1.- Resolver las siguientes derivadas parciales

a) $z = x^3 + y^3 - 3kxy$

b) $v = \dfrac{x-y}{x+y}$

c) $w = (xy^z)$

d) $w = z^{xy}$

e) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $f_{(x,y)} = \dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

g) $f_{(x,y)} = \sqrt{x^2-y^2}$

h) $z = \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

i) $f_{(x,y)} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

j) $f_{(x,y)} = e^{\left(3x^2+2x^2-xy\right)}$

k) $w = e^{\left(x^2+y^2\right)^2}$

l) $f_{(x,y,z)} = sen\left(\dfrac{xy}{z}\right)$

2.- Si $f_{(x,y,z)} = \ln(z+xy)$ hallar:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1;2;0)} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1;2;0)} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(1;2;0)}$$

3.- Hallar: $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(2;1)} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(2;1)}$ sabiendo que $f_{(x;y)} = \sqrt{\dfrac{x}{y}+xy}$

4.- Hallar $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{v}\right)$ sabiendo que $v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

5.- Demostrar si $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ para la función: $f_{(x,y)} = \ln(x^2+xy+y^2)$

6.- Demostrar si $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ para la función: $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$

7.- Demostrar si $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$ para la función: $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$

9.- Demostrar si $x^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$ sabiendo que $v = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

10.- Demostrar si: $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$ sabiendo que $z = y.\ln\left(x^2-y^2\right)$

11.- Demostrar que la siguiente función tiene derivadas parciales en el punto (0; 0) a pesar de ser discontinua en ese punto.

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & con \quad x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 \quad con & x = y = 0 \end{cases}$$

12.- Demostrar si para la función *w=(x-y).(z-x).(y-z)* la suma de sus derivadas parciales es nula.-

Diferenciales totales:

13.- Hallar las diferenciales totales de:

a) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

b) $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$

c) $F_{(x,y)}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

d) $w=x.y.z$

e) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

f) $z=\ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$

g) $v=\ln\left(tg\,\dfrac{x}{y}\right)$

h) $z=y.x^y$

i) $F_{(x,y)}=sen^2x+\cos^2 y$

j) $z=e^x.\left[\cos(y)+x.sen(y)\right]$

k) $z=arcsen\left(\dfrac{x}{y}\right)$

14.- Si $f_{(x,y)}=\dfrac{x}{y^2}$ hallar *df(1;1).*

15.- Hallar el valor de *df(-2;3;4)* de la función $f_{(x,y,z)}=\dfrac{z}{x^2+y^2}$

16.- Calcular el valor de a si dada la función $F_{(x,y,z)}=3x^2+5y^2-2z$ resulta *dF(1;a;4) = -3*

17.- Mediante el cálculo diferencial, calcular el valor aproximado de:

a) $(1{,}01)^{2{,}02}$

b) $(0{,}99\ .\ 2{,}01)^{1{,}99}$

c) $(2{,}01)^{0{,}99.3{,}02}$

d) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$

e) $e^{0{,}1}.sen(0{,}1+0{,}2)$

f) $\sqrt{1{,}02^{2{,}98}+\ln(1{,}04)}$

g) $tg(46º).sen(89º)$

h) $sen(32º).cos(59)º$

i) $ln(0{,}99^4+0{,}004^5)$

18.- Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 20cm, 10 cm y 5 cm, está elaborada en fibro-fácil, tal que las láminas tienen 3 mm de espesor.
Determinar el volumen aproximado del material empleado en la construcción de la caja.-

19.- Un rectángulo de 20cm x 30cm está construido con un material que sufre movimientos de dilatación y contracción constantes. En un determinado momento el largo se dilata 3 mm. Y el ancho se contrae 2 mm. ¿Cómo variará la longitud de la diagonal en ese momento?

20.- Al medir en un momento el triángulo *ABC* se obtuvieron los siguientes resultados: el lado *a* = 50m - 20cm, el lado *b* = 80m + 30cm. y el ángulo *C* = 60º+1º. ¿Con qué grado de exactitud se podrá calcular el lado *c*?

21.- La altura de un cilindro es de 28 cm. y el radio de la base es de 4 cm. Determinar cómo variará el volumen de dicho cilindro si la altura disminuye 3 mm y el radio aumenta 1 mm.

22.- Una lata común de 12 onzas liquidas de gaseosa es en esencia un cilindro de radio r = 1” y altura h = 5”. Con estas dimensiones ¿Cuan sensible es el volumen de la lata a un pequeño cambio en el radio, en comparación con un pequeño cambio en la altura?

