# ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

## LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA

Sea la función $\Phi : A \times A \to A$, tal que $(x, y) \to x \ \Phi \ y = z$. O dicho de otra manera:
Si $(x, y) \in A^2 \ \to \ \Phi(x, y) = x \ \Phi \ y$.

La definición de función asegura dos cosas:
1) Cualquiera sea el par de elementos de A, el resultado existe siempre;
2) El resultado será un nuevo elemento de A (Ley de Cierre).

**Monoide:** Es todo par ordenado $(A, \ \Phi)$ donde A es un conjunto, y $\Phi$ es una Ley de Composición Interna sobre A.

**Propiedades:**

1) **Conmutativa:** Para todo par $(x, y) \in A \to x \ \Phi \ y = y \ \Phi \ x$
2) **Asociativa:** Para todo $x, y, x \ \in A \to (x \ \Phi \ y) \ \Phi \ z = x \ \Phi \ (y \ \Phi \ z)$
3) **Existencia de Elemento Neutro:** Dado $(A, \ \Phi)$, un elemento $e \in A$, es elemento neutro a izquierda si: Para todo $a \in A \to e \ \Phi \ a = a$. Y e es elemento neutro a derecha si: Para todo $a \in A \to a \ \Phi \ e = a$

Si un elemento neutro lo es a izquierda y a derecha, es el Elemento Neutro.

4) **Elemento Regular:** Un elemento $a \in A$ es regular, si cualesquiera sean un elemento $x \in A$ e $y \in A$ entonces Si $a \ \Phi \ x = a \ \Phi \ y$ entonces $x = y$. Análogamente: Si $x \ \Phi \ a = y \ \Phi \ a$ entonces $x = y$. Por ejemplo: Si $a + x = a + y \to x = y$
5) **Elemento Simétrico:** Si en $(A, \ \Phi)$ existe un elemento e (neutro) entonces el elemento simétrico (opuesto o inverso) de a, es a' de modo tal que: $a \ \Phi \ a' = a' \ \Phi \ a = e$. Si $a \ \Phi \ a' = e$, se dice simétrico a derecha. Si $a' \ \Phi \ a = e$, se dice simétrico a izquierda.
6) **Distributiva:** Sea A un conjunto, y $\Phi 1$ y $\Phi 2$ dos operaciones sobre A. $\Phi 1$ es distributiva respecto a $\Phi 2$ si para todo a, b, c pertenecientes a A se cumple que:
    - $a \ \Phi 1 \ (b \ \Phi 2 \ c) = (a \ \Phi 1 \ b) \ \Phi 2 \ (a \ \Phi 1 \ c)$ ( $\Phi 1$ distribuye a izquierda resp. a $\Phi 2$)
    - $(b \ \Phi 2 \ c) \ \Phi 1 \ a = (b \ \Phi 1 \ a) \ \Phi 2 \ (c \ \Phi 1 \ a)$ ( $\Phi 1$ distribuye a derecha resp. a $\Phi 2$)
    - Por ejemplo: El producto es distributivo respecto de la suma. **(No al revés)**

## ESTRUCTURAS:

1) **Semigrupo:** Una Ley de Composición Interna $\Phi$ definida sobre un conjunto no vacío A, define una estructura de Semigrupo sobre A, si esa ley es **Asociativa**. En ese caso A es un Semigrupo respecto a la Ley de Composición Interna.

Por ejemplo: Sea el par (N, +). N es el conjunto correspondiente a los números naturales siendo la ley, la operación suma ordinaria. Al cumplirse que la suma de dos números naturales da por resultado otro número natural (Ley de Cierre) y que la suma ordinaria cumple con la propiedad Asociativa, se dice que (N, +) es Semigrupo.

