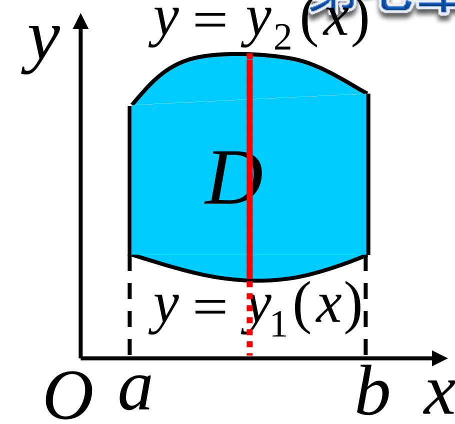
内容回顾

(1) 二重积分化为二次积分的方法

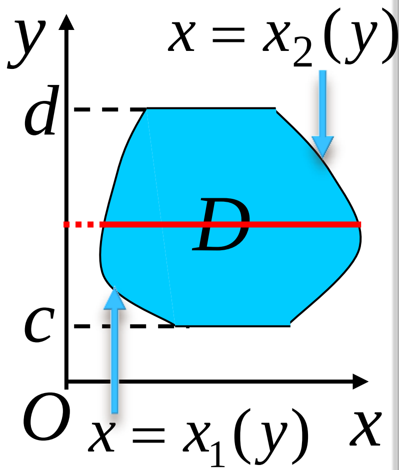
直角坐标系情形:



- **若积分区域为**

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$



- **若积分区域为**

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

(2) 计算步骤及注意事项

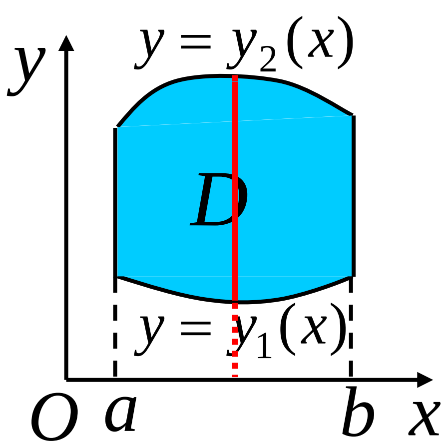
结合积分域和被积函数的特征,选择坐标系

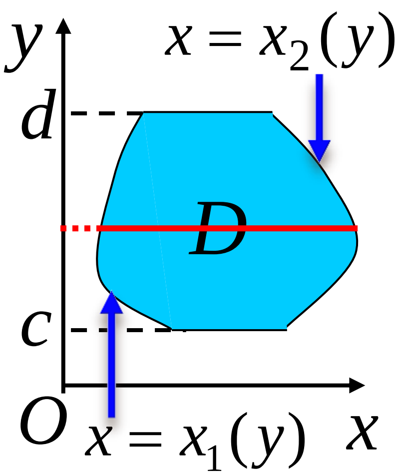
确定积分序及积分限:

域内一线穿,　两点定内限.

域边两线夹,　外限依靠它.

注意利用对称性.

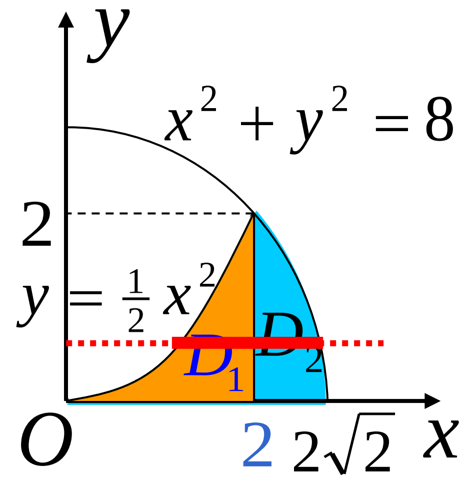




例6. 交换下列积分顺序

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解: 积分域由两部分组成:



$$D_1:\begin{cases}0\le y\le \frac{1}{2}x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\le y\le \sqrt{8-x^2}\\ 2\le x\le 2\sqrt{2}\end{cases}$$

将 $D=D_1+D_2$ 视为 Y - 型区域, 则

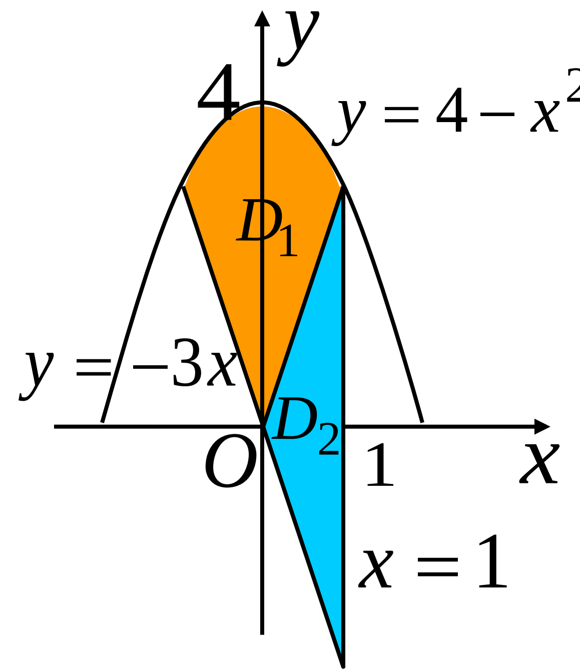
$$D:\begin{cases}\sqrt{2y}\le x\le \sqrt{8-y^2}\\ 0\le y\le 2\end{cases}$$

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

例7. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$$D=D_1+D_2\ \text{(如图所示)}$$



分析: D_1关于y 轴对称

显然, 在D_1上, $f(-x,y)=-f(x,y)$

故 $\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

另外, D_2关于x 轴对称

在D_2上, $f(x,-y)=-f(x,y)$ 故 $\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

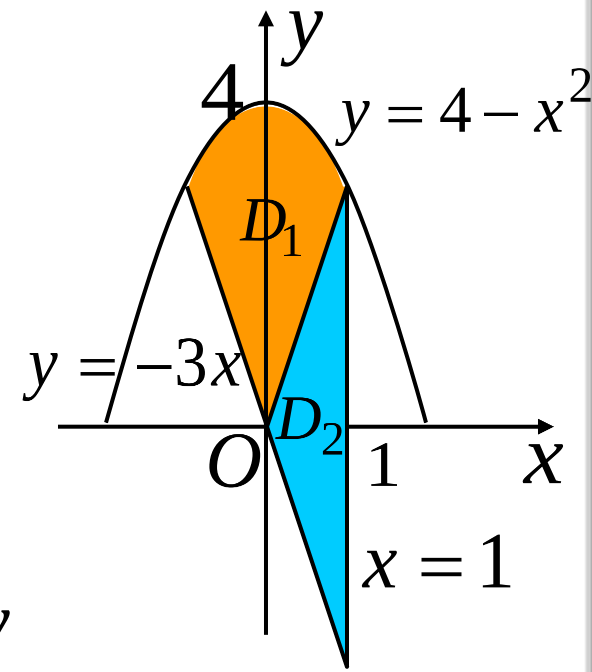
例7. 计算 $I=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=4-x^2,\ y=-3x,\ x=1$ 所围成.

解: 令 $f(x,y)=x\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$$D=D_1\cup D_2 \text{ (如图所示)}$$

在 D_1上, $f(-x,y)=-f(x,y)$

在 D_2上, $f(x,-y)=-f(x,y)$



依据积分区域可加性及对称性

$$\therefore\quad I=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

三、利用极坐标计算二重积分

为什么引用?

