

§ 7_5_2

高斯公式 *通量与散度

/* *Flux and Divergence* */

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ Gauss 公式

一、高斯公式

*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

*三、通量与散度



一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取**外侧**, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有一阶连续偏导数, 则有



$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (\text{Gauss 公式})$$

或
$$= \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (\text{Gauss 公式})$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x, y, z) 处法向量的方向余弦.

下面仅证
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} R dx dy$$



证明: 设 $\Omega: z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$
 称为XY-型区域, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$,
 $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$, 则

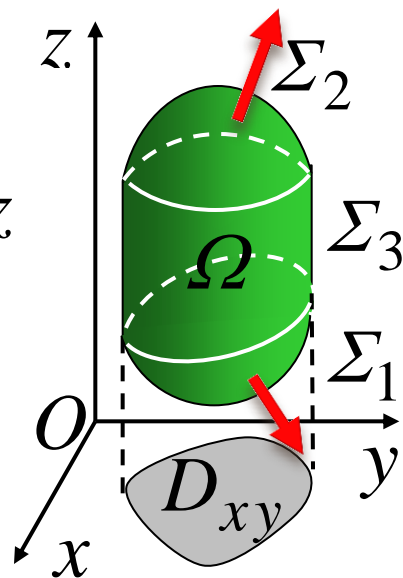
先一后二

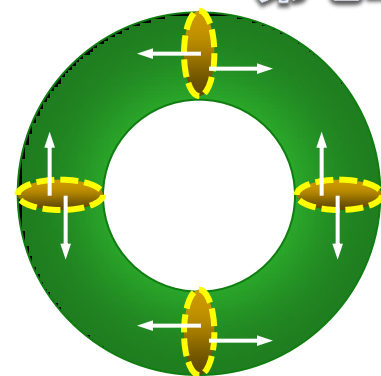
$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \} dx dy$$

$$\oiint_{\Sigma} R dx dy = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$$





所以 $\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} R dx dy$
 若 Ω 不是 XY -型区域, 则可引进辅助面
 将其分割成若干个 XY -型区域, 在辅助面
 正反两侧面积分正负抵消, 故上式仍成立.

类似可证 $\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} P dy dz$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\Sigma} Q dz dx$$

三式相加, 即得所证 Gauss 公式:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ = \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \end{aligned}$$



例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_{\Sigma} (x-y)dx dy + (y-z)xdy dz$
 其中 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 0, z = 3$ 所围空间闭
 区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.

解: 这里 $P = (y-z)x, Q = 0, R = x-y$
 利用Gauss 公式, 得

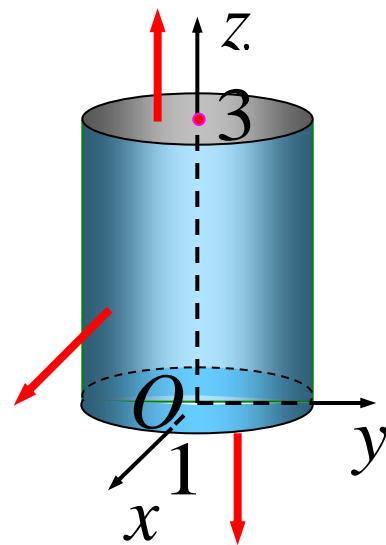
$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} (y-z)dx dy dz$$

利用质心公式, 注意 $\bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{3}{2}$

$$= (0 - \frac{3}{2}) \iiint_{\Omega} dx dy dz = -\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 改为圆柱侧面(取外侧), 如何计算?



例2. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 Σ 为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.

解: $P = z^2 + x, Q = 0, R = -z$

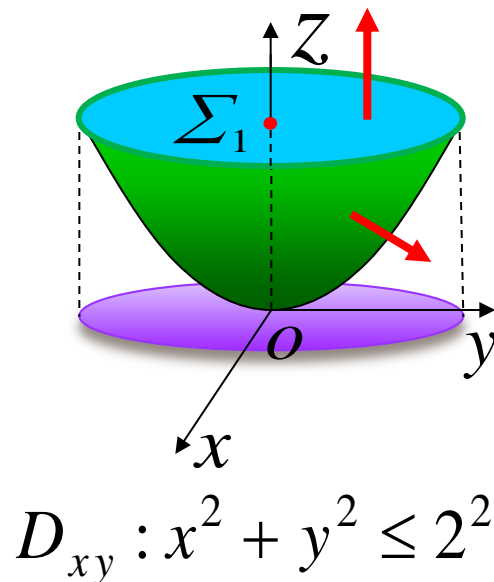
$$P_x + Q_y + R_z = 1 - 1 = 0$$

作取上侧的辅助面 Σ_1 :

$$z = 2, (x, y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2^2$$

$$I = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

$$= \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz + \iint_{D_{xy}} 2 dx dy = 8\pi$$



