§6_2_2 全微分

/* Total Differentials */

一元函数 $y=f(x)$ 的微分

$$\Delta y = \underbrace{A\Delta x}_{\downarrow} + o(\Delta x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases} \text{近似计算} \\ \text{估计误差} \end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

*二、全微分在近似计算中的应用

一、全微分的定义

定义. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点(x, y)某邻域有定义，如果函数在点(x, y)的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$ 可表示为

$$\Delta z = \boxed{A\Delta x + B\,\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

线性主部

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x, y)$ 在点(x, y) 可微，$A\Delta x + B\,\Delta y$称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$

若函数在域 D 内各点都可微，则称此函数在D 内可微.

全微分的几何意义 用切面立标的增量近似曲面立标的增量

$$z = f(x,y)$$

$$M(x_0, y_0, z_0)$$

$$N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$$

$\Delta z = AN$：曲面立标的增量

过点M的切平面：

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

即：

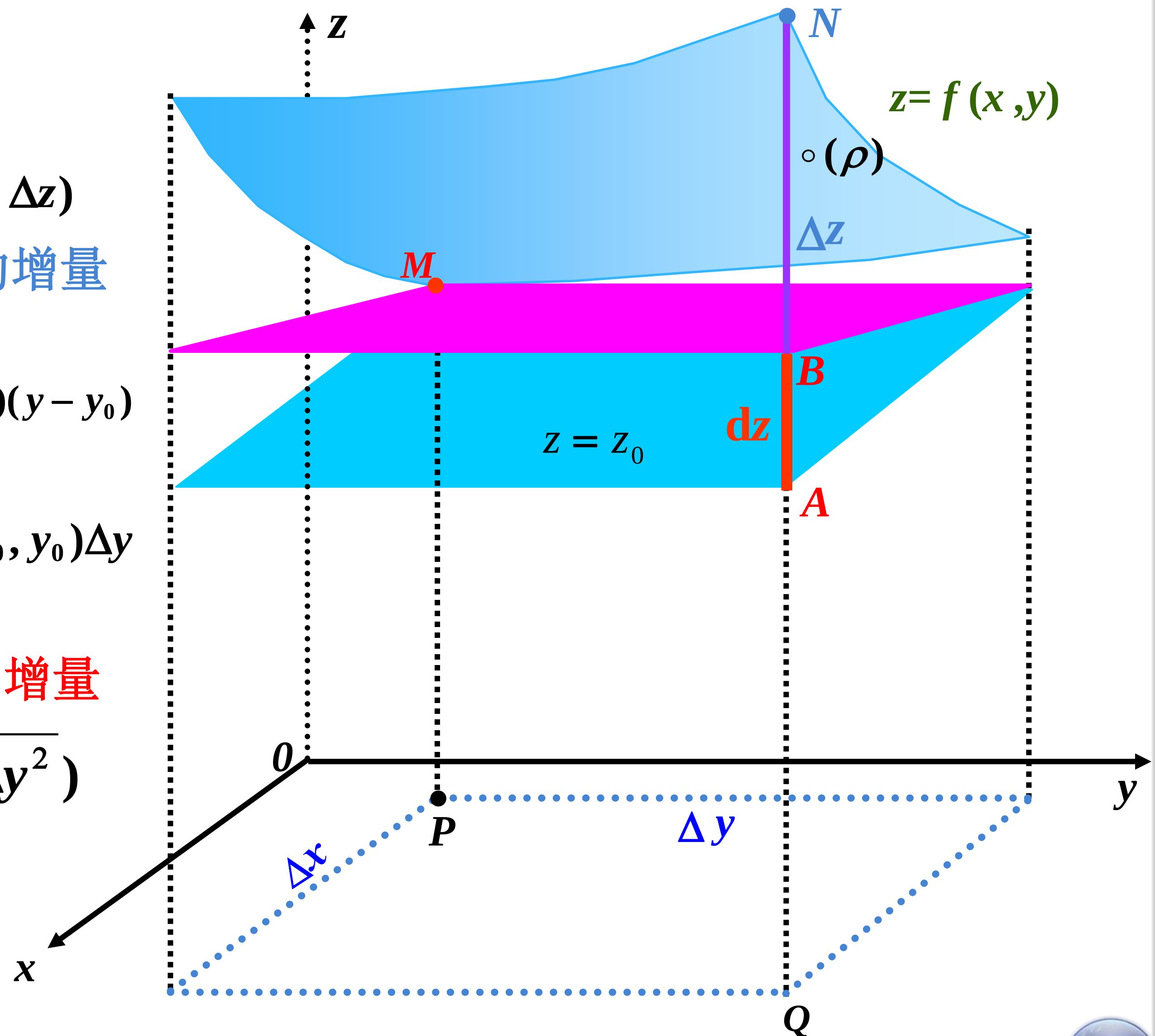
$$\mathrm{d}z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y = z - z_0 = AB$$

