§7_3_2 对坐标的曲线积分

/ Line Integrals with respect to Coordinates*/*

一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、对坐标的曲线积分的计算法

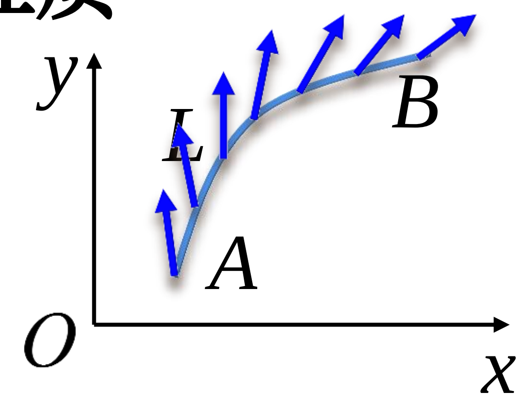
三、两类曲线积分之间的联系

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例 (变力沿曲线所作的功)

设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$



在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功 W.

例如

(1) 热气球在空中受风力(场)作用下飘动而作的功;

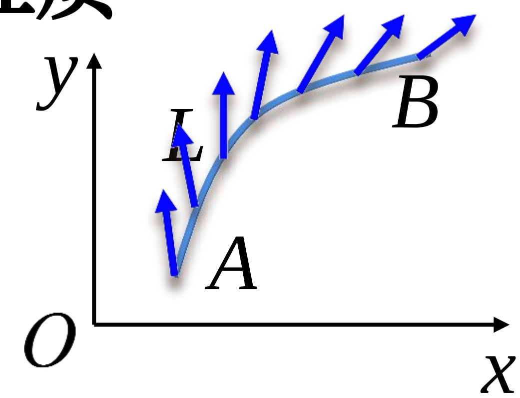
(2) 河中小船移动中的作功问题;

(3) 磁针在磁力场中移动时所作的功;

(4) 物体在重力场中下落时的作功;

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例 (变力沿曲线所作的功)

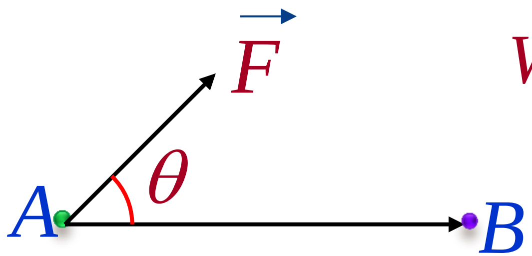


设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

在 xOy 平面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B, 求移动过程中变力所作的功 W.

常力沿直线所作的功



$$W=|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$$

$$=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=F_x(x_2-x_1)+F_y(y_2-y_1)$$

解决办法

"分割"

"近似"

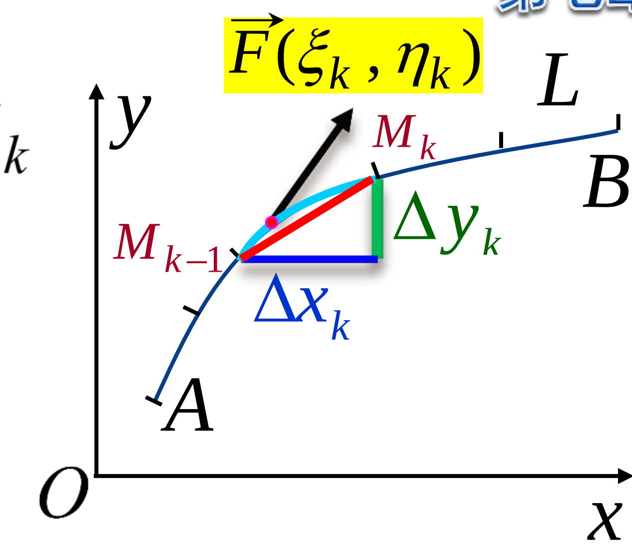
"求和"

"取极限"

