UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN
CENTRO REGIONAL CHIVILCOY

MATEMÁTICA DISCRETA

UNIDAD -0-: REVISIÓN DE NOCIONES PREVIAS

TEORÍA DE CONJUNTOS

Definición 1: Una noción intuitiva de un conjunto, es que *es una colección (no necesariamente ordenada) de **objetos**, con propiedades similares*[1].

Por ejemplo, todos los estudiantes inscriptos en una carrera, forman un conjunto; pero, a su vez, los estudiantes inscriptos para cursar Matemática Discreta y Programación I también forman un conjunto, como también quienes cursan sólo una de ellas.

Es necesario observar que el término ***objeto*** se usa sin especificar qué es. Esta idea de conjunto como "una colección de objetos" fue pautada por primera vez, en 1895, por el matemático alemán Georg Cantor.

Para evitar inconsistencias lógicas, se construyó la Teoría de Conjuntos en base a suposiciones básicas llamadas **axiomas**.

Definición 2: Los objetos de un conjunto se llaman miembros (o elementos) del conjunto. Así, un conjunto *contiene elementos*.

Los conjuntos se describen de dos formas básicas: *por Extensión* y *por Comprensión.*

Si se enumeran todos los elementos del conjunto (sólo si es posible), es *por extensión*.
Ejemplo: el conjunto de las vocales del alfabeto español, es: A = {a, e, i, o, u}.

Frecuentemente, la notación por extensión, se suele abreviar, sin enumerar todos sus elementos *(es muy útil en Informática, pues muchos lenguajes de programación soportan este modo de definir colecciones genéricas)*. Sólo se enumeran algunos de ellos, utilizándose puntos suspensivos para representar a los demás, si es obvio el patrón que siguen.
Ejemplo, el conjunto de los enteros positivos menores que 100, se puede denotar: E = {1, 2, 3, …, 99}

ES NECESARIO RECORDAR:

Estos conjuntos numéricos desempeñan un papel importantísimo desde este momento:

N = {1, 2, 3, …,} Conjunto de los **Números Naturales**
Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …} Conjunto de los **Números Enteros**
Q = {p/q con p ∈ Z, q ∈ Z, con q ≠ 0} Conjunto de los **Números Racionales**
I = R \ Q = {x ∈ R / x ∉ Q} Conjunto de los **Números Irracionales**
R Conjunto de los **Números Reales (que contiene a los anteriores)**
C Pares ordenados de la forma *Z = (a, b)*, donde *a* es la *parte Real* y *b* es la *parte Imaginaria*. Este es el Conjunto de los **Números Complejos** y contiene a los **Números Reales**.

1 Primera Definición

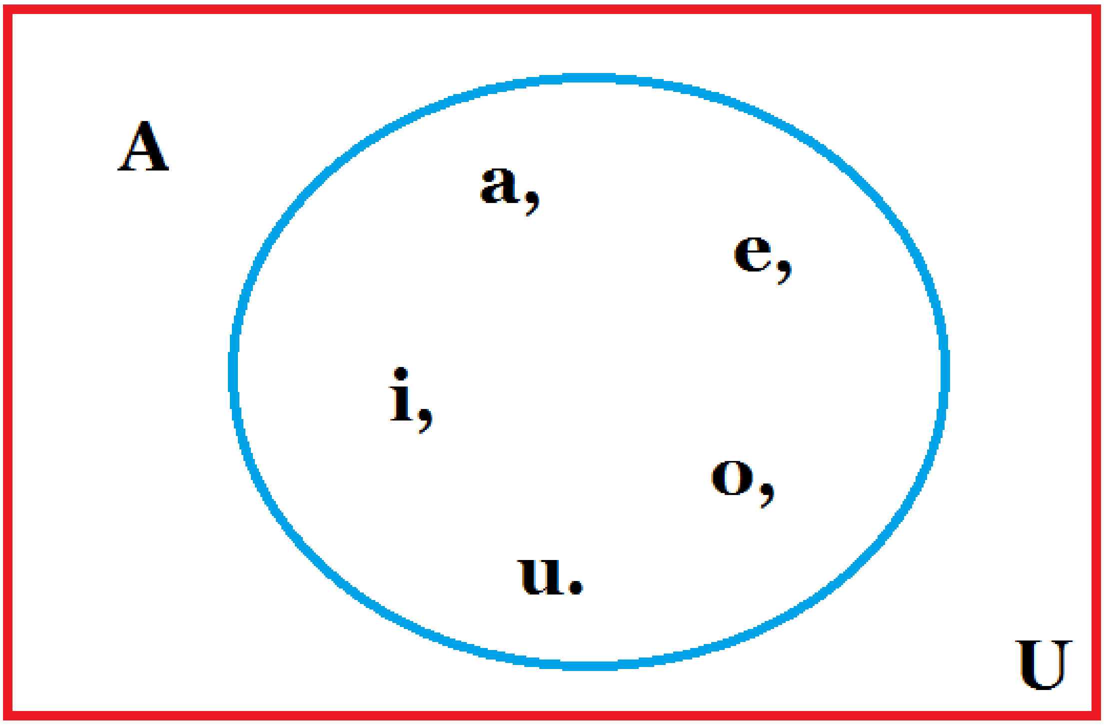
Si al conjunto se lo define *por Comprensión*, se especifica *el modo de construcción* de dicho conjunto, caracterizando a los elementos en base a sus propiedades. Esta notación se emplea cuando es difícil (o imposible) enumerar todos los elementos (es decir, no es posible por extensión).