$\mathrm{d}z = AB$：切面立标的增量

$$\Delta z = \mathrm{d}z + \circ(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = AB + BN$$

当$\Delta x, \Delta y$很小时

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z$$



当函数可微时,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y)$$

即

> 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微 $\longrightarrow$ 函数在该点连续

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 函数可微

定理1.(必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) 可微，则该函数在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 因函数在点(x,y) 可微，故$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，

令 $\Delta y=0$，得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$，因此有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

(1) 函数可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 偏导数存在

例如, **函数** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, **但**

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ **因此, 函数在点 (0, 0) 不可微.**

定理2. (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 连续，则函数在该点**可微分**.

证： $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)]$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$= [f_x(x, y) + \alpha]\Delta x + [f_y(x, y) + \beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0 \right) \qquad \boxed{(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)}$$

$$\Delta z = \cdots$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

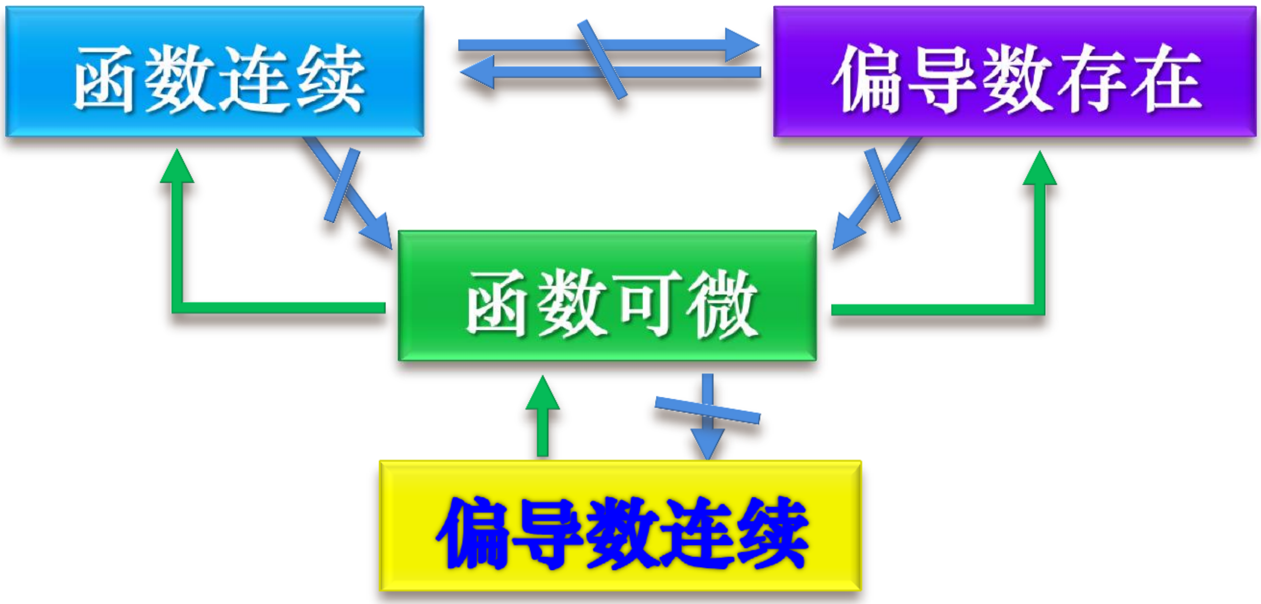
$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0 \right)$$

注意到 $\left| \dfrac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho} \right| \le |\alpha| + |\beta|$**，故有**

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ **在点** (x, y) **可微.**

多元函数重要知识点小结



思考: 一元函数四者的关系?

