Unidad 6: Espacios Vectoriales

Práctica 6

1. Demostrar si (V+W, +) es un grupo abeliano.

2. En un sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales representar los puntos A(-1;3) B(2;5) y con ellos el vector $\overrightarrow{AB}$.

2.1. A partir del vector anterior ubica un punto T, tal que el vector $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{AB}$, otro M tal que $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{AB}$; otro H, tal que $\overrightarrow{OH} = 2.\overrightarrow{AB}$

2.2. ¿Cuánto miden cada uno de los vectores anteriores? Estas medidas son ***el módulo del vector*** y lo expresaremos, por ejemplo, $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ *(<u>sugerencia</u>: recordar el **teorema de Pitágoras**)*

2.3. Cada uno de los vectores anteriores, forman con la abscisa positiva, un ángulo α.

2.3.1.-Expresar cos α para cada uno de los vectores.

2.4. Trasladar el conocimiento adquirido en el ítem anterior a un sistema de tres dimensiones a partir de los puntos: A(-1;3;5) ; B(2;5;-3)

2.4.1. ¿cuál es el módulo de cada uno de esos vectores?

2.5. Tomar un par de vectores cualesquiera, *u; v*.

2.5.1. Ahora hallar: $w = u + v$

2.5.2. Calcula $|u|$; $|v|$; $|w|$

2.5.3. Verificar si se cumple: $| w | \leq | u | + | v |$
que es lo mismo que decir $| u + v | \leq | u | + | v |$

2.5.4. Si la desigualdad se ha cumplido, su nombre es ***Desigualdad Triangular***.

Definirla: ……………………………..

2.6. Se llama vector unitario a aquel cuyo módulo es 1, es decir dado V, si | V |=1 entonces V es unitario.

2.6.1. ¿Es unitario el vector $\overrightarrow{OT}$ del ítem 3-1?

2.6.2. Teniendo el módulo de $\overrightarrow{OT}$, ahora tomar el vector $W = \left(\frac{x_{OT}}{|OT|};\frac{y_{OT}}{|OT|}\right)$ y calcular su módulo, ¿W es unitario?.

Escribir la **conclusión**…………………………………………..

2.6.3. Unitarizar (transformar en unitario) al vector $V_8 = (3;5)$

2.6.4. Representar el vector V_8 y determinar el valor del seno y el coseno del ángulo que él forma con el sentido positivo de la abscisa. ¿Tiene algo que ver con el vector unitarizado?

Ya hemos considerado, y lo fijaremos , que un ***vector*** *está dado por un conjunto ordenado de componentes tales que puede ser $V=(a,b)$ si $V \in R^2$; $V=(a,b,c)$ si $V \in R^3$, $V=(a,b,c,......n)$ si $V \in R^n$.-*
A su vez, podemos expresar los vectores como $V = (x_1, x_2, x_3,......x_n)$ donde el subíndice indica la coordenada correspondiente al valor x.
Por definición de suma algebraica de vectores, resulta que: Si $V = (x_1, x_2, x_3, ...x_i)$ $W= (y_1, y_2, y_3,.......y_i)$ entonces
$V + W = P = (x_1+y_1 , x_2+y_2, x_3+y_3,..........,x_i+y_i)$

Sería bueno que recordáramos la estructura a la cual pertenecen los vectores en la suma, recordar su neutro y su inverso aditivo.

ESPACIO VECTORIAL

3. Dados: $V= \{(x,y) \in RxR \}$ y $A= \{ a \in R \}$ verificar si:

4.1. $a_1.(a_2.V) = (a_1.a_2).V$

4.2. $(a_1 + a_2).V = a_1.V + a_2.V$

4.3. $a.(V_1 + V_2) = a.V_1 + a.V_2$

4.4. $1.V = V$

Si se demuestra que (V,+) es un grupo y con (R,.) tiene estas propiedades entonces (V,+,R,.) es un ***Espacio Vectorial****, donde V es un conjunto de vectores y R son números reales.*

Por lo tanto: dos conjuntos bajo dos operaciones resultan un ***Espacio Vectorial*** *si el primer conjunto es grupo con la primera operación y el segundo conjunto, con la segunda operación aplicada sobre el primer conjunto, goza de las propiedades observadas.*

