# 第二节 常数项级数的审敛准则

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

# 一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \ge 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**.

**定理 1.** 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{S_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 有界.

**证:** “$\Longrightarrow$” 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

“$\Longleftarrow$” $\because u_n \ge 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

**定理2 (比较审敛法)** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数,

且存在 $N \in Z^+$,对一切 $n > N$, 有 $u_n \le v_n$

则有 (1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

**证:** 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨

设对一切 $n \in Z^+$, 都有 $u_n \le v_n$,

令 $S_n$ 和 $\sigma_n$ 分别表示两个级数的部分和, 则有

$$S_n \le \sigma_n$$

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma_n \le M$

因此对一切 $n \in Z^+$, 有 $S_n \le \sigma_n \le M$

由定理 1 可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$ , 这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

**例1.** 讨论 $p$ 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ (常数 $p>0$) 的敛散性.

**解:** 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法可知 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若 $p>1$, 因为当 $n-1\le x\le n$ 时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

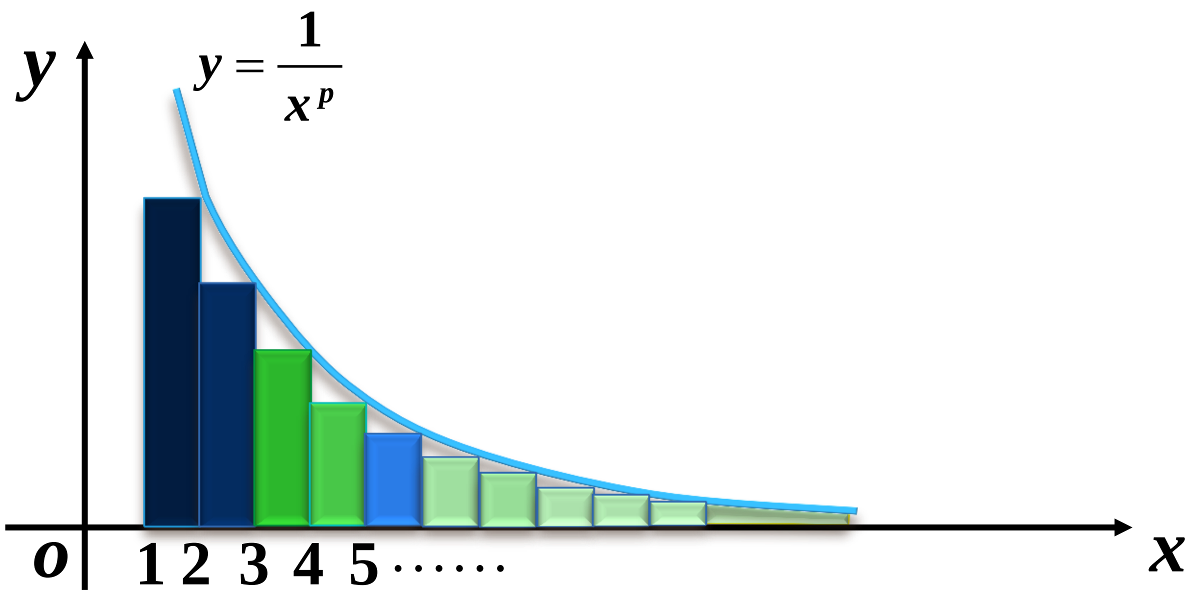
$$\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故强级数收敛, 由比较审敛法知 $p$ 级数收敛.

**注意:** $p>1$ 时 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}\le\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$

$$=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}$$



# 以下级数的敛散性一定要记住!!!

**1.等比级数** (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n, (a \neq 0)$$

$|q| < 1$ 时, 等比级数收敛;

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散.

**2. 调和级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

**3. $p$-级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, (p > 0)$ 当$p>1$时收敛.

当$p\leq1$时发散.

