第七章 重积分

/* Double Integrals */

多元函数积分学：重积分、曲线积分、曲面积分

第一节 二重积分的概念、计算和应用

第二节 三重积分的概念、计算和应用

第三节 对弧长曲线积分与对坐标曲线积分

第四节 对面积曲面积分与对坐标曲面积分

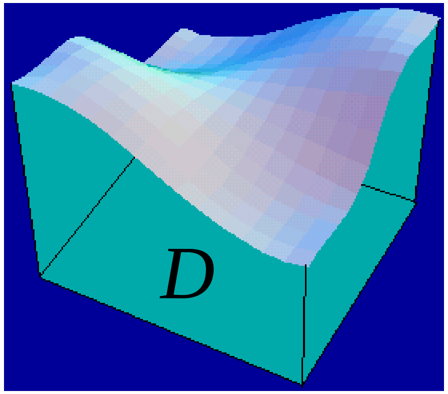
第五节 格林公式、高斯公式与斯托克斯公式

第一节 二重积分的概念、计算和应用

一、二重积分的概念与性质

问题的提出

$$z = f(x,y)$$



1.曲顶柱体的体积

给定曲顶柱体:

底： xoy 面上的闭区域 D

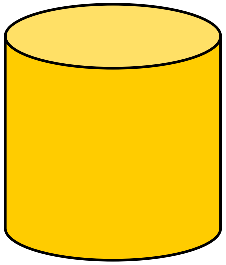
顶： 连续曲面 $z = f(x,y) \geq 0$

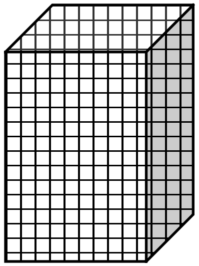
侧面：以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面

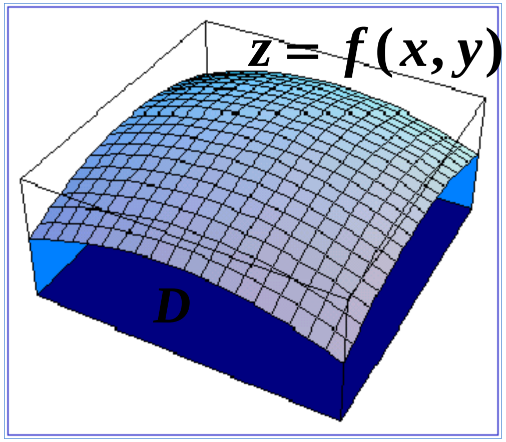
求其体积.

问题： 如何计算曲顶柱体的体积?

问题： 如何计算曲顶柱体的体积？







平顶柱体体积=底面积×高　曲顶柱体体积=？

特点：平顶.　　　特点：曲顶.

