空间曲线及其方程

*/*Space Curves*/*

一、空间曲线的一般方程

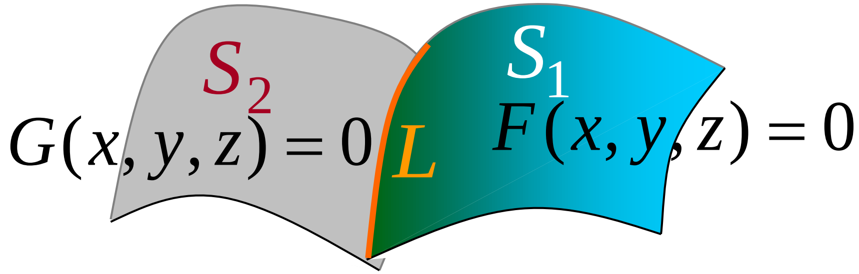
二、空间曲线的参数方程

三、空间曲线在坐标面上的投影

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线, 其一般方程为方程组

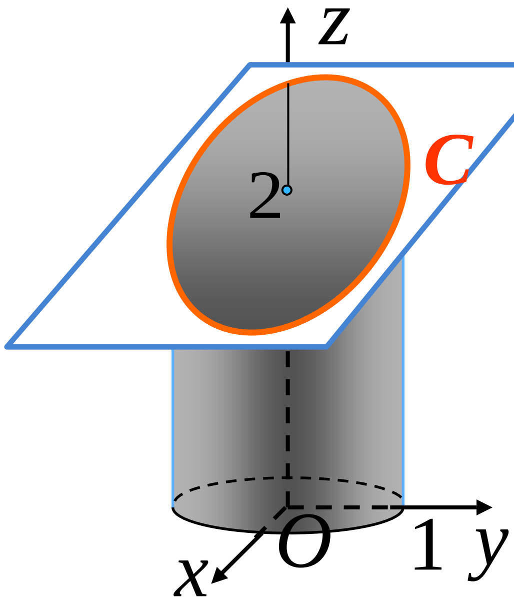
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



例1. 方程组

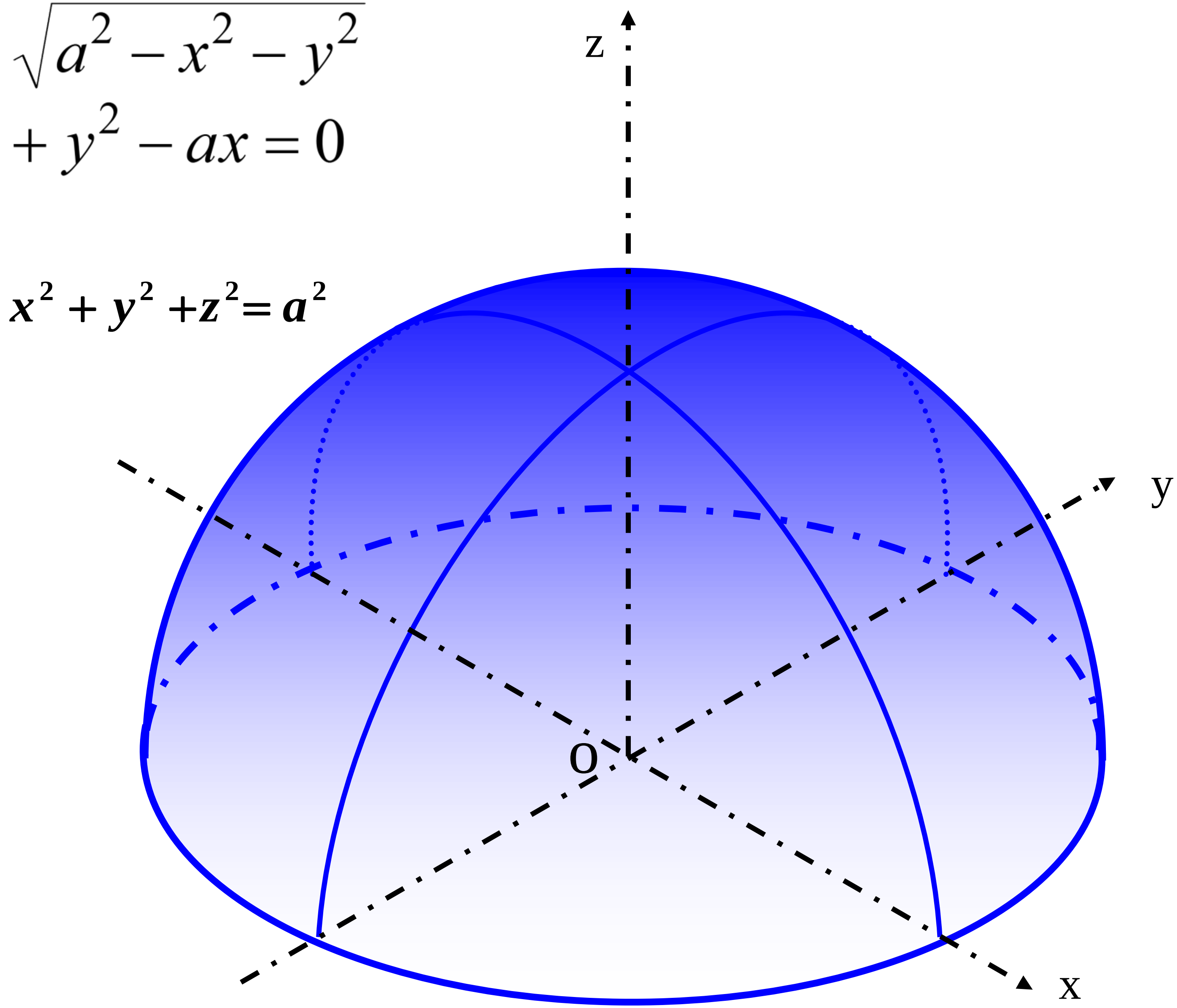
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

表示圆柱面与平面的交线 C.