1) **“分割”**

把 L 分成 n 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k, 则

$$W=\sum_{k=1}^{n}\Delta W_k$$



2) **“近似”**

有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 用有向线段 $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}=(\Delta x_k,\Delta y_k)$ 近似代替, 在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k,η_k), 则有

$$\Delta W_k\approx\overrightarrow{F(\xi_k,\eta_k)}\cdot\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$$

$$=P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$$

$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$

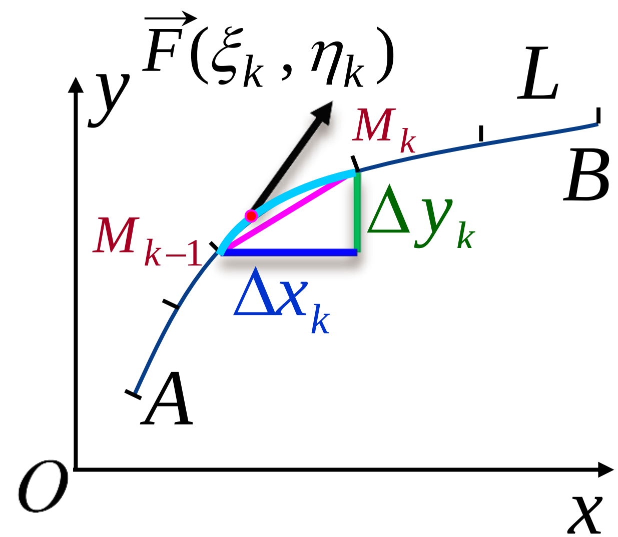
3) “求和”

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

4) “取极限”

$$W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]$$

$$= \int_L \boldsymbol{P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y}$$



(其中λ为 n 个小弧段的最大长度)

2. 定义

设 L 为 xOy 平面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧, 在 L 上定义了一个向量函数 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, 若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right]$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在, 则称此极限为函数 $\vec{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标的曲线积分, 或第二类曲线积分. 其中, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 称为被积函数, L 称为积分弧段 或 积分曲线.

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,$$

称为对 x 的曲线积分;

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,$$

称为对 y 的曲线积分.

若记 $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, 对坐标的曲线积分也可写作

$$\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地, 若 Γ 为空间曲线弧, 记 $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1) $\int_L (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} = \alpha \int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}} + \beta \int_L \vec{G} \cdot \overrightarrow{\mathbf{dr}}$

$(\overrightarrow{\mathrm{d}r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$; α, β 为常数)

(2) 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i = 1, \cdots, k)$,

则 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

3. 性质

(3) 用 L^{-}表示 L 的反向弧, 则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$L: \overrightarrow{\mathrm{d}r_1} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \text{ 而 } L^{-}: \overrightarrow{\mathrm{d}r_2} = (-\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y)$$

说明:

- 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!
- 定积分是第二类曲线积分的特例.

即:函数 $f(x)$在x轴有向线段$\overrightarrow{ab}$上对坐标的曲线积分为

$$\int_{\overrightarrow{ab}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理. 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta \Leftrightarrow L$起$\to L$止,

$\varphi'(t),\psi'(t)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上连续, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,

则曲线积分存在, 且有 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

证明: 下面先证

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

根据定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

设分点 x_i 对应参数 t_i，点 (ξ_i,η_i) 对应参数 τ_i，由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

$$\therefore \int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i')\Delta t_i$$

因为 L 为光滑弧，所以 $\varphi'(t)$ 连续

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P[\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)]\,\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

同理可证 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$

☆特别的, 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x:a\to b$, 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\,\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

☆对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}\quad t:\alpha\to\beta$, 类似有

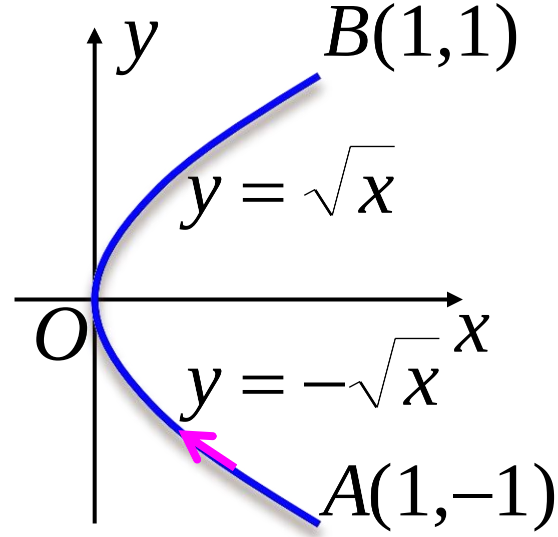
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

例1. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.



