三、重积分的应用

/* Applications of Multiple Integrals */

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的质心

四、物体的转动惯量

五、物体的引力

1. 能用重积分解决的实际问题的特点:

所求量是 $\begin{cases} \text{分布在有界闭区域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性} \end{cases}$

2. 用重积分解决问题的方法:

—— 用微元分析法 (元素法)建立积分式

—— 从积分定义出发 建立积分式

3. 解题要点:

画出积分域, 选择坐标系, 确定积分序,

定出积分限, 计算要简便.

一、立体体积

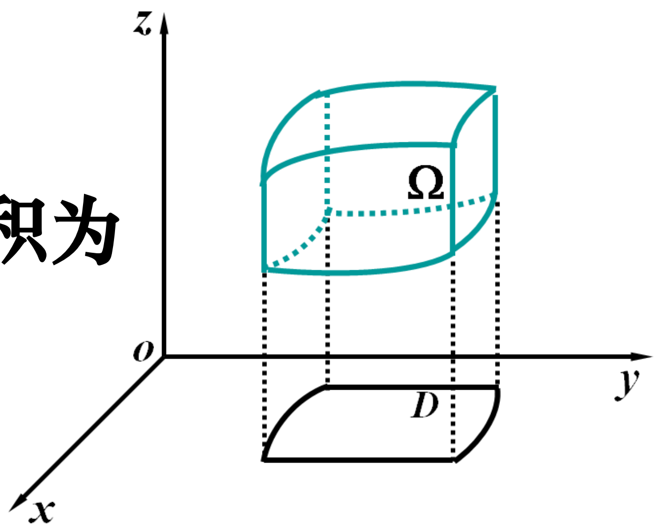
- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z=f(x,y),(x,y)\in D,$

则其体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

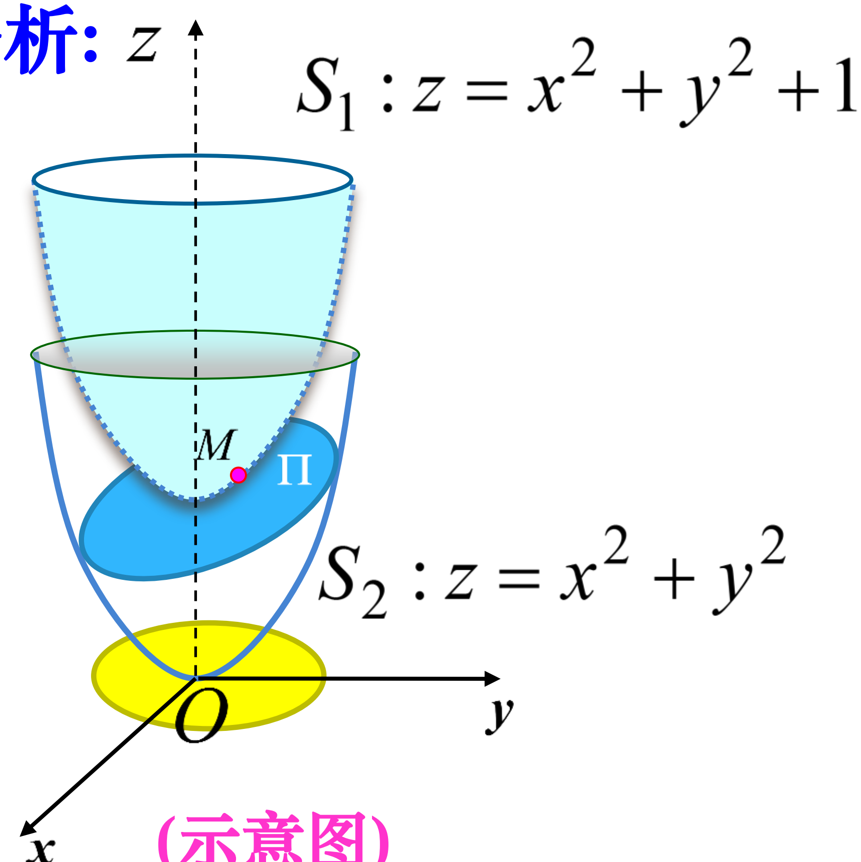
- 占有**空间有界域** Ω 的立体的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$



例1. 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积 V.

分析:



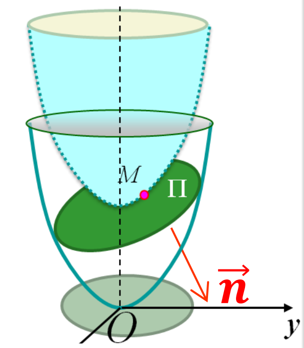
(示意图)

第一步: 求切平面 Π 方程;

第二步: 求 Π 与 S_2 的交线在 xOy 面上的投影, 写出所围区域 D;

第三步: 求体积 V.

