UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN
Centro Regional CHIVILCOY

Licenciatura en Sistemas de Información

Asignatura ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Unidad 6
FUNCIONES ESPECIALES (FOURIER, LAPLACE)

Profesor Asociado
Lic. Jorge E. SAGULA
Ayudante de Primera
Lic. José Luis ISLA
Ayudante de Segunda
Diego O. AGUDO

Noviembre’2020

Introducción:

La Necesidad de los desarrollos de funciones en series trigonométricas se fundamenta, entre otras cosas, en el requerimiento de soluciones a problemas particulares de valores límites, básicamente representados a través de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.

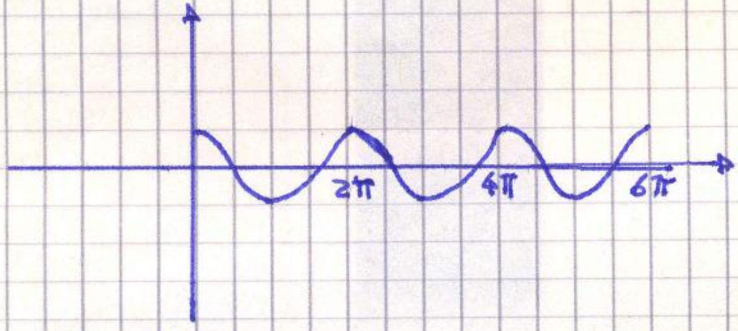
FUNCIONES PERIODICAS:

Una Función $f(x)$ tiene periodo P o bien, es PERIODICA con periodo P si:

$$\forall x: \; f(x+P) = f(x) \;;\; P = Cte. \;\; (1)$$

Al valor menor de $P>0$ se lo denomina PERIODO MINIMO o bien, en forma más general, periodo de $f(x)$.

Ejemplos: 1) $f(x) = \cos(x)$



$P = 2\pi$

2) $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$

Conforme es $n \rightarrow P = \dfrac{2\pi}{n}$

FUNCIONES CONTINUAS POR INTERVALOS:

Una Función $f(x)$ es CONTINUA POR INTERVALOS en un trayecto si el mismo se puede dividir en un número finito de sub-intervalos en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua y además, los límites de $f(x)$ conforme x tiende a los extremos de los sub-intervalos son finitos.

También es posible definir a una Función $f(x)$ CONTINUA POR INTERVALOS como aquella que tiene un número finito de discontinuidades.

SERIES DE FOURIER:

La Función $f(x)$ está definida en $(-L, L)$, tal que fuera de tal intervalo verifica: $f(x+2L) = f(x)$, de tal forma: $f(x)$ tiene período $2L$.

La serie de FOURIER correspondiente a $f(x)$ se define a través de:

$$(I) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

tal que los coeficientes de Fourier: a_n y b_n, respectivamente, se determinan por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , \quad \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad , \quad \forall n \geq 1$$

y en particular: $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$

donde: L corresponde al semiperíodo.

Si el período es $2L$, pero la función está definida desde un punto $x = c$, los coeficientes resultan:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \forall n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\, dx \; ; \text{ tal que: } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{c}^{c+2L} f(x)\, dx$$

o bien: $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$, corresponde al término constante de (I), representa el valor medio de $f(x)$ sobre un período.

Si bien la serie de Fourier representa a $f(x)$, no se sabe si la misma es convergente o bien, si converge a $f(x)$. Para evaluar estas cuestiones, es interesante plantear las condiciones de DIRICHLET que permiten clarificar el tema.

CONDICIONES DE DIRICHLET:

Teorema:

Supóngase que:

(a) $f(x)$ está definida y tiene un valor único con excepción posiblemente de un número finito de puntos en $(-L, L)$

(b) $f(x)$ es periódica, con periodo: $P = 2L$

(c) $f(x)$ y $f'(x)$ son funciones continuas a trozos, en $(-L, L)$

Así, (I) converge a:

(1) $f(x)$, si x es un punto de continuidad

(2) $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, si x es un punto de discontinuidad.

De acuerdo con este resultado:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

en cualquier punto de continuidad x.

Si x es un punto de discontinuidad, el lado izquierdo de la Ec. se sustituye por: $\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right]$; entonces, la serie converge al valor medio de $[f(x+0) + f(x-0)]$

Las condiciones del Teorema impuestas en $f(x)$ son <u>suficientes</u> pero no <u>necesarias</u>; esto es, si las condiciones son satisfechas surge la convergencia; si las condiciones no se satisfacen no se garantiza la convergencia.

FUNCIONES PARES E IMPARES:

Si la Serie de Fourier corresponde a $f(x)$ y esta es una función par, la serie sólo contendrá los términos de coseno; por lo tanto, la forma será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Si la Serie de Fourier corresponde a una función $f(x)$ impar, la serie sólo contendrá los términos de seno; por tanto, la forma será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

están definidas en $(0, L)$, así:

<u>Series de Longitud Media de seno:</u>

$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

<u>Series de Longitud Media de Coseno:</u>

$$b_n = 0$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

<u>NOTAS</u>:

① Es posible integrar la serie de Fourier que corresponde a $f(x)$ término a término, y la serie resultante <u>converge uniformemente</u> a: $\int_a^x f(u)\, du$, siempre que $f(x)$ sea continua por intervalos en: $-L \le x \le L$, y además: a y x sean puntos del intervalo.

② La Identidad de PARSEVAL establece que:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \left[f(x)\right]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

con: a_n: Coeficiente de Fourier

b_n: Coeficiente de Fourier

③ Mediante la Utilización de las Fórmulas de EULER:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$
$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

es posible escribir la serie de Fourier mediante notación compleja de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$ (se satisfacen las Cond. de Dirichlet)

tal que:

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

SERIE DOBLE DE FOURIER:

El concepto acerca del desarrollo de una serie de Fourier de una función de una única variable x es extendible a funciones de dos variables (x, y); por tanto, el desarrollo correspondiente a $f(x,y)$ en una serie sinusoidal doble de Fourier está dado por:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)$$

tal que: L_1: Semiperiodo correspondiente a x

L_2: Semiperiodo correspondiente a y

$$B_{mn} = \frac{4}{L_1 . L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} f(x,y) . \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L_1}\right) . \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) dx\,dy$$

INTEGRAL DE FOURIER:

Asumiendo que la función $f(x)$ satisface:

(1) Condición de continuidad por intervalos en cada intervalo finito.

(2) Que su derivada $f'(x)$ es continua por intervalos en cada intervalo finito.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, o bien que $f(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, +\infty)$

se plantea el TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER que establece que:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[A(\alpha) . \cos(\alpha x) + B(\alpha) . \operatorname{sen}(\alpha x) \right] d\alpha$$

tal que:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . \cos(\alpha x)\, dx$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) . \operatorname{sen}(\alpha x)\, dx$$

La Integral de FOURIER de acuerdo a lo planteado, se observa que surge cuando en lugar de ser L un número finito, tiende a infinito.

como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{+\infty} \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u) . \cos[\alpha(x-u)] \, du \, d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . e^{i\alpha(x-u)} \, du \, d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . e^{-i\alpha u} \, du \qquad (A)$$

En forma análoga al comportamiento de las funciones pares e impares en las series de Fourier, para la Integral de Fourier resulta:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen}(\alpha x) \, d\alpha \int_{0}^{+\infty} f(u) . \operatorname{sen}(\alpha u) \, du \qquad (I)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \cos(\alpha x) \, d\alpha \int_{0}^{+\infty} f(u) . \cos(\alpha u) \, du \qquad (II)$$

(I) corresponde al desarrollo de una función impar.
(II) corresponde al desarrollo de una función par.

<u>TRANSFORMACION DE FOURIER:</u> De (A) surge que:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) . e^{-i\alpha u} \, du \qquad (B)$$

entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \, e^{i\alpha x} \, d\alpha$$

La expresión (B) conduce a la TRANSFORMADA de FOURIER de $f(x)$; su notación es:

$$F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

A $f(x)$ se la denomina TRANSFORMADA INVERSA de FOURIER de $F(\alpha)$; su notación es:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$$

La transformada rápida de Fourier (FFT)
y otros algoritmos para la implementación de la DFT

Existen diversas formas de implementar la transformada discreta de Fourier (DFT). Para estudiar algunas de ellas, considere una DFT de N puntos $X_N(k)$, la cual llamaremos también $X^{(N)}(k)$ por notación y donde *k=0,...,N-1*:

$$X(k) = X^{(N)}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \tag{1}$$

1) Implementación directa o por definición

La DFT se puede calcular directamente con la expresión de (1) como una suma utilizando `for-loops` para cada bin de frecuencia, generando N operaciones complejas por cada bin y N^2 operaciones complejas en total. Esta es la implementación más sencilla conceptualmente, pero la menos eficiente.

2) Implementación matricial

Es posible representar la ecuación (1) como un producto entre una matriz y un vector, de modo que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W_N x}$, donde $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{x}$ son vectores columna de N x 1 y A es una matriz cuadrada de N x N. Este producto es equivalente a $X(k) = \sum_{n=1}^{N} W_N^{kn} x_n$, donde W_N^{kn} es el elemento *(k,n)* de la matriz dado por $W_N^{kn} = e^{-j2\pi kn/N}$. Si llamamos a los coeficientes $W_N = e^{-j2\pi/N}$ entonces $W_N^{kn} = (W_N)^{kn}$. Es posible demostrar que $W_N^{k+N} = W_N^k$ y que $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, lo que explica la simetría de la matriz $\boldsymbol{W_N}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0*0} & \cdots & W_N^{0*(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)*0} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{W_N x} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W_N^{-1} X} = \frac{1}{N}\boldsymbol{W_N^* X} \tag{4}$$

Aunque, en teoría, la complejidad numérica de esta forma no varía significativamente de la forma directa, este método presenta ventajas notables producto del trabajo en matrices. Si $\boldsymbol{W_N}$ se calcula offline, el cálculo de la DFT y su inversa sólo requieren la multiplicación de una matriz por un vector.

3) Divide y conquista

Esta implementación descompone una DFT de N puntos como la suma de dos DFT de N/2 puntos, lo que reduce la complejidad numérica casi a la mitad y es la base conceptual del algoritmo FFT. Para derivar esta versión, podemos partir por dividir el cálculo para las muestras pares e impares

$$X^{(N)}(k) = \sum_{\substack{n=0 \\ n\ par}}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\ impar}}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \tag{5}$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)e^{-j2\pi k2m/N} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)e^{-j2\pi k(2m+1)/N} \tag{6}$$

$$= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m)e^{-j2\pi km/(N/2)} + e^{-j2\pi k/N} \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1)e^{-j2\pi km/(N/2)} \tag{7}$$

Si llamamos a la serie de muestras par $x_0(m) = x(2m)$ y a la impar $x_1(m) = x(2m+1)$ entonces

$$X^{(N)}(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_0(m)e^{-j2\pi km/(N/2)} + e^{-j2\pi k/N} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_1(m)e^{-j2\pi km/(N/2)} \tag{8}$$

$$X^{(N)}(k) = X_0^{(N/2)}(k) + e^{-j2\pi k/N} X_1^{(N/2)}(k) \tag{9}$$

Es posible simplificar esta expresión observando las simetrías del sistema, donde $X_0^{(N/2)}$ y $X_1^{(N/2)}$ son periódicas cada N/2. Si llamamos a los coeficientes $W_N = e^{-j2\pi/N}$ y notando además que cada DFT de N/2 puntos es periódica cada N/2 puntos y que $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, se puede obtener que

$$\begin{aligned} X^{(N)}(k) &= X_0^{(N/2)}(k) + W_N^k X_1^{(N/2)}(k) \\ X^{(N)}(k+N/2) &= X_0^{(N/2)}(k) - W_N^k X_1^{(N/2)}(k) \end{aligned} \tag{10}$$

para *k=0,…,N/2-1.* Esta transformación reduce la complejidad numérica de la DFT de N^2 a $N^2/2+N/2$. La representación gráfica de (10) se denota en la figura 1.

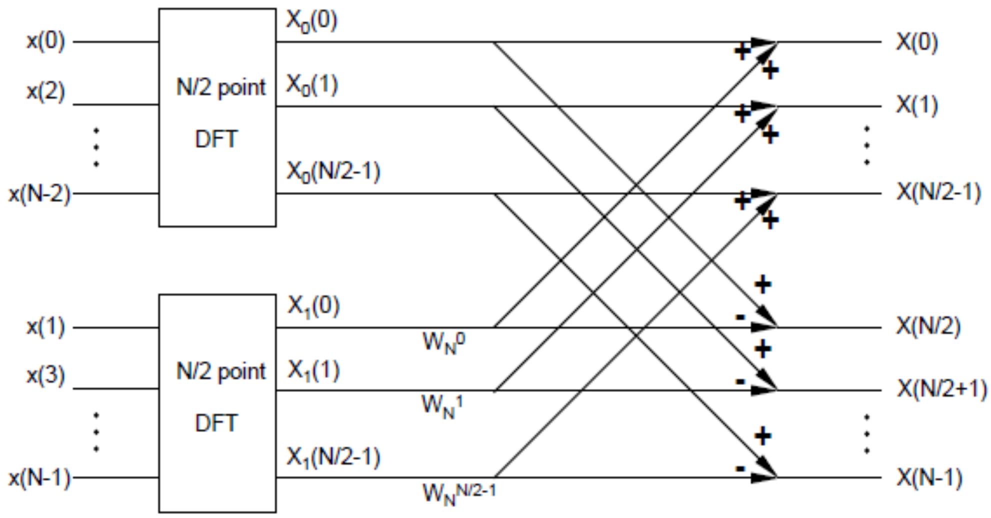


Figura 1: Cálculo de la DFT usando reducción de orden.
La DFT de N puntos $X(k)$ se obtiene mediante dos N/2 DFTs $X_0(k)$ y $X_1(k)$.

4) Transformada rápida de Fourier (FFT)

El algoritmo FFT entrega los mismos resultados que (1), pero optimiza el cómputo dividiendo el problema en cálculos de DFT de menor orden y una estructura recursiva. Para derivar una de las versiones más comunes del algoritmo FFT llamado Radix-2, asumimos que $N=2^m$. La división de la DFT de N puntos a dos de N/2 presentada por el algoritmo divide y conquista se puede volver a realizar recursivamente en cada bloque de la figura 1. Para ilustrar este punto, la reducción de orden se vuelve a aplicar sobre cada DFT de N/2 puntos en la figura 2. Es posible seguir esta reducción hasta llegar al bloque más pequeño posible de una DFT de dos puntos, a cual se obtiene directamente de la ecuación (1)

$$\begin{aligned} X^{(2)}(0) &= x[0] + x[1] \\ X^{(2)}(1) &= x[0] - x[1] \end{aligned} \tag{11}$$

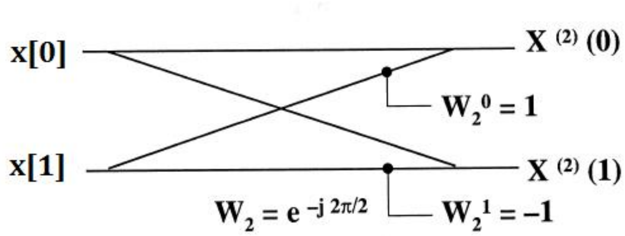


Figura 2: Cálculo de una FFT de 2 puntos

Esta implementación recursiva se conoce como FFT radix 2 y es una de las formas más comunes y el orden de su complejidad numérica baja de N^2 a $N\log_2(N)$. El número total de multiplicaciones complejas es $(N/2)\log_2(N)$ ya que la segunda mitad de la ecuación (10) no requiere multiplcaciones adicionales, sólo un cambio de signo en la suma.

La figura 3 presenta el esquema de una estructura de reducción de orden en la DFT, la figura 4 el caso de una FFT de 8 puntos, y la figura 5 la complejidad numérica en función al número de puntos N.

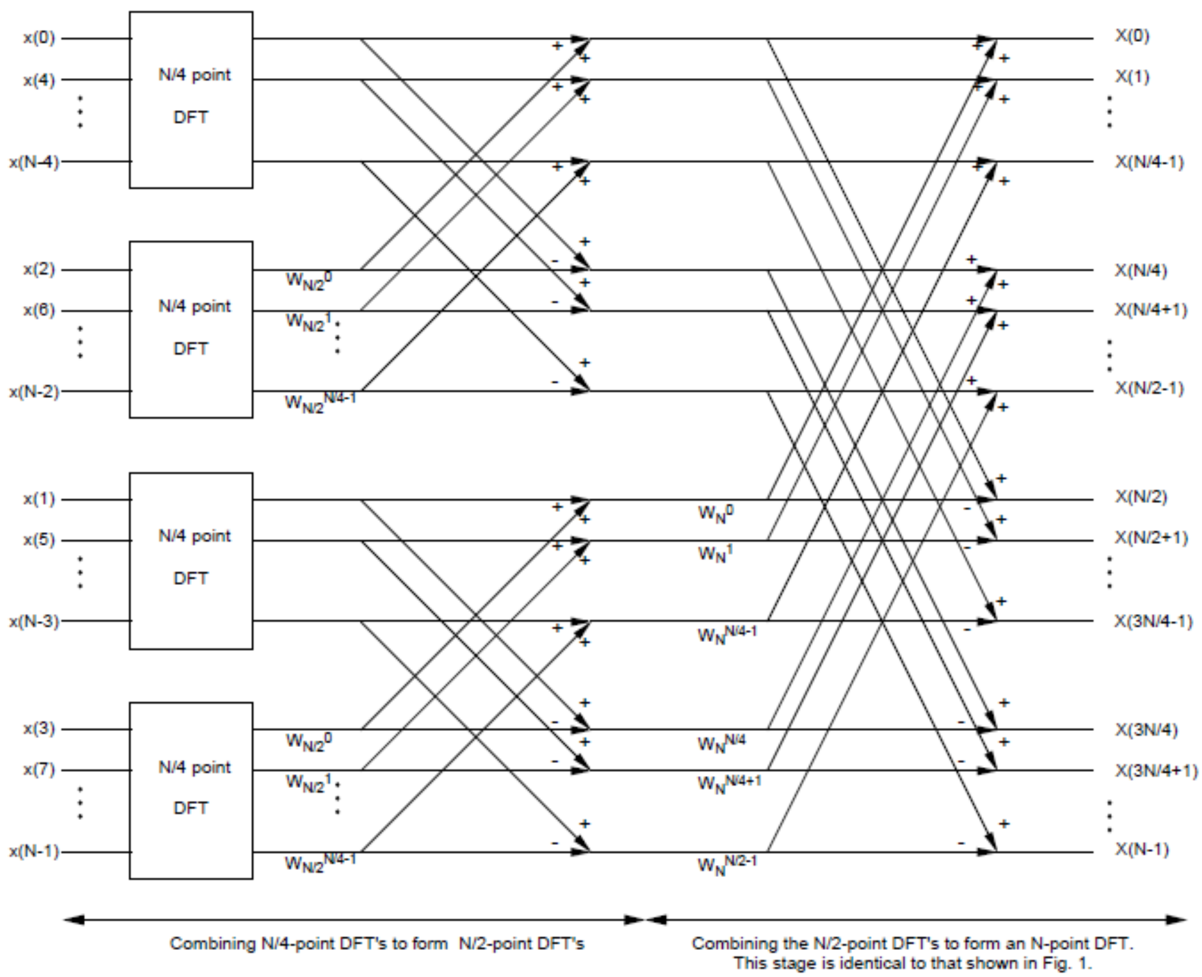


Figura 3: Cálculo de la DFT usando reducción de orden.
La DFT de N puntos $X(k)$ se obtiene mediante cuatro N/4 DFTs.

(a)

(b)

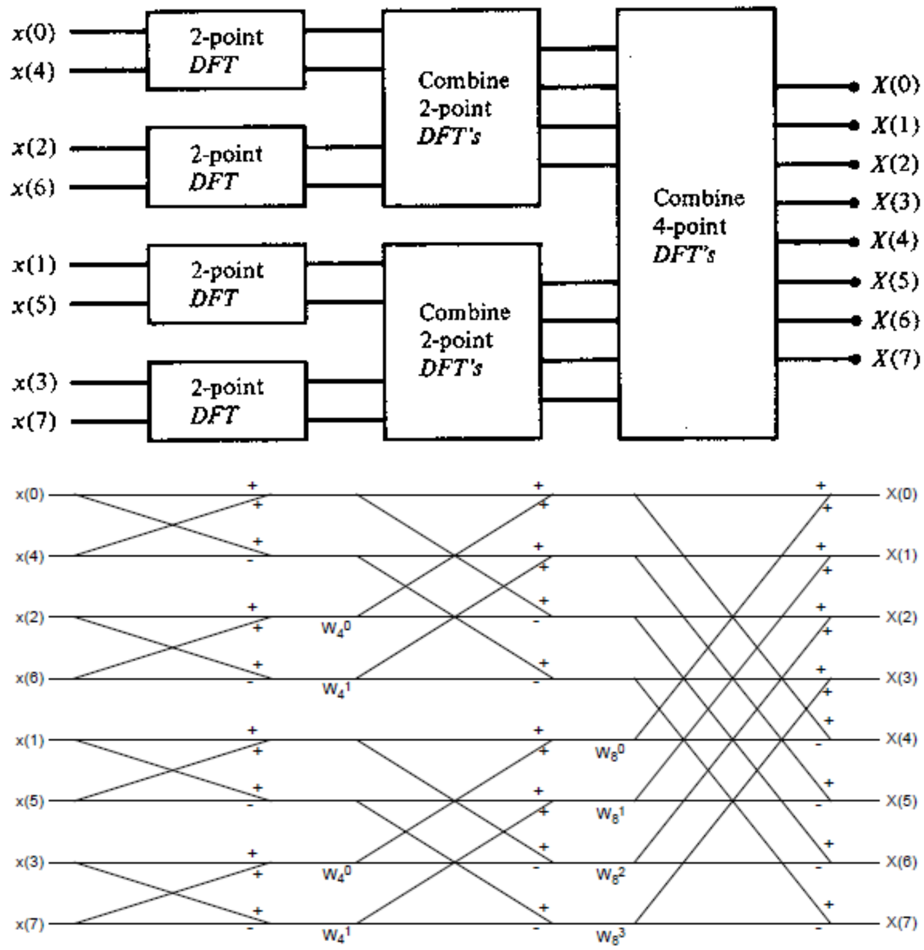


**Figura 4: Cálculo de una FFT de 8 puntos usando el esquema radix 2.
(a) Esquema general (b) Operaciones aritméticas involucradas**

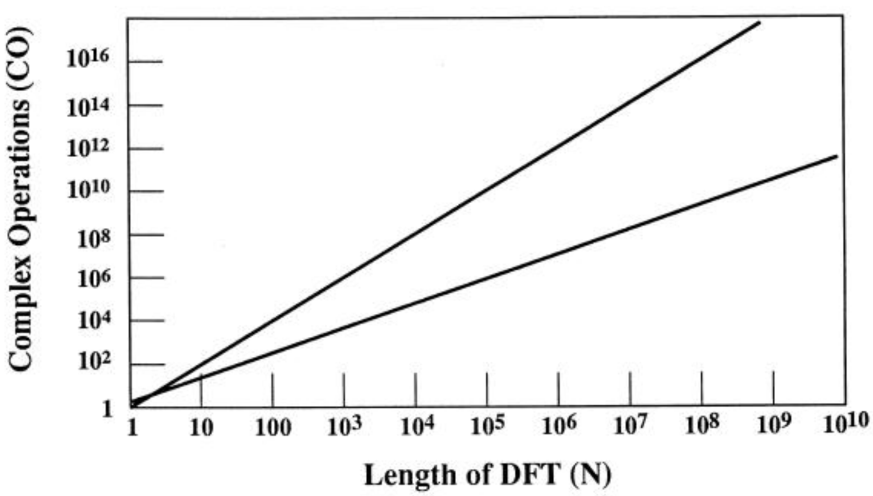


Figura 5: Complejidad numérica del algoritmo FFT radix-2 en función de N

Transformada de Laplace

Elementos Básicos

1. Introducción. Transformaciones Integrales

En este capítulo estudiaremos los fundamentos básicos de la *Transformada de Laplace*. Este tipo de transformación si bien tiene su origen en la teoría de probabilidades, su aplicación para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias -principalmente en la teoría de circuitos eléctricos- se la debe al ingeniero inglés Oliver Heaviside (1850-1925).

Antes de definir la transformada de Laplace, vamos a definir más generalmente lo que vamos a entender por *Transformada Integral.*

Dada una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[a, b]$, vamos a definir una nueva función $F(s)$, a partir de

$$F(s) = \int_a^b f(t)\, K(s,t)\, dt$$

Donde $K(s, t)$ es una función integrable en la variable t. Por como está definida la transformación, es decir, a partir del calculo de una integral, decimos que $F(s)$ es una *transformación integral* de la función $f(t)$.

2. Transformada de Laplace

Consideremos una función $f(t)$ integrable en el intervalo $[0.\infty)$, definimos la *Transformada de Laplace* a una nueva función (en la variable s) definida a través de la relación

$$F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

cuando la integral converge.

Ejemplos

- $$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$
- $$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$
- $$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \qquad s > a$$
- $$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$
- $$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

3. Condición de Existencia: Funciones de orden Exponencial

Definición. *Una función f es de orden exponencial si existen constantes α, M y T (M y T, positivas) tales que*

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha\, t}, \qquad \text{para} \;\; t \geq T$$

Ejemplos

- $$|t| \leq e^t$$
- $$|a\, t + b| \leq |a|\, |t| + |b| \leq (|a| + |b|)\, e^t$$
- $$|A\, \cos(\omega\, t)| \leq |A|\, e^t$$

Para la determinación de la condición es de utilidad graficar las funciones

Teorema: *Si f es de orden exponencial, entonces $\mathcal{L}[f]$ existe para $s > a$.*

4. Propiedades

Llamando $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, se cumple:

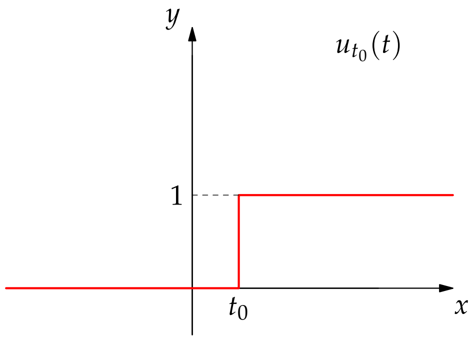
- Linealidad:
  $\mathcal{L}[\lambda\, f + g] = \lambda\, F(s) + G(s)$
- Teorema de Traslación en el eje s:
  $\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}] = F(s - a)$
- Transformada de una derivada:
  $\mathcal{L}[f'(t)] = s\, F(s) - f(0)$
- Transformada de una derivada n-ésima:
  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$
- Derivada n-ésima de una Transformada:
  $\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n\, \frac{d^n}{ds^n}\, [F(s)]$

5. Función de Heaviside o escalón

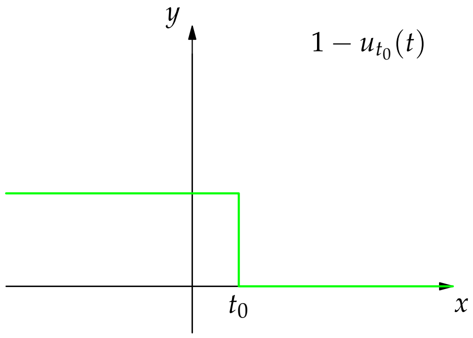
Definición. *La función escalón o de Heaviside está definida como*

$$u_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Notemos que la función $u_{t_0}(t)$ modeliza un encendido abrupto en $t = t_0$

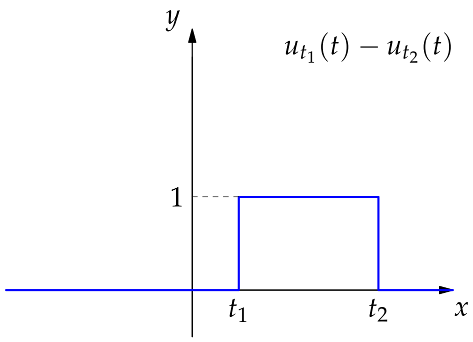


Además, podemos ver que la función $1 - u_{t_0}(t)$ modeliza un apagado abrupto abrupto en $t = t_0$



Ejercitación: Construir una función *pulso rectangular* y una *función escalera* usando las funciones de Heaviside

Respuesta: (Pulso cuadrado)



Teorema de Traslación temporal

$$\mathcal{L}[u_{t_0}(t)\, f(t - t_0)] = e^{-t_0\, s}\, F(s)$$

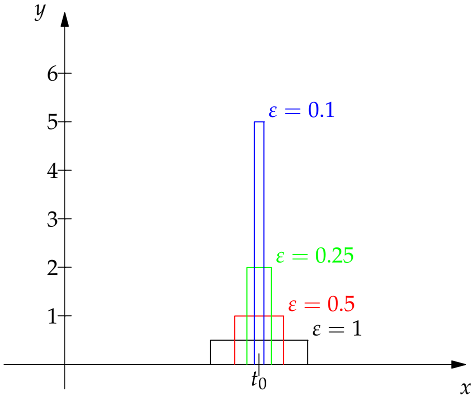
6. La Delta de Dirac

Consideremos la función pulso cuadrado centrado en $t = t_0$ de ancho ε

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[u_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right]$$

Notemos que esta función tiene altura $\frac{1}{\varepsilon}$ y ancho ε. Entonces, el área encerrada será siempre la unidad.

Si ε se va haciendo más pequeño, la altura va creciendo, conforme el ancho va disminuyendo, con área unidad.



Vamos a definir la distribución delta de Dirac como

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[u_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right]$$

Es importante aclarar que no es la única defineción de la delta de Dirac, sino que hay otras, dependiendo de las condiciones que se impongan.

La delta de Dirac no es considerada una función, sino una *distribución* o *función generalizada*.

6.1. Propiedades de la Distribución Delta de Dirac

Dada la definición -a través del límite- de la distribución delta de Dirac, se cumplen las siguiente propiedades:

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt_0 = 1$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$
- $$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Demostremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\left(u_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right)\right]dt$$

entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \left(u_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}(t) - u_{t_0+\frac{\varepsilon}{2}}(t)\right) f(t)dt$$

el pulso cuadrado es no nulo en el intervalo $[t_0 - \frac{\varepsilon}{2}, t_0 + \frac{\varepsilon}{2}]$ con lo cual la integral se simplifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{t_0+\frac{\varepsilon}{2}} f(t)dt$$

Si $F(t)$ es la primitiva de $f(t)$ tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t_0+\frac{\varepsilon}{2}) - F(t_0-\frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon} = \frac{dF}{dt}(t_0) = f(t_0)$$

A partir de esta demostración podemos demostrar la primera, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot\delta(t-t_0)dt = 1$$

En general, podemos probar también

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt = \begin{cases} 1 & t_0 \in [a,b] \\ 0 & t_0 \notin [a,b] \end{cases}$$

6.2. La Transformada de Laplace de la Delta de Dirac

La distribución $\delta(t-t_0)$ no es una función, sino una función generalizada. Por lo tanto no puede ser de orden exponencial, las cuales tienen garantizada la existencia de la transformada de Laplace. De todas maneras, la condición de orden exponencial es una condición suficiente, no necesaria. Esto nos permite buscar, a través del proceso de límite, la transformada de la distribución $\delta(t-t_0)$.

Consideremos $t \neq 0$. Entonces, podemos calcular

$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = e^{-st_0}$$

Ahora, como la distribución es "nula siempre que no sea el punto t_0, podemos escribir,

$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} u_{t_0}(t)\delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt$$

entonces,

$$\int_0^{\infty} u_{t_0}(t)\delta(t-t_0)\,e^{-st}\,dt = \mathcal{L}[u_{t0}(t)\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}$$

Por aplicación del teorema de la traslación temporal, podemos identificar que

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

6.3. Relación entre la función escalón y la Delta de Dirac

Calculemos la transformada de Laplace de la derivada de la función de Heaviside (hipotéticamente)

$$\mathcal{L}\left[\frac{du_{t_0}(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{du_{t_0}(t)}{dt}e^{-st}\,dt$$

Si integramos por partes

$$\mathcal{L}\left[\frac{du_{t_0}(t)}{dt}\right] = u_{t_0}(t)\, e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} u_{t_0}(t)e^{-st}\, dt = e^{-st_0}$$

Entonces, por identificación tendremos:

$$\frac{du_{t_0}(t)}{dt} = \delta(t - t_0)$$

lo que en principio tiene sentido, ya que la función escalón tiene pendiente nula siempre, excepto donde no tiene derivada (por no ser continua) pero que si pudieramos asociarle un número, este sería infinito.

La teoría de distribuciones permite dar sentido a cosas que en la teoría clásica de funciones no lo tendrían: En este caso, pudimos "calcular" una derivada de una función discontinua.

7. Noción de Convolución

Cuando se analisa una determinada señal, se debe tener en cuenta que el proceso mismo del análisis es una respuesta al estímulo (señal), mediada por un dispositivo que la interpreta.

Muy intuitivamente, la observación humana del fenómeno es a través de la salida del dispositivo creado y diseñado para tal fin. De hecho, un gráfico de un electrocardiograma es la salida del osciloscopio, que interpreta los impulsos que sufre el corazón.

Esquemáticamente, podríamos representar:

Estímulo $\rightarrow$ $\boxed{\text{Aparato receptor}}$ $\rightarrow$ Interpretación

Tanto el estímulo como la interpretación serán funciones.

Entonces, el aparato receptor lo que hace es toma una función $E(t)$ (estímulo) y devuelve una función $I(t)$ (interpretación). Si llamamos $\hat{R}$ a la operación que hace el aparato, el esquema puede ser reformulado

$$E(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[E(t)]} \quad \rightarrow \quad I(t)$$

7.1. Dispositivos Lineales e Invariantes Temporales (LTI)

La intepretación que un dispositivo hará de una determinada señal dependerá del tipo de dispositivo. Vamos a considerar un tipo de dispositivo denominado *Lineal e invariante temporal*, o LTI de su sigla en inglés *Linear Time-Invariant*
Esta hipótesis, tiene su correlato algebraico:

- **Lineal:**

$$\lambda\, E_1(t) + E_2(t) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[\lambda\, E_1(t) + E_2(t)]} \quad \rightarrow \quad \lambda\, I_1(t) + I_2(t)$$

- **Invarianza Temporal:**

$$E(t - t_0) \quad \rightarrow \quad \boxed{\hat{R}[E(t - t_0)]} \quad \rightarrow \quad I(t - t_0)$$

7.1.1. La función del dispositivo

Consideremos que el dispositivo tiene una respuesta a un impulso instantáneo -caracterizado por la $\delta(t)$- a través de una función determinada, $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \hat{R}[\delta(t)]$$

esta función $\varphi(t)$ podríamos llamarla *función del dispositivo.*

7.2. Definición de Convolución

Consideremos una señal caracterizada por la función $E(t)$. Por la definición de la distribución $\delta(t)$ podemos escribir

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau$$

Si esta función estímulo es receptada por el dispositivo, la interpretación $I(t)$ vendrá dada por la expresión

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \hat{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} E(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau\right]$$

Si aplicamos la linealidad (en un sentido extenso, en la suma continua que es la integral) podemos escribir:

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau)\, \hat{R}\left[\delta(t-\tau)\right]\, d\tau$$

Ahora, usando la invarianza temporal, podemos escribir

$$\hat{R}\left[\delta(t-\tau)\right] = \varphi(t-\tau)$$

Entonces, llegamos a

$$I(t) = \hat{R}[E(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau$$

Definición de Producto de Convolución. *Sean f y g funciones cuadrado integrables en la recta real. Se define el* <u>*producto*</u> <u>*de*</u> <u>*convolución*</u> *como*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Con esta definición podemos afirmar que la interpretación que un dispositivo receptor hace de una señal es la convolución entre la señal y la función del dispositivo.

En en contexto de la Transformada de Laplace, las funciones están definidas en $[0, \infty)$ por lo que el producto de convolución, sólo en este contexto será definido a través de la relación

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

7.3. Transformada de la Convolución

Consideremos $F(s) = \mathcal{L}[f]$, $G(s) = \mathcal{L}[g]$. Entonces

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)\, G(s)$$

Demostración.

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty (f * g)(t)\, e^{-st} dt$$

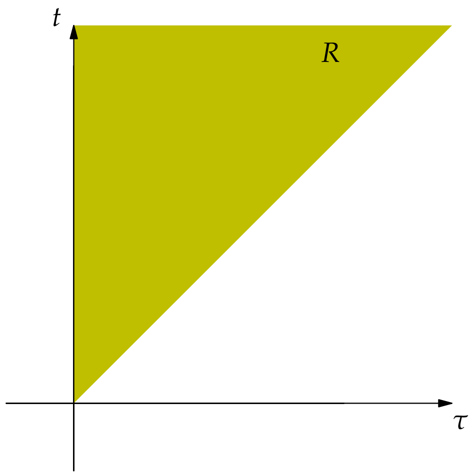
Reemplazando el producto de convolución, tenemos

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right] e^{-st} dt$$

o lo que puede escribirse como una integral doble

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, e^{-st}\, d\tau\, dt$$

vista como una integral doble, veamos que el recinto de integración es el que se muestra en la siguiente figura.



Esta región puede reparametrizarse como $\tau \leq t < \infty$ y $0 \leq \tau < \infty$. Entonces, podemos reescribir la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\, e^{-st}\, dt\, d\tau$$

Si cambiamos la variable, $\eta = t - \tau$ podemos escribir

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)\, g(\eta)\, e^{-s(\eta+\tau)}\, d\eta\, d\tau$$

Las que pueden ser separadas,

$$\mathcal{L}[f * g] = \left[\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau\right] \cdot \left[\int_0^\infty g(\eta)\, e^{-s\eta} d\eta\right] = F(s)\, G(s)$$

como se quería demostrar.

8. Aplicación a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

La propiedad

$$\mathcal{L}[y'] = s\,F(s) - y(0)$$

junto con la linealidad nos permite resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales. En efecto, consideremos la ecuación

$$y' - 2y = 1, \qquad y(0) = 1$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros, tenemos,

$$\mathcal{L}[y' - 2y] = \mathcal{L}[1]$$

aplicando la linealidad y la transformada de la derivada, tenemos

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = sF(s) - y(0) - 2F(s) = \frac{1}{s} \qquad (\mathcal{L}[1] = 1/s)$$

Entonces como $y(0) = 1$,

$$(s-2)F(s) = 1 + \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s}$$

o bien,

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s(s-2)}$$

Podemos notar que $\frac{1}{s-2}$ es la transformada de Laplace de e^2t y veamos

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-2}$$

Al ser un producto de transformadas de Laplace, podemos asumir que proviene de la convolución de dos funciones, las que tienen como transformadas a $\frac{1}{s}$ (que es la función 1) y $\frac{1}{s-2}$ (que es e^{2t}) Entonces, la función cuya transformada es $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-2}$ será

$$(e^{2t} * 1)(t) = \int_0^t e^{2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2t} - 1\right]$$

finalmente, la solución del problema será

$$y(t) = e^{2t} + \frac{1}{2}\left[e^{2t} - 1\right] = \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$$

Se verifica directamente que es solución de la ecuación diferencial.

Consideremos ahora una ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

transformando a ambos miembros, tenemos

$$\underbrace{s^2F(s) - sy(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}[y'']} - 2\underbrace{\left[sF(s) - y(0)\right]}_{\mathcal{L}[y']} + F(s) = 0$$

reemplazando las condiciones iniciales, tenemos,

$$(s^2 - 2s + 1)F(s) - 1 = 0, \qquad \rightarrow \qquad F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Para buscar la función $y(t)$ cuya transformada da $F(s)$ podemos notar que

$$\frac{1}{(s-1)^2} = (-1)\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

Entonces, tendremos que, a partir de la propiedad

$$\mathcal{L}[t^n\, f(t)] = (-1)^n\, \frac{d^n}{ds^n}\, [F(s)]$$

Podemos afirmar que, como,

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}, \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}[te^t] = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Entonces, la solución del problema será

$$y(t) = te^t$$

8.1. Ecuaciones Integro-diferenciales

Una de las aplicaciones del teorema de la convolución es la aplicación a ecuaciones integro-diferenciales, es decir, a ecuaciones en las cuales la función incógnita aparece tanto derivada, como así también en integrales.

Consideremos la ecuación

$$y' + \int_0^t y(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = f(t)$$

Al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros, debemos tomar en cuenta que la integral que aparece es el producto de convolución entre la función incógnita y la función g.

Como ejemplo, consideremos la ecuación integro-diferencial

$$y' + \int_0^t y(\tau)\, \text{sen}(t-\tau)\, d\tau = 0$$

Al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros tenemos

$$\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)\, \text{sen}(t-\tau)\, d\tau\right] = \mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y(t) * \text{sen}(t)] = 0$$

Entonces,

$$sF(s) - y(0) + F(s)\, \frac{1}{s^2+1} = 0$$

y luego despejamos $F(s)$ para ver de qué función $y(t)$ provino esta transformada $F(s)$.

9. Transformada Inversa de Laplace

Nuestro abordaje de la Transformadad de Laplace es básicamente a los efectos de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como hemos visto, la metodología era la siguiente: Dada la ecuación diferencial,

- Efectuar la Transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación
- Obtener la expresión de $F(s)$ resolviendo la ecuación algebraica resultante
- Identificar la función $y(t)$ cuya Transformada de Laplace sea la que obtuvimos, $F(s)$.

Este procedimiento requiere conocer muchas funciones con su transformada, además de aplicar las propiedades.

Sin embargo, por razones de completitud es necesario expresar como se efectúa *Transformada Inversa de Laplace*. De manera de que la búsqueda de la función $y(t)$ no sea mirando tablas, sino a partir de un cálculo directo.

El problema consiste, entonces, en hallar una transformación, que denotaremos $\mathcal{L}^{-1}$ tal que al aplicarla a una transformada de Laplace $F(s)$ nos da como resultado la función $f(t)$, cuya transformada es $F(s)$.

$$\text{Si } \mathcal{L}[f(t)] = F(s), \qquad \text{entonces} \qquad \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

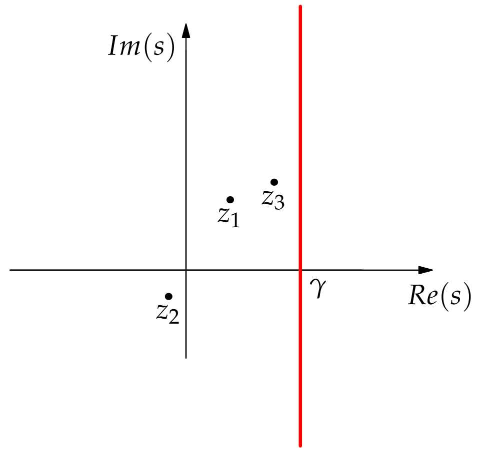
El método de obtención de la Transformada Inversa de Laplace es a partir de la expresión propuesta de Bromwich (Thomas John l'Anson Bromwich, 1875-1929)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\, VP \left[\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{st}\, ds \right] \qquad (t > 0)$$

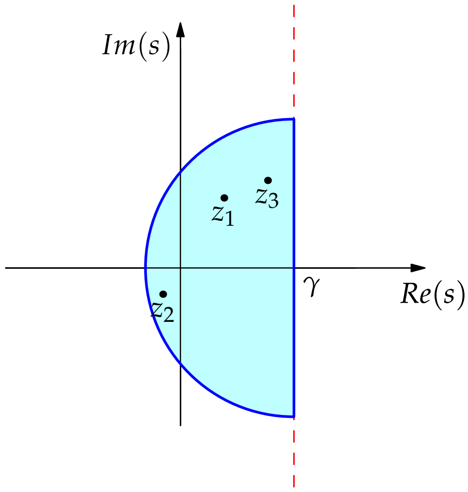
es decir, el valor principal de la integral impropia. γ es un número real, ubicado de tal manera que sea mayor que la parte real de todos las singularidades de la función $F(s)$, en el plano complejo s.

Esto significa que la integral se efectúa a lo largo de la recta $Re(s) = \gamma$

Supongamos que la función $F(s)$ tiene las singularidades z_1, z_2 y z_3. Entonces, gráficamente,



Para efectuar esta integral podemos definir una curva cerrada que contenga a las singularidades z_1, z_2 y z_3 en su interior, como indica la figura



Entonces, la integral de Bromwich la calculamos tomando la curva que es una recta $c_1 : s_1(t) = \gamma + it$, con $-a \leq t \leq a$, unida con la semicircunferencia $c_2 : s_2(t) = a\, e^{it} + \gamma$ con $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$.

Para calcular la integral aplicamos el *Teorema de los Residuos* y luego tomamos límite para a tendiendo a infinito. Como en el caso del cálculo de integrales impropias, habrá que demostrar que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero.

Ejemplo. Con la integral de Bromwich obtener la antitransformada de Laplace de $F(s) = \frac{1}{s}$
A partir de la integral de Bromwich, tenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{s} ds$$

Podemos elegir $\gamma = 1$ y al construir la curva cerrada la singularidad será $s = 0$. Entonces, el residuo de la función integrando será $e^{0\,t} = 1$.
Entonces,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i \cdot Res_{s=0} \left(\frac{e^{st}}{s} \right) \right] = 1$$

Como ya sabíamos. Queda como ejercicio demostrar que la integral sobre la semicircunferencia tiende a cero en el límite.

10. Bibliografía Recomendada

- Boyce, William E.; Diprima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Ed. Limusa (1991)
- Kreider, D.; Kuller, R.; Ostberg, D.; Perkins, F. *Introducción al Análisis Lineal*, Tomo I, Fondo Educativo Interamericano (1971)
- Churchill, Ruel V., Brown, James W. *Variable Compleja y Aplicaciones*, Ed. Mc Graw Hill (1992)