解决问题的思路：类似定积分解决问题的思想：

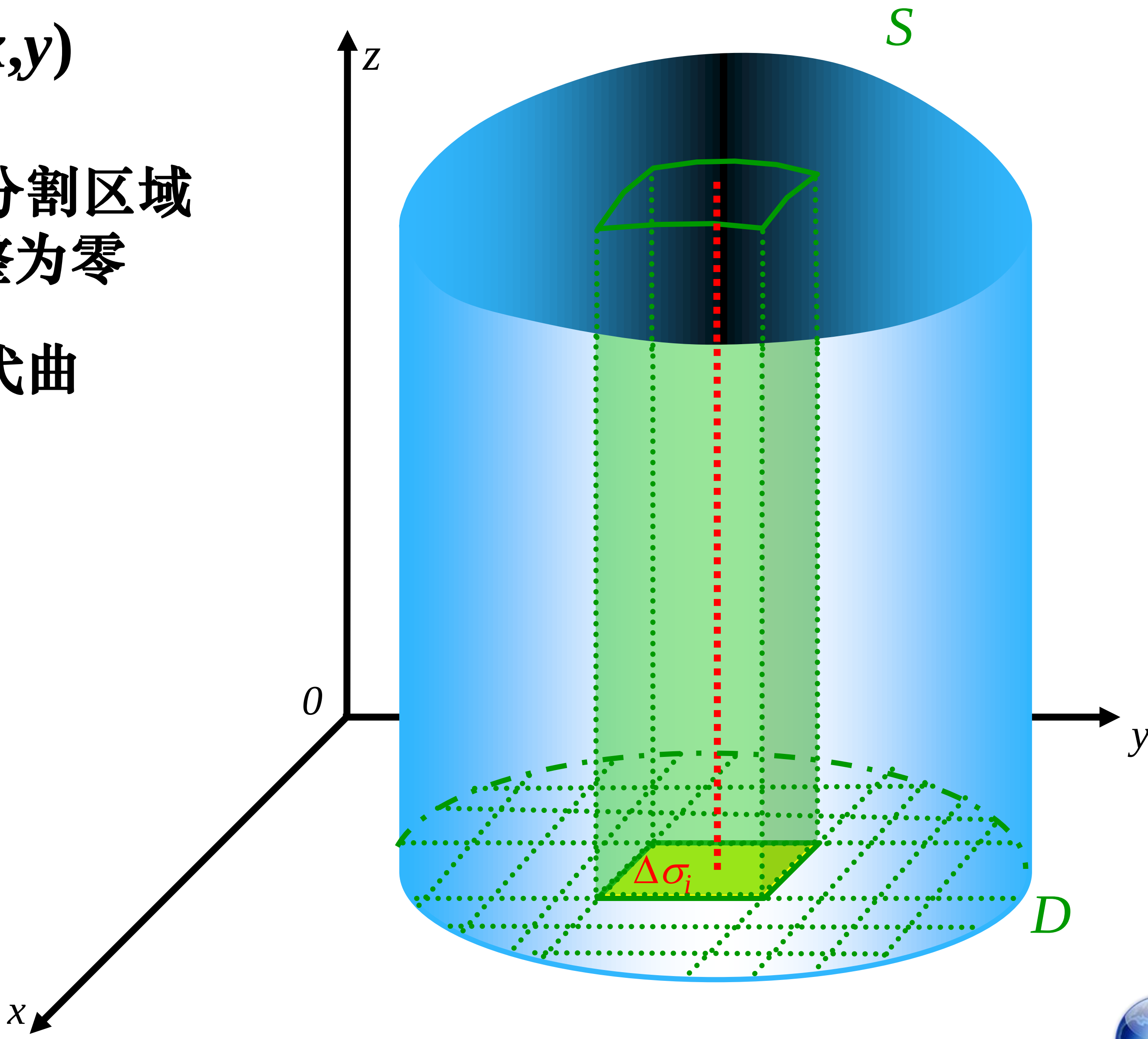
"分割，近似，求和，取极限"　元素法

1．曲顶柱体的体积

S： $z = f(x,y)$

(1)分割：任意分割区域 D，化整为零

(2)近似：以平代曲



1．曲顶柱体的体积

$$S: z = f(x,y)$$

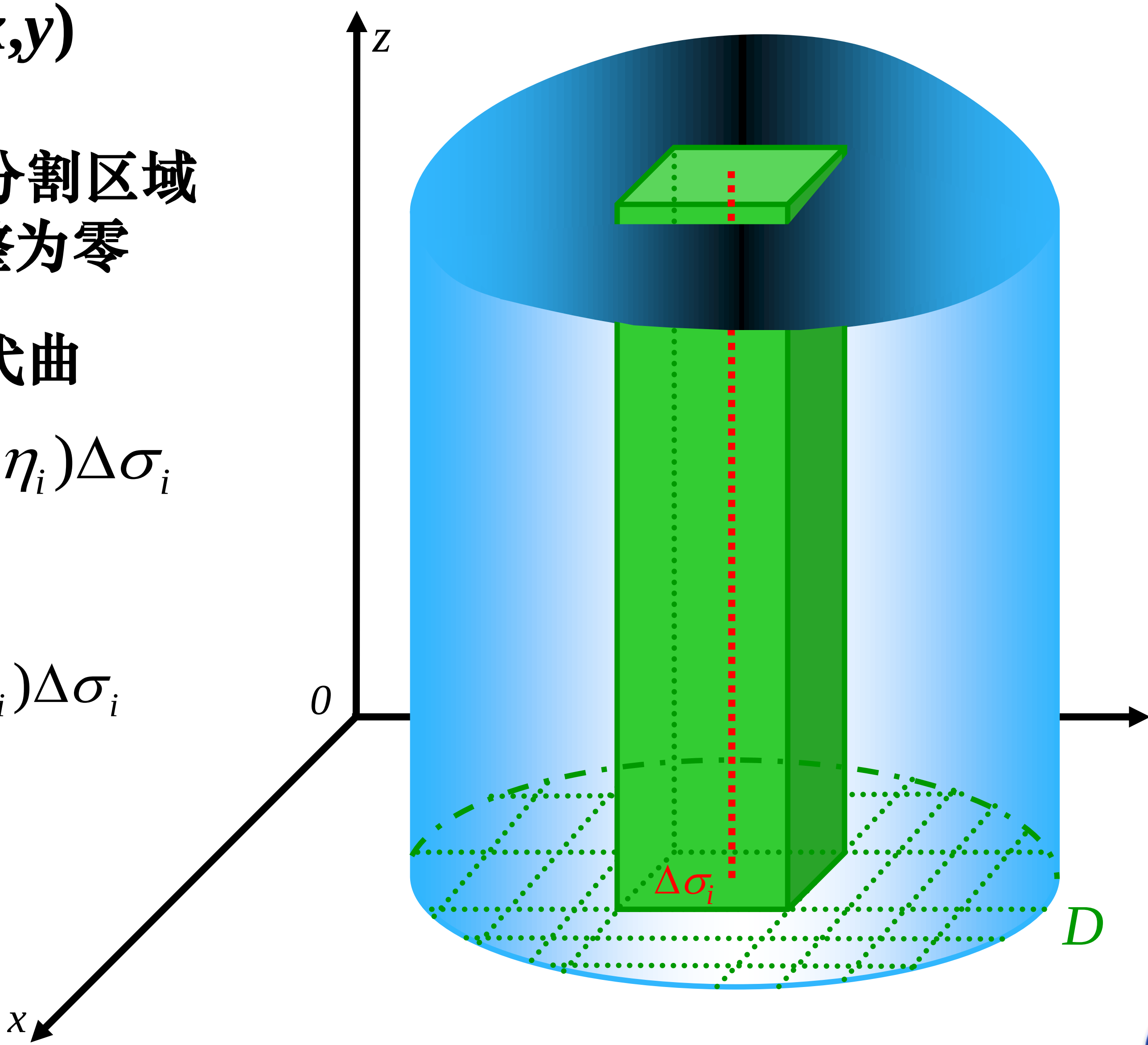
(1)分割：任意分割区域 D，化整为零

(2)近似：以平代曲

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3)求和：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



