第二节 平面/*Planes*/及其方程

一、平面的点法式方程

二、平面的三点式方程

三、平面的截距式方程

四、平面的一般方程

五、两平面的夹角

六、点到平面的距离

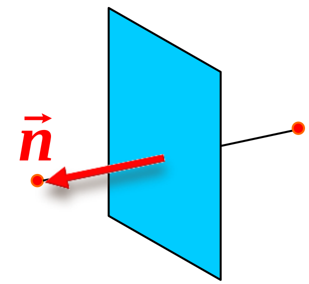
七、平行平面间的距离

引例. 求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的**轨迹方程**.

解: 设轨迹上的动点为 $M(x,y,z)$, 则 $|AM|=|BM|$, 即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$



说明: 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.

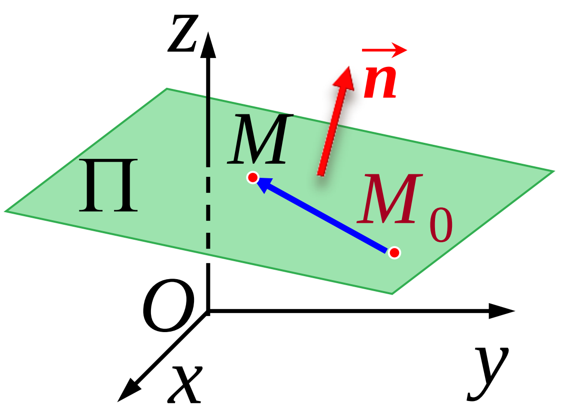
显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

一、平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$，求该平面 Π 的方程.

任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$, 则有



$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

故

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

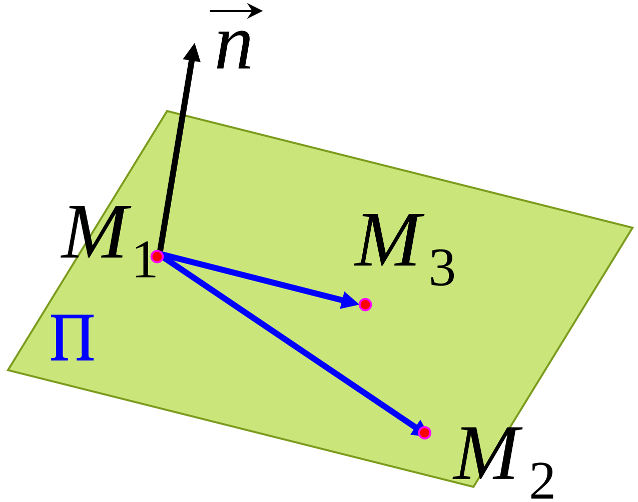
$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad ①$$

称①式为平面Π的点法式方程, 称 $\vec{n}$ 为平面 Π的法向量.

/*Normal Vector*/

例1. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.



解: 取该平面 Π 的法向量为

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 14\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k} = (14, 9, -1)$$

又 $M_1 \in \Pi$, 利用点法式得平面 Π 的方程

$$14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$$

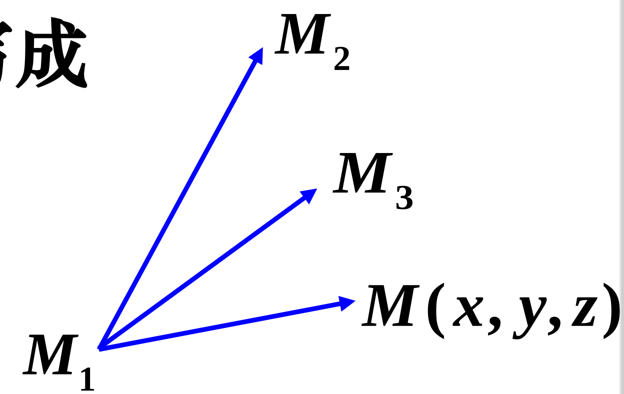
即

$$14x + 9y - z - 15 = 0$$

例1. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

说明: 此平面的**三点式方程**也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$



(三向量共面)