4. Dados los dos conjuntos del ejercicio anterior verificar si:

4.1. $1.V = V$
4.2. $a . (0,0) = (0,0)$

5. En el espacio vectorial R^2 donde la suma de vectores se define componente a componente, es decir, si: $V_1=(x_1,y_1)$ y $V_2=(x_2,y_2)$ el vector suma $V_1+ V_2=(x_1+ x_2,y_1+ y_2)$
y el producto de un escalar a (un número real) por un vector $V = (x, y)$ se define por $a.V = (ax, ay)$
Encontrar las componentes de los vectores:

5.1. 2.(1;-3) – 4.(1, -1)
5.2. (1, 4) +5.(-2, -3)+2.(0,1)
5.3. -[(2,1)+(-5,3)]

6. Dados $V_1 = (-1;3)$; $V_2= (5,2)$ tal que $V_1 \epsilon V$ y $V_2 \varepsilon V$ verificar si:

6.a. $0.V = (0,0)$
6.b. $a.(0,0) = (0,0)$
6.c. $a_1.(a_2.V) = (a_1.a_2).V$
6.d. $(a_1 + a_2).V = a_1.V + a_2.V$
6.e. $a.(V_1 + V_2) = a.V_1 + a.V_2$
6.f. $1.V = V$

7. Analizar si es posible encontrar a y b:
7.a. $(a,2)+b(0,1)=a(2,4)$
7.b. $(a,2)+b(0,1)=a(1,0)$
7.c. $(a,2)+b(1,0)=a(2,4)$

8. Analizar si es un espacio vectorial $(V, \oplus,K, \otimes)$ donde $V= R^2$, $K=R$; $a \in V$, $a´\in V$; $b \in V$, $b´ \in V$, $\alpha\in K$

$(a,b) \oplus (a´,b´) = (½ a+ ½ a´; ½ b + ½ b´)$ y $\alpha \otimes (a,b) = (\alpha .a , \alpha .b)$

Combinación Lineal

9.

9.1. Demostrar si existen valores a, b reales tales que:

$a.(3,5) + b.(-2,4) = (2,-1)$

9.2. Demostrar si existen valores a,b,c reales tales que:

$a.(-2,4,0) + b.(3,-1,5) + c.(0,1,-3) = (2,-2,4)$

> *Si los valores reales a,b,c.....existen, entonces el vector resultado es* ***combinación lineal (C.L.)*** *de los otros.*

10.

10.1. ¿Es (3,-2) C.L. de (5,1) y (-2,0)?

10.2. ¿Es (3,-1,1) C.L. de (1,0,3), (4,-1,1) y (0,3,-1)?

11. Mostrar que el vector nulo es C.L. de cualquier par de vectores $V_1=(x_1,y_1)$ y $V_2=(x_2,y_2)$, es decir, es posible encontrar a y b tal que :
$(0,0) = a. V_1+ b. V_2$

11.a. Si $V_1 = (2,5)$ y $V_2= (3,-1)$ cómo tienen que ser a y b.

11.b. Si $V_1 = (2,-1)$ y $V_2= (-4, 2)$ cómo tienen que ser a y b.

11.c. Si $V_1 = (1,-1)$ y $V_2= (0, 0)$ cómo tienen que ser a y b.

12. Dado los vectores $V_1= (1+a, 1-a)$ y $V_2= (1-a, 1+a)$ ¿Bajo qué condiciones impuestas al real ***a*** resultan $c.V_1 + d.V_2 = 0 \Leftrightarrow c=d=0$

13. Expresar el vector $V = (-1,4,3)$ como combinación lineal de:
13.a. (-2,0,0) ; (0,-1.1) ; (0,0,4)
13.b. (i,0,0) ; (0,j,0) ; (0,0,k)

14. ¿Cómo deben ser los escalares a, b y c para que:

14.a. a.(2,1,-2) + b.(3,0,1)+ c.(-2,2,3) = (0,0,0)
14.b. a.(3,-4,12) + b.(3/2,-2,6) + c.(5,7,-1) = (0,0,0)

<u>Definición</u>:

Dados escalares a_i tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i.V_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i = 1,..,n$ *entonces los vectores V_i son* ***linealmente independientes*** (LI).

Es decir, la única manera de escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores $V_1,\ldots,V_n$ *es la combinación lineal trivial, es decir, aquella en la que todos los escalares son cero.*

Si, por el contrario, los escalares no deben resultar simultáneamente iguales a cero, los vectores son ***linealmente dependientes*** (LD).

15. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son L.D. En caso de serlo expresar uno de los vectores como combinación lineal de los otros:

15-a. {(1,1,1) ; (0,1,-1) ; (1,4,-1)}
15-b. {(0,0,1) ; (1,1,-2) ; (3,4,1)}
15-c. **{** (-1,2) ; (3,4)}
15-d. {(-1,2) ; (-3,6)}
15-e. {(-1,2,4) ; (3,0,1) ; (2,-4,-8)}
15-f. {(1,1,0) ; (-2,3,5) ; (2,0,-1) }

16. Determinar x para que los vectores siguientes sean L.D. Ídem para que sean L.I.

16-a. {(1,-4,6) ; (1,4,4) ; (0,-4,x)}
16-b. {(x,1,0) ; (1,x,1) ; (0,1,x)}

17. Si los vectores U y V son linealmente independientes, demostrar si
W = U + V es también linealmente independiente.

<u>Sub-Espacio Vectorial</u>

18. Dado el conjunto de vectores V={ (x; 3x-1 ; x^2 –2)$\in R^3$: $x \in R$}

Indicar cuáles de los siguientes vectores están en V:

V_1= (-3,8,-11) V_2= (0,-1,-2) V_3= (3;8;7) V_4= (2; 7; 2)

19. Expresar los vectores de la forma S = (x,y,z,w) que resultan dados por el conjunto:
S= { $x \in R^4$: x –2y + z = 0 ; y – z = 0 }

20. Expresar un conjunto de vectores V del cual V_1 es uno de ellos:
V_1 = (-1, 5, -4)

21. Dados U= (1,1,0), V= (-1/2,0,2/3), W= (0,1/4,2) vectores en R^3, calcular

21-a. U + 2V – W
21-b. (U + V) – (2V + W)
21-c. calcular el vector X siendo: 6V + 5X = U

22. Dado el espacio vectorial de las ternas reales, V= R^3

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos T de V, son tales que $T \subset V$, a su vez,
si $U \in T \wedge W \in T \Rightarrow (U+W) \in T$, además
si $a \in R \wedge U \in T \Rightarrow a.U \in T$

22-a. $T=\{ (x; y ; z) \in R^3: x=0\}$
22-b. $T=\{ (x; y ; z) \in R^3: x+y=0\}$
22-c. $T=\{ (x; y ; z) \in R^3: x+y=1\}$
22-d. $T=\{ (x; y ; z) \in R^3: z=2\}$
22-e. $T=\{ (x; y ; z) \in R^3: x.z=0\}$

Un subconjunto que cumpla con las condiciones pedidas en este ítem, es un ***sub-espacio vectorial*** *del espacio de referencia.*

Considerando esta definición indicar cuáles de los subconjuntos anteriores son sub-espacios del espacio vectorial R^3.

23. Determinar si alguno de los siguientes conjuntos son sub-espacios del espacio vectorial R^2:

23.a. $\{(x,y): x=y\}$
23.b. $\{(x,y): x \geq 0\}$
23.c. $\{(x,y): x.y = 0\}$
23.d. $\{(x,y): x + y = 1\}$
23.e. $\{(x,y): 3x – 2y = 0\}$

24. Demostrar si son sub-espacios vectoriales K- del espacio vectorial V que se indica:

24-a. $\{P(x) \in R[X]: P_{(x)} = a+bx+cx^2$, con a,b,c reales$\}$ siendo V=R[X] y K=R
24-b. Los números complejos que tienen parte real 0 (los imaginarios puros), siendo V=C y K=R

25. Demostrar si los siguientes conjuntos son sub-espacios vectoriales del espacio vectorial R^3 o R^2 según corresponda:
25-a. $W = \{ (x,y,z) ; y=0\}$
25-b. $W= \{ (x,y) ; x + 3y = 0\}$
25-c. $W = \{(x,y,z) ; x = 7\}$
25-d. $W = \{ (x,y,z) ; x + 2y – z = 0 ; y – x= 0\}$

26. Dado el sub-espacio S de R^3 de todos los vectores de la forma (0,b,c), con b y c reales, y el sub-espacio T generado por los vectores (1,2,0) y (3,1,2). ¿Qué vectores forman el conjunto $S \cap T$ y cuáles S+T?

