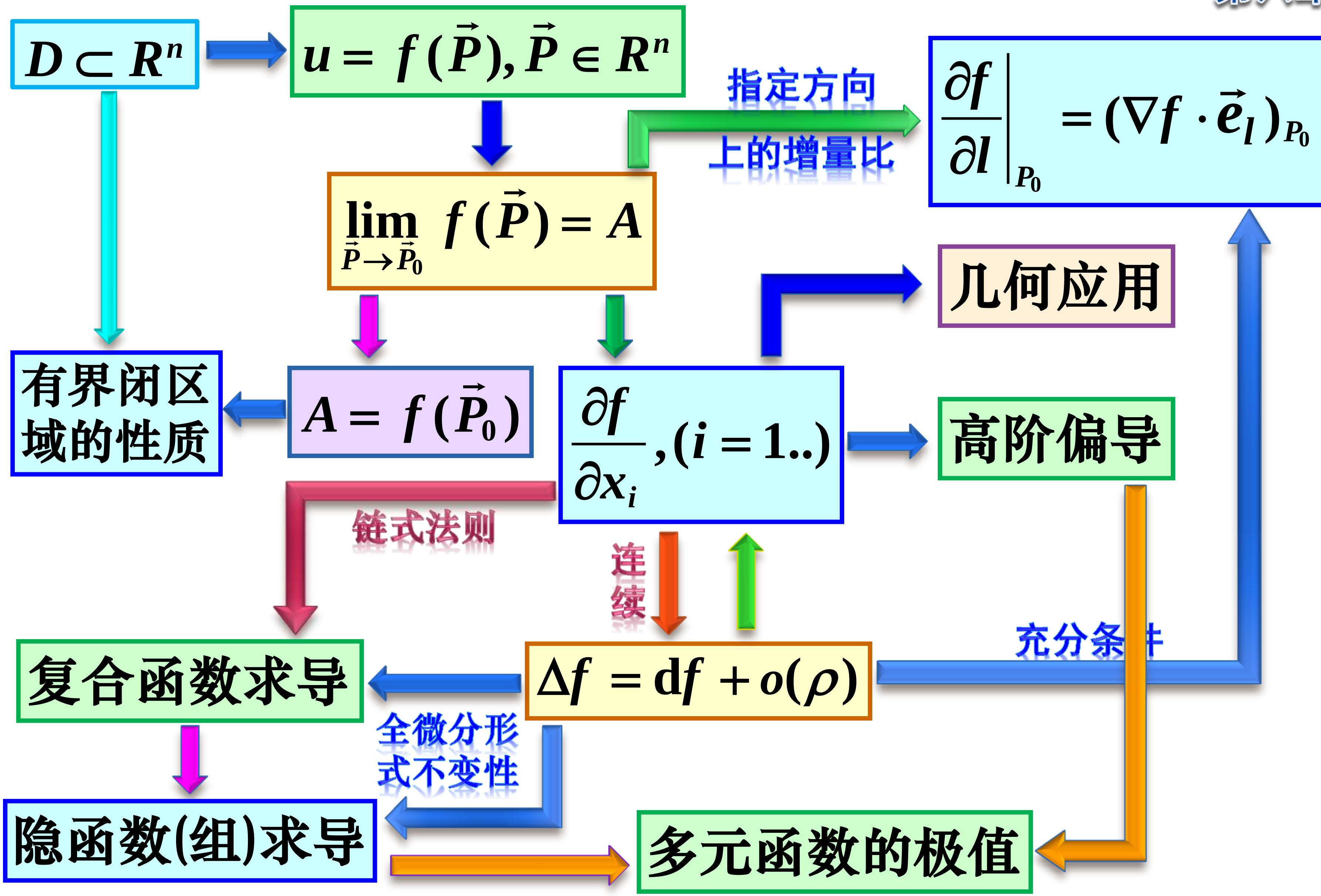
第六章

习 题 课

制作人：时彬彬


$D\subset R^n$
$u=f(\vec{P}),\vec{P}\in R^n$
指定方向上的增量比
$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=(\nabla f\cdot\vec{e}_l)_{P_0}$
$\lim\limits_{\vec{P}\to\vec{P}_0} f(\vec{P})=A$
几何应用
有界闭区域的性质
$A=f(\vec{P}_0)$
$\frac{\partial f}{\partial x_i},(i=1..)$
高阶偏导
链式法则
连续
充分条件
复合函数求导
$\Delta f=\mathrm{d}f+o(\rho)$
全微分形式不变性
隐函数(组)求导
多元函数的极值

内 容 提 要

一、多元函数的基本概念

两点要求:

(1)会求二重极限

(可利用求一元函数极限的方法)

(2)会证明二重极限不存在

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

由一元基本初等函数(自变量可不同)和常数,经有限次四则运算和有限次复合并能用一个式子表示的函数,称为(多元)初等函数.它是代入法求极限的依据.