Ejemplos:

- El conjunto de todos los números Reales: R = {x / x es un número real}. O bien: $x \in \{R\}$
- El conjunto de todos los números Pares Positivos: P = {x / x = 2k, con $k \in Z$, $k > 0$}

Definición 3: Dos conjuntos son iguales, sí y sólo sí, todos sus elementos son iguales.

Otra forma de representar conjuntos es mediante diagramas: los **Diagramas de Venn**, en honor al matemático inglés John Venn, quien los introdujo en 1881. En esta representación, el **Conjunto Universal (U)** que contiene a todos los objetos bajo consideración, se representa por un rectángulo, en el mismo se emplean círculos u otras figuras geométricas para representar a los conjuntos, y dentro de ellos, se representan a los elementos de los mismos. Permiten apreciar bien los vínculos existentes entre los conjuntos.



Aquí el conjunto A formado por las vocales está representado por un óvalo celeste, dentro del conjunto Universal U (en rectángulo rojo)

Se escribe: $a \in A$, para denotar que a es un elemento del conjunto A. La notación $a \notin A$ expresa que a no es miembro (o elemento) del conjunto A.

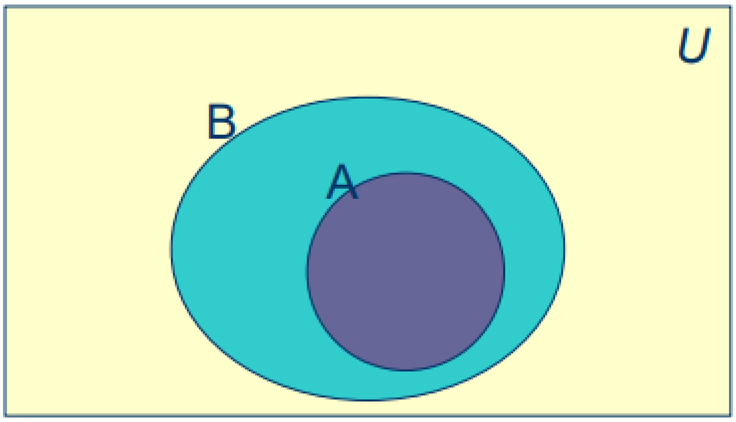
Al conjunto que no tiene elementos, se lo denomina **Conjunto Vacío,** y se denota por $\varnothing$. El conjunto vacío también se simboliza con $\{\}$.

Definición 4: El conjunto A es subconjunto de B sí, y sólo sí, todo elemento de A también es un elemento de B. Se usa la notación $A \subseteq B$ para indicar que A es un subconjunto de B (o que A está incluido en B).

$A \subseteq B$ sí, y sólo sí, $\forall x$: $(x \in A \rightarrow x \in B)$ es Verdadero.

Teorema 1: Cualquier conjunto no vacío S tiene al menos dos subconjuntos, el conjunto vacío y el conjunto S, esto es, $\varnothing \subseteq S$ y $S \subseteq S$.

Cuando A es subconjunto de B, con $A \neq B$, se denota $A \subset B$ y se dice que A es un **subconjunto propio** de B.



Definición 5: Sea S un conjunto. Si hay exactamente *n* elementos distintos en S, con *n* entero no negativo, se dice que S es un *conjunto finito* y *n* es el **cardinal** de S, denotándose $|S|$.

Ejemplo: Sea A el conjunto de los enteros positivos impares menores que 10. Entonces, $|A| = 5$

Definición 6: Un conjunto se denomina infinito si no es finito.

CONJUNTO DE PARTES

En muchos problemas se deben probar todas las combinaciones posibles de elementos de un conjunto para saber si satisfacen una propiedad determinada. Para considerar todas estas combinaciones de elementos de un conjunto S, se construye un nuevo conjunto cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de S.

Definición 7: Dado un conjunto S, *el conjunto de partes* de S es el conjunto de todos los subconjuntos de S. El conjunto de partes de S, se denota P(S).

Ejemplo: Determinar el conjunto de partes del conjunto $\{0, 1, 2\}$

$P(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

Observar que:

- El conjunto vacío y el conjunto mismo, son elementos del conjunto de partes.
- Si un conjunto tiene *n* elementos, entonces el conjunto de partes del conjunto tiene 2^n elementos.