D: $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$

之间的区域

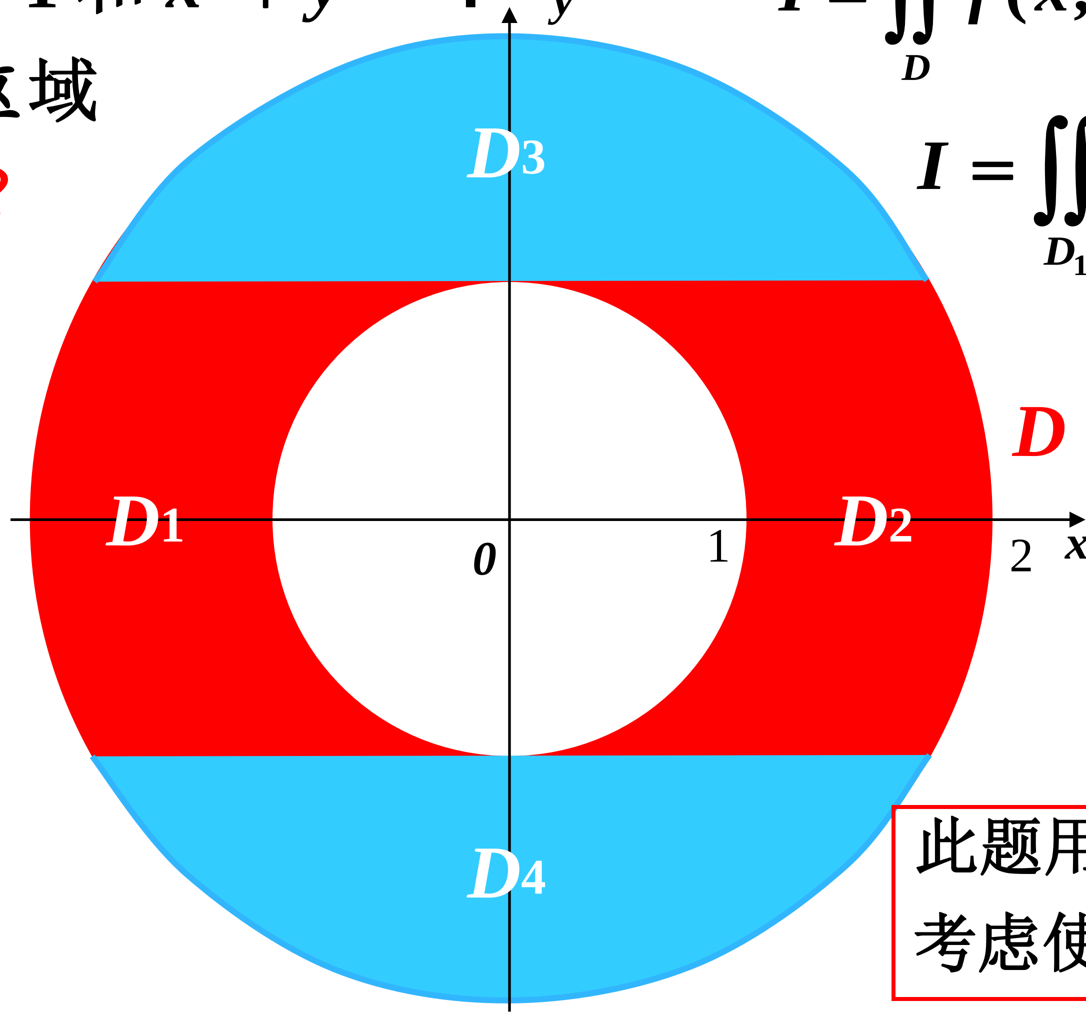
怎么计算?

必须把

D分块儿!

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}+\iint\limits_{D_3}+\iint\limits_{D_4}$$



此题用直角系算麻烦

考虑使用极坐标系!

三、利用极坐标计算二重积分

将 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 变换到极坐标系

$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta,\quad \mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

用坐标线: θ=常数; ρ =常数 分割区域 D

$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i-\frac{1}{2}\rho_i^{\,2}\Delta\theta_i$$

$$=\frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

$$=\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i\quad(\bar{\rho}_i\text{是平均值})$$

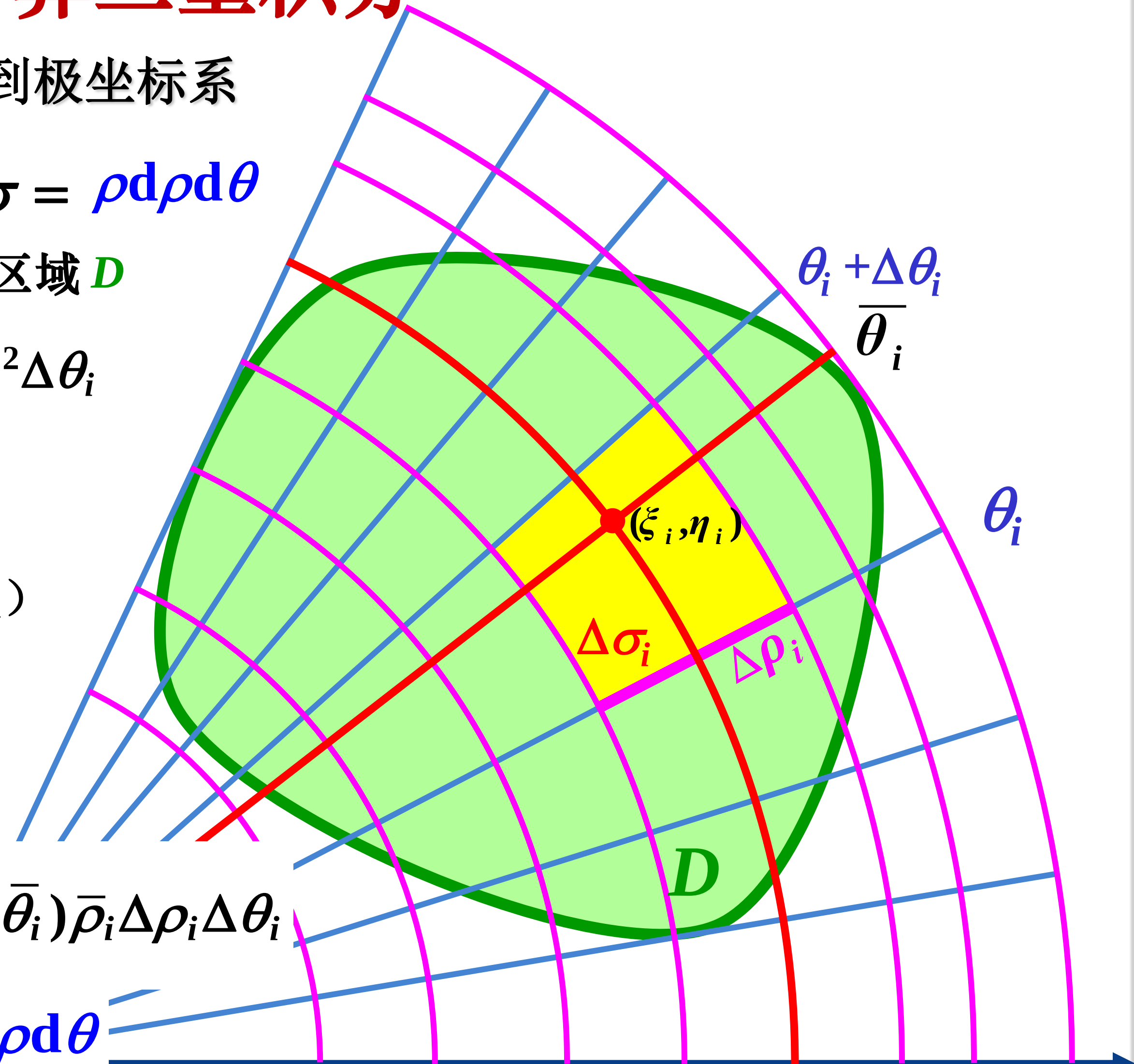
$$\xi_i=\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\quad \eta_i=\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i$$

$$I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i)\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

$$=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\underbrace{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}\sigma}$$

