§7_4_2 对坐标的曲面积分

/ Surface Integrals with Respect to Coordinates */*

一、有向曲面及曲面元素的投影

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

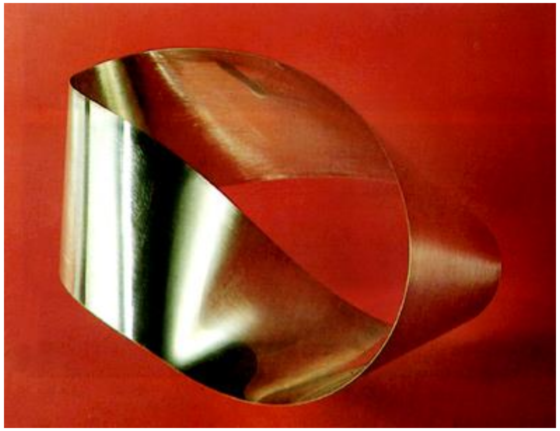
三、对坐标的曲面积分的计算法

四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

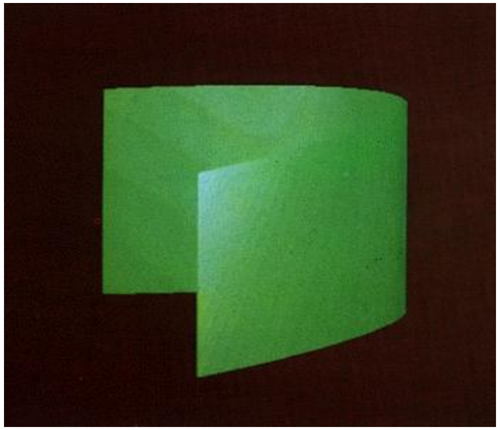
曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

曲面分内侧和外侧

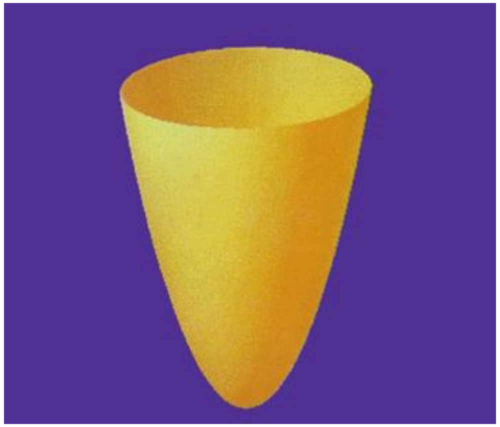


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



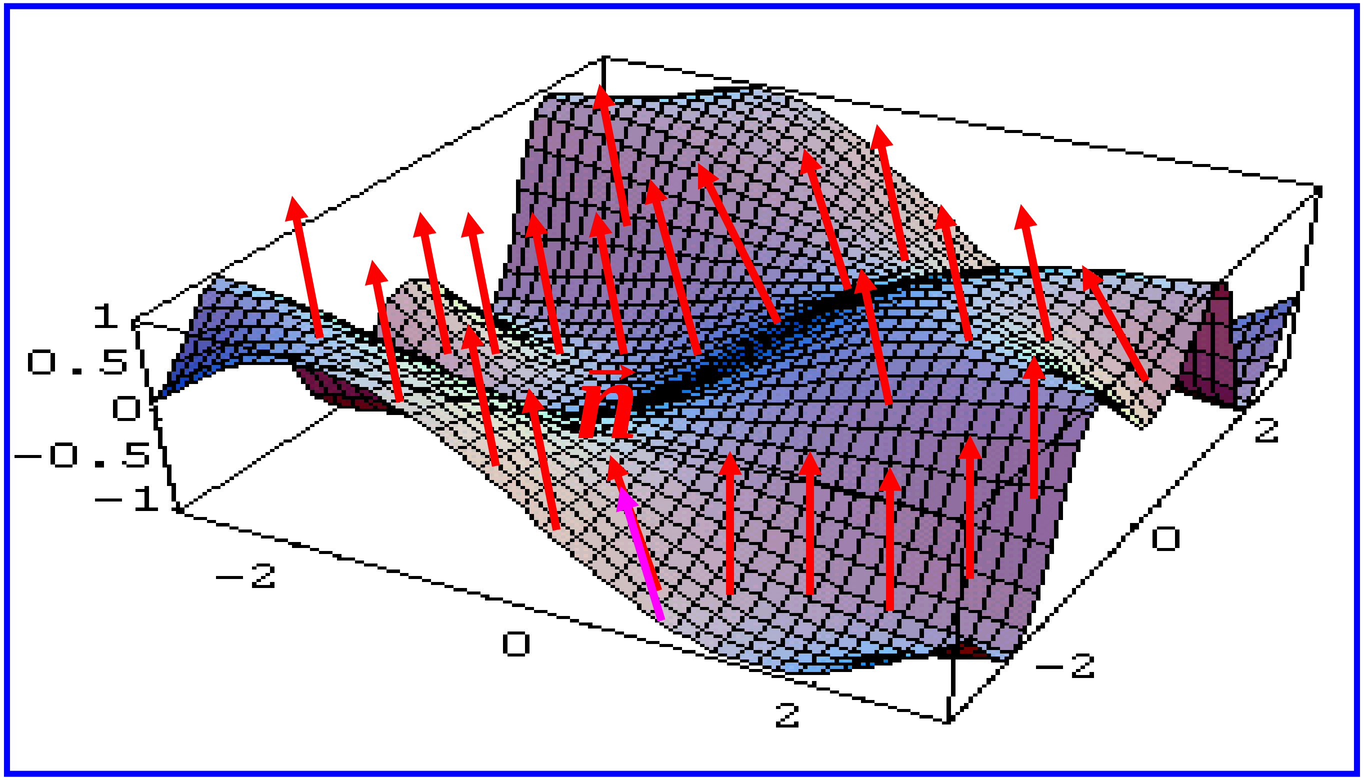
曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

