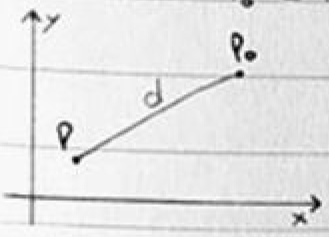
TOPOLOGIA

↳ estudio de formas y medidas

DISTANCIA PITAGORICA

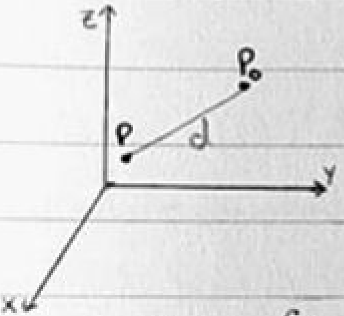
$P \in R^2 \wedge P_0 \in R^2$



$$d(\overline{PP_0}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$d(\overline{PP_0}) = \left\{ P \in R^2, P_0 \in R^2 : d(\overline{PP_0}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right\}$$

- distancia de la recta en el espacio



Para $R^n \to P = (x_1, x_2, \ldots x_n)$

$\to P_0 = (y_1, y_2, \ldots y_n)$

$$d(\overline{PP_0}) = \left\{ P \in R^3, P_0 \in R^3 : d(\overline{PP_0}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \right\}$$

* R^2 : $d(\overline{PP_0}) = |\overline{PP_0}| \longrightarrow$ MÓDULO
* $R^3 - R^n$: $d(\overline{PP_0}) = \|\overline{PP_0}\| \longrightarrow$ NORMA
- Jamas puedo garantizar existencia del Lim en R^2 y R^3.
* $R^2 \to$ DISCO ABIERTO (ej: CD) ⓞ
* $R^3 \to$ BOLA ABIERTA (ej: esfera c/agujero en el centro)

tendencia: no me importa lo que pasa en el centro

no existe lateralidad

$P_0 \to$ punto centro $\quad r \to$ radio

$$B(P_0, r) = \{ P_0 \in R^2, P \in R^2 : |\overline{PP_0}| < r \}$$

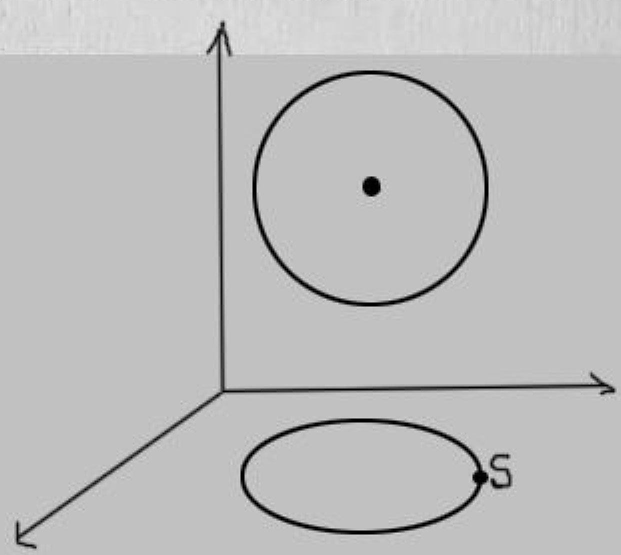
$$B(P_0, r) = \{ P_0 \in R^n, P \in R^n : \|\overline{PP_0}\| < r \}$$ (no tiene borde)

↳ bola abierta con centro en P_0

TOPOLOGÍA

• **PUNTO INTERIOR**: un punto P_0 perteneciente a R^n (en particular R^2 o R^3) tal que S está contenido en R^n y $P_0 \in S$, es punto interior si existe por lo menos una $B(P_0, r)$ que contiene solo puntos de S.

Si un punto P_0 no es punto interno recibe el nombre de punto aislado.



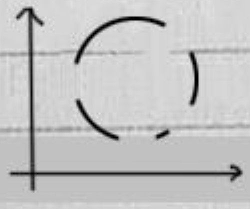
• **PUNTO DE ACUMULACIÓN**: un punto P_0 perteneciente a S tal que S contenido en R^n es punto de acumulación si toda bola abierta contiene infinitos puntos de S.
(los del borde y los internos)

corolario: todo punto interior es punto de acumulación.