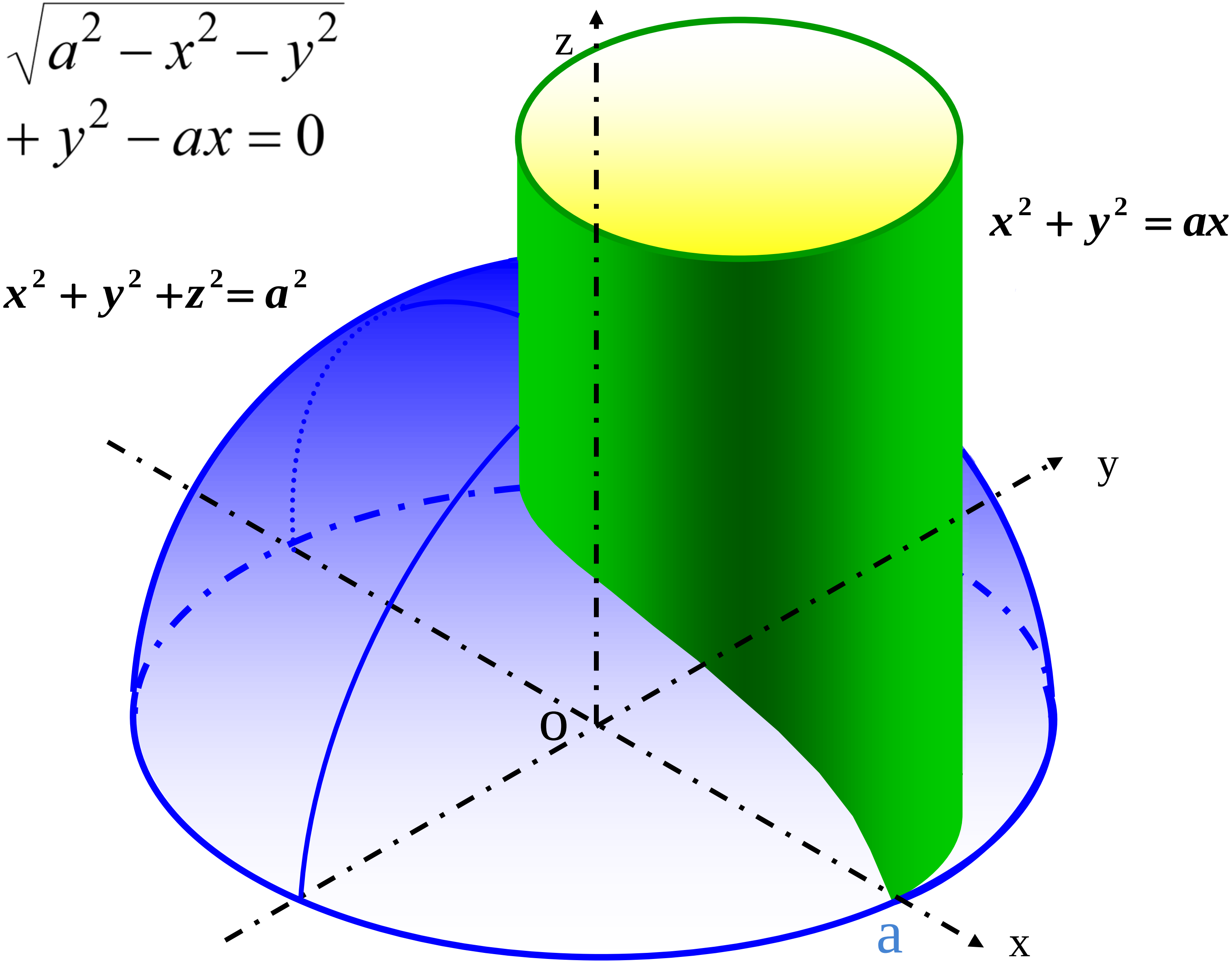
例2. 方程表示什么曲线？

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$



例2. 方程表示什么曲线？

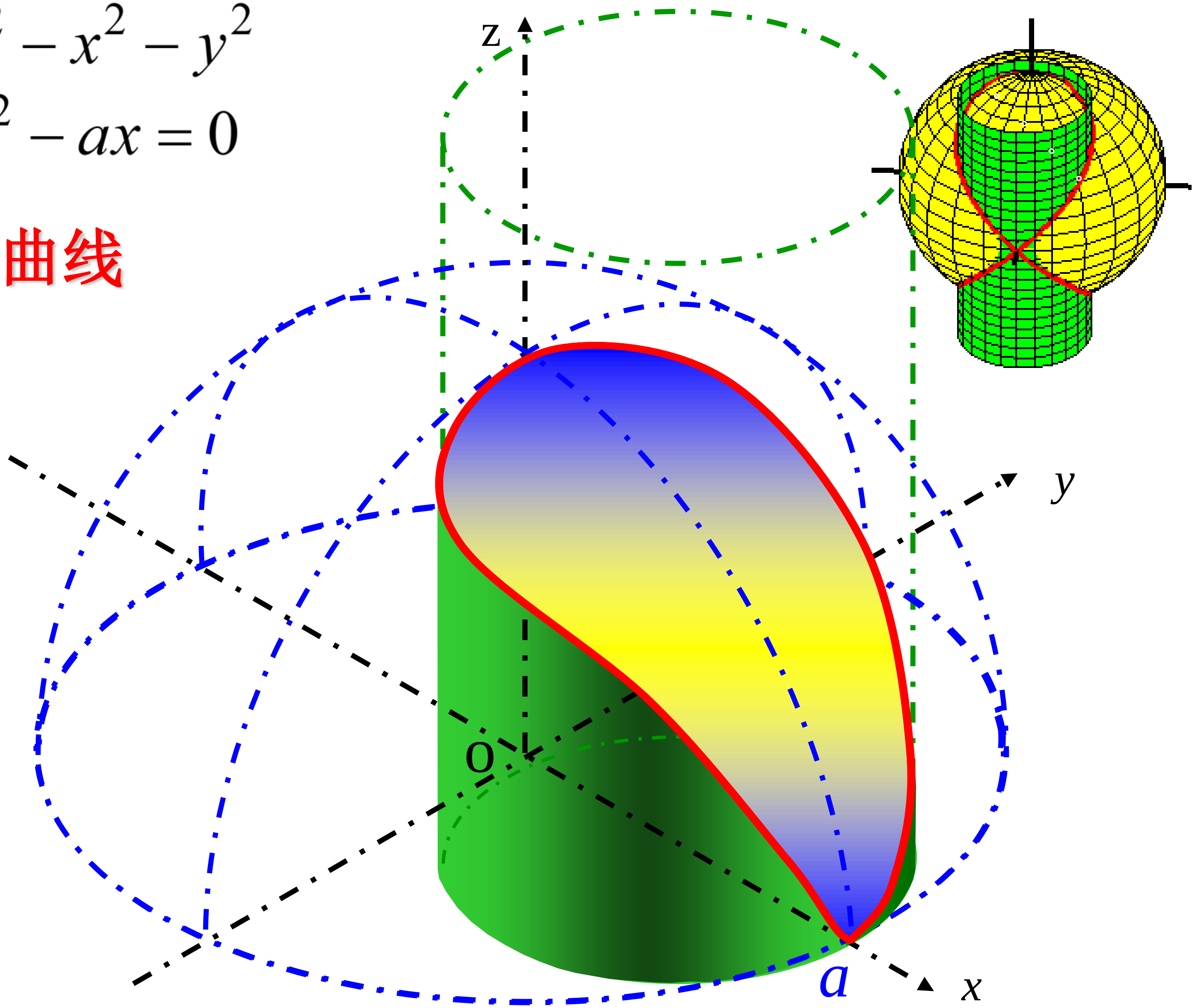
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$