解法1 取 x 为参数, 则 $L: \overset{\frown}{AO} \cup \overset{\frown}{OB}$

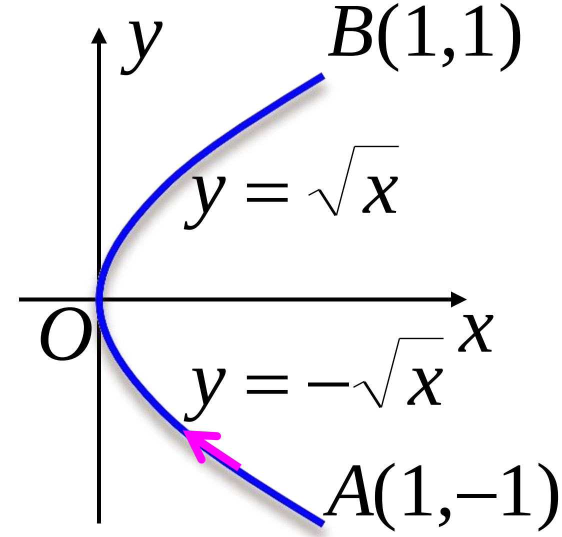
$$\overset{\frown}{AO}:\ y = -\sqrt{x},\ \ x: 1 \to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y = \sqrt{x},\quad x: 0 \to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x = \int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$$

例1. 计算 $\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L 为沿抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段.



解法2 取 y 为参数, 则

$$L: x = y^2,\ \ y: -1 \to 1$$

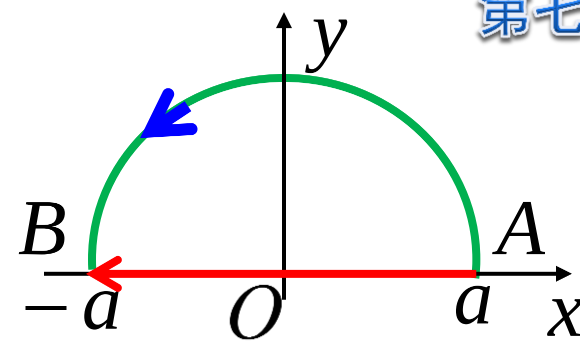
$$\therefore \int_L xy\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} y^2 y (y^2)' \,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{-1}^{1} y^4 \,\mathrm{d}y = \frac{4}{5}$$

例2. 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周，方向为逆时针方向；

(2) 从点 $A\,(a, 0)$ 沿 x 轴到点 $B\,(-a, 0)$.



解: (1) 取L的参数方程为 $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t: 0 \to \pi$

则
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$= -2a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

(2) 取 L 的方程为 $y = 0,\ x: a \to -a$，则
$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

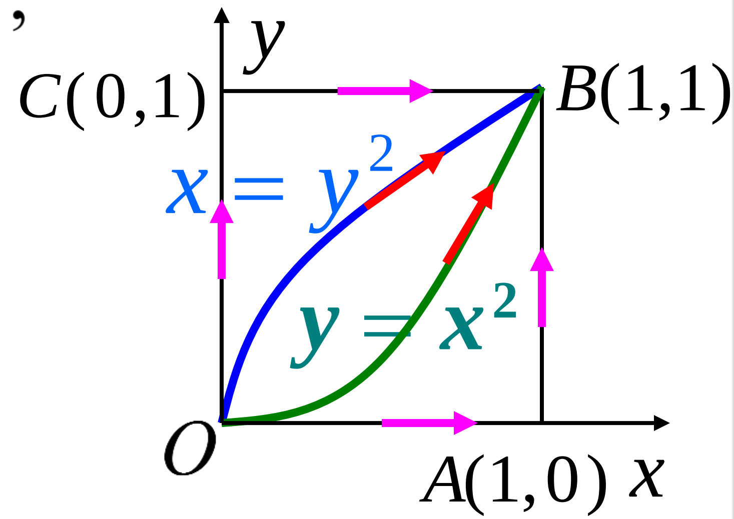
例3. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$,其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}.$

(4) 有向折线 $L: \overline{OC} \cup \overline{CB}.$



解: (1) 原式 $= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)\mathrm{d}x = 4\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = 1$