二、平面的三点式方程

一般情况: 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)\ (k=1,2,3)$

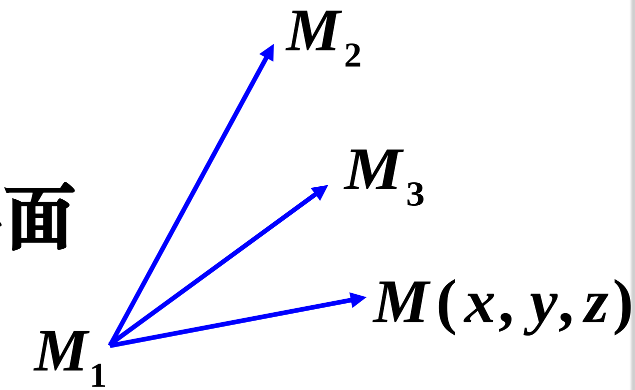
的平面方程(三点式方程)为

M_1, M_2, M_3, M 四点共面

$\rightleftarrows$ $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ 三向量共面

$\rightleftarrows$ $[\,\overrightarrow{M_1M}\ \overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}\,]=0$

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



(三向量共面)

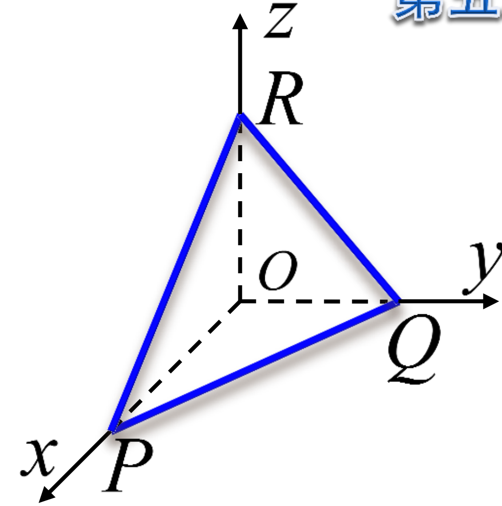
三、平面的截距式方程

当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0),\ Q(0,b,0),\ R(0,0,c)$$

时, 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\quad (a\,b\,c\neq 0)$$



此式称为平面的**截距式方程**. a,b,c称为平面的**截距**.

分析:利用三点式

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

四、平面的一般方程

设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)\ ②$$

任取一组满足上述方程的数 x_0, y_0, z_0, 则

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$

以上两式相减, 得平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

显然方程②与此点法式方程等价, 因此方程②的图形是法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$的平面, 此方程称为**平面的一般方程**.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

几种特殊情形:

- 当 $D = 0$ 时，$Ax + By + Cz = 0$ 表示通过原点的平面;
- 当 $A = 0$ 时，$By + Cz + D = 0$ 的法向量

$\vec{n} = (0, B, C) \perp \vec{i}$，表示 平行于 x 轴的平面;

- $Ax + Cz + D = 0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax + By + D = 0$ 表示 平行于 z 轴的平面;

缺谁 // 谁

- $Cz + D = 0$ 表示 垂直于 z 轴的平面;
- $Ax + D = 0$ 表示 垂直于 x 轴的平面;
- $By + D = 0$ 表示 垂直于 y 轴的平面;

仅谁 ⊥ 谁

例2. 求通过 x 轴和点$(4, -3, -1)$的平面方程.

解: 因平面通过 x 轴, 故 $A = D = 0$

设所求平面方程为

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

$$By + Cz = 0$$

代入已知点$(4, -3, -1)$得 $C = -3B$

注意 $B \neq 0$, 化简得所求平面方程

$$y - 3z = 0$$

例3. 用平面的一般式方程导出平面的截距式方程.