1．曲顶柱体的体积

$$S: z = f(x,y)$$

(1)分割：任意分割区域 D，化整为零

(2)近似：以平代曲

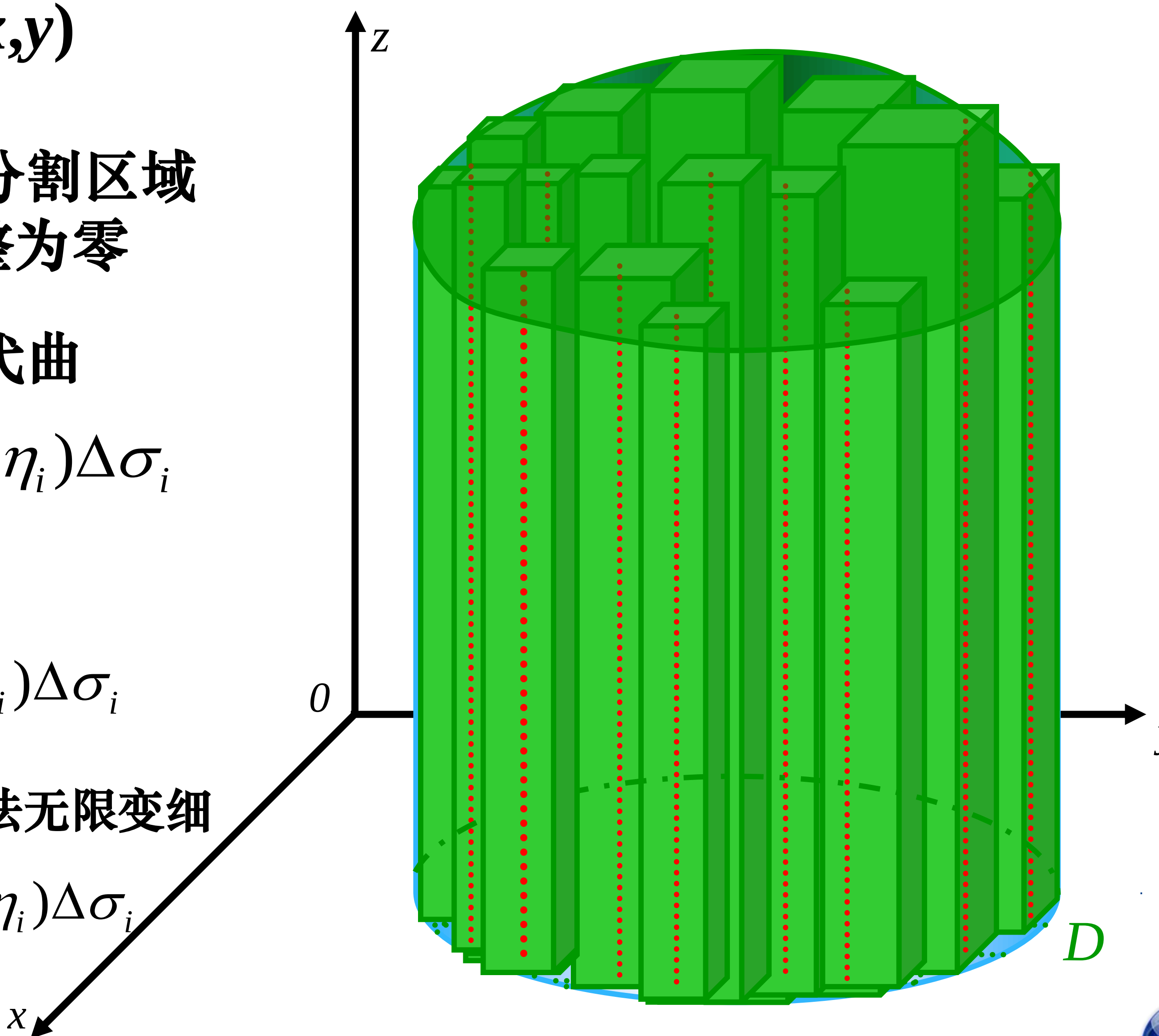
$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3)求和：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