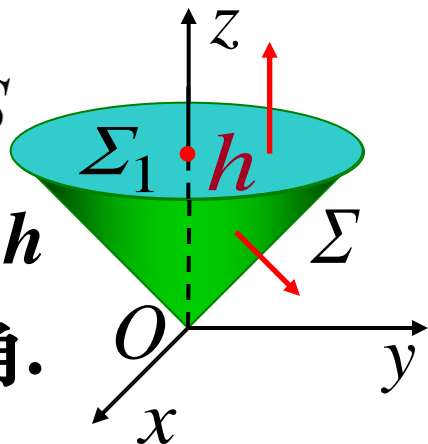
$$D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 2^2$$



例3. 利用Gauss 公式计算积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$$

其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于 $z = 0$ 及 $z = h$ 之间部分的下侧, α, β, γ 为法向量的方向角.



解: 作辅助面

$\Sigma_1: z = h, (x, y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \leq h^2$, 取上侧

记 Σ, Σ_1 所围区域为 Ω , 则

$$\text{在 } \Sigma_1 \text{ 上 } \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma \cup \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} \right) (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz - \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy \end{aligned}$$



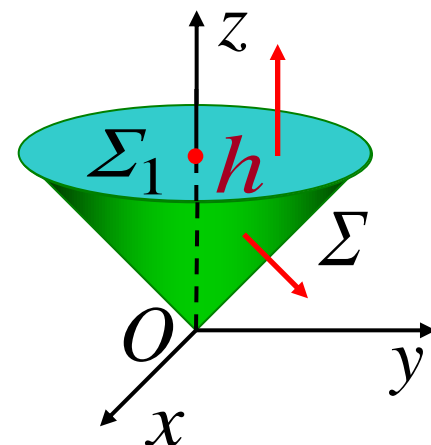
$$I = 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz - \iint_{D_{xy}} h^2 dx dy$$

利用形心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz - \pi h^4$$

先二后一

$$= 2 \int_0^h z \cdot \pi z^2 dz - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4$$



例4. 设 Σ 为曲面 $z = 2 - x^2 - y^2$, $1 \leq z \leq 2$ 取上侧, 求

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 z + x) dy dz - x^2 y z dz dx - \underline{x^2 z^2 dx dy}.$$

解: 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1 : z = 1, (x, y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$I = \oiint_{\Sigma \cup \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1}$$

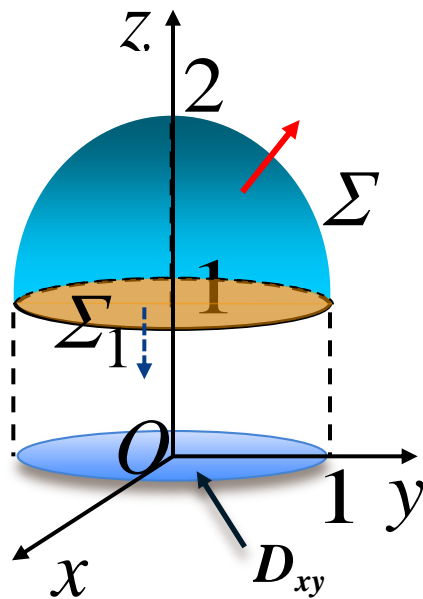
用柱坐标

用极坐标

$$= \iiint_{\Omega} dx dy dz - (-1) \iint_{D_{xy}} (-x^2) dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^{2-r^2} dz - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



例5. 设函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶和二阶连续偏导数, 证明格林(Green)第一公式

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ & \quad - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Q = u \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

其中 Σ 是整个 Ω 边界面的外侧.

注意: 高斯公式 $\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$

$$= \oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$



证: 令 $P = u \frac{\partial v}{\partial x}$, $Q = u \frac{\partial v}{\partial y}$, $R = u \frac{\partial v}{\partial z}$, 由高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} dy dz + \frac{\partial v}{\partial y} dz dx + \frac{\partial v}{\partial z} dx dy \right) \\ &= \oiint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \end{aligned}$$

移项即得所证公式.