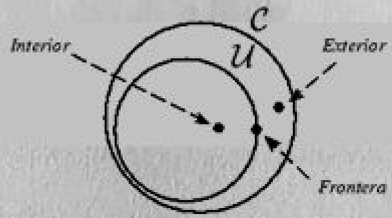
• **CONJUNTO CERRADO**: un conjunto S contenido en R^n es cerrado si todos sus puntos son de acumulación.

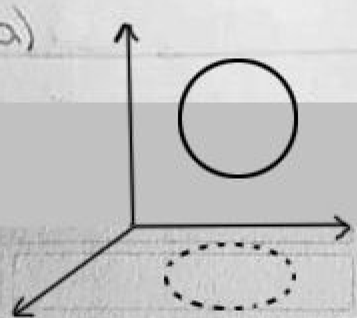
• **CONJUNTO ABIERTO**: un conjunto S contenido en R^n es un conjunto abierto si todos sus puntos son interiores.

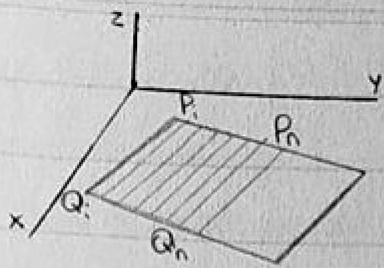
• **OBSERVACIÓN:** un conjunto de este tipo no es abierto y no es cerrado.



• **PUNTO FRONTERA:** un punto P_0 perteneciente a S es punto frontera si toda $B(P_0, r)$ contiene por lo menos un punto perteneciente a S y por lo menos un punto perteneciente a S'. (ni adentro ni afuera)







$Z = F(XY)$

$F(XY) = K$

Familia de curvas (isoclina)

• **CURVA DE NIVEL:** sea $Z = F(XY)$ una superficie a la recta (en general una curva) se la denomina curva de nivel cuando la superficie se corta transversalmente (u horizontalmente) y la inclinación entre una y otra es constante.

• **SUPERFICIE DE NIVEL:** si $Z = G(XY)$ es una superficie definida en R^3 tal que proyectada sobre el plano (XY) engendra un cuerpo o bien, naturalmente se tiene una ecuación en 3 variables, todo corte con respecto a cualquiera de los planos coordenados tal que dichos planos son paralelos, reciben el nombre de superficie de nivel.

LIMITES DE FUNCIONES DE 2 O MÁS VARIABLES

Si f es una funcion de n variables definida en alguna $B(P_0, r)$ excepto posiblemente en el punto P_0 mismo, entonces:

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in \mathbb{R}^n}} f(P) = L \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0;\ \exists\, \delta(\varepsilon):$$

$$\|P - P_0\| < \delta \implies \|f(P) - L\| < \varepsilon$$

finito
unico → puedo evaluarlo pero no garantizarlo

Si en particular P pertenece a $\mathbb{R}^2$, entonces $P_0(x_0, y_0)$, por lo tanto se tiene un <u>limite doble</u>:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = L \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0;\ \exists\, \delta(\varepsilon):$$

$$\underbrace{|(x,y) - (x_0, y_0)|}_{\text{Distancia Pitagorica} \to \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

En el caso particular que P pertenezca a $\mathbb{R}^3$ se tiene un <u>limite triple</u>:

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x,y,z) = L \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0;\ \exists\, \delta(\varepsilon):$$

$$\underbrace{\|(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)\|}_{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} < \delta \implies \|f(x,y,z) - L\| < \varepsilon$$

