ocurre que podrían resolver esta cuestión utilizando este paradigma?*

17. *(Tomado de: Lógica Difusa, una introducción práctica; Carlos González Morcillo)*

La propina para el mozo:

*El conocimiento experto de un comensal de un restaurante se modela mediante un sistema de reglas difusos. El sistema cuenta con dos variables de entrada **Servicio** (Calidad del Servicio, que se evalúa de 0 a 10), y **Comida** (Calidad de la Comida, que se evalúa igualmente de 0 a 10). El porcentaje de propina se modela con la variable **Propina** (definida entre 5% y 25% del precio total).*

A la variable de entrada Servicio le asociaremos tres conjuntos difusos asociados a las etiquetas lingüísticas Pobre, Bueno y Excelente. Estos conjuntos se definirán empleando una función Gaussiana Simple: $e^{\frac{-(x-m)^2}{2v^2}}$ *, con la siguiente especificación:*

Pobre: m = 0; v = 1.5
Bueno: m = 5; v = 1.5
Excelente: m = 10; v = 1.5

La calidad de la comida tendrá asociada dos conjuntos difusos, con las etiquetas Rancia y Deliciosa. Estos conjuntos se definirán mediante funciones trapezoidales, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste: Rancia = (1/0; 1/1; 0/3)
Deliciosa = (0/7; 1/9; 1/10)

De forma análoga, la Propina estará definida sobre tres conjuntos difusos con las etiquetas Tacaña, Promedio y Generosa. Estos conjuntos se definirán mediante funciones triangulares, con la siguiente especificación según sus vectores de ajuste:

Tacaña = (0/0; 1/5; 0/10)
Promedio = (0/5; 1/15; 0/25)
Generosa = (0/20; 1/25; 0/30)

El sistema de reglas que modela el conocimiento experto del comensal está basado en tres reglas, con la siguiente especificación:

R1 : Si servicio es pobre $\vee$ *comida es rancia* $\rightarrow$ *propina es tacaña*
R2 : Si servicio es bueno $\rightarrow$ *propina es promedio*
R3 : Si servicio es excelente $\vee$ *comida es deliciosa* $\rightarrow$ *propina es generosa*

Dada una calificación de Servicio=3 y Comida=8, calcule la propina para el camarero empleando un modelo de Inferencia de Mamdani y empleando el centroide como mecanismo de deborrosificación.

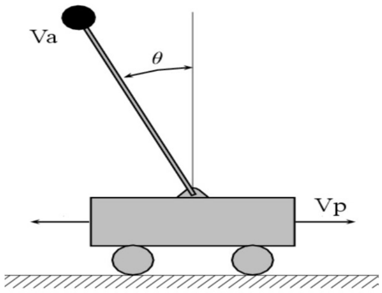
Graficar los distintos conjuntos difusos.

18. *(Tomado de: Lógica Difusa, una introducción práctica; Carlos González Morcillo)*

Control del Péndulo Invertido:

El problema es mantener equilibrada una barra rígida sobre una plataforma móvil que puede desplazarse en dos direcciones; izquierda y derecha.

*Queremos diseñar un controlador difuso que tomará como entradas el **ángulo** y la **velocidad angular** y dará como salida la **velocidad de la plataforma**.*



El primer paso es definir las etiquetas de la variable lingüística velocidad de la plataforma. En este caso definiremos 5 etiquetas asociadas a sus respectivos conjuntos difusos como

NG (Negativa Grande)
NP (Negativa Pequeña)
Z (Cero)
PP (Positiva Pequeño)
PG (Positiva Grande)

La Velocidad de la plataforma se define con el siguiente vector de ajuste:

Velocidad NG = (1/-3; 1/-2; 0/-1)
Velocidad NP = (0/-2; 1/-1; 0/0)
Velocidad Z = (0/-1; 1/0; 0/1)
Velocidad PP = (0/0; 1/1; 0/2)
Velocidad PG = (0/1; 1/2; 1/3)

