第四节 多元函数微分学的应用

一、一元向量值函数及其导数

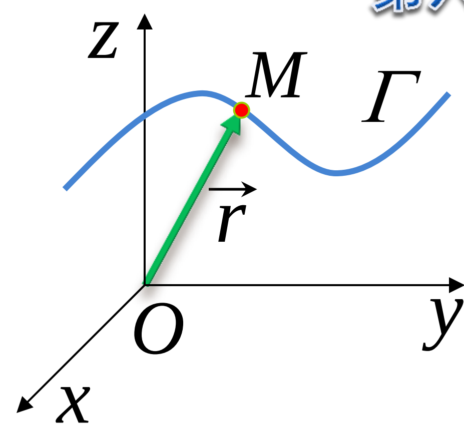
/*Unary Vector Valued Function and Derivative */

二、空间曲线的切线与法平面

三、曲面的切平面与法线

四、多元函数的极值

一、一元向量值函数及其导数 P99



引例. 已知空间曲线 Γ 的参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

记 $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$

Γ 的向量方程 $\vec{r}=\vec{f}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$

此方程确定映射 $\vec{f}:[\alpha,\beta]\to \mathrm{R}^3$, 称此映射为**一元向量值函数**.

对 Γ 上的动点M, 显然 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, 即 Γ 是 $\vec{r}$ 的终点 M 的轨迹, 此轨迹称为向量值函数的**终端曲线**.

要用向量值函数研究曲线的连续性和光滑性, 就需要引进向量值函数的极限、连续和导数的概念.

定义. 给定数集 $D\subset \mathbf{R}$, 称映射 $\vec{f}:D\to\mathbf{R}^n$ 为**一元向量值函数**(简称向量值函数), 记为

$$\vec{r}=\vec{f}(t),\quad t\in D$$

因变量

自变量

定义域

向量值函数的极限, 连续和导数都与各分量的极限, 连续和导数密切相关, 因此下面仅以 $n=3$ 的情形为代表进行讨论.

严格定义见 P99

定义. 给定数集 $D \subset \mathbf{R}$, 称映射 $\vec{f}: D \to \mathbf{R}^n$ 为**一元向量值函数**(简称向量值函数), 记为

$$\vec{r} = \vec{f}(t), \quad t \in D$$

因变量　　定义域　　自变量

设 $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in D$, 则

极限: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = (\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t), \lim\limits_{t \to t_0} f_2(t), \lim\limits_{t \to t_0} f_3(t))$

连续: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$

$$\vec{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)}{\Delta t}$$

导数: $\vec{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

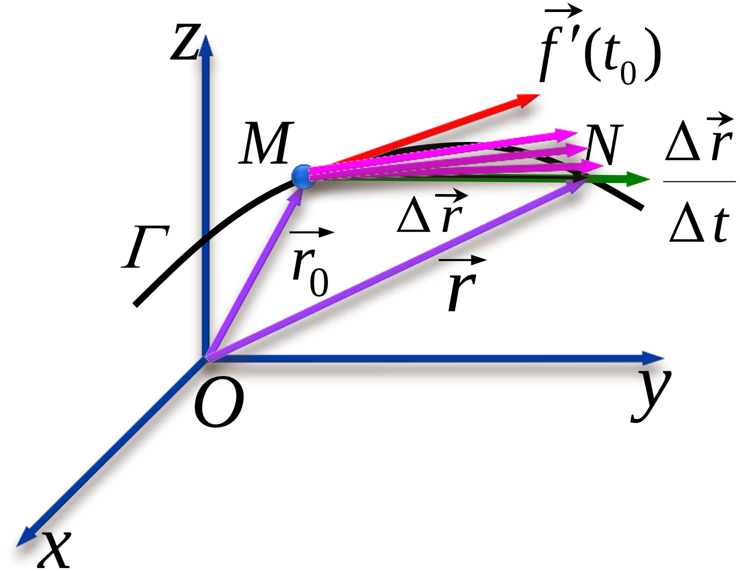
向量值函数导数的几何意义

在 R^3中, 设 $\vec{r} = \vec{f}(t), t \in D$ 的终端曲线为Γ,

$$\overrightarrow{OM} = \vec{f}(t_0), \quad \overrightarrow{ON} = \vec{f}(t_0 + \Delta t)$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{f}(t_0 + \Delta t) - \vec{f}(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{f}'(t_0)$$



