方向导数与梯度

/ Directional Derivatives and Gradient Vectors */*

一、方向导数

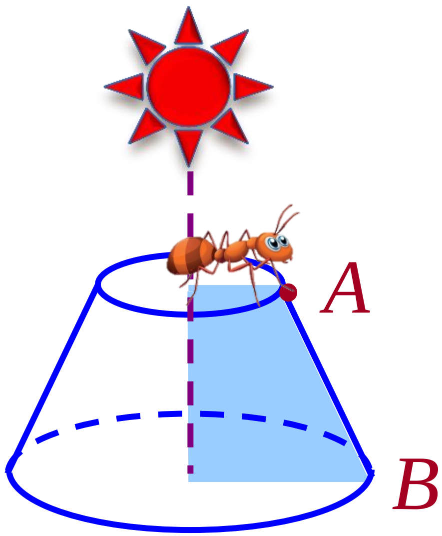
二、梯度

***三、物理意义**

一、方向导数

在许多问题中, 不仅要知道函数在坐标轴方向上的变化率 (即偏导数), 而且还要设法求得函数在其他特定方向上的变化率.

引例. 一只蚂蚁在圆台上底面边缘的 A 处, 如果圆台正上方突然起火, 它使圆台受热, 设圆台任意点的温度与该点到火源的距离成反比, 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?

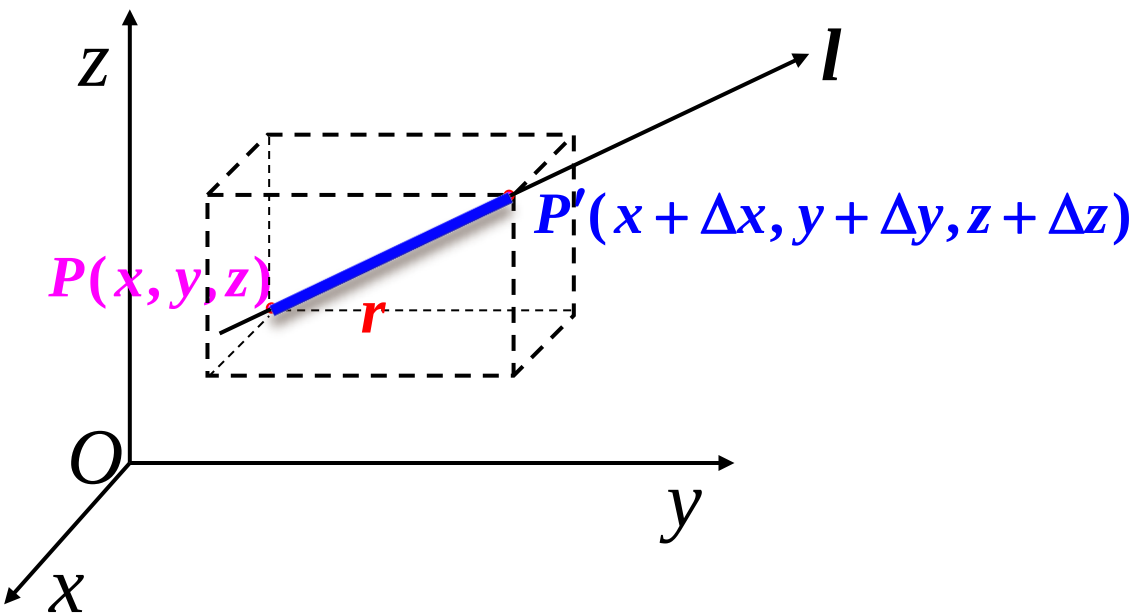


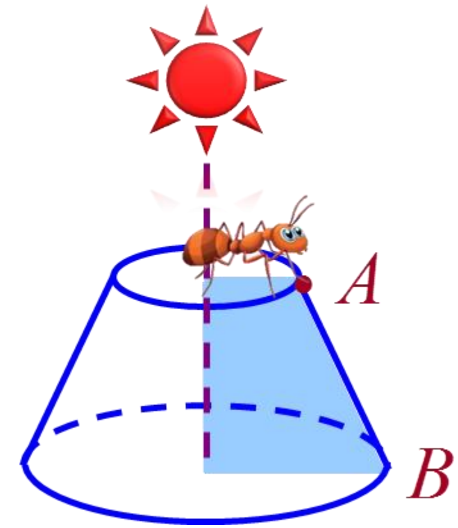
引例本质:

函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿方向 l 的变化率

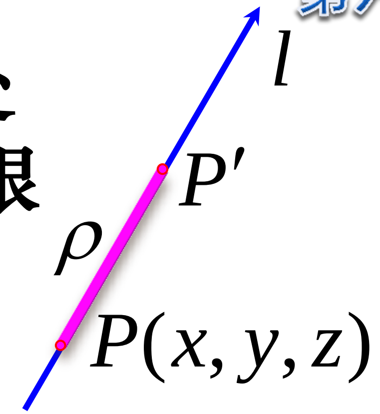
问题(如图). $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$





定义. 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 存在下列极限



$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}$$

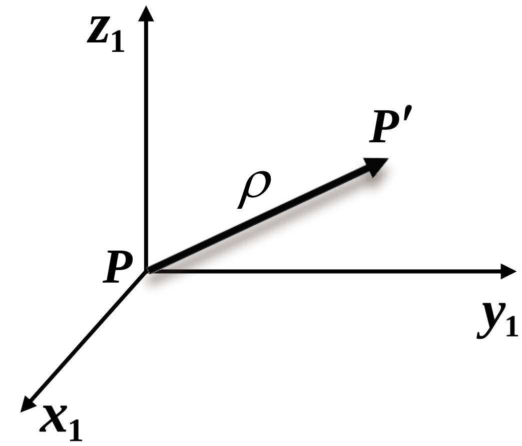
$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}\ \overset{\text{记作}}{=\!=}\ \frac{\partial f}{\partial l}$$

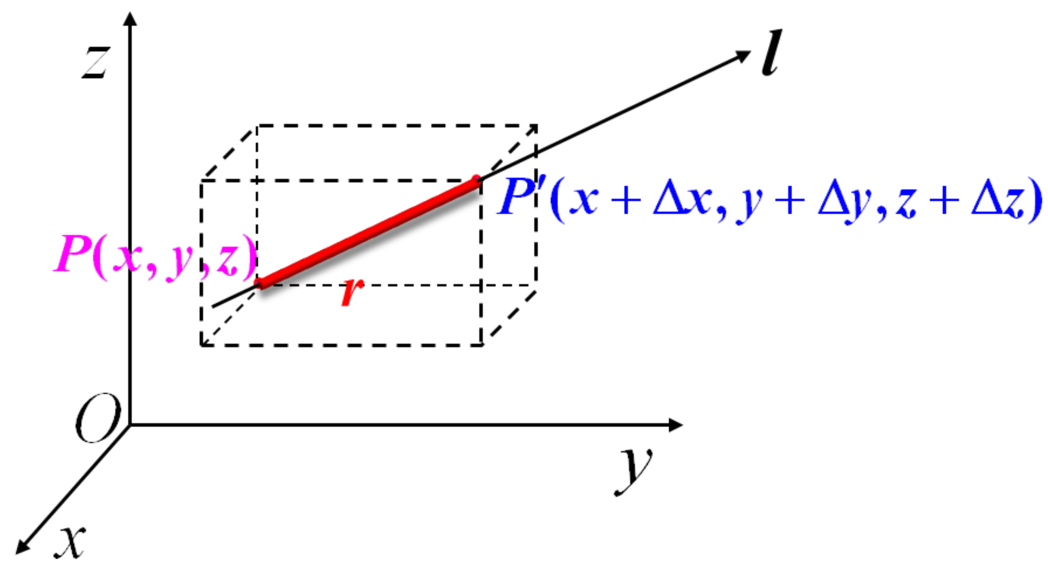
$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\,,\\ \Delta x=\rho\cos\alpha\,,\ \Delta y=\rho\cos\beta\,,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