(4)取极限 令分法无限变细

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



1．曲顶柱体的体积

$$S:\ z=f(x,y)$$

(1)分割：任意分割区域 D，化整为零

(2)近似：以平代曲

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

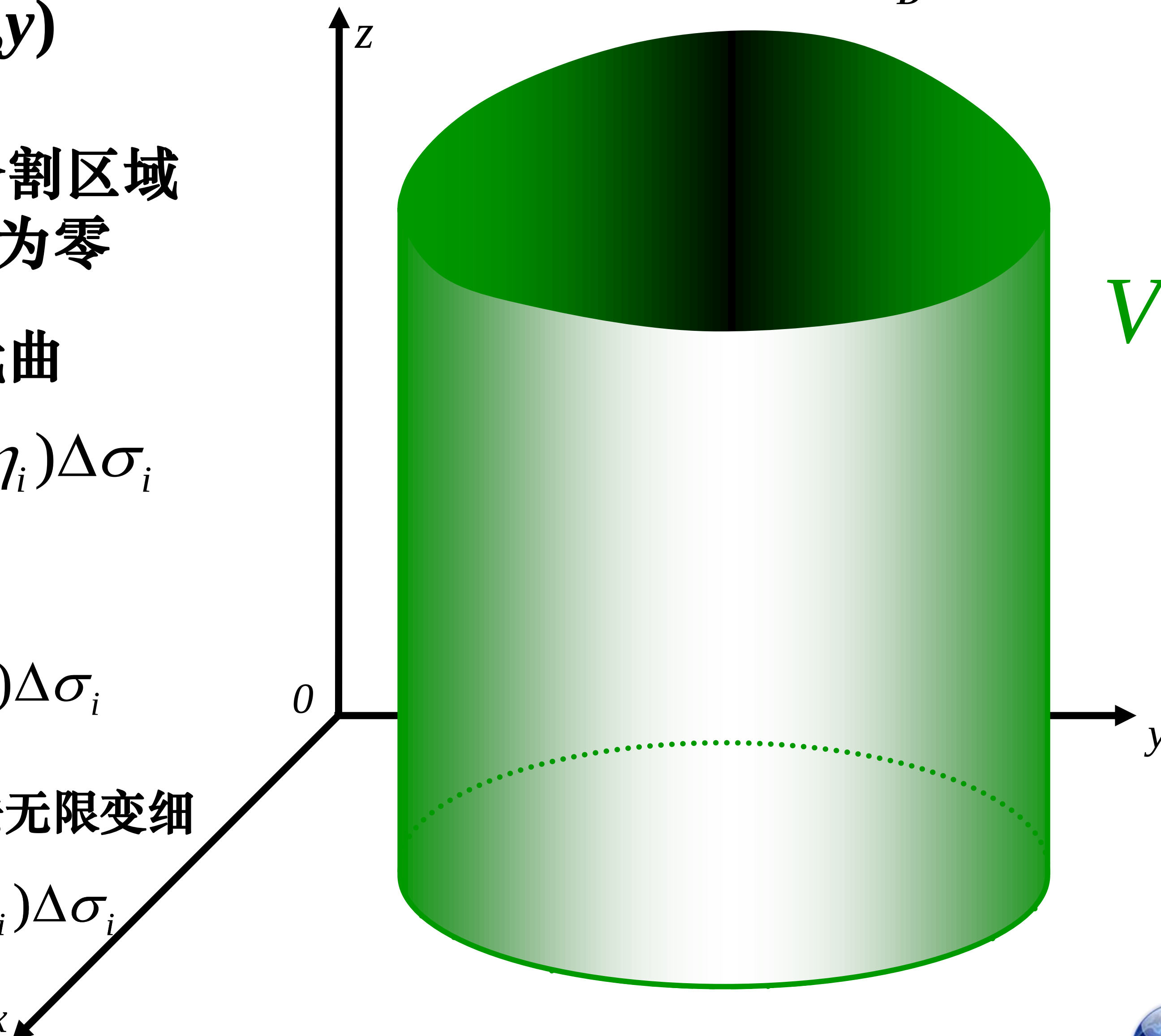
(3)求和：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

(4)取极限 令分法无限变细

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

记 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$



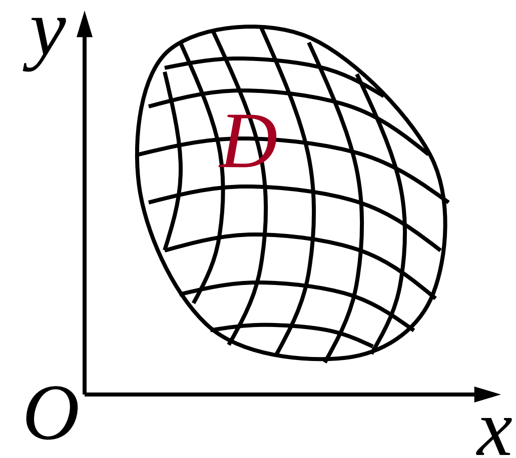
2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片，在 xOy 平面上占有区域 D，其面密度为 $\mu(x,y)\in C$，计算该薄片的质量 M.

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数)，设 D 的面积为 σ，则 $M=\mu\cdot\sigma$

若 $\mu(x,y)$ 非常数，仍可用

"分割，近似，求和，取极限" 解决.