例1. 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2 + 1$ 任一点的切平面与曲面 $S_2: z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积 V.



解: 曲面 S_1 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面方程为

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0^2 - y_0^2$$

它与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 xOy 面上的投影为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad \text{(记所围域为} D\text{)}$$

$$\therefore V = \iint_D \left[\left(2x_0 x + 2y_0 y + 1 - x_0^2 - y_0^2\right) - \left(x^2 + y^2\right) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left[1 - \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x - x_0 = \rho\cos\theta,\ y - y_0 = \rho\sin\theta$

$$= \pi - \iint_D \rho^2 \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \pi - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}$$

例2. 求半径为a 的球面与半顶角为α 的内接锥面所围成的立体的(中部)体积.

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$$

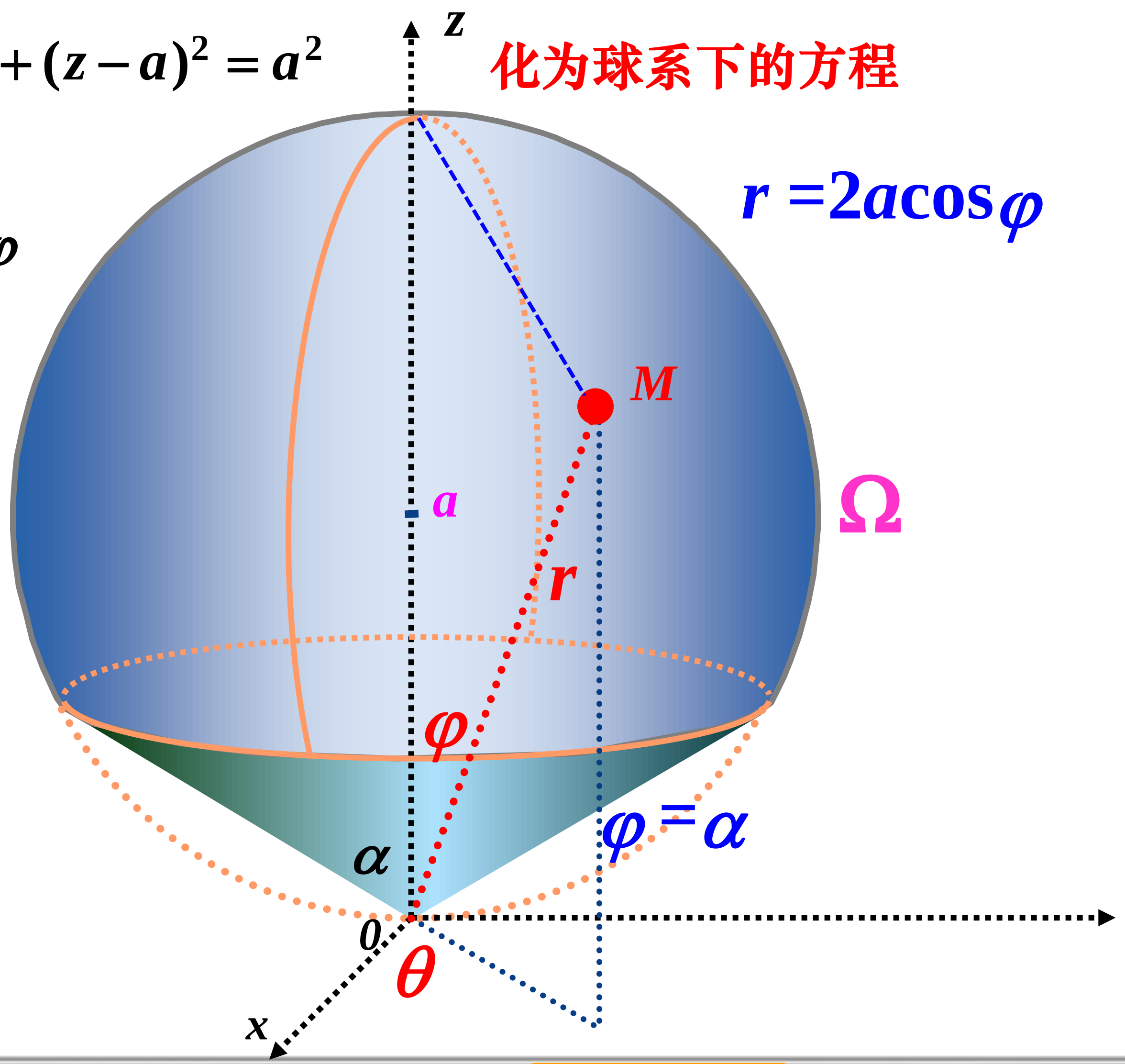
化为球系下的方程

$\forall M\in\Omega$

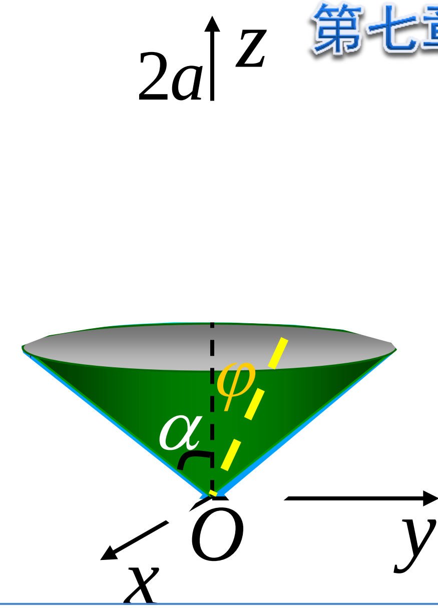
$V: 0\le r\le 2a\cos\varphi$

$0\le\theta\le 2\pi$

