曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区 间	平面域	空间域	曲线弧	曲面域

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分} \\ \text{对坐标的曲线积分} \end{cases}$

曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分} \\ \text{对坐标的曲面积分} \end{cases}$

§7_3_1 对弧长的曲线积分

/* Line Integrals with respect to Arc length */

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

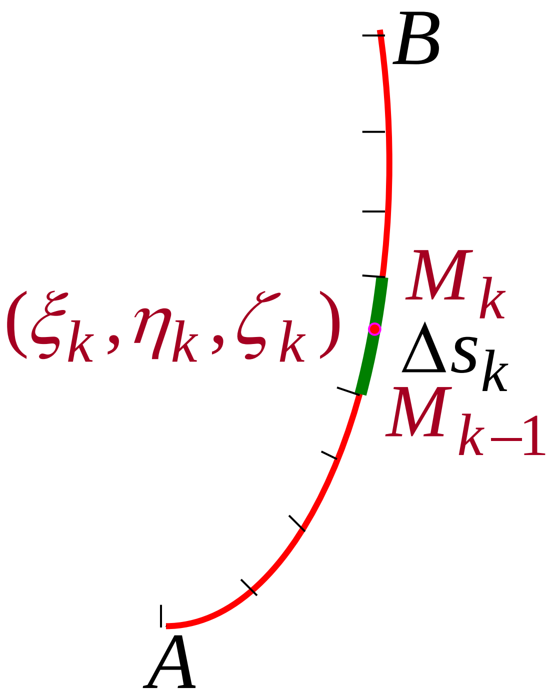
二、对弧长的曲线积分的计算法

一、对弧长的曲线积分的概念与性质

1.引例 (曲线形构件的质量)

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$,其线密度为$\rho(x,y,z)$,为计算此构件的质量,采用

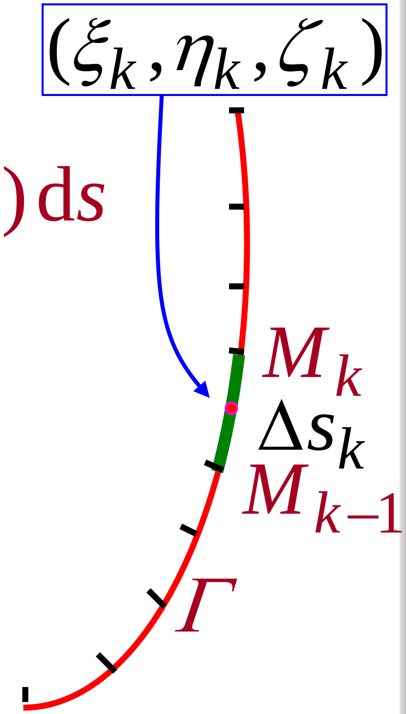
“分割, 近似, 求和, 取极限”



可得 $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2.定义

设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线，$f(x,y,z)$ 是定义在 Γ 上的一个有界函数，若通过对 Γ 的**任意分割**和对局部的**任意取点**，下列“乘积和式极限”



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

都存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上**对弧长的曲线积分**，或**第一类曲线积分**.

$f(x,y,z)$ 称为**被积函数**，Γ 称为**积分弧段**.

曲线形构件的质量 $M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

如果 L 是 xOy 面上的曲线弧, 则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$$

如果 L 是闭曲线, 则记为 $\oint_L f(x, y)\,\mathrm{d}s$.

思考:

(1) 若在 L 上 $f(x, y) \equiv 1$, 问 $\int_L \mathrm{d}s$ 表示什么?

(2) 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例?

否! 对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s \geq 0$, 但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可正可负.