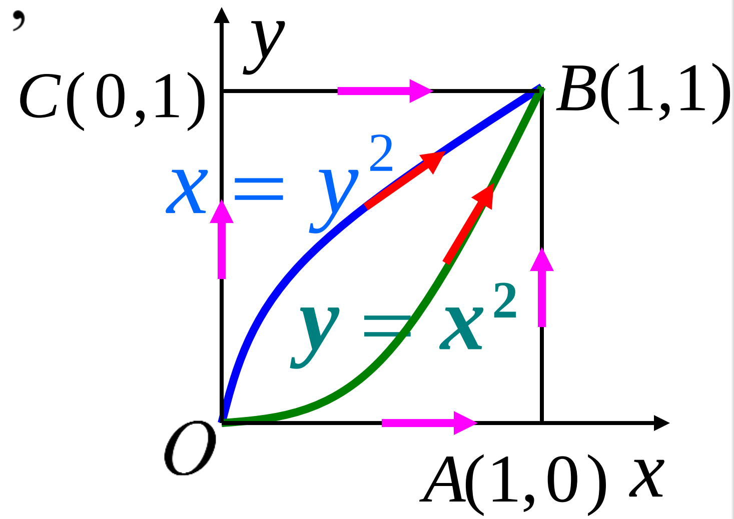
例3. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$,其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2, x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2, y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}.$

(4) 有向折线 $L: \overline{OC} \cup \overline{CB}.$



解:(2) 原式 $= \int_0^1 (2y^2 y \cdot 2y + y^4)\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4 \mathrm{d}y = 1$

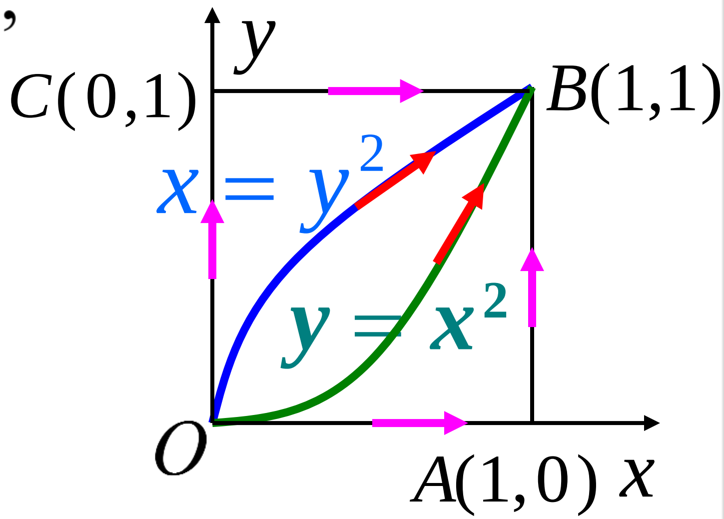
例3. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$,其中 L 为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}.$

(4) 有向折线 $L: \overline{OC} \cup \overline{CB}.$



解: (3) 原式 $= \int_{\overline{OA}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

$$= 0 + \int_0^1 \mathrm{d}y = 1$$

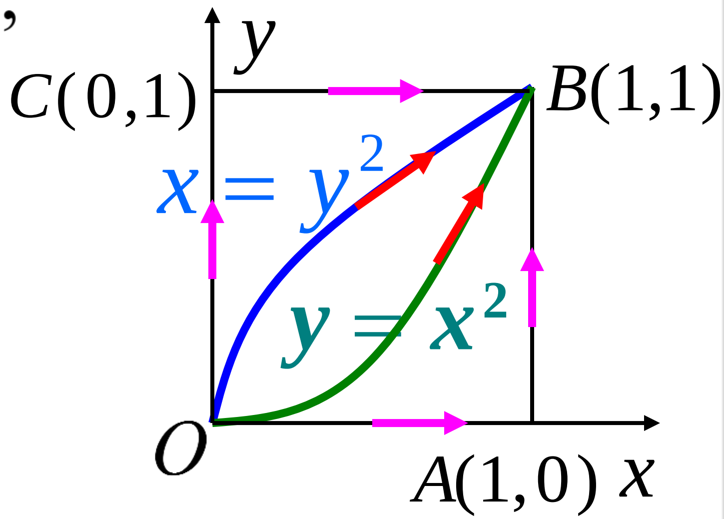
例3. 计算 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$，其中$L$为

(1) 抛物线 $L: y = x^2,\ x: 0 \to 1;$

(2) 抛物线 $L: x = y^2,\ y: 0 \to 1;$

(3) 有向折线 $L: \overline{OA} \cup \overline{AB}.$

(4) 有向折线 $L: \overline{OC} \cup \overline{CB}.$



解: (4) 原式 $= \int_{\overline{OC}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y + \int_{\overline{CB}} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$