推导

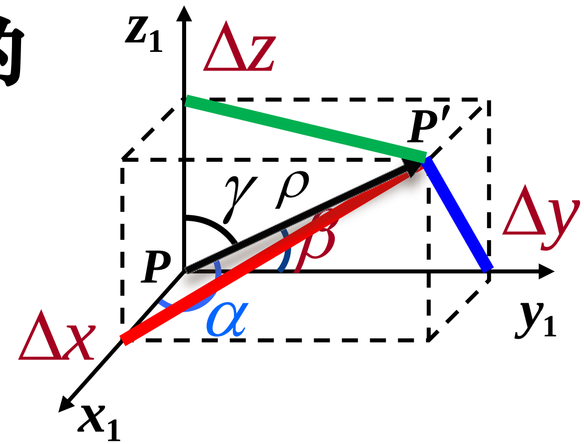
则称 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的方向导数.

推导 为讨论问题方便，将模为r的向量$\overrightarrow{PP'}$移为向径，如右图:





推导 为讨论问题方便，将模为r的向量$\overrightarrow{PP'}$移为向径，如右图：



作辅助线(红线)，则有

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\rho} \Rightarrow \Delta x = \rho\cos\alpha$$

再作辅助线(蓝线)，则有

$$\cos\beta = \frac{\Delta y}{\rho} \Rightarrow \Delta y = \rho\cos\beta$$

再作辅助线(绿线)，则有

$$\cos\gamma = \frac{\Delta z}{\rho} \Rightarrow \Delta z = \rho\cos\gamma$$

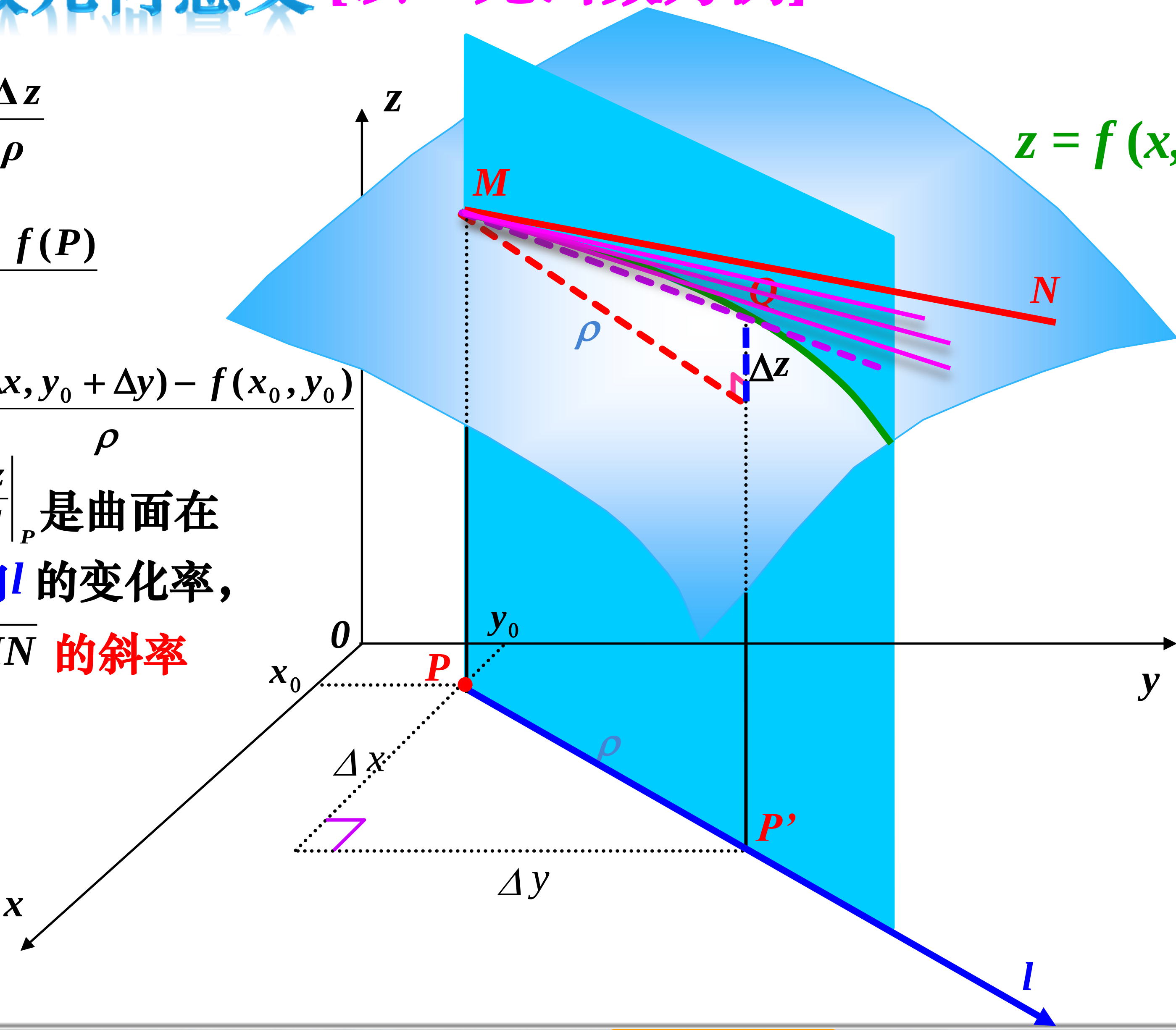
方向导数几何意义 [以二元函数为例]

