2017-2018第二学期

高 等 数 学

(同济版)

任课教师： 时 彬 彬

部　　门：信息学院-数学系

办 公 室 ：文理大楼 725室

第五章

空间解析几何与向量代数

第一部分 向量代数

第二部分 空间解析几何

在三维空间中:

空间形式 — **点,线,面**

$\downarrow\uparrow$

数量关系 — **坐标, 方程（组）**

基本方法 — **坐标法;向量法**

第一节 向量及其线性运算

/*Vector and Linear operations*/

一、空间直角坐标系

二、向量的运算

三、向量的模、方向角、投影

四、向量的数量积

五、向量的向量积

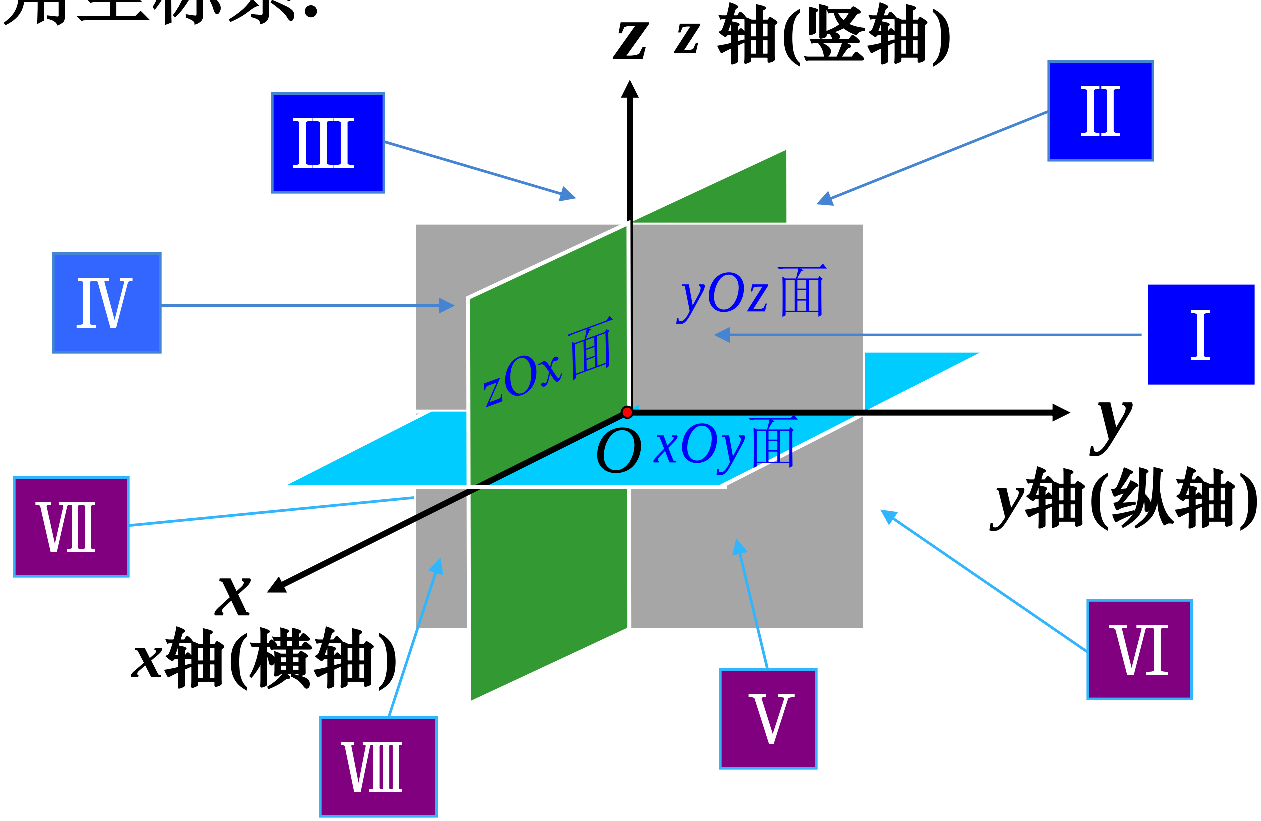
六、向量的混和积

一、空间直角坐标系 $Oxyz$系 或 $[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$坐标系