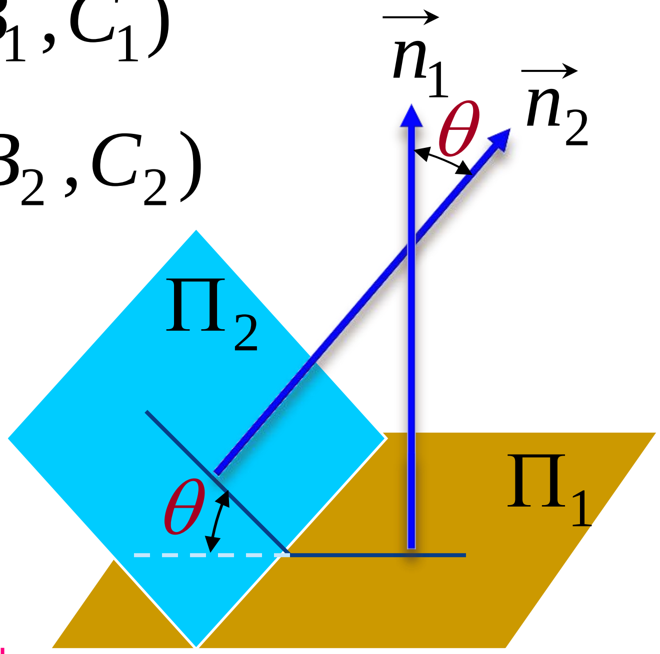
(自己练习)

五、两平面的夹角

两平面法向量的夹角(常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$



则两平面夹角θ的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

即

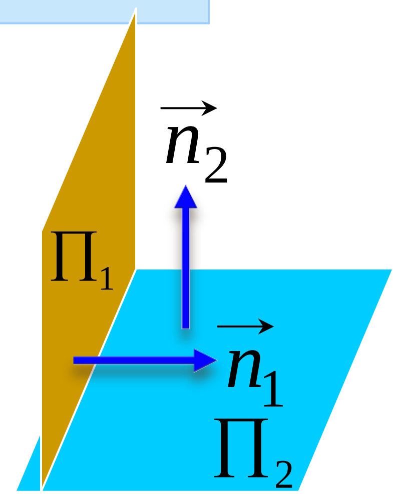
$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Pi_1:\ \vec{n}_1=(A_1,\ B_1,\ C_1)$$
$$\Pi_2:\ \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$$
$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论：

(1) $\Pi_1\perp\Pi_2 \rightleftarrows \vec{n}_1\perp\vec{n}_2$

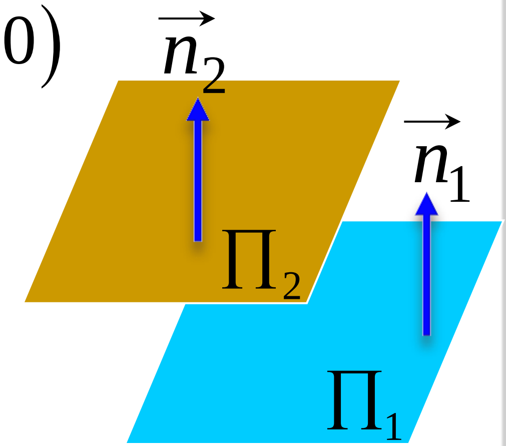
$$\rightleftarrows A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \rightleftarrows \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\rightleftarrows \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},\ (A_2B_2C_2\neq 0)$$

$$\rightleftarrows \vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0}$$

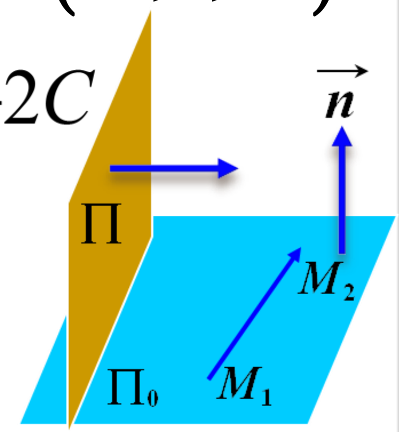


例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\prod: x+y+z=0$, 求其方程.

解1: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$ 又 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2} \Longrightarrow -A+0\cdot B-2C=0$, 即 $A=-2C$

$\vec{n}\perp\Pi$ 的法向量 $\Longrightarrow A+B+C=0$, 故



$$B=-(A+C)=C$$

因此有 $-2\cancel{C}(x-1)+\cancel{C}(y-1)+\cancel{C}(z-1)=0 \quad (C\neq 0)$

约去C, 得 $-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

例4. 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$和 $M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面Π: $x+y+z=0$, 求其方程.