3. 性质

(1) $$\int_{\Gamma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}s$$
$$=\alpha\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s+\beta\int_{\Gamma} g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(α,β 为常数)

(2) $$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(Γ 由 Γ_1 , Γ_2 组成)

(3) 设在 Γ 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s\le\int_{\Gamma} g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(4) $\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=l$ **(l 为曲线弧 Γ 的长度)**

二、对弧长的曲线积分的计算法

基本思路: 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算定积分

定理. 设 $f(x,y)$ 是定义在 L 上的连续函数, 其中

$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

$$\varphi'(t), \psi'(t) \text{在}[\alpha,\beta]\text{上连续}, \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \ne 0,$$

则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在, 且

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

证: 根据定义

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

设各分点对应参数为 $t_k\ (k=0,1,\cdots,n)$,

点 (ξ_k,η_k) 对应参数为 $\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$$\Delta s_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(\tau_k')+\psi'^2(\tau_k')}\,\Delta t_k\,,\quad \tau_k'\in[t_{k-1},t_k]$$

则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\underline{\tau_k'})+\psi'^2(\underline{\tau_k'})}\,\Delta t_k$$

注意 $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 连续

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k$$

因此

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

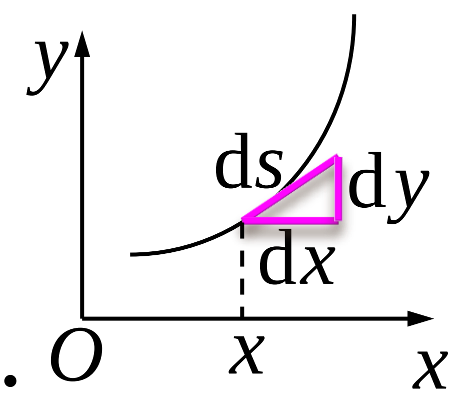
说明:

(1) $\because \Delta s_k>0,\ \therefore \Delta t_k>0$, **因此积分限必须满足** $\alpha<\beta$!

(2) 注意到

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



因此上述计算公式相当于“换元法”.

☆如果曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)\,(a\le x\le b)$,则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

☆如果曲线 L 的方程为 $x=\varphi(y)\,(c\le y\le d)$,则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_c^d f(\varphi(y),y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

☆如果方程为极坐标形式 $L: r=r(\theta)\,(\alpha\le\theta\le\beta)$, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

☆**推广:** **设空间曲线弧的参数方程为**

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$$

$\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 且

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)\neq 0,$$

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例1. 计算 $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O\,(0,0)$ 与点 $B\,(1,1)$ 之间的一段弧.

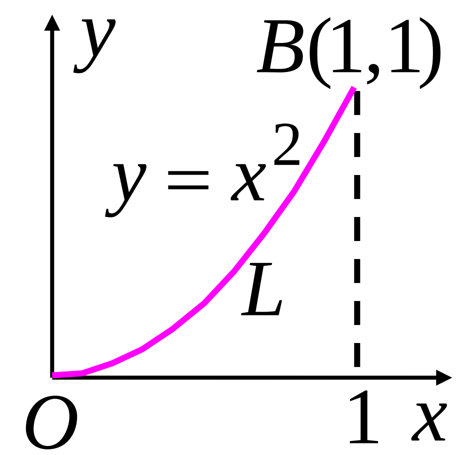
解: $\because L: y=x^2 \quad (0\le x\le 1)$

$$\therefore \int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x\cdot\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

