§7_5_1 格林公式及其应用

/* Green's Theorem */

一、格林公式

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

三、二元函数的全微分求积

*四、全微分方程

一、 格林公式

引入目的

☆封闭曲线∂D上的曲线积分与D的二重积分的关系;

☆曲线积分与路径无关性;

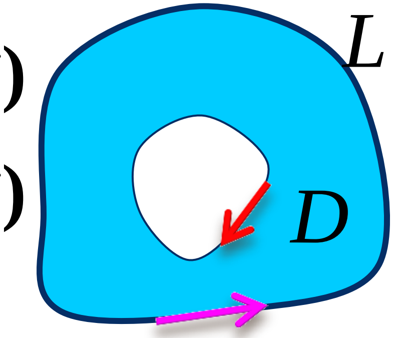
☆全微分$\mathrm{d}u = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在条件;

☆曲线积分基本公式(对应于定积分的N-L公式).

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L \mathrm{d}u = u(\text{终点}) - u(\text{起点})$$

一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域 (无“洞”区域)} \\ \text{复连通区域 (有“洞”区域)} \end{cases}$



区域 D 边界 L 的正向: 区域的内部靠左

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad \text{(格林公式)}$$

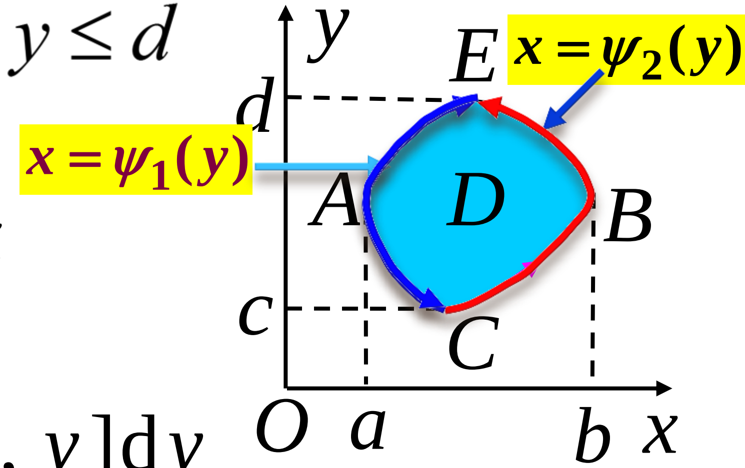
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明: 1) 若D 既是 X - 型区域, 又是 Y - 型区域, 且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}\qquad D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

则



$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q[\psi_2(y),y]\mathrm{d}y-\int_c^d Q[\psi_1(y),y]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

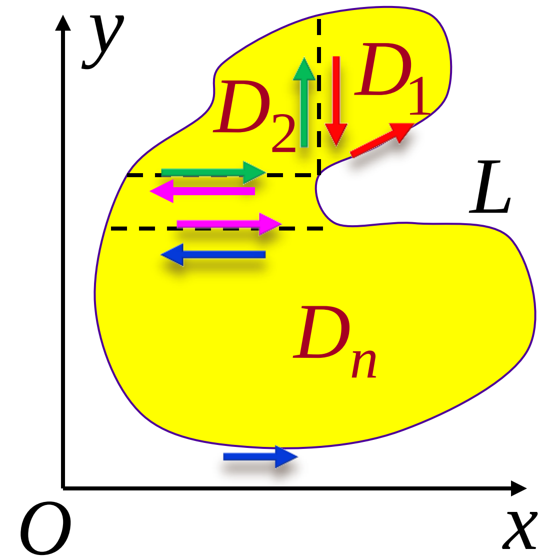
同理可证

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①②两式相加得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ **(∂D_k表示D_k的正向边界)**

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$ **证毕**

格林公式 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\iint_D\big(1-(-1)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(即 $P=-y, Q=x$)

