§8_3_2 函数展开成幂级数

*/*Representation of Functions as Power Series*/*

一、泰勒级数

二、函数展开成幂级数

$$\text{幂级数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}}\ \text{和函数}\ S(x)$$

一、泰勒 (Taylor) 级数

复习: 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

此式称为 $f(x)$ 的 **n 阶泰勒公式**, 其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间})$$

称为**拉格朗日余项** .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的**泰勒级数**.

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为**麦克劳林级数**.

待解决的问题 :

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

定理5. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\cup(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的**充要条件**是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足：$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

证明: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \cup(x_0)$

令 $S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_{n+1}(x)\right] = 0, \quad x \in \cup(x_0)$$

定理6. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数，则这种展开式是**唯一**的，且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad x\in(-R,R)$$

则 $$a_0=f(0)$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots;\qquad a_1=f'(0)$$

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots;\qquad a_2=\frac{1}{2!}f''(0)$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots;\qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots$$

显然结论成立.

二、函数展开成幂级数

展开方法
- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步　求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步　写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R；

第三步　判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\Big/\dfrac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x 之间)

故 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 x , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

类似可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数, 其中m为任意常数.

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1),\ \cdots$$

于是得 级数 $1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=1$

因此对任意常数 m, 级数在开区间 $(-1,1)$ 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为 $F(x), -1<x<1$

则 $F(x)=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]$$

$(1+x)F'(x)$

$$=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2\ldots+\frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots\right.$$

$$\left.+x+\frac{m-1}{1}x^2+\ldots+\frac{(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-2)!}x^{n-1}+\ldots\right]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x),$$

$$= m\Big[1 + \underline{\frac{m-1}{1}x} + \underline{\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2} \ldots + \frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots$$

$$\underline{+x} + \underline{\frac{m-1}{1}x^2} + \ldots + \frac{(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-2)!}x^{n-1} + \ldots\Big]$$

$$= m[1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots]$$

$$(1+x)F'(x) = mF(x), \quad F(0) = 1$$

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{m}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln F(x) - \ln F(0) = m\ln(1+x)$$

$$F(x) = (1+x)^m$$

由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为**二项展开式**.

说明:

(1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关.

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的**二项式定理**.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ **的二项展开式分别为**

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1<x\le 1)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$(-1<x<1)$$

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ **的二项展开式分别为**

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$(-1<x<1)$$

2. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例4. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解: 因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例5. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad -1<x\le 1$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛区间为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例6. 将 $\sin x$ 展成 $x-\dfrac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解:
$$\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4-\cdots\right)\right.$$
$$\left.+\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5-\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$$
$$(-\infty<x<+\infty)$$

例7. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}\qquad (|x-1|<2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\qquad(-1<x<3)$$

内 容 小 结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式;

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数.

2. 常用函数的幂级数展开式

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$
  $x \in (-1, +1]$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处 "**有泰勒级数**" 与 "**能展成泰勒级数**" 有何不同 ?

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数 ?

提示:
$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

3. **将下列函数展开成 x 的幂级数**

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 因此

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$