$0\le\varphi\le\alpha$



例2. 求半径为a 的球面与半顶角为α 的内接锥面所围成的立体的(中部)体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le 2a\cos\varphi\\ 0\le\varphi\le\alpha\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r}$$

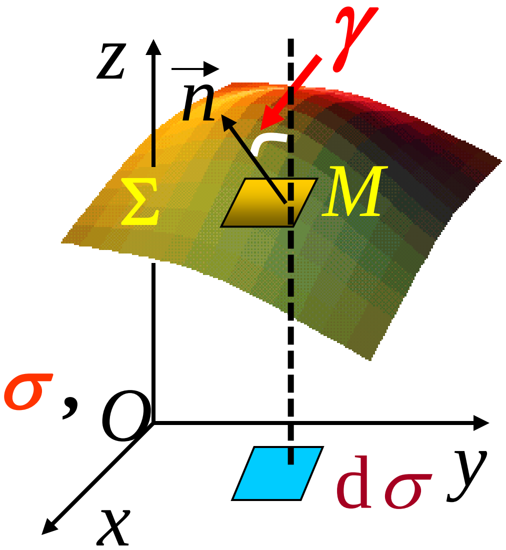
则立体体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)$$

思考: 所围立体的(侧部)体积怎么求?

二、曲面的面积



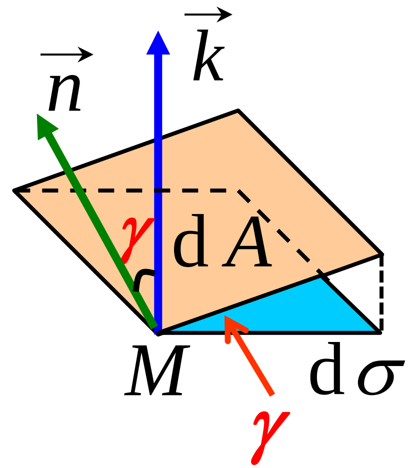
设曲面为 $\Sigma: z=f(x,y),(x,y)\in D$, 偏导连续, 则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累(拼接)而成.设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$,

则 $\mathrm{d}A=\dfrac{1}{\cos\gamma}\cdot\mathrm{d}\sigma$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)



故有曲面面积公式

$$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}A=\iint_{D}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即

$$\boxed{A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

◎若曲面方程为 $x=g(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则有

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

◎若曲面方程为 $y=h(z,x),(z,x)\in D_{zx}$, 则有

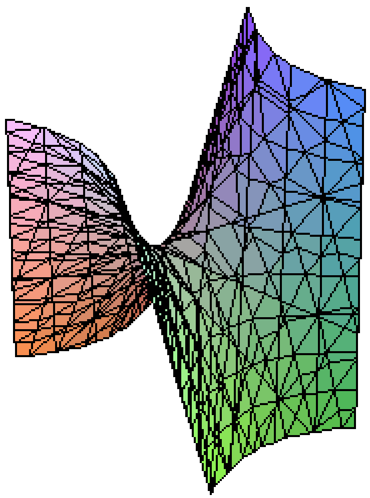
$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