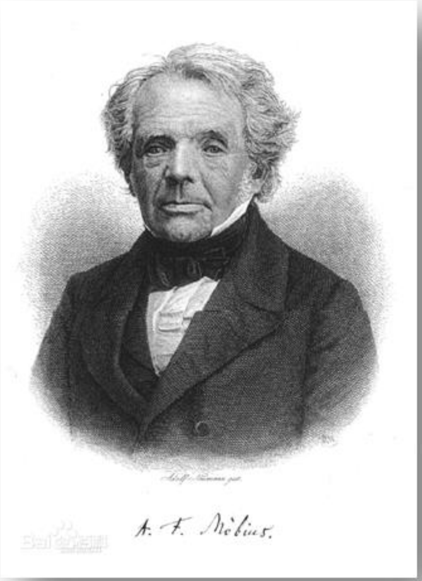
曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

典型双侧曲面

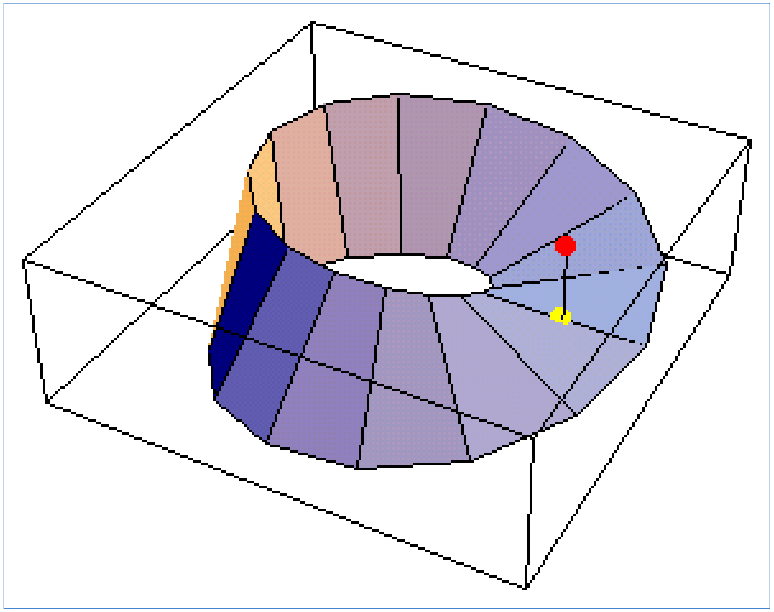


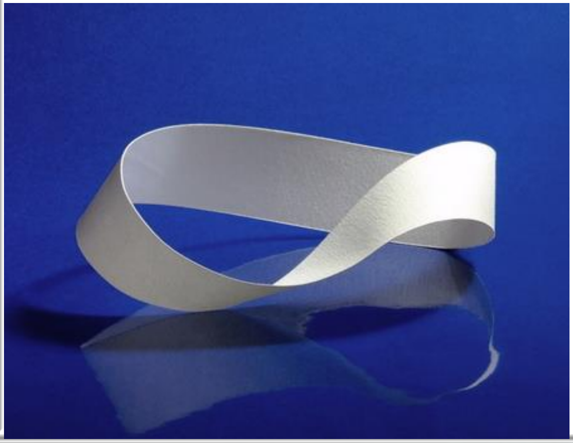
特点 指定曲面一侧, 法向量在Σ上连续变化, **不会突然转到相反方向上去**.