例. 讨论二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y}$ 时, 下列算法**是否正确**?

解法1 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

解法2 令 $y = kx$, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k} = 0$

解法3 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,$

$$原式 = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$$

分析:

~~解法~~1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = 0$

此法第一步排除了沿坐标轴趋于原点的情况,第二步未考虑分母变化的所有情况, 例如, $y=\dfrac{x}{x-1}$时, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1$, 此时极限为 1 .

~~解法~~2 令 $y=kx$, 原式 $=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{k}{1+k}=0$

此法排除了沿曲线趋于原点的情况. 例如 $y=x^2-x$ 时

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2}{x^2}=-1$$

~~解法~~3 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 原式 $= \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 0$

此法忽略了 θ 的任意性, 当 $r \to 0, \theta \to -\frac{\pi}{4}$ 时

$$\frac{r\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{r\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)}$$ 极限不存在!

由以上分析可见, 三种解法都不对, 因为都不能保证自变量在定义域内以任意方式趋于原点. 同时还可看到, 本题极限实际上不存在.

特别要注意, 在某些情况下可以利用极坐标求极限, 但要注意在定义域内 r, θ 的变化应该是任意的.

二、偏导数

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\left\{\begin{array}{l}\text{先代后求(复杂时)}\\\text{先求后代}\\\text{利用定义}\end{array}\right.$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法(或公式)

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

三、全微分

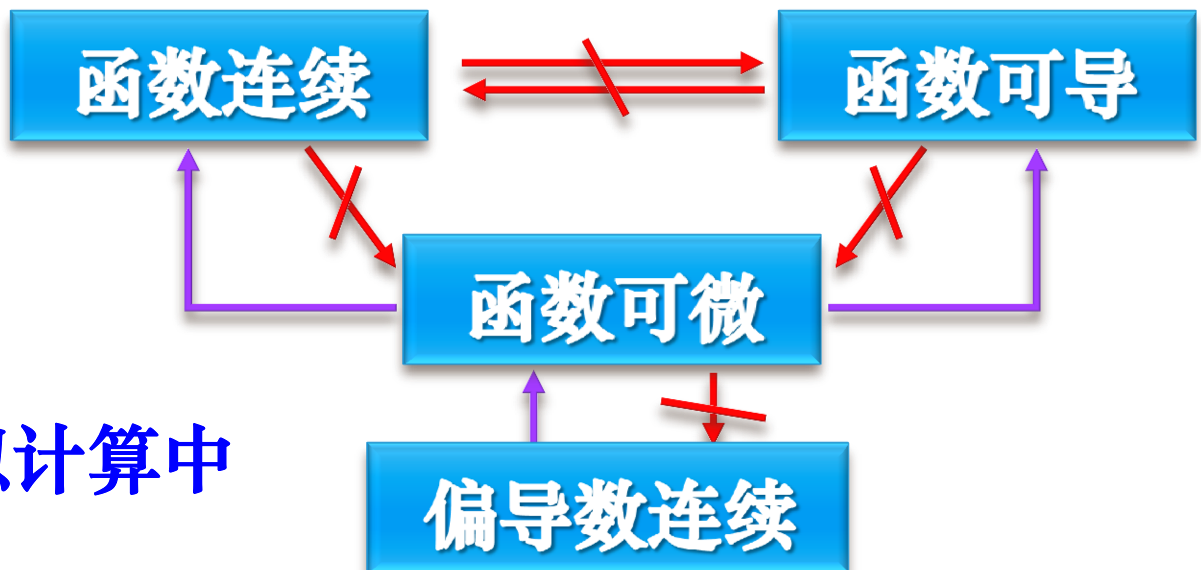
1. 微分定义： $(\, z = f(x,y) \,)$

$$\Delta z = \underline{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y} \quad + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}\, z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系：