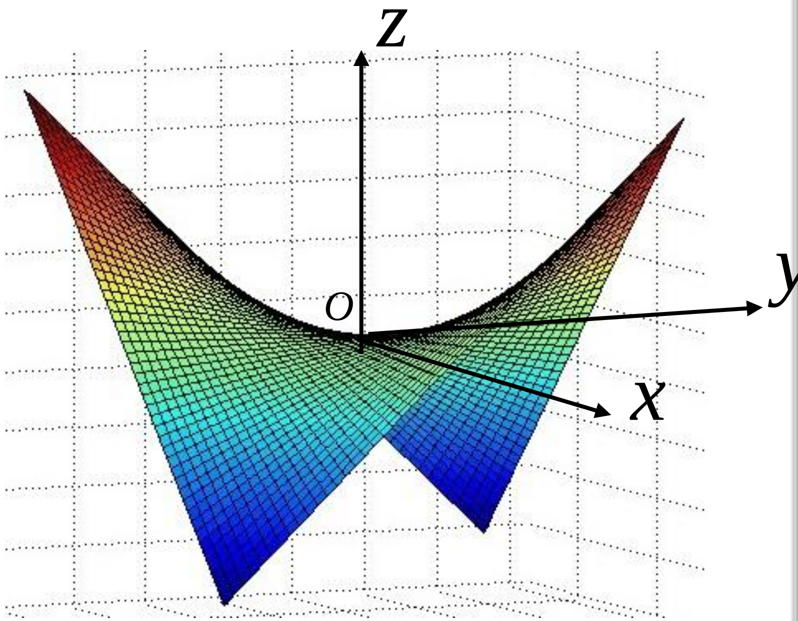
◎若曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$, 且 $F_z\neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\quad A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}+F_z^{\,2}}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

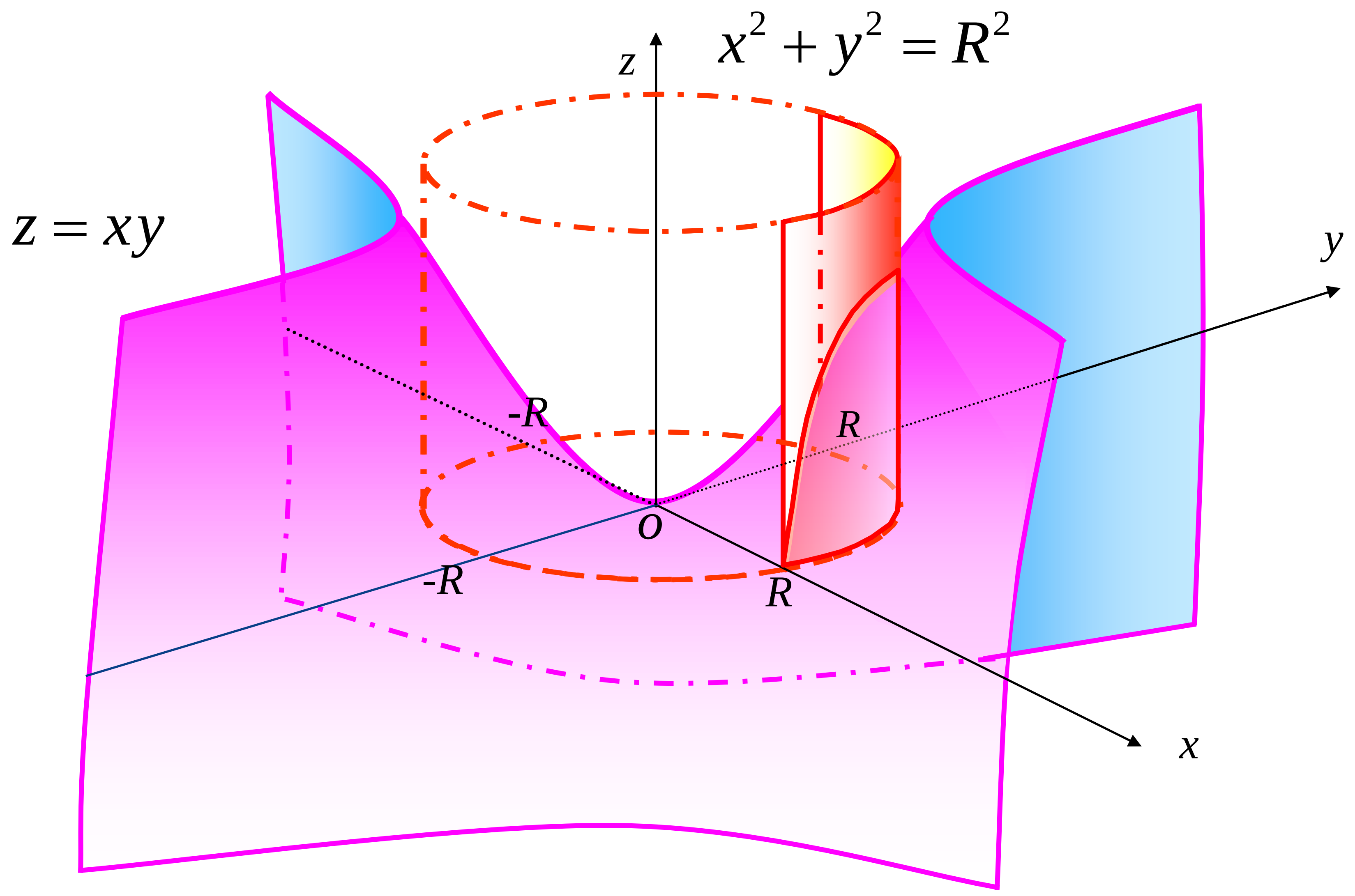
例3. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.