典型单侧曲面：莫比乌斯带

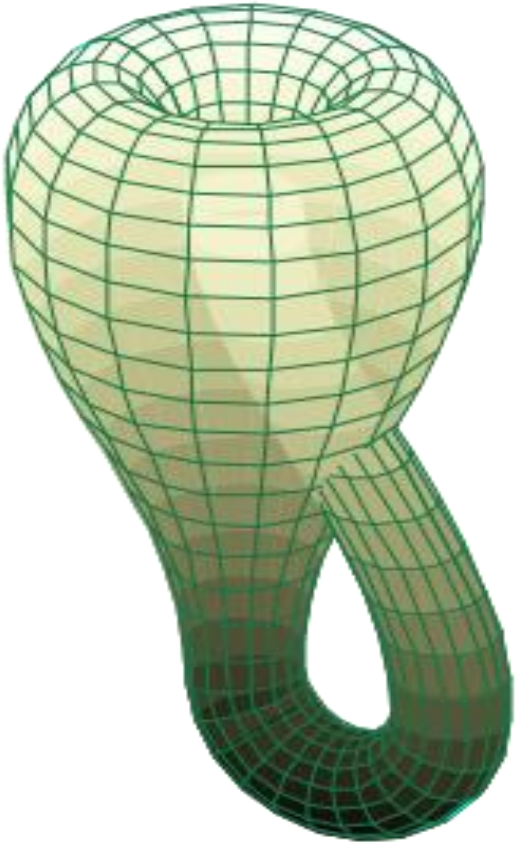


Mobius
1790～1868
Germany





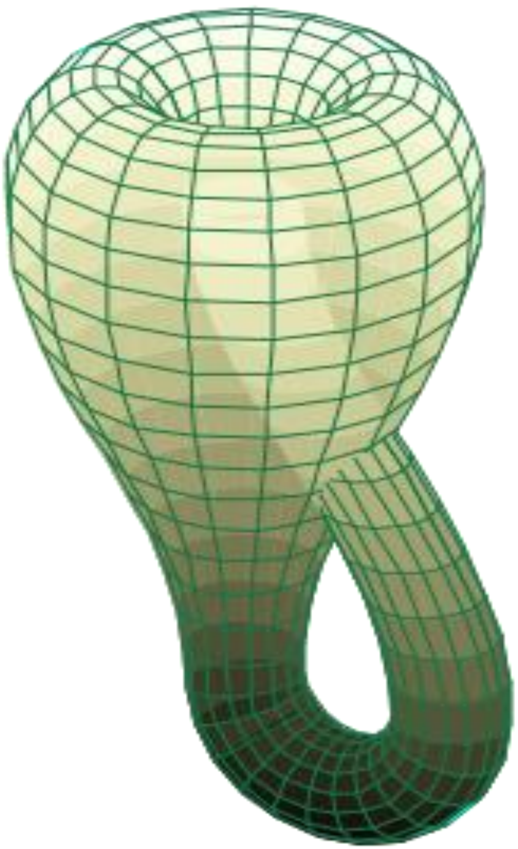
典型单侧曲面：克莱因瓶

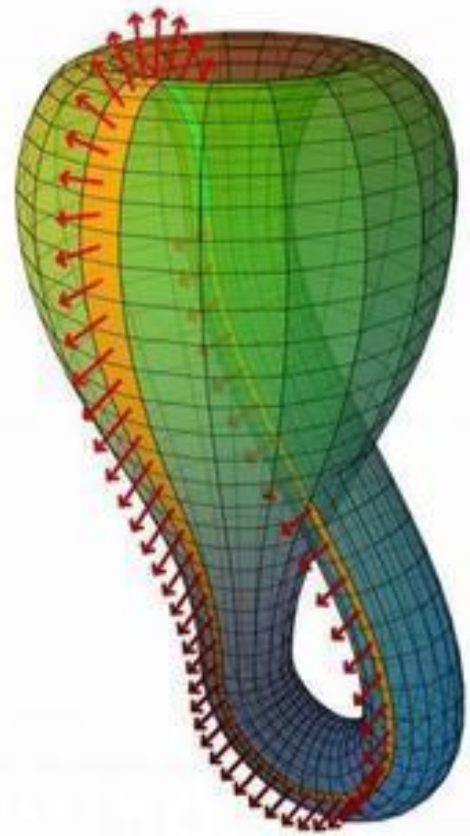


Felix Christian Klein
1849~1925
Germany

一个瓶子底部有一个洞, 现在延长瓶子的颈部,并且扭曲地进入瓶子内部,然后和顶部的洞相连接.

