第二节 三重积分

/ Triple Integrals */*

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

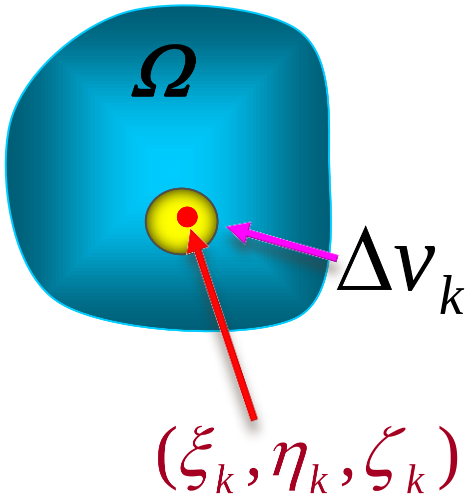
三、重积分的应用

一、三重积分的概念

引例. 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M.

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"分割, 近似, 求和, 取极限"



可得

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

定义. 设 $f(x,y,z)$ 是有界闭区域 Ω 上的有界函数，若对 Ω 作任意分割: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, 任意取点: $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, 下列"乘积和式"极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的三重积分.

dv称为体积元素，在直角坐标系下常写作 dxdydz.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. **例如:**

中值定理: 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

/* *Triple Integrals in Rectangular Coordinates* */

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数, 通过计算该物体的质量引出相关的计算

方法: 方法1. 投影法 (“先一后二”)

方法2. 截面法 (“先二后一”)

方法3. 对称性应用

说明: “先 A 后 B ”, 指的是从右到左的积分顺序, 而不是从左向右的书写顺序.

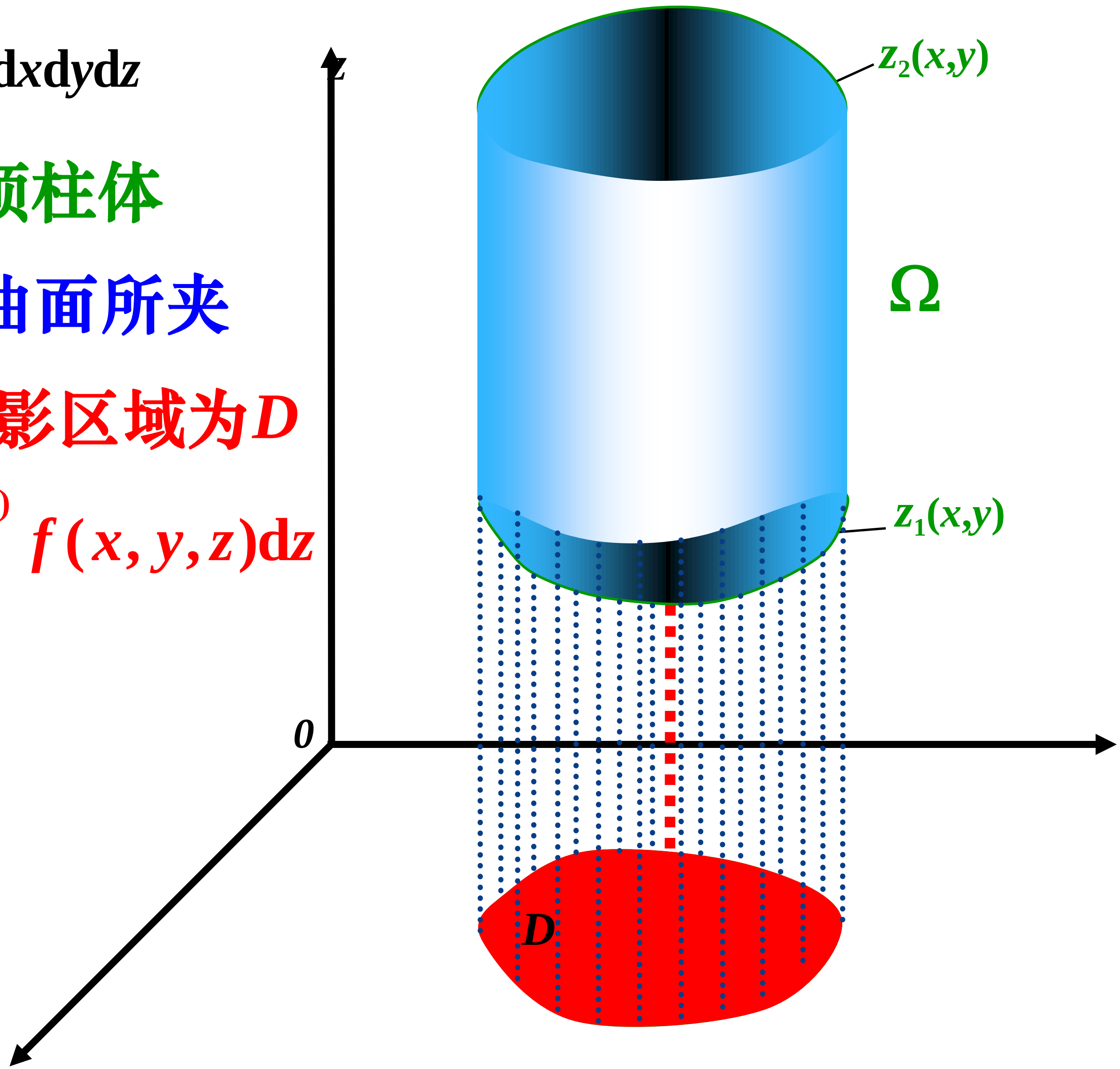
方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Ω为图示曲顶柱体

$\begin{cases}\text{由两个空间曲面所夹}\\ \text{在}xoy\text{面的投影区域为}D\end{cases}$

$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$



方法1. 投影法 ("先一后二")

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

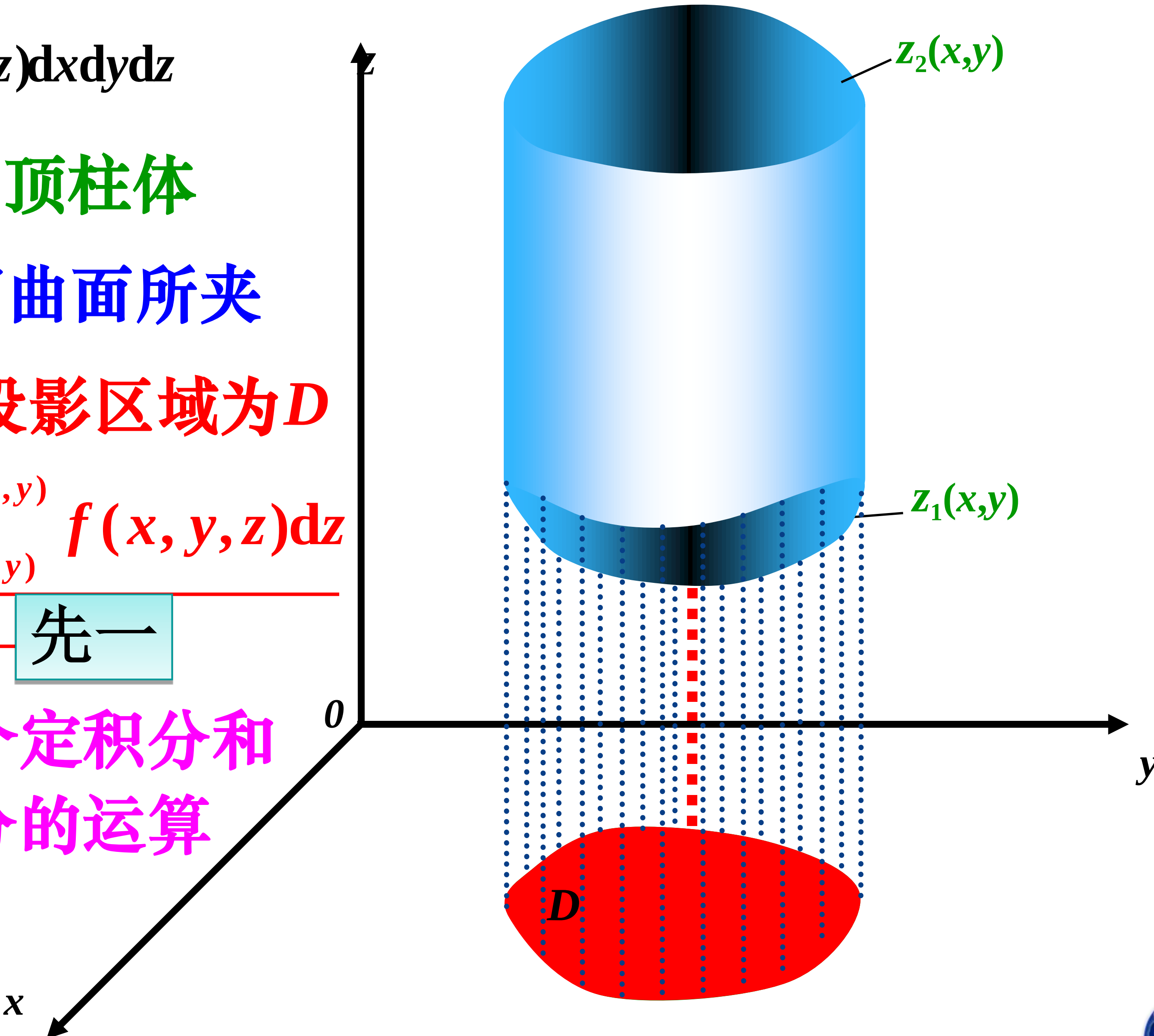
Ω为图示曲顶柱体

$$\begin{cases}\text{由两个空间曲面所夹}\\ \text{在}xoy\text{面的投影区域为}D\end{cases}$$

$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

后二　先一

这就化为一个定积分和一个二重积分的运算



方法1. 投影法 (“先一后二”) “切条法”

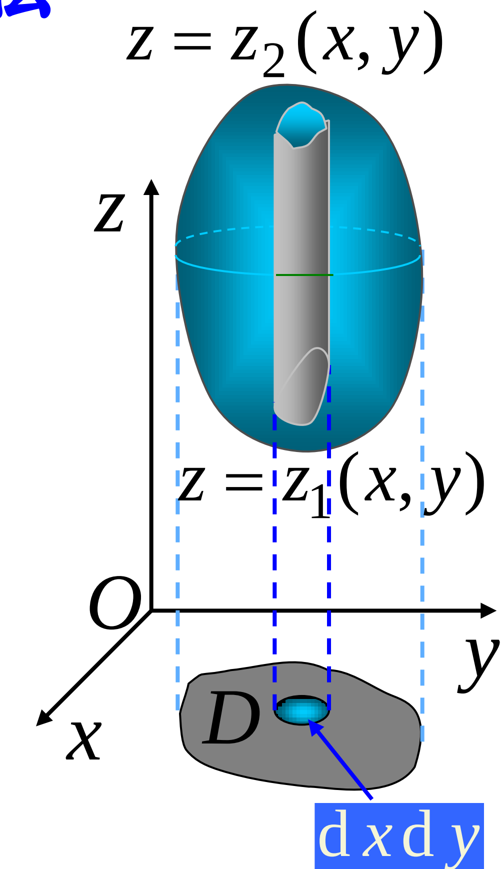
应用 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\\ (x,y)\in D\end{cases}$

求细长柱体微元的质量为

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\left[\left(f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$=\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

物体Ω的质量为 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$



微元线密度 ≈ $f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

先一 $=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

后二 $\underline{\underline{\text{记作}}}$ $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

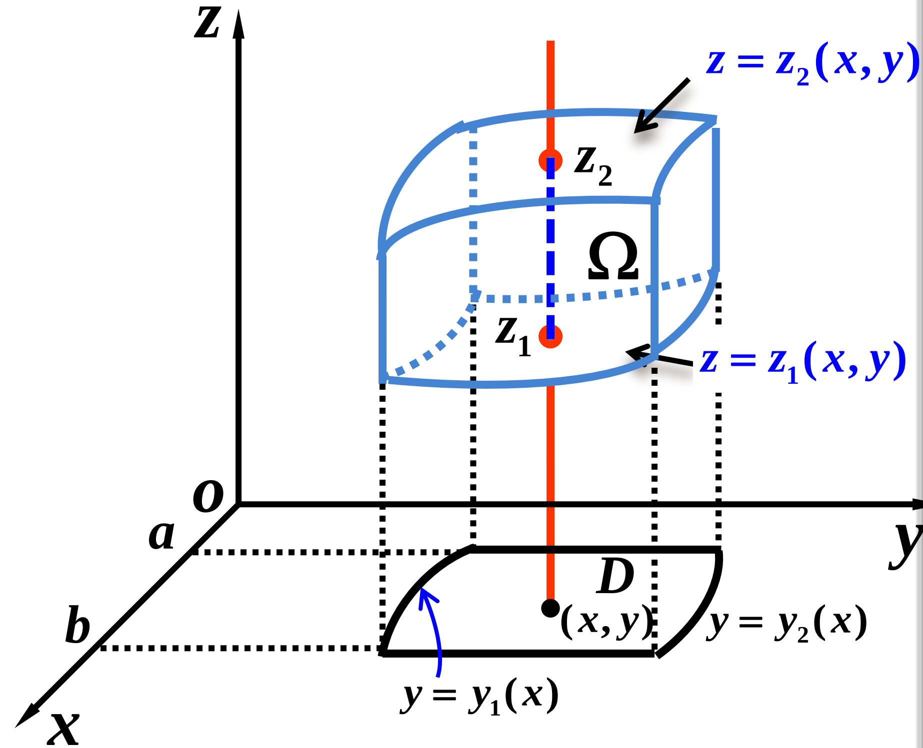
方法1. 投影法（“先一后二”）“穿针法”

进一步 $\Omega: \begin{cases} z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \\ (x,y) \in D \end{cases}$

如图, D为X-型区域, Ω的下底面和上顶面分别为:

$$z = z_1(x,y),\ z = z_2(x,y)$$

过点$(x,y) \in D$作平行于z轴的直线, 从z_1穿入, 从z_2穿出.