曲面截图动画

曲面截图——动画



例3. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

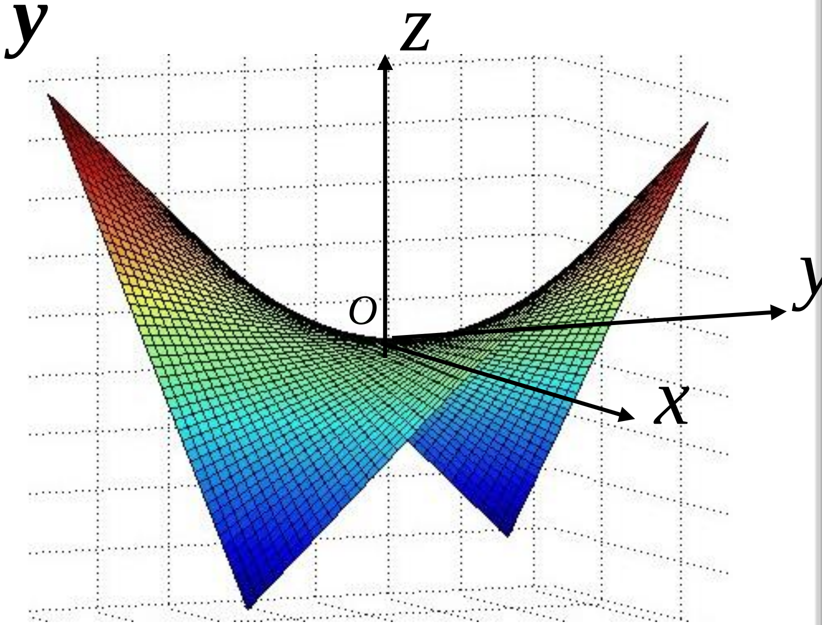
解: 曲面在 xOy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$，则

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{3/2} - 1)]$$



曲面截图动画

例4. 计算半径为 a 的球的表面积.

解法1 利用球面坐标方程.

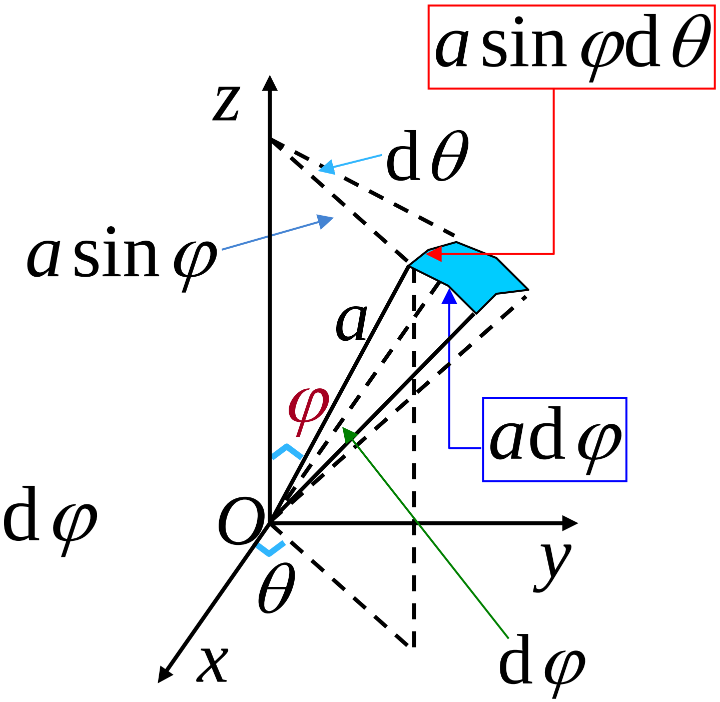
设球面方程为 $r = a$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}A = a^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad A = a^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\pi a^2$$



解法2 利用直角坐标方程.