例2. 方程表示什么曲线？

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

维望尼曲线



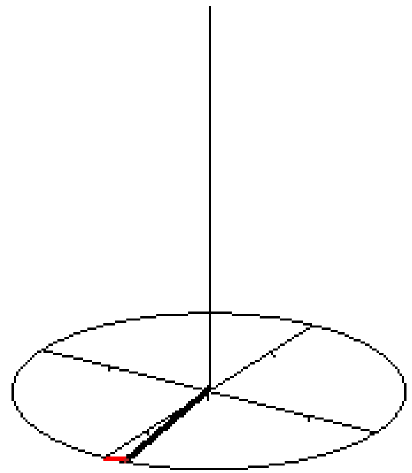
二、空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点 $M(x, y, z)$ 的坐标表示成参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的**参数方程**.

例3 空间曲线——圆柱螺(旋)线



例3 空间曲线——圆柱螺

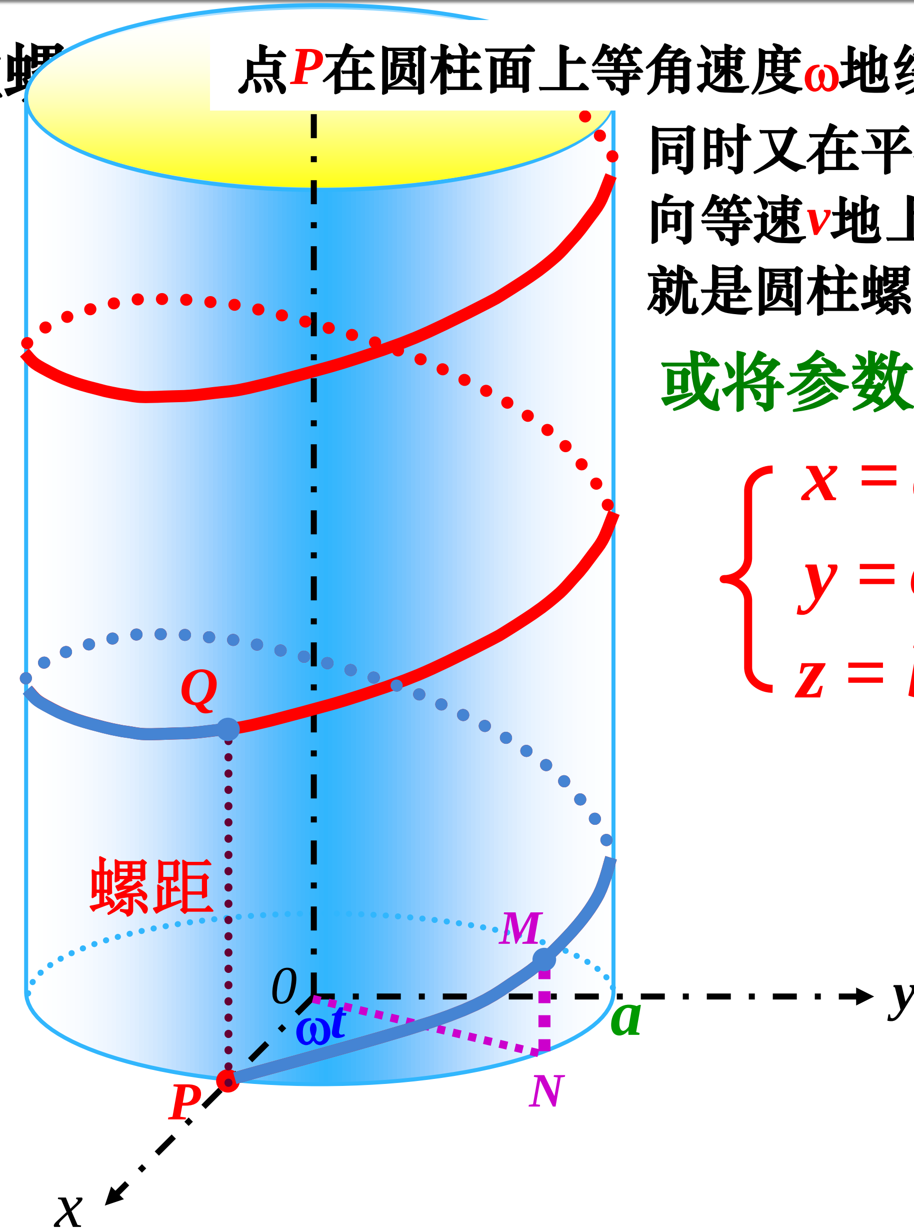
点P在圆柱面上等角速度ω地绕z轴旋转；同时又在平行于z轴的方向等速v地上升. 其轨迹就是圆柱螺线.

