UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN
Centro Regional CHIVILCOY
Licenciatura en Sistemas de Información
Asignatura: MATEMÁTICA DISCRETA   II Cuatrimestre – Año 2020

Unidad 1: LÓGICA DE PREDICADOS

TEORÍA

1. Introducción

En general, el *Alfabeto* del Lenguaje de la *Lógica de Predicados* consta de los siguientes símbolos: *Variables*; *Constantes*; *Funcionales* (sobre los cuales se puede establecer la Aridez Asociada, tal que si ésta es “n”, será *f/n*); *Predicados* (sobre los que es posible establecer la Aridez Asociada, si ésta es “n”, será *p/n*); *Conectivos Lógicos* (¬, Negación; ∧, Conjunción; ∨, Disyunción; ⇔, Equivalencia Lógica; ⊃, Implicación); *Cuantificadores* (∀, Universal; ∃, Existencial) y *Símbolos Auxiliares* (paréntesis y comas).

2. Cálculo de Predicados

La operación con un *Lenguaje de Primer Orden* equivale a concebir al Conjunto de Objetos como el Universo del Discurso, en virtud a considerar a todos los estados que se están discutiendo en el Lenguaje; esto evidencia que para cada lenguaje existen diferentes tipos de “universos de discurso”. Considerar el *Alfabeto* del Lenguaje permite indicar que:

a) El rango de las Variables está definido sobre todo el Universo del Discurso;

b) Cada constante corresponde exactamente un miembro distinto del Universo (En el Universo de Enteros, el símbolo constante “c” puede partir del valor 0);

c) Una Función corresponde a una Función sobre el Universo (Dado un Conjunto de Ciudades, la función f(x) se puede interpretar como una función en la cual, dada “una ciudad”, f(x) devuelve al “departamento al que pertenece”);

d) Un Predicado es un Símbolo que establece una relación, que puede ser vista como una función que delibera entre un valor Verdadero (V) o un valor Falso (F); donde tales argumentos son Términos del Lenguaje de Primer Orden bajo consideración. Cada Predicado asigna una Relación sobre el Universo del Discurso;

e) Los Términos son definidos inductivamente como Variables, Constantes o Funciones, aplicados a términos de mayor simplicidad.

Una Interpretación de un Lenguaje de Primer Orden tiene un Dominio (Universo del Discurso) juntamente con asignaciones de constantes, funciones y predicados a constantes, funciones y relaciones actuales en tal dominio. La consideración de una Interpretación particular para una relación actual, establece que para argumentos dados, la misma sea V o F.

Cada Predicado de un Argumento es un Mapeo: D → { V, F }, tal que D constituye el Dominio (o Universo del Discurso). Un Predicado de dos Argumentos: D x D → { V, F }. Los Valores de Verdad V y F se pueden tomar como Predicados de “Cero Argumento”.

Esta Estructura está muy conectada con la noción de Conjuntos; en consecuencia, los objetos del Universo del Discurso debe formar un Conjunto. El "Universo del Discurso" en términos informales, corresponde al Conjunto de Objetos Individuales que se están discutiendo o más formalmente, el Dominio de la Interpretación bajo consideración.

Los Cuantificadores Existencial (∃) y Universal (∀) también componen el Alfabeto del Lenguaje. Para el Cuantificador Universal es necesario definir el *Dominio de la Cuantificación* (En la expresión: Para Todo x, es necesario indicarse qué valores de x deben incluirse) y el *Alcance de las Variables Cuantificadas*, que corresponde a la parte de la Fórmula que se aplicará.

Es posible afirmar que en el Lenguaje Natural solo ciertas combinaciones de palabras constituyen sentencias significativas; en la Lógica de Predicados a tales combinaciones se las denomina *Fórmulas Bien Formadas (fbf)*.

Una Fórmula debe ser sintácticamente correcta; así, una *Fórmula Bien Formada (fbf)* es una fórmula sintácticamente correcta, que emplea únicamente los operadores lógicos del Alfabeto del sistema; en consecuencia, las fórmulas se refieren a *fbf*.