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(P')-f(P)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

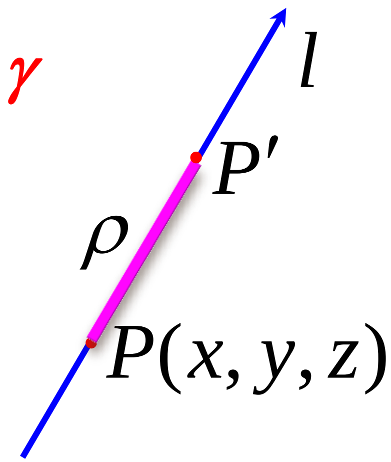
方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{P}$ 是曲面在点P处沿方向l 的变化率，即半切线 $\overline{MN}$ 的斜率



定理. 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微, 则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 为 l 的方向角.



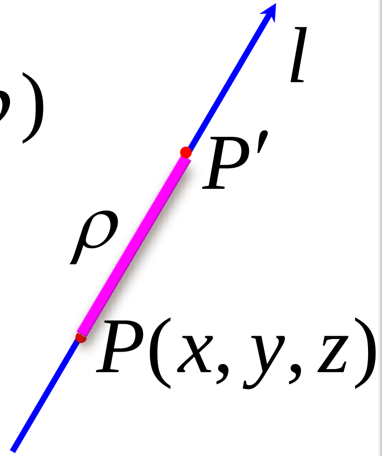
证明: 由函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微, 得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)$$

$$=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$$

证明: $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$

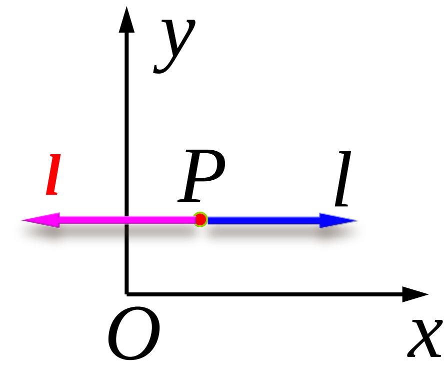
$= \rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right) + o(\rho)$