3. 微分在近似计算中的应用

四、复合函数求导法则

1. 复合函数求导的链式法则

“链路相乘, 分路相加, 单路求导, 叉路偏导”

2. 全微分形式不变性

对 $z = f(u, v)$,不论 u , v 是自变量还是因变量,

$$\boxed{\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\mathrm{d}z = f_1'\cdot\mathrm{d}u + f_2'\cdot\mathrm{d}v}$$

五、隐函数求导

偏连；非空；非零

1. 隐函数(组) 存在定理 (条件： 1 、2、3)

2. 隐函数 (组) 求导方法

方法1. 利用复合函数求导法则直接计算；(提倡)

方法2. 利用微分形式不变性； (提倡)

方法3. 代公式

六、偏导数的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式I情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

在对应$t=t_0$处的切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

2)参数式II情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

在点M处的切向量

切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$

六、偏导数的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

3) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

在点M处的切向量

$$\vec{T}=\left(1,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{M},\ \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{M}\right)\qquad \vec{T}=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}\right|_{M}$$

六、偏导数的几何应用

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$

在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$处的**法向量**

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)_M$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$ 向上的方向

与z轴正向成锐角

或 $\vec{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$ 向下的方向

与z轴正向成钝角

七、方向导数与梯度

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

注：f 可微,保证方向导数存在

2. 梯度

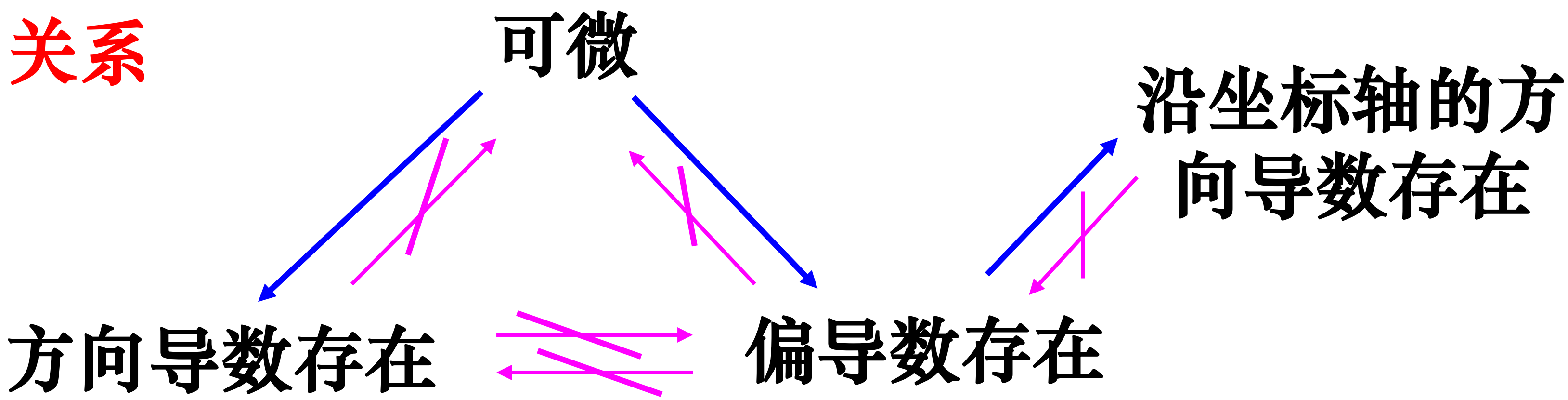
- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\nabla f,\qquad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=(f_x(x,y),\,f_y(x,y))$$

3. 关系



- 方向导数沿梯度方向最大,最大值为梯度的模.

八、多元函数的极值及其求法

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值，

设拉格朗日函数 $L(x, y; \lambda = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点．

3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数，确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值 (这是我们要掌握的方法)

重要题型

1.(6分)证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.