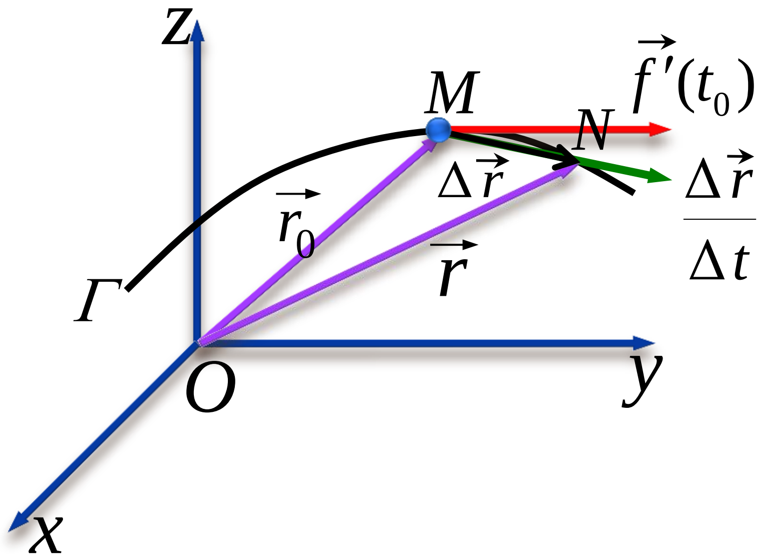
设 $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$, 则

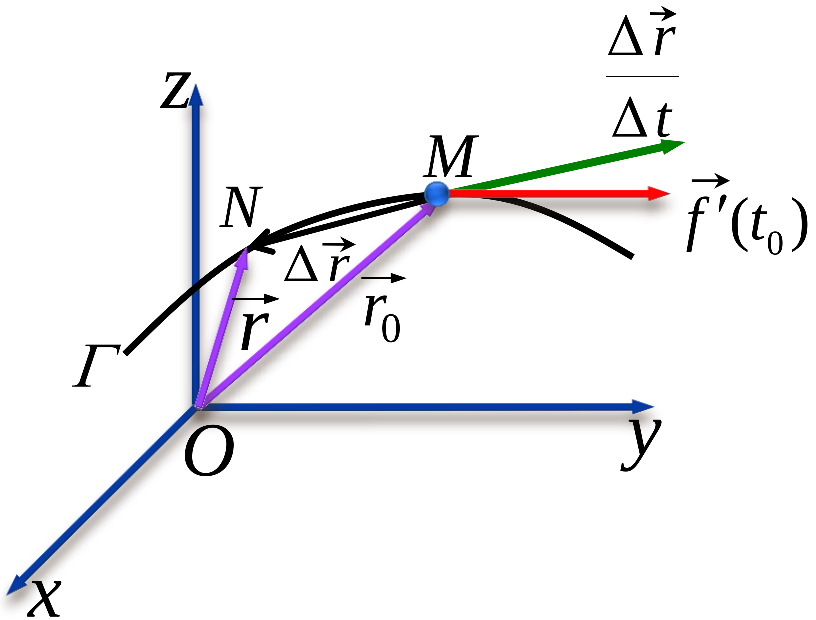
$\vec{f}'(t_0)$ 表示终端曲线在t_0处的

切向量, 其指向与t 的增长方向一致.

向量值函数导数的几何意义

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{f}'(t_0)$$ 其指向与 t 的增长方向一致.





向量值函数导数的物理意义

设 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 表示质点沿光滑曲线运动的位置向量, 则有

速度向量 $\vec{v}(t)=\vec{f}'(t)$

加速度向量 $\vec{a}=\vec{v}'(t)=\vec{f}''(t)$

向量值函数的导数运算法则

设 $\vec{u},\vec{v}$ 是可导向量值函数, $\vec{C}$ 是常向量, c 是任一常数, $\varphi(t)$ 是可导函数, 则

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{C}=\vec{O}$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c\vec{u}(t)]=c\,\vec{u}'(t)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\pm\vec{v}'(t)$

向量值函数的导数运算法则

设$\vec{u},\vec{v}$是可导向量值函数, $\vec{C}$是常向量, c是任一常数, $\varphi(t)$是可导函数, 则

$$(4)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varphi(t)\vec{u}(t)]=\varphi'(t)\vec{u}(t)+\varphi(t)\vec{u}'(t)$$

$$(5)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

$$(6)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$$

$$(7)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}[\varphi(t)]=\varphi'(t)\vec{u}'[\varphi(t)]$$

$$(5)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

证明： 设 $\vec{u}=(\varphi_1(t),\psi_1(t),\omega_1(t)),\vec{v}=(\varphi_2(t),\psi_2(t),\omega_2(t))$