圆柱面 $x^2+y^2=a^2$

$M(x,y,z)$

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

（移动及转动都是等速进行，所以z与t成正比。）



或将参数方程写成

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

当 $\theta=\omega t$ 从 $0 \to 2\pi$，

螺线从点$P \to Q$

$$b=\frac{v}{\omega},\ h=\left|\overline{PQ}\right|=2\pi b$$

例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

解: **(1)** 根据第一方程引入参数, 得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

$$(2)\ \begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

解: (2) 将第二方程变形为 $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, 故所求为

$$\begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t} \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解: 由第二个方程解得 $z=-x-y$, 代入第一个方程得

$$x^2+y^2+(x+y)^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2=\frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+\frac{y}{2})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}=1$$

例4. 将下列曲线化为参数方程表示:

(3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

解: $$\frac{(x+\frac{y}{2})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}=1$$

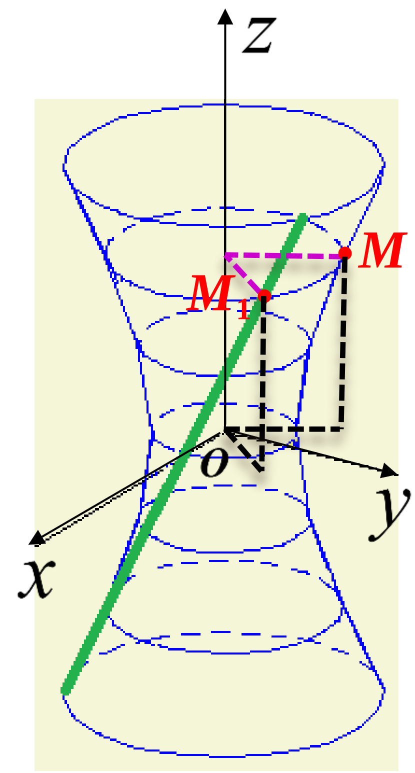
$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t-\frac{\sqrt{6}}{6}a\sin t \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}a\sin t \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}a\sin t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi]$$

*例5. 求空间曲线 Γ $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 绕 z 轴旋转时的旋转曲面方程.

解: 任取点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)) \in \Gamma$, 点 M_1 绕 z 轴旋转到点 $M(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} x^2+y^2=\varphi^2(t)+\psi^2(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$,即

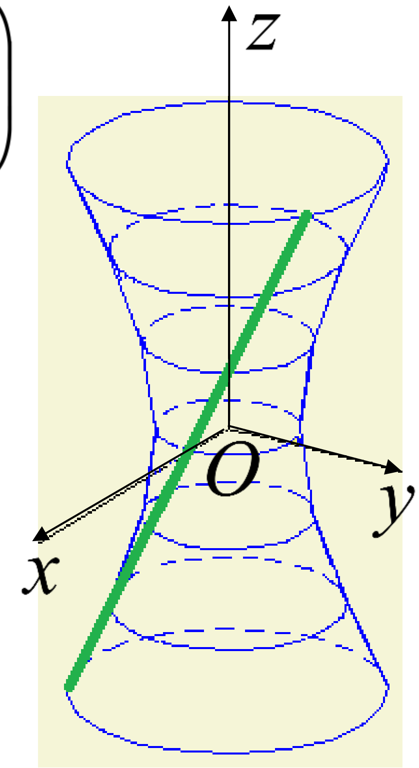
$$\begin{cases} x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases} \begin{pmatrix} \alpha\le t\le\beta \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{pmatrix}$$



这就是旋转曲面满足的参数方程.

***例6.** 直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\,\cos\theta \\ y=\sqrt{1+t^2}\,\sin\theta \\ z=2t \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\infty<t<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{pmatrix}$$