★ 物理背景 向量场 \vec{A}

◇ 有源场

◇ 无源场

◇ 有旋场

◇ 无旋场

由源激发产生的
矢量场

由旋涡源激发的
旋涡场

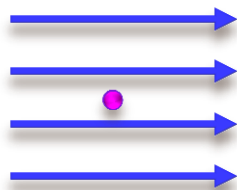
正负源处通量非0;

矢力线**不**闭合;

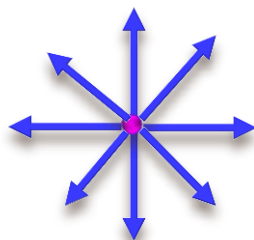
闭合回路上的积分非0;

矢力线**闭**合;

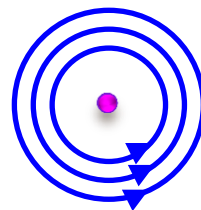
例如



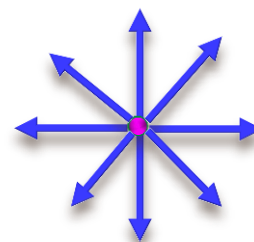
无源
无旋



有源
无旋



无源
有旋



有源
有旋

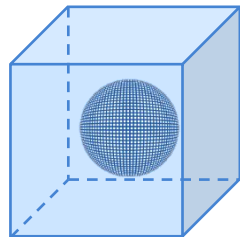
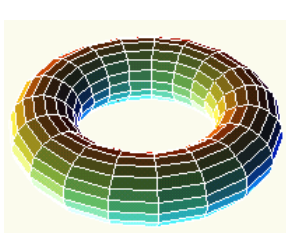
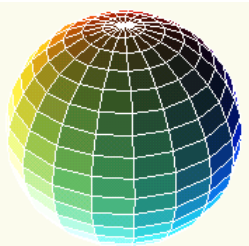


*二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

1. 连通区域的类型 设有空间区域 G ,

- 若 G 内任一闭曲面所围成的区域全属于 G , 则称 G 为**空间二维单连通域**;
- 若 G 内任一闭曲线总可以张一片全属于 G 的曲面, 则称 G 为**空间一维单连通域**.

例如, 球面所围区域既是一维也是二维单连通区域;
环面所围区域是二维但不是一维单连通区域;
立方体中挖去一个小球所成的区域是一维但
不是二维单连通区域.



2. 闭曲面积分为零的充要条件

定理2. 设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在空间二维单连通域 G 内具有连续一阶偏导数, Σ 为 G 内任一闭曲面, 则

$$\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = 0 \quad \text{①}$$

的充要条件是:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in G \quad \text{②}$$

证: “充分性” 根据高斯公式可知②是①的充分条件.

“必要性” . 用反证法. 已知①成立, 假设存在 $M_0 \in G$, 使

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_0} \neq 0$$



因 P, Q, R 在 G 内具有连续一阶偏导数, 则存在邻域
 $U(M_0) \subset G$, 使在 $U(M_0)$ 上,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \neq 0$$

设 $U(M_0)$ 的边界为 Σ' 取外侧, 则由高斯公式得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma'} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ &= \iiint_{U(M_0)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

与①矛盾, 故假设不真. 因此条件②是必要的.



*三、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1, 速度场为

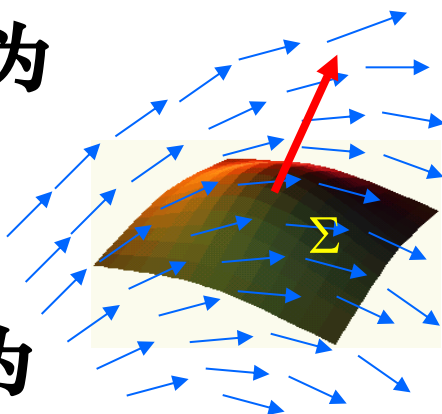
$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

设 Σ 为场中任一有向曲面, 则由对坐标的曲面积分的物理意义可知, 单位时间通过曲面 Σ 的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

由两类曲面积分的关系, 流量还可表示为

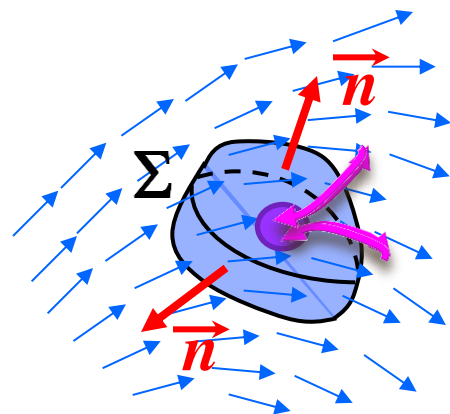
$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned}$$



若 Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过 Σ 的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy$$

当 $\Phi > 0$ 时, 说明流入 Σ 的流体质量少于流出的, 表明 Σ 内有(源)泉;



当 $\Phi < 0$ 时, 说明流入 Σ 的流体质量多于流出的, 表明 Σ 内有洞;