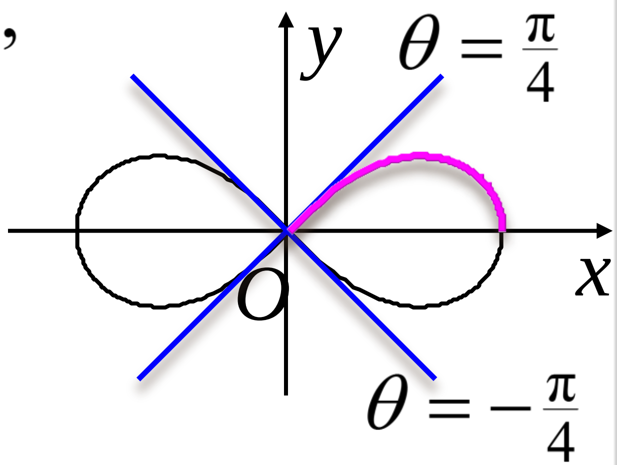


例2. 计算 $I=\int_L |x|\,\mathrm{d}s$，其中$L$为双纽线

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a>0)$$

解: 在极坐标系下 $L: r^2=a^2\cos 2\theta$，

它在第一象限部分为



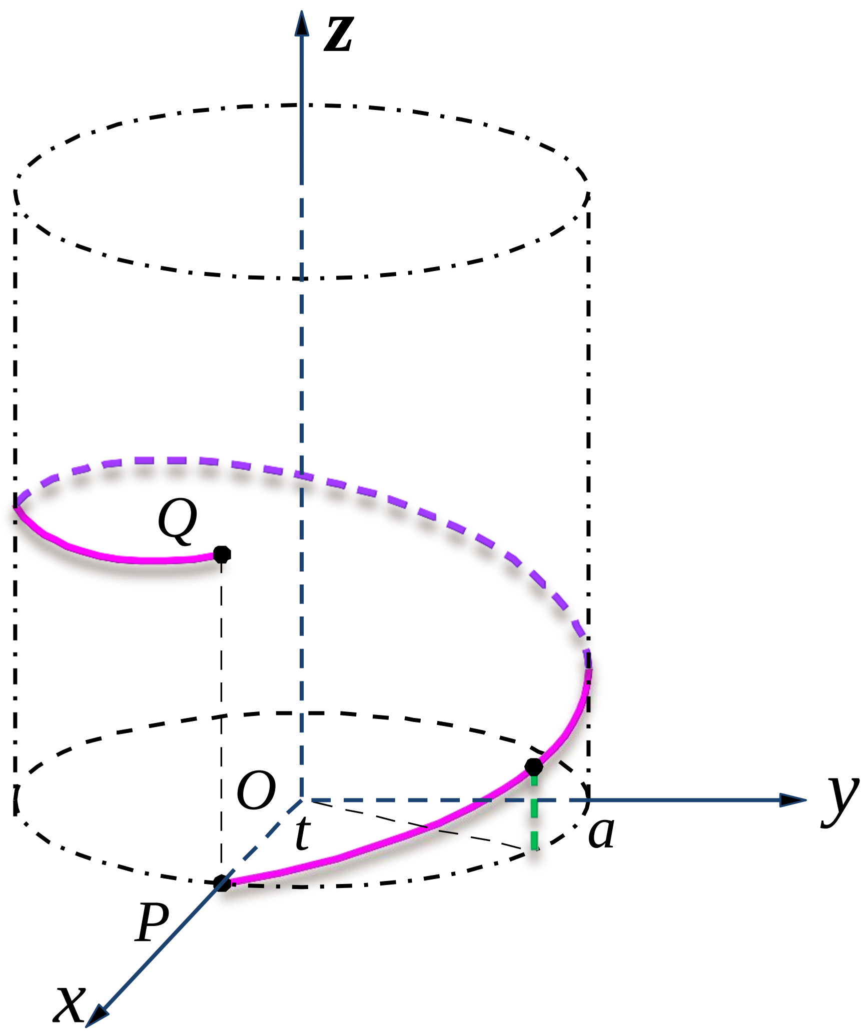
$$L_1: r=a\sqrt{\cos 2\theta}\quad(0\le\theta\le\pi/4)$$

利用对称性，得

$$I=4\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4} r\cos\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4} a^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\,a^2$$

例3. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$的一段弧.



例3. 计算曲线积分 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$ 的一段弧.