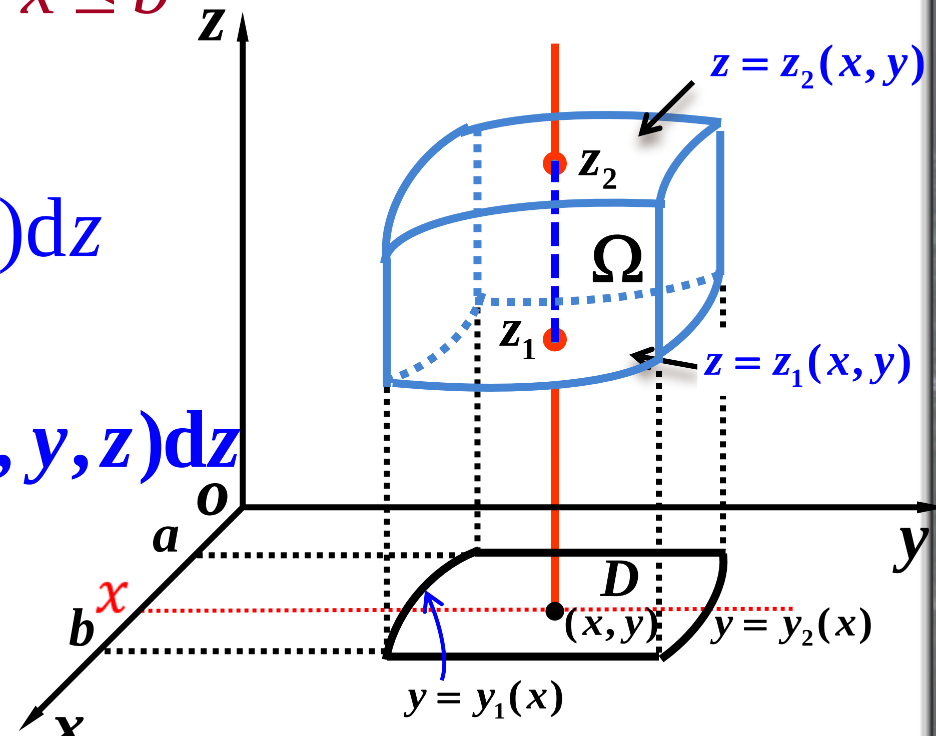
方法1. 投影法 (“先一后二”) “穿针法”

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases} \end{cases}$$

故 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$



从左至右写

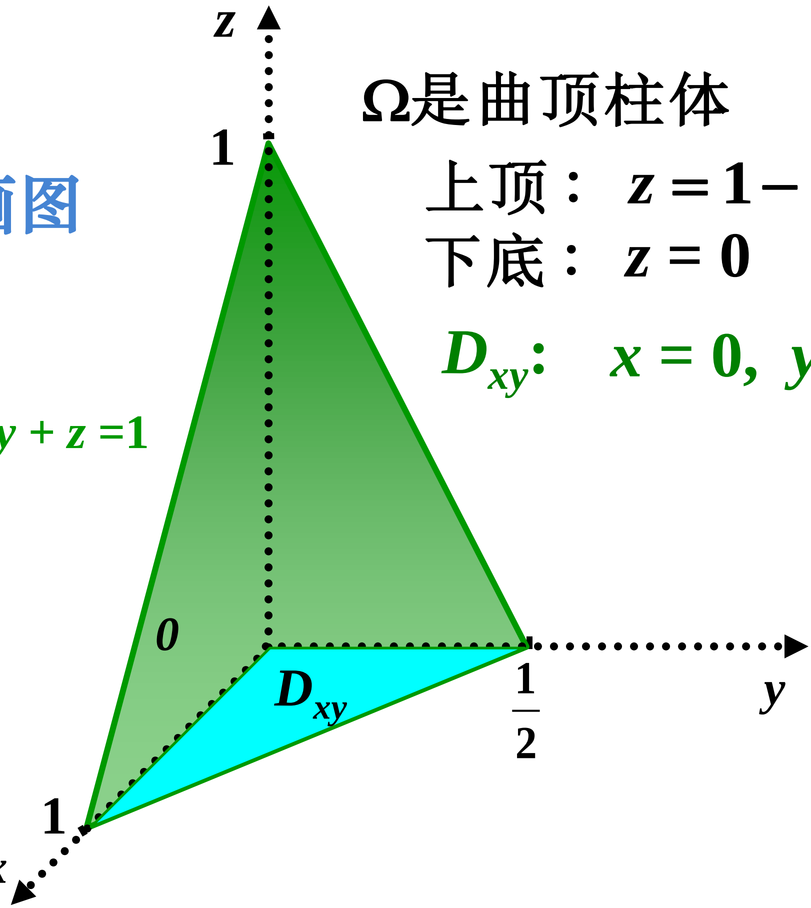
从右往左积

化为累次积分

例1. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Ω：平面 $x=0, y=0, z=0$，$x+2y+z=1$ 所围成的区域

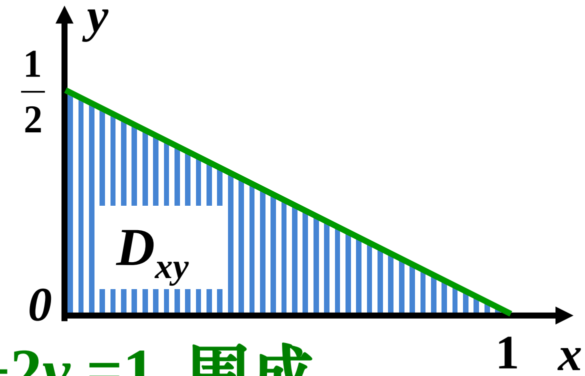
先画图



Ω是曲顶柱体

上顶： $z=1-x-2y$

下底： $z=0$



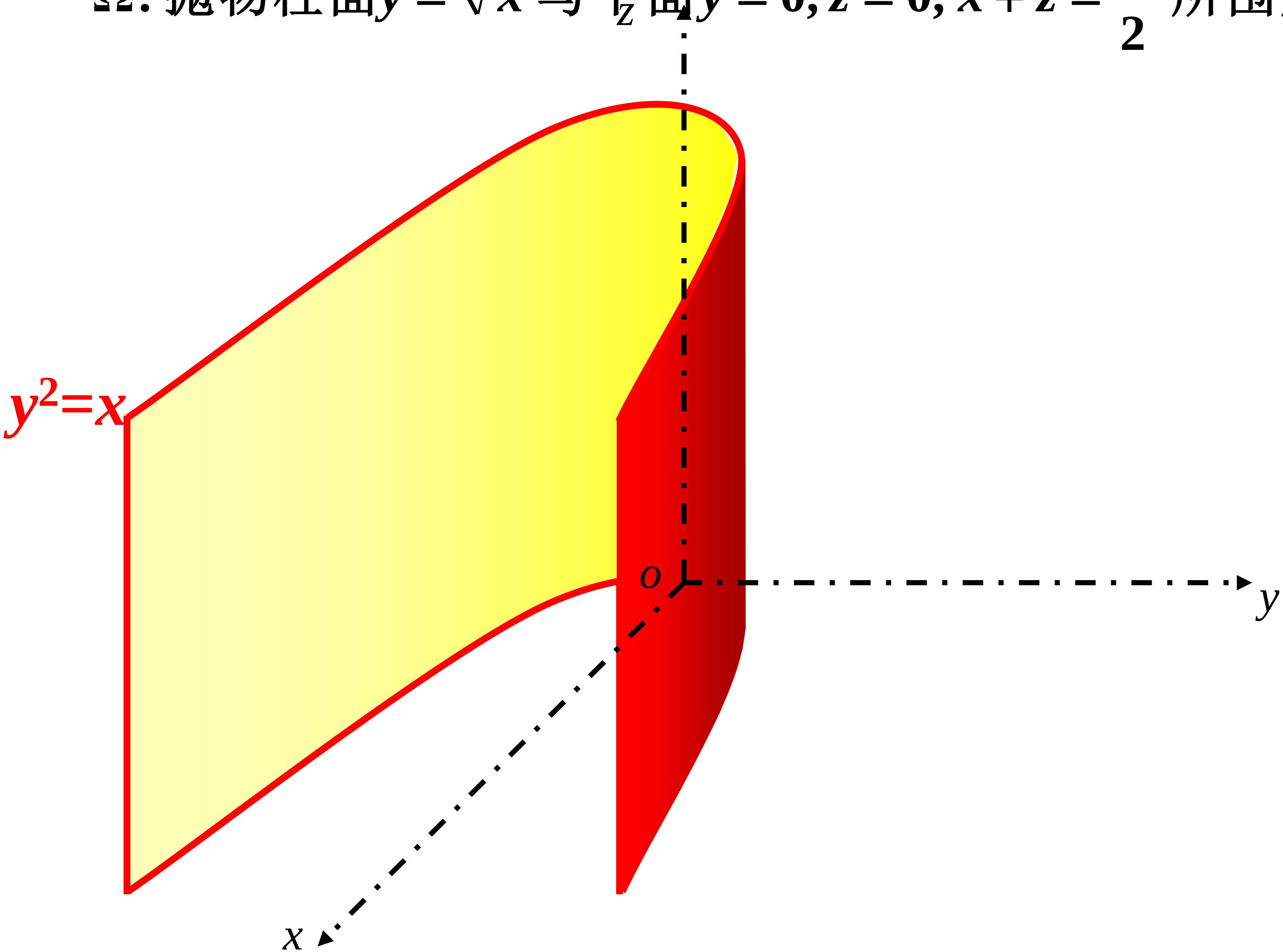
D_{xy}: $x=0,\ y=0,\ x+2y=1$ 围成

$$I=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}x\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z=\frac{1}{48}$$

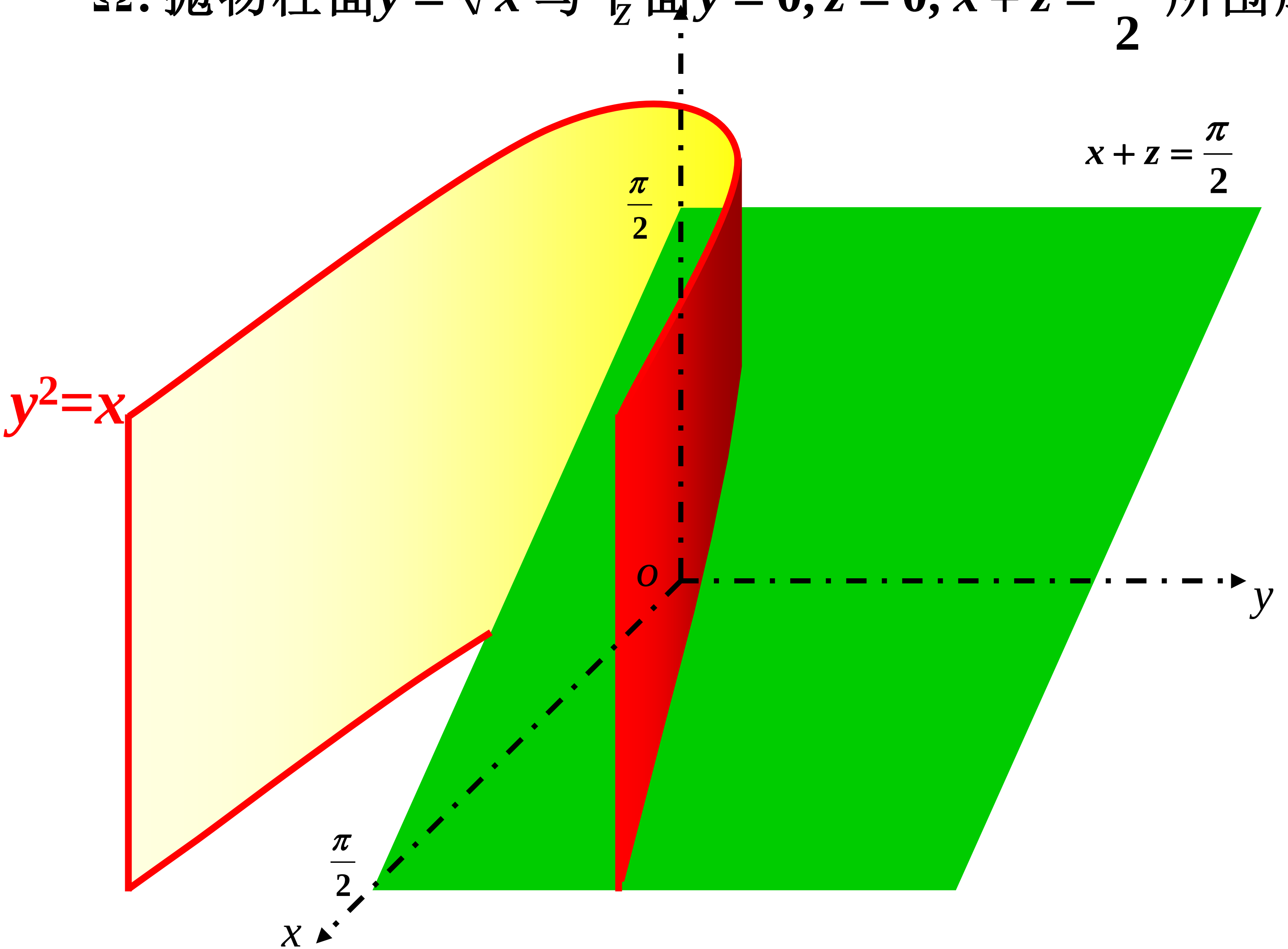
例2 计算 $I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Ω: 抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 与平面 $y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域。



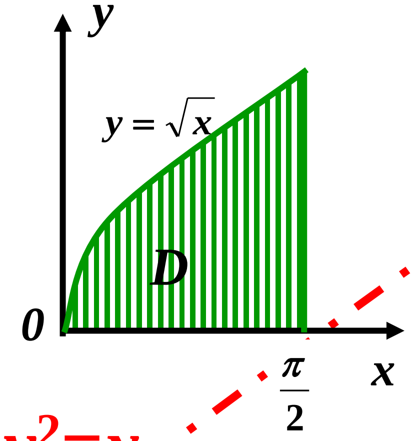
例2 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