27. Calcular $S \cap T$ si los vectores vienen dados por.
$S= \{x \in R^3 : -x-y = 0 ; z= 0\}$

$T = \{ x \in R^3 : z – x = 0 \}$

28. ¿Los siguientes sub-espacios vectoriales son iguales? Justificar.

28-a. $A = \{ x \in R^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$
$B = \{ x \in R^4 : x = a.(-1,1,0,0) + b.(-1,1,-1,1) \text{ con } a,b \text{ reales}\}$
28-b. $M = \{x \in R^3 : x = a.(1,0,-1) + b.(-2,1,1) \text{ con } a,b \text{ reales}\}$
$P = \{x \in R^3 : x = a.(-1,1,0) + b.(3,-1,-2) \text{ con } a,b \text{ reales}\}$
28-c. $S = \{ x \in R^4 : 2.x_1 - x_3 = 0 = x_1 + x_2 + x_3\}$
$T = \{x \in R^3 : -2x_2 + x_3 = 0 = x_1 - x_2\}$

Sistema de Generadores y Base

Un conjunto A de vectores es un ***sistema de generadores de V*** *si y solo si todo vector de V puede expresarse como C.L. de los vectores de A.*

29. Encontrar generadores para el sub-espacio $S = \{ (x,y,z,w) \in R^4 : x - 2y + z = 0 ; y - z = 0 \}$ del R-espacio vectorial R^4.

30. Dado $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (3,5)$

30-a. Escribir $v = (-4,1)$ como combinación lineal de v_1 y v_2
30-b. Probar que cualquier vector de R^2 es combinación lineal de v_1 y v_2
30-c. Probar que $V = \{v_1, v_2\}$ es L.I.

31. Determinar si el vector $V = (-1,4,3)$ está en el sub-espacio generado (cápsula lineal) por los vectores:
31-a. (-2,0,0) ; (0,-1.1) ; (0,0,4)
31-b. i= (1,0,0) ; j= (0,1,0) ; k= (0,0,1)

32. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores generan R^3:

35-a- u = (0,0,0) , v = (-1,1,3) , w = (π,0,1)
35-b.- u = (0,0,0) , v = (-1,1,3 , w = (π,0,1) , t = (0,0,1)
35-c.- u = (-1,1,0) , v = (1,1,-1) , w = (0,-1,0)

33. Dado el sub-espacio generado por los vectores $\{V_1,V_2,V_3\}$, es decir, $H = \{v \in R^3 : v = a.V_1 + b. V_2 + c. V_3$ con a,b,c reales$\}$ donde $V_1 = (1,0,-2)$; $V_2 = (2,-1,-4)$ $V_3 = (0,1,0)$

Decidir si los siguientes vectores son elementos de H:

33-a. (3,1,3)
33-b. (0,1,0)
33-c. (4,2,-8)

34. Dados los vectores: $v_1 = (-1,2)$ y $v_2 = (3,5)$

34-a. Probar que $B = \{v_1, v_2\}$es L. I.
34-b. Probar que cualquier vector de R^2 es combinación lineal de v_1 y v_2
34-c. Mostrar que $v = (-4,1)$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de v_1 y v_2.
Encontrar las coordenadas de v en la base, coinciden estas con las componentes del vector.

Dado un conjunto B de vectores, tal que $B \subset V$, siendo V un espacio vectorial, consideramos que ***B es una base*** *de V $\Leftrightarrow$ B es un conjunto L.I. y sistema de generadores de V.*

35. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de los respectivos espacios vectoriales:

38-a.- (1,2) , (-1,-3) en R^2
38-b.- (2,1,4) , (4,-2,7) en R^3
38-c.- (1,0,0) , (0,1,0) , (0,0,1) en R^3
38-d.- (1,-1,2) , (4,0,0) , (-2, ½, -1) en R^3

Si se obtiene una base finita de un espacio vectorial V, entonces toda otra base de V es coordinable con la hallada; significa que dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. ***Ese número de vectores determina la dimensión de la base.***

36. Determinar todos los valores de k para los cuales:
36-a. B = {(0,-1,k) , (1,-1,0) , (-1,0,2)} es una base de R^3.
36-b. el sub-espacio generado por {(0,-1,k) , (1,-1,0) , (-1,0,2)} tiene dimensión 2.