ACTIVIDAD Nº 1

1) Enumerar los elementos de estos conjuntos:

   a) $\{ x / x$ es un número real positivo tal que $x^2 = 1\}$
   b) $\{ x / x$ es un número entero positivo menor que $12\}$
   c) $\{ x / x$ es el cuadrado de un entero y $x < 100\}$
   d) $\{ x / x$ es un número entero tal que $x^2 = 2\}$

2) Empleando la notación conveniente dar una descripción de cada uno de estos conjuntos:

   a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$
   b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   c) $\{m, n, o, p\}$

3) Determinar si cada uno de estos pares de conjuntos son iguales:

   a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$, $\{5, 3, 1\}$
   β) $\{\{1\}\}$, $\{1, \{1\}\}$
   c) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$

4) Para cada uno de los siguientes conjuntos, determinar si 2 es o no, elemento suyo:

   a) $\{ x / x$ es un número entero mayor que $1\}$
   b) $\{ x / x$ es el cuadrado de un entero$\}$
   c) $\{2, \{2\}\}$
   d) $\{2, \{\{2\}\}\}$
   e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$
   f) $\{\{\{2\}\}\}$

5) Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa:

α) $0 \in \varnothing$
β) $\varnothing \in \{0\}$
χ) $\{0\} \subset \varnothing$
δ) $\varnothing \subset \{0\}$
ε) $\{0\} \in \{0\}$
ϕ) $\{0\} \subset \{0\}$
g) $\{0\} \subseteq \{0\}$

6) Determinar si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa:

α) $x \in \{x\}$
b) $\{x\} \subseteq \{x\}$
c) $\{x\} \in \{x\}$
δ) $\{x\} \in \{\{x\}\}$
ε) $\varnothing \subseteq \{x\}$
f) $\varnothing \in \{x\}$

7) Utilizando un diagrama de Venn ilustrar la expresión $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$.

8) ¿Cuál es el cardinal de estos conjuntos?

a) $\{a\}$
b) $\{\{a\}\}$
c) $\{a, \{a\}\}$
d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

9) Obtener el conjunto de partes de estos conjuntos:

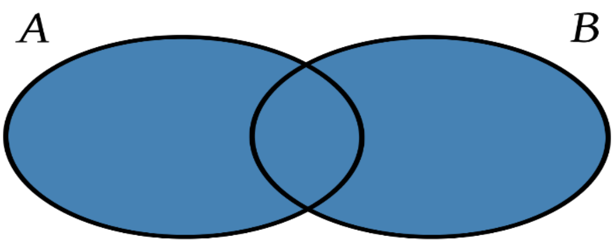
a) $\{a\}$
b) $\{a, b\}$
c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

10) ¿Cuántos elementos tienen estos conjuntos?

a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$
b) $P(\{\varnothing, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$
c) $P(P(\varnothing))$

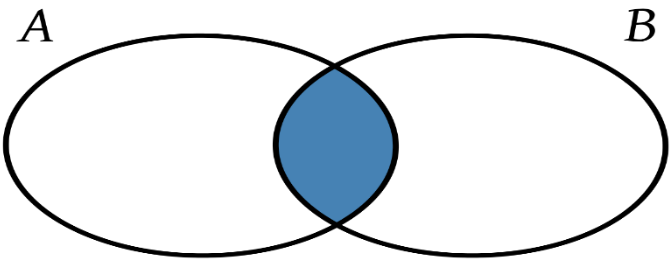
OPERACIONES DE CONJUNTOS

Definición I: Sean A y B conjuntos. La *unión* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o están en B, o en ambos. Aquí, la representación mediante el Diagrama de Venn:



Un elemento x pertenece a la unión de los conjuntos A y B sí, y sólo sí, x pertenece a A o x pertenece a B. Simbólicamente: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

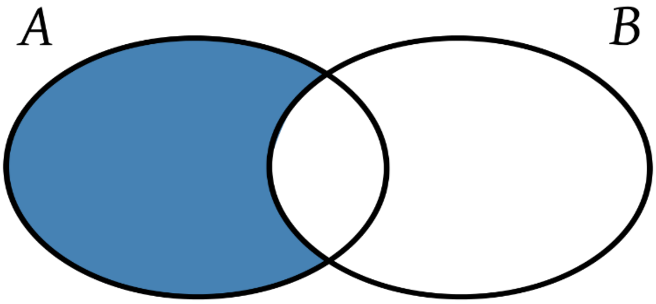
Definición II: Sean A y B conjuntos. La *intersección* de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto que contiene aquellos elementos que están tanto en A como en B. Aquí la representación en diagrama de Venn:



Un elemento x pertenece a la intersección de los conjuntos A y B sí, y sólo sí, x pertenece a A y x pertenece a B. Simbólicamente: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.

Definición III: Dos conjuntos son *disjuntos*, si su intersección es el conjunto vacío.

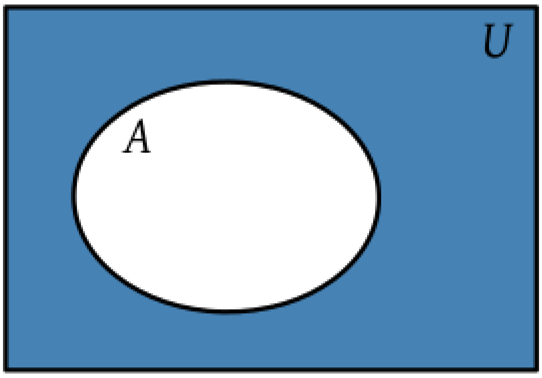
Definición IV: Sean los conjuntos A y B. La *diferencia* de dichos conjuntos, denotada A – B, es el conjunto que contiene a los elementos que están en A, pero que no están en B. Aquí la representación en iagrama de Venn:



Un elemento x pertenece a la diferencia de A y B sí, y sólo sí, x pertenece a A y x no pertenece a B. Simbólicamente: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

Una vez especificado el conjunto universal U, se puede definir el conjunto **complementario**.