例如, 椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ **所围面积**

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

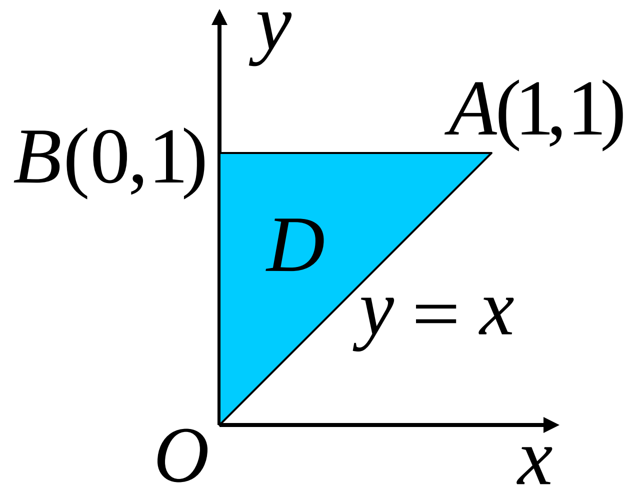
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy$, 其中D 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域.



解: 令 $P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

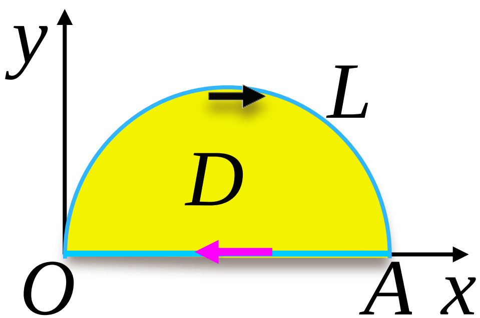
利用格林公式, 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,dx\,dy=\oint_{\partial D} x e^{-y^2}\,dy$$

$$=\int_{\overline{OA}} x e^{-y^2}\,dy=\int_0^1 y e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

例3. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O(0, 0)$ 到 $A(4, 0)$.

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$,它与L 所围区域为D,则原式 $=\oint_{L\cup\overline{AO}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$



$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x=8\pi+\frac{64}{3}$$

?

注意 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-4$

内容回顾

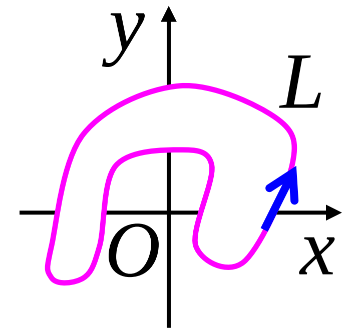
定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y),\ Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$ （格林公式）

例4. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.



解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

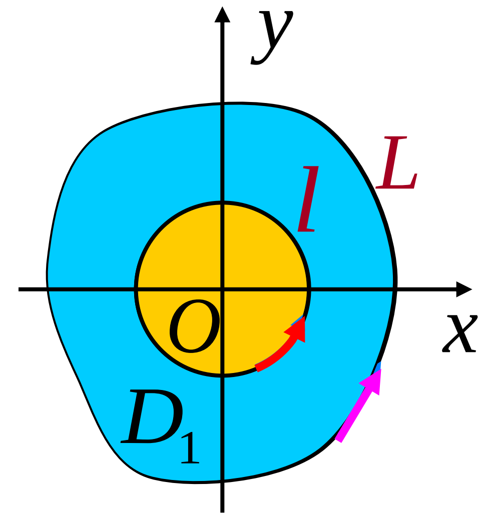
则当 $x^2+y^2 \neq 0$ 时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$

当$(0,0)\in D$时, 在D内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1, 对区域 D_1 应用格林公式, 得

$$\oint_{L\cup l^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$



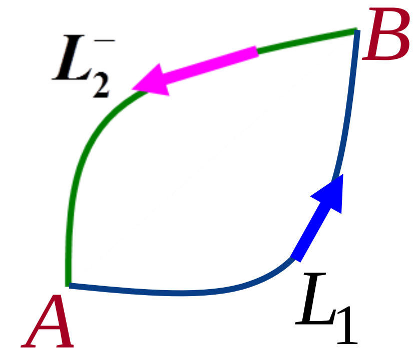
$$\text{即}\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0$$

$$\therefore\quad\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的条件

设 L_1, L_2 为 D 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线，若 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内恒成立，则称积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ **与路径无关**.