极坐标系下的面积元素



三、利用极坐标计算二重积分

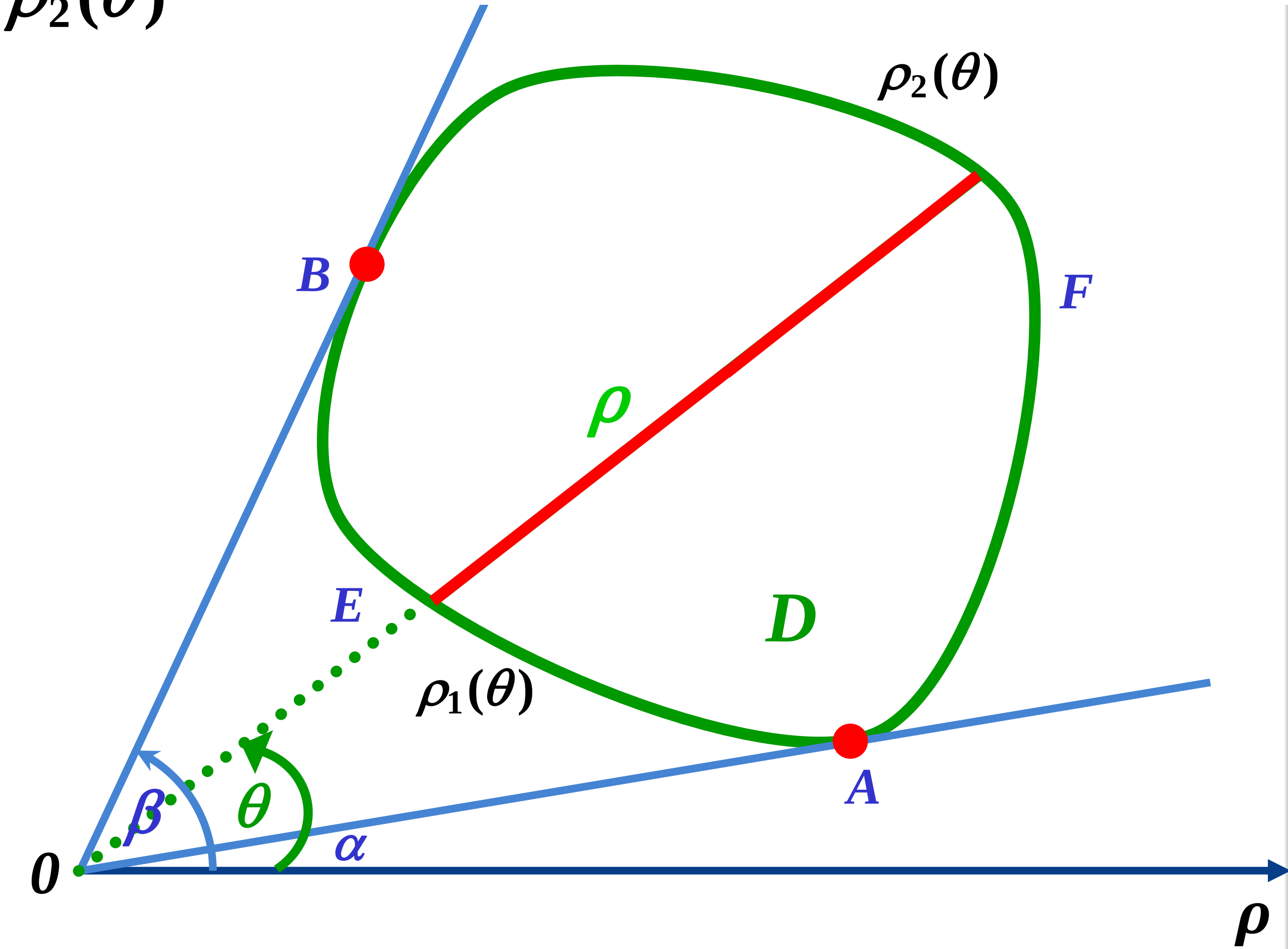
$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

极点不在区域 D 的内部

$$=\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

D: $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$

$\alpha\le\theta\le\beta$



三、利用极坐标计算二重积分

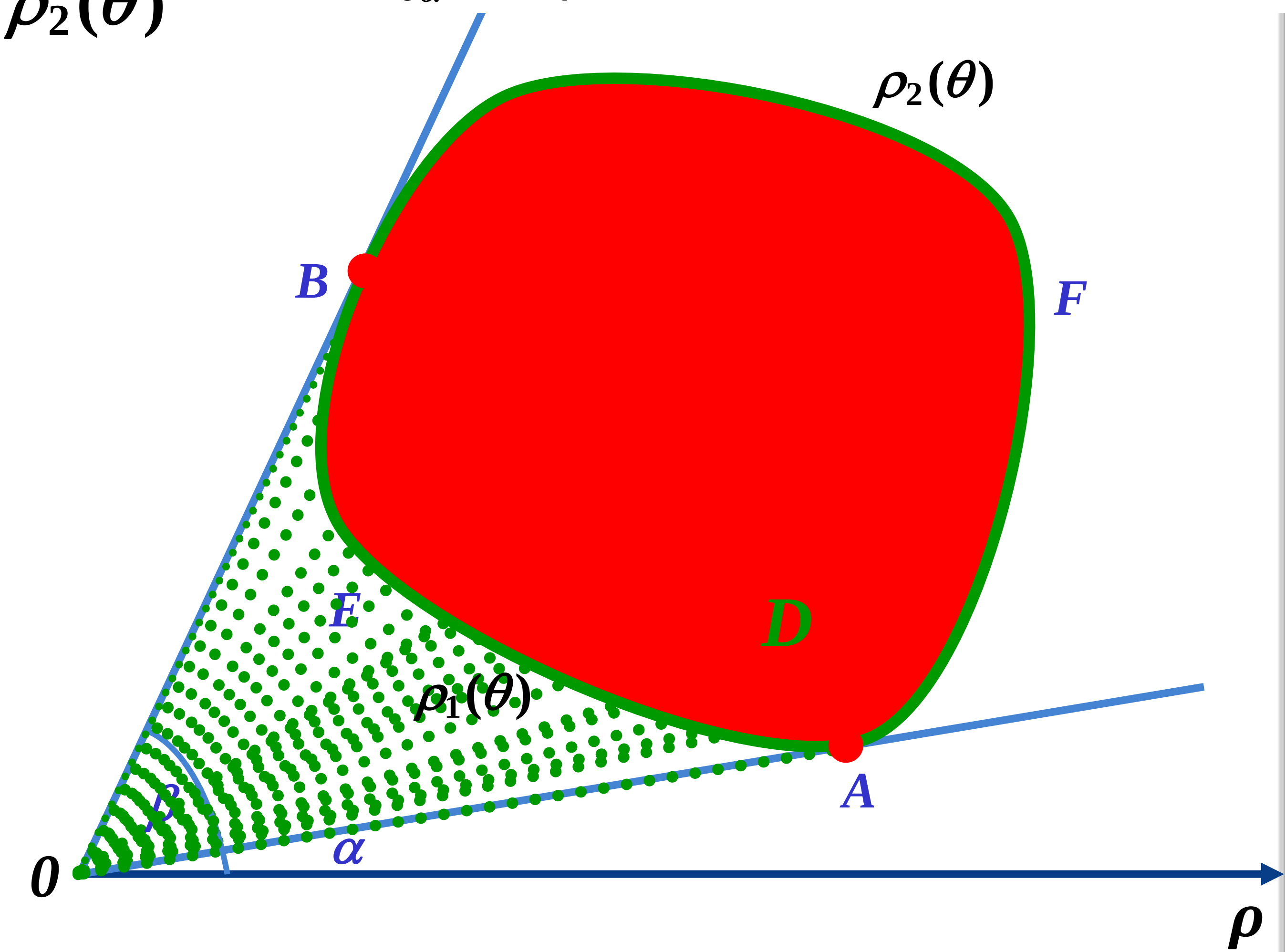
$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