例如：

函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，但偏导函数在点 (0,0) 不连续，而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微.

证: 1) 因 $\left| xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le |xy|$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0=f(0,0)$ 故函数在点 (0,0) 连续.

例如：

函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

证 2) $\because\ f(x,0)\equiv 0,\ \therefore\ f_x(0,0)=0;$ **同理** $f_y(0,0)=0.$

3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=y\ \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点$P(x,y)$沿射线$y=|x|$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(|x|\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{\cancel{|x|^3}}{2\sqrt{2}\cancel{|x|^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right)$$

极限不存在, $\therefore f_x(x,y)$ **在点(0,0)不连续.**

同理, $f_y(x,y)$**在点(0,0)也不连续.**

4) 下面证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|=\left|\frac{\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{\rho}}{\rho}\right|$$

$$\le\left|\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\le|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to0}0$$

$\therefore f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 可微.

说明: 此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.

推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}_{\text{关于}x\text{的偏微分}} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}_{\cdots y\cdots} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z}_{\cdots z\cdots}$$

故上式, 也称为微分的**叠加原理**.

即，二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

习惯上表示为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上表示为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

例1. 计算函数 $z = \mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \mathrm{e}^2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2\mathrm{e}^2$$

$$\therefore \quad \left.\mathrm{d}\,z\right|_{(2,1)} = \mathrm{e}^2 \mathrm{d}\,x + 2\mathrm{e}^2 \mathrm{d}\,y = \mathrm{e}^2(\mathrm{d}\,x + 2\mathrm{d}\,y)$$

例2. 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}u = \mathrm{d}(x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz})$

从外到内
逐层微分

$$= \mathrm{d}(x) + \mathrm{d}(\sin\frac{y}{2}) + \mathrm{d}(e^{yz})$$

$$= \mathrm{d}x + \cos\frac{y}{2}\mathrm{d}(\frac{y}{2}) + e^{yz}\,\mathrm{d}(yz)$$

$$= \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}\mathrm{d}y + e^{yz}(z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z)$$

$$= \mathrm{d}x + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz})\mathrm{d}y + y e^{yz}\mathrm{d}z$$

其中: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz},\quad \frac{\partial u}{\partial z} = y e^{yz}$

练习： $u = x^{y^z}, (x, y > 0)$ 求偏导数及全微分.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= y^z x^{y^z - 1}\mathrm{d}x + x^{y^z}\ln x \cdot z\, y^{z-1}\mathrm{d}y$$

$$+ x^{y^z}\ln x \cdot y^z \ln y\, \mathrm{d}z$$

*二、全微分在近似计算中的应用

1. 近似计算

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

由全微分定义 $\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时，有近似等式:

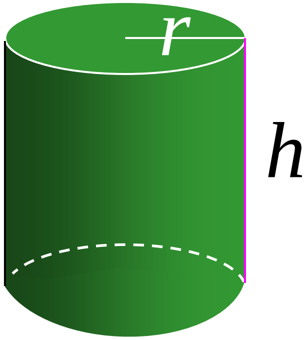
$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于误差分析或近似计算)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例3. 有一圆柱体受压后发生形变,半径由 20cm 增大到 20.05cm，高度由100cm 减少到 99cm，求此圆柱体体积的近似改变量.



解: 已知 $V=\pi r^2 h$, 则

$$\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h$$

$$r=20,\quad h=100,$$

$$\Delta r=0.05,\quad \Delta h=-1$$

$$\Delta V \approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1)=-200\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

即受压后圆柱体体积减少了 $200\pi\ \mathrm{cm}^3$.