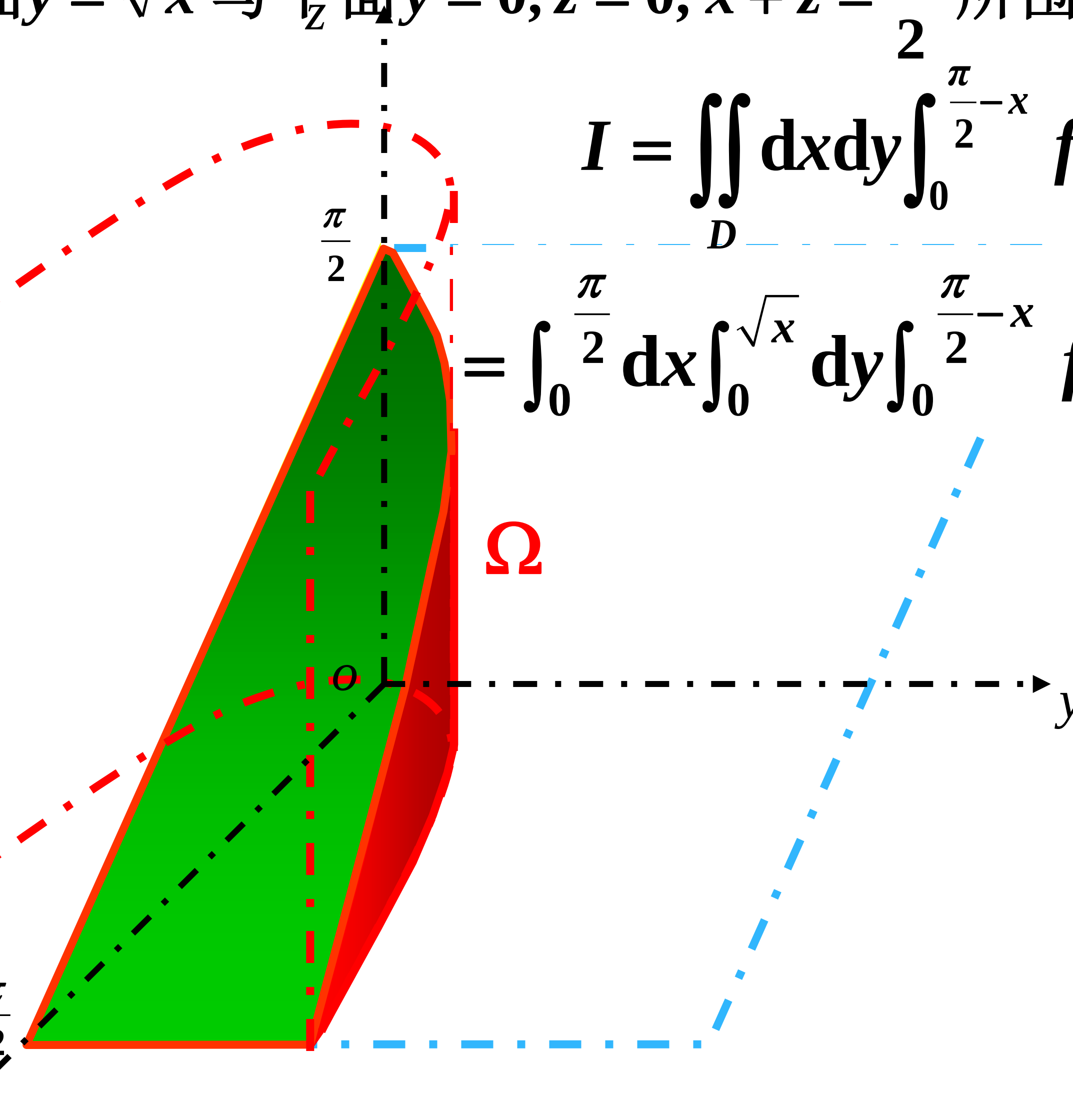
Ω: 抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 与平面 $y=0, z=0, x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域。



例2 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Ω: 抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 与平面 $y=0,z=0,x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域。

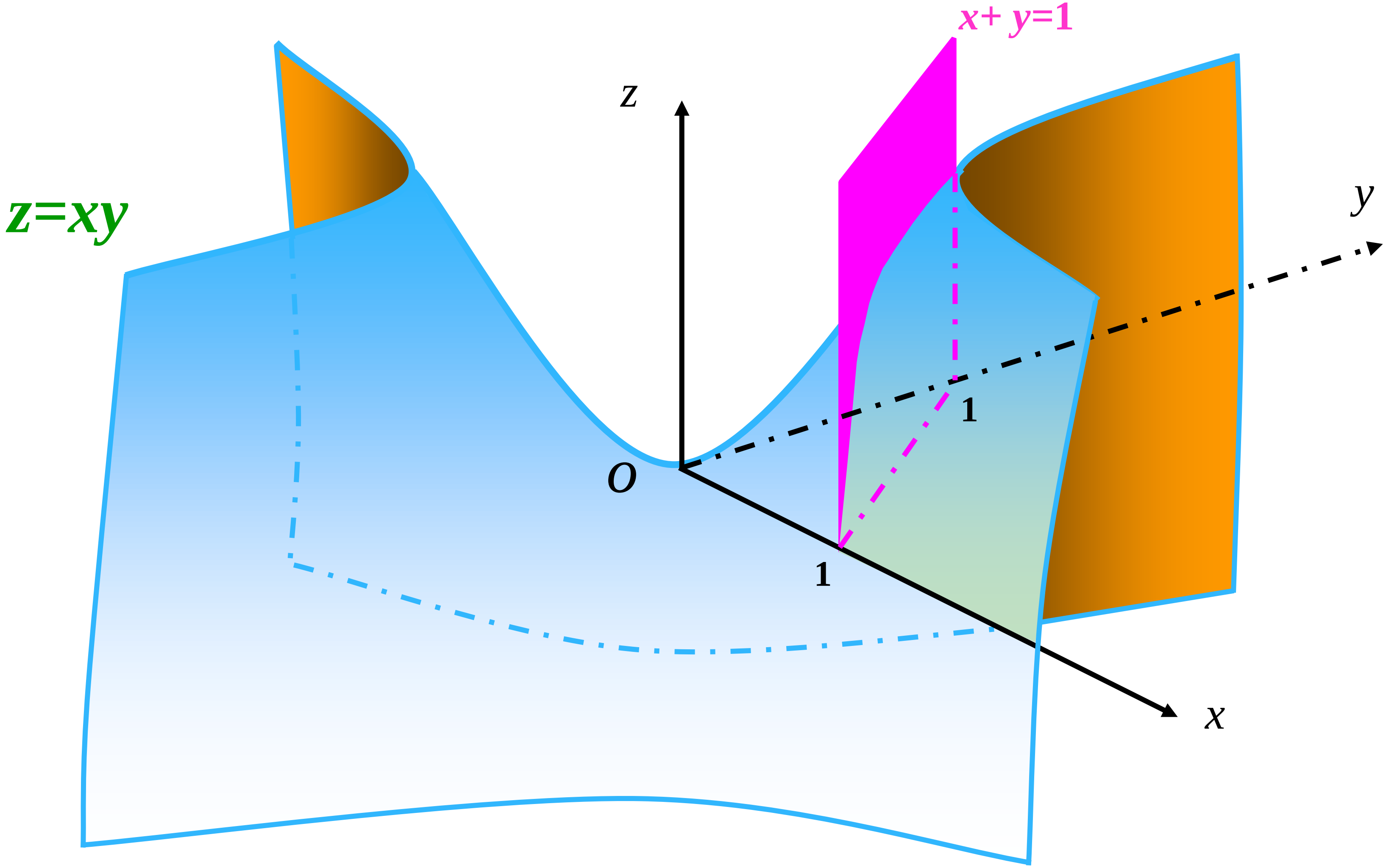




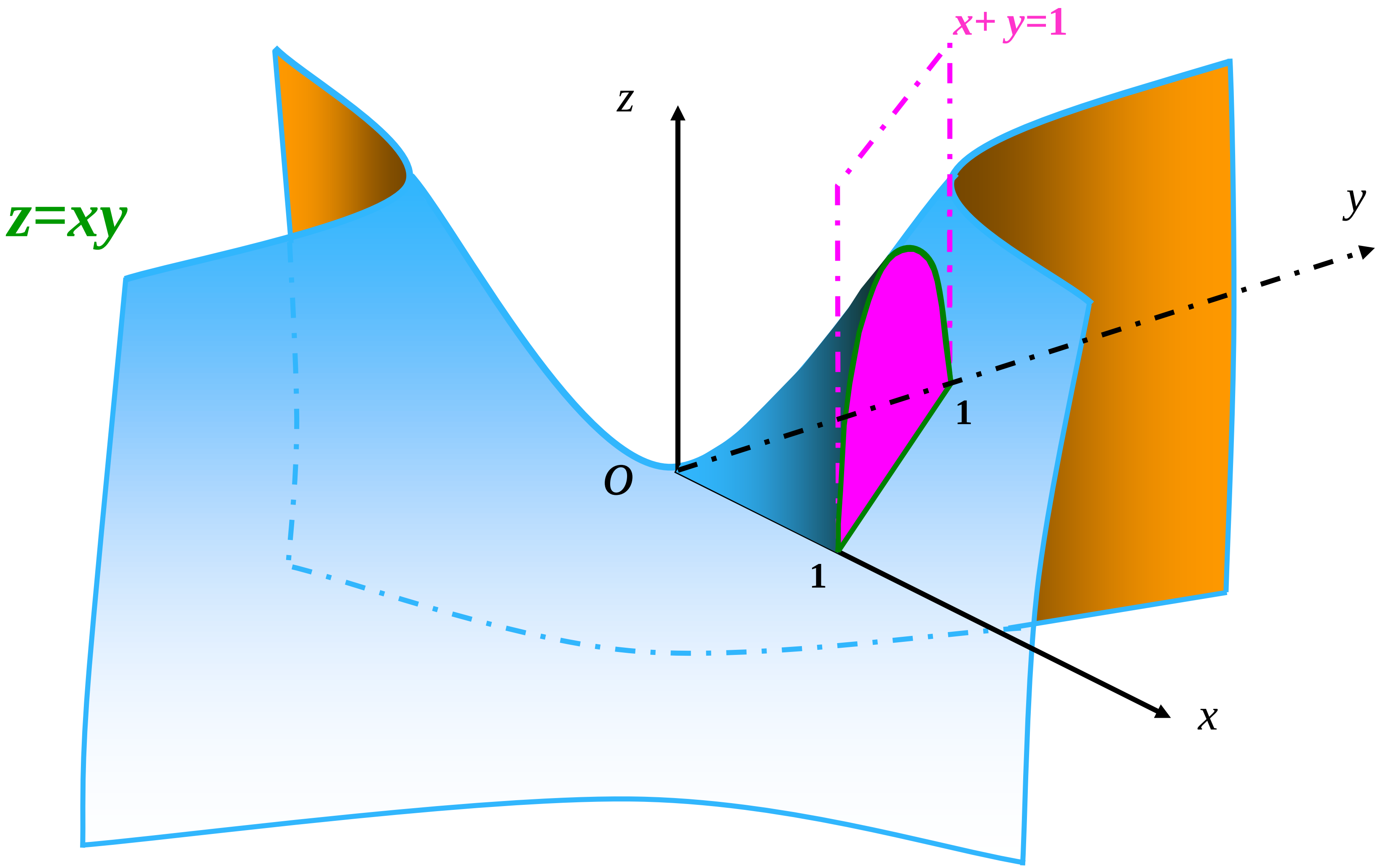
$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

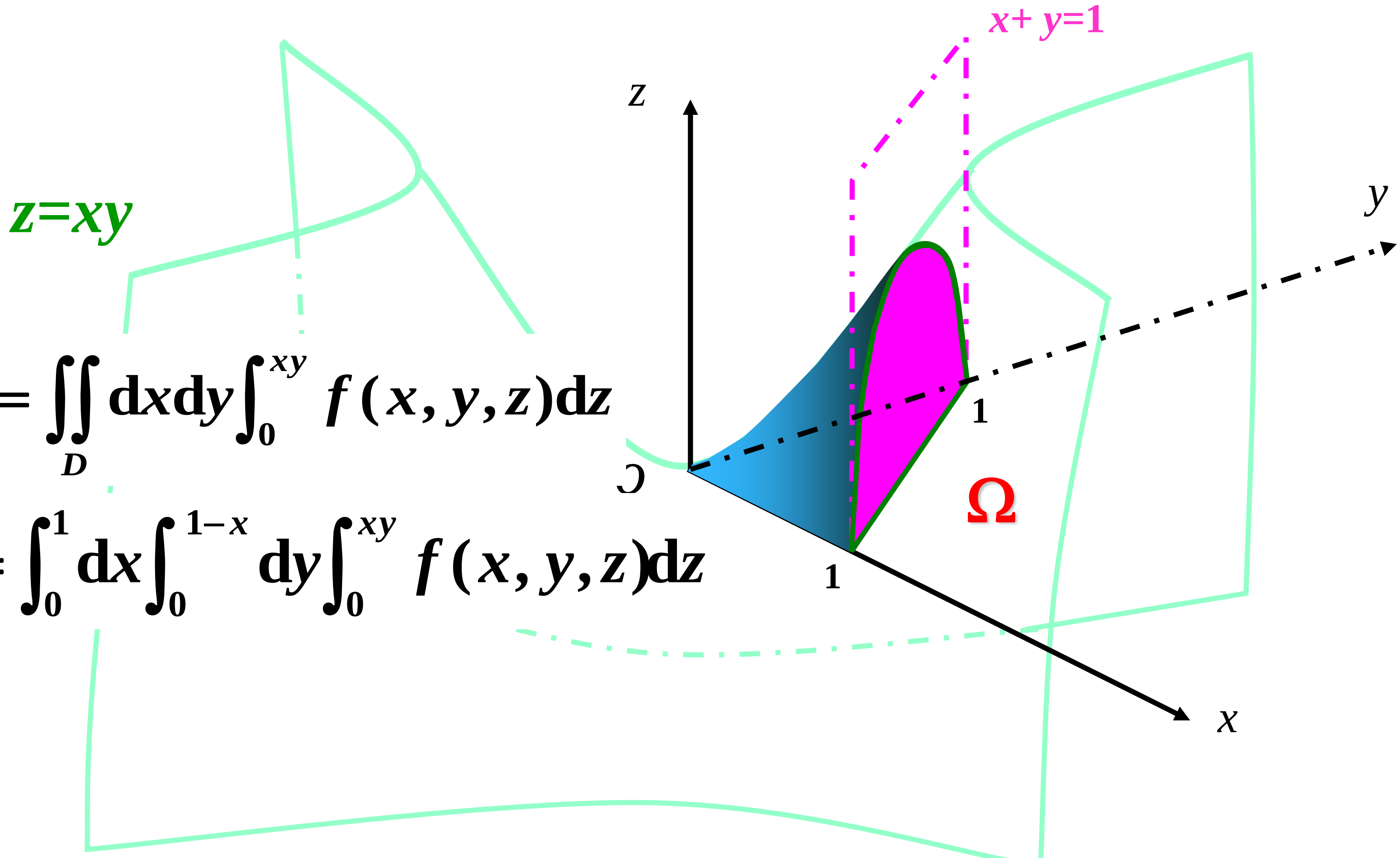
例3. 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分, 其中 $\Omega: z=xy$ 与 $x+y=1,\ z=0$ 所围区域.



例3. 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中 $\Omega: z=xy$ 与 $x+y=1,\ z=0$ 所围区域.



例3. 化三重积分 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分, 其中 $\Omega: z=xy$ 与 $x+y=1,\ z=0$ 所围区域.