典型单侧曲面：克莱因瓶

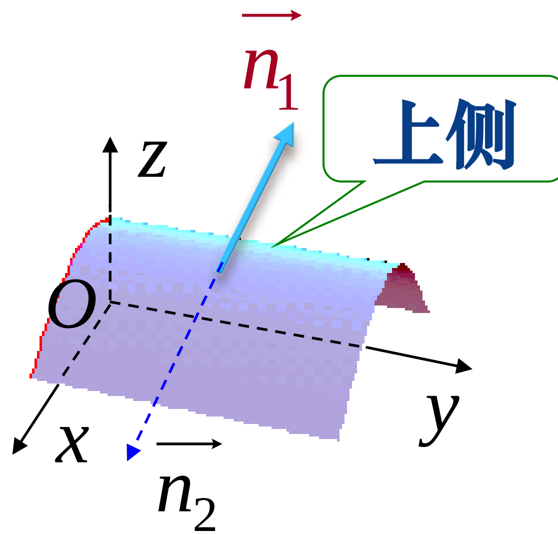




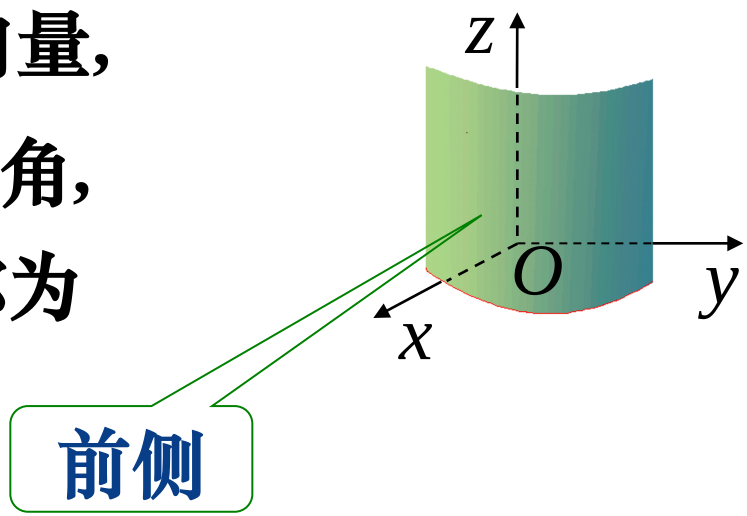
Felix Christian Klein
1849~1925
Germany

一个瓶子底部有一个洞, 现在延长瓶子的颈部,并且扭曲地进入瓶子内部,然后和顶部的洞相连接.

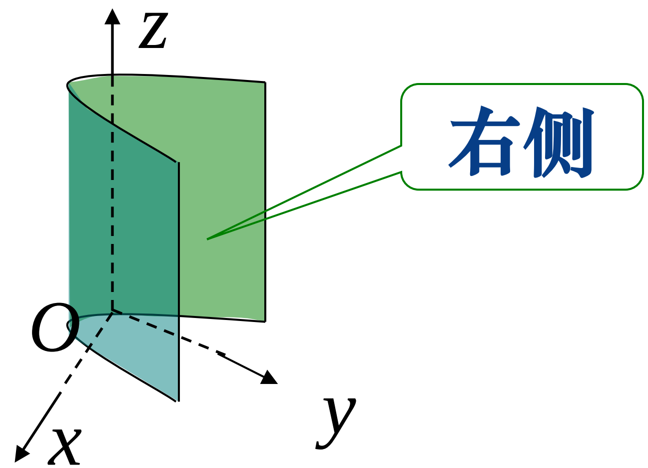
若曲面上任一点的法向量，与 z 轴正向的夹角 g 为锐角，则称该侧为上侧，否则称为下侧.



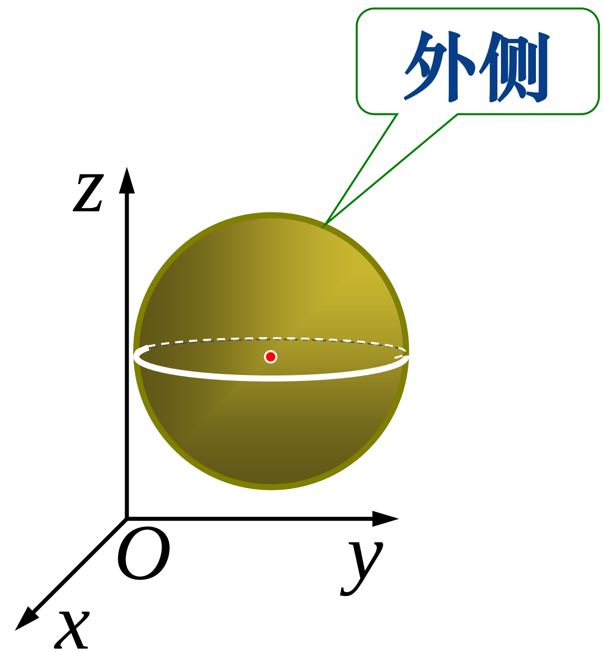
若曲面上任一点的法向量，与 x 轴正向的夹角 a 为锐角，则称该侧为前侧，否则称为后侧.