37. Dados u= (5,3); v= (-3,4); w= (3,-2)

37-a. Determinar si B={u,v } es una base en R^2. En tal caso hallar las coordenadas y componentes de w.
37-b. Determinar si B={v,w} es una base de R^2. en tal caso hallar las coordenadas y componentes de u.
37-c. Sea x el vector cuyas coordenadas en la base {u,v} son –1 y 1. Hallar las coordenadas de x en la base canónica y luego hallar las coordenadas de x en la base {v,w}.

38. Hallar una base B de R^2 tal que:
38-a. las coordenadas de un vector en la base B sean el doble que sus componentes
38-b. las coordenadas del vector (3,6) sean $(3,0)_B$ y las de (1,0) sean $(1,1)_B$

39. Hallar, por lo menos, dos bases de los siguientes sub-espacios:

39-a. T = {(x,y,z) : 2x – 2y + z = 0}
39-b. T = {(x,y,z,u) : x – u = 0 ; x + y + z = 0}
39-c. T = gen { (1,0,-1) ; (0,1,-2) ; (2,-1,0)}

40. Determinar todos los valores de h para los cuales el conjunto de vectores V es generador del espacio R^3

V ={(1,h,0) , (h,1,0) , (5,1,6)} ¿Para cuáles de estos valores es una base?

41. Dados U = (2,1,-1) , V = (1,3,1) , W = (0,2,1) ; determinar todos los valores reales a para que el conjunto de vectores B resulte una base de R^3

B = {a.U + 3V ; 2.V + 3.W ; (1-a).W}

42. Hallar base y dimensión de los siguientes sub-espacios:

43-a. S = { (x,y,z,u) : 3x + y + z = 2y + z = 0 }
43-b. T = { (x,y,z) : x + y = 0}

43. Decidir si es posible extraer una base de los siguientes conjuntos de vectores:

43-a. V = {(1,-1,2) ; (2,0,5) ; (1,1,2) ; (-1,1,0)}
43-b. W = {(1,2,-1,0) ; (2,1,-5,-6) ; (1,3,1,1) ; (0,1,2,1) ; (1,3,0,2)}

44. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y B={ v_1, v_2 , v_3} una base de V.

Sea S = gen { $2v_1 + v_2 + v_3$; $-v_1 + 2v_2 + 3v_3$; $v_1 + 3v_2 + 4v_3$}

Determinar todos las valores de a $\in$ R para los cuales v $\in$ S siendo:

$$v = 2\,a^2\,v_1 - 3v_2 - 7\,a\,v_3$$

45. Sea V un espacio vectorial real con B = { v_1; v_2; v_3} una base de V.

Sea B´= {$v_1 + 2v_3$; $v_2 - v_3$; $2v_1 + v_2 + v_3$}

45-a. Probar que B´ es base de V

45-b. Sea S= gen { u, v, w } donde u,v,w son de V y tales que:

$u = (0;-2;-1)_{B'}$ $v = (1;0;0)_{B'}$ w| = $(-1;2;1)_{B'}$

Probar que S = gen { $5v_1 + 6v_2$; $-3v_2 + 5v_3$}

46. Sea {v_1 ; v_2 ; v_3; v_4} un conjunto de vectores LI en un espacio vectorial V. Si

S = gen { $v_1 - 3v_2$; $v_2 - v_3 + v_4$; $v_2 - v_4$}

T= gen { $v_2 + v_3 + v_4$; $v_1 - v_3$}

Determinar si {v_1 ; v_2 ; v_3 ; v_4} es una base de S + T

Producto Escalar o Interior

47. Representar un par de vectores V=(a,b) ; W=(c,d)

Resolver: V.W = (a,b).(c,d).

Indicar a qué es igual V.W en función de sus coordenadas.

Calcular el coseno del ángulo que forman V con W

Definición 1:

Dado los vectores V= (x_1,x_2,.....,x_n) , W= (y_1,y_2,…….,y_n), se denomina ***producto escalar*** *de vectores V.W = $\sum x_i.y_i$ = h ε R*

Definición 2:

Se define como ***producto escalar de dos vectores****:*

$V_1 \,.\, V_2 = |V_1|.|V_2|.\cos\alpha$

48. Aplicando lo obtenido, hallar el producto escalar de los siguientes vectores:

48-a. V= (1,3,-1) y W= (2,1,0)
48-b. V= (2,6,1) y W= (-3,2,2)
48-c. V= (-1,5,-1,1) y W= (3,0,-1,6)

49. De los vectores 43-1. hallar:

$|V.W|$ y $|V|\,.\,|W|$ comparar resultados

50. En un espacio con producto escalar definido, el ángulo entre los vectores V, W es α . Sabiendo que: V = T + W, demostrar si:

$$|T|^2 = |V|^2 + |W|^2 - 2 \, . |V| . |W| . \cos\alpha$$

Recordar por trigonometría a que es igual cos ($\pi/2$). Por lo tanto ¿qué puede decirse de dos vectores cuyo producto escalar es nulo?