消去 t 和 θ, 得旋转曲面方程为

$$4(x^2+y^2)-z^2=4$$

空间图形参数方程总结

1、空间曲线的参数方程含一个参数, 形如

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

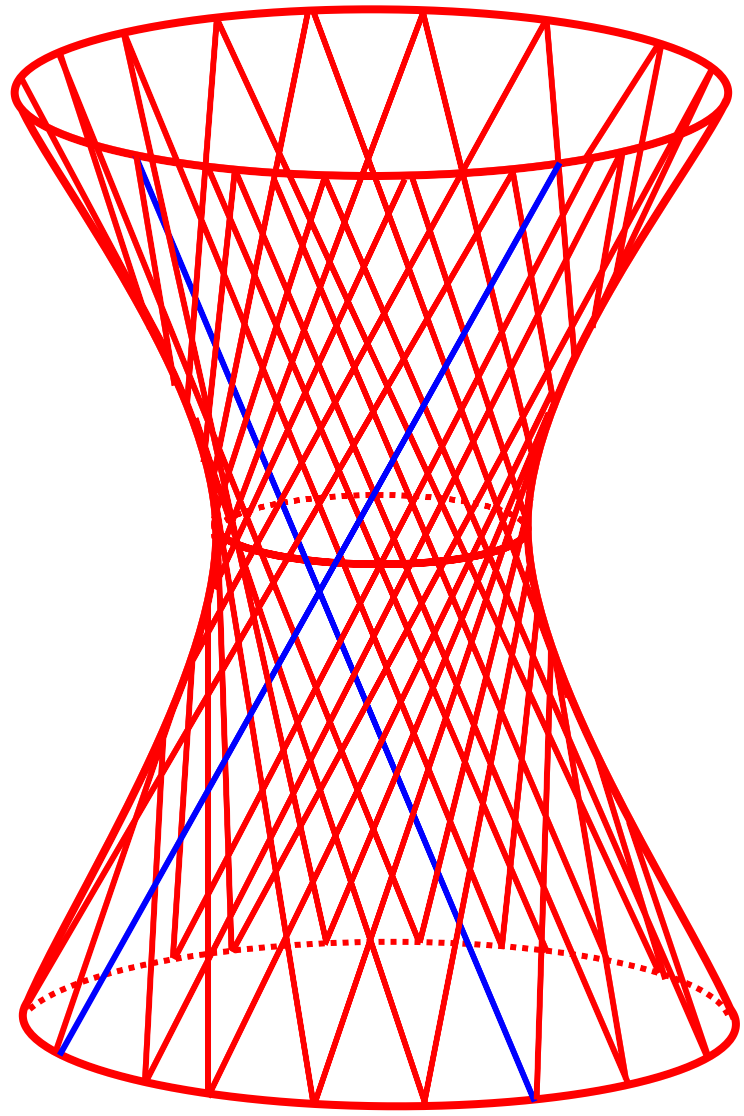
2、空间曲面的参数方程含两个参数, 形如

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

注：单叶双曲面是直纹面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

含两个直母线系



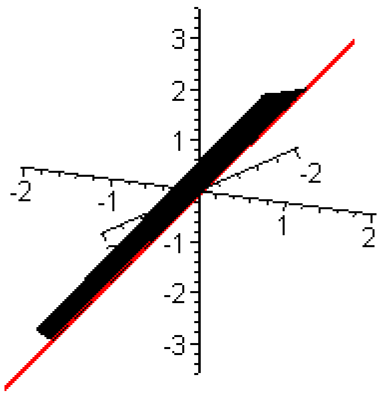
注：单叶双曲面是直纹面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