极点不在区域 D 的内部

D: $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$

$\alpha\le\theta\le\beta$



三、利用极坐标计算二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

极点不在区域 D 的内部

D: $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$

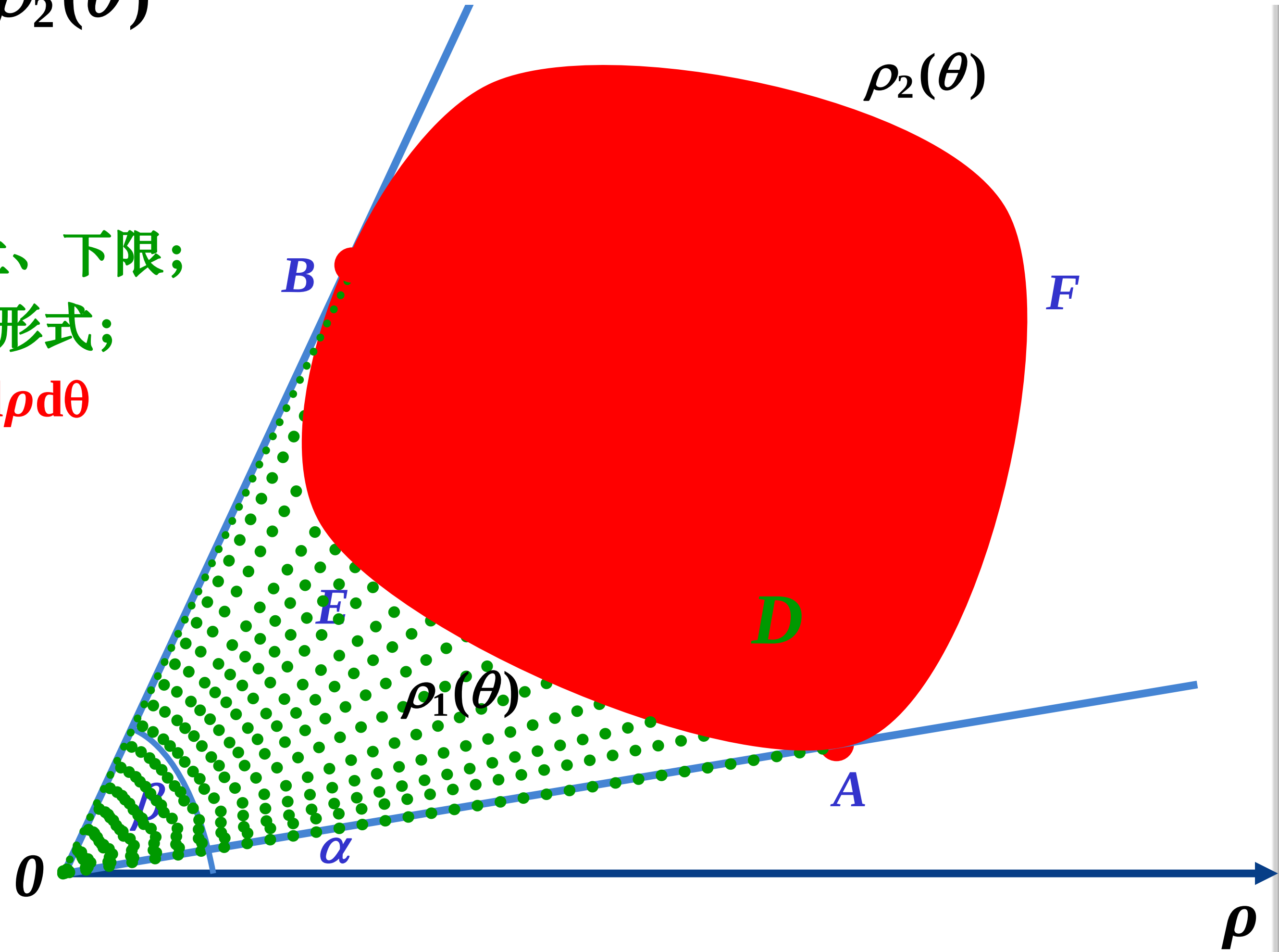
$\alpha\le\theta\le\beta$

步骤:

1 从D的图形找出ρ, θ上、下限;

2 化被积函数为极坐标形式;

3 面积元素dxdy化为$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$



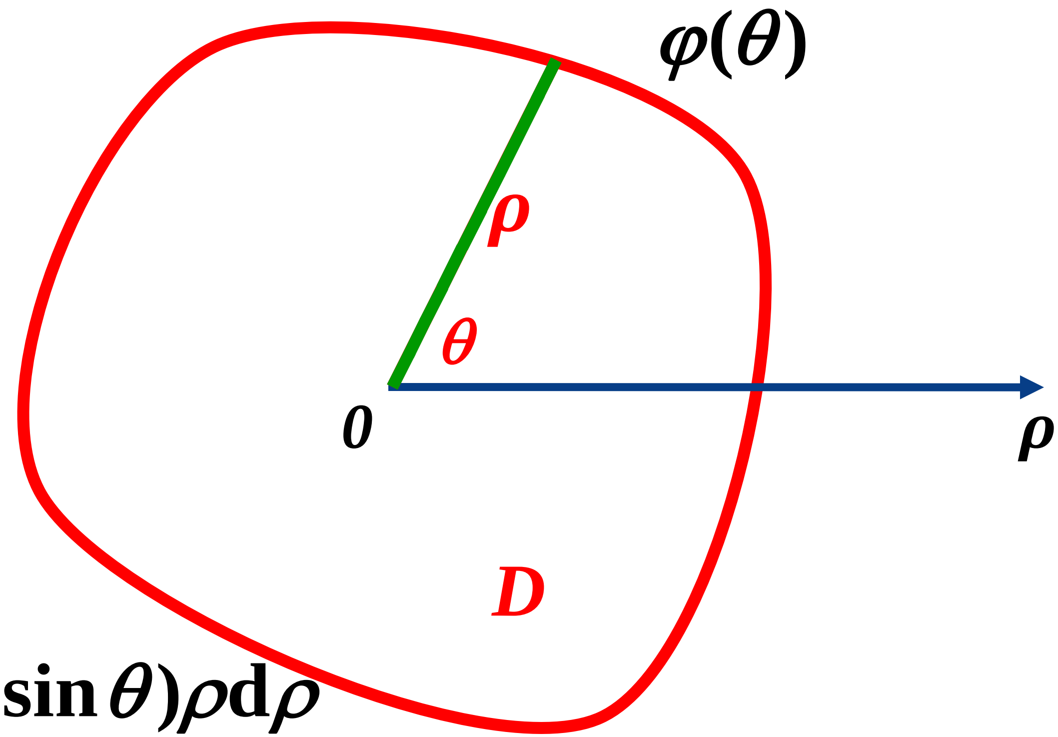
三、利用极坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

极点位于区域 D 的内部

D: $0 \le \rho \le \varphi(\theta)$

$0 \le \theta \le 2\pi$



$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

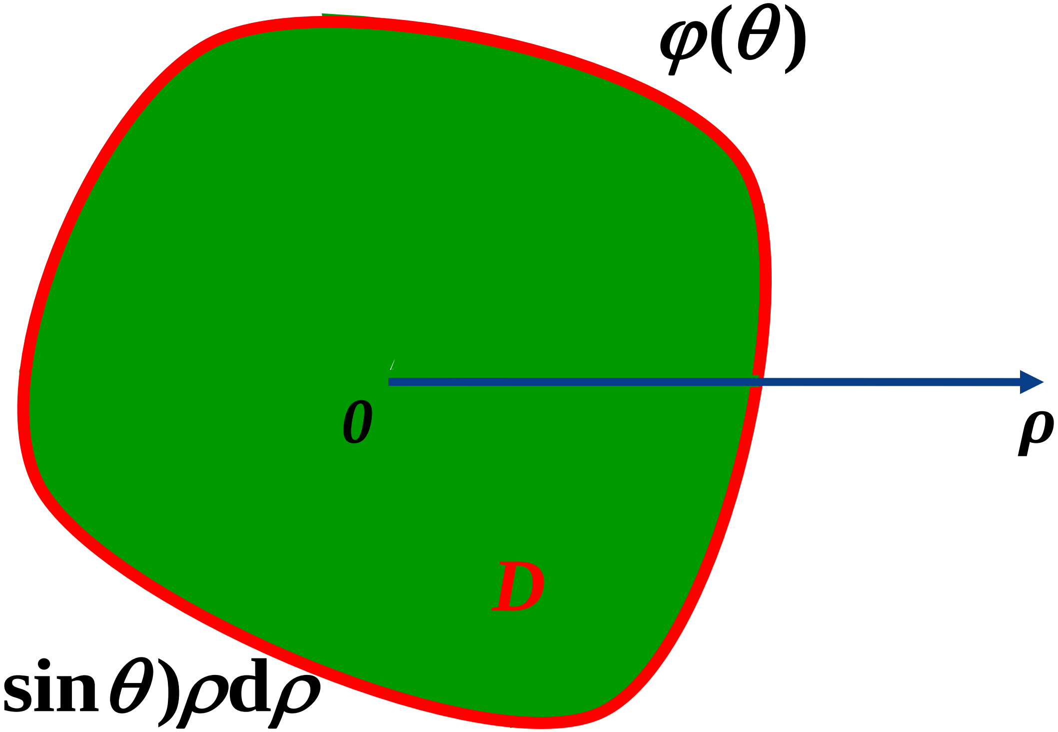
三、利用极坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