Definición V: Sea U el conjunto universal. El conjunto complementario de A, denotado por A, es el complementario de A con respecto a U. En otras palabras, el complementario del conjunto A es U – A. Aquí la representación en Diagrama de Venn:



Un elemento x pertenece a A sí, y sólo sí, x no pertenece a A. Simbólicamente: $A = \{x / x \notin A\}$

IDENTIDADES ENTRE CONJUNTOS

Identidad	Nombre
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	**Leyes de Identidad**
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	**Leyes de Dominación**
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	**Leyes Idempotentes**
$\overline{\overline{(A)}}=A$	**Ley de Complementación**
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	**Leyes Conmutativas**
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**Leyes Asociativas**
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	**Leyes Distributivas**
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	**Leyes de De Morgan**
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	**Leyes de Absorción**
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	**Leyes de Complemento**

ACTIVIDAD Nº 2

1) Sea A el conjunto de los estudiantes que vive a 2 km de la Universidad y sea B el conjunto de los estudiantes que van caminando a clase. Describir a los estudiantes de estos conjuntos:

   a) $A \cap B$
   b) $A \cup B$
   c) $A - B$
   d) $B - A$

2) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{0, 3, 6\}$. Obtener:

   a) $A \cap B$
   b) $A \cup B$
   c) $A - B$
   d) $B - A$

3) Sea A un conjunto. Demostrar que $A = A$.

4) Sean A y B dos conjuntos. Demostrar que:

    a) $A \cup B = B \cup A$
    b) $A \cap B = B \cap A$

5) Sean A y B conjuntos. Demostrar que:

    a) $A \cup (A \cap B) = A$
    b) $A \cap (A \cup B) = A$

6) La **Diferencia Simétrica** de A y B, denotada por $A \oplus B$ es el conjunto que contiene aquellos elementos que están en A o están en B, pero no en ambos simultáneamente.

    a) Hallar la Diferencia Simétrica de $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$.
    b) Dibujar el diagrama de Venn de la Diferencia Simétrica de dos conjuntos A y B.
    c) Demostrar que: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
    d) Demostrar que: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

PRODUCTO CARTESIANO

El orden de los elementos en una colección puede ser importante. Como los elementos de un conjunto pueden estar desordenados, es necesario disponer de una estructura diferente para representar colecciones ordenadas; para eso se definen: las **n-tuplas ordenadas**.

Definición -1-: La n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada en la que a_1 es su primer elemento, a_2 el segundo, …, y a_n el enésimo.

Así, dos n-tuplas ordenadas son iguales sí, y sólo sí, cada par correspondiente de sus elementos es igual. En símbolos: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i\ ,\forall i$

En particular, las 2-tuplas se llaman **pares ordenados**. Los pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales sí, y sólo sí, $a = c$ y $b = d$. Nótese que (a, b) no es igual a (b, a) excepto que $a = b$.
Hay estructuras discretas (se verán más adelante) que se basan en el concepto de Producto Cartesiano de Conjuntos (en homenaje al matemático francés René Descartes).
Entonces, el Producto Cartesiano de dos conjuntos se define así:

Definición -2-: Sean A y B conjuntos. El Producto Cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo: Determinar el Producto Cartesiano $A \times B$, siendo $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$

A × B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}

<u>Observación</u>: El Producto Cartesiano NO es Conmutativo.

<u>ACTIVIDAD Nº 3</u>

1) Sean A = {a, b, c, d} y B = {y, z}, obtener:

    a) A × B
    b) B × A

2) Sean A = {a, b, c}, B = {x, y} y C = {0, 1}, obtener:

    a) A × B × C
    b) C × B × A
    c) C × A × B
    d) B × B × B

3) ¿Cuántos elementos distintos tiene A × B si A tiene *m* elementos y B tiene *n*?

4) Demuestra que A × B ≠ B × A para conjuntos A y B no vacíos, a no ser que A = B

5) Traducir estas expresiones a lenguaje natural y determinar su valor de verdad:

    α) $\forall x \in R\ (x^2 \neq 1)$
    β) $\exists x \in Z\ (x^2 = 2)$
    χ) $\forall x \in Z\ (x^2 > 0)$
    d) $\exists x \in R\ (x^2 = x)$

RELACIONES

Una *relación* del conjunto A en el conjunto B es un subconjunto R del Producto Cartesiano A × B.

Los elementos de R son pares ordenados, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento a B. Ejemplo: R = {(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)} es una relación del conjunto
A = {a, b, c} en el conjunto B = {0, 1, 2, 3}

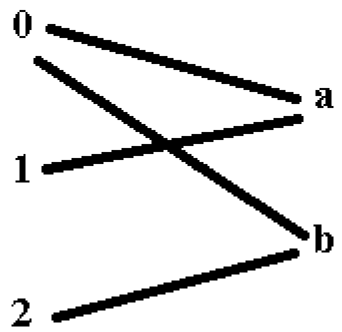
Definición 1: Sean A y B dos conjuntos. Una *relación binaria* de A en B es un subconjunto de A × B.