证明：令 $y=kx^3$,故而当$x\to 0$时$y\to 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \frac{x^3kx^3}{x^6+(kx^3)^2}$$

$$=\frac{k}{1+k^2}$$

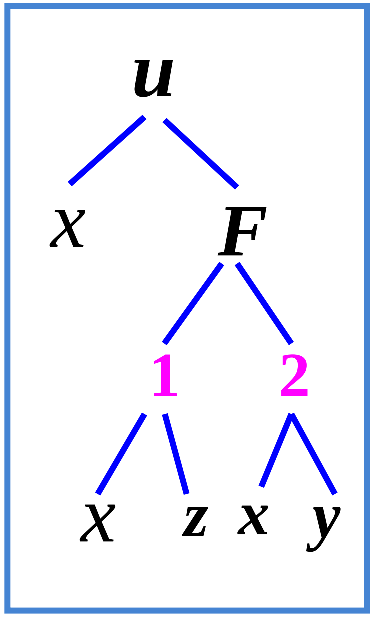
结果与k有关,因此极限不存在.

2.(6分)设函数 $u = x^k F\left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{y}{x}\right)$,其中$k$为常数,函数$F$具有一阶连续偏导数,试求 $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$ $= kx^k F\left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{y}{x}\right)$

解:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = kx^{k-1}F + x^k F_1' \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right) + x^k F_2' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$= kx^{k-1}F - z x^{k-2}F_1' - yx^{k-2}F_2'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^k F_2' \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1}F_2'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^k F_1' \cdot \frac{1}{x} = x^{k-1}F_1'$$



3． 二元函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微的充分条件是〖 **D** 〗.

A. $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续；

B. $f_x'(x,y)$， $f_y'(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在；

C． $\Delta z - f_x'(x_0, y_0)\Delta x - f_y'(x_0, y_0)\Delta y$ 当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时，是无穷小；

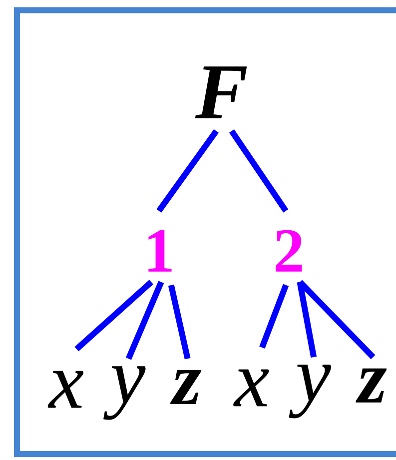
D. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta z - f_x'(x_0, y_0)\Delta x - f_y'(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$。

4.(6分)设 $z = z(x, y)$ 是由 $F\left(x + \dfrac{z}{y},\ y + \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 确定,试求

①　②

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

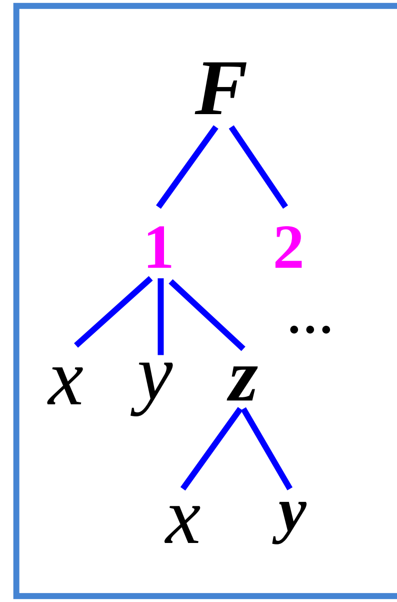
解一: $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1' + F_2'\left(-\dfrac{z}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{y}F_1' + \dfrac{1}{x}F_2'} = \frac{yzF_2' - x^2yF_1'}{x^2F_1' + xyF_2'}$$



同理: $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF_1' - xy^2F'}{xyF_1' + y^2F_2'}$$

4.(6分)设 $z=z(x,y)$ 是由 $F\left(x+\dfrac{z}{y},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

① ②



解二: $\mathrm{d}F\left(x+\dfrac{z}{x},\ y+\dfrac{z}{x}\right)=0$

$$F_1'\mathrm{d}\left(x+\frac{z}{y}\right)+F_2'\mathrm{d}\left(y+\frac{z}{x}\right)=0$$

$$F_1'\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{z}{y}\right)\right)+F_2'\left(\mathrm{d}y+\mathrm{d}\left(\frac{z}{x}\right)\right)=0$$