极点位于区域 D 的内部

D: $0\le\rho\le\varphi(\theta)$

$0\le\theta\le 2\pi$



$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\quad\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

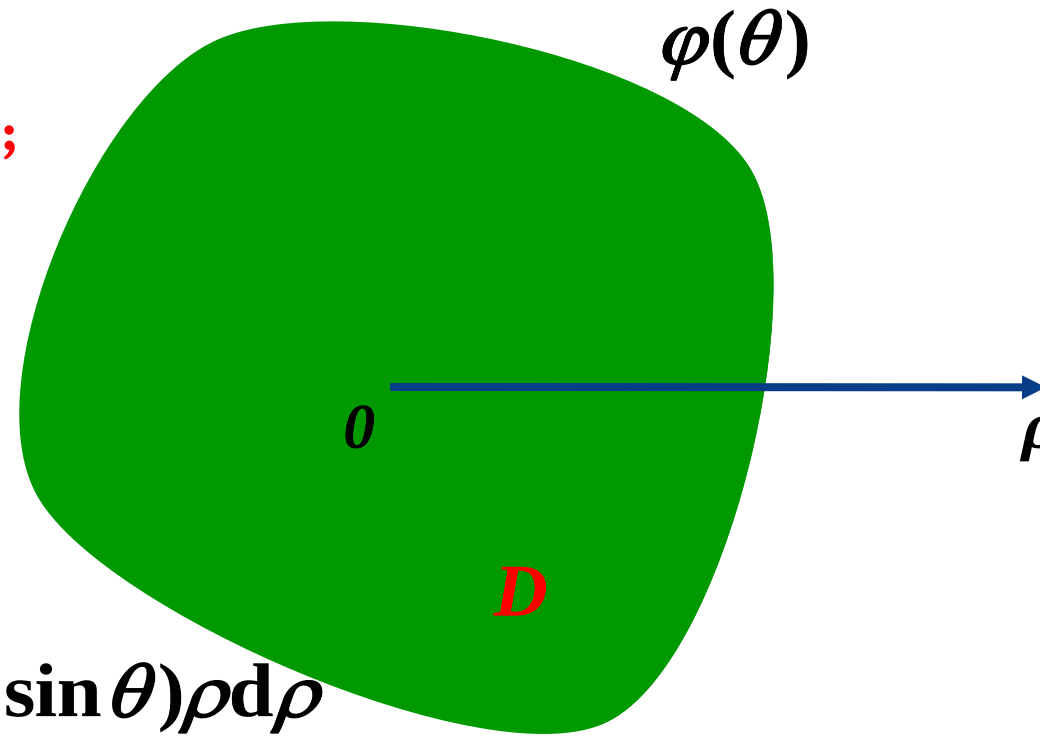
三、利用极坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

极点位于区域 D 的内部

D: $\quad 0\le\rho\le\varphi(\theta)$

$\quad\quad 0\le\theta\le 2\pi$



步骤：

1 从D的图形找出 $\rho,\ \theta$上、下限；

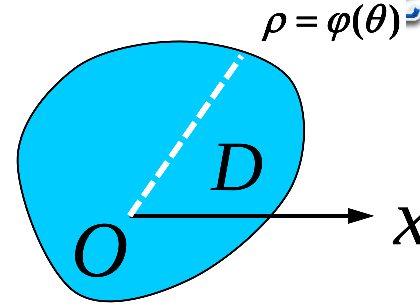
2 化被积函数为极坐标形式；

3 面积元素$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化为$\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

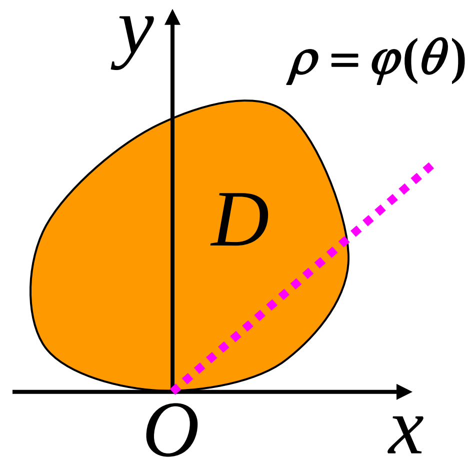
此时若 $f\equiv 1$ 则可求得 D 的面积



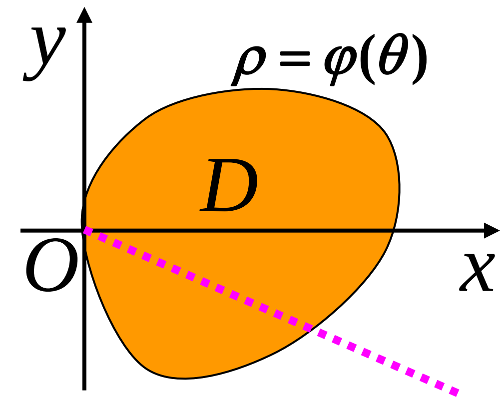
$$\sigma=\iint_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

思考: 下列各图中域 D 分别与 x, y 轴相切于原点, 试问 θ 的变化范围是什么?

(1)



(2)

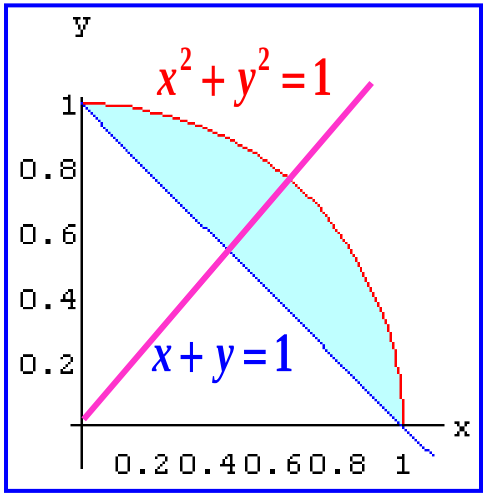


答: (1) $0\le\theta\le\pi$;

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

例 8 写出积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式,其中积分区域$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$.

解 在极坐标系下$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$



所以圆方程为 $\rho=1$,

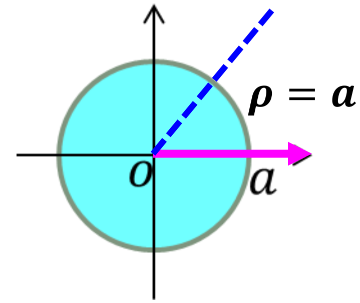
直线方程为 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

故$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

例9. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, 其中 $D: x^2+y^2 \le a^2$.

解: 在极坐标系下 $D:\begin{cases}0\le\rho\le a\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$, 故



$$\text{原式} = \iint_D e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a = \pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 故本题无法用直角坐标计算.