Se emplea la notación $a\ R\ b$ para denotar que $(a, b) \in R$, en tanto que: $a \not{R}\ b$ para expresar que $(a, b) \notin R$. Además, si *(a, b)* pertenece a *R* significa que *a* está **relacionado con** *b* mediante *R*.

Las relaciones binarias por lo tanto, representan relaciones entre los elementos de dos conjuntos. Las relaciones entre elementos de más de dos conjuntos, se llaman n-arias.

Ejemplo 1**:** Sea A el conjunto de todas las ciudades y sea B el conjunto de los países de Sudamérica. Se define la relación *R* especificando que el par *(a, b)* pertenece a *R* si la ciudad *a* está en el país *b*. Por ejemplo, (Barranquilla, Colombia), (Rosario, Argentina), (Maracaibo, Venezuela) están en *R*. Mientras que el par (París, Brasil), no está en *R*.

Ejemplo 2**:** Sean A = {0, 1, 2} y B = {a, b}. Luego, {(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)} es una relación de A en B. Esto significa por ejemplo que 0 *R* a, pero que 1 $\not{R}$ b. Las relaciones se pueden representar gráficamente usando flechas para representar los pares ordenados, o en forma tabular como aquí:



Relación del ejemplo 2 con flechas

R	***a***	***b***
0	**X**	**X**
1	**X**	
2		**X**

Relación del ejemplo 2 por medio de una tabla

RELACIONES EN UN CONJUNTO

Las relaciones de un conjunto A en sí mismo tienen un interés especial.

Definición 2: Una relación en un conjunto A, es una relación de A en A.

Entonces, una relación en un conjunto A es un subconjunto de A × A.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Se cumplen varias propiedades que permiten clasificar relaciones en un conjunto; a saber:

Definición 3: Una relación *R* en un conjunto A es *reflexiva* si *(a, a)* $\in R$ para cada elemento $a \in R$.

Por lo tanto, una relación A es reflexiva si $\forall a$: $(a, a) \in R$, tal que el dominio es el conjunto de todos los elementos de a.

Definición 4: Una relación R en un conjunto A es *simétrica* si para cualesquiera $a, b \in$ A resulta que $(b, a) \in R$ siempre que $(a, b) \in R$.
Una relación R en un conjunto A es *antisimétrica* si para cualesquiera $a, b \in$ A ocurre que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ sólo si $a = b$.

Simbólicamente: La relación R en el conjunto A es simétrica si: $\forall a, \forall b$: $((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R)$

La relación R en el conjunto A es antisimétrica si: $\forall a, \forall b$: $((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow (a = b))$

Definición 5: Una relación R en un conjunto A es *transitiva* si para cualesquiera $a, b, c \in$ A tales que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ se tiene que $(a, c) \in R$. Simbólicamente:

La relación R en un conjunto A es transitiva si se tiene:

$\forall a, \forall b, \forall c$: $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R)$

OPERACIONES ENTRE RELACIONES

Considerando que las relaciones de A en B son subconjuntos de A × B, dos relaciones de A en B se pueden combinar de las mismas formas en que se pueden combinar dos conjuntos.

Ejemplo: Sean A = {1, 2, 3} y B = {1, 2, 3, 4}. Las relaciones R1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)} y R2 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)}

Se pueden combinar para obtener:

$R1 \cup R2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$
$R1 \cap R2 = \{(1, 1)\}$
$R1 - R2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$
$R2 - R1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

Definición 6: Sea R una relación de un conjunto A en un conjunto B, y S una relación de B en un conjunto C. La *composición* de R y S es la relación que consiste en los pares ordenados (a, c) con $a \in$ A y $c \in$ C para los cuales existe un elemento $b \in$ B tal que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$. La composición de R y S se denota $S \circ R$.

ACTIVIDAD Nº 4

1) Sea A = {1, 2, 3, 4}, ¿qué pares ordenados están en la relación R = {(a, b) / a divide a b}?

2) Considérense las siguientes relaciones en el conjunto de los enteros:

   a) R1 = {(a, b) / $a \leq b$}
   b) R2 = {(a, b) / $a > b$}
   c) R3 = {(a, b) / a = b o a = -b}
   d) R4 = {(a, b) / a = b}
   e) R5 = {(a, b) / a = b + 1}
   f) R6 = {(a, b) / $a + b \leq 3$}

   ¿Cuáles de estas relaciones contienen a los pares (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1) y (2, 2)?

3) Considérense las siguientes relaciones en {1, 2, 3, 4}:

   a) R1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}
   b) R2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}
   c) R3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}
   d) R4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}
   e) R5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}
   f) R6 = {(3, 4)}

   ¿Cuáles de estas relaciones son reflexivas?

4) ¿Cuáles de las relaciones del punto 2, son reflexivas?

5) ¿Es reflexiva la relación "divide a" en el conjunto de los enteros positivos?

6) ¿Cuáles de las relaciones del punto 3 son simétricas, y cuáles son antisimétricas?