所以 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\varphi_1\varphi_2+\psi_1\psi_2+\omega_1\omega_2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\vec{u}\cdot\vec{v})'$$

$$=\varphi_1'\varphi_2+\varphi_1\varphi_2'+\psi_1'\psi_2+\psi_1\psi_2'+\omega_1'\omega_2+\omega_1\omega_2'$$

$$=\left(\varphi_1'\varphi_2+\psi_1'\psi_2+\omega_1'\omega_2\right)+\left(\varphi_1\varphi_2'+\psi_1\psi_2'+\omega_1\omega_2'\right)$$

$$=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$$

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

证明： 设 $\vec{u}=(\varphi_1(t),\psi_1(t),\omega_1(t)),\vec{v}=(\varphi_2(t),\psi_2(t),\omega_2(t))$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \varphi_1&\psi_1&\omega_1\\ \varphi_2&\psi_2&\omega_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\psi_1&\omega_1\\ \psi_2&\omega_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\varphi_1&\omega_1\\ \varphi_2&\omega_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\varphi_1&\psi_1\\ \varphi_2&\psi_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}\times\vec{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}\psi_1&\omega_1\\ \psi_2&\omega_2\end{vmatrix}\vec{i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}\varphi_1&\omega_1\\ \varphi_2&\omega_2\end{vmatrix}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}\varphi_1&\psi_1\\ \varphi_2&\psi_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi_1\omega_2-\psi_2\omega_1\right)\vec{i}-\cdots\cdots$$

$$=\left(\psi_1'\omega_2+\psi_1\omega_2'-\psi_2'\omega_1-\psi_2\omega_1'\right)\vec{i}-\cdots\cdots$$

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$

证明： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}\times\vec{v})=\left(\underline{\psi_1'\omega_2}+\underline{\psi_1\omega_2'}-\underline{\psi_2'\omega_1}-\underline{\psi_2\omega_1'}\right)\vec{i}-\cdots\cdots$

$$=\begin{vmatrix}\psi_1' & \omega_1' \\ \psi_2 & \omega_2\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix}\psi_1 & \omega_1 \\ \psi_2' & \omega_2'\end{vmatrix}\vec{i}-\cdots\cdots$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_1' & \psi_1' & \omega_1' \\ \varphi_2 & \psi_2 & \omega_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_1 & \psi_1 & \omega_1 \\ \varphi'_2 & \psi_2' & \omega_2'\end{vmatrix}$$

例1. 设 $\vec{f}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, 求 $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)$.

解: $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)=(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t)\,\vec{i}+(\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t)\,\vec{j}+\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}t\,\vec{k}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\pi}{4}\vec{k}$$

$$=\vec{f}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

例2. 设空间曲线Γ的向量方程为

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(t^2+1,\ 4t-3,\ 2t^2-6t),\qquad t\in \mathrm{R}$$

求曲线Γ上对应于 $t_0=2$ 的点处的单位切向量.

解: $\vec{f}'(t)=(2t,\ 4,\ 4t-6),\quad t\in \mathrm{R}$

$$\vec{f}'(2)=(4,\ 4,\ -2)\qquad \left|\vec{f}'(2)\right|=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=\mathbf{6}$$

故所求单位切向量为 $\dfrac{\vec{f}'(2)}{\left|\vec{f}'(2)\right|}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$

其方向与 t 的增长方向一致.

另一与 t 的增长方向相反的单位切向量为$(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3})$

例3. 一人悬挂在滑翔机上，受快速上升气流影响作螺旋式上升，其位置向量为 $\vec{r}=(3\cos t, 3\sin t, t^2)$，求：

(1) 滑翔机在任意时刻 t 的速度向量与加速度向量；

(2) 滑翔机在任意时刻 t 的速率；

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

解： (1) $\vec{v}=\vec{r}'(t)=(-3\sin t, 3\cos t, 2t)$

$\vec{a}=\vec{v}'=(-3\cos t, -3\sin t, 2)$

(2) $|\vec{r}'(t)|=\sqrt{(-3\sin t)^2+(-3\cos t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9+4t^2}$

(3) 由 $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ 即 $9\sin t\cos t-9\cos t\sin t+4t=0$，

得 $t=0$，即仅在开始时刻滑翔机的加速度与速度正交.