<u>OBSERVACIÓN:</u>

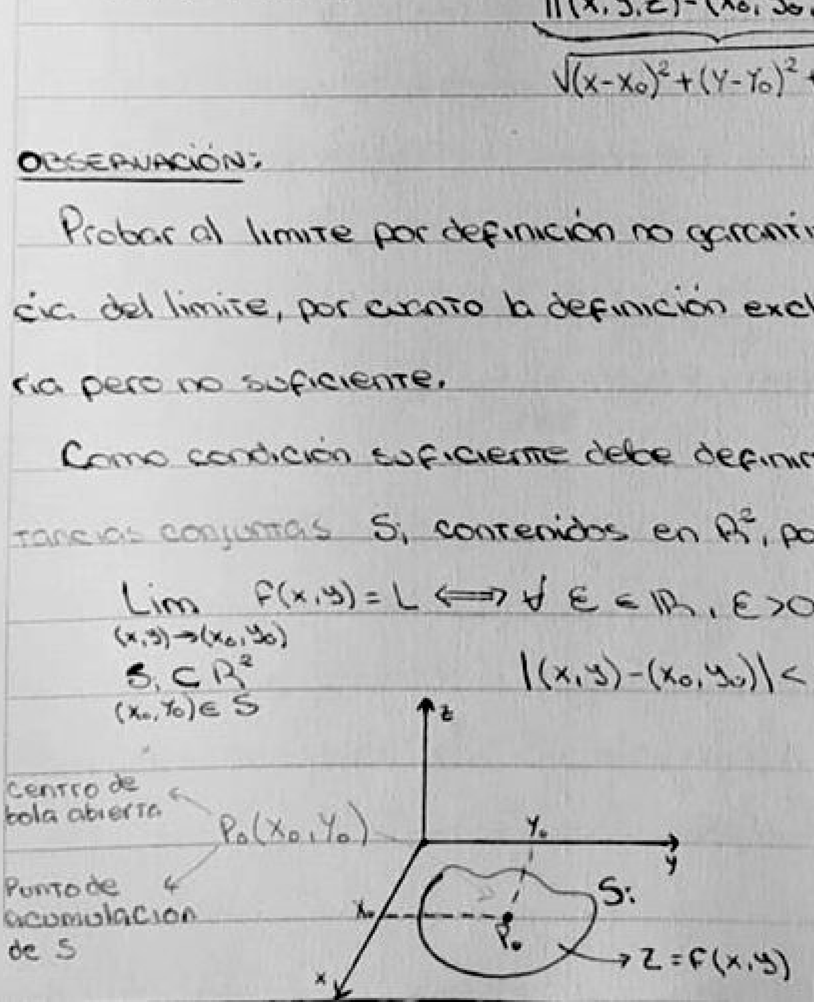
Probar el limite por definición no garantiza en forma absoluta la existencia del limite, por cuanto la definición exclusivamente es condicion necesaria pero no suficiente.

me acerco por cualq lado

Como condición suficiente debe definirse el limite RESTRINGIDO a distancias conjuntas S_i contenidos en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto será: $S_i \subset \mathbb{R}^2 : P_0 \in S$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ S_i \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_0, y_0) \in S}} f(x,y) = L \iff \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0;\ \exists\, \delta(\varepsilon):$$

$$|(x,y) - (x_0, y_0)| < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon$$



$\varepsilon \to$ radio

Los distintos S_i correspondientes a subconjuntos conformados por distintas ecuaciones que cubren a S_i, por ejemplo:

Puntos de tendencia (0,0)

$S_1 = \{P_i \, P \in R^2 \, , \, y = mx\}$ recta

$S_2 = \{P_i \, P \in R^2 \, , \, y = mx + b\}$ recta desplazada

$S_3 = \{P_i \, P \in R^2 \, , \, x^2 + y^2 = r^2\}$ circunferencia

$S_4 = \{P_i \, P \in R^2 \, , \, y^2 = x\}$ parabola

Al igualar en cada restriccion S_i se obtendría el Limite L_i, si una vez evaluados n subconjuntos S_i existe un L_i distinto a L_{i+1}, el limite no existe; por lo tanto es necesario probar que en un numero razonable de subconjuntos S_i los L_i sean coincidentes. Entonces es de suponer la existencia del limite y su unicidad.

ANALOGAMENTE al limite de funciones de 1 variable las propiedades de tales limites se extienden a funciones de 2 o más variables, por lo tanto un limite de funciones de 2 o más variables puede resolverse aplicando tales propiedades o por operaciones algebraicas (sin transgredir al algebra tradicional).