若曲面上任一点的法向量，与 y 轴正向的夹角 b 为锐角，则称该侧为右侧，否则称为左侧.



若曲面为闭曲面，则有内侧、外侧之分，如图所示.



指定了侧的曲面叫有向曲面,其方向用法向量指向表示:

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

设 Σ 为有向曲面,其面积微元 ΔS 在 xoy 面上的投影为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$, 则规定:

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma>0时\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & 当\cos\gamma<0时\\ 0, & 当\cos\gamma\equiv 0时\end{cases}$$

类似可规定

$(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时 上侧}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时 下侧}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

$$(\Delta S)_{yz}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{yz}, & \text{当}\cos\alpha>0\text{时 前侧}\\ -(\Delta\sigma)_{yz}, & \text{当}\cos\alpha<0\text{时 后侧}\\ 0, & \text{当}\cos\alpha\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

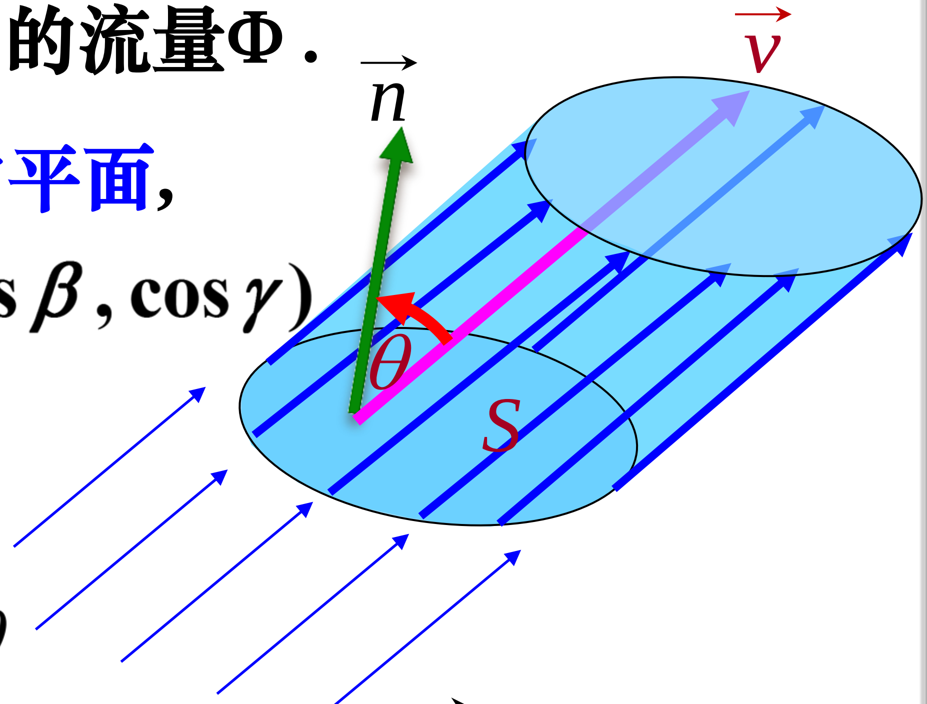
$$(\Delta S)_{zx}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{zx}, & \text{当}\cos\beta>0\text{时 右侧}\\ -(\Delta\sigma)_{zx}, & \text{当}\cos\beta<0\text{时 左侧}\\ 0, & \text{当}\cos\beta\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的流速场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

求单位时间流过有向曲面Σ的流量Φ.