Sea *T* el conjunto de Términos sobre el Alfabeto *A*. Se define al Conjunto *F* de *fbf* (con respecto a *A*) como el Conjunto más pequeño tal que:

- Si *p/n* es un Predicado en *A* y $t_1, t_2, ..., t_n \in T$, entonces: $p\ (t_1, t_2, ..., t_n) \in F$;

- Si F y G $\in F$, entonces están: $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \supset G)$ y $(F \Leftrightarrow G)$,

- Si F $\in F$ y X es una variable en *A* entonces $(\forall x F)$ y $(\exists x F) \in F$.

Las Fórmulas $p\ (t_1, t_{2,}, ..., t_n)$ se denominan *Fórmulas Atómicas o Átomos.*

3. Conceptos de Semántica de Lógica Proposicional

Un Símbolo Proposicional corresponde a un estado acerca del mundo. Un Símbolo Proposicional puede ser V o F, dado algún estado del mundo; el Valor de Verdad asignado a las sentencias proposicionales constituye una *Interpretación*, una aserción acerca de su valor de verdad en algún *Mundo Posible*.

En términos formales, una Interpretación corresponde a un Mapeo desde los Símbolos Proposicionales en el Conjunto {V, F}. Los Símbolos V y F son parte del Conjunto de Sentencias Bien Formadas del Cálculo Proposicional. Cada posible Mapeo corresponde a un Mundo Posible de Interpretación.

Ejemplo 1: Si: P denota la Proposición: "Estoy estudiando Computación"
y: Q denota la Proposición: "El clima está enrarecido"
y: R denota la Proposición: "La materia es fácil"

Entonces, el Conjunto de Proposiciones: {P, Q, R} tiene ocho mapeos funcionales diferentes en los Valores de Verdad {V, F}, tal que estos mapeos corresponden a cuatro mundos posibles diferentes.
Dada una interpretación de un Conjunto de Proposiciones, es necesario definir el valor de verdad para las expresiones compuestas. La Semántica del Cálculo Proposicional, tal como la Sintaxis se define en forma inductiva.

4. Introducción a la Semántica de la Lógica de Predicados

En el Cálculo Proposicional, cada Símbolo Atómico (P, Q, R, ...) denota una Proposición de cierta complejidad; no existe forma de acceder a las componentes de una aserción individual; en cambio, el Cálculo de Predicados provee esta capacidad.

Ejemplo 2: Sea P: "He obtenido Ocho en Lógica"

Es posible crear el Predicado "Calificación", que describe una relación entre un dato y la calificación, de la forma:

Calificación(Lógica, Ocho)

Mediante Reglas de Inferencia se pueden manipular expresiones del cálculo de predicados accediendo a sus componentes individuales e infiriendo nuevas sentencias

El Cálculo de Predicados también permite expresiones que contienen variables, tales variables permiten la creación de aserciones generales acerca de clases de entidades. En el Ejemplo 2, para describir materias en las cuales la Calificación ha sido Ocho, se escribe:

Calificación(X, Ocho)

5. Sintaxis de Predicados y Sentencias

Previo a considerar expresiones correctas en el Cálculo de Predicados, deben ser definidos un Alfabeto y una Gramática con el propósito de crear los *Símbolos* del Lenguaje, correspondientes a aspectos lexicográficos de la Definición del Lenguaje de Programación. Los Símbolos del Cálculo de Predicados, como las Señales en los Lenguajes de Programación son elementos sintácticos irreductibles: no pueden partirse en sus partes componentes por las operaciones del lenguaje. Los *Símbolos* del Cálculo de Predicados son Cadenas de Letras y Dígitos, comenzando con una Letra. Los caracteres Blancos y No-Alfanuméricos no pueden aparecer dentro de la cadena, aunque los subrayados, _, pueden ser usados para mejorar la legibilidad.

El *Alfabeto* está compuesto de *símbolos* utilizados por el sistema; consiste de:

- Conjunto de Letras, sub-índices y supra-índices.

- Conjunto de Dígitos: 0, 1, 2, ..., 9.

- Subrayados: _.

Los Paréntesis "( )", las Comas "," y los Períodos "." son empleados únicamente para construir Expresiones Bien-Formadas y no denotan objetos o relaciones en el mundo; estos símbolos se denominan *Símbolos Impropios*.