含两个直母线系

直纹面在建筑学上有意义

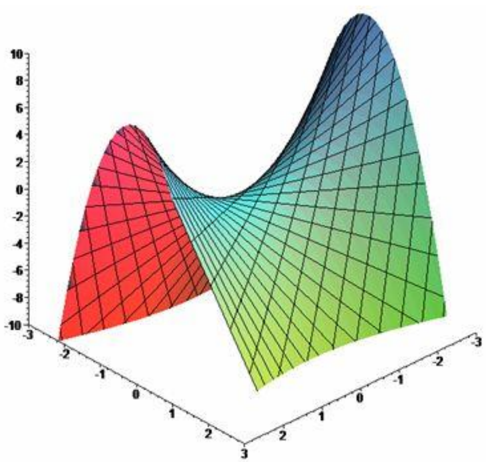
例如，储水塔、电视塔等建筑都有用这种结构的。

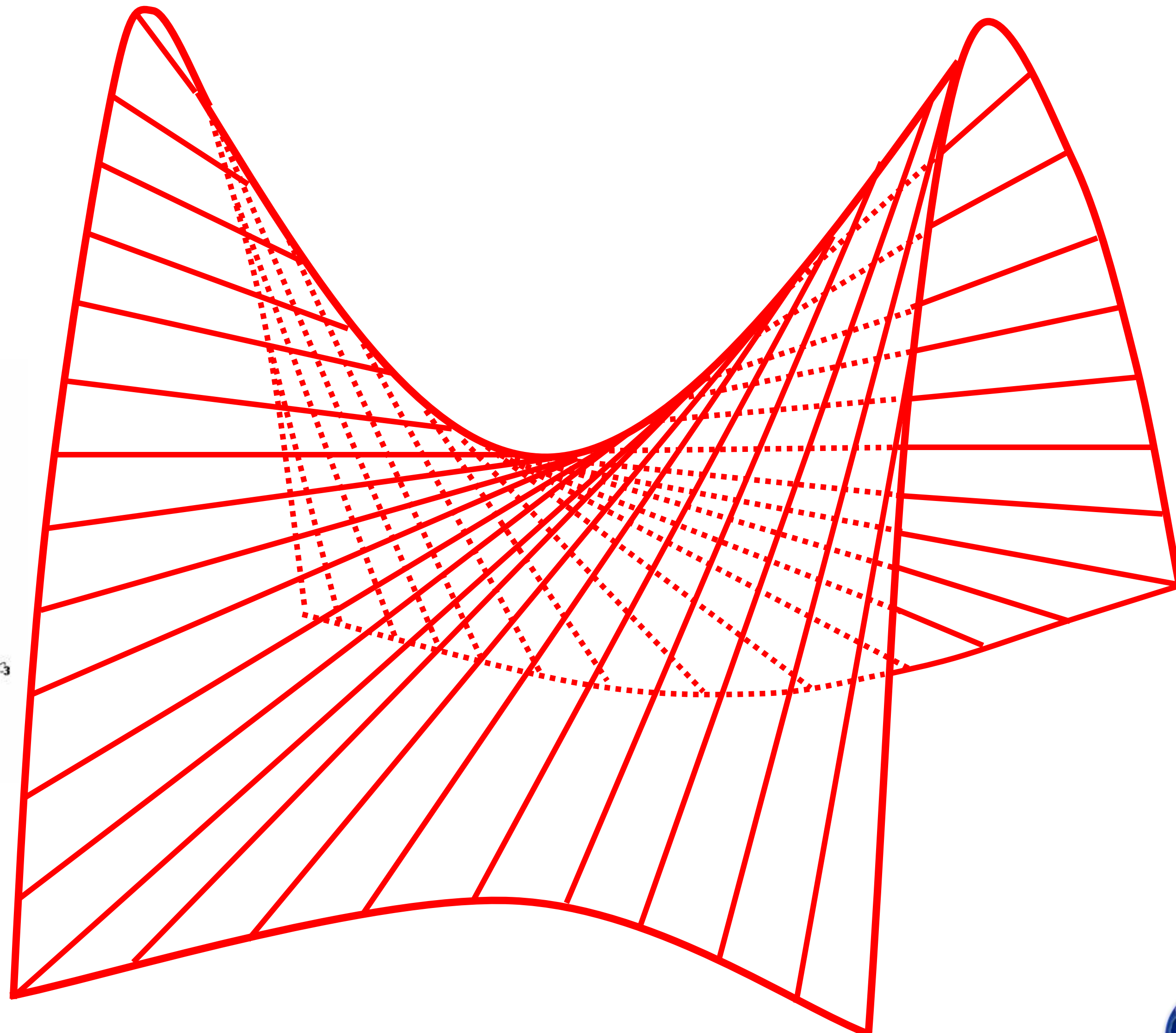


注：双曲抛物面(马鞍面)是直纹面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

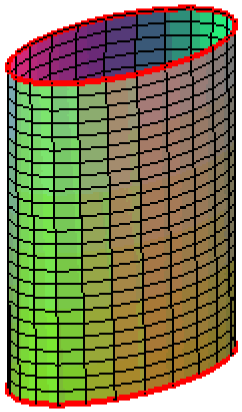
含两个直母线系





注：直纹面

椭圆柱面 → 单页双曲面 → 椭圆椎面



***例7.** xOz 面上的**半圆周** $\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = 0 \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$

绕 z 轴旋转所得旋转曲面 (即**球面**) 方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

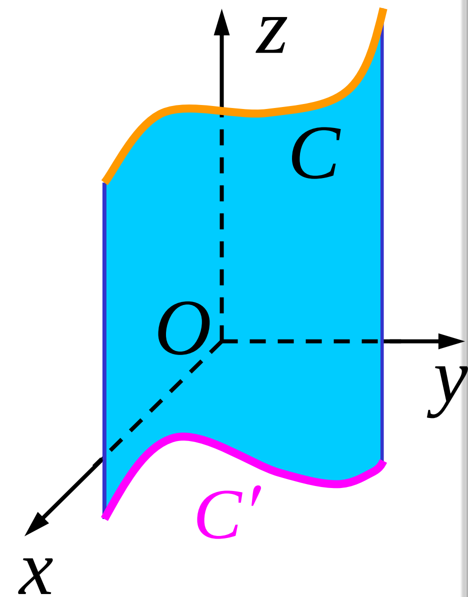
三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线C的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得投影柱面 $H(x,y)=0,$

则C在xOy 面上的投影曲线 C'为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$



消去 x 得C 在yOz 面上的投影曲线方程

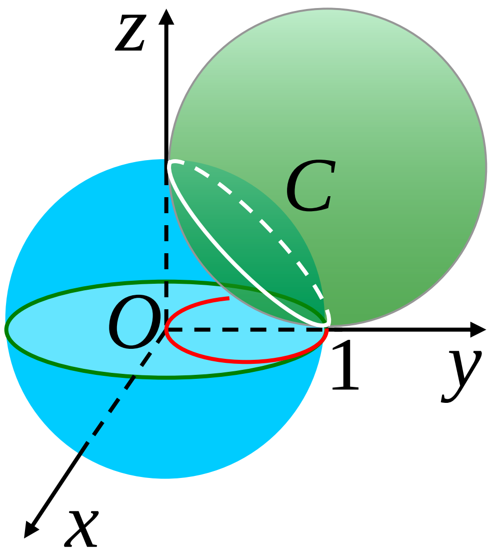
$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

消去y 得C在zOx 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例8. $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$

在xOy面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$



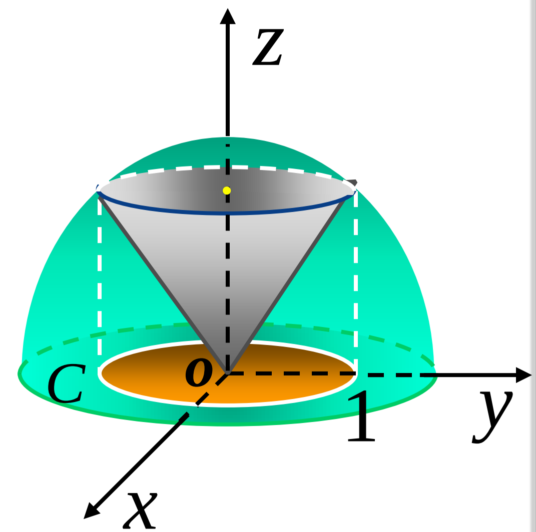
提示：将曲线C的两个方程相减并化简，得

$$y+z=1$$

再以$z=1-y$代入曲线C的两个方程之一即可.

例9 上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围的立体在 xOy 面上的投影区域为：二者交线在 xOy 面上的投影曲线所围之域.

二者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$



在 xOy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

所围圆域 $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$

内容小结

- 空间曲线 ⟷ 三元方程组

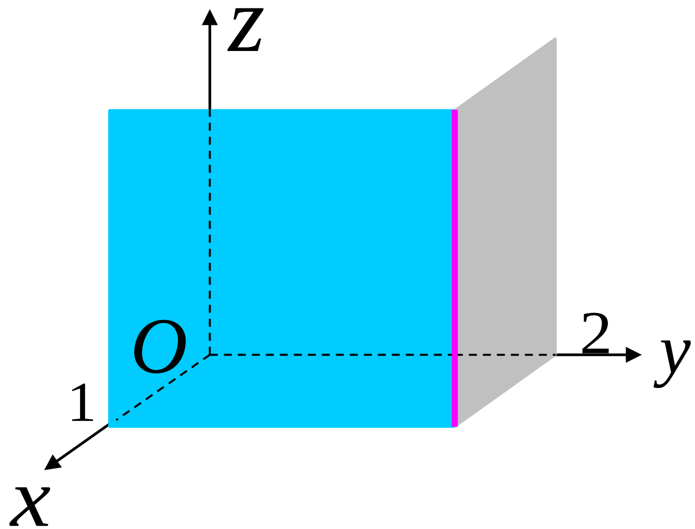
  或参数方程(如, 圆柱螺线)