空间直角坐标系的基本概念

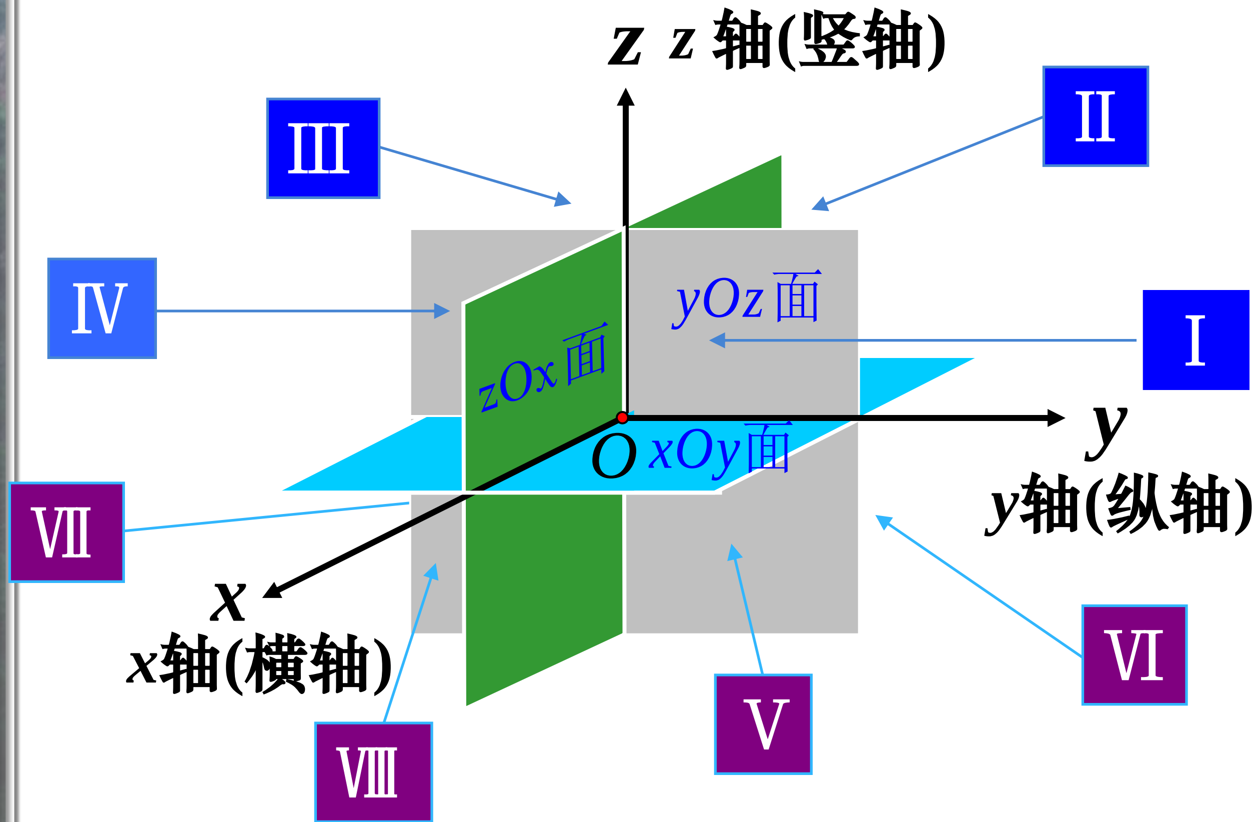
过空间一定点 O,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)



一、空间直角坐标系

• 卦限(八个)



I(+,+,+)
II(–,+,+)
III(–,–,+)
IV(+,–,+)
V(+,+,–)
VI(–,+,–)
VII(–,–,–)
VIII(+,–,–)

例 下列点在哪个卦限？ A(1,–2,3) B(2,–2,–4) C(–5,–1,3)

在直角坐标系下

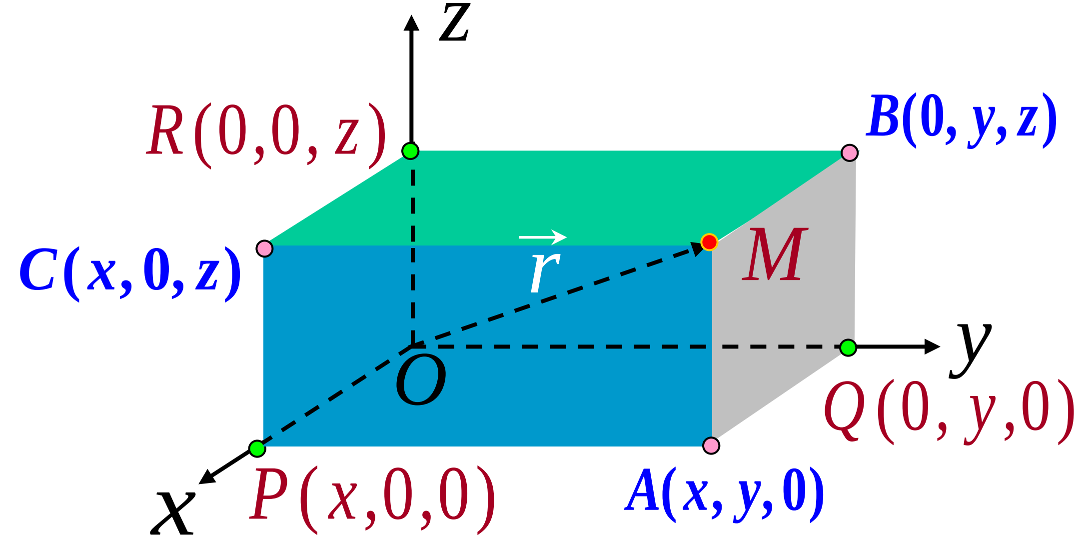
点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组 (x,y,z) $\xleftrightarrow{1--1}$ 向径 $\vec{r}$