故 $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

对于二元函数 $f(x,y)$，在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l（方向角为 α,β）的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

$$\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta\right)$$

$$=\rho\sin\alpha$$

特别:

- 当 l 与 x 轴同向 $\left(\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 l 与 x 轴反向 $\left(\alpha=\pi,\beta=\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

特别:

- **当 l 与 x 轴同向** $(\alpha=0,\beta=\dfrac{\pi}{2})$ 时,有 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$
- **当 l 与 x 轴反向** $(\alpha=\pi,\beta=\dfrac{\pi}{2})$ 时,有 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}$

说明 I　关系分析

- 可微 $\begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{smallmatrix}$ 方向导数存在 $\begin{smallmatrix}\not\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{smallmatrix}$ 偏导数存在

说明 II

方向导数公式 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \vec{G}\cdot\vec{l} = |\vec{G}|\cos(\widehat{\vec{G},\vec{l}}) \qquad (\,|\vec{l}\,| = 1\,)$$

当 $\vec{l}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时,方向导数取最大值,函数增长最快;

当 $\vec{l}$ 与 $\vec{G}$ 方向相反时,方向导数取最小值,函数减小最快.

例1. 求函数 $u = x\sin yz$ 在点 $P(1, 3, 0)$ 沿向量 $\vec{l} = (1, 2, -1)$ 的方向导数.

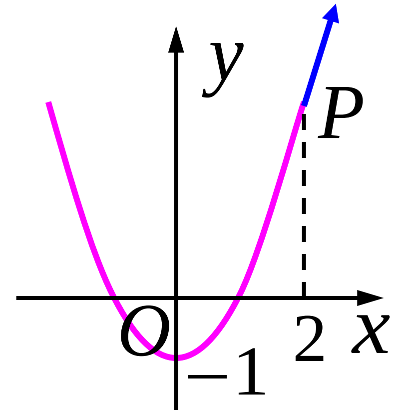
解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_P = \left.\left(\sin yz\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + xz\cos yz\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} - xy\cos yz\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right|_{(1,\,3,\,0)}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

例2. 求函数 $z = 3x^2 y - y^2$ 在点 $P(2, 3)$ 沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大方向的方向导数.



解: 将已知曲线用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

它在点 P 的**切向量 $\boldsymbol{l}$ 为** $(1, 2x)\big|_{x=2} = (1, 4)$

$$\therefore\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P = \left[\, 6xy \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + (3x^2 - 2y) \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \,\right]\Big|_{(2,3)} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

例3. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1, 1, 1)$处指向外侧的法向量, 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解: $\vec{n}=(4x, 6y, 2z)\Big|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

例3. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解: $\vec{n}=(4x,6y,2z)\big|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$ 同理得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\dfrac{8}{\sqrt{14}}$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times 2+8\times 3-14\times 1\right)=\frac{11}{7}$$

二、梯度

方向导数公式 $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\vec{\mathrm{e}}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\vec{G}\cdot\vec{\mathrm{e}}_l=|\vec{G}|\cos(\widehat{\vec{G},\vec{l}})=\mathbf{Prj}_{\vec{l}}\,\vec{G}\qquad(|\vec{\mathbf{e}}_l|=1)$$

当 $\vec{l}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时,方向导数取最大值,函数增长最快;

当 $\vec{l}$ 与 $\vec{G}$ 方向相反时,方向导数取最小值,函数减小最快.

即 $\vec{G}:\begin{cases}\text{方向}:\ f\ \text{变化(增长)率最大的方向}\\ \text{模}:\ f\ \text{的最大变化率之值}\end{cases}$

1. 定义

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f\,(P)$ 在点 P 处的梯度(Gradient),

记作 $\mathrm{grad}\ f$，或 ∇f，即

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{G} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

其中 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ 称为**向量微分算子**或 **Nabla算子**.