1) 分割

用任意曲线网分 D 为 n 个小区域

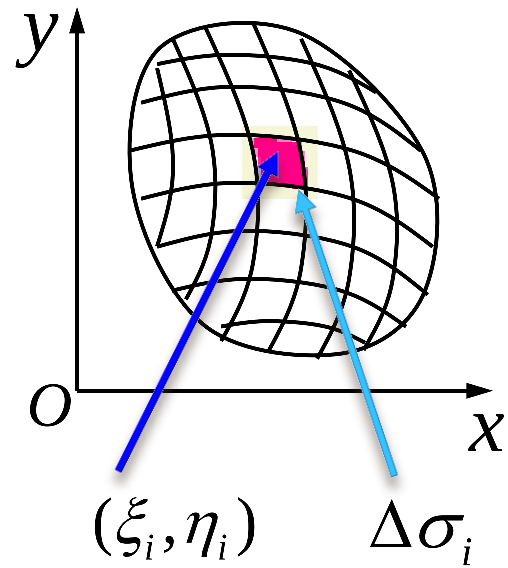
$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，相应把薄片也分为小块.

2) 近似 —— 将其近似看作均匀薄片

在每个$\Delta\sigma_i$中任取一点 (ξ_i,η_i), 则第 i 小块的质量

$$\Delta M_i \approx \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

3) 求和——所有小块质量之和近似等于薄片总质量



$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

4) 取极限

令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_i)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$$

两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

"分割, 近似, 求和, 取极限"

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的定义

定义: 设 $f(x,y)$是定义在有界区域 D上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，若存在一个常数 I，使

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}} \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ 可积，称 I 为 $f(x,y)$ 在D上的二重积分.

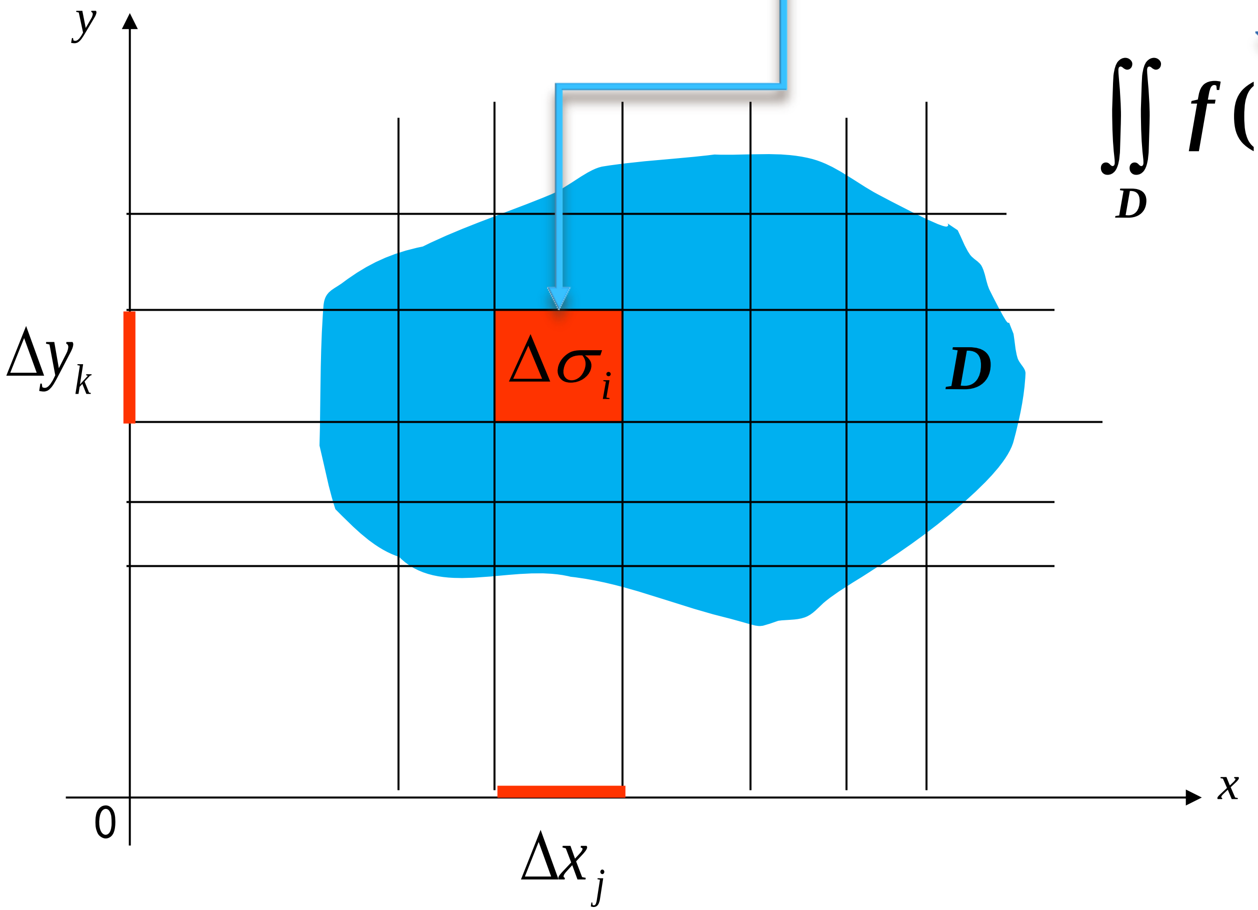
$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \overbrace{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积元素}}}^{\text{积分表达式}}$$

x,y称为积分变量

直角坐标系下面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 图示 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