$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

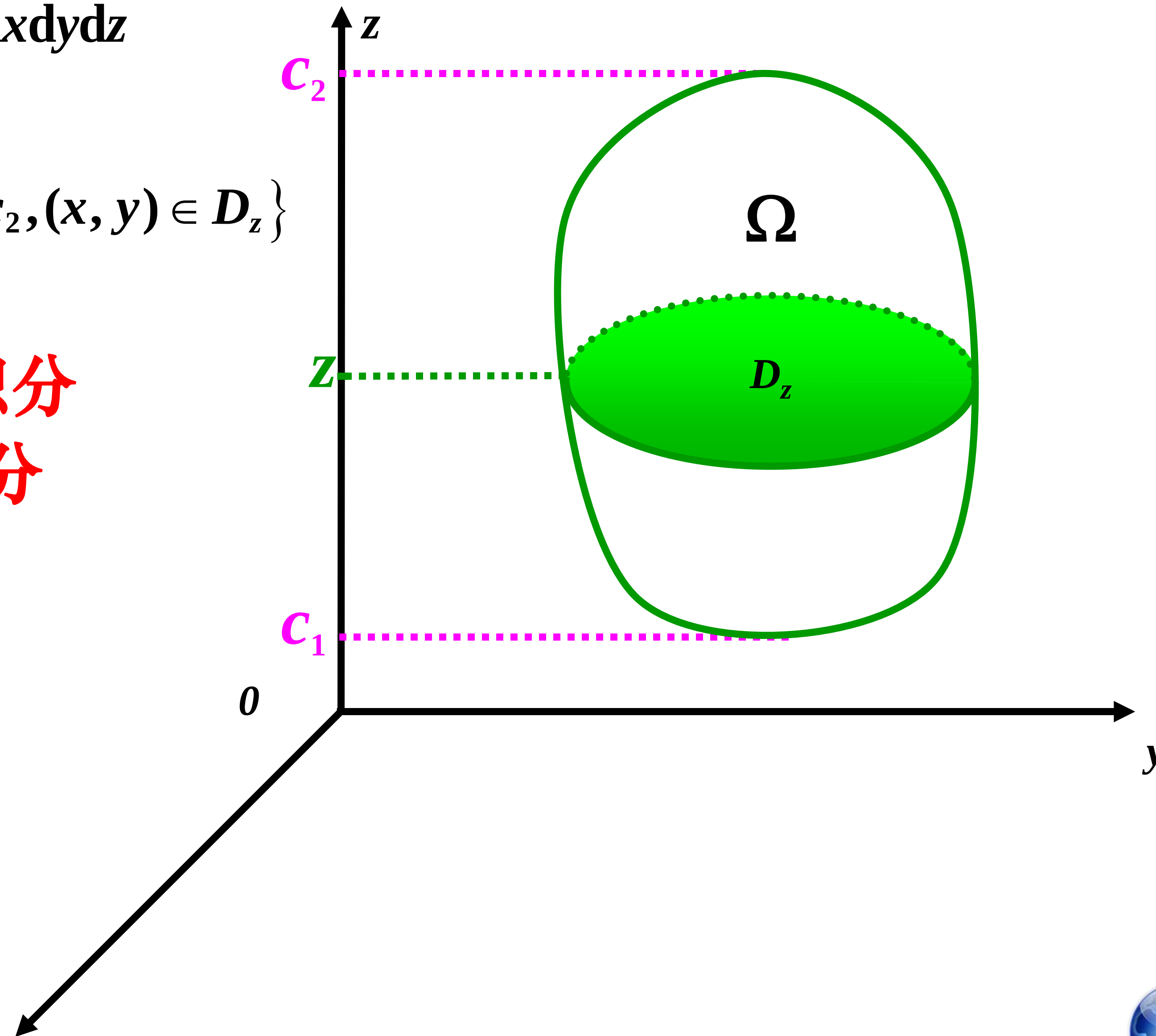
$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$\Omega =$

$$\{(x,y,z)\,|\,c_1\le z\le c_2,(x,y)\in D_z\}$$

先做二重积分

后做定积分

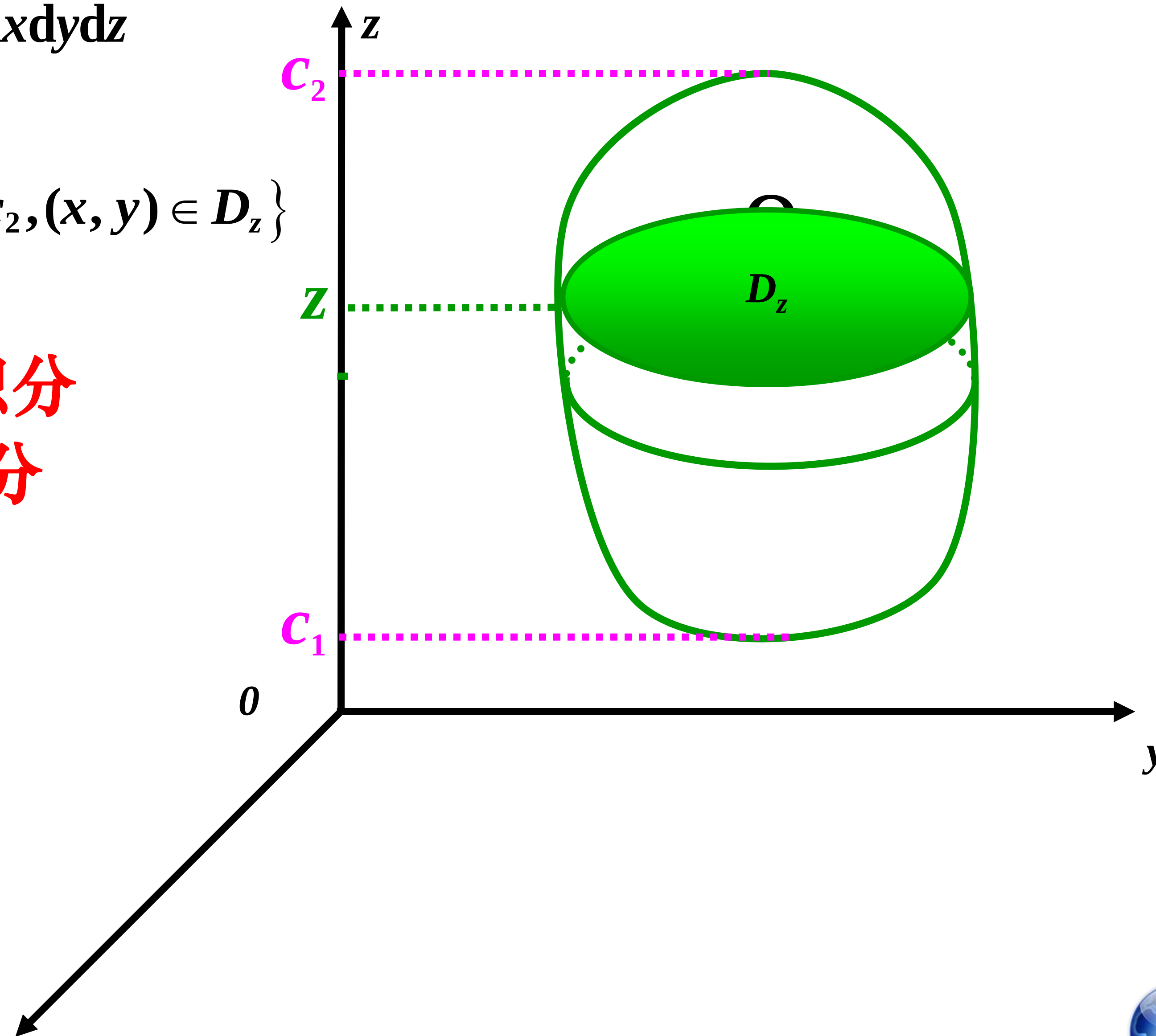


方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$\Omega=$

$$\{(x,y,z)\,|\,c_1\le z\le c_2,(x,y)\in D_z\}$$



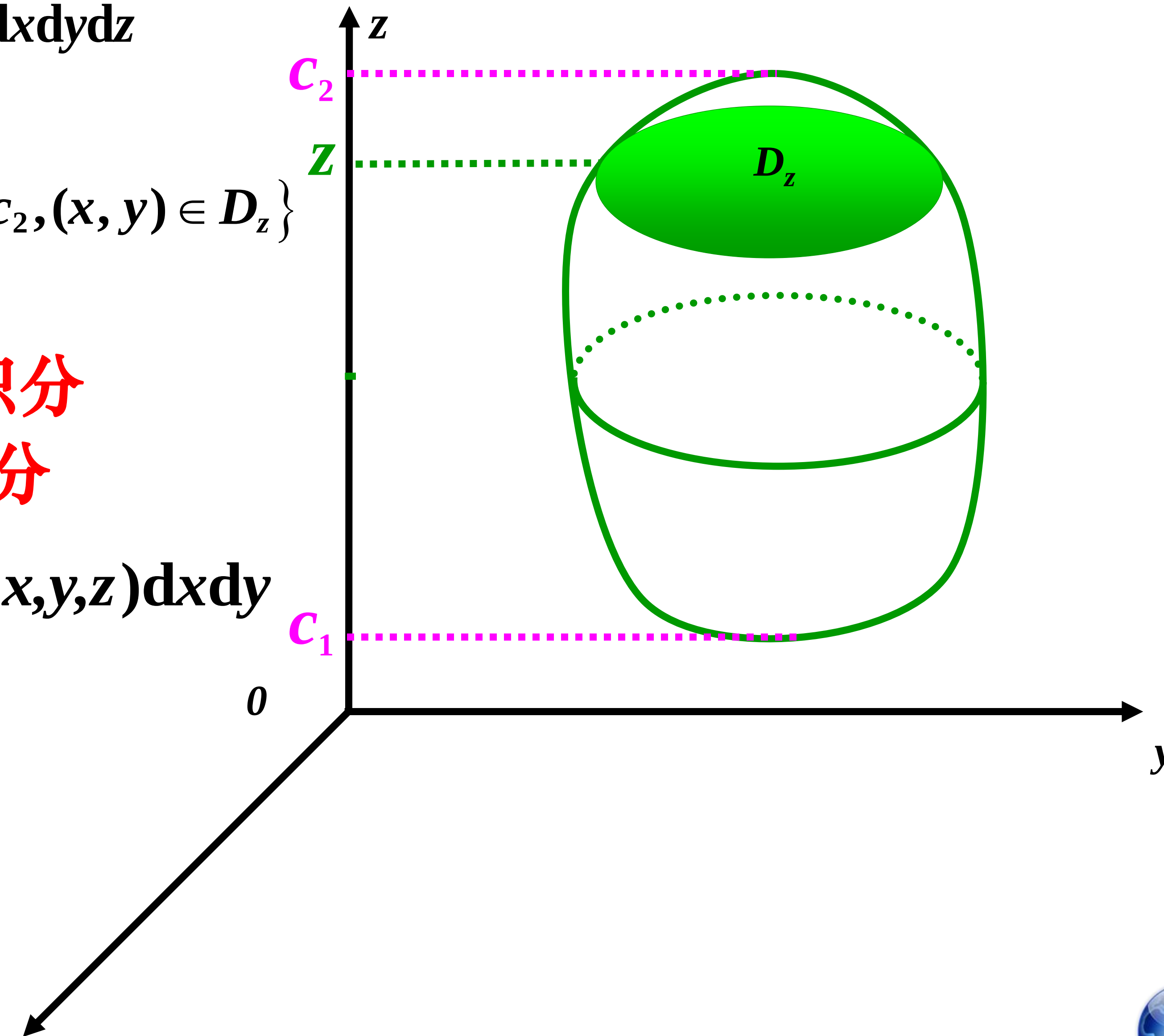
先做二重积分
后做定积分

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$\Omega =$

$$\{(x,y,z) \mid c_1 \le z \le c_2, (x,y) \in D_z\}$$



先做二重积分

后做定积分

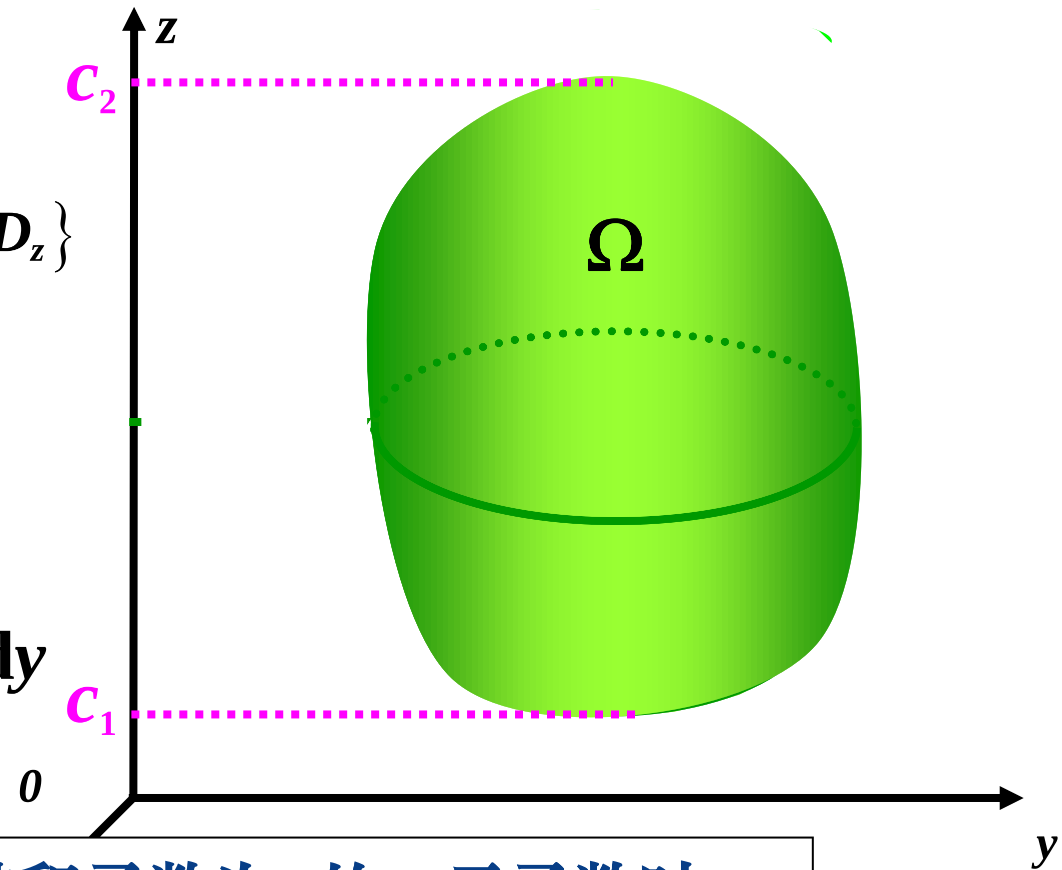
$$I = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法2. 截面法 (“先二后一”)

$$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$\Omega=$

$$\{(x,y,z)\mid c_1\le z\le c_2,(x,y)\in D_z\}$$

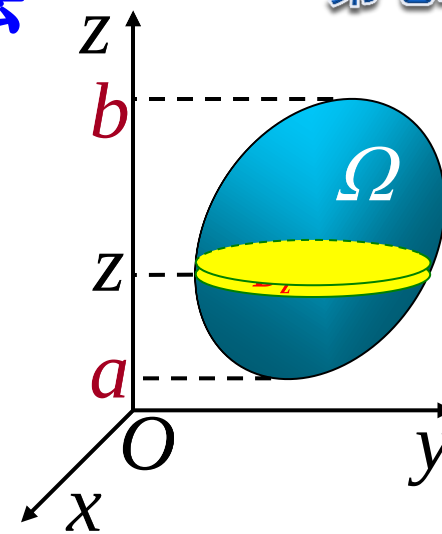


后一　　先二

$$I=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法2特别适用于： 当被积函数为z 的一元函数时，而截面的图形非常清楚且面积易知(记为$S(z)$)的情况，否则一般不用方法2．

方法2. 截面法 (“先二后一”) “切片法”



应用 $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$

以 D_z 为底, dz 为高的柱形薄片质量为

$$\iint_{D_z}[f(x,y,z)\mathrm{d}z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

面密度 ≈ $f(x,y,z)\mathrm{d}z$

该物体的质量为 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$

先二 $=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$

后一 $\overset{\text{记作}}{=\!=}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

当被积函数在积分域上变号时, 因为

$$f(x,y,z)$$

$$=\frac{|f(x,y,z)|+f(x,y,z)}{2}-\frac{|f(x,y,z)|-f(x,y,z)}{2}$$

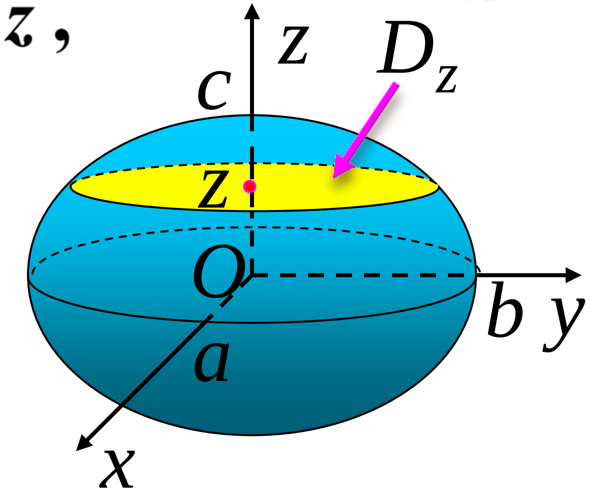
$$=\underbrace{f_1(x,y,z)-f_2(x,y,z)}_{\text{均为为非负函数}}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega} f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}v-\iiint_{\Omega} f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

根据重积分性质仍可用前面介绍的方法计算.

