

Superficies Cuadráticas

Definición:

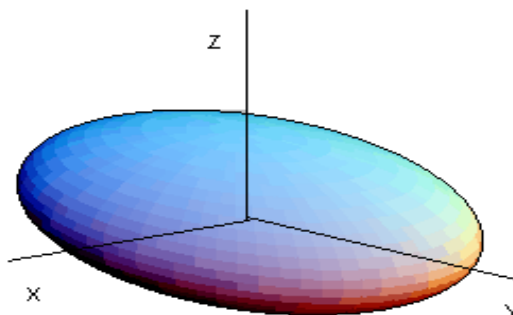
Una superficie cuadrática (ó cuádrica) es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x, y, z . La forma general de la ecuación es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde A, B, C, \dots, J son constantes.

1. Elipsoide.

Tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Las trazas del elipsoide son elipses, es decir, la intersección con planos paralelos a los planos coordenados es una elipse

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ elipse}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ elipse}$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipse}$$

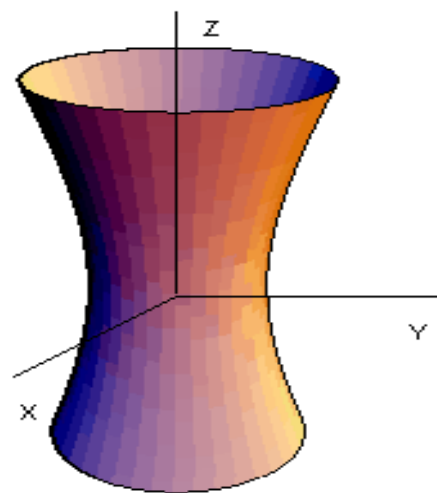
2. Hiperboloide de una hoja.

Tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Las trazas del hiperboloide son hipérbolas en planos paralelos al plano XZ y al YZ, mientras que en planos paralelos al XY las trazas son elipses.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ Hiperbola}$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ Elipse}$$



$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ Hiperbola}$$

El eje por donde se abre el hiperboloide es por el eje cuya variable aparece en la ecuación negativa (en este caso eje z). La diferencia fundamental entre el hiperboloide de una hoja y el elipsoide es que tiene una variable con signo negativo.

3. Hiperboloide de dos hojas.

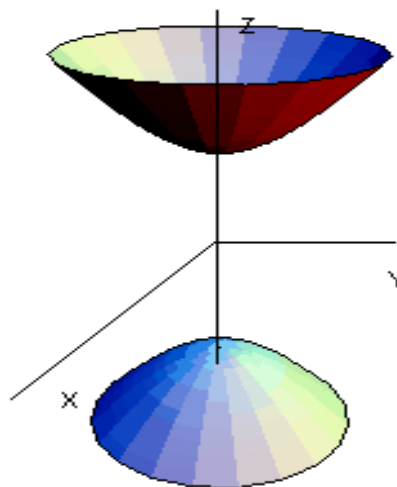
Tiene por ecuación $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Las trazas de esta superficie son:

Para planos paralelos a XZ, son hipérbolas al igual que para planos paralelos al YZ.

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hipérbola}$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ hipérbola}$$



Se diferencia de las otras superficies ya que tiene dos variables negativas.

4. Paraboloides

si $z = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ imposible!! \Rightarrow no hay gráfica

Tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

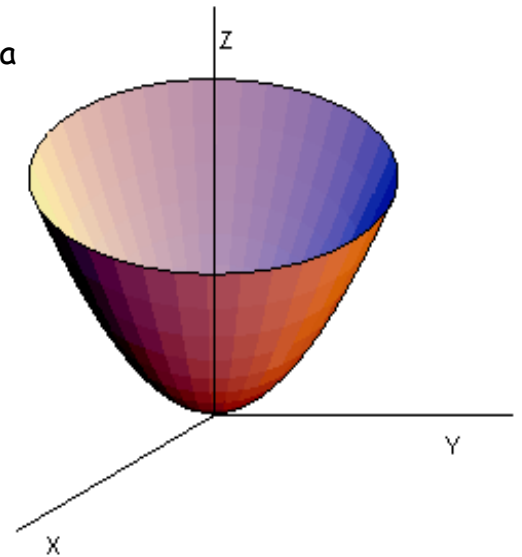
Las trazas del paraboloide son:

Para planos paralelos al XY son elipses, para planos paralelos al XZ o al YZ son parábolas.