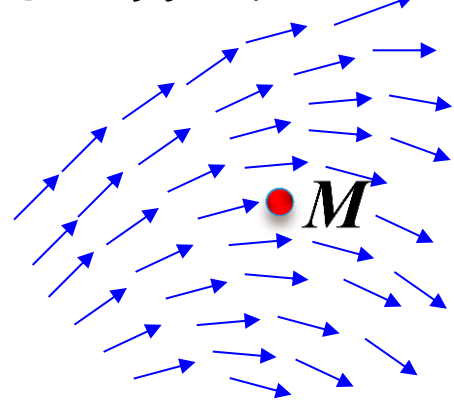
当 $\Phi = 0$ 时, 说明流入与流出 Σ 的流体质量相等, 表明 Σ 内无(源)泉无洞;

根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \quad \textcircled{3}$$



为了揭示场内任意点 M 处的特性, 设 Σ 是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面, 记 Σ 所围域为 Ω , 在③式两边同除以 Ω 的体积 V , 并令 Ω 以任意方式缩小至点 M (记作 $\Omega \rightarrow M$), 则有



$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\Phi}{V} &= \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \lim_{\Omega \rightarrow M} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{(\xi, \eta, \zeta)} ((\xi, \eta, \zeta) \in \Omega) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_M \end{aligned}$$

此式反应了流速场在点 M 的**特点**: 其值为正, 负或 0, 分别反映在该点有流体涌出, 吸入, 或没有任何变化.



定义. 设有向量场

$$\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

其中 P, Q, R 具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面, 其单位法向量 \vec{n} , 则称 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$ 为向量场 \vec{A} 通过有向曲面 Σ 的**通量(流量)**.

在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{记作} \quad \operatorname{div} \vec{A}$$

称为向量场 \vec{A} 在点 M 的**散度[发散强度]**.

显然 $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$



说明: 由引例可知, 散度是通量对体积的变化率, 且

$\operatorname{div} \vec{A} > 0$ 表明该点处有**正源**;

$\operatorname{div} \vec{A} < 0$ 表明该点处有**负源**;

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$ 表明该点处**无源**.

散度绝对值的大小反映了源的强度.

若向量场 \vec{A} 处处有 $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, 则称 \vec{A} 为**无源场**.

例如, 匀速场 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (其中 v_x, v_y, v_z 为常数),

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

故它是无源场.



例6.求向量场 $\vec{A} = yz \vec{j} + z^2 \vec{k}$ 穿过曲面 Σ 流向上侧的通量, 其中 Σ 为柱面 $y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) 被平面 $x = 0$ 及 $x = 1$ 截下的有限部分.

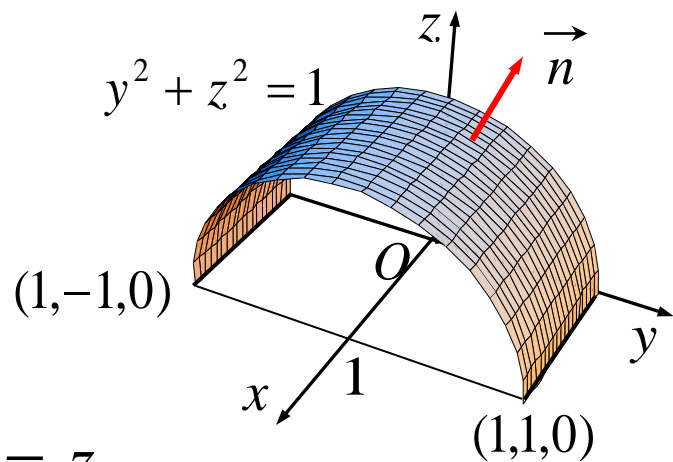
解: 记 $f(x, y) = y^2 + z^2$, 则 Σ 上侧的法向量为

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{y \vec{j} + z \vec{k}}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ &= y \vec{j} + z \vec{k}\end{aligned}$$

在 Σ 上 $\vec{A} \cdot \vec{n} = y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) = z$

故所求通量为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} z dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-y^2} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dx dy = 2$$



例7. 置于原点, 电量为 q 的点电荷产生的场强为

$$\vec{E} = \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{q}{r^3} (x, y, z) \quad (\vec{r} \neq \vec{0})$$

求 $\operatorname{div} \vec{E}$.

解: $\operatorname{div} \vec{E} = q \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right]$

$$= q \left[\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right]$$

$$= 0 \quad (r \neq 0)$$

计算结果与仅原点有点电荷的事实相符.



内容小结

1. 高斯公式及其应用

$$\begin{aligned}\text{公式: } \oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \\ = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz\end{aligned}$$

应用: (1) 计算曲面积分

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = 0 \\ \iff \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\end{aligned}$$



2. *通量与散度

设向量场 $\vec{A} = (P, Q, R)$, P, Q, R , 在域 G 内有一阶连续偏导数, 则

向量场通过有向曲面 Σ 的**通量**为

$$\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{e}_n \, dS \quad (\vec{e}_n \text{ 为 } \Sigma \text{ 的单位法向量})$$

G 内任意点处的**散度**为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