提示: 会出现反常二重积分.

例4. **计算半径为 a 的球的表面积.**

解法2 **球面的面积A为上半球面面积的两倍.**

球心在原点的上半球面的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

所以

$$A=2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

反常积分

$$=2\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

$$=-4\pi R\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Big|_0^R=4\pi R^2.$$

三、物体的质心

★设空间有n个质点，分别位于(x_k, y_k, z_k)，其质量分别为$m_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，由力学知，该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad \bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}$$

★设物体占有空间域Ω，有连续密度函数$\rho(x,y,z)$，则采用“分割, 近似, 求和, 取极限”可导出其质心公式，即

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的质心坐标就近似该物体的质心坐标. 例如,

$$\bar{x}\approx\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda\to 0$, 即得

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得 $\bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z)\equiv$常数时，则得形心坐标：

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},\quad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}.\quad \left(V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \text{ 为 }\Omega\text{ 的体积}\right)$$

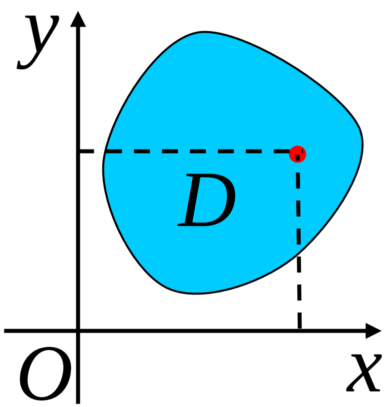
★若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片，其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

M_x — 对 x 轴的静矩

M_y — 对 y 轴的静矩



$$\mathrm{d}M_x=y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{d}M_y=x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

静矩特点1：
与区域D及坐标轴有关，可正可负可为0;

★若物体为占有xOy面上区域D的平面薄片，其面密度为$\mu(x,y)$，则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

M_x — 对 x 轴的静矩

M_y — 对 y 轴的静矩

$\mu=$常数时，得D的形心坐标：

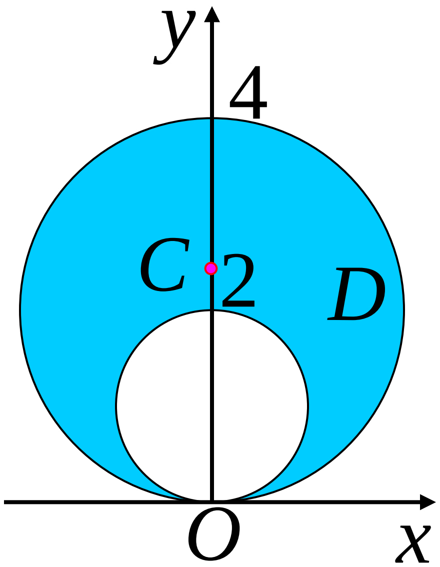
$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$

（A为D的面积）

静矩特点2：
若坐标轴穿过图形D的形心，则静矩必为0,反之亦然.

例5. 求位于两圆 $\rho = 2\sin\theta$ 和 $\rho = 4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.

解: 利用对称性可知 $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A} = 0$



而

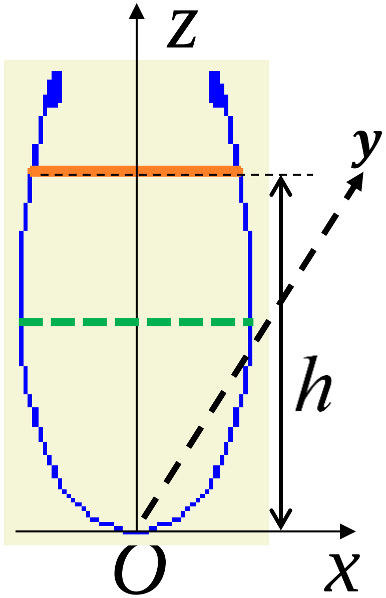
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3\pi}\iint_D \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho = \frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{7}{3}$$

例6. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为 $9x^2=z(3-z)^2, 0\le z<3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液, 不计炉体的自重, 求它的质心.