2) **Grupo:** Si A es un conjunto no vacío, se define una ley de Composición Interna Φ que es Asociativa, tiene Elemento Neutro y Elemento Simétrico, entonces se dice que tiene estructura de grupo respecto a dicha ley. Es decir, la ley de composición Φ le da una estructura de grupo al conjunto A. Entonces:

(A, Φ) es un monoide. (De donde se desprende que A es no vacío)

| | |
|---|---|
| $\forall$ x, y, x $\in$ A → (x Φ y) Φ z = x Φ (y Φ z) | Asociativa |
| $\forall$x $\in$ A : $\exists$ e $\in$ A / x Φ e = e Φ x = x | Elem. Neutro |
| c. $\forall$x $\in$ A : $\exists$ x' $\in$ A / x Φ x' = x' Φ x = e | Elem. Simétrico |

Cumplidas estas tres propiedades, la estructura es un Grupo. Si además se cumple que:

| | |
|---|---|
| d. $\forall$x, y $\in$ A : x Φ y = y Φ x | Conmutativa |

La estructura se denomina **Grupo Abeliano** (o **Grupo Conmutativo**)

Ejemplos:

A) Se plantea (Z, Φ) / a Φ b = a + b +3. Examinaremos qué estructura tiene:
   a. Verifica **Ley de Cierre**, puesto que a Φ b $\in$ Z
   b. Verificamos **Asociatividad**: (a Φ b) Φ c = (a + b + 3) + c + 3 = a + b + c + 6 …. (1)
      a Φ (b Φ c) = a + (b + c + 3) + 3 = a + b + c + 6 …. (2)
      Se verifica la igualdad entre (1) y (2)
   c. Existencia de **Elemento Neutro** (e) en Z respecto de Φ: a Φ e = a → a + e + 3 = a → e = -3 (A derecha). e Φ a = a → e + a + 3 = a → e = -3 (A izquierda).
   d. Existencia de **Elemento Simétrico** (a') en Z respecto de Φ: a Φ a' = e → a + a' + 3 = -3 → a' = - a – 6 (A derecha). Sucede lo mismo a izquierda (Probar).
   e. Se verifica **Conmutatividad**: a Φ b = a + b + 3 = b + a + 3 = b Φ a

Por lo tanto (Z, Φ) es **Grupo Abeliano**.

3) **Subgrupo:** El subconjunto no vacío H del grupo G, es un subgrupo de (G, Φ) sí y sólo sí (G, Φ) es grupo. Por ejemplo: todo grupo (G, Φ) admite como subgrupos al mismo G y al conjunto cuyo único elemento es e. Ambos se llaman **grupos triviales** de (G, Φ). Otro ejemplo podría ser (Z, +) como subgrupo de (Q, +).

**HOMOMORFISMOS**

Siendo (A, B) conjuntos. Si Φ1 es Ley de Composición Interna sobre A, y Φ2 es Ley de Composición Interna sobre B, con (A, Φ1) y (B, Φ2) ambos Monoides:

**Homomorfismo:** $f: A \rightarrow B$ / $f(a\ \Phi1\ b) = f(a)\ \Phi2\ f(b)$; $a, b \in A$. Ejemplos:

a) $f: R \rightarrow R^{+}$ / $f(x) = 2^{x}$ . Entonces $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^{x}2^{y} = f(x).f(y)$
b) $f: R^{+} \rightarrow R$ / $f(x) = \ln(x)$. Entonces $f(x\ .\ y) = \ln(x) + \ln(y)$

**Isomorfismo:** Es todo homomorfismo biyectivo. En general la existencia de un isomorfismo en A en B implica que A y B son isomorfos respecto a las leyes de composición.