解: $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$

例4. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解法1 $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$, 化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\quad(0\le\theta\le 2\pi)$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\qquad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\theta=18\pi$$

例4. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面

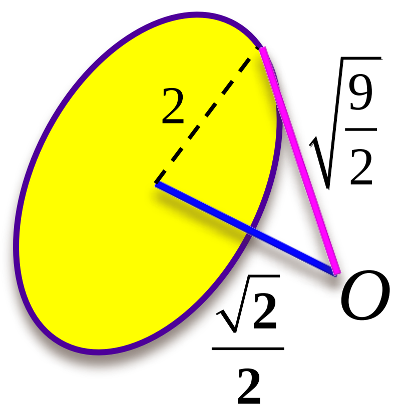
$$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2} \text{ 与平面 } x+z=1 \text{ 的交线.}$$

解法2　思路分析: (1) 显然Γ为一圆周.

(2) 过原点(0,0,0) 作平面$x+z=1$ 的垂线, 其垂足为圆周Γ的圆心, 原点(0,0,0) 到平面$x+z=1$ 的距离d 为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) Γ的半径为 $\sqrt{9/2-d^2}=2.$

原式$=\oint\frac{9}{2}\mathrm{d}s=18\pi$



例5. 计算 $\oint_{\Gamma} x^2 \, \mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解法1 将Γ化为参数方程求解(步骤略). Γ的参数方程

$$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

由第二个方程解得 $z=-x-y$, **代入第一个方程得**

$$x^2+y^2+(x+y)^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2=\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+\frac{y}{2})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}=1$$

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a\sin t \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}a\sin t \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}a\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

例5. 计算 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, 其中$\Gamma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解法1 将Γ化为参数方程求解(步骤略).

解法2 由对称性可知 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$

$$\therefore\quad \oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3$$

思考: 例5中 $\varGamma$ 改为 $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$，如何计算 $\oint_{\varGamma} x^2\,\mathrm{d}s$?

解: 令 $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1,\\ Z=z\end{cases}$ 则 $\varGamma:\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_{\varGamma} x^2\,\mathrm{d}s=\oint_{\varGamma}(X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\varGamma} X^2\,\mathrm{d}s+2\underbrace{\cancel{\oint_{\varGamma} X\,\mathrm{d}s}}_{=0}+\oint_{\varGamma}\mathrm{d}s$$

利用形心公式

$$=\frac{2}{3}\pi a^3+2\pi a$$

$$=2\pi a\left(\frac{1}{3}a^2+1\right)$$

$$\Gamma:\begin{cases} X^2+Y^2+Z^2=a^2 \\ X+Y+Z=0 \end{cases}$$

问题: $\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s$

解1: 由形心坐标为(0,0,0)，故 $\bar{X}=0$

而 $\bar{X}=\dfrac{\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s}{\oint_\Gamma \mathrm{d}s}=0$ 所以$\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s=0.$

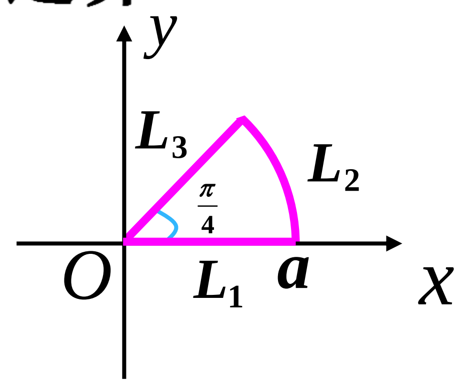
解2: 由Γ关于$X=Y=Z$对称，

所以$\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma Y\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma Z\,\mathrm{d}s$

$$\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma (X+Y+Z)\,\mathrm{d}s=0.$$

例6. 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, 其中$L$由 $x^2+y^2=a^2, y=0$ 及 $y=x$所围成的第一象限扇形弧的整个边界.