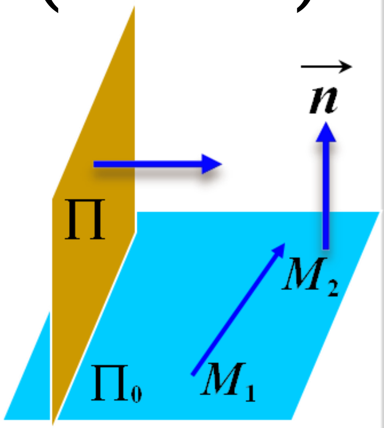
解2: 设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,则所求平面方程为 $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$ 又 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{M_1M_2}$

$\vec{n}\perp\Pi$ 的法向量

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(2,-1,-1)$$



故平面方程 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

例6 求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解: 已知二平面的法向量为

$$\vec{n}_1=(1,-1,1),\qquad \vec{n}_2=(3,2,-12)$$

取所求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$$

则所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$$

化简得 $\quad 2x+3y+z-6=0$

六、点到平面的距离

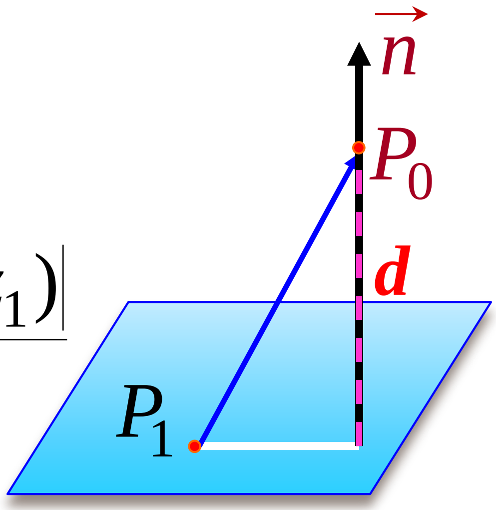
假设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到平面的距离 d.

分析: 记平面法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，在平面上取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，则 P_0 到平面的距离为

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\overrightarrow{P_1P_0}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$



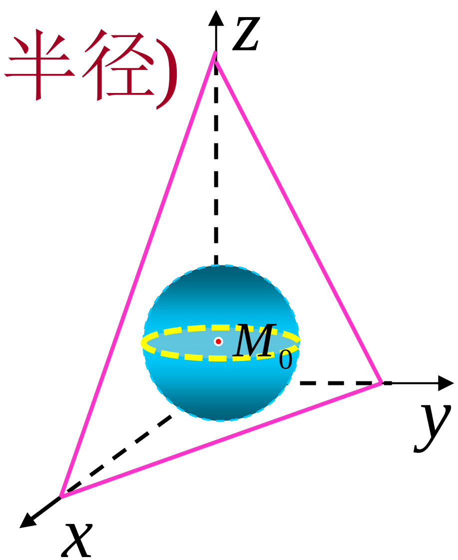
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(点到平面的距离公式)

例7. 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

解: 设球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,则它位于第一卦限,且

$$\frac{|x_0+y_0+z_0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=x_0=y_0=z_0=R(\text{半径})$$



$$\because x_0+y_0+z_0\le 1,\quad \therefore 1-3x_0=\sqrt{3}\,x_0$$

故 $$R=y_0=z_0=x_0=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

因此所求球面方程为

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

七、平行平面间的距离

平面 $\Pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0,$

平面 $\Pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0,$

$\vec{n} = (A, B, C)$

假设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 Π_1 上的一点,则有

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$$

则 P_0 到平面 Π_2 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(平行平面间的距离公式)

内容小结

1.平面基本方程

一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \qquad (abc\neq 0)$

三点式
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

2.平面与平面、点与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直：$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行：$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

2.平面与平面、点与平面之间的关系

夹角公式: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

点到平面距离公式:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

平行平面距离公式:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$