例4. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \\ -c\le z\le c \end{cases}$

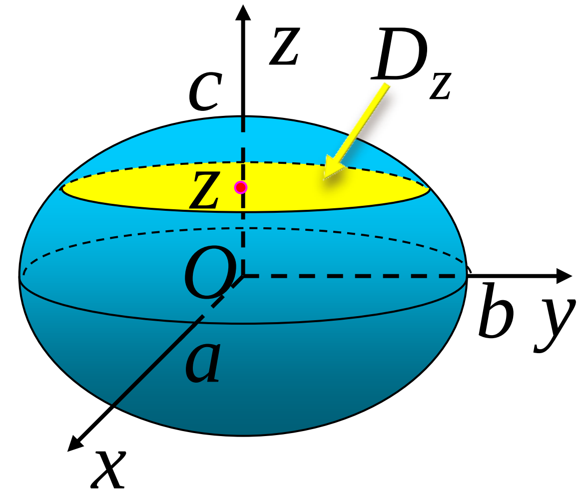
用“先二后一”

$$\therefore \iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{D_z} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-c}^{c} z^2\,\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

例5. 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$

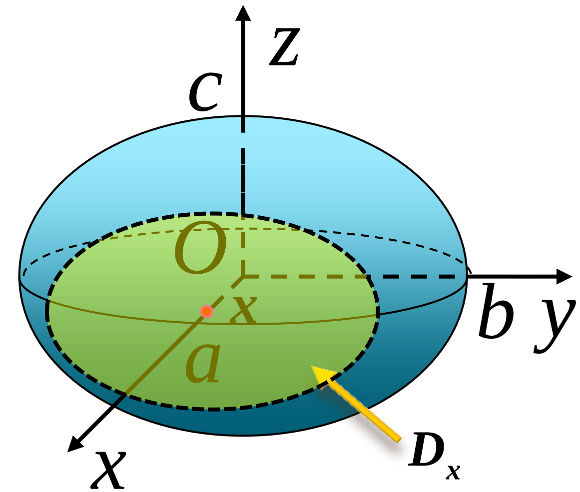


解: 如例4, 先求 $\iiint_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{c^2}\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$$

例5. 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中 $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: 如例4, 先求 $\iiint_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

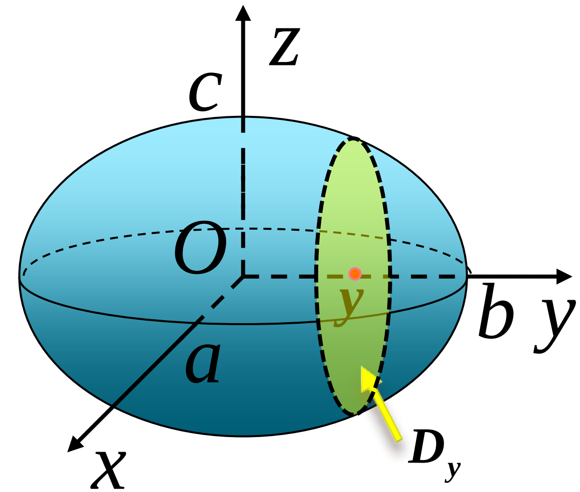
$$=\frac{1}{c^2}\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$$

同理 $\iiint_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$

注: “后一” 积分变量为 x

例5. 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中Ω : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: 如例4, 先求 $\iiint_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{c^2}\iiint_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$$

注: "后一" 积分变量为 y

同理 $\iiint_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$

$\iiint_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc$

所以 $I=\frac{4}{5}\pi abc$

方法3. 对称性的应用

若Ω关于*yoz*面(或*xoz*面, *xoy*面)对称,且 $f(x,y,z)$为关于*x*(或 *y*, *z*)的连续奇函数, 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ **=0**

P182 总习题十 1(1)

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$$

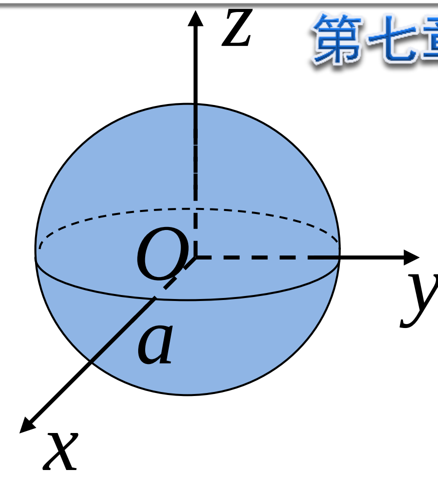
(A) $\iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

$$=4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$$

例6. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v.$$



解: 利用"先一后二"(投影)法, 有

$$\text{原式}=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}z$$

$$=0$$

(注: 对称区间, 奇函数)

小结：三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x \int_{y_1(z,x)}^{y_2(z,x)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

小结：三重积分的计算方法

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_c^d \mathrm{d}x \iint_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_e^f \mathrm{d}y \iint_{D_y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

小结：三重积分的计算方法

方法3. 对称性的应用

若Ω关于*yoz*面(或*xoz*面, *xoy*面)对称, 且$f(x,y,z)$为关于 x(或 y , z)的连续奇函数, 则

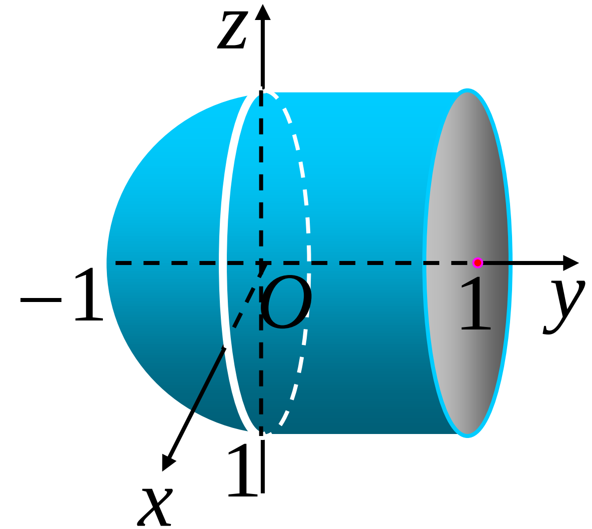
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0$$

练习 计算 $I=\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成.

分析： 若用“先二后一”，则有

$$I=\int_{-1}^{0} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{0}^{1} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

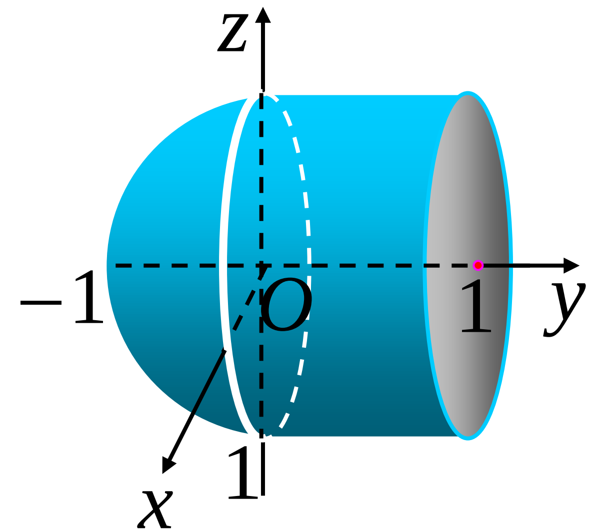


计算较繁，采用“三次积分”较好.

解: Ω由$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$所围,

故可表为

$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$



$$I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\,\mathrm{d}y=\frac{28}{45}$$

思考: 若被积函数为 $f(x)$时, 如何计算简便?

2. 利用柱面坐标计算三重积分

/ Triple Integrals in Cylindrical Coordinates */*

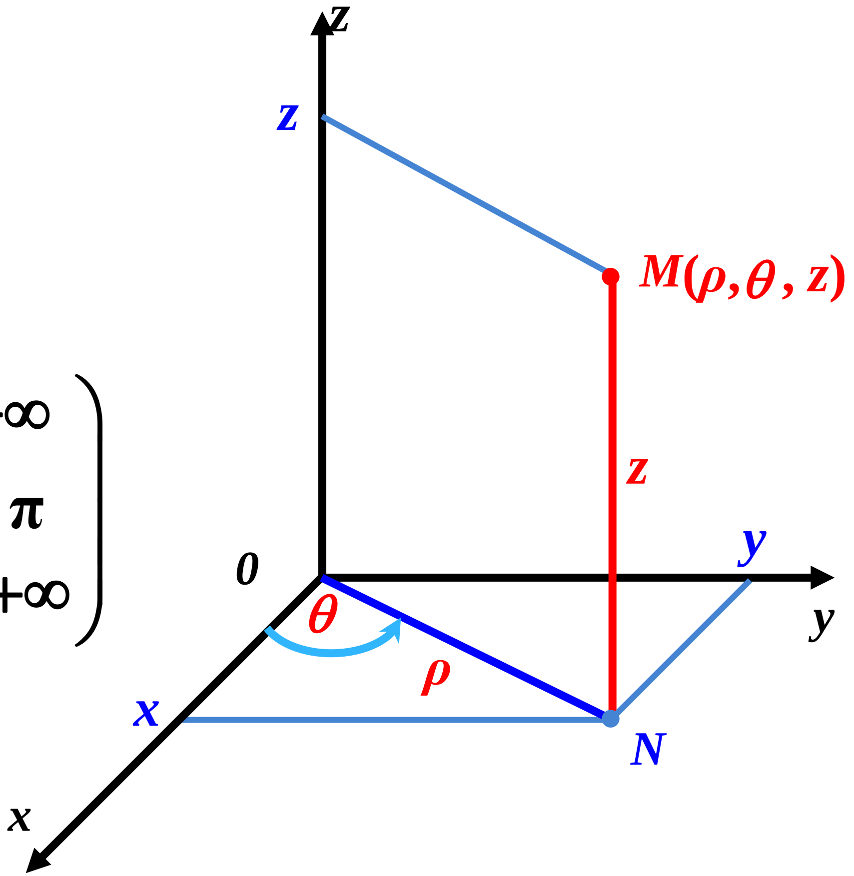
设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 将x,y用极坐标ρ,θ代替, 则(ρ,θ,z)

就称为点M 的柱面坐标.

(1)柱面坐标

$$(x,y,z)\ \rightarrow\ (\rho,\theta,z)$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{array}\right)$$