同样可定义**二元函数** $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

说明: 函数的**方向导数**为梯度在该方向上的投影:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_l \qquad (\vec{e}_l \text{为方向} \vec{l} \text{上的单位向量})$$

2. 梯度的几何意义

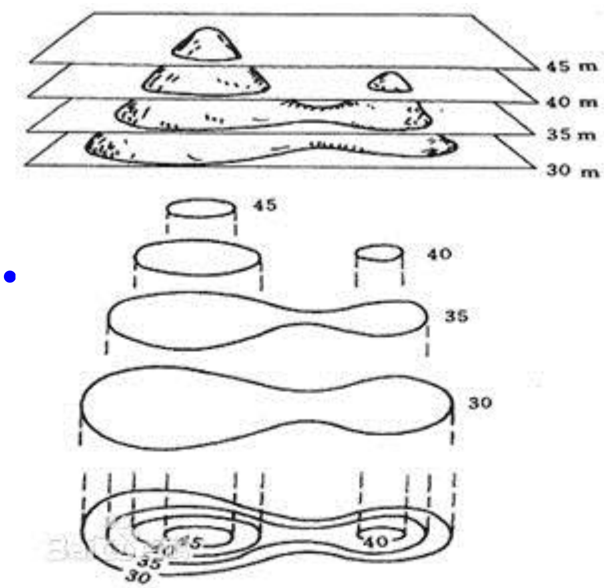
对函数 $z = f(x,y)$, 曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影

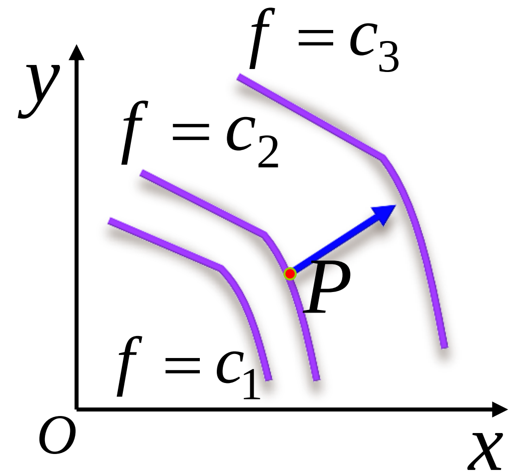
$L^*: f(x,y) = c$ 称为函数 f 的等值线或等高线.

设 f_x, f_y 不同时为零, 则 L^* 上点 P 处的法向量为

$$(f_x, f_y)\big|_P = \operatorname{grad} f\big|_P = \nabla f\big|_P$$

函数在一点的梯度垂直于该点等值线,指向函数增大的方向.