二、空间曲线的切线与法平面

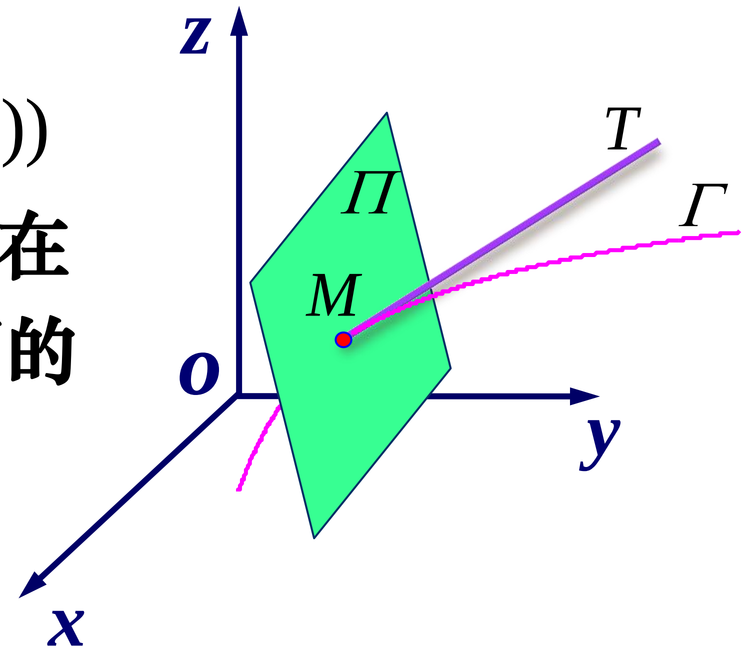
/* Tangent Lines and Normal Planes to Space Curves*/

空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.

给定光滑曲线

$$\Gamma: \ \vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

则当 φ',ψ',ω' 不同时为 0 时, Γ 在点 $M(x,y,z)$ 处的切向量及法平面的法向量均为



$$\vec{f'}(t)=(\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t))$$

利用 $\begin{cases}\text{点向式可建立曲线的切线方程}\\ \text{点法式可建立曲线的法平面方程}\end{cases}$

1. 曲线方程为参数方程的情况

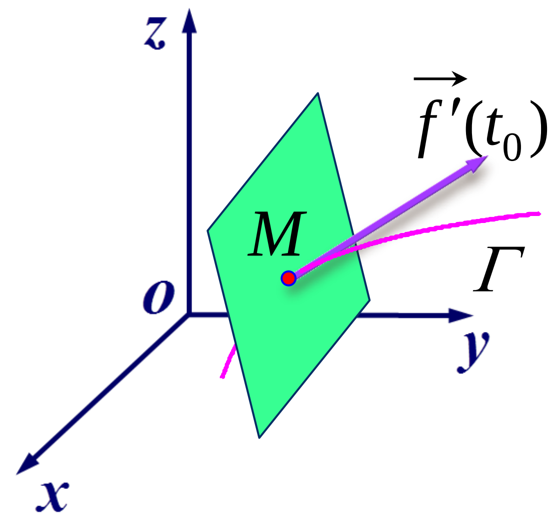
给定光滑曲线

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\ \ t\in[\alpha,\beta]$$

设Γ上的点 $M(x_0,y_0,z_0)$ **对应** $t=t_0$, $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$

不全为0，则 Γ **在点** M **的导向量为**

$$\vec{f}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$



因此曲线 Γ **在点** M **处的**

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

例4. 求曲线 $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ 在点 $M\ (1, 1, 1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解: $x' = 1,\ y' = 2t,\ z' = 3t^2$, 点(1, 1, 1) 对应于 $t_0 = 1$,

故点 M 处的切向量为 $\overrightarrow{T} = (1, 2, 3)$

因此所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

法平面方程为

$$(x-1) + 2\,(y-1) + 3(z-1) = 0$$

即

$$x + 2y + 3z = 6$$

思考: 光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 的切向量有何特点?

答: $\Gamma:\begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ 即得切向量 $\vec{T}=(1,\varphi',\psi')$

因此当$x=x_0$, 所求切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-\psi(x_0)}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程为

$$\left(x-x_0\right)+\varphi'(x_0)\left(y-\varphi(x_0)\right)+\psi'(x_0)\left(z-\psi(x_0)\right)=0$$

2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时,

Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$ (P96 推导)

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\left(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\right)=\left(1,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\Big|_M,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\Big|_M\right)$$

平行向量?