注: 利用上题可得一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

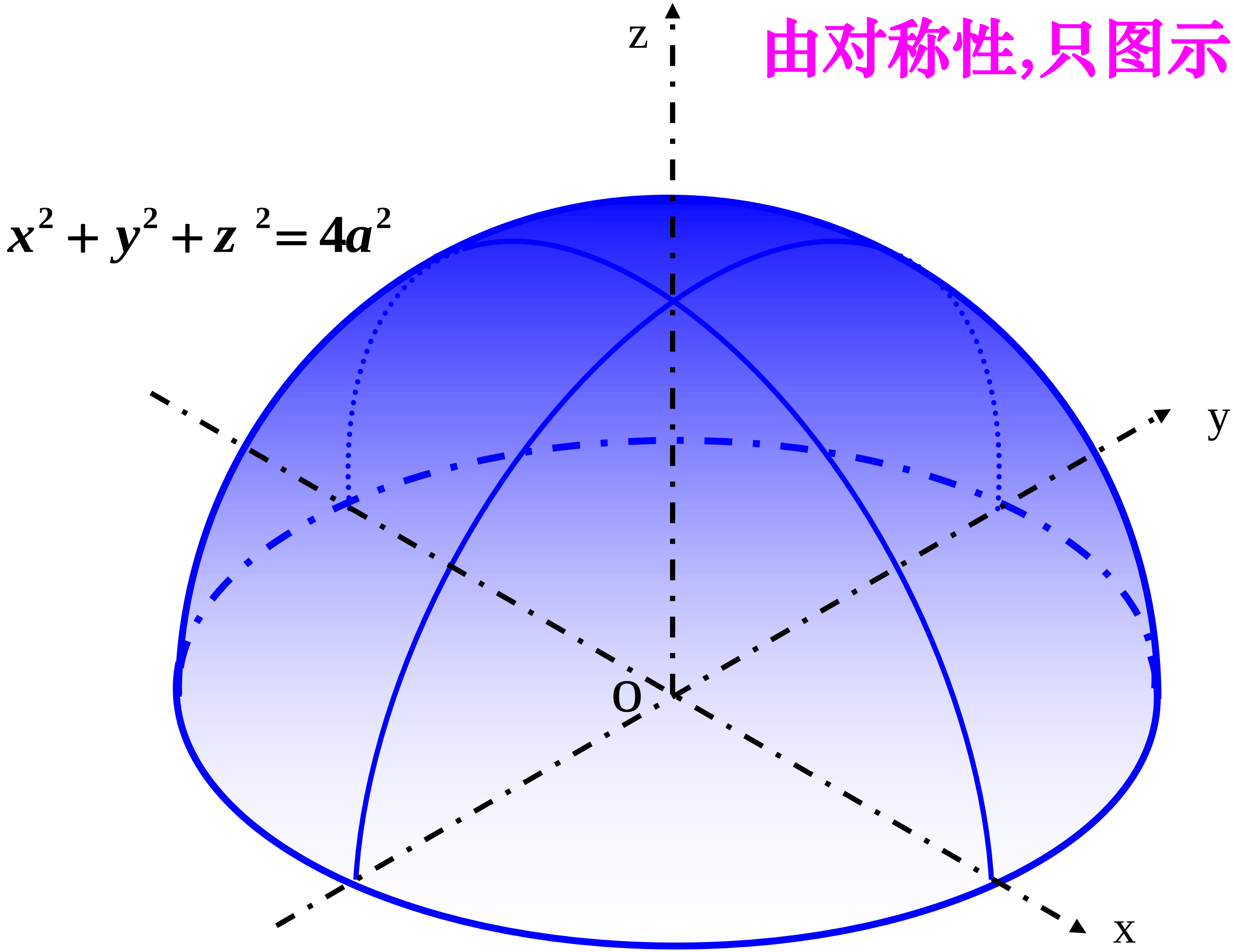
事实上,
$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$
$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

又
$$\iint_{R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{a\to+\infty} \iint_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$
$$= \lim_{a\to+\infty} \pi\left(1-e^{-a^2}\right) = \pi$$

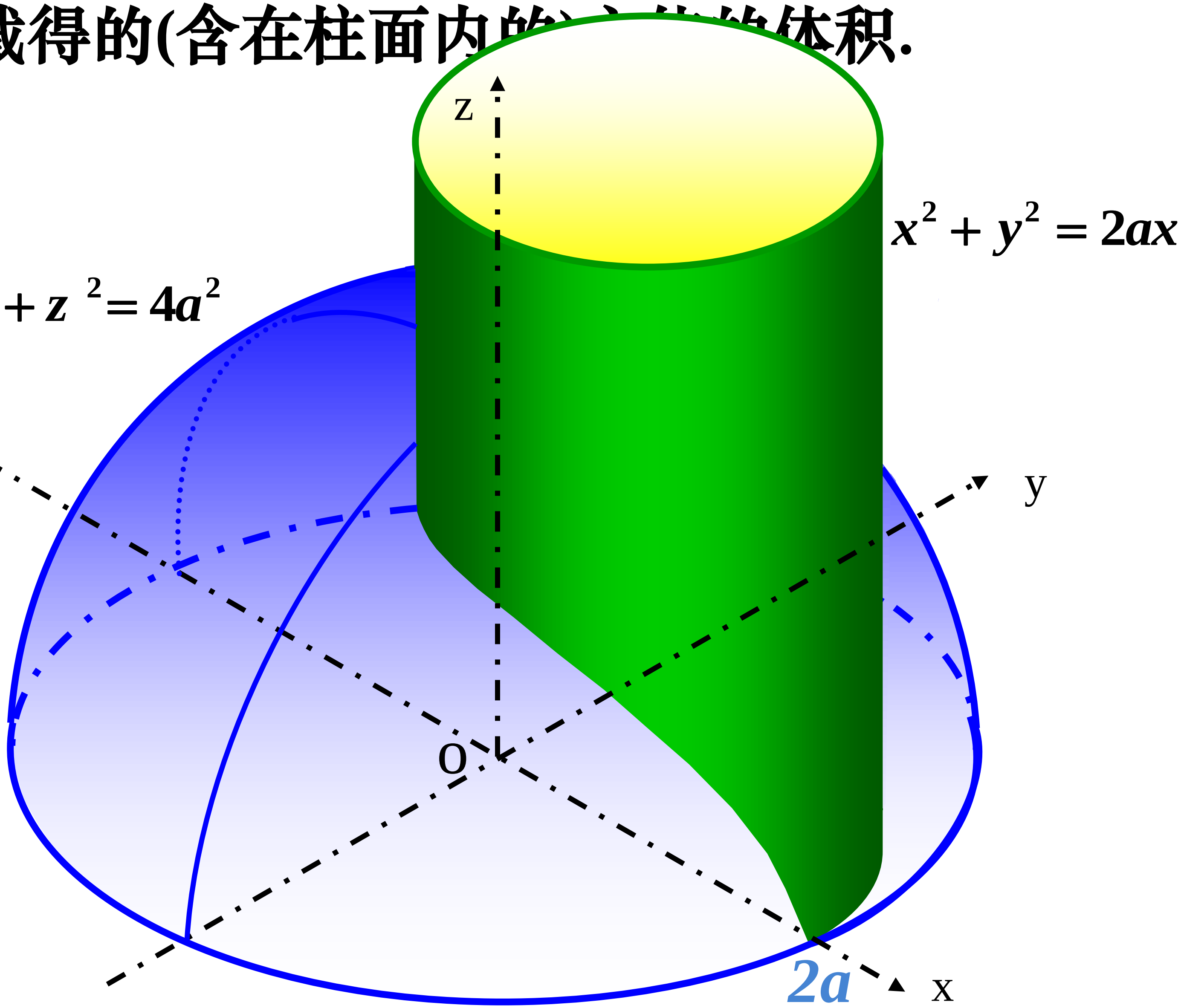
故①式成立.