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2 z}{c}$ parábola

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 z}{c}$ parábola

Si $z = K \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{K}{c}$ Elipse, y si $a = b$ Círculo



Su diferencia con las otras Cuádricas, es que tienen una variable que no está elevada al cuadrado, y las otras variables tienen el mismo signo.

5. Paraboloide hiperbólico.

Tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

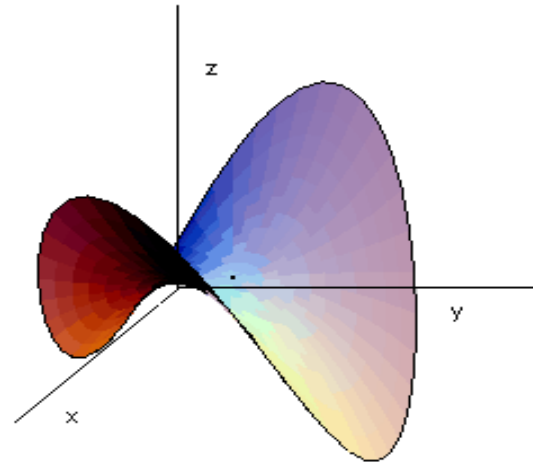
Su diferencia fundamental con las otras superficies es que ella tiene en su ecuación una variable que no está elevada al cuadrado, y las otras variables tienen el signos contrarios.

Trazas:

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \text{ parábolas}$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \text{ parábolas}$$

$$\text{si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow |x| = \left| \frac{a}{b} y \right| \text{ Dos rectas!!}$$



6. Conos

La superficie cuádrica que tiene por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

ecuación

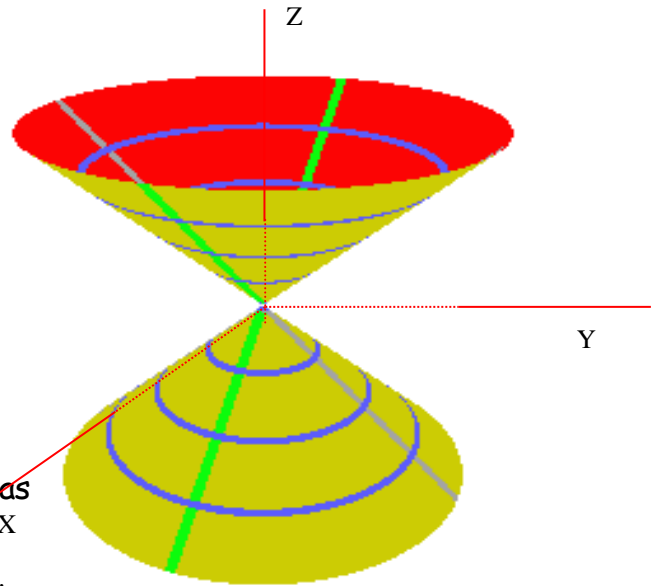
Se denomina **Cono**.

Las trazas del cono son:

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow |y| = \left| \frac{b}{c} z \right|$ Dos rectas _X

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow |x| = \left| \frac{a}{c} z \right|$ Dos rectas

si $z = K \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{K^2}{c^2}$ Elipse, ¿Y si $a = b$?