51. En (R^3,+,R,.) con el producto escalar habitual:

51-a. Obtener un vector unitario ortogonal a: $V_1 = (1,-1,3)$ y $V_2 = (2,4,3)$
51-b. Obtener dos vectores unitarios ortogonales entre sí y ortogonales a: V = (1,-1,3)

52. Dados los puntos A(-1,2,-3) ; B(3,-5,1) ; C(2,9,-4) calcular los ángulos que forman entre ellos, tomando como vértices A , B , C.

53. Demostrar que la condición para que los vectores A + B y A - B sean perpendiculares es que: $|A| = |B|$

54. Determinar el valor de *k* para que los vectores indicados resulten perpendiculares:

v= (k,3,4)   w= (4, k, -7)

55. Dado los vectores w = (x ,y) ; v = (-y, x) Demostrar si:

55-a. Son ortogonales
55-b. Son ortogonales solo si $x^2 + y^2 = 1$

56. Hallar los cosenos directores del vector v = (1,-1,3)

57. Hallar las componentes del vector, en el plano, cuyo módulo es 2, y que forma un ángulo de 30º con el eje de abscisas.

58. Un vector de módulo 5, en R^3, tiene sus tres componentes iguales, ¿cuáles son?

59. Demostrar si:

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} \text{ es base ortonormal en } R^2$$

60. Demostrar si:

{(1/3,-2/3,2/3) ; (2/3, -1/3, 2/3) ; (2/3, 2/3, -1/3)}   es base ortogonal en R^3

61. Si V, W, Z son vectores, probar que si V.W = V.Z no se deduce que W = Z

<u>Producto Vectorial o Producto Exterior</u>

Se define al ***producto vectorial*** *de dos vectores, $V \times W = |V| . |W| . \text{sen}\ \alpha$.- El resultado es otro vector perpendicular al plano que formar los vectores originales.*

¿Qué puede decirse de sen (α) y sen ($-\alpha$). Por lo tanto, ¿qué puede decirse de VxW respecto a WxV?

En base a la definición, y dados los vectores V=(a,b,c) y W=(d,e,f), encontrar una expresión que permita resolver VxW en función de sus coordenadas.

62. Dado V = (-1,3,0) y W = (2,-3,6) hallar:

V x W
W x V
|V x W|

63. Hallar las componentes de un vector perpendicular a:

$V_1 = (0;1;5)$ y $V_2 = (-3;0;2)$

64. Dados los vectores: V = (2,0,3); W = (-1,5,2); Z = (0,-4,1), calcular:

64-a. V.(W x Z)
64-b. V x (W x Z)
64-c. (V x W) x Z
64-d. V x (V x W)
64-e. (V.W).(V x W)
64-f. (V x W) x (V x Z)

Superficie de Paralelogramo

65. Hallar el área del paralelogramo construido sobre los vectores: V = (6,3,-2); W = (3,-2,6)

66. Hallar el área del triángulo que tiene como vértices: A(1,1,1); B(2,3,4); C(4,3,2)

Producto Mixto – Volumen de Paralelepípedo

El **producto mixto** de vectores está dado por: (VxW).U

67. Hallar el producto mixto ((VxW).T) de los vectores:

V = (-1,3,3) , W = (2,-3,1) , T = (0,3,-4)

68. Comprobar si los vectores:

$$\vec{V} = 2\breve{i} - \breve{j} - \breve{k}$$
$$\vec{W} = \breve{i} + 3\breve{j} - \breve{k}$$
$$\vec{U} = \breve{i} + 2\breve{j} + 2\breve{k}$$

son coplanares (están en un mismo plano)

69. Hallar el volumen de un paralelepípedo cuyas aristas son los vectores:

V_1= (-1,3,3) ; V_2 = (2,-3,1) ; V_3 = (0,3,-4)