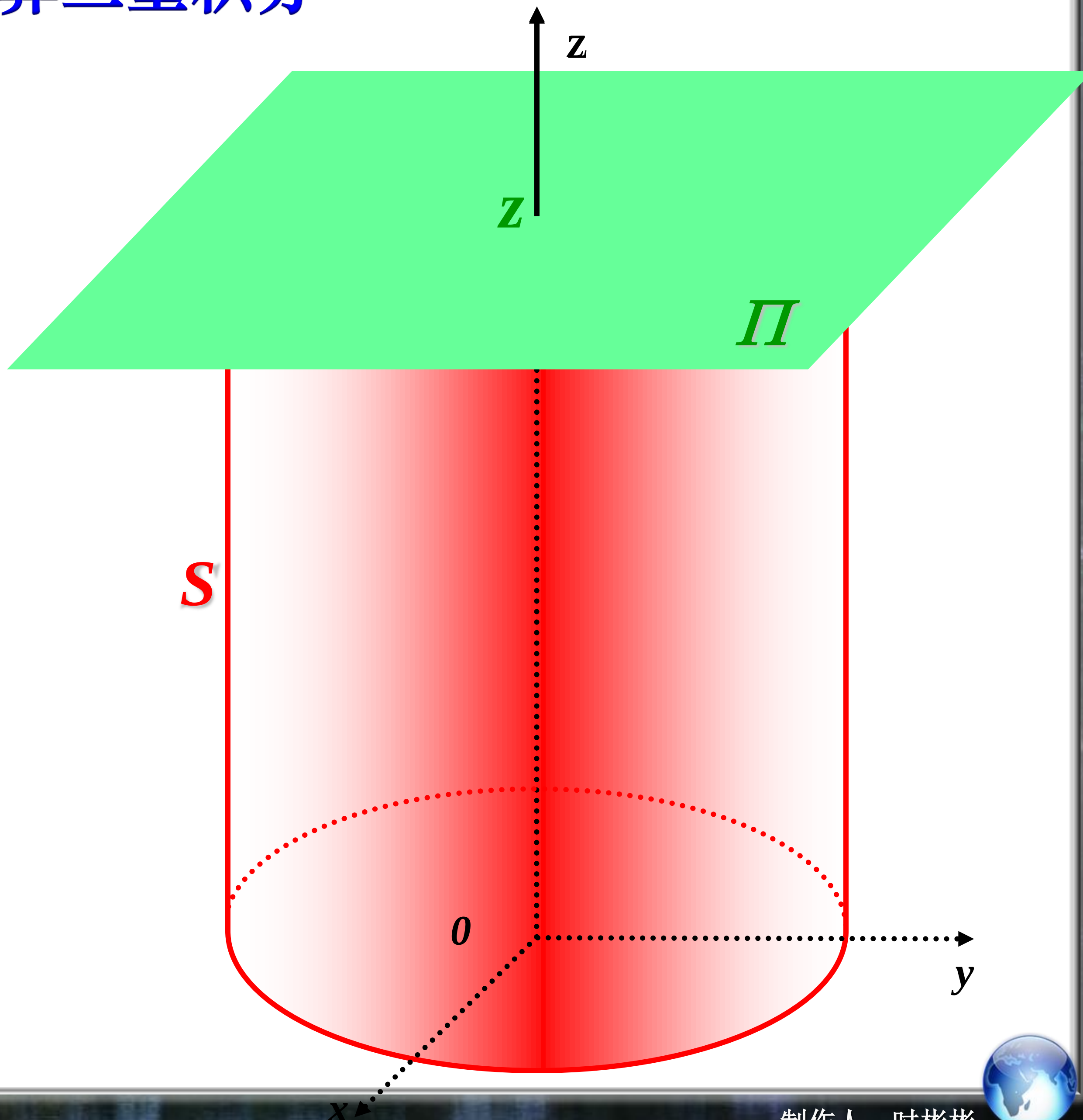
2. 利用柱面坐标计算三重积分

(2)柱面坐标的坐标面

动点$M(\rho, \theta, z)$

ρ =常数：柱面S

z =常数：平面Π



2. 利用柱面坐标计算三重积分

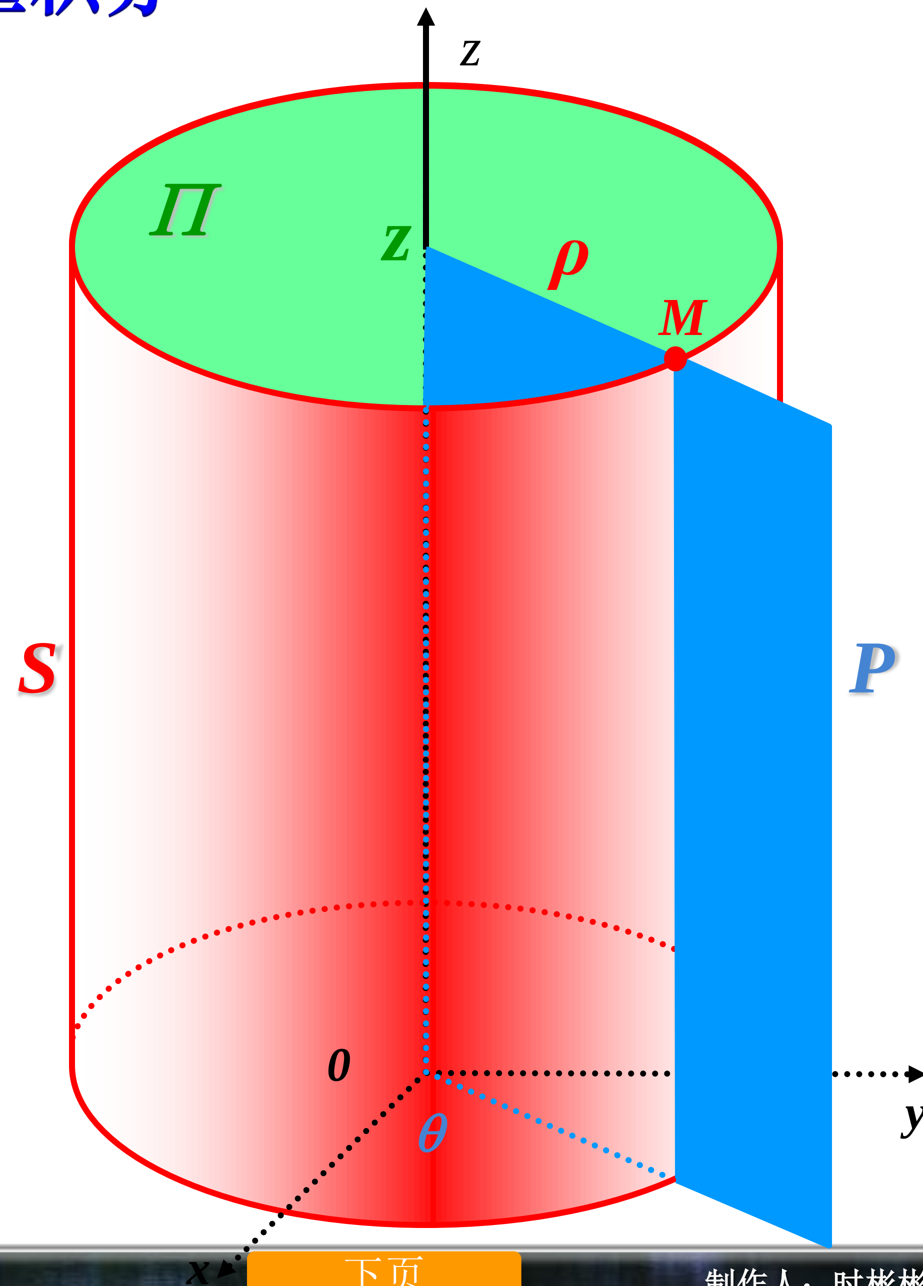
(2)柱面坐标的坐标面

动点$M(\rho, \theta, z)$

ρ =常数：柱面S

z =常数：平面Π

θ=常数:半平面P



2. 利用柱面坐标计算三重积分

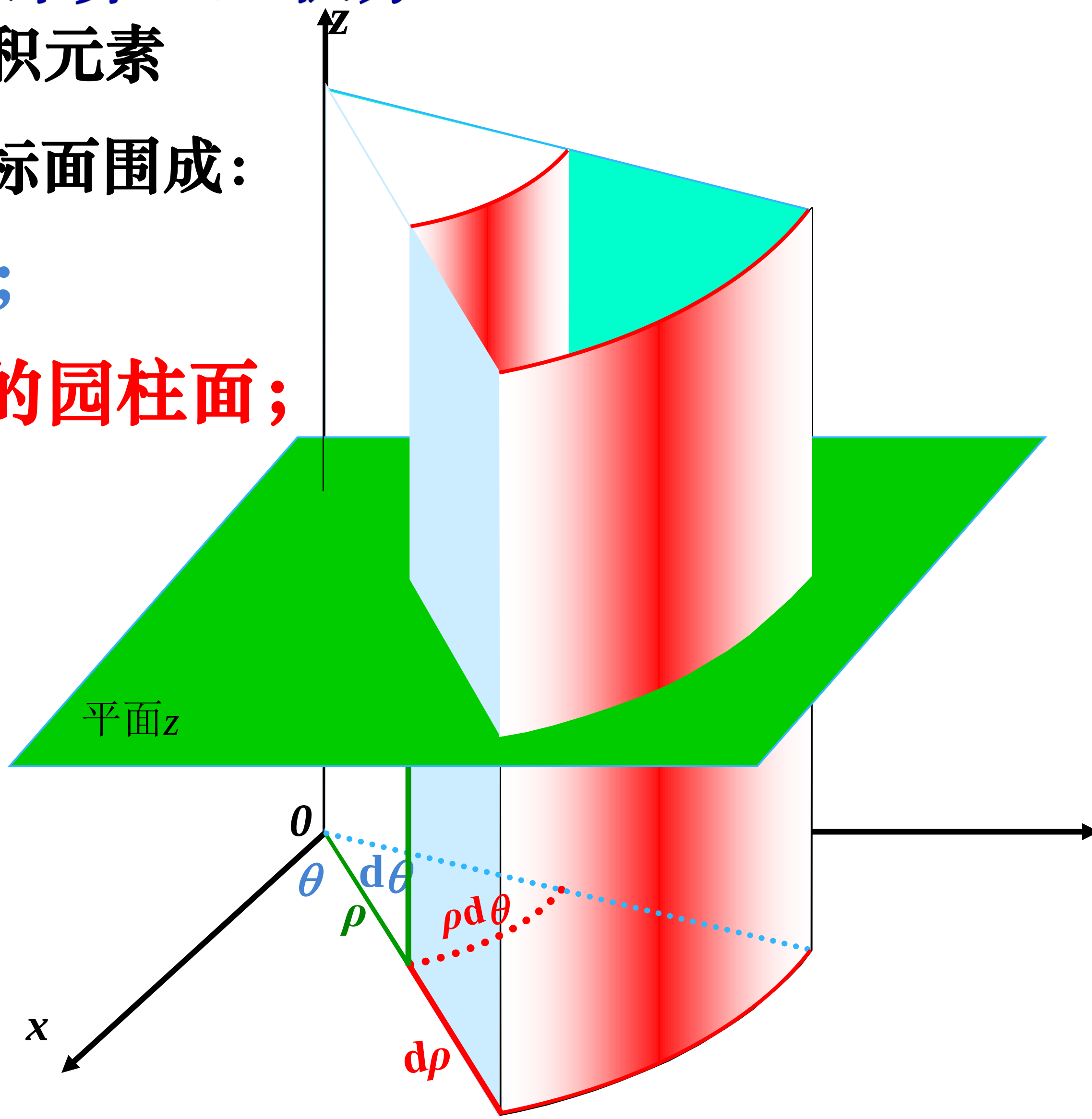
(3)柱面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围成：

半平面θ及$\theta+\mathrm{d}\theta$；

半径为ρ及$\rho+\mathrm{d}\rho$的园柱面；

平面 z及 $z+\mathrm{d}z$；



2. 利用柱面坐标计算三重积分

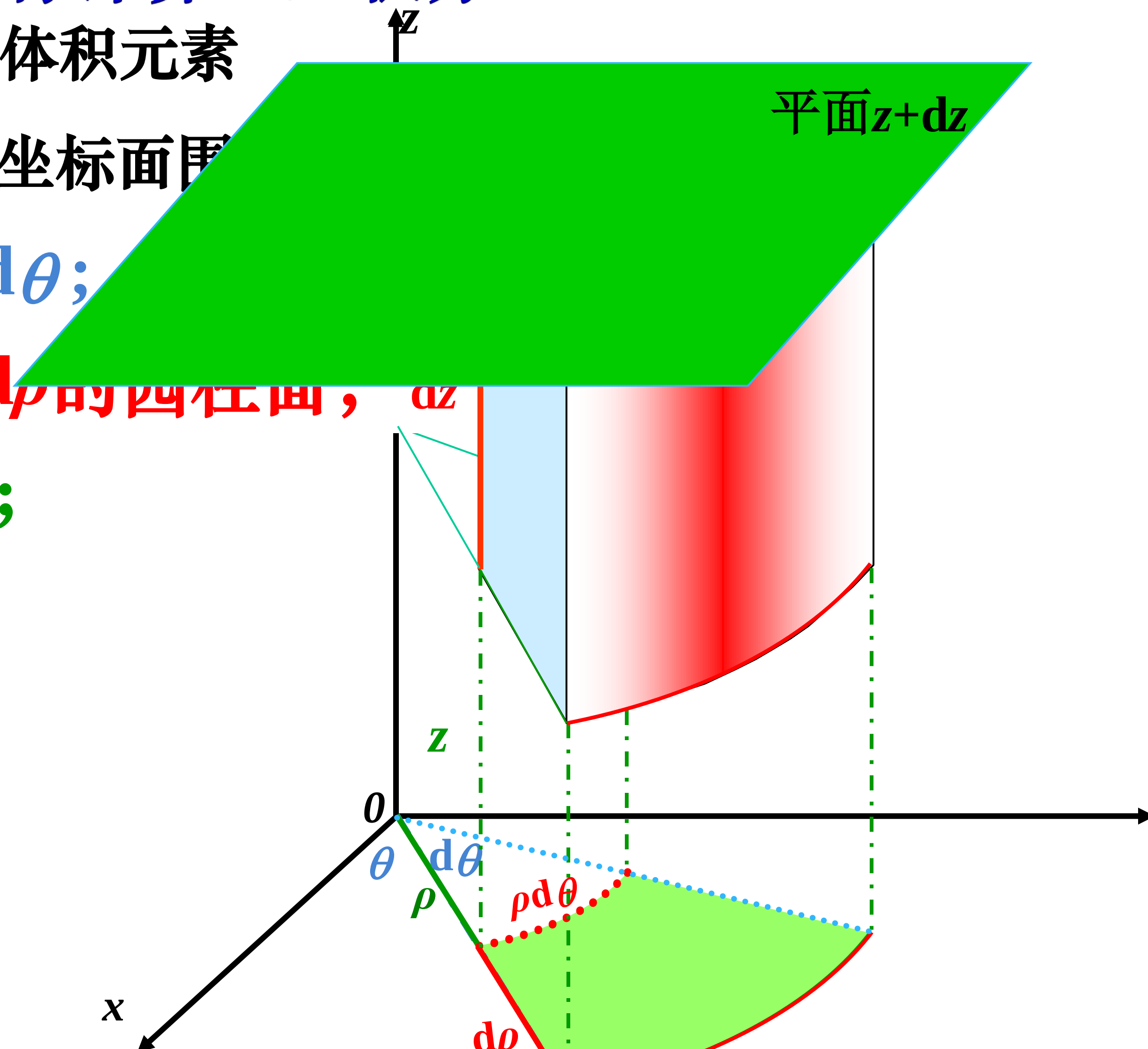
(3)柱面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围

半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$；

半径为 ρ 及 $\rho+\mathrm{d}$…

平面 z 及 $z+\mathrm{d}z$；



底面积 ： $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

2. 利用柱面坐标计算三重积分

(3)柱面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围成:

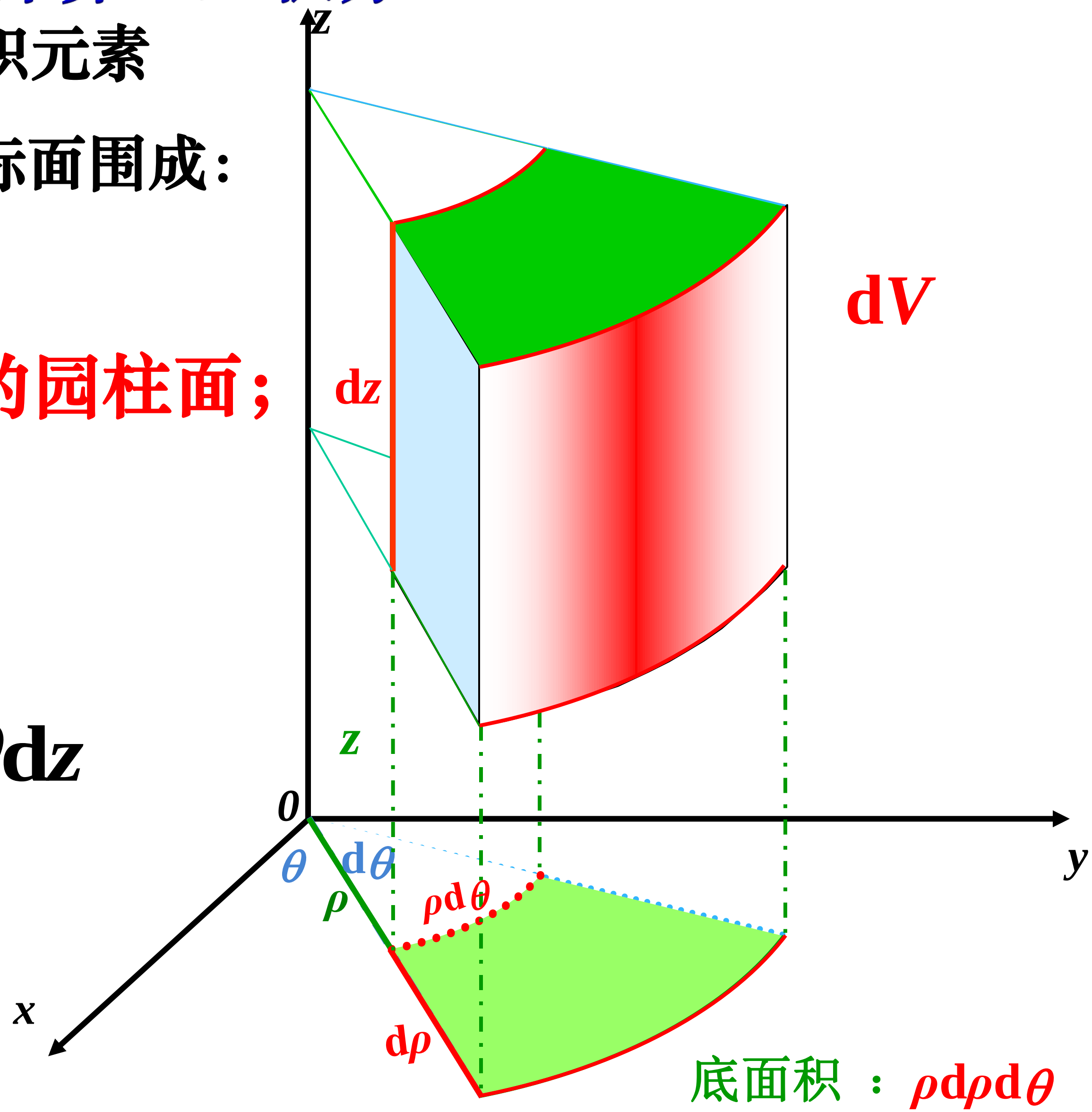
半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$;

半径为 ρ 及 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 的园柱面;

平面 z 及 $z+\mathrm{d}z$;

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

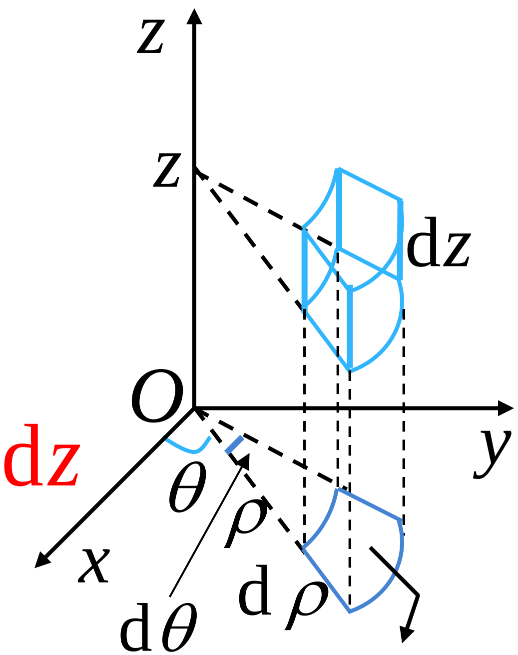


柱面坐标系中体积元素

$$\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

因此 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



$\boxed{\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}$

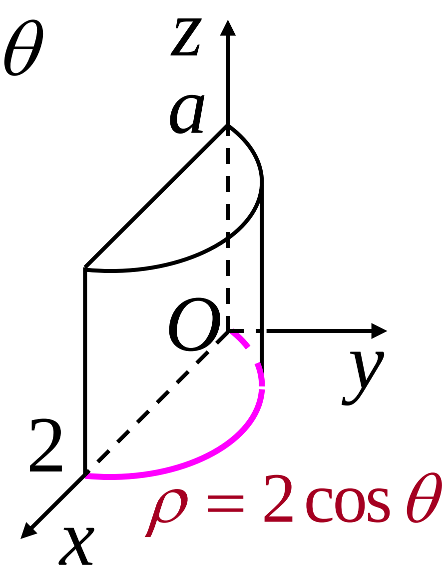
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例7. 计算三重积分 $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le a\\ 0\le\rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$



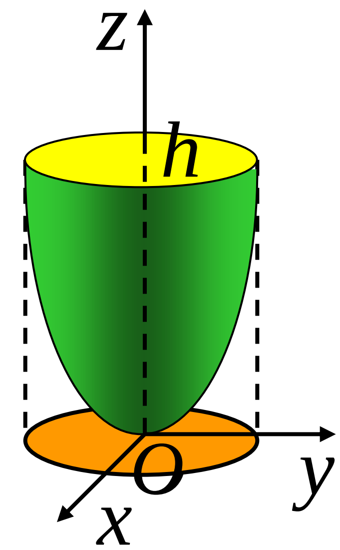
$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$

$$\text{原式}=\iiint_\Omega z\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

例8. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中Ω 由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成.



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\frac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

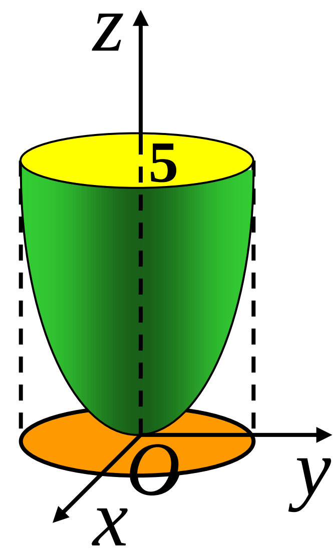
$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

练习(6分)：计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是 yoz 平面上曲线 $y^2=2z$ 绕 z 轴旋转而成的曲面与平面 $z=5$ 所围成的区域

解：在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\dfrac{\rho^2}{2}\le z\le 5\\ 0\le\rho\le\sqrt{10}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$



$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{5}\rho^3\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\rho^3\left(5-\frac{\rho^2}{2}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{250}{3}\pi$$

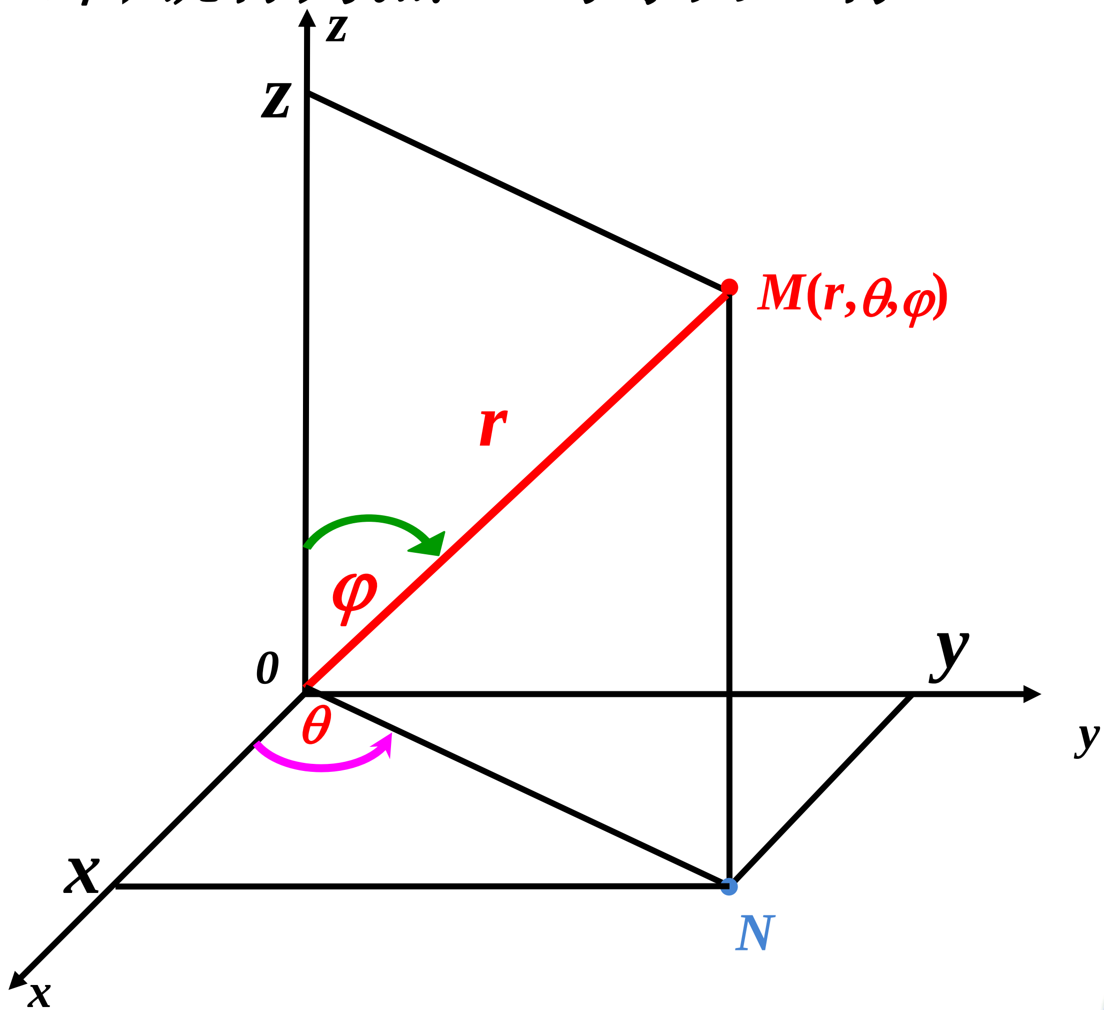
3. 利用球面坐标计算三重积分 (1)球面坐标

/* Triple Integrals in Spherical Coordinates */

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 其柱面坐标为(ρ,θ,z), 令$|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle zOM=\varphi$, 则(r,θ,φ)就称为点M的球面坐标.