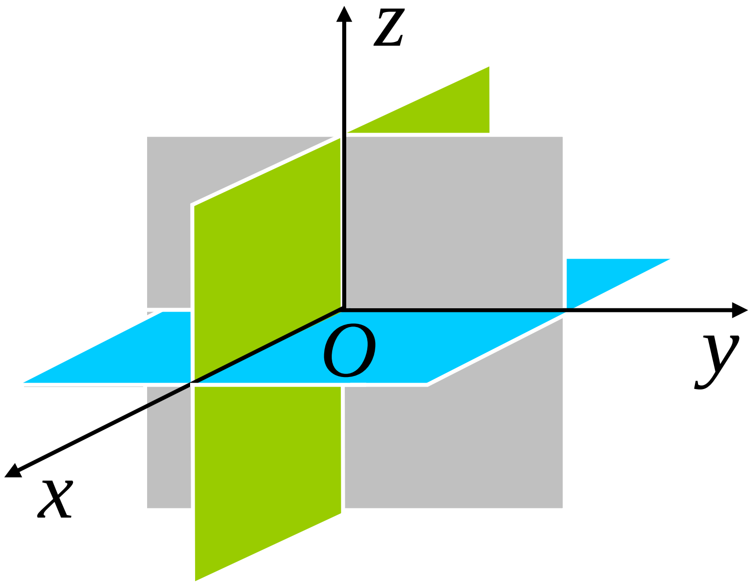
(称为点 M 的坐标)

特殊点的坐标:

原点 $O(0,0,0)$; 坐标轴上的点 P, Q , R ;

坐标面上的点 A, B, C





坐标轴:

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

坐标面:

$$xOy\text{面} \leftrightarrow z=0$$

$$yOz\text{面} \leftrightarrow x=0$$

$$zOx\text{面} \leftrightarrow y=0$$

二、向量/*Vector*/的概念与运算

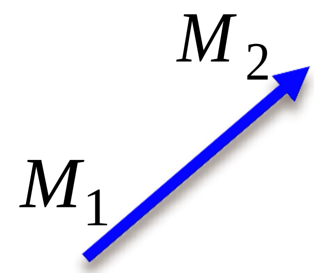
向量: 既有大小, 又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法: 有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 $\vec{a}$, 或 $\boldsymbol{a}$.

向量的模: 向量的大小, 记作 $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\boldsymbol{a}|$.

自由向量: 与起点无关的向量, 故可以平移. (数学仅研究此类向量)

单位向量: 模为 1 的向量, 记作 $\vec{e}$ 或 $\boldsymbol{e}$.

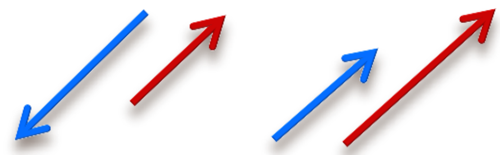


零向量: 模为 0 的向量, 记作 $\vec{0}$, 或 $\mathbf{0}$.

零向量的方向? **任意方向.**

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 大小相等, 方向相同, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相等, 记作 $\vec{a}=\vec{b}$;

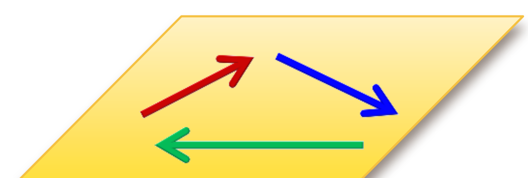
若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同或相反, 则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行, 记作 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$; 规定: 零向量与任何向量平行;



与 $\vec{a}$ 的模相同, 但方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负向量, 记作 $-\vec{a}$;

因平行向量可平移到同一直线上, 故两向量平行又称两向量共线.

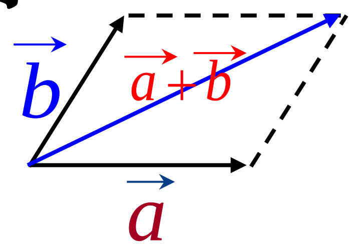
若 $k\ (\geq 3)$ 个向量经平移可移到同一平面上, 则称此 k 个向量共面.