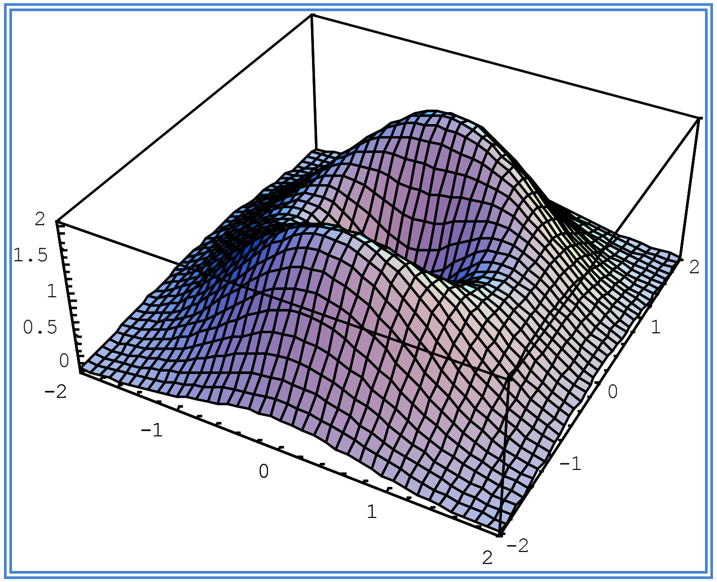




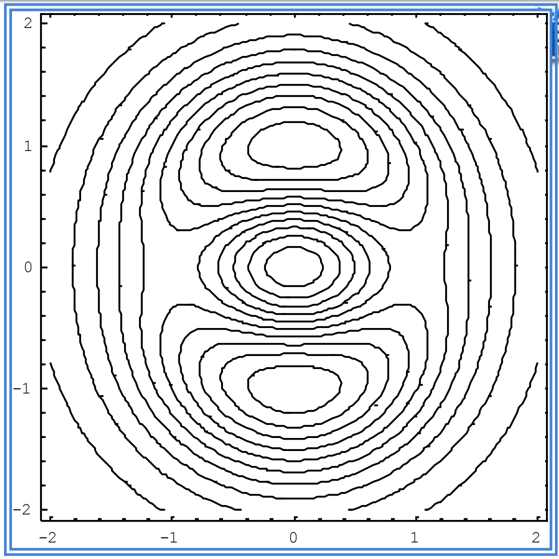
(设 $c_1 < c_2 < c_3$)

等高线图举例

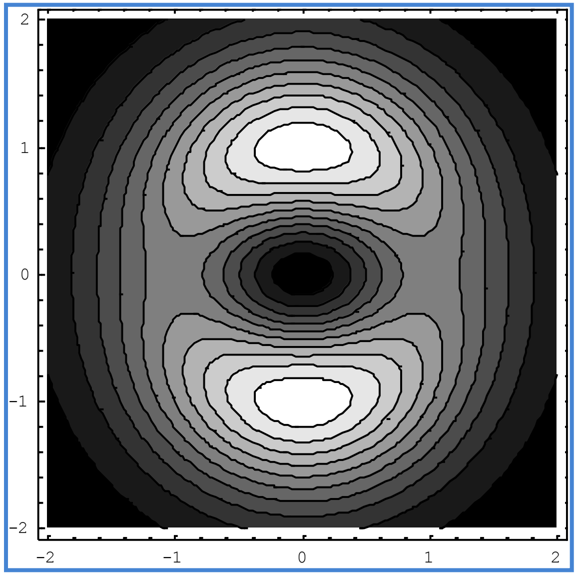
$$z=(x^2+2y^2)e^{1-x^2-y^2}$$



这是利用数学软件Mathematica绘制的曲面及其等高线图,带阴影的等高线图中,亮度越大对应曲面上点的位置越高



等高线图



带阴影的等高线图

2. 梯度的几何意义

函数 $u = f(x,y,z)$，超曲面 $\begin{cases} u = f(x,y,z) \\ u = c \end{cases}$ 在$oxyz$空间的投影

$\Sigma^* : f(x,y,z) = c$ 称为函数 f 的**等值面**或**等量面**.

当其各偏导数不同时为零时，其上点 P 处的法向量为

$$\operatorname{grad} f\big|_P = \nabla f\big|_P$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_P$$

例4. 设 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P_0(1,1)$, 求:

(1) $f(x,y)$在 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$沿这个方向的方向导数;

(2) $f(x,y)$在 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$沿这个方向的方向导数.

解: (1) $f(x,y)$在 P_0 处沿 $\nabla f(1,1)$ 方向增加最快, 而

$$\nabla f(1,1)=(x\vec{i}+y\vec{j})\big|_{(1,1)}=\vec{i}+\vec{j}$$

所求的方向 $\vec{n}=\dfrac{\nabla f(1,1)}{|\nabla f(1,1)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,1)}=|\nabla f(1,1)|=\sqrt{2}$

(2) $f(x, y)$在 P_0 处沿 $-\nabla f(1,1)$ 方向减少最快

所求的方向 $\vec{n}_1 = -\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{n}_1}\right|_{(1,1)} = -|\nabla f(1,1)| = -\sqrt{2}$

思考: $f(x, y)$在 P_0 处变化率为零的方向是什么?