7) ¿Cuáles de las relaciones del punto 2 son simétricas, y cuáles son antisimétricas?

8) ¿Es simétrica la relación "divide a" en el conjunto de los enteros positivos? ¿Es antisimétrica?

9) ¿Cuáles de las relaciones del punto 3 son transitivas? Identificar las mismas para el punto 2.

10) Sea R la relación de {1, 2, 3} en {1, 2, 3, 4} definida como: R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)}. Y sea S la relación de {1, 2, 3, 4} en {0, 1, 2} definida como: S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}. Hallar la composición S ° R.

RECORDATORIO:

Propiedades de la Potenciación

1) $A^m . A^n = A^{m+n}$
2) $A^m / A^n = A^{m-n}$
3) $(A^m)^n = A^{m.n}$
4) $A^{m/n} = \sqrt[n]{A^m}$

Definición y Propiedades del Logaritmo

La definición de logaritmo es la siguiente: $\mathbf{y = log_a\, x \Leftrightarrow x = a^y}$, con $a>0$ y $a \neq 1$.

1) $\log_a(x . y) = \log_a x + \log_a y$
2) $\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$
3) $\log_a(x)^y = y . \log_a x$

Identidades Trigonométricas

1) $\cos(x) = 1 / \sec(x)$; $\sec(x) \neq 0$.
2) $\mathrm{sen}(x) = 1 / \mathrm{cosec}(x)$; $\mathrm{cosec}(x) \neq 0$.
3) $\mathrm{tg}(x) = 1 / \mathrm{cotg}(x)$ $\mathrm{cotg}(x) \neq 0$.
4) $\mathrm{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
5) $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{sen}(x) / \cos(x)$; $\cos(x) \neq 0$.
6) $\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) +/- \mathrm{sen}(y)\cos(x)$
7) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y)\ -/+ \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$

Axiomas de Peano

1. El 1 es un número natural.
2. Si n es un número natural, entonces el sucesor de n también es un número natural.
3. El 1 no es el sucesor de ningún número natural.
4. Si hay dos números naturales n y m con el mismo sucesor, entonces n y m son el mismo número natural.
5. Si el 1 pertenece a un conjunto, y dado un número natural cualquiera, el sucesor de ese número también pertenece a ese conjunto, entonces todos los números naturales pertenecen a ese conjunto. **Este es el axioma de inducción, y captura el Principio de Inducción Matemática.**

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Muchos teoremas afirman que P(n) es verdadera para todos los enteros positivos n, donde P(n) es una función proposicional o predicado como por ejemplo, la sentencia $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$ o la propiedad $n \leq 2^n$. La inducción matemática es una técnica para demostrar proposiciones de la forma $\forall n\, P(n)$, donde el dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Demostrar por inducción que P(n) es verdadera para todo entero positivo n, consiste de tres pasos:

BASE: Debe mostrarse que la proposición P(1) es verdadera.

HIPÓTESIS INDUCTIVA: Si: $n = k$, se supone: $P(n) = P(k)$

TESIS: Debe cumplirse: que la implicación $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ es verdadera para todo entero positivo k.

Ejemplo 1: Demostrar por inducción que la suma de los n primeros números positivos impares es n^2.

Resolución**:**

Se debe demostrar que: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

BASE: P(1) afirma que: $1 = 1^2$

HIPÓTESIS INDUCTIVA: $P(n) = P(k)$

$$1 + 3 + \ldots\ldots + (2k - 1) = k^2$$

TESIS: $P(k) \rightarrow P(k + 1)$; entonces: $n = k+1$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 + (2(k+1) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\ &= k^2 + (2k + 2 - 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

ACTIVIDAD N° 5

1. Demostrar por inducción que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
2. Demostrar por inducción que si n es un entero positivo, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$
3. Encontrar una fórmula para la suma de los n primeros números enteros positivos pares y demostrarla por inducción.
4. Demostrar que: $3^n < n!$ para todo n entero mayor que 6.
5. Demostrar que: $2^n > n^2$ para todo n entero mayor que 4.
6. Demostrar que: $n^3 - n$ es divisible por 3 siempre que n sea un entero positivo.

FUNCIONES – REPRESENTACIONES

El Área A de un circulo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa con la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A, y decimos que A esa función de r.