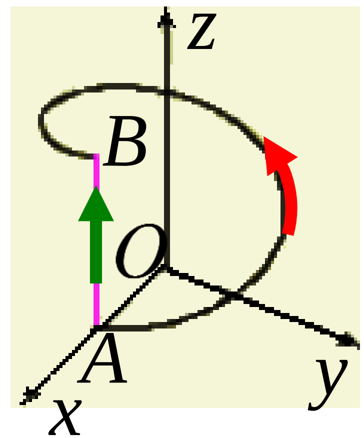
$$= 0 + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = 1$$

例4. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿 Γ 移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中 Γ 为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解: (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$

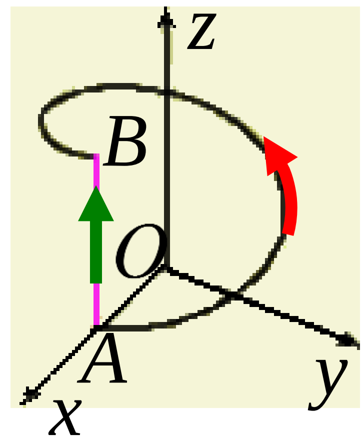
$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}t=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

例4. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿 Γ 移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中 Γ 为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解: (1) $W=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=2\pi(\pi k^2-R^2)$

(2) Γ 的参数方程为 $x=R,\ y=0,\ z=t,\ \ t:0\to 2\pi k$

$$W=\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\overline{AB}}y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi k}t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2k^2$$

例5. 求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程 $x=\cos t,\ y=\sin t,$

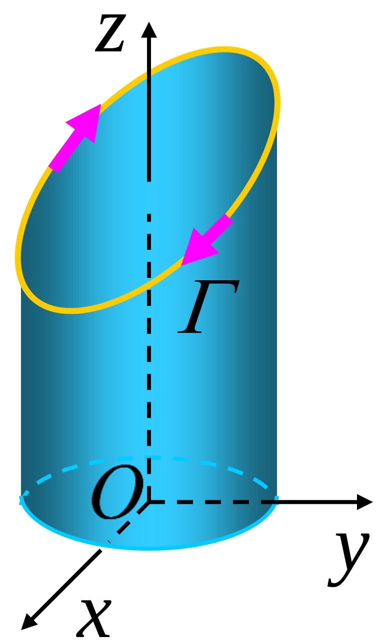
$z=2-\cos t+\sin t \quad (t:2\pi\to 0)$

$$\therefore\quad I=-\int_0^{2\pi}[\,(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\,]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-2\pi$$

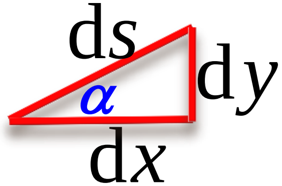


三、两类曲线积分之间的联系

定理. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:a\to b \Leftrightarrow L$起 $\to L$止,

$\varphi'(t),\psi'(t)$在$[a,b]$或$[b,a]$上连续, $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,

则有 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$



$$=\int_L\{P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\}\,\mathrm{d}s$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为有向曲线弧 L 上且与有向曲线弧 L 的指向一致的切向量的方向余弦.

说明:

因为 $\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$ 是曲线 L 在点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 处的一个切向量，它的指向与参数 t 的增长方向一致.

当 $a<b$ 时，$(\varphi'(t),\psi'(t))$ 称为有向曲线弧的切向量;

当 $a\geq b$ 时，$-(\varphi'(t),\psi'(t))$ 称为有向曲线弧的切向量.

(1) 当 $a<b$ 时

因为有向弧的切向量为 $\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$, 故方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

由对弧长的曲线积分公式可得

$$\begin{aligned}&\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s\\&=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t\\&=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\cos\alpha.\mathrm{d}s=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t=\varphi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$$

$$\cos\beta.\mathrm{d}s=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t=\psi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}y$$

说明:

因为 $\tau=(\varphi'(t),\psi'(t))$ 是曲线 L 在点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 处的一个切向量，它的指向与参数 t 的增长方向一致.

当 $a<b$ 时，$(\varphi'(t),\psi'(t))$ 称为**有向曲线弧的切向量**;

当 $a\geq b$ 时，$-(\varphi'(t),\psi'(t))$ 称为**有向曲线弧的切向量**.