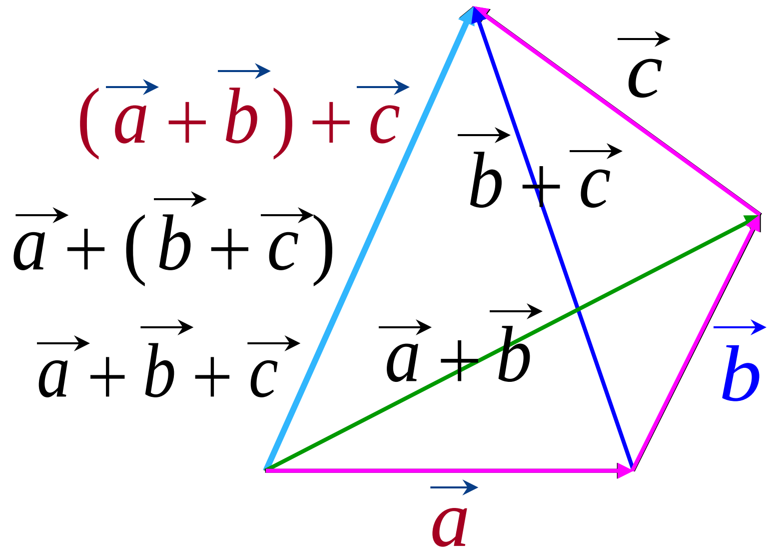


二、向量/*Vector*/的概念与运算

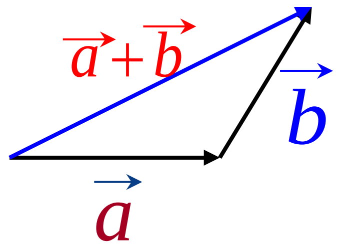
1. 向量的加法

平行四边形法则:





三角形法则:

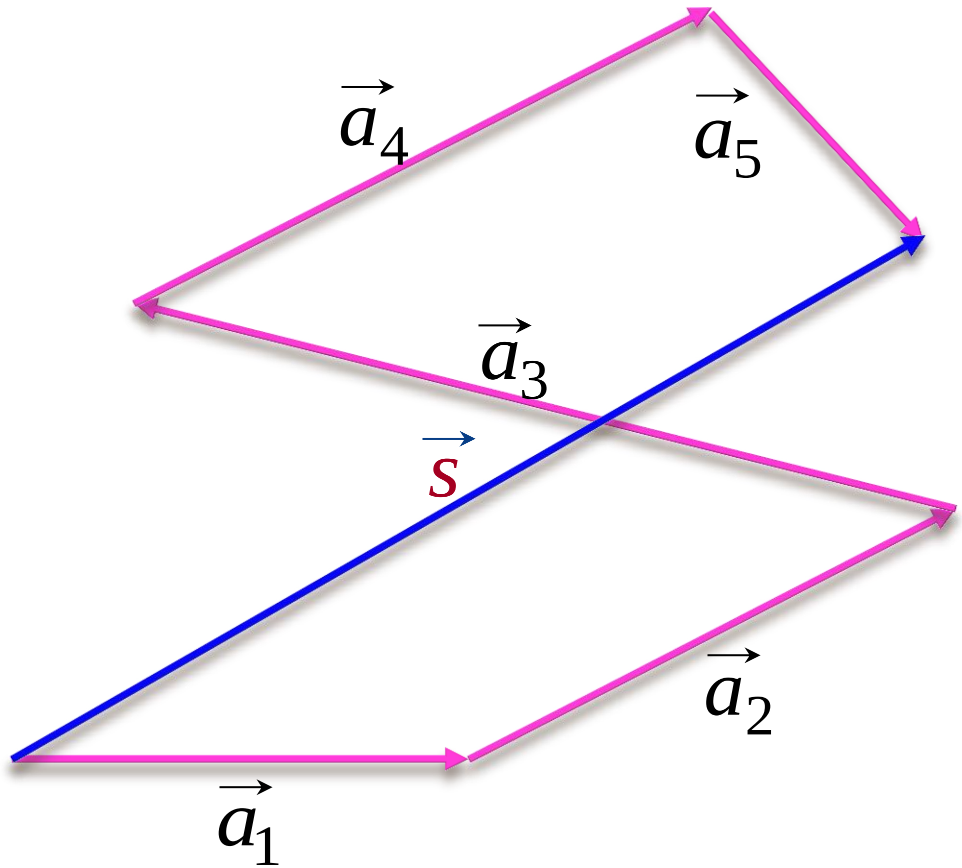


运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

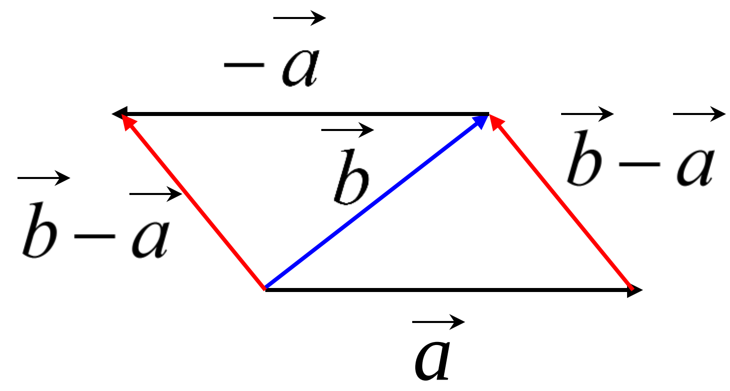
三角形法则可推广到多个向量相加.