- 求投影曲线

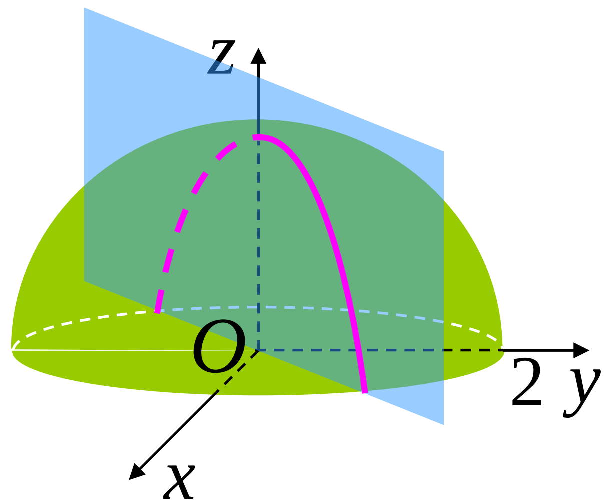
思考与练习

展示空间图形

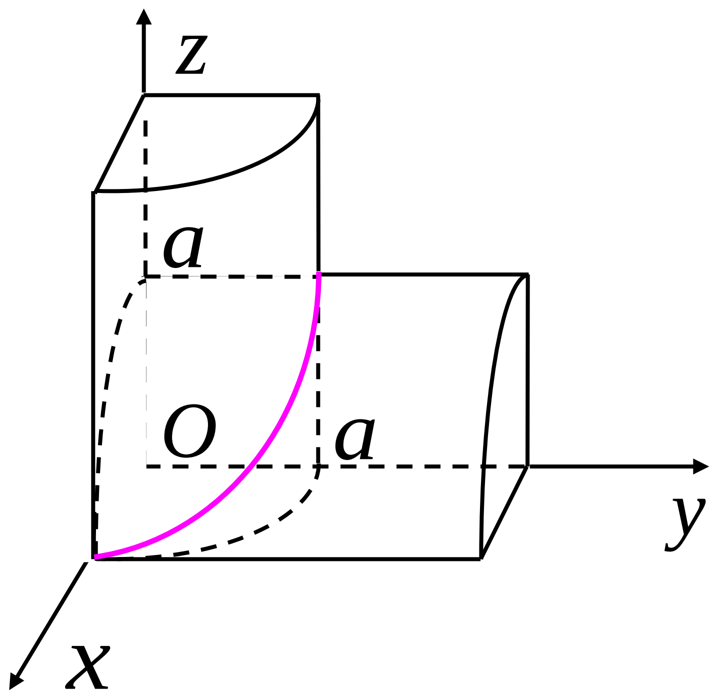
(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$



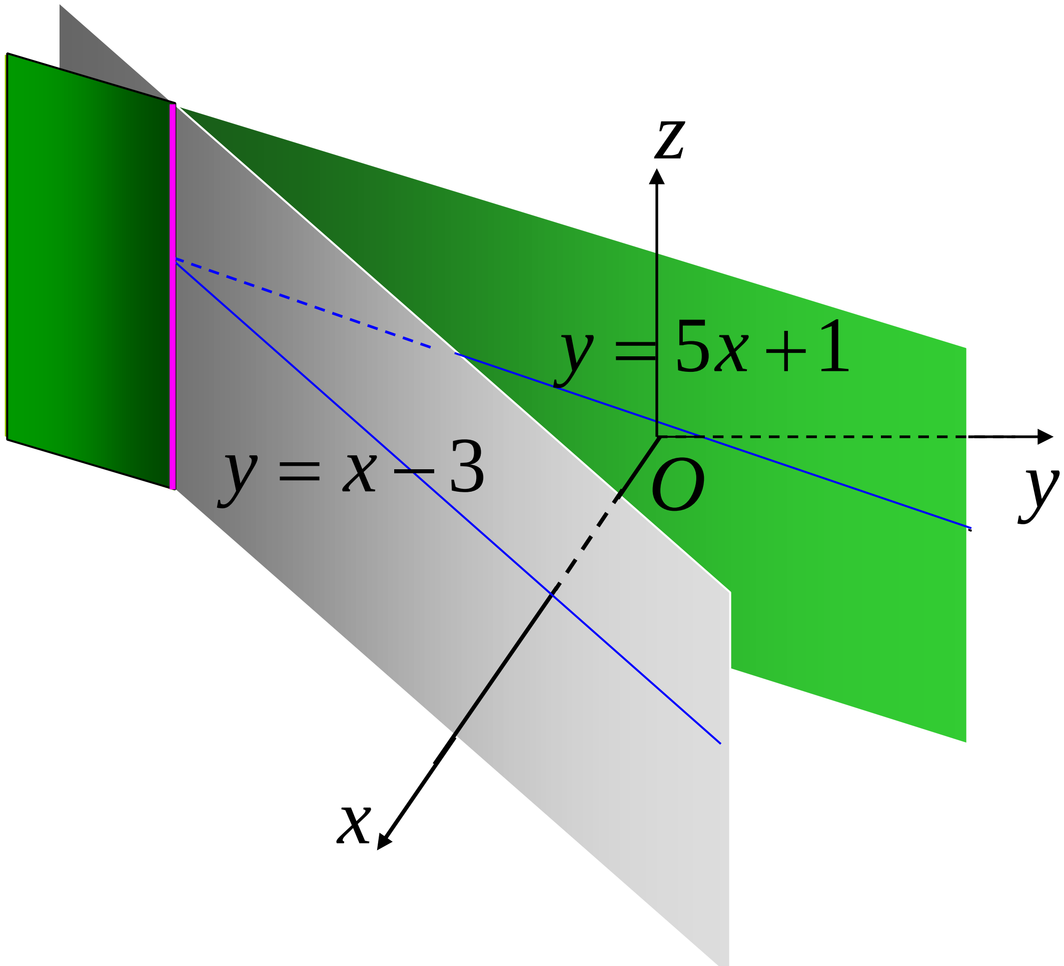
(2) $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ y - x = 0 \end{cases}$