Empleando la misma notación se definen las funciones de pertenencia para el ángulo y la velocidad angular, que tienen asociados los siguientes vectores de ajuste:

Ángulo NG = (1/-45; 1/-30; 0/-15)
Ángulo NP = (0/-30; 1/-15; 0/0)
Ángulo Z = (0/-15; 1/0; 0/15)
Ángulo PP = (0/0; 1/15; 0/30)
Ángulo PG = (0/15; 1/30; 1/45)
Velocidad Angular NG = (1/-1.5; 1/-1; 0/ 0.5)
Velocidad Angular NP = (0/-1; 1/0.5; 0/0)
Velocidad Angular Z = (0/0.5; 1/0; 0/0.5)
Velocidad Angular PP = (0/0; 1/0.5; 0/1)
Velocidad Angular PG = (0/0.5; 1/1; 1/1.5)

La base de reglas del controlador se puede representar en una tabla llamada Fyzzy Associative Memory (FAM) como:

Velocidad Angular / Ángulo	***NG***	***NP***	***Z***	***PP***	***PG***
NG			*NG*		
NP			*NP*	*Z*	
Z	*NG*	*NP*	*Z*	*PP*	*PG*
PP		*Z*	*PP*		
PG			*PG*		

Por ejemplo, la interpretación sería:

Si (Ángulo es Zero) y (Velocidad Angular es Positiva Pequeña) Entonces (Velocidad de Plataforma será Positiva Pequeña).

Es decir, aunque el péndulo está en la posición correcta, se está moviendo lentamente en sentido positivo, por lo que se hace necesario mover la plataforma lentamente en la misma dirección para compensar este movimiento.

Suponiendo que tenemos los siguientes valores de entrada Ángulo= 3.75, Velocidad Angular=-0.3.
¿Qué velocidad se le aplicaría a la plataforma empleando inferencia de Mamdani y el centroide como método de desfuzzificación?

19. *Se propone un sistema que varíe la presión de los frenos de un vehículo por medio de un control que verifique la proximidad con algún obstáculo y la velocidad de aproximación al mismo.*
    a. *Definir las variables lingüísticas de este problema y los términos lingüísticos asociados a cada una.*
    b. *Definir las funciones de pertenencia para al menos tres términos lingüísticos. Expresar al menos uno matemáticamente.*
    c. *Definir dos reglas que utilizando los conjuntos borrosos definidos y algunos de los operadores del paradigma borroso devuelvan un valor difuso aplicable a la salida del problema. Mostrar un ejemplo en los conjuntos y funciones de pertenencia definidos.*

20. *Un alumno de la Licenciatura en Sistemas de Información tiene un gato que sólo toma agua cuando encuentra agua en movimiento, nunca si el agua está en un recipiente. Después de cursar esta asignatura ideó un dispenser automático de agua para el gato que regula la salida del agua de la canilla controlando la cercanía del minino y la velocidad de aproximación.*
    a. *Definir las variables lingüísticas de este problema y los términos lingüísticos asociados a cada una.*
    b. *Definir las funciones de pertenencia para al menos tres términos lingüísticos. Expresar al menos uno matemáticamente.*
    c. *Definir dos reglas que utilizando los conjuntos borrosos definidos y algunos de los operadores del paradigma borroso devuelvan un valor difuso aplicable a la salida del problema. Mostrar un ejemplo en los conjuntos y funciones de pertenencia definidos.*

21. *Se propone un sistema que regule la apertura de las cortinas que oscurecen una habitación mediante un control que verifique la temperatura y la luminosidad de la misma.*
    a. *Definir las variables lingüísticas de este problema y los términos lingüísticos asociados a cada una.*
    b. *Definir las funciones de pertenencia para al menos tres términos lingüísticos. Expresar al menos uno matemáticamente.*
    c. *Definir dos reglas que utilizando los conjuntos borrosos definidos y algunos de los operadores del paradigma borroso devuelvan un valor difuso aplicable a la salida del problema. Mostrar un ejemplo en los conjuntos y funciones de pertenencia definidos.*