Los Símbolos del Cálculo de Predicados pueden representar Variables (designan clases generales de objetos o propiedades en el mundo, comenzando con una letra mayúscula), Constantes (nombran objetos específicos o propiedades en el mundo; deben comenzar con una letra minúscula; las constantes verdadera y falsa se reservan como *Símbolos de Verdad*), Funciones (definidas sobre objetos en el mundo del discurso; deben comenzar con una letra minúscula; denotan un mapeo de uno o más elementos en un conjunto, denominado *Dominio* de la Función en un único elemento de otro conjunto, denominado

Rango de la Función; los elementos del Dominio y del Rango son objetos del Mundo del Discurso) o Predicados.

Cada Función tiene una _Aridez_ Asociada que indica el número de elementos en el dominio mapeado sobre cada elemento del rango. Una _Expresión Funcional_ es un Símbolo Funcional seguido por sus argumentos, tal que los argumentos son elementos del dominio de la función; el número de argumentos es igual a la aridez de la función; los argumentos son encerrados entre paréntesis y encerrados por comas.

Ejemplo 3: Las Expresiones Funcionales: g(X,Y) ; Suma(1,9) y Profesor(Juan) son Fórmulas Bien-Formadas.

Cada Expresión Funcional denota el mapeo de los argumentos sobre un objeto único en el rango, llamado _Valor_ de la Función; en el Ejemplo 3, Profesor es una Función 1-aria, entonces: Profesor(Juan), es una Expresión Funcional cuyo valor en el Mundo del Discurso es: Jorge; en el mismo Ejemplo, Suma es una Función de Aridez 2 con Dominio en los Enteros, entonces: Suma(1,9) es una expresión funcional cuyo Valor es el entero 10. Cuando se reemplaza una Función con su valor, resulta una _Evaluación_.

Los _Símbolos Predicados_ son símbolos que comienzan con una letra minúscula. Los Predicados tienen un valor entero positivo asociado referido a la _Aridez_ o "Número de Argumentos" para el Predicado. Los Predicados con el mismo número, pero con Aridez diferente son considerados distintos.

Una _Sentencia Atómica_ es un Predicado Constante de Aridez n, seguido por n Términos: $t_1, t_2, ..., t_n$, encerrados entre paréntesis y separados por comas. Los Valores de Verdad: V y F, también constituyen Sentencias Atómicas. A las Sentencias Atómicas también se las llama _Expresiones Atómicas, Átomos o Proposiciones_. Pueden combinarse sentencias atómicas usando operadores lógicos ($\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, $\Leftrightarrow$) para formar _sentencias_ en el Cálculo de Predicados.

Cuando una variable aparece como argumento en una sentencia, se refiere a un objeto no especificado en el dominio. El Cálculo de Predicados incluye dos símbolos, los cuantificadores de variables($\forall$, $\exists$) tal que satisfacen el significado de una sentencia que contiene una variable.

Ejemplo 4: $\forall$ X disfruta (X, música) [Es V para todos los valores del Dominio de X]
$\exists$ Y primo (Y, Javier) [Es V para algún valor del Dominio de Y]

Cada Sentencia Atómica es una Sentencia:

1. **Si s es una sentencia, su negación $\neg$s, entonces también es una sentencia.**

2. **Si s_1 y s_2 son sentencias, su conjunción $s_1 \wedge s_2$, entonces también es una sentencia.**

3. **Si s_1 y s_2 son sentencias, su disyunción $s_1 \vee s_2$, entonces también es una sentencia.**

4. **Si s_1 y s_2 son sentencias, la implicación $s_1 \Rightarrow s_2$, entonces también es una sentencia.**

5. **Si s_1 y s_2 son sentencias, su equivalencia $s_1 \Leftrightarrow s_2$, entonces también es una sentencia.**

6. **Si X es una variable y s es una sentencia, entonces $\forall$X s es una sentencia.**

7. Si X es una variable y s es una sentencia, entonces ∃ X s es una sentencia.

Ejemplo 5: **suma(2, 5) es una Función, No constituye una Sentencia Atómica.**
igual(producto(4,5), 20) es una Sentencia Atómica, Verdadera.
∃X cuadrado(X, 196) es una Sentencia Atómica, Verdadera para X = 14.