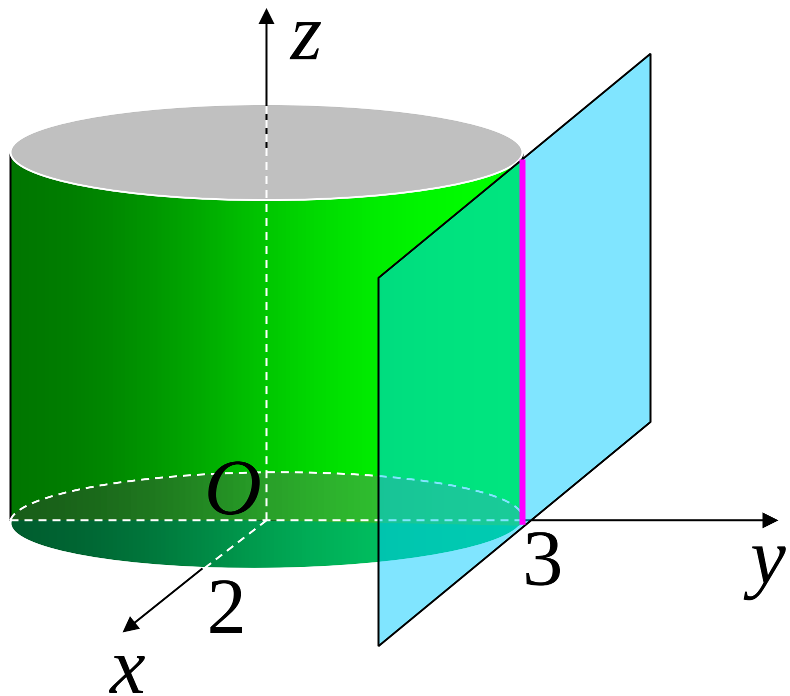
(3) $\begin{cases} \underline{x^2+z^2=a^2} \\ \underline{x^2+y^2=a^2} \end{cases}$



(4) $\begin{cases} y = 5x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$



(5) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$

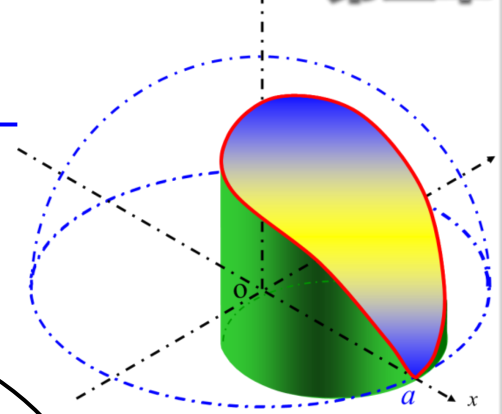


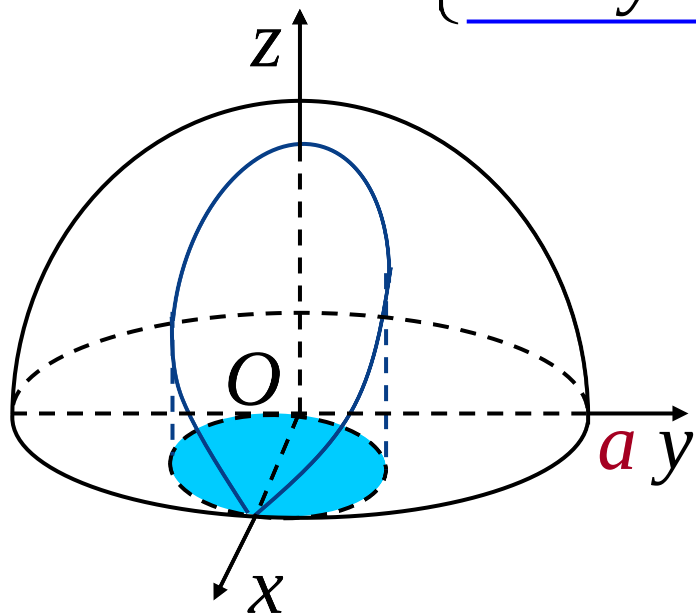
思考： 对平面 $y=b$

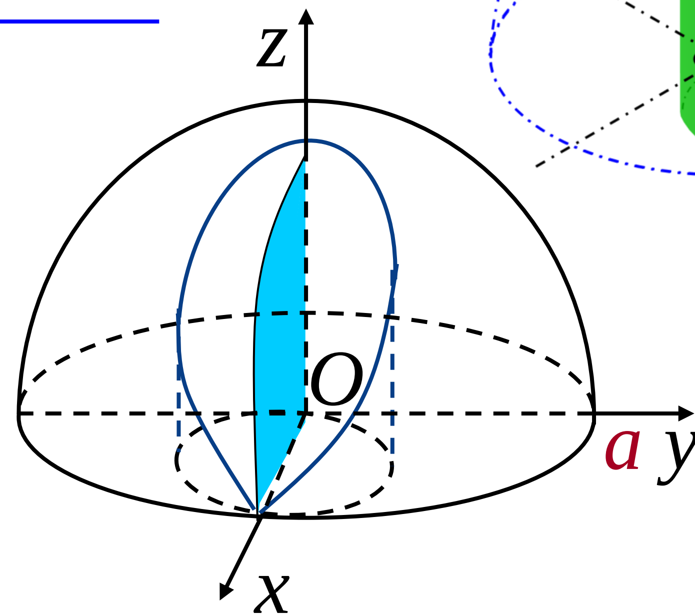
当 $|b|<3$ 时, 交线情况如何?

当 $|b|>3$ 时, 交线情况如何?

(6) $\begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 \le ax \end{cases}$







$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le ax \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 \le a^2 \quad (x \ge 0,\ z \ge 0) \\ y = 0 \end{cases}$$

练习题 求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转的曲面与平面 $x + y + z = 1$ 的交线在 xOy 平面的投影曲线方程.

解: $\because$ 旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2$, 它与所给平面的

交线为
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

此曲线向 xOy 面的投影柱面方程为

$$x + y + x^2 + y^2 = 1$$

此曲线在 xOy 面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$