7. Cilindro circular recto

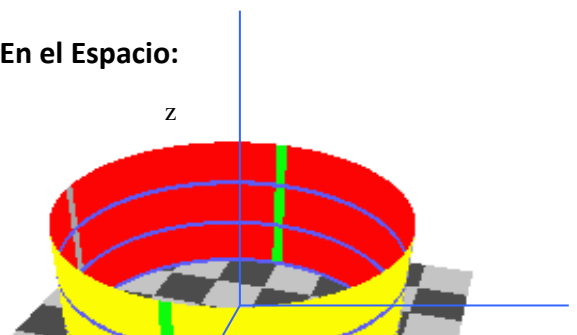
Cuando una de las variables x , y o z no aparece en la ecuación de la superficie, Entonces la superficie es un **Cilindro**. Por ejemplo:

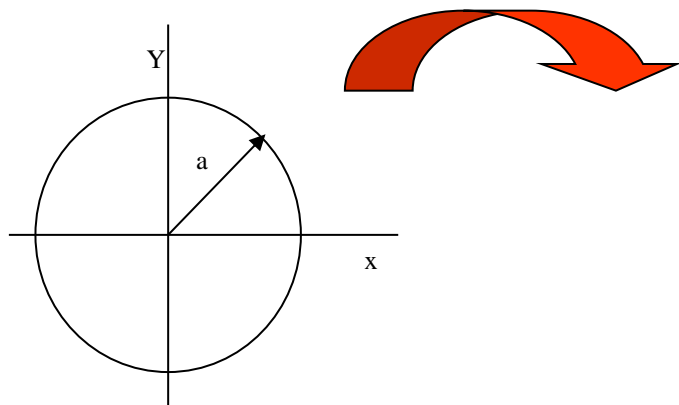
$$x^2 + y^2 = a^2$$

Es un cilindro en el espacio ya que falta la variable z . Por lo tanto, la gráfica del cilindro se extenderá paralelo al eje z

En el plano:

En el Espacio:



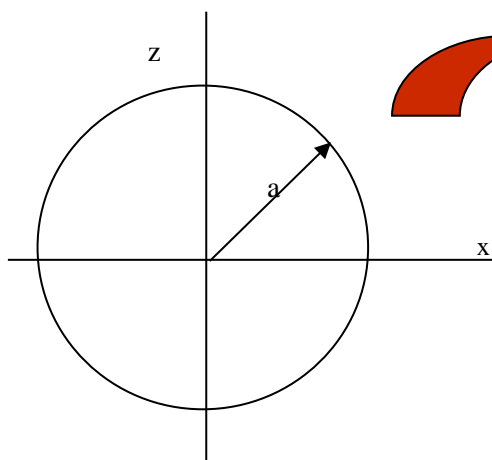


8. Cilindro circular recto con eje en el eje y:

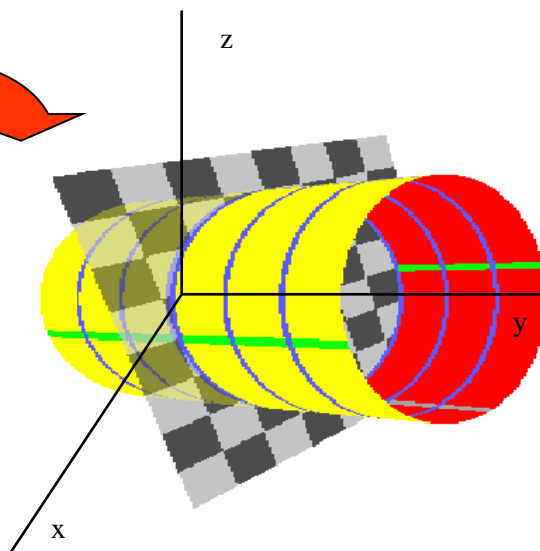
$$x^2 + z^2 = a^2$$

Considere la ecuación:

En el plano:



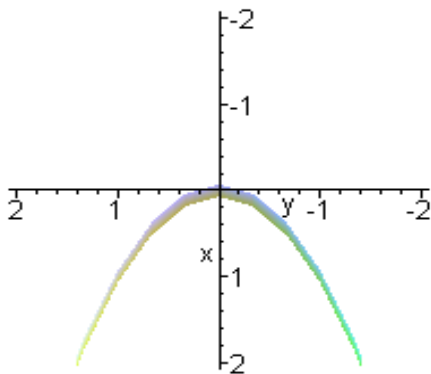
En el Espacio



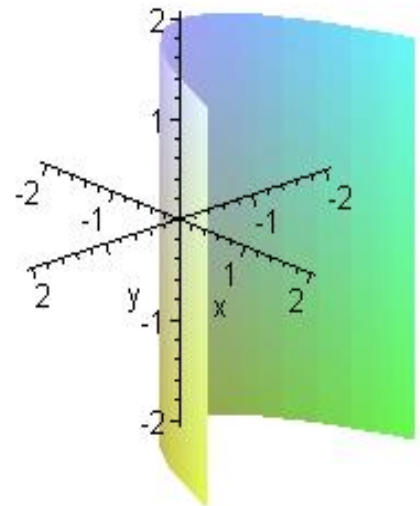
8. Cilindro parabólico:

Considere la ecuación $x^2 + y = 0$, que corresponde a una parábola en el plano xy , al variar z se obtiene la superficie

En el plano

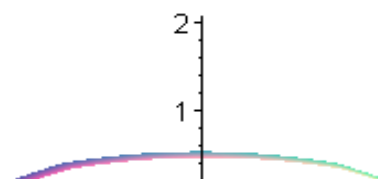
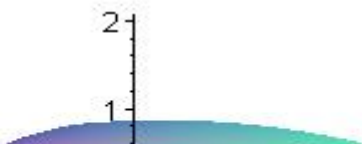


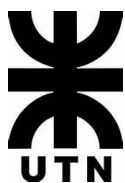
En el espacio



9. Cilindro elíptico con eje en el eje z :

Considere la ecuación de la elipse $y^2 + (4z^2) = 4$ en el plano yz , al recorrer el eje x se obtiene la superficie





Facultad Regional La Plata

Álgebra y Geometría Analítica
Superficies Cuádricas
Ing. Viviana CAPPELLO

En el espacio

En el plano

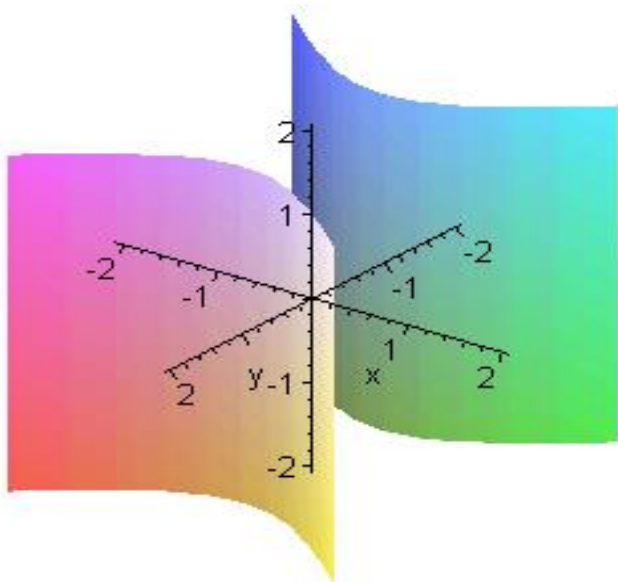


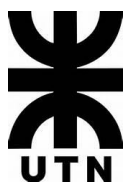
10. Cilindro hiperbólico con eje en el eje z:

Considere la ecuación $y^2 - x^2 = 1$ que corresponde a una hipérbola centrada en el (0,0) en el plano xy, al recorrer z se obtiene la superficie.

En el espacio

En el plano





Facultad Regional La Plata

Álgebra y Geometría Analítica
Superficies Cuádricas
Ing. Viviana CAPPELLO