En el caso particular de que una función de dos variables sea $f(x,y) = f(x).f(y)$, expresion que se denomina homogenea o particionable, el limite doble (limite de funciones de 2 variables) es igual al producto de los limites de funciones de cada una de las variables, a éste se lo denomina <u>limite ITERADO</u>. (Conmutacion de los operadores)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x) \, . \lim_{y\to y_0} f(y) = f(x_0) . \lim_{y\to y_0} f(y) = f(x_0) . f(y_0) = L$$

Cuando las funciones no pueden evaluarse separadamente es necesario definir las operaciones de TRANSFORMACIÓN y MAPEO; en este caso buscar un <u>isomorfismo</u>. (cambio de variable) (dom correspondiente a ρ y θ)

Si $z = f(x,y)$ es una función definida en R^2, su isomorfismo es una función de (ρ, θ) definida en coordenadas polares.

$I <_{M}^{T} \Big\} R^2 \Rightarrow P$;  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\theta = \text{arctg}(y/x)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(\rho_0,\theta_0)} f(\rho,\theta)$$

$x = \rho\cos(\theta)$

$y = \rho\,\text{sen}(\theta)$

Si el limite de la funcion evaluada en coordenadas POLARES existe y su resultado es L, también existe el limite, por definicion de isomorfismo para el Limite de la función definida en coordenadas cartesianas.

CONTINUIDAD

(1) $\exists\ f(x,y)\Big]_{(x,y)=(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0)$

(2) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

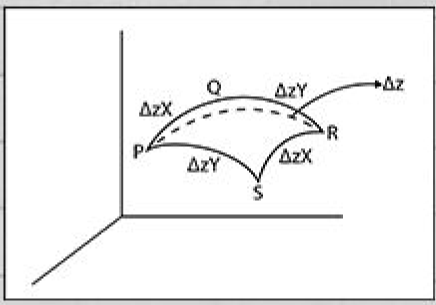
(3) $f(x_0,y_0) = L$

- Si no se cumple alguna de las anteriores → DISCONTINUA (NO evitable).
- $\lim f(x,y) = f(\lim (x,y))$.
- No hay lateralidad.
- Conmutación de los operadores:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = g\Big(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\Big)$$

INCREMENTO

- → Lineal
- → Funcional
- → Parcial → $\Delta_x X$, $\Delta_y Y$
- → Total → ΔZ →



$P(x, y)$

$Q(x+\Delta x, y)$

$R(x+\Delta x, y+\Delta y)$

$S(x, y+\Delta y)$

- Curvas de Nivel $\rightarrow \overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{SP}$.
- $\overline{PQ} \neq \overline{QR} \rightarrow$ están en dif. sentidos.
- $\overline{PQ}$ es la variación entre P y Q $\rightarrow$ INCREMENTO.

Si $z = f(x,y) =$ constante $\Rightarrow \Delta z = \sqrt{(\Delta_z X)^2 + (\Delta_z Y)^2}$.

Si $z = f(x,y) \neq$ constante $\Rightarrow \nexists$ distancia lineal.

- <u>Cómo calcular</u>:

$\Delta_z X = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \rightarrow \Delta x$ con respecto a z

$\Delta_z Y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \rightarrow \Delta y$ con respecto a z

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

EJEMPLO: $z = x^2 y$

$\Delta_z X = (x+\Delta x)^2 y - x^2 y = \cancel{x^2 y} + 2xy\Delta x + (\Delta x)^2 y - \cancel{x^2 y}$

$\Delta_z Y = x^2(y+\Delta y) - x^2 y = \cancel{x^2 y} + x^2 \Delta y - \cancel{x^2 y}$

$\Delta z = (x+\Delta x)^2 (y+\Delta y) - x^2 y = \cancel{x^2 y} + x^2 \Delta y + 2x\Delta x y + 2x\Delta x \Delta y + (\Delta x)^2 y + (\Delta x)^2 \Delta y - \cancel{x^2 y}$

- Si Δx y Δy tienden a 0 se igualan.
- INC. TOTAL $\rightarrow$ contiene los sumandos de $\Delta_z X$ y $\Delta_z Y$.
- Hay tantos COCIENTES INCREMENTALES como var. indep. haya.

$\Delta_z X$ COC. INC. PARCIAL de $x \rightarrow \frac{\Delta_z X}{\Delta x}$

$\Delta_z Y$ COC. INC. PARCIAL de $y \rightarrow \frac{\Delta_z Y}{\Delta y}$