La definición de Sentencias del Cálculo de Predicados sugiere la necesidad de un Método para verificar que una expresión es una sentencia, que se escribe como un algoritmo recursivo: *verify_sentence*, que toma como argumento a una expresión candidata y retorna *success* si la expresión es una sentencia.

6. Una Semántica del Cálculo de Predicados

La Semántica del Cálculo de Predicados provee una base formal para la determinación del valor de verdad de expresiones bien formadas. La verdad de las expresiones depende del mapeo de constantes, variables, predicados y funciones en objetos y relaciones en el dominio del discurso. La verdad de las relaciones en el dominio determina la verdad de las expresiones correspondientes.

Ejemplo 6: **Primos (María, Marisa)**
Primos (Marisa, Carlos)
Primos (Carlos, Federico)
} **El Valor de Verdad de cada predicado es independiente del resto.**

El uso del Cálculo de Predicados como una representación para la Resolución de Problemas, describe objetos y relaciones en el dominio de la interpretación con un conjunto de expresiones bien formadas. Los términos y predicados de estas expresiones denotan objetos y relaciones en el dominio. Esta base de datos del cálculo de predicados, cada una teniendo valor de verdad V, describe el *Estado del Mundo*. El Ejemplo 6 es un caso de tal base de datos.

Para definir formalmente la Semántica del Cálculo de Predicados, en primera instancia debe definirse una *Interpretación* sobre un Dominio D, que determinará la *Asignación de Valores de Verdad* de sentencias en el lenguaje.

Sea el Conjunto D un Conjunto No Vacío, entonces:

Una *Interpretación* sobre D es una asignación de entidades de D a cada símbolo: constante, variable, predicado y función de una expresión del cálculo de predicados, tal que:

1. **Cada constante es asignada a un elemento de D.**

2. **Cada variable es asignada a un subconjunto no vacío de D; siendo sustituciones permitidas para tal variable.**

3. **Cada función *f* de aridez *m* está definida sobre m argumentos de D y define un mapeo desde D^m en D.**

4. **Cada predicado *p* de aridez *n* está definido sobre *n* argumentos desde D y define un mapeo desde D^m en el conjunto { V, F }.**

Dada una Interpretación, el significado de una expresión es la asignación de valor de verdad sobre la interpretación.

Asumiendo una Expresión E y una Interpretación I para E sobre un dominio D no vacío; entonces, el *Valor de Verdad* para E se determina a través de:

1. El valor de una constante es el elemento de D que está asignado a través de I.

2. El valor de una variable es el conjunto de los elementos de D, asignado a través de I.

3. El valor de una expresión funcional es aquel elemento de D obtenido por evaluación de la función para los valores asignados por la interpretación.

4. El valor de verdad del símbolo "verdadero" es V y el del símbolo "falso" es F.

5. El valor de una sentencia atómica es V o bien, F, determinado por la interpretación I.

6. El valor de la negación de una sentencia es V si el valor de la sentencia es F y es F si el valor de la sentencia es V.

7. El valor de la conjunción de dos sentencias es V si el valor de ambas sentencias es V y F en todo otro caso.

8. El valor de la disyunción de dos sentencias es F solamente cuando el valor de ambas sentencias es F y es V en todo otro caso.

9. El valor de la Implicación de dos sentencias es F solamente cuando la Premisa es V y el Consecuente es F y es V en todo otro caso.

10. El valor de la Equivalencia de dos sentencias es V cuando los valores de ambas sentencias son los mismos y es F en todo otro caso.

11. El valor de $\forall$ X S es V si S es V para todas las asignaciones a X bajo I, y es F en todo otro caso.

12. El valor de $\exists$ X S es V si hay una asignación a X en la interpretación bajo la cual es V; en otro caso, es F.

Las Asignaciones de Verdad de Proposiciones Compuestas se describen a través de Tablas de Verdad.

La Cuantificación Universal introduce problemas en la computación de los valores de verdad de una sentencia, porque todos los posibles valores de un símbolo variable deben ser testeados para ver las expresiones restantes verdaderas. Si el Dominio de una Interpretación es infinito, el testeo exhaustivo de todas las sustituciones a una variable universalmente cuantificada resulta *computacionalmente imposible*; debido a tal situación al Cálculo de Predicados se lo denomina *Indecidible*.