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$



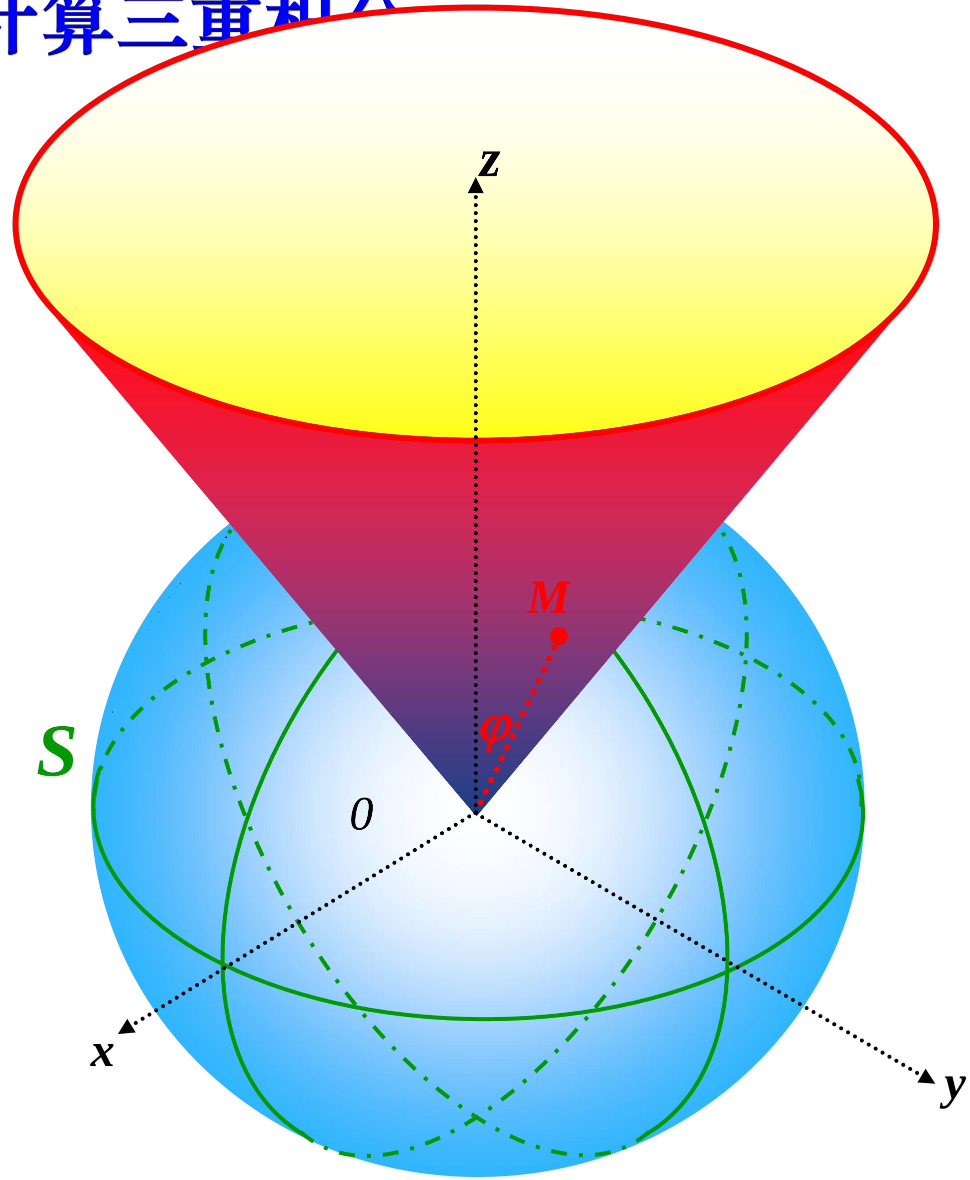
3. 利用球面坐标计算三重积分

(2)球面坐标的坐标面

动点$M(r,\theta,\varphi)$

r =常数：球面S

φ =常数：



3. 利用球面坐标计算三重积分

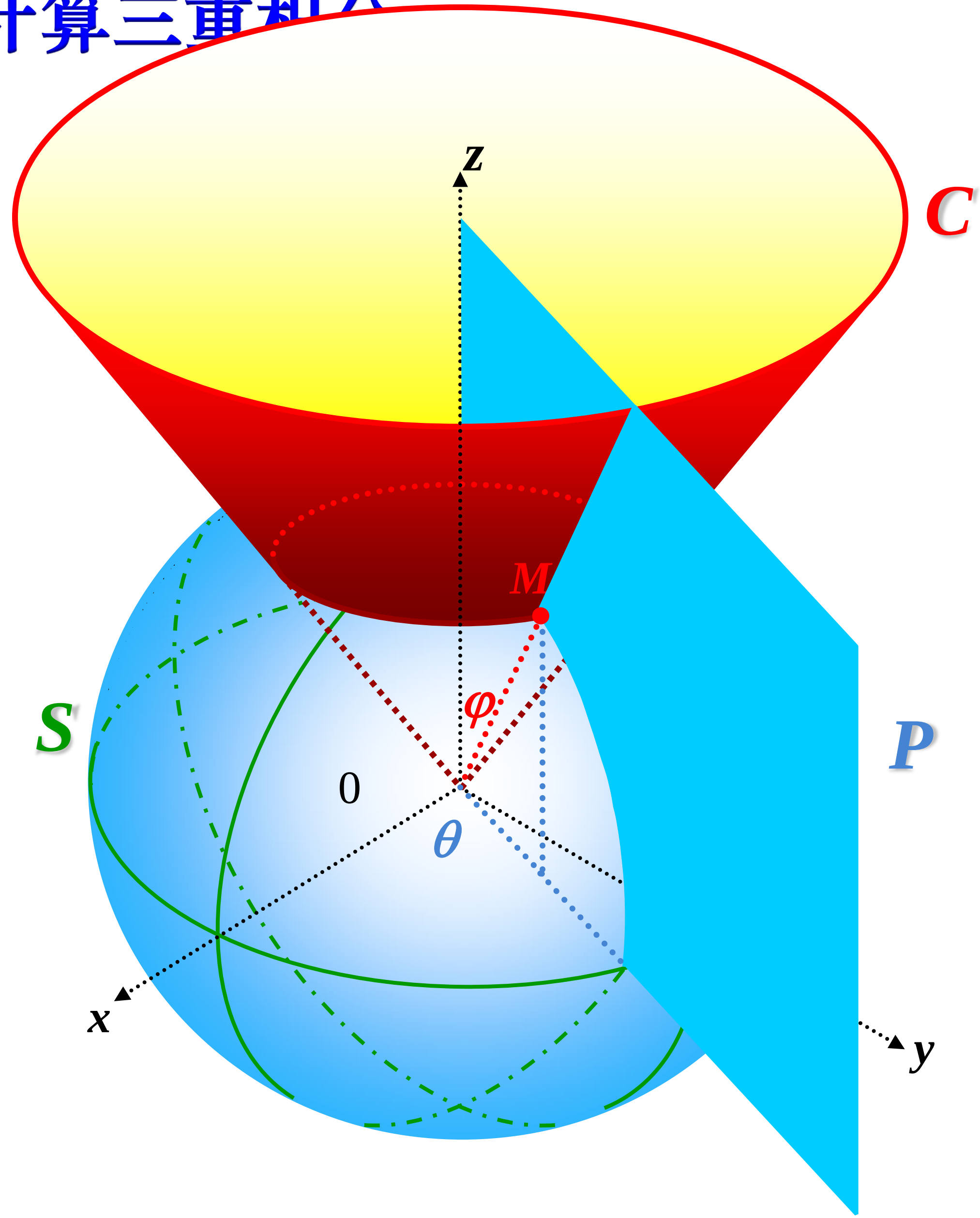
(2)球面坐标的坐标面

动点$M(r,\theta,\varphi)$

r =常数：球面S

φ =常数：锥面C

θ =常数：半平面P



3. 利用球面坐标计算三重积分

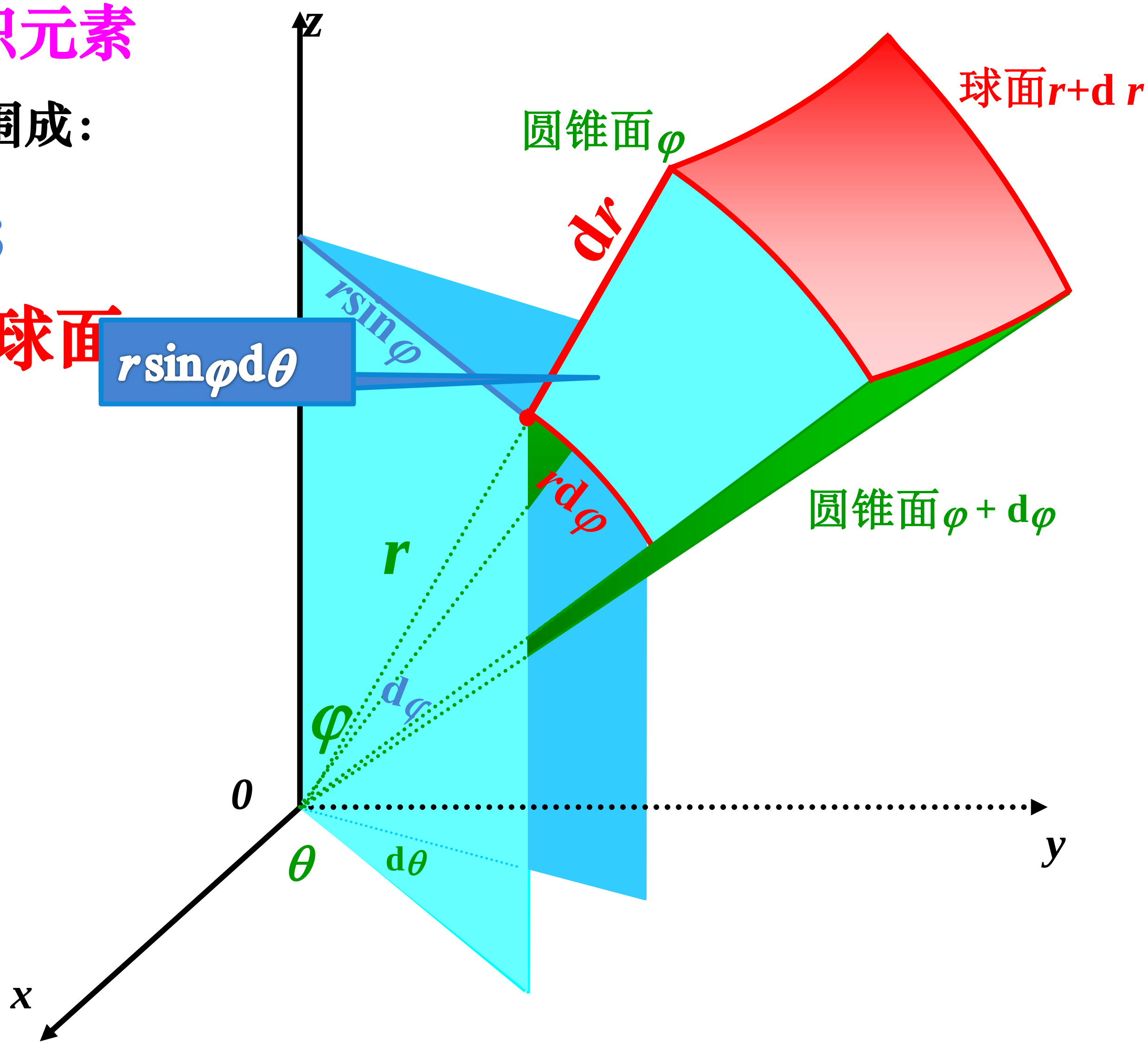
(3)球面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围成：

半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$；

半径为 r 及 $r+\mathrm{d}r$ 的球面

圆锥面 φ 及 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$



3. 利用球面坐标计算三重积分

(3)球面坐标下的体积元素

元素区域由六个坐标面围成：

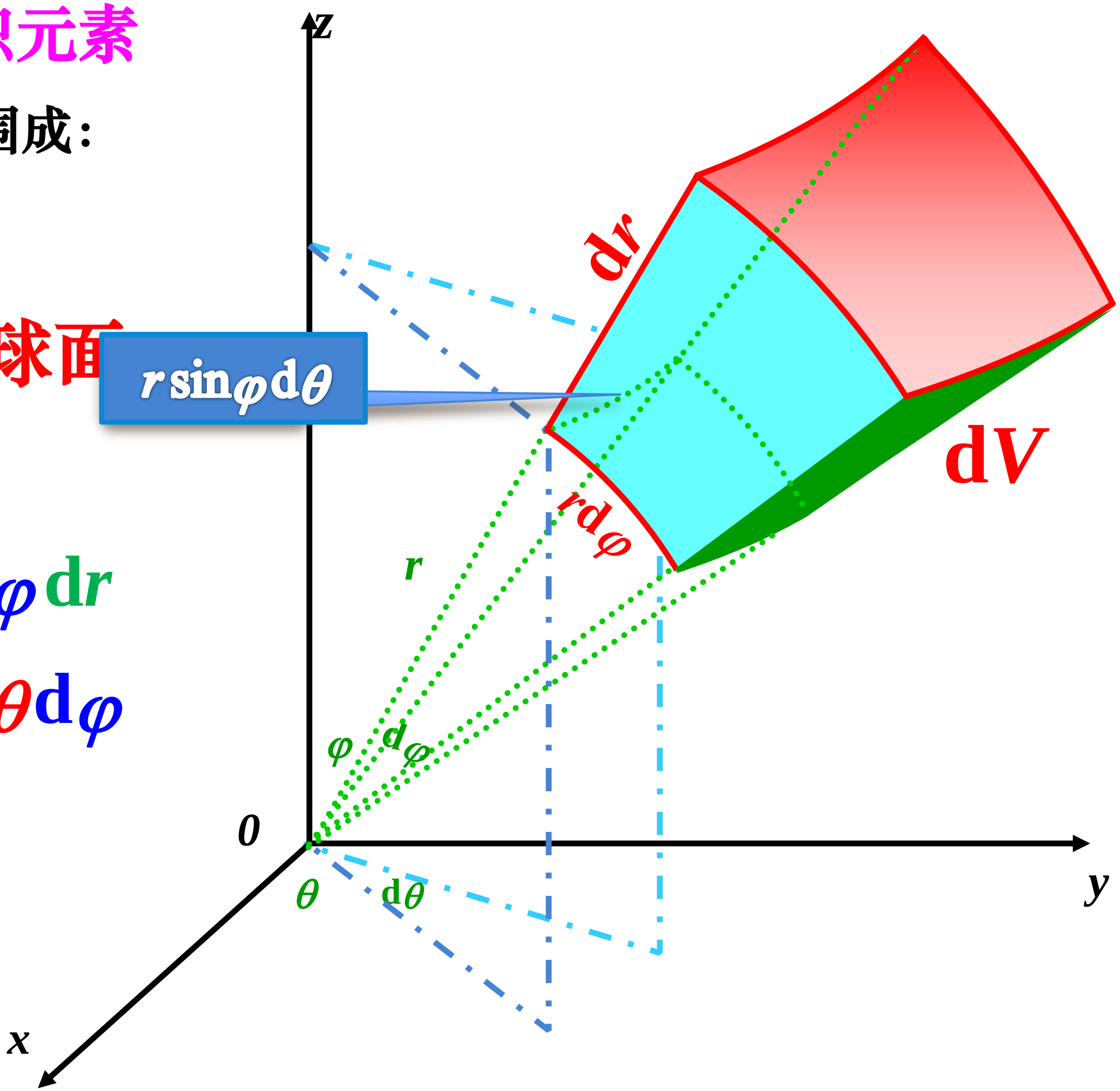
半平面 θ 及 $\theta+\mathrm{d}\theta$；

半径为 r 及 $r+\mathrm{d}r$ 的球面

圆锥面 φ 及 $\varphi+\mathrm{d}\varphi$

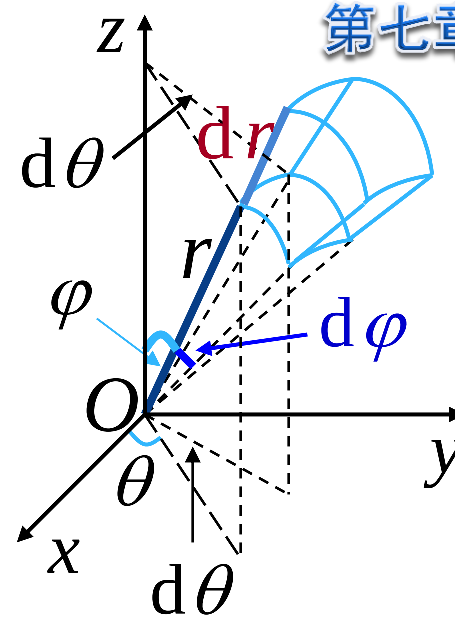
$$\mathrm{d}V = r\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$



如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$



因此

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\mathbf{r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta}$$

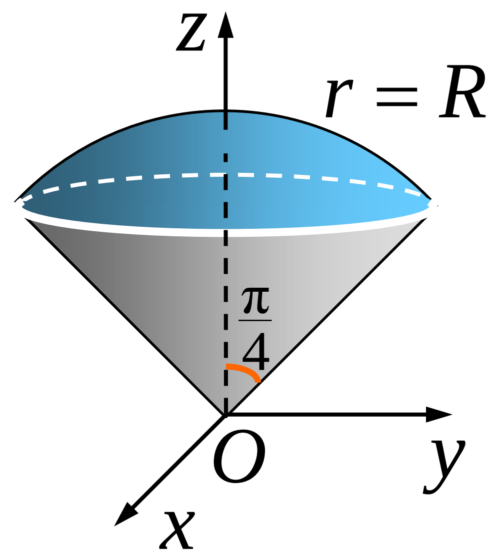
适用范围:

1) **积分域**表面用球面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用球面坐标表示时**变量互相分离**.

例9. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下



$$\Omega:\begin{cases} 0\le r\le R \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

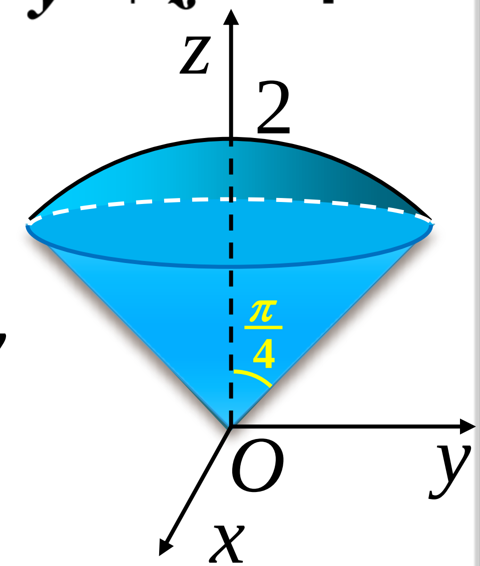
$$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega'} r^2 r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

例10 设Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成, 计算 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$.



提示:

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+\underline{2xy+2yz+2xz})\,\mathrm{d}v$$

$\big\downarrow$ 利用对称性

$$=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$$

$\big\downarrow$ 用球面坐标

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成; 被积函数形式简洁, 或变量可分离.
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	

* 说明:

三重积分也有类似二重积分的换元积分公式:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}F(u,v,w)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$