或 $$\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

也可表为

$$\vec{T}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}$$

(自己验证)

或 $$\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\ \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$ **(自己验证)**

例5. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2-6,\ G=x+y+z$，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}-x & z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\bigg|_M\right)=(1,0,-1)$

点 M (1,–2, 1) 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

内容回顾

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式1情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式2情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$$

3) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程
$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程
$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

三、空间曲面的切平面与法线

/* Tangent Planes and Normal Lines to Space Curves*/

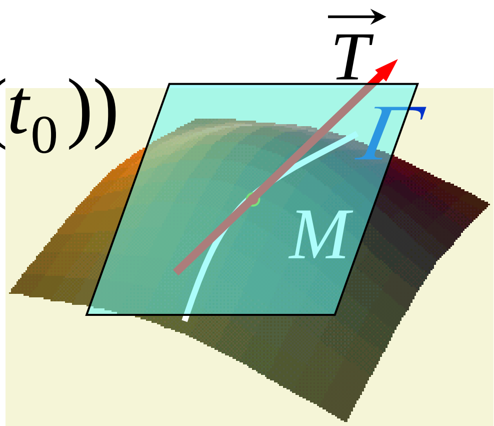
设 有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 任意引一条光滑曲线

$\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，设 $t=t_0$ 对应点 **M**, 且

$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0. 则 Γ在

点 **M** 的切向量为 $\vec{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$



切线方程为

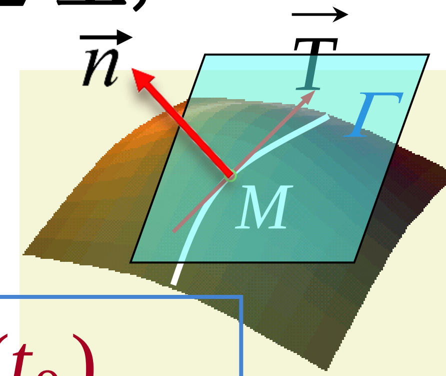
$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明: Σ上过点 **M** 的任何曲线

在该点的切线都在同一平面上, 称为 Σ在该点的切平面.

证: $\because \Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 在 Σ 上,

$\therefore \quad F(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \equiv 0$



两边在 $t=t_0$ 处求导, 注意 $t=t_0$ 对应点 M,

得

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)=0}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$

$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T} \perp \vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性,表明这些切线都在以 $\vec{n}$ 为法向量的平面上, 从而切平面存在.

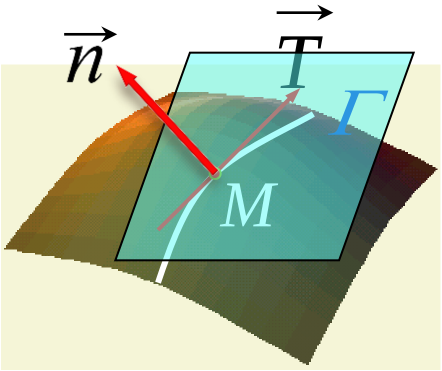
曲面 Σ 在点 M 的法向量:

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

过 M 点且垂直于切平面的直线称为曲面 Σ 在点 M 的法线.



法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

特别, 当光滑曲面Σ的方程为显式 $z=f(x,y)$时,

令 $$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

则在点(x,y,z), $F_x=f_x, F_y=f_y, F_z=-1$

故当函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)有连续偏导数时, 曲面Σ在点(x_0,y_0,z_0)有

法向量 $$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$$

切平面方程 $$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

用α,β,γ 表示法向量的方向角，并假定法向量方向向上，则γ为锐角.

$$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),\ -1)$$

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}}$$

例6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1, 2, 3) 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

法向量 $\vec{n}=(2x,2y,2z)$ $\quad \vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(1,2,3)$

所以球面在点(1, 2, 3) 处有

切平面方程 $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$

即 $x+2y+3z-14=0$

法线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ 即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

(可见法线经过原点, 即球心)

例7. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0,\ x_0z_0,\ x_0y_0),\quad \vec{n}_2=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0\,y_0z_0}{x_0^2}=\frac{x_0\,y_0\,z_0}{y_0^2}=\frac{x_0y_0\,z_0}{z_0^2} \qquad \therefore\ x_0^2=y_0^2=z_0^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\qquad \sigma=x_0\,y_0\,z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式1情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式2情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面方程

$$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$$

3) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面 Σ **在点** $M(x_0,y_0,z_0)$ **的法向量**

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),\,F_y(x_0,y_0,z_0),\,F_z(x_0,y_0,z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的方向余弦

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ **与椭球面** $3x^2+y^2+z^2=16$ **相切,** 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, **则**

$$\begin{cases}\dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)}\\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)}\\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)}\end{cases}$$

$\longrightarrow \lambda=\pm 2$

2. 设 $f(u)$ 可微, 证明 曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,则通过此点的切平面为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

即 $$\left[f(\frac{y_0}{x_0}) - \frac{y_0}{x_0} f'(\frac{y_0}{x_0})\right](x - x_0) + f'(\frac{y_0}{x_0})(y - y_0)$$

$$-(z - z_0) = 0$$

即 $$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)$$

$$-(z-z_0)=0$$

其常数项

$$-x_0\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]-y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+z_0=0$$