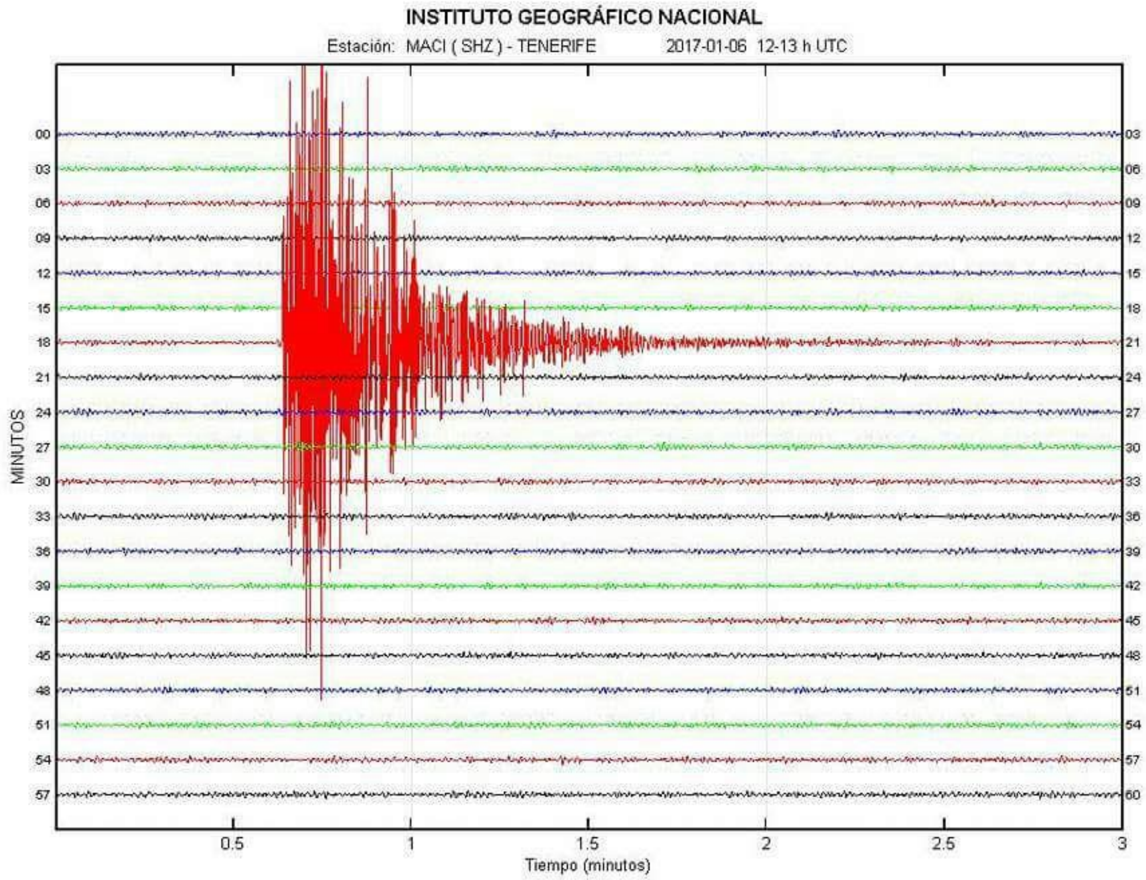
La población humana del mundo P, depende del tiempo t. En la tabla se dan estimaciones de la población del mundo P(t) en el tiempo t, para ciertos años.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

Donde, por ejemplo: $P(1950) = 2{,}520{,}000{,}000$

Para cada valor del tiempo t existe un valor P correspondiente, y decimos que P es una función de t.

La aceleración vertical a del suelo, según la mide un sismógrafo durante un terremoto, depende del tiempo t. En la figura 1 se muestra una gráfica generada por actividad sísmica. Para un valor dado de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.



En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r o t) se asigna otro número (A, P, a). En cada caso decimos que el segundo número es función del primero.

Una función es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A, exactamente un elemento llamado f(x), de un conjunto B.

Se van a considerar fundamentalmente funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. **(Aunque cuando vimos Inducción Matemática, el conjunto A eran siempre enteros positivos. En rigor, las funciones pueden involucrar Conjuntos Numéricos cualesquiera).**

El conjunto A se llama dominio de la función. El número f(x) es el valor de f en x y se lee "f de x". La imagen de f es el conjunto de todos los valores posibles de f(x) en el conjunto B, conforme x varía en todo el dominio A. Un símbolo que representa un valor arbitrario en el domino de una función f se llama Variable Independiente. Un símbolo que representa un valor en la imagen de f se llama Variable Dependiente.

FUNCIONES - PROPIEDADES

PARIDAD-IMPARIDAD

Si una función f satisface que f(x) = f(-x) para todo número x de su dominio, entonces f se denomina **función par**.

Si f satisface que f(-x) = - f(x) para todo número x de su dominio, entonces f se denomina **función impar**.

ACOTACIÓN

Funciones Acotadas Superiormente

Una función f se dice que está acotada superiormente si existe un número real M tal que f(x) ≤ M, □x □ Dom(f). Este número real M recibe el nombre de **COTA SUPERIOR** de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es superior al valor M y, por tanto, la gráfica de la función f estará por debajo de la recta y = M.

Funciones Acotadas Inferiormente

Una función f se dice que está acotada inferiormente si existe un número real m tal que f(x) ≥ m, □x □ Dom(f). Este número real m recibe el nombre de **COTA INFERIOR** de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es inferior al valor m y, por tanto, la gráfica de la función f estará por encima de la recta y = m.

Funciones Acotadas

Una función se dice que está acotada si lo está inferior y superiormente. Por estar acotada superiormente, existirá un número real M que es mayor o igual que todas las imágenes de la función y por estar acotada inferiormente, existirá otro número real m que es menor o igual que todas las imágenes de la función. En consecuencia,

□ m, M / m ≤ f(x) ≤ M, □x □ Dom(f); lo cual significa que todas las imágenes de nuestra función estarían comprendidas entre m y M y, por tanto, geométricamente, la gráfica de la función f estaría en la banda comprendida entre las rectas y = m e y = M.