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$$



2. 向量的减法

$$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$$



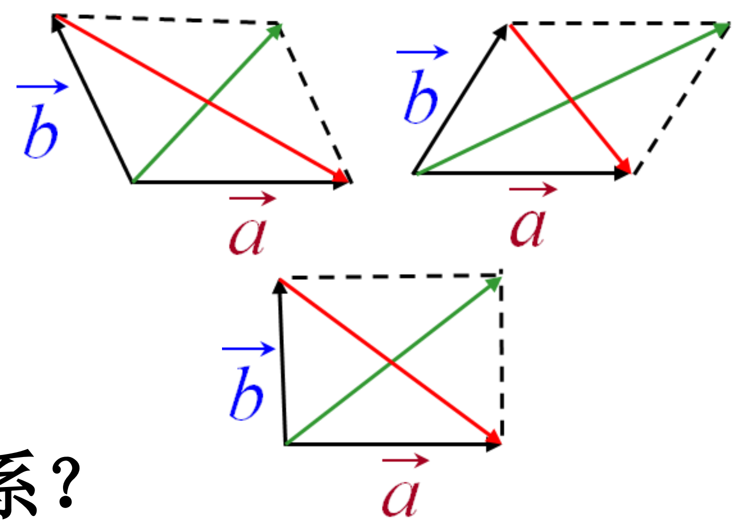
特别当$\vec{b}=\vec{a}$时，有

$$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

三角不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



问题：向量的和与差的大小关系？

3. 向量与数的乘法

λ 是一个数, λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量, 记作 $\lambda\vec{a}$.

规定: $\lambda>0$时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向, $|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda<0$时, $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向, $|\lambda\vec{a}|=-\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda=0$时, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

总之: $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$

运算律: 结合律 $\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, 则有单位向量 $\vec{e}_{\vec{a}}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量, 则

$$\vec{a} /\!/ \vec{b} \rightleftharpoons \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

证: " $\longrightarrow$ ". 设 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$, 取 $\lambda = \pm \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}, \vec{b}$ 同向时取正号

反向时取负号, 则 $\vec{b}$ 与 $\lambda \vec{a}$ 同向, 且

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

故 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设又有 $\vec{b} = \mu \vec{a}$, 则 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$

而 $|\vec{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

“ $\longleftarrow$ ”. 已知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$， 则

当 $\lambda=0$ 时，$\vec{b}=\vec{0}$

当 $\lambda>0$ 时，$\vec{a},\vec{b}$ 同向 $\Longrightarrow$ $\vec{a}/\!/\vec{b}$

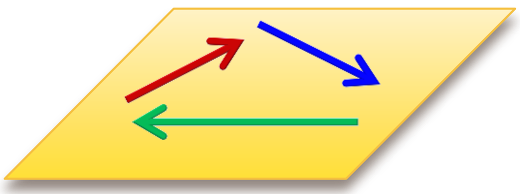
当 $\lambda<0$ 时，$\vec{a},\vec{b}$ 反向

定理1* $\vec{a}/\!/\vec{b} \Leftrightarrow$ 存在不全为零的实数λ,μ使得 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{a}$与$\vec{b}$ **共线**

定理1** $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3}$ **共面** $\Leftrightarrow$存在不全为零的实数k_1,k_2,k_3使得

$$k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+k_3\overrightarrow{a_3}=\vec{0}$$

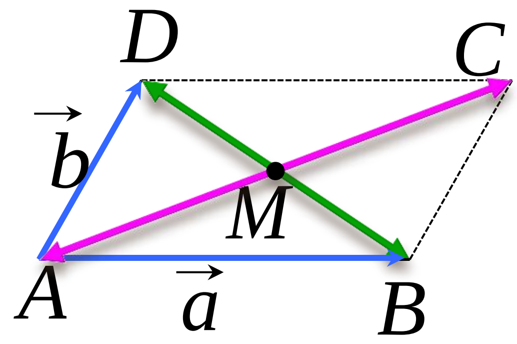


例1. 设 M 为 $\square ABCD$ 对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}$.

解:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MA}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{MB}$$



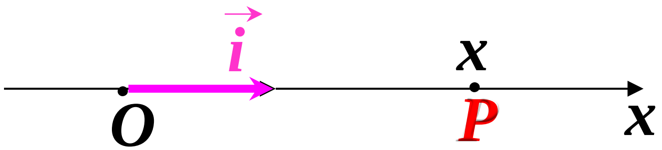
$$\therefore\quad \overrightarrow{MA}=-\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MB}=-\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

定理1. 设 $\vec{a}$ 为非零向量, 则

$$\vec{a} // \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ 为唯一实数})$$

直线上点的坐标



点 $P \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} \leftrightarrow$ 实数 x