分析

$$0=\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

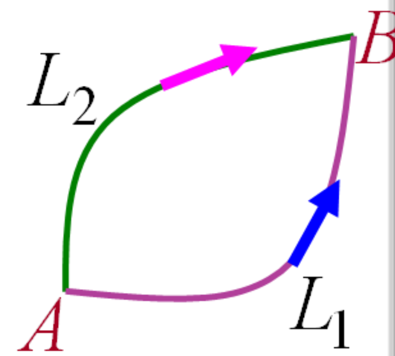
$$=\oint_{L_1\cup L_2^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

即沿 D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

定理2. 设D是单连通域, 函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数, 则下列四个条件等价：

(1)对D内任意分段光滑闭曲线L,有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\equiv 0$;

(2) $A,B\in D$内, 对D内任意连接A到B的分段光滑曲线L_1与L_2,必有$\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$;



(3) $\exists u(x,y): D\to R$ 连续可微,使得

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y;$$

(4) D内恒成立 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

证：(1)→(2)

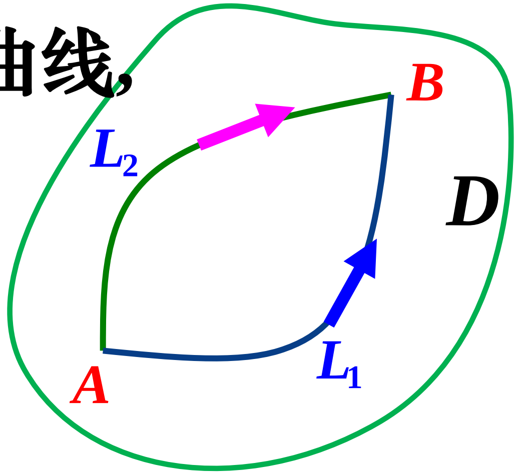
[D内任意分段光滑闭曲线积分恒为0 →与路径无关性]

$\forall A, B \in D$, L_1与L_2为连接A到B的任意两条分段光滑弧,

则$L = L_1 \cup L_2^-$为D内分段光滑正向封闭曲线,

故$0 = \oint_L = \int_{L_1} + \int_{L_2^-} = \int_{L_1} - \int_{L_2}$ 即$\int_{L_1} = \int_{L_2}$；

证毕;



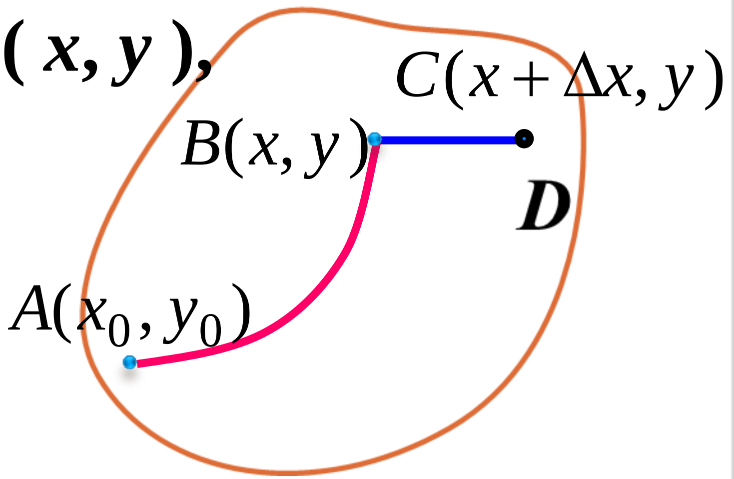
(2)→(3)