# P 级数与等比级数是比较判别法的两把尺子!!!

若存在 $N \in Z^{+}$, 对一切 $n \geq N$,

(1) $u_n \geq \dfrac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) $u_n \leq \dfrac{1}{n^p}$ $(p > 1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\Bigg\}$ 与 $p$ 级数比较

若存在 $N \in Z^{+}$ 和常数 $k$, 对一切 $n \geq N$.

(1) $u_n \geq k r^n$, $(r \geq 1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2) $u_n \leq k r^n$ $(r < 1)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\Bigg\}$ 与等比级数比较

例2. (1)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \ge \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散 .

例2. (2)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛 .

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}\le\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{n^{3/2}}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛

根据比较审敛法可知, 所给级数收敛 .

例2. (3)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$ 收敛.

证: 因为

$$\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛

根据比较审敛法可知, 所给级数收敛.

注: 用定理2判别级数敛散需放缩通项 $u_n$, 这有点困难.

**定理3. (比较审敛法的极限形式)** 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

**证:** 据极限定义，对 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in Z^+$，当 $n > N$ 时，

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \ (\, l \neq \infty\, )$$

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon \quad (n>N, l\neq\infty)$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}-l<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad l-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad v_n(l-\varepsilon)<u_n<v_n(l+\varepsilon)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \ (n > N, l \ne \infty)$$

(1) 当$0 < l < \infty$时, 取$\varepsilon < l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散;

(2) 当$l = 0$时, 利用 $u_n < (l+\varepsilon)v_n \ (n > N)$, 由定理2 知若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(3) 当$l = \infty$时, 存在 $N \in Z^{+}$, 当$n > N$时, $\dfrac{u_n}{v_n} > 1$, 即

$$u_n > v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

特别取 $v_n = \frac{1}{n^p}$，对正项级数 $\sum u_n$，可得如下结论：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时，$\sum u_n$ 也发散 .

**推论. (极限审敛法)** 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l,$$

则有 (1) 当 $0 \le l < \infty$ 且 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

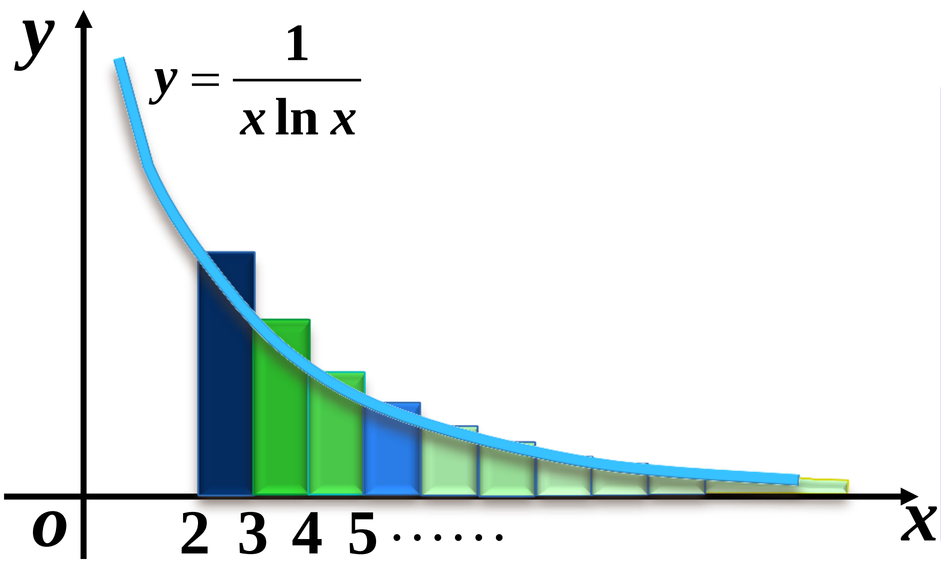
(2) 当 $0 < l \le \infty$ 且 $p \le 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(3) 当 $l = 0$ 且 $p = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性不定.

**例如** 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 是发散的.

**例如** 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 是发散的.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}\ge\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}\ \text{发散.}$$




***定理. (积分审敛法)**

若 $f(x)$ 为非负不增函数, 则

$$\sum_{n=k}^{\infty}f(n)\ \text{与}\ \int_k^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

具有相同敛散性.