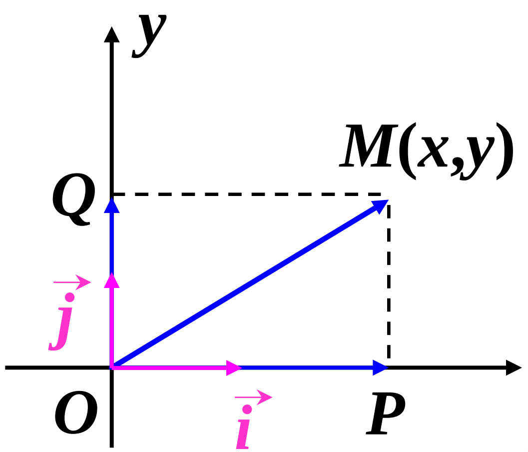
坐标轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是 $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$

平面上点的坐标

点 $M \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$$

坐标面上点 M 的坐标为 (x,y) 的充分必要条件是 $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



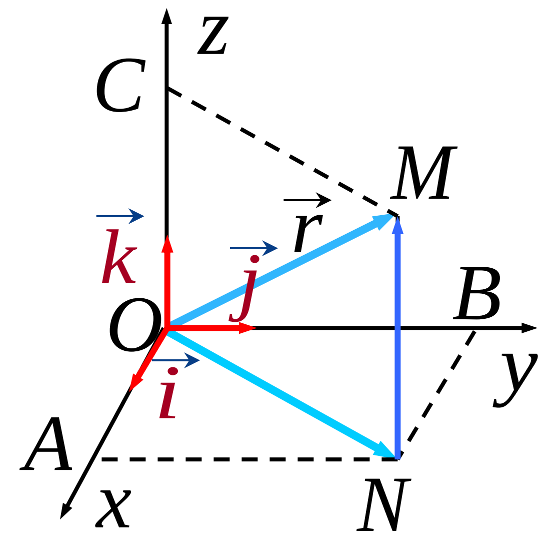
4. 向量在坐标轴上的分向量与向量的坐标

在空间直角坐标系下，**任意向量** $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.
以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，设点 M 的**坐标**为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\overset{\text{记}}{=}(x,y,z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**，x,y,z 称为向量 $\vec{r}$ 的坐标.

利用坐标作向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数, 则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

平行向量对应坐标成比例:

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,

$$\vec{b}\,//\,\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$$

(若 $a_x\times a_y\times a_z\neq 0$)

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z \end{aligned}}$$

例2. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & ① \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2,1,2), \vec{b} = (-1,1,-2)$.

解: $2\times$① $-3\times$②, 得

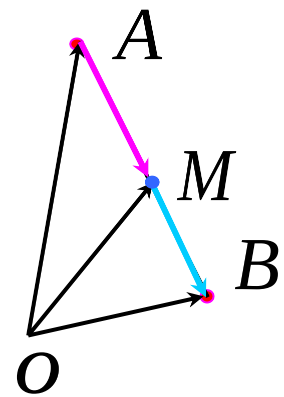
$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (7,-1,10)$$

代入②得

$$\vec{y} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - \vec{b}) = (11,-2,16)$$

例3. 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$，在 AB 所在直线上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解: 设 M 的坐标为 (x, y, z)，如图所示

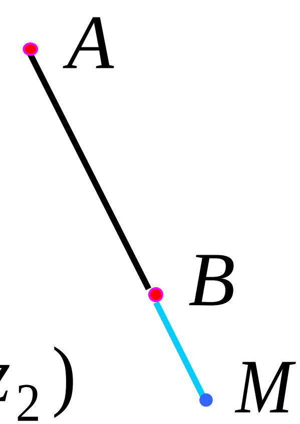


$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$



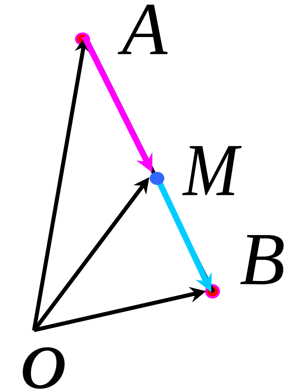
得 $$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

说明: 由

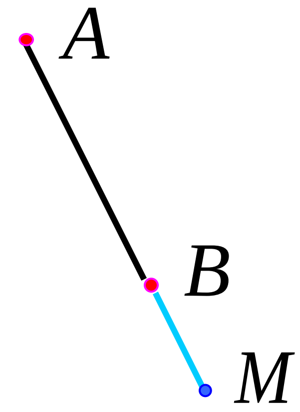
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$

得**定比分点公式**:



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

当 $\lambda=1$ 时, 点 M 为 AB 的中点,于是得

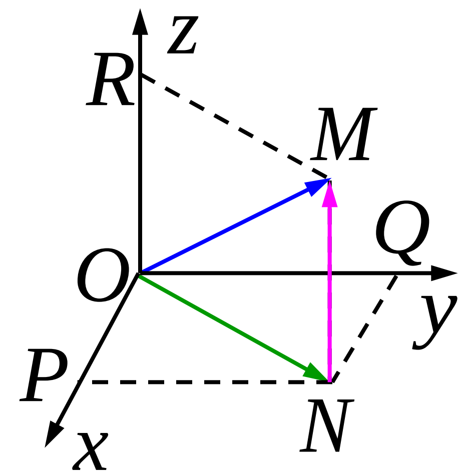


中点公式:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

三、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式



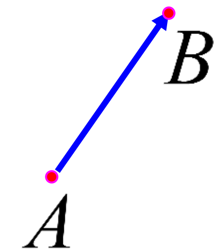
设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