[与路径无关性→全微分存在性]

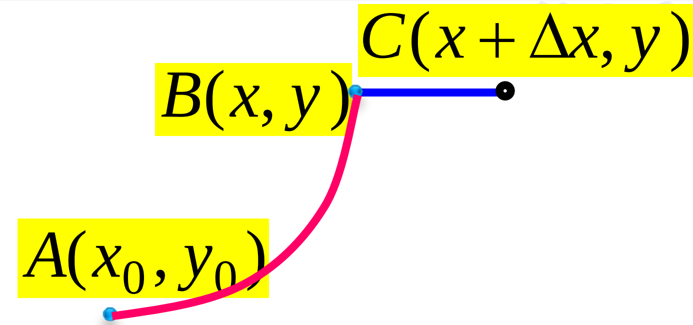
在D内取定点 $A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$,

因曲线积分与路径无关，有函数

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$



$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$



则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y)-u(x,y)$

$$=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x$$

$$=P(x+\theta\Delta x,\, y)\Delta x,(0<\theta<1)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，因此有 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$；

证毕;

(3)→(4)

[全微分存在性→ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$]

由(3),存在可微函数$u(x,y)$,使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

又由$P(x,y)$与$Q(x,y)$具有一阶连续偏导数,则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

即 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ 证毕;

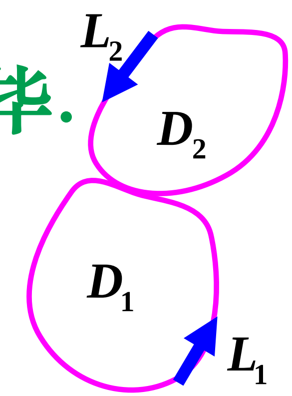
(4)→(1)

[$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ → D内任意分段光滑闭曲线积分恒为0]

- 假设L为D内一个分段光滑封闭曲线,由Green公式即得;
- 假设L为D内有限个最多只有边界相交的有界闭区域的正向边界,则

$$L=\bigcup_{k=1}^{n}L_k,\ \oint_L=\sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k}=0$$

证毕.



说明: 当曲线积分与路径无关时:

1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算,

若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线构成封闭曲线.

三、二元函数的全微分求积

由定理2 设D是单连通域，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$的全微分的常用充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

可以利用第二类曲线积分的方法求得 $u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

u 称为$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的原函数.

说明:

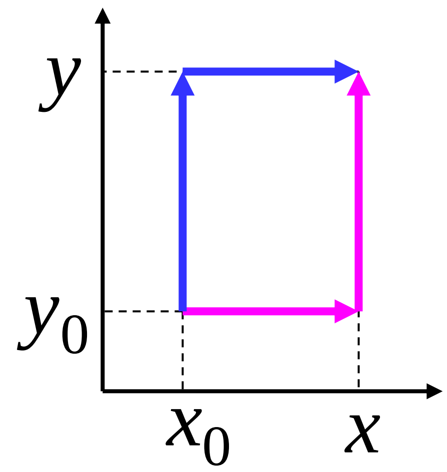
3) $u(x,y)$ 的计算法

取定点 $(x_0,y_0)\in D$ 及动点 $(x,y)\in D$, 则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

或 $u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$

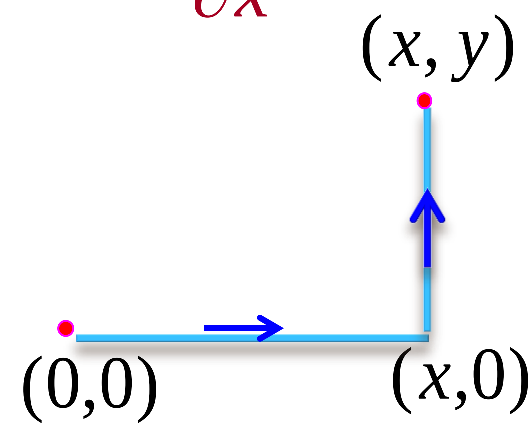


例5. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

由**定理2** 可知, 存在函数 $u\,(x, y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$