如果 $f(x,y)$ 在 D 上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_i = \Delta x_j \Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注解:

(1)二重积分的存在性: 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

(2)二重积分几何意义:

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

3、二重积分的性质

性质 1 当 k 为常数时,

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质1*

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

定积分的性质

性质 1

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

性质1*

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

性质2 对区域具有可加性

$(D = D_1 + D_2)$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质2

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

性质3

若 σ 为 D 的面积，

$$\sigma = \iint\limits_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma.$$

性质3

$$\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

性质4 若在D上

$$f(x,y) \le g(x,y),$$

则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

特殊地

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质4 如果在$[a,b]$上

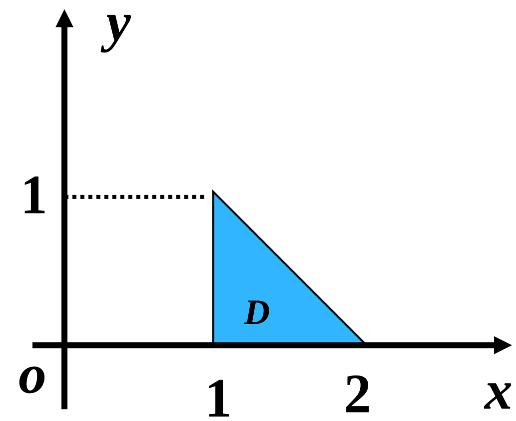
$$f(x) \le g(x)$$

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

特殊地

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

例 1 比较积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ 的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0) (1,1), (2,0).



解 三角形斜边方程 $x+y=2$

在 D 内有 $1 \le x+y \le 2 < e$,

故 $\ln(x+y) < 1$,

于是 $\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

性质5 设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域D上的最大值和最小值，σ为D的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质6 设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

（二重积分中值定理）

例 2 不作计算，估计 $I=\iint\limits_{D} e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，

其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a)$

解 区域 D 的面积 $\sigma = ab\pi$ ，

在 D 上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2$,

$$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

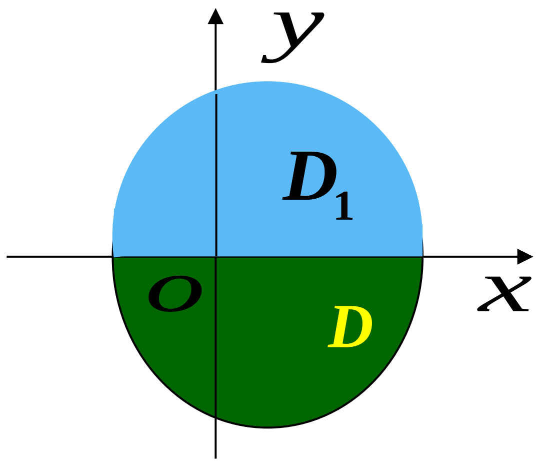
由性质 6 知 $\sigma\le\iint\limits_{D} e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2}$,

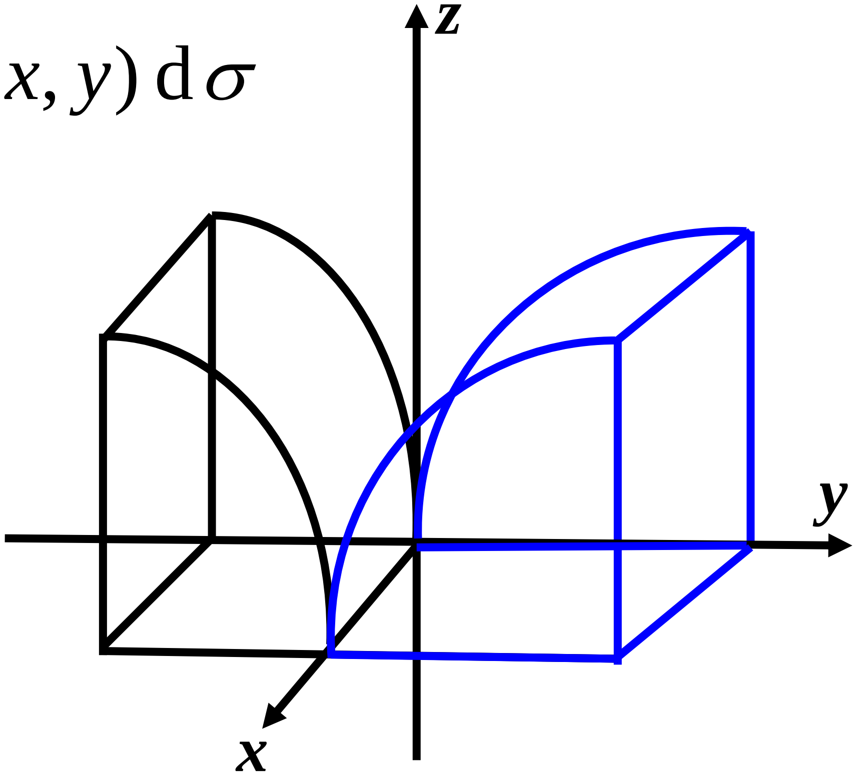
$$ab\pi\le\iint\limits_{D} e^{(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