FUNCIÓN PERIÓDICA

Sea f: D → R. Se dice que f es periódica si existe un número real, no nulo, T, llamado PERIODO, tal que para todo x □ D, se cumple que x + T □ D y se verifica que f (x + T) = f x).

De la propia definición se deduce que si T es un periodo de la función f, también lo es 2T, 3T,.., es decir sus periodos son múltiplos enteros del menor periodo positivo T, que recibe el nombre de periodo principal o propio. El conocimiento de la gráfica de una función en un periodo nos permite construir por periodicidad toda la gráfica.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

Se dice que una función f es creciente sobre un intervalo I, si: $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

Se dice que una función f es decreciente sobre un intervalo I, si: $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

TIPOS DE FUNCIONES

Función Polinómica

Una función P, recibe el nombre de Polinomio si: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas **coeficientes** del polinomio.

Función Racional

Una función f de este tipo, es una razón de dos polinomios:

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ El dominio consta de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Función Exponencial

Son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva.

Función Logarítmica

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde la base a es na constante positiva.

Funciones Algebraicas

Una función f recibe este nombre si puede construirse empleando expresiones algebraicas generales (no solamente polinomios). Por lo tanto, las funciones racionales son todas algebraicas, aunque no se cumple lo recíproco.

Función Potencia

Una función de la forma $f(x) = x^a$ donde a es constante, se llama Función Potencia.

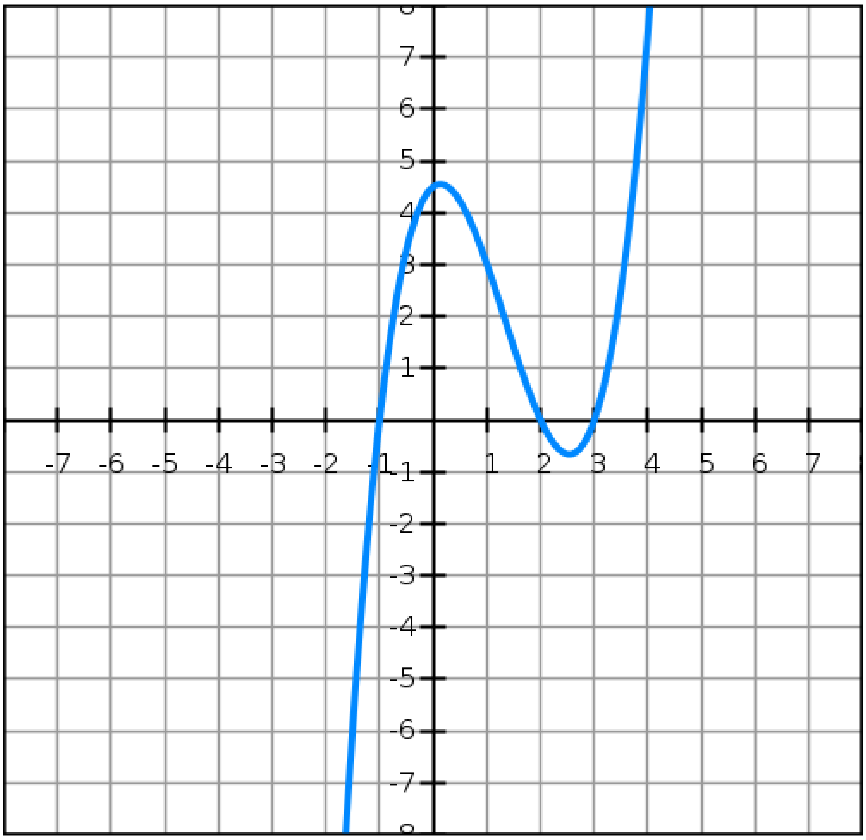
ACTIVIDAD 2

Clasificar las funciones siguientes según los tipos analizados:

$f(x) = 5^{x}$	
$f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$	
$f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$	
$g(x) = x^{5}$	
$h(t) = 1 - t + 5t^4$	
$w(r) = \ln r$	

ACTIVIDAD 3

1. En la figura se muestra la gráfica de una función f.
   1. Encuentra el valor de f(1)
   2. Encuentra los puntos donde f(x) = 0
   3. ¿Cuál es el dominio e imagen de f?
   4. Determina intervalos de positividad y negatividad en f
   5. Determina intervalos de crecimiento y decrecimiento en f



2. Haga una gráfica y encuentre el dominio y la imagen de cada función:

   1. $f(x) = 2x + 1$
   2. $g(x) = x^2 + 3$
   3. $t(x) = \log_{1/2} x$
   4. $y(u) = (0{,}5)^u$
   5. $h(t) = t^{1/3}$
   6. $f(r) = \dfrac{x+1}{x-1}$

3. Para las funciones anteriores, determinar intervalos de positividad, negatividad, crecimiento y decrecimiento.
4. Determinar si las funciones trigonométricas f(x) = sen(x) y g(x) = cos(x) son acotadas. Justificar.
5. Determinar si las funciones del punto anterior son periódicas. Justificar.