例3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性 .

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]\Big/\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\Big/\frac{1}{n^2}=1$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$ 收敛.

**例5.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(1-\cos\frac{1}{n})$ 的敛散性 .

**解:** 首先 $\sqrt{n}(1-\cos\frac{1}{n})\geq 0$ 故级数为正项级数

$$\sqrt{n}(1-\cos\frac{1}{n}) \sim \sqrt{n}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\cos\frac{1}{n})/(\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}) = 1$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,

根据比较审敛法的极限形式知，原级数收敛.

# 比较审敛法的关键是与谁比较的问题!

要与其等价或同阶的无穷小为通项的级数比较,而这个问题常用到*泰勒公式.

再譬如 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2)$

$$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$e^{-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2=\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 比较

$$\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2)/\frac{1}{n^2}=1$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}}+e^{-\frac{1}{n}}-2)$ 收敛.

**例6.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$ 的敛散性 .

**解:** 首先 $\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}>0$ 故级数为正项级数

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\{\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}(\frac{1}{n})^3+o[(\frac{1}{n})^4]\}=\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o[\frac{1}{n^4}]$$

则 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})/(\frac{1}{n^3})=\frac{1}{6}$

根据比较审敛法的极限形式知，原级数收敛.

**思考题：** 判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$ 的敛散性.

**与谁比较?**

$$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]$$

$$=\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

**例7.** 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛？

**提示:** $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

**注意:** 反之不成立. **例如,**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散}.$$

## 定理4 . 比值审敛法 ( D’alembert 判别法)

**设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则**

**(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;**

**(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .**

**证:** **(1)** 当 $\rho<1$ 时, 取 $\varepsilon$ 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

知存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1}<(\rho+\varepsilon)u_n<(\rho+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots$$

$$<(\rho+\varepsilon)^{n-N}u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ **收敛 , 由比较审敛法可知** $\sum u_n$ **收敛 .**

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$时,必存在$N \in Z_+$ , $u_N \neq 0$, 当$n \geq N$ 时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$ , 所以级数发散.

**说明:** 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

**例如,** $p$ – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{ 级数收敛}; \\ p \leq 1, \text{ 级数发散}. \end{cases}$

**例8.** 判别下列级数的敛散性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n} \qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

**解** (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

**例8.** 判别下列级数的敛散性

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n} \qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$$

**解** (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=1$

比值审敛法失效，改用比较审敛法

由于 $\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2}$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 收敛.

**例8.** 判别下列级数的敛散性

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad (5)\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\ (x\geq 0).$$

**解** (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛.

## 例8. 判别下列级数的敛散性

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad (5)\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \ (x\ge 0).$$

解 (5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\Bigg/ n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{xn^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e}$$

故 $0\le x\le e$ 时级数收敛,

$x>e$ 时级数收敛.

**定理5. 根值审敛法 ( Cauchy判别法)**设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散.

**证明提示:** $\because \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, $\therefore$ 对任意给定的正数 ε

$(\varepsilon < |1-\rho|)$, 存在 $N \in \mathbf{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\rho - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon$$

即
$$(\rho-\varepsilon)^n < u_n < (\rho+\varepsilon)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho < 1 \Rightarrow \rho + \varepsilon < 1 \\ \rho > 1 \Rightarrow \rho - \varepsilon > 1 \end{array}}$$

分别利用上述不等式的左,右部分, 可推出结论正确.

**说明：** $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散．

**例如**，*p* 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ :

$$u_n=\frac{1}{n^p},\quad \sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1\ (n\to\infty)$$

$$\text{但}\begin{cases} p>1,\ \text{级数收敛；} \\ p\le 1,\ \text{级数发散．} \end{cases}$$

**思考：** 何时用比值判别法？何时用根值判别法？

当通项含**阶乘**时，常用**比值判别法**；

当通项含 $n$ **次幂**时，常用**根值判别法**.