性质7. 设函数 $f(x,y)$在闭区域D上连续, D关于x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为D_1, 在 D 上

(1) $f(x,-y)=f(x,y)$, (关于y为偶函数)

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

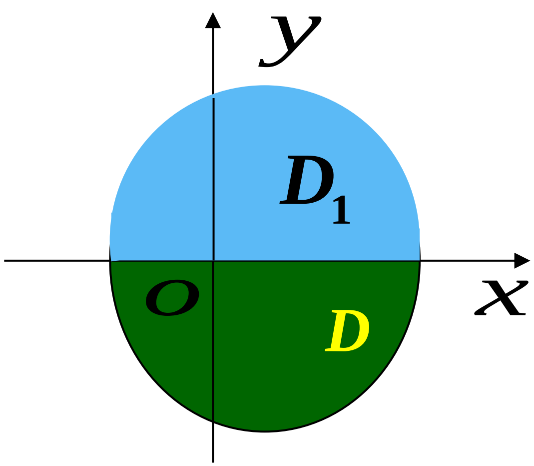


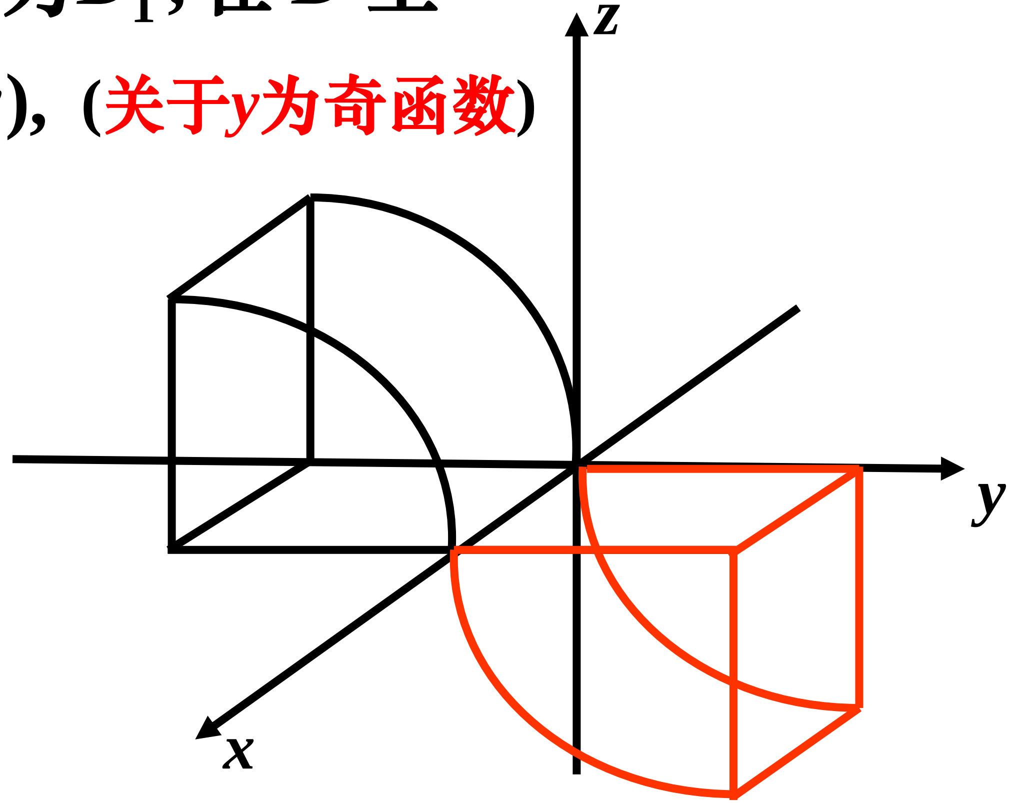


性质7. 设函数 $f(x,y)$在闭区域D上连续, D关于x 轴对称, D 位于 x 轴上方的部分为D_1, 在 D 上

(2) $f(x,-y)=-f(x,y)$, (关于y为奇函数)

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=0$





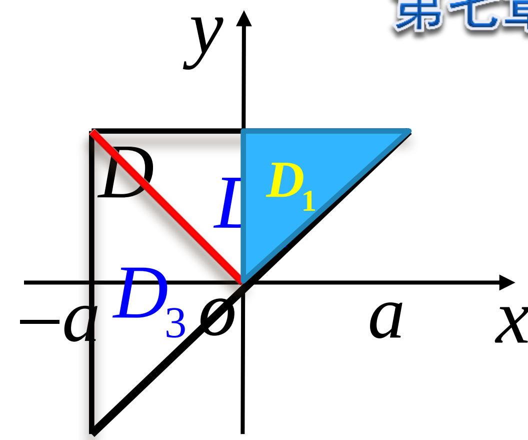
性质7. 设函数 $f(x,y)$在闭区域D上连续, D关于y轴对称, 函数关于变量 x 有奇偶性时, 仍有类似结果.