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上, 故其坐标为

$$\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=\frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

采用柱面坐标, 则炉壁方程为 $9\rho^2=z(3-z)^2$, 因此

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h \mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^h\frac{\pi}{9}z(3-z)^2\mathrm{d}z$$

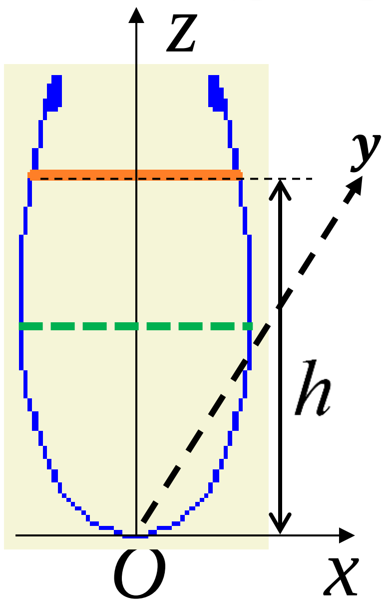
$$V=\frac{\pi}{9}h^3\left(\frac{9}{2}-2h+\frac{1}{4}h^2\right)$$

$$\iiint_\Omega \mathbf{z}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\mathbf{z}=\int_0^h z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^h\frac{\pi}{9}z^2(3-z)^2\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{9}h^3\left(3-\frac{3}{2}h+\frac{1}{5}h^2\right)$$

$$\therefore\quad \bar{z}=h\,\frac{60-30h+4h^2}{90-40h+5h^2}$$

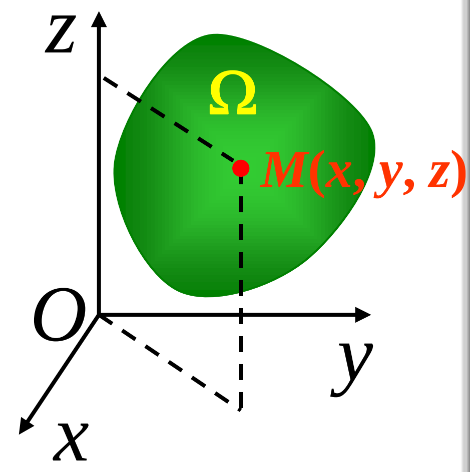


质点的转动惯量：$I=mr^2$

四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算.

设物体占有空间区域 Ω, 有连续分布的密度函数 $\rho(x, y, z)$. 该物体位于 (x, y, z) 处的微元对 z 轴的转动惯量为



$$\mathrm{d}I_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量:

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_O = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

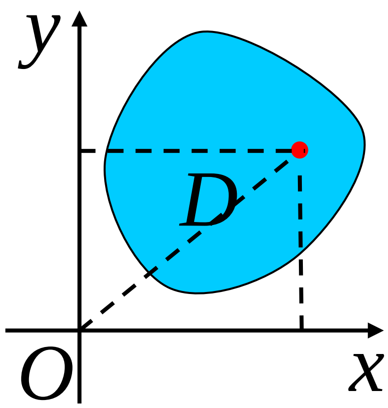
如果物体是平面薄片，面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分.

$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

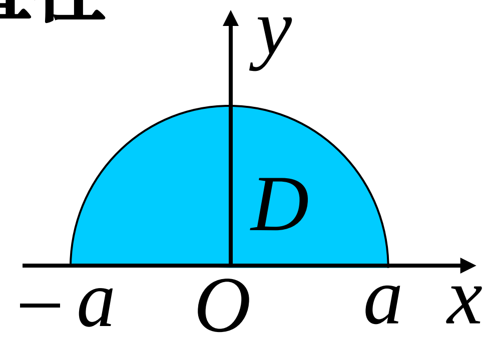
$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_O=\iint_D (x^2+y^2)\,\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



例7. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量.

解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$



$$\therefore I_x=\iint_D y^2\mu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D \rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

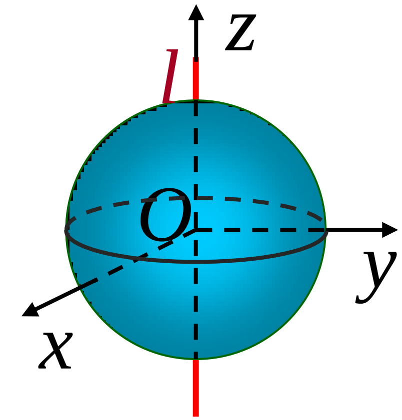
$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\frac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}Ma^2$$

$$\boxed{I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

例8. 求密度为ρ的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量.