解：$$F_1'\left(dx+d\left(\frac{z}{y}\right)\right)+F_2'\left(dy+d\left(\frac{z}{x}\right)\right)=0$$

$$F_1'\cdot\left(dx+\frac{ydz-zdy}{y^2}\right)+F_2'\cdot\left(dy+\frac{xdz-zdx}{x^2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'\right)dz+\left(F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'\right)dx+\left(F_2'-\frac{z}{y^2}F_1'\right)dy=0$$

$$dz=\left(\frac{yzF_2'-x^2yF_1'}{x^2F_1'+xyF_2'}\right)dx+\left(\frac{xzF_1'-xy^2F'}{xyF_1'+y^2F_2'}\right)dy$$

$$\therefore\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF_2'-x^2yF_1'}{x^2F_1'+xyF_2'},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF_1'-xy^2F'}{xyF_1'+y^2F_2'}$$

5.(6分)已知 $y=e^{ty}+x$，而t是方程 $y^2+t^2-x^2=1$确定的x,y的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解一：$\begin{cases} e^{ty}+x-y=0 \\ y^2+t^2-x^2=1 \end{cases}$ 确定的隐函数组 $\begin{cases} y=y(x) \\ t=t(x) \end{cases}$

两边对t求导，得 $\begin{cases} e^{ty}\left(y\dfrac{dt}{dx}+t\dfrac{dy}{dx}\right)+1-\dfrac{dy}{dx}=0 \\ 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2t\cdot\dfrac{dt}{dx}-2x=0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} (te^{ty}-1)\dfrac{dy}{dx}+ye^{ty}\dfrac{dt}{dx}=-1 \\ y\cdot\dfrac{dy}{dx}+t\cdot\dfrac{dt}{dx}=x \end{cases}$

解一：$\begin{cases} (te^{ty}-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ye^{ty}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-1 \\ y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+t\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=x \end{cases}$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & ye^{ty} \\ x & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} te^{ty}-1 & ye^{ty} \\ y & t \end{vmatrix}}=\dfrac{-t-xye^{ty}}{t^2e^{ty}-t-y^2e^{ty}}$

$$=\frac{t+xye^{ty}}{t+(y^2-t^2)e^{ty}}$$

解二: $\begin{cases} e^{ty}+x-y=0 \\ y^2+t^2-x^2=1 \end{cases}$ 确定的隐函数组 $\begin{cases} y=y(x) \\ t=t(x) \end{cases}$

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,t)}=\begin{vmatrix} te^{ty}-1 & ye^{ty} \\ 2y & 2t \end{vmatrix}=2[(t^2-y^2)e^{ty}-t]$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,t)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} 1 & ye^{ty} \\ -2x & 2t \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{2t+2xye^{ty}}{2[(t^2-y^2)e^{ty}-t]}=\frac{t+xye^{ty}}{t+(y^2-t^2)e^{ty}}$$

解三: 微分法(练 习).

6. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解一： 设平面上点$A(x, y, z)$, 点A到原点的距离为d,

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

则拉格朗日函数 $L(x,y;\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y-1)$

解方程组 $\begin{cases}2x+\lambda=0\\2y+2\lambda=0\\2z=0\\x+2y-1=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{5},y=\dfrac{2}{5},z=0$

$$\lambda=-\frac{2}{5}$$

由题意可知此点为所求,且最短距离为

$$d=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

6. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解二: 设过原点且垂直于已知平面的直线为 L,则

$$\vec{s}=(1,2,0),\ \ L:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$$

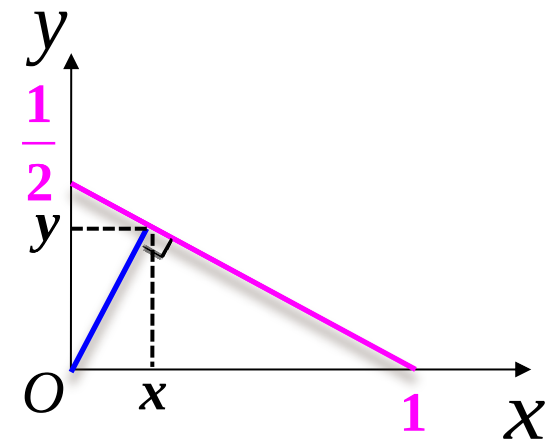
其参数方程 $x=t, y=2t, z=0$

代入平面方程 $t+4t-1=0$ 得 $t=\dfrac{1}{5}$,

故所求点坐标为: $x=\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{2}{5}, z=0$

6. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解三: 由于平面平行于 z 轴, 垂直于xoy面, 故所求点必在xoy面上, 坐标设为 $(x,y,0)$,事实上即求xoy面上原点(0,0)到直线 $x+2y=1$的最短距离的点.