分析: (1)若Σ是面积为S的平面,

单位法向量: $\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量: $\Phi=S\,|\vec{v}|\cos\theta$

$$=S\,|\vec{v}|\,|\vec{e}_n|\cos\theta$$

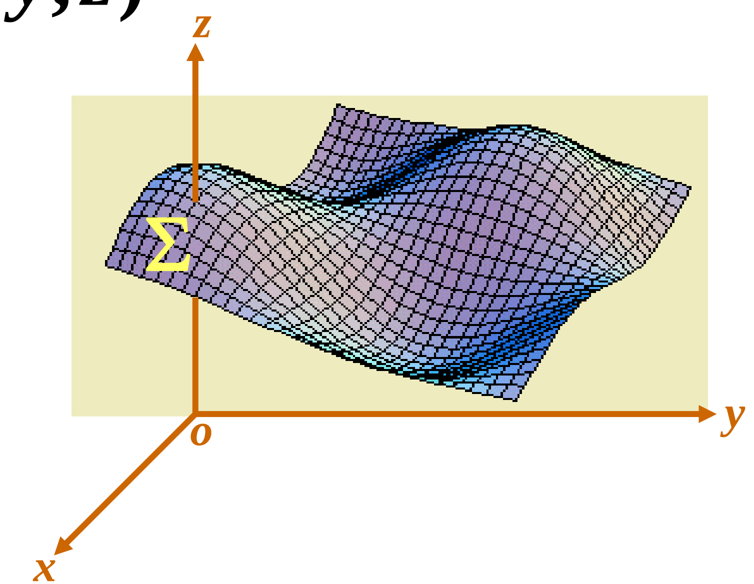
$$=S\,(\vec{v}\cdot\vec{e}_n)=\vec{v}\cdot(\vec{e}_n S)=\vec{v}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{d}S})$$

$$=\vec{v}\cdot(S_{yz},S_{zx},S_{xy})$$

(2)对一般的有向曲面Σ，对稳定流动的不可压缩流体的流速场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用"分割, 近似, 求和, 取极限"进行分析.

假设Σ是速度场中的一片有向曲面,函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ 都在Σ上连续, 求在单位时间内流向Σ指定侧的流体的质量Φ .



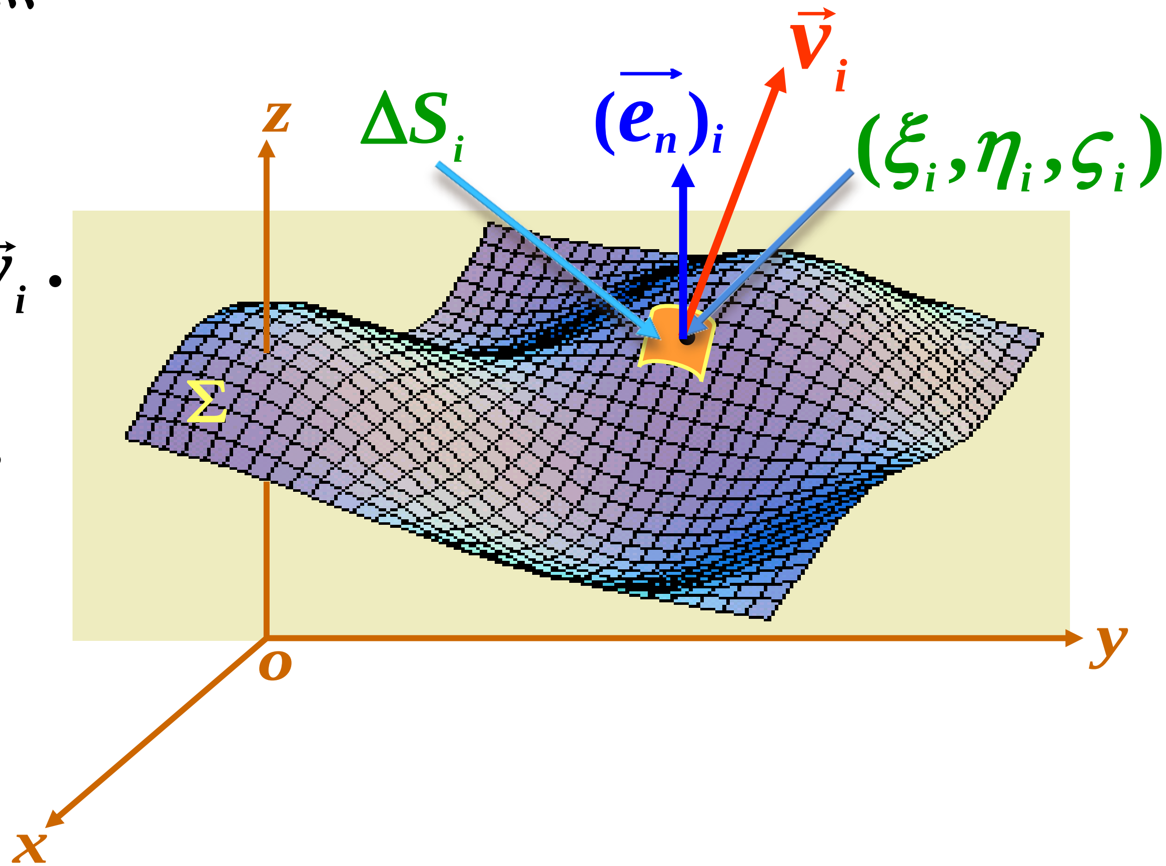
1). 分割 把曲面Σ 分成n小块Δs_i (Δs_i同时也代表第i小块曲面的面积),

在Δs_i上任取一点

(ξ_i,η_i,ζ_i),

则该点流速为 $\vec{v}_i$.