回答: 梯度的垂直方向.

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ 或 } (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

例5. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求等值面 $f(x,y,z)=2$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程.

(2) 求函数 f 在点 $P\,(1,1,1)$ 沿增加最快方向的方向导数.

解: (1) 点P处切平面的法向量为

$$\vec{n}=\nabla f(P)=(2x,\ zy^{z-1},\ y^z\ln y)\big|_P=(2,1,0)$$

故所求切平面方程为 $2(x-1)+(y-1)+0\cdot(z-1)=0$

即 $2x+y-3=0$

例5. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求等值面 $f(x,y,z)=2$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程.

(2) 求函数 f 在点 $P(1,1,1)$ 沿增加最快方向的方向导数.

解 (2) 函数 f 在点 P 处增加最快的方向为

$$\vec{n}=\nabla f(P)=(2,1,0)$$

沿此方向的方向导数为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left|\nabla f(P)\right|=\sqrt{5}$

思考: f 在点 P 处沿什么方向变化率为0?

注意: 对三元函数, 与 $\nabla f(P)$ 垂直的方向有无穷多

例6. 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\mathrm{grad}\, f(r)=f'(r)\,\vec{e}_r$.

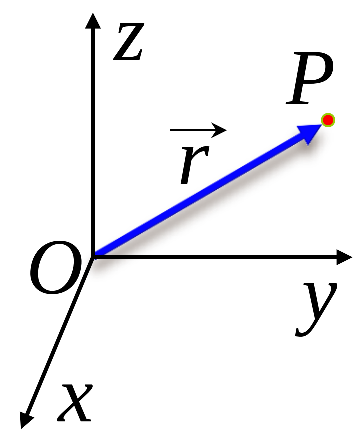
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r},\quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore\ \mathrm{grad}\, f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{e}_r$$



3. 梯度的基本运算公式

(1) $\mathbf{grad}\,c=\vec{0}$ 或 $\nabla c=\vec{0}$ （c为常数）

(2) $\mathbf{grad}(cu)=c\,\mathbf{grad}\,u$ 或 $\nabla(cu)=c\nabla u$

(3) $\mathbf{grad}(u\pm v)=\mathbf{grad}\,u\pm\mathbf{grad}\,v$ 或 $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$

(4) $\mathbf{grad}(uv)=u\,\mathbf{grad}\,v+v\,\mathbf{grad}\,u$

或 $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

(5) $\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathbf{grad}\,u-u\,\mathbf{grad}\,v}{v^2}$ 或 $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$

(6) $\mathbf{grad}\,f(u)=f'(u)\,\mathbf{grad}\,u$ 或 $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

*三、数量场与向量场简介

函数 $\longrightarrow$ 场

(物理量的分布)

数量场 (数性函数)

如: 温度场, 电势场等

向量场(矢性函数)

如: 力场, 速度场等

可微函数 $f(P)$ $\longrightarrow$ 梯度场 $\operatorname{grad} f(P)$

(势)　　　　(向量场)

注意: 任意一个向量场不一定是梯度场.

例7. 已知位于坐标原点的点电荷 q 在任意点 $P(x, y, z)$ 处所产生的电势为 $u = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$，试证

$$\mathbf{grad}\, u = -\vec{E} \qquad (\text{场强 } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r)$$

证: 利用例6的结果 $\mathbf{grad}\, f(r) = f'(r)\vec{e}_r$

$$\mathbf{grad}\, u = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)'\vec{e}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r = -\vec{E}$$

这说明场强: 垂直于等势面，

且指向电势减少的方向.

内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\nabla f=(f_x(x,y),\ f_y(x,y))$$

- 梯度的特点 $\begin{cases} \text{方向: } f \text{ 变化(增长)率最大的方向} \\ \text{模: } f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$

3. 关系

- 可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 方向导数存在 $\underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{e}_l$ —— 梯度在方向 l 上的投影