例10. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

由对称性,只图示上半部分



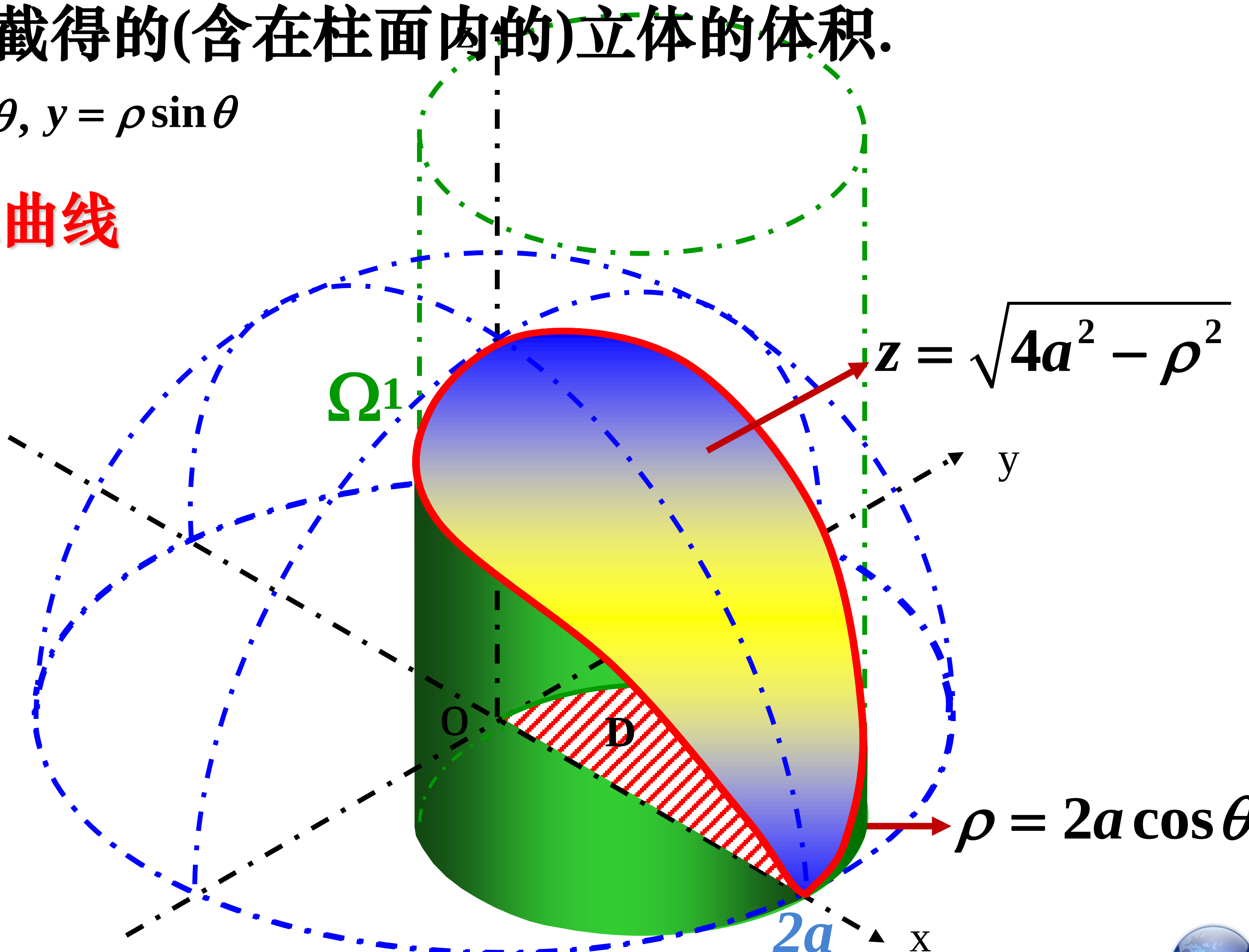
例10. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.



例10. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$

维望尼曲线



例10. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le\rho\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

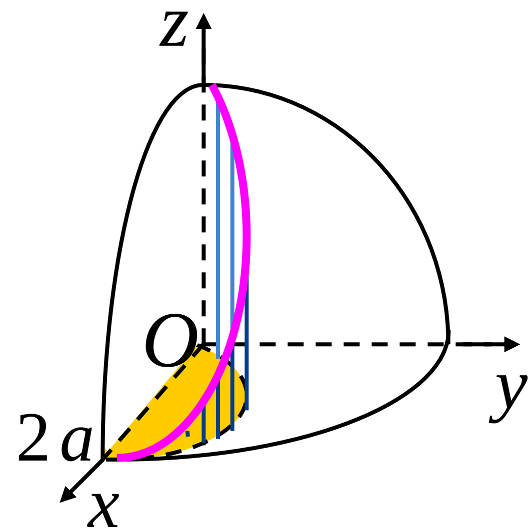
由对称性可知

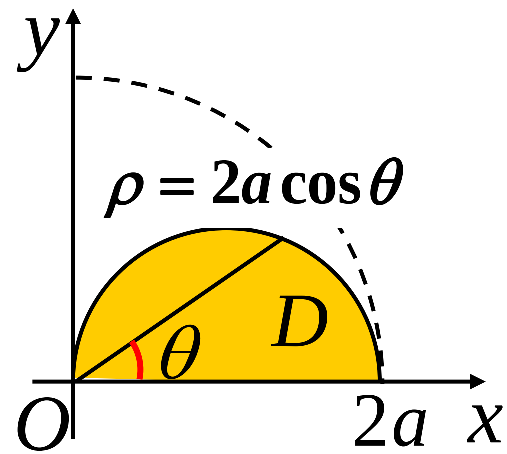
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$





*四、二重积分换元法

定理. 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续，变换：

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$

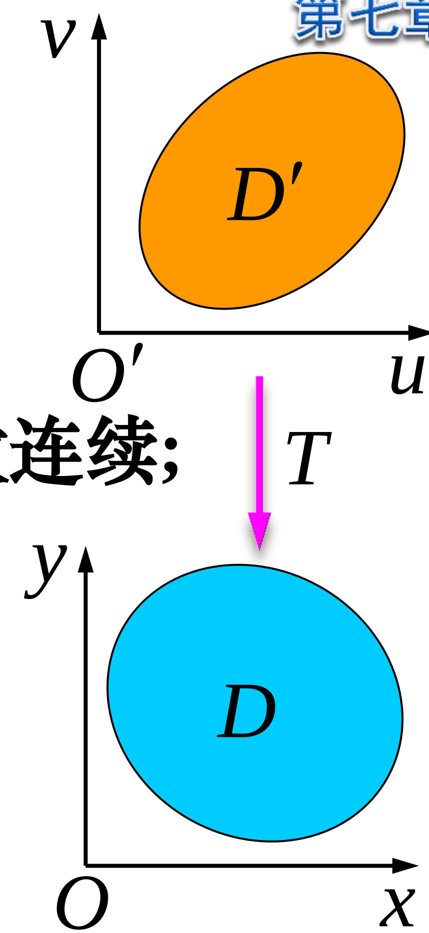
满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上 一阶偏导数连续；

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的，

则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$



面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,\left| J(u,v) \right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

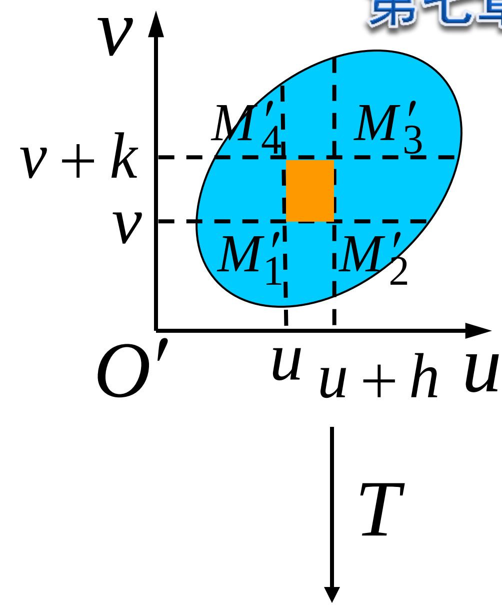
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