由勾股定理得

$$|\vec{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点$A(x_1,y_1,z_1)$与$B(x_2,y_2,z_2)$, 因



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

得两点间的距离公式:

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例4. 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解: 设该点为 $M(0,0,z)$，因为 $|MA| = |MB|$，

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (7-z)^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2-z)^2}$$

解得 $z = \frac{14}{9}$，故所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

思考:

(1) 如何求在 ***xOy*** 面上与 ***A***, ***B*** 等距离之点的轨迹方程?

(2) 如何求在空间与 ***A***, ***B*** 等距离之点的轨迹方程?

提示:

(1) 设动点为 $M(x,y,0)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$14x+8y+28=0,\ 且\ z=0$$

(2) 设动点为 $M(x,y,z)$, 利用 $|MA|=|MB|$, 得

$$7x+4y-9z+14=0$$

例5. 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 $\vec{e}$.

解:

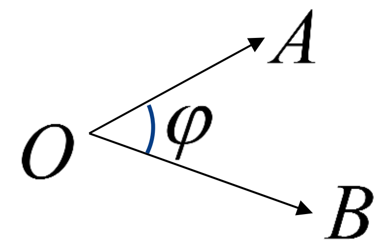
$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)$$

$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. 方向角与方向余弦

设有两非零向量$\vec{a},\vec{b}$, 任取空间一点 **O**, 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角.

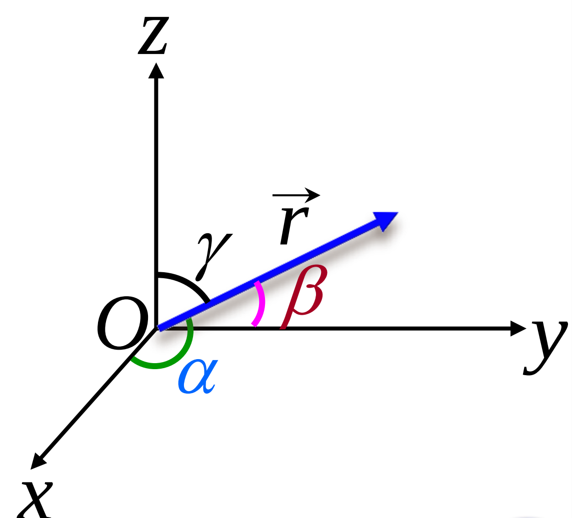
记作$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})=\varphi$



类似可定义向量与轴, 轴与轴的夹角.

给定$\vec{r}=(x,y,z)\ne\vec{0}$, 称$\vec{r}$与三个坐标轴正向的夹角

α,β,γ为其方向角.

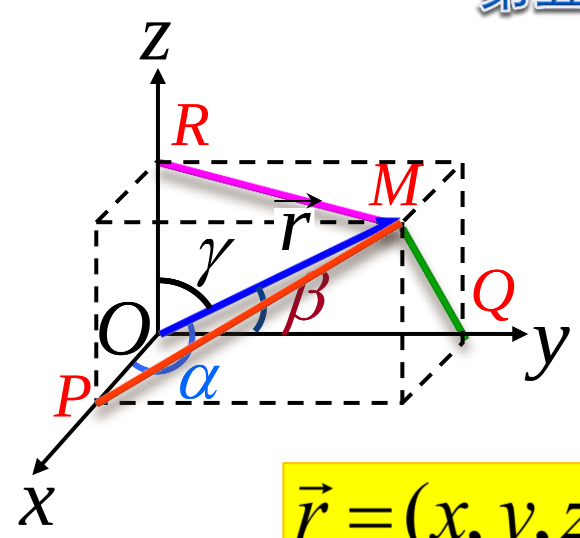


方向角的余弦称为其方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$\vec{r}=(x,y,z)$

方向余弦的性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

向量$\vec{r}$的单位向量：$\vec{e}_{\vec{r}}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

即可得向量 $\vec{r}=|\vec{r}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=|\vec{r}|\vec{e}_{\vec{r}}$

例6. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$,计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模, 方向余弦和方向角.

解:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2})$$

$$=(-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

例7. 设点 A 位于第一卦限, 向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标.