例如, D_1 为圆域 $D: x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分, 则有

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例3. P_{181}总习题十 1.(2)



解： $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_2} \quad +\iint\limits_{D_3}$$

$$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, |x|\le y\le a\}$$

D_3关于x轴对称,且被积函数关于y：xy (奇) ,$\cos x\sin y$ (奇)

所以 $\iint\limits_{D_3} (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

D_2关于y轴对称,且被积函数关于x：xy(奇),$\cos x\sin y$ (偶)

$$\iint\limits_{D_2} (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(91年考研题)

性质7. 设函数 $f(x,y)$在闭区域D上连续,

(3) 若D关于**原点**对称

$x \geq 0, y \geq 0$时,若$(x,y)\in D$,必有$(-x,-y)\in D$

- 当$f(-x,-y) = f(x,y)$时 $I = 2\iint\limits_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$D_3 = \{(x,y)\in D, x \geq 0, y \geq 0\}$

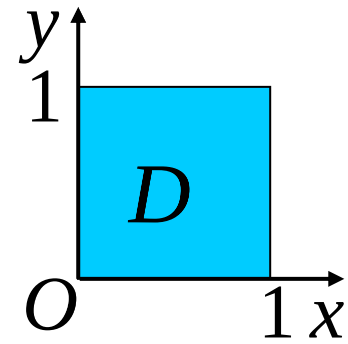
(4) 若D关于**直线 $y = x$** 对称

若$(x,y)\in D$,必有$(y,x)\in D$ $f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

D D

特别地, $\iint_D f(x)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma$

例4证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}$, 其中$D$ 为 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

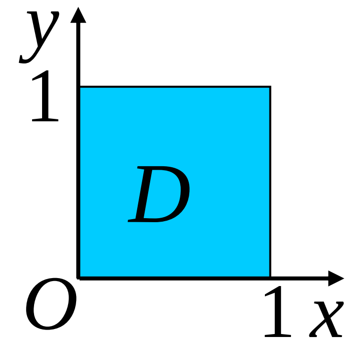


解: 利用题中 x, y 位置的对称性, 有

$$\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\mathrm{d}\sigma$$

例4证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma \le \sqrt{2}$, 其中$D$ 为 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.



解: 利用题中 x, y 位置的对称性, 有

$$\iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\iint_D \sin(x^2 + \frac{\pi}{4})\,\mathrm{d}\sigma$$

$\because\ 0 \le x^2 \le 1$, $\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \le 1$, 又 D 的面积为 1,

故结论成立.

内容总结

二重积分的定义（和式的极限）

二重积分的几何意义（曲顶柱体的体积）

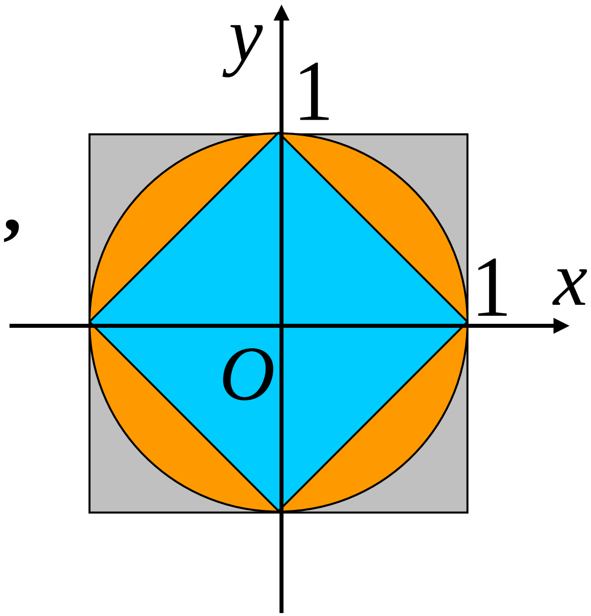
二重积分的性质

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_3=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



解: I_1, I_2, I_3 **被积函数相同, 且非负,**
由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

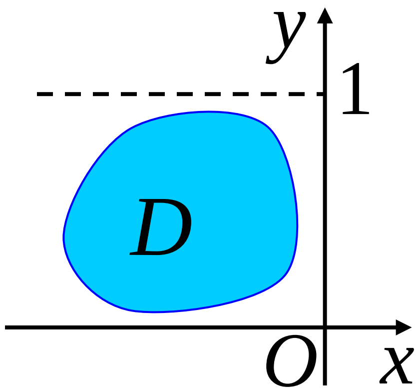
2. 设D是第二象限的一个有界闭域，且 $0 < y < 1$, 则

$$I_1 = \iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2 = \iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3 = \iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为 (**D**)

(A) $I_1 \le I_2 \le I_3$; (B) $I_2 \le I_1 \le I_3$;

(C) $I_3 \le I_2 \le I_1$; (D) $I_3 \le I_1 \le I_2$.



提示: 因 $0 < y < 1$, 故 $y^2 \le y \le y^{1/2}$;

又因 $x^3 < 0$, 故在D上有

$$y^{1/2}x^3 \le yx^3 \le y^2x^3$$