解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴，设球所占域为 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le a^2$，则

$$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{(用球坐标)}$$

$$=\rho\iiint_\Omega (\underline{r^2\sin^2\varphi}\cos^2\theta+\underline{r^2\sin^2\varphi}\sin^2\theta)\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{5}\pi\rho a^5\cdot 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{5}a^2M$$

球体的质量

$$M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$$

五、物体的引力

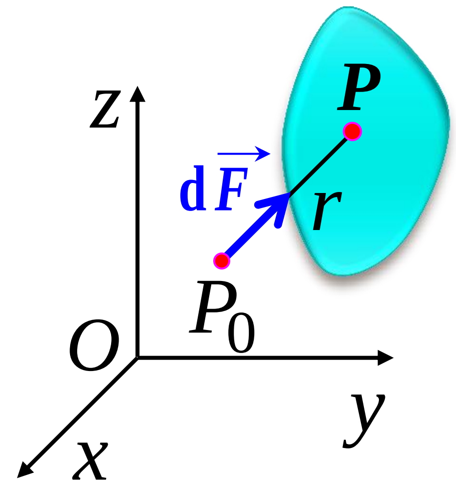
$F = G\dfrac{mM}{r^2}$，$G = 6.67\times 10^{-11}$

设物体占有空间区域 Ω，其密度函数 $\rho(x,y,z)$ 连续，物体对位于点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的单位质量质点的引力为 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$，引力元素在三坐标轴上分量为

$$\mathrm{d}F_x = G\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_y = G\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$$



其中 $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

因此引力分量为

$$F_x = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$F_y = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

$$F_z = G\iiint_\Omega \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\,\mathrm{d}v$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

若求 xOy 面上的平面薄片D,对点P_0处的单位质量质点的引力分量,则上式改为D上的二重积分,密度函数改为$\mu(x,y)$即可.

若求 xOy 面上的平面薄片D，对点P_0处的单位质量质点的引力分量，则上式改为D上的二重积分，密度函数改为$\mu(x,y)$即可.

- $P_0(x_0, y_0)$

$$F_x = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(x-x_0)}{\rho^3}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(y-y_0)}{\rho^3}\mathrm{d}\sigma$$

$$(\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

若求 xOy 面上的平面薄片 D, 对点 P_0 处的单位质量质点的引力分量, 则上式改为 D 上的二重积分, 密度函数改为 $\mu(x,y)$ 即可.

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$P(x,y,0)\in D$

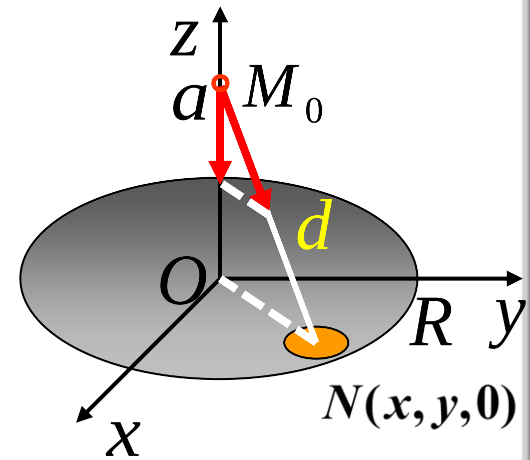
$$F_x = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(x-x_0)}{\rho^3}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(y-y_0)}{\rho^3}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$F_z = G\iint_D \frac{\mu(x,y)(0-z_0)}{\rho^3}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$(\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}\,)$$

例9. 设面密度为μ，半径为R的圆形薄片 $x^2+y^2\le R^2$，$z=0$，求它对位于点 $M_0(0,0,a)\ (a>0)$ 处的单位质量质点的引力.



解: 由对称性知引力 $\vec{F}=(0,0,F_z)$

$$F_z=\iint_D \frac{G\mu(0-a)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma$$

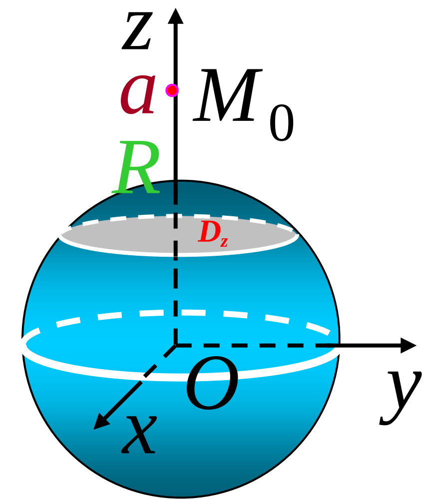
$$=-Ga\mu\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}=-Ga\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

$$=2\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\boxed{F_z=G\iint_D\frac{\mu(x,y)(0-z_0)}{\rho^3}\mathrm{d}\sigma}$$

例10. 求半径为R的均匀球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>R)$的单位质量质点的引力.

解: 利用对称性知引力分量 $F_x=F_y=0$



$$F_z=\iiint\limits_{\Omega} G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$=G\rho\int_{-R}^{R}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$F_z = \cdots = G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi G\rho \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi G\rho \left(-2R - \frac{1}{a}\int_{-R}^{R}(z-a)\,\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right)$$

$$= -G\frac{M}{a^2}$$

$M = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho$ **为球的质量**