Derivada de funciones compuestas:

23.- Hallar las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

a) Hallar $\dfrac{dz}{dt}$ cuando $z = e^{3x+2y}$ donde x = cos(t) , y= t^2

b) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ si z= f(x,y) donde x = u.v , y = u/v

c) Si z= x/y , donde x= e^t , y = ln(t) hallar $\dfrac{dz}{dt}$

d) Hallar $\dfrac{du}{dt}$ si u = x.y.z, donde x = t^2 + 1 ; y = ln(t) , z = tg t

e) Hallar $\dfrac{dz}{dx}$ si z = u^v además u = sen(x) , v = cos(x)

f) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{dz}{dx}$ sabiendo que $z = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, y = x^2

g) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ cuando $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donde x = u.sen(v) , y = u.cos(v)

24.- Demostrar si *z= F(x+ay)*, siendo *F* una función derivable, resulta: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = a.\dfrac{\partial z}{\partial x}$

25.- Demostrar si $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + x.y.\dfrac{\partial z}{\partial y} = x.y.z$ sabiendo que: $z = e^y.F\left(y.e^{x^2/2.y^2}\right)$.

26.- Demostrar que si $u = F(x^2 + y^2 + z^2)$ donde $x = \rho.\cos(\alpha).\cos(\beta)$, $y = \rho.\cos(\alpha).sen(\beta)$, $z = \rho.sen\,\alpha$ resulta: $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \beta} = 0$

27.- Supóngase que sustituimos las coordenadas polares $x = \rho.\cos(\theta)$ e $y = \rho.sen(\theta)$ en una función diferenciable *w = f(x,y)*. Mostrar que:

a) $\dfrac{\partial w}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}sen(\theta)$

b) $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}sen(\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta)$

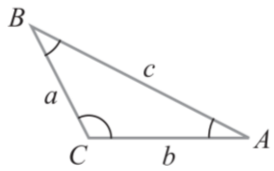
28.- Demostrar que si *u = x + k.t*; *v = y + h.t* entonces la función *w = f(u,v)* satisface la ecuación:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k.\frac{\partial w}{\partial x} + h.\frac{\partial w}{\partial y}$$

29.- Demostrar que si $z = y.F(x^2 - y^2)$ cumple con: $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

Derivada de funciones implícitas:

30.- Exprese A en forma implícita como función de a, b y c, y calcule $\dfrac{\partial A}{\partial a};\dfrac{\partial A}{\partial b}$



31.- Determinar las derivadas que se indican en cada caso:

a) $2.sen\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right) - 3\cos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}\right) + 1 = 0$ calcular y´

b) $x^2 - x.2^{y+1} + 4^y - x + 2^y = -2$ calcular y´

c) $x + y + z = e^x$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial x}$

d) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ $\qquad$ calcular $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

32.- Las funciones z e y de variable independiente x están dadas según el siguiente sistema. Hallar las derivadas que se indican:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+2y^2+3z^2-4=0 \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx}; \frac{dz}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}; \frac{d^2z}{dx^2}$$

33.- La variable independiente del siguiente sistema de funciones es x. Determinar las derivadas que se indican:

$$\begin{cases} x.y.z-a=0 \\ x+y+z-b=0 \end{cases} \qquad dy;\ dz;\ d^2y;\ d^2z$$

34.- Las ecuaciones *u + v = x + y*; *x.u + y.v = 1* están determinadas por variables independientes *x,y*. Hallar: $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}$

35.- La función *w* de argumentos *x,y* está dada por $x = u + v$; $y = u^2 + v^2$; $w = u^3 + v^3$ determinar $\frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y}$

36.- Es y una función de x determinada por la ecuación: $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{h^2}=1$. Hallar: $\frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}; \frac{d^3y}{dx^3}$

37.- Si *x.cos(y) + y.cos(z) + z.cos(x) =1* . Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$

38.- En los sistemas que siguen las variables independientes son x,y. Hallar las derivadas que se indican:

a) $\begin{cases} x=F(u,v) \\ y=G(u,v) \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}$

b) $\begin{cases} u+v=x \\ u-v.y=0 \end{cases} \qquad du;\ dv;\ d^2u;\ d^2v$

c) $\begin{cases} u=x+y \\ y=u.v \end{cases} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

39.- Demostrar que la función *z*, determinada por la ecuación: *F(x-az,y-ba)=0*
Donde *F* es una función diferenciable cualquiera, de dos argumentos, satisface la ecuación:

$$a.\frac{\partial z}{\partial x}+b.\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$$

40.- La función *z* viene dada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - f(ax + by + cz) = 0$, donde *f* es una función cualquiera y diferenciable, mientras que *a,b,c* son constantes.