解: 已知 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$, 则

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

因点 A 在第一卦限, 故 $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, 于是

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\vec{e}_{\overrightarrow{OA}} = 6(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= 6(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

故点 A 的坐标为 $(3, 3\sqrt{2}, 3)$.

$$\vec{r} = |\vec{r}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

3. 向量在轴上的投影 /*Projection*/

设 $\vec{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ，

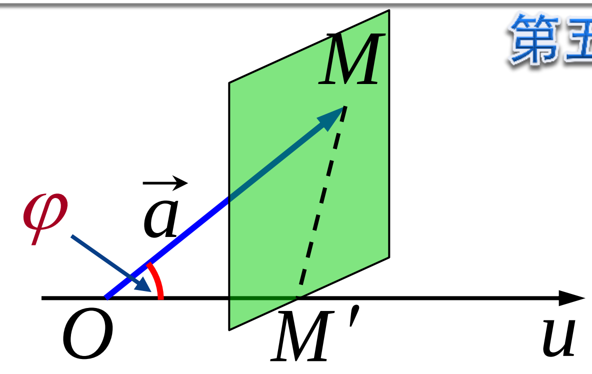
则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影为 $|\vec{a}|\cos\varphi$,

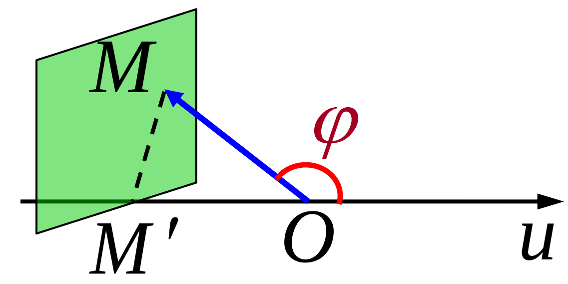
记作 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}$ 或 $(\vec{a})_u$，即

$$(\vec{a})_u = |\vec{a}|\cos\varphi$$

例如, $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$

在坐标轴上的投影分别为 a_x,a_y,a_z.

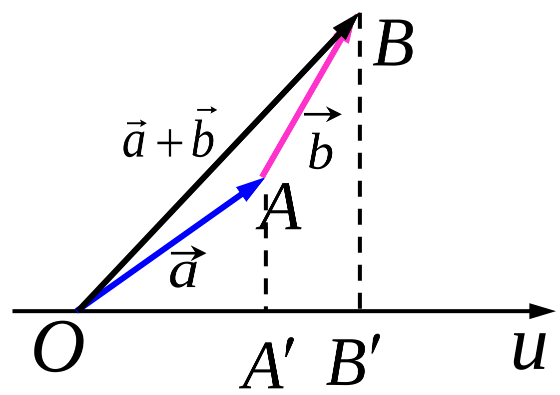




投影的性质

1) $(\vec{a}+\vec{b})_u = (\vec{a})_u + (\vec{b})_u$

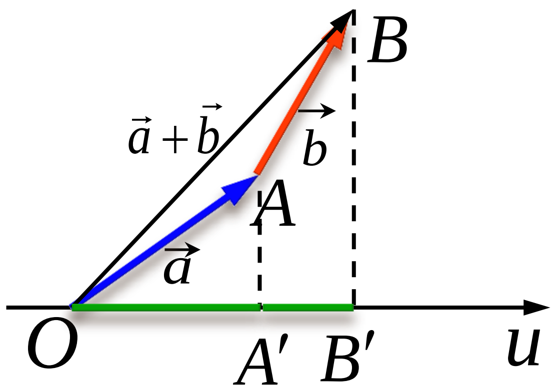
2) $(\lambda\vec{a})_u = \lambda(\vec{a})_u$ (λ为实数)

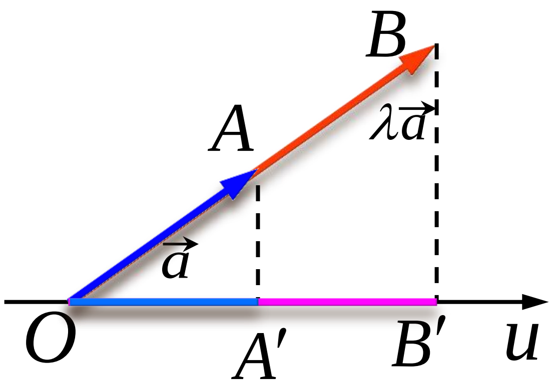


投影的性质

1) $(\vec{a}+\vec{b})_u=(\vec{a})_u+(\vec{b})_u$

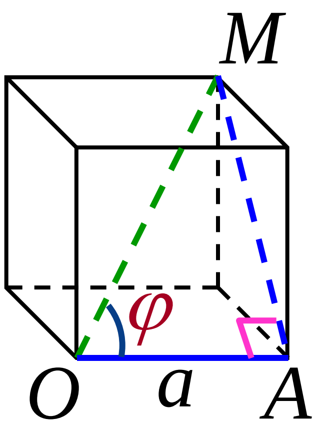
2) $(\lambda\vec{a})_u=\lambda(\vec{a})_u$ **(λ为实数)**





例8. 设立方体的一条对角线为*OM*, 一条棱为 *OA*, 且 $|OA| = a$, 求$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影.

解: 如图所示, 记 $\angle MOA = \varphi$,



$$\cos\varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$$