Para Predicados *p* y *q* y Variables *X* e *Y* se establecen las relaciones entre negación y cuantificadores existencial y universal, las cuales son empleadas en los *Sistemas de Resolución por Refutación*:

1- $\neg\exists X\, p(X) \Leftrightarrow \forall X \neg\, p(X)$
2- $\neg\forall X\, p(x) \Leftrightarrow \exists X \neg\, p(X)$
3- $\exists X\, p(X) \Leftrightarrow \exists Y\, p(Y)$

4- $\forall$ X q(X) $\Leftrightarrow$ $\forall$ Y q(Y)
5- $\forall$ X (p(X) $\wedge$ q(X)) $\Leftrightarrow$ $\forall$ X p(X) $\wedge$ $\forall$ Y q(Y)
6- $\exists$ X (p(X) $\vee$ q(X)) $\Leftrightarrow$ $\exists$ X p(X) $\vee$ $\exists$ Y q(Y)

En el Lenguaje definido, las variables cuantificadas universal y existencialmente se refieren solamente a objetos (constantes) en el dominio del discurso. Los nombres de los predicados y funciones no pueden ser reemplazados por variables cuantificadas. Así, el Lenguaje se denomina *Cálculo de Predicados de Primer Orden*.

El *Cálculo de Predicados de Primer Orden* permite que las variables cuantificadas se refieran a objetos en el dominio del discurso y no a predicados o funciones.

<u>Ejemplo 7</u>: $\forall$ (Vínculo) Vínculo (Juan, Mirta)

Este ejemplo no constituye una expresión bien formada en el Cálculo de Predicados de Primer Orden. Existe un Cálculo de Predicados de Orden Superior en el cual, expresiones como esta son significativas; Mc Carthy (1968), entre otros ha usado un lenguaje de orden superior para representar conocimiento en programas de aprendizaje de lenguaje natural

7. <u>Teorías de Primer Orden</u>

Un Sistema de Axiomas y Reglas puede ser usado para formar un Sistema Deductivo Lógico (Teoría de Primer Orden) en la Lógica de Predicados. Los axiomas son de dos clases:

(1) Axiomas Deductivos (o Lógicos), los cuales son independientes del alfabeto particular de primer orden.

(2) Axiomas que son relativos al sistema particular de primer orden, conocidos como axiomas propios o hipótesis.

8. <u>Lógicas de Orden Superior</u>

La Interpretación de un término de un L.P.O. es un Objeto Simple, no estructurado en un Dominio No Vacío; ciertamente el objeto en sí mismo puede tener una estructura cuando es considerado desde distintos puntos de vista, por caso: *un vehículo*, pero "el blanco" de un término de un L.P.O. es una unidad entera; además, y como aspecto de mayor relevancia, es necesario expresar que, en tales lenguajes, la cuantificación únicamente se define sobre variables, en consecuencia no puede aplicarse a predicados y funciones; por lo tanto, expresiones de la forma: $(\forall x_i) P_1 (x_i)$ son *fbf*, en tanto que expresiones del tipo: $(\forall P_1)(\exists x_i) P_1 (x_i)$ no lo son.

En el campo de la Aritmética puede verse que el Axioma Inductivo de PEANO no responde a una *fbf* de Primer Orden, dado que:

$$(\forall P) (P(0) \wedge (\forall x) (P(x) \rightarrow P(s(x))) \rightarrow (\forall y) P(y))$$

donde s es la función que denota la sucesión (o siguiente).

En tal instancia, puede afirmarse que una *Lógica de Segundo Orden* permite la cuantificación sobre predicados y funciones de primer orden y provee facilidades para expresar propiedades de funciones o predicados como también representar predicados

con predicados y predicados con funciones como argumentos, de aquí puede concluirse que el Axioma Inductivo de PEANO corresponde a una Lógica de Segundo Orden.

La Generalización del concepto previo permite postular que la *Lógica de Tercer Orden* permite la cuantificación sobre predicados y funciones de segundo orden; pudiéndose definir bajo consideraciones similiares *Lógicas de Orden Superior*.

A partir de estos conceptos que posibilitan la postulación de Lógicas de Orden Superior, y en atención a la definición de la Lógica de Primer Orden, puede afirmarse que la Lógica Proposicional es una *Lógica de Orden Cero*.