例4. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x(x,y)=y\,x^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则

$$\begin{aligned}1.04^{2.02}&=f(1.04,\ 2.02)\\&\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y\\&=1+2\times0.04+0\times0.02=1.08\end{aligned}$$

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差界,

则 $|\Delta z| \approx |f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y|$

$$\le |f_x(x, y)||\Delta x| + |f_y(x, y)||\Delta y|$$

$$\le |f_x(x, y)|\delta_x + |f_y(x, y)|\delta_y \overset{令}{=\!=} \delta_z$$

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x, y, z 的绝对误差界，

z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

特别注意:

$$(1)\quad z = xy\text{时},\ \frac{\delta_z}{|z|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

$$(2)\quad z = \frac{y}{x}\text{时},$$

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|(-\frac{y}{x^2})\cdot\frac{x}{y}\right|\delta_x + \left|\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{y}\right|\delta_y = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

- **乘除后的结果相对误差变大**
- **很小的数不能做除数**

类似可以推广到三元及三元以上的情形.

例5. 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$$a=12.5\pm 0.01,\ b=8.3\pm 0.01,\ C=30^\circ\pm 0.1^\circ$$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解: $\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b+\left|\frac{\partial S}{\partial C}\right|\delta_C$

$$=\frac{1}{2}|b\sin C|\delta_a+\frac{1}{2}|a\sin C|\delta_b+\frac{1}{2}|ab\cos C|\delta_C$$

$a=12.5,\ b=8.3,\ C=30^\circ,\ \delta_a=\delta_b=0.01,\ \delta_C=\frac{\pi}{1800}$

故绝对误差约为 $\delta_S=0.13$

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 12.5\times 8.3\times\sin 30^\circ\approx 25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\frac{\delta_S}{|S|}=\frac{0.13}{25.94}\approx 0.5\%$

内容小结

1. 微分定义: (以 $z = f(x,y)$ 为例)

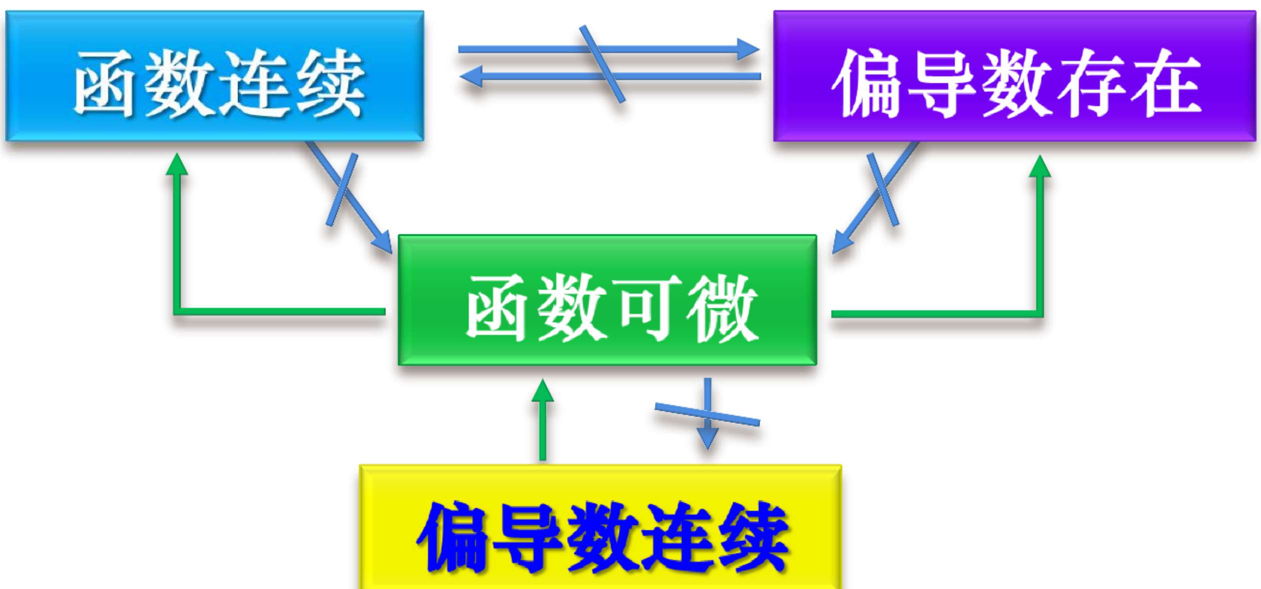
定义

$$\Delta z = \underline{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y} + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



3. 微分应用

- **近似计算**

$$\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)$$

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

- **估计误差**

绝对误差 $\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$

相对误差 $\dfrac{\delta_z}{|z|} = \left|\dfrac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\dfrac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$