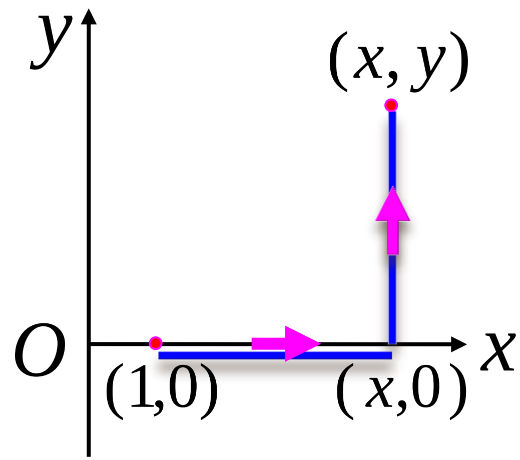
$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}x^2y^2$$

注: 为避免与积分变量混淆, 可把积分上限记作(u,v), 计算完后换回.

例6. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x>0$) 内存在原函数, 并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad(x>0)$

由定理 2 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x>0)$$

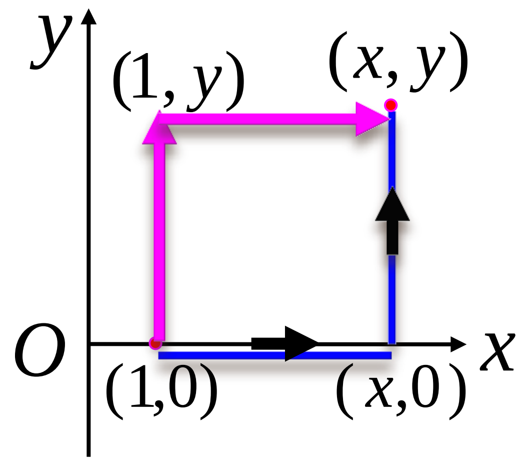
或

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x>0)$$



*四、全微分方程

若存在 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

则称
$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \quad ③$$
为全微分方程.

判别：P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数，则

$$③\text{为全微分方程} \Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$$

求解步骤：1) 求原函数 $u(x, y)$

方法1　利用积分与路径无关的条件；

方法2　待定参(函)数法.

方法3　凑微分法.

2) 由 $\mathrm{d}u = 0$ 知通解为 $u(x, y) = C$.

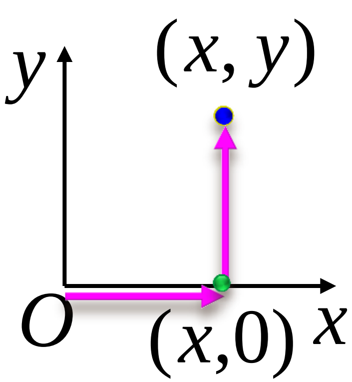
例7. 求解 $(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故这是全微分方程.

解法1 取 $x_0=0,\ y_0=0$，则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

解法2 此全微分方程的通解为 $u(x,y)=C$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3 \qquad ④$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{3x^2y-3xy^2+y^2} \qquad ⑤$$

由④得 $u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+\varphi(y)$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),$$ $\varphi(y)$待定

两边对 y 求导得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\underline{3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)}$

与⑤比较得 $\varphi'(y)=y^2$，取 $\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3$

因此方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$

例8. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\therefore$ 这是一个全微分方程.

用凑微分法求通解. 将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0$, 或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

思考: 如何解方程 $(x^3+y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$?

这不是一个全微分方程, 但若在方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$, 就化成**例8** 的方程.

注: 若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程,则称 $\mu(x,y)$ 为原方程的**积分因子**.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$\Longleftrightarrow$ $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程