法向量为$(\overrightarrow{e_n})_i$.



2) 近似

$$\vec{v}_i=\vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$
$$=P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k},$$

该点处曲面Σ 的单位法向量

$$\left(\overrightarrow{e_n}\right)_i=\cos\alpha_i\vec{i}+\cos\beta_i\vec{j}+\cos\gamma_i\vec{k},$$

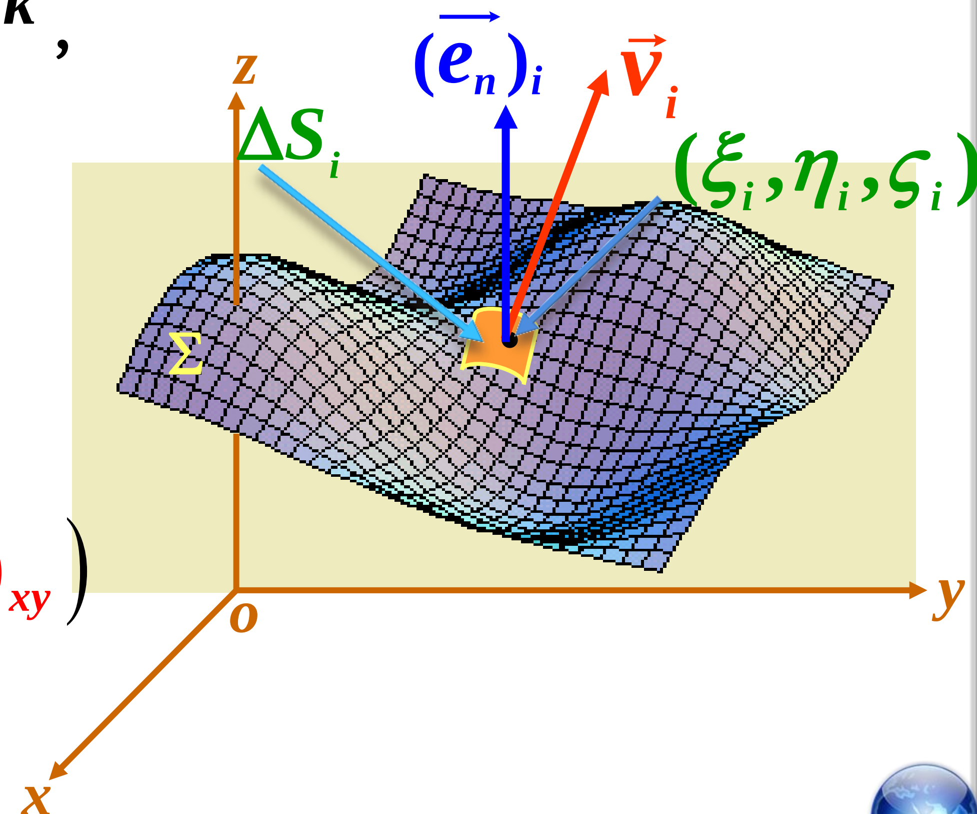
通过Δs_i流向指定侧

的流量的近似值为

$$\vec{v}_i\cdot\left(\overrightarrow{e_n}\right)_i\Delta S_i$$

$$=\vec{v}_i\cdot\left((\Delta S_i)_{yz},(\Delta S_i)_{zx},(\Delta S_i)_{xy}\right)$$

$(i=1,2,\cdots,n).$



3) 求和 通过Σ 流向指定侧的流量 $\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot (\vec{e}_n)_i \Delta S_i$