**【例8(1)】** $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n!}\bigg/\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{n}\to 0,$$ 所以…

思考：何时用比值判别法？何时用根值判别法？

当通项含阶乘时,常用比值判别法;

当通项含$n$次幂时,常用根值判别法.

例9 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}(s>0,\alpha>0)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$

解(1) $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{n^s}}=\frac{\alpha}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^s}\to\alpha\ (n\to\infty)$

故 $0<\alpha<1$ 时级数收敛, $\alpha>1$ 时级数收敛.

$$\alpha=1\text{时}\begin{cases}0<s\le 1\text{时级数发散},\\ s>1\text{时级数收敛}.\end{cases}$$

**思考：** 何时用比值判别法？何时用根值判别法?

当通项含**阶乘**时,常用**比值判别法**;

当通项含**n次幂**时,常用**根值判别法**.

**例9** (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n^s}(s>0,\alpha>0)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$

**解**(2) $\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{3^n}}=\frac{1}{3}\sqrt[n]{3+(-1)^n}$

$$\frac{1}{3}\leftarrow\frac{1}{3}\sqrt[n]{2}\le \qquad \le\frac{1}{3}\sqrt[n]{4}\to\frac{1}{3}$$

但 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$ 不存在极限.

# 内 容 小 结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发 散

满足

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ 不定 用它法判别

比较审敛法 (最好用极限形式)

部分和极限 (定义法)

$\rho < 1$ 收 敛

$\rho > 1$ 发 散

# 二、交错级数及其审敛法

**定义** 设 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数**.

**定理6. ( Leibnitz 判别法 )** 若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $S \le u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1}.$$

**证：** $\because S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$

$$-u_{2n}\leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ **是单调递增有界数列，故** $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\leq u_1$

**又** $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

**故级数收敛于S, 且** $S\leq u_1$, $S_n$ 的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore\quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\leq u_{n+1}$$

# 用Leibnitz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ **收敛**

**上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？**

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

**发散** **收敛** **收敛**

# 三、绝对收敛与条件收敛

**定义:** 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**；

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

**例如：** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

**定理7.** 绝对收敛的级数一定收敛 .

**证:** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 , 令

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

显然 $v_n \geq 0$ , 且 $v_n \leq |u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

**定理8.** 任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 若满足如下之一,必绝对收敛.

(1) 存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 满足 $|u_n| \le v_n$

$(n = k, k+1, \cdots; k \in N^+)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho < 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho < 1$.

**注意** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho > 1$(或$\infty$)或者 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho > 1$(或$\infty$)时,

必有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$.

**例10.** 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{n+1}}{n!}$

**证:** (1) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}.$$

**(2) 令** $u_n=\dfrac{n^2}{e^n}$,

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}<1$$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$ **收敛，因此** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}$ **绝对收敛.**

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^{n+1}}{n!}$$

**(3) 令** $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^{n+1}}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e > 1,\ u_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\uparrow.$$

**则** $(-1)^n \dfrac{n^{n+1}}{n!}$ **不趋于0.**

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^{n+1}}{n!}$ **发散.**

绝对收敛级数与条件收敛级数具有完全不同的性质.

*定理9. 绝对收敛级数不因改变项的位置而改变其和.

*定理10. ( 绝对收敛级数的乘法 )

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 $S, \sigma$,

则对所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$

也绝对收敛, 其和为 $S\sigma$.

说明:需注意条件收敛级数不具有这两条性质.

# 小　　结

<table>
<tr><th></th><th>正 项 级 数</th><th>任意项级数</th></tr>
<tr><td rowspan="2">审敛法</td><td colspan="2">1. 若 $S_n \to S$ ,则级数收敛;<br>2. 当 $n \to \infty$ , $u_n \not\to 0$, 则级数发散;<br>3.按基本性质;</td></tr>
<tr><td>4.充要条件<br>5.比较法<br>6.比值法<br>7.根值法</td><td>4.绝对收敛<br>5.交错级数<br>(莱布尼茨定理)</td></tr>
</table>