**Endomorfismo:** Si $B \subset A$ entonces a todo homomorfismo se lo llama endomorfismo.

**Automorfismo:** Si A = B entonces a todo isomorfismo se lo llama automorfismo.

4) **Anillo:** Sea $(A, \Phi1, \Phi2)$, con $A \neq \varnothing$ de modo tal que:
   - $(A, \Phi1)$ es Grupo Abeliano (O Conmutativo)
   - $(A, \Phi2)$ es Semigrupo
   - $\Phi2$ es distributivo respecto de $\Phi1$

   La estructura es un Anillo si:

   $(A, \Phi1)$ es Grupo Abeliano
   $\forall x, y, z \in A \rightarrow (x\ \Phi2\ y)\ \Phi2\ z = x\ \Phi2\ (y\ \Phi2\ z)$ (Asoc.)
   3. $\forall x, y, z \in A \rightarrow x\ \Phi2\ (y\ \Phi1\ z) = (x\ \Phi2\ y)\ \Phi1\ (x\ \Phi2\ z)$ (Dist.)
   4. Si $(A, \Phi2)$ tiene "e", se llama **Anillo con Unidad**
   5. Si $\Phi2$ es Conmutativa, se llama **Anillo Conmutativo**.

Ejemplos:

1. $(N, +, \cdot)$ No es anillo. (No tiene elemento neutro en la suma)
2. $(N_0, +, \cdot)$ No es anillo. (No tiene inverso en el producto)
3. $(Z, +, \cdot)$
   - $(Z, +)$ Es grupo abeliano en la suma;
   - El producto es asociativo en Z;
   - El producto es distributivo respecto de la suma;
   - El producto tiene elemento neutro;
   - El producto es conmutativo

**$(Z, +, \cdot)$ ES ANILLO CONMUTATIVO Y CON UNIDAD**

5) **Cuerpo:** Sea un anillo conmutativo $(A, \Phi1, \Phi2)$. Sea el conjunto A tal que:
   - $(A, \Phi1)$ es Grupo Abeliano;
   - $(A-\{e\}, \Phi2)$ es Grupo (donde e es el elemento neutro para $\Phi1$);
   - $\Phi2$ es distributiva con respecto a $\Phi1$,

Si para ambas operaciones es Grupo Abeliano, el Cuerpo se dice **Conmutativo**.

En un cuerpo existen dos simétricos: Uno respecto de la adición: llamado inverso aditivo u opuesto; y el segundo es respecto al producto: llamado recíproco o inverso multiplicativo.

**RESUMEN**

Sea A un conjunto y sean dos Leyes de Composición Interna definidas sobre A: + y $\cdot$, $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo si:

<table>
<tr><td>1) $\forall a, b \in A \to (a + b) + c = a + (b + c)$ (ASOC.)</td><td rowspan="3">Grupo</td><td rowspan="4">Grupo Abeliano</td><td rowspan="6">Anillo</td><td rowspan="7">Anillo con Unidad</td><td rowspan="8">Cuerpo</td><td rowspan="9">Cuerpo Conmutativo</td></tr>
<tr><td>2) $\forall a, b \in A \to a + e = e + a = a$ (ELEM. NEUTRO)</td></tr>
<tr><td>3) $\forall a \in A \to a + a' = a' + a = e$ (EL. SIMET. ADITIVO)</td></tr>
<tr><td>4) $\forall a, b \in A \to a + b = b + a$ (CONMUT.)</td><td></td></tr>
<tr><td>5) $\forall a, b, c \in A \to a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ASOCIAT.)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6) $\forall a, b, c \in A \to a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (DISTRIBUT.)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7) $\forall a \in A \to \exists e' \in A \to a \cdot e' = e' \cdot a = a$ (EL. SIMET. MULTIPLICATIVO)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8) $\forall a \in A \to \exists a' = a^{-1} / a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (INVERSO)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9) $\forall a, b \in A \to a \cdot b = b \cdot a$ (CONMUT.)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

**Axioma de Clausura:** Si las operaciones Aditiva y Multiplicativa son Leyes de Composición Interna sobre A entonces si las operaciones están bien definidas y existen;

6) **Anillo o Dominio de Integridad:** Un Anillo es un Anillo o Dominio de Integridad si para cada par de elementos distintos del neutro 0 para la Ley Aditiva, entonces $a \cdot b \neq 0$ cuando $a \cdot 0$ y $b \neq 0$.

$a \cdot b = 0$ si $a = 0$ ó $b = 0$

***Apunte: "Estructuras Algebraicas". Jorge E. Sagula.***