$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{1}{2} \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

即$x^2+y^2=\frac{1}{5}$ 且 $x+2y-1=0$

推得: $x=\frac{1}{5}, y=\frac{2}{5}, z=0$

7.将长为l的细铁丝剪成三段,分别用来围成圆、正方形和正三角形,问怎样剪法,才能使它们所围成的面积之和最小?并求出最小值. (6分)

解: 设剪成的三段分别为x,y,z,则围成的面积之和为

$$S=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36} \text{ 且 } x+y+z=l$$

则拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l)$$

则拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l)$$

解方程组 $\begin{cases} L_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0 \\ L_z=\dfrac{\sqrt{3}z}{18}+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-l=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{l\pi}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ y=\dfrac{4l}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ z=\dfrac{3\sqrt{3}l}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ \lambda=\ldots\ldots \end{cases}$

由于得唯一驻点,故即为所求, 且$S=\ldots\ldots$

例8. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

解: 设切点为 (x_0, y_0, z_0), 则切平面为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

分析: 设切点为(x_0,y_0,z_0)，则法向量为

$$\vec{n}=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$$

则切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

例8. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

解: 设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则切平面为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

所指四面体围体积 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$

V 最小等价于 $f(x,y,z)=xyz$ 最大,故取拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$L(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

$$\begin{cases} L_x = yz+2\lambda\dfrac{x}{a^2}=0 \\ L_y = xz+2\lambda\dfrac{y}{b^2}=0 \\ L_z = xy+2\lambda\dfrac{z}{c^2}=0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}a \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}b \\ z=\frac{\sqrt{3}}{3}c \\ \lambda=\cdots \end{cases}$$

由实际问题知,在点$(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c)$**处的切平面与三坐标面围成的四面体体积最小.最小体积为** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

9. 设 $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ 均可微, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 已知 (x_0,y_0)是 $f(x,y)$在约束条件 $\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D) (2006考研)

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

9. 设 $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ 均可微, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$, 已知 (x_0,y_0)是 $f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D) (2006考研)

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

提示: 设 $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$,

$$L'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \qquad (*)$$

$$L'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0$$

$\because \varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$, $\therefore \lambda=-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$, 代入(*)得

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}$$

10. $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行，其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

11. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$

法平面 $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $16x+9y-z-24=0$

12. 曲面$z = xy$上求一点,使这点处的法线垂直于平面$x+3y+z+9=0$,并写出这法线方程.

解: 已知平面的法向量为$(1,3,1)$，而曲面 $z - xy = 0$ 的法向量为: $(-y,-x,1)$ 且由条件两法向量平行,

故 $\frac{-y}{1} = \frac{-x}{3} = \frac{1}{1}$ 即得：$x=-3, y=-1, z=xy=3$

从而曲面在点$(-3,-1,3)$的法向量为$\vec{n}=(1,3,1)$,

法线方程为: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$

13. 设$\vec{e}_l=(\cos\theta,\sin\theta)$,求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点(1,1)沿方向l的方程导数,使这导数有(1)最大值;(2)最小值;(3)等于0.

解: 函数 f 的梯度为:$\nabla f\big|_{(1,1)}=(2x-y,-x+2y)\big|_{(1,1)}=(1,1)$

$$\text{故}\ \frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(1,1)}=(\nabla f\cdot\vec{e}_l)\big|_{(1,1)}=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

故(1)$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时方向导数取得最大值;

(2)$\theta=-\dfrac{3\pi}{4}$(或$\dfrac{5\pi}{4}$)时方向导数取得最小值;

(3)$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$(或$\dfrac{7\pi}{4}$)时方向导数为0.

14. 求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 面距离最短的点.

解: 交线上点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 面的距离 $d=|z|$

利用 *lagrange* 乘数法

$$L(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=z^2+\lambda_1\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$$

解方程组 $\begin{cases}\frac{\lambda_1}{3}+2x\lambda_2=0,\ \frac{\lambda_1}{4}+2y\lambda_2=0,\ 2z+\frac{\lambda_1}{5}=0\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1=0\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$ 求解得……