(2)当 $a\geq b$ 时

因为有向弧的切向量为 $\tau=-(\varphi'(t),\psi'(t))$，故方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=-\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

由对弧长的曲线积分公式可得

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s$$

$$= \int_\alpha^\beta \{ P[\varphi(t),\psi(t)][-\varphi'(t)] + Q[\varphi(t),\psi(t)][-\psi'(t)]\} \mathrm{d}t$$

$$= \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha.\mathrm{d}s = -\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t = -\varphi'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$\cos\beta.\mathrm{d}s = -\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t = -\psi'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$$

类似地, 在空间曲线 Γ 上的两类曲线积分的联系是

$$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R),\ \mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$$\vec{\mathrm{e}}_{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{\mathrm{e}}_{\tau}\mathrm{d}s$$

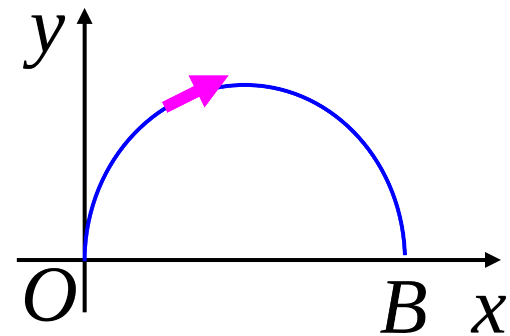
$$\int_{\Gamma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\Gamma} (\vec{A}\cdot\vec{e}_{\tau})\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \vec{A}_{\vec{\tau}}\,\mathrm{d}s$$

例6. 将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分，其中L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

解: 选x为参数，则x增长方向与有向弧方向一致.

由 $x=x,\ y=\sqrt{2x-x^2}$，得弧切向量

$$\left(1, \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)$$



切向量的方向余弦为 $(\sqrt{2x-x^2}, 1-x)$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_L \{P(x,y)\sqrt{2x-x^2} + Q(x,y)(1-x)\}\,\mathrm{d}s$$

例7. 设 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续, 曲线段 L 的长度为s, 证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\le Ms$$

证: $\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_L \left(P\cos\alpha+Q\cos\beta\right)\mathrm{d}s\right|$

$$\le\int_L\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

设 $\vec{A}=(P,Q)$, $\vec{e}_\tau=(\cos\alpha,\cos\beta)$

二者夹角为 θ

$$=\int_L\left|\vec{A}\cdot\vec{e}_\tau\right|\mathrm{d}s=\int_L\left|\vec{A}\right|\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}s\le Ms$$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[\ P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\ ]$$

2. 性质

(1) $\int_L (\alpha\vec{F} + \beta\vec{G}).\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \alpha\int_L \vec{F}.\overrightarrow{\mathrm{d}r} + \beta\int_L \vec{G}.\overrightarrow{\mathrm{d}r}$

(α, β 为常数)

2. 性质

(2) L可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i\ (i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(3) L^- 表示 L 的反向弧

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!

3. 计算

- **对有向光滑弧** $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

- **对有向光滑弧** $L:y=\psi(x),\ x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

- **对空间有向光滑弧Γ:** $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:\alpha \to \beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

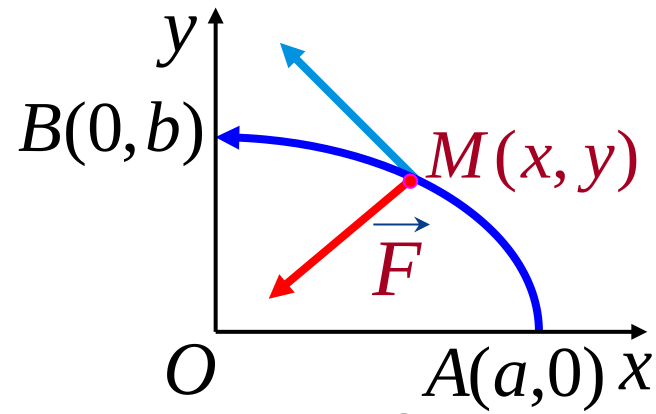
$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$
$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$
$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

4. 两类曲线积分的联系

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$
$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$

思考与练习



设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到原点 O 的距离成正比, $\vec{F}$ 的方向恒指向原点，此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针移动到 $B(0,b)$, 求力 $\vec{F}$ 所作的功.

提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y)$, $\vec{F}=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

思考: 若题中 $\vec{F}$ 的方向改为与 $\overrightarrow{OM}$ 垂直且与 y 轴夹锐角,则

$$\vec{F}=\underline{k(-y,x)}$$