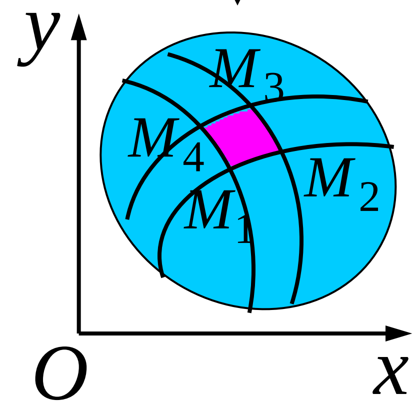
证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在 $uO'v$ 坐标面上，用平行于坐标轴的直线分割区域 D'，任取其中一个小矩形，其顶点为



$$M'_1(u,v),\qquad M'_2(u+h,v),$$
$$M'_3(u+h,v+k),\quad M'_4(u,v+k).$$

通过变换 T，在 xOy 面上得到一个四边形，其对应顶点为 $M_i(x_i, y_i)\ (i=1,2,3,4)$



令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$，则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)}h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u,v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k 充分小时,曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right| = \left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$\approx \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}h & \frac{\partial y}{\partial u}k \\ \frac{\partial x}{\partial v}h & \frac{\partial y}{\partial v}k \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right| hk = \left|J(u,v)\right| hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

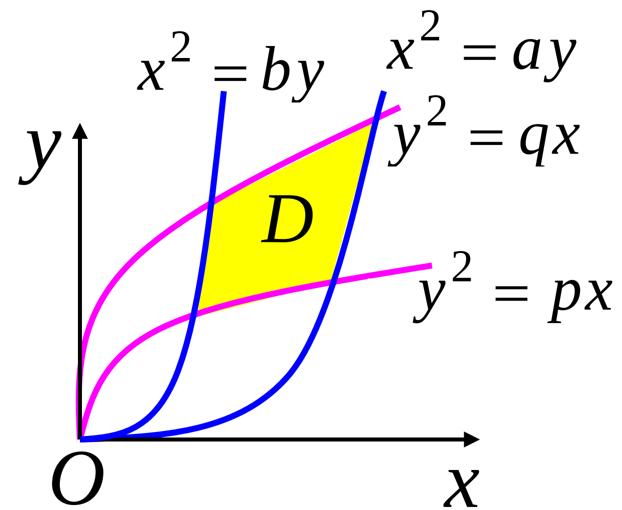
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

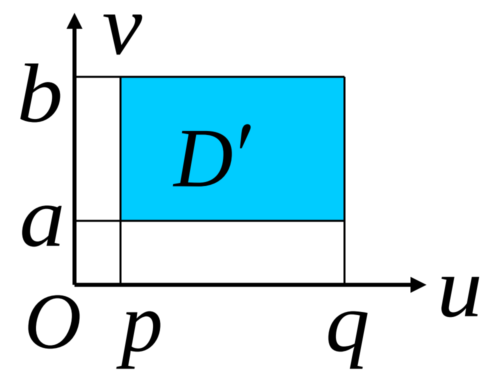
$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例11. 计算由 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.



解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D' : \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$



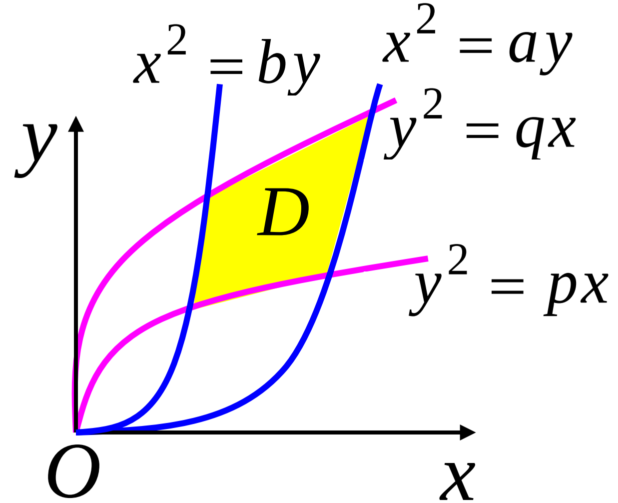
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$u = \frac{y^2}{x}, v = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}$$

$$= -3$$

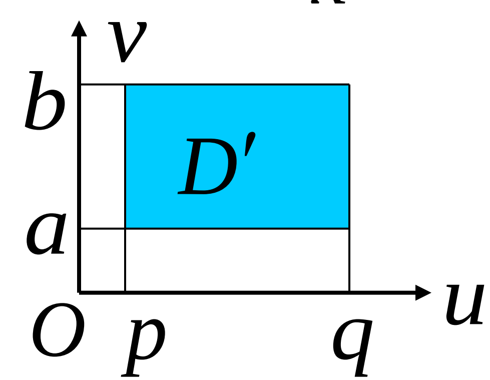
例11. 计算由 $y^2=px,\ y^2=qx,\ x^2=ay,\ x^2=by$ $(0<p<q,\ 0<a<b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.



解: 令 $u=\dfrac{y^2}{x},\ v=\dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D':\begin{cases} p\le u\le q \\ a\le v\le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3}$$



$$\therefore S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D'}|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v=\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

例12. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解: 取 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$，由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta$，则$D$ 的原象为

$$D':\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix}=ab\rho$$

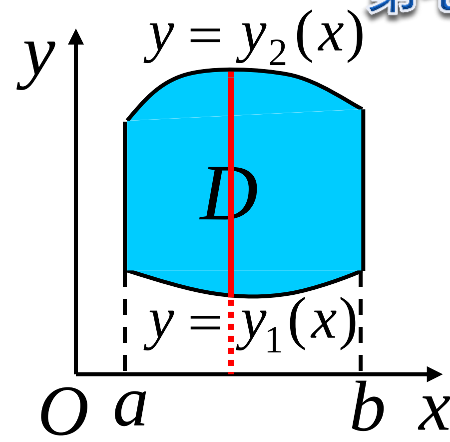
$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-\rho^2}\,ab\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{4}{3}\pi abc$$

内容小结

(1) 二重积分化为二次积分的方法

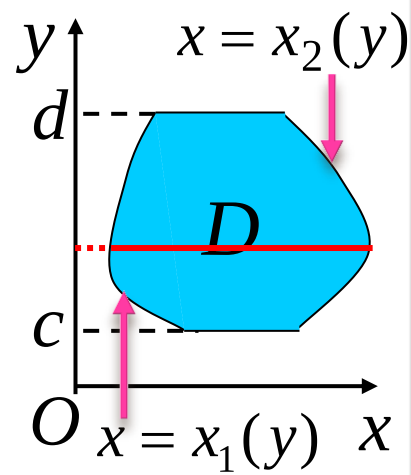
直角坐标系情形:



- 若积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$



- 若积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

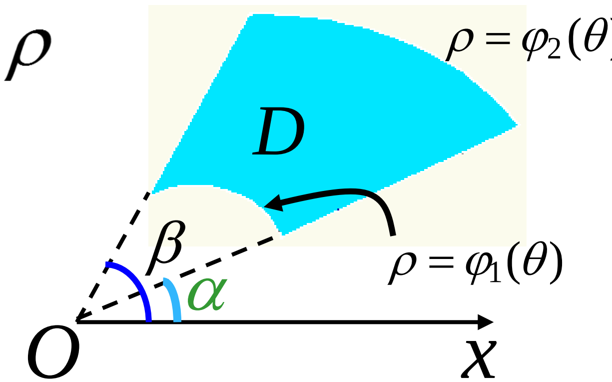
则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

极坐标系情形：若积分区域为

$$D=\{\,(r,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta\,,\varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta)\,\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\varphi\int_{\phi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$



*(2) 一般换元公式

在变换 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$ 下

$(x,y)\in D \longleftrightarrow (u,v)\in D'$，且 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

(3) 计算步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系
  - 域边界应尽量多为坐标线
  - 被积函数关于坐标变量易分离
- 确定积分序
  - 积分域分块要少
  - 累次积分好算为妙
- 写出积分限
  - 图示法
  - 不等式

  (先写类型积分限, 类型积分后计算)
- 计算要简便
  - 充分利用对称性
  - 应用换元公式