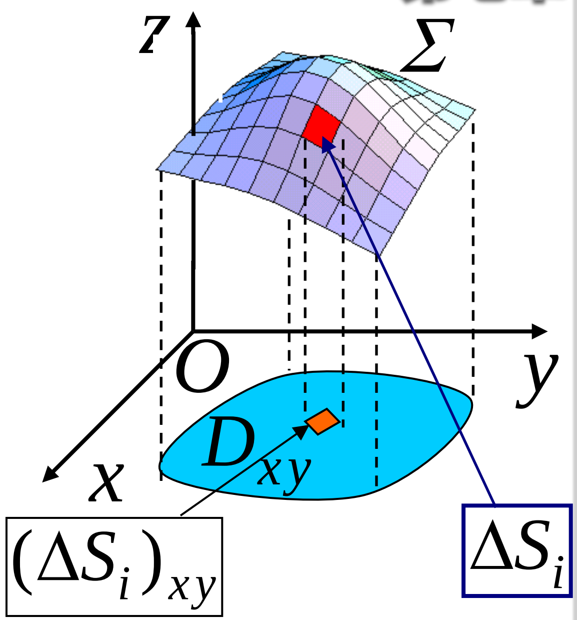
$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

4)取极限 $\lambda \to 0$ 取极限得到流量Φ的精确值

$$\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underline{\cos\gamma_i\big]\Delta S_i}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\underline{(\Delta S_i)_{xy}}\big]$$



$$\cos\gamma_i\Delta S_i = (\Delta S_i)_{xy}$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

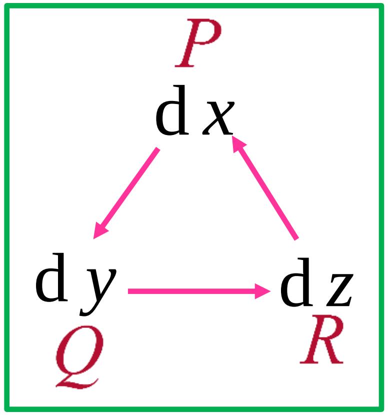
注：注意此处 dydz,dzdx,dxdy 与二重积分中的区别.

2. **定义** 设Σ为光滑的有向曲面，在Σ上定义了一个向量场 $\vec{A}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，若对$\Sigma$的任意分割和在局部面元上任意取点，下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场$\vec{A}$在有向曲面上对坐标的曲面积分，或第二类曲面积分。记作

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



P, Q, R 叫做被积函数；Σ 叫做积分曲面.

$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ **称为** P **在有向曲面** Σ **上对** y, z **的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ **称为** Q **在有向曲面** Σ **上对** z, x **的曲面积分;**

$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ **称为** R **在有向曲面** Σ **上对** x, y **的曲面积分.**

引例中, 流过有向曲面 Σ **的流体的流量为**

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$

$$\vec{A} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式:

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(1) 若 $C_1, C_2 \in R, \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$在$\Sigma$上可积, 则

$$\iint_{\Sigma}(C_1\overrightarrow{A_1}+C_2\overrightarrow{A_2})\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

$$=C_1\iint_{\Sigma}\overrightarrow{A_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}+C_2\iint_{\Sigma}\overrightarrow{A_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

3. 性质

(2) 若 $\Sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Sigma_i$, 且 Σ_i **之间无公共内点, 则**

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

如, $\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma_1}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{\Sigma_2}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\quad(\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2)$$

(3) 用 Σ^{-} 表示 Σ 的反向曲面, 则

$$\iint_{\Sigma^{-}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

如, $\iint_{\Sigma^{-}} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$\iint_{\Sigma^{-}} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = -\iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$\iint_{\Sigma^{-}} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma^{-}} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理. 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧, $R(x, y, z)$是 Σ 上的连续函数, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

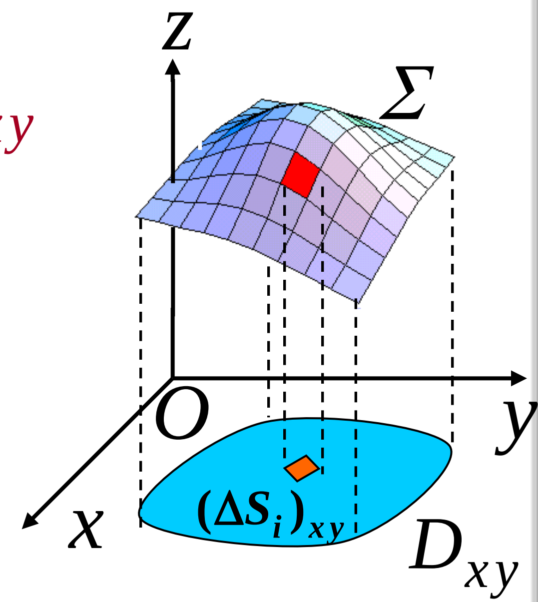
证:
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$\because \Sigma$ 取上侧, $\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: z = z(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(上正下负)

- 若 $\Sigma: x = x(y,z),\ (y,z)\in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