解: $L=L_1+L_2+L_3$



$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}$$

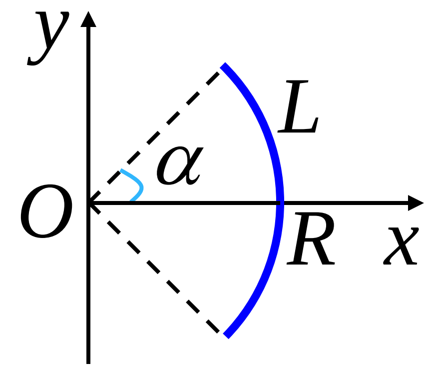
$$=\int_0^a e^x\sqrt{1+0}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$+\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1}\,dx$$

$$=e^a(2+\frac{\pi}{4}a)-2$$

例7. 计算半径为 R, 中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量 I (设线密度$\mu = 1$).

解: 建立坐标系如图, 则



$$I = \int_L y^2 \, \mathrm{d}s$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta$$

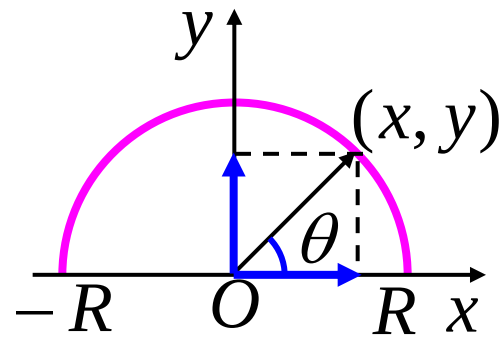
$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha}$$

$$= R^3 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)$$

例8. 有一半圆弧 $y = R\sin\theta,\ x = R\cos\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$，其线密度 $\mu = 2\theta$，求它对原点处单位质量质点的引力.

解: $$\mathrm{d}F_x = G\frac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\cos\theta = \frac{2G}{R}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\mu\,\mathrm{d}s}{R^2}\sin\theta = \frac{2G}{R}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$F_x = \frac{2G}{R}\int_0^{\pi}\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2G}{R}\left[\,\theta\sin\theta + \cos\theta\,\right]_0^{\pi} = -\frac{4G}{R}$$

$$F_y = \frac{2G}{R}\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2G}{R}\left[\,-\theta\cos\theta + \sin\theta\,\right]_0^{\pi} = \frac{2G\pi}{R}$$

故所求引力为 $\vec{F} = \left(-\frac{4G}{R},\ \frac{2G\pi}{R}\right)$

内容小结

1. 定义 $$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2. 性质

(1) $\int_\Gamma [\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\,\mathrm{d}s$ （α,β为常数）

$$=\alpha\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s+\beta\int_\Gamma g(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

内容小结

2. 性质

(2) $\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1, Γ_2 组成)

(3) 设在 Γ 上 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$, 则

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s \le \int_{\Gamma} g(x,y,z)\mathrm{d}s$$

(4) $\int_{\Gamma} \mathrm{d}s = l$ **(l 为曲线弧 Γ 的长度)**

3. 计算

- **对曲线** $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), (\alpha \le t \le \beta)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

- **对曲线** $L: y=\psi(x)\ (a \le x \le b)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

- **对曲线** $L: r=r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

* 利用对称性简化曲线积分的计算

空间曲线Γ上的对称性分析同理

- 曲线L关于 x 轴对称

若(1) $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$;

若(2) $f(x,-y)=f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$;

- 曲线L关于 y 轴对称

若(1) $f(-x,y)=-f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$;

若(2) $f(-x,y)=f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$;

- 曲线L关于 原点对称

若(1) $f(-x,-y)=-f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=0$;

若(2) $f(-x,-y)=f(x,y)$, 则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=2\int_{L_3} f(x,y)\mathrm{d}s$;

* 利用对称性简化曲线积分的计算

- 曲线L关于 $y = x$ 对称，则$\int_L f(x)\mathrm{d}s = \int_L f(y)\mathrm{d}s$;
- 曲线Γ关于 $x = y = z$ 对称

则$\int_\Gamma f(x)\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(y)\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}s.$