Demostrar si: $(cy-bz).\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx).\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$

41.- Hallar la derivada de la función $F(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto *M(2,1,2)* en el sentido del vector *r= 2i + 4j + 4k*

42.- Hallar la derivada de la función $F(x, y) = ln(x^2 + y^2)$ en el punto *P(2,3)* en el sentido del gradiente de la función z.-

43.- Hallar las derivadas direccionales de las funciones que se indican en las direcciones dadas:

a) $F(x,y)= x^2 - xy - 2y^2$, en el punto $P(1,2)$ y en la dirección de qué forma con el eje OX un ángulo de 60º
b) $G(x,y)= x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$, en el punto $P(-1;2)$ en la dirección que une a ese punto con el $M(4;-3)$
c) $v = \ln\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)$ en el punto $P(1;1)$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.-
d) $w = x^2 - 3yz + 5$ en el punto $P(-1,2-1)$ en la dirección que forma ángulos iguales con los tres ejes coordenados.
e) $v = x.y^2.z^3$ en el punto $P(3,2,-1)$ en el sentido del vector PH siendo $H(3,-4,1)$
f) $w = xy + yz + zx$ en el punto $M(2,1,3)$ en la dirección que va de él hasta $P(5;5;15)$
g) $u = \ln(ex + ey + ez)$ en el origen de coordenadas, en la dirección que forma con los ejes OX, OY, OZ los ángulos α,β,γ respectivamente.-

44.- ¿En qué dirección se anula la derivada de:
a) $z = xy + y^2$ en $P(3,2)$?
b) $z= (x^2-y^2) / (x^2+y^2)$ en $P(1,1)$?

45.- ¿Existe una dirección u en que la razón de cambio de $z = x^2+3xy+4y^2$ en $P(1,2)$ sea igual a 14?

46.- Calcular el vector gradiente en todos los pares de puntos (x,y) del espacio en los que existe la función:

$$F_{(x,y)} = x^2.y^2.\ln(x^2 + y^2)$$

47.- Hallar la magnitud y la dirección del gradiente v en el punto $(2;-2;1)$ si $v = x^2 + y^2 + z^2$

48.- Hallar la magnitud de la elevación máxima de la superficie $z= x^2 + 4y^2$ en $P(2;1;8)$

49.- Hallar el valor y el sentido del gradiente de la función:

$v= tg(x) - x.3\ sen(y) - sen^3(y) + z + cotg(z)$ en el punto $H(\pi/4,\pi/3,\pi/2)$.

50.- Resolver las derivadas que se indican en cada caso:

a) $z= arctg\ (x/y)$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
b) $z= 2x^2 - 3xy - y^2$	diferenciales de primer y segundo orden
c) $z= \ln(tg(y/x))$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
d) $z= sen\ x\ .\ sen\ y$	d^2z , d^3z
e) $z = x^y$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
f) $w= x.sen(xy) + y.\cos(xy)$	$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial x}$
g) $z= sen\ (xy)$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
h) $w= x.\ \ln(y) + e^{xy}$	d^4w ; d^5w
i) $z= f(u,v)$; $u = x.e^y$; $v= y.e^x$	d^2z
j) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

k) $f(x,y) = (1+x)^m \cdot (1+y)^n$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{(0;0)}\ ;\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{(0;0)}\ ;\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}_{(0;0)}$

51.- La derivada parcial de quinto orden $\dfrac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3}$ se anula para cada una de las siguientes funciones. Para mostrar esto lo más rápido posible, ¿con respecto a cuál variable derivaría primero? Tratar de contestar sin escribir.

a) $z = y^2 x^2 e^x + 2$

b) $z = y^2 + y.sen\left(x - x^4\right)$

c) $z = x^2 + 5xy + sen(x) + 7e^x$

d) $z = xe^{y^2/2}$

52.- Demostrar que para la función $f(x,y) = x.y.\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ con la condición adicional que *f(0,0)=0* resulta: $f''_{xy}(0,0) = -1; f''_{yx}(0,0) = +1$

53.- Demostrar que la función $W = F_{(x.y)} + \sqrt{x.y}.G_{\left(\frac{x}{y}\right)}$ satisface la ecuación: $x^2.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y^2, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

54.- Dada $z= e^{(ax+by)}$ con *a, b* constantes. Establecer las condiciones de *a,b* para que la función cumpla con la ecuación de Laplace, esto es que el laplaciano $\nabla_x^2 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

55.- Para cada una de las funciones siguientes demostrar si se cumplen las igualdades correspondientes indicadas:

a) $z = F[x + G(y)]$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

b) *u= F(x-mt) + G(x+mt)* $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m^2.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

c) $u = y.e^{x^2 - y^2}$ $\quad \dfrac{1}{x}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}.\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$

d) $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}.e^{-x^2/4a^2 t}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

e) $z = m.sen(a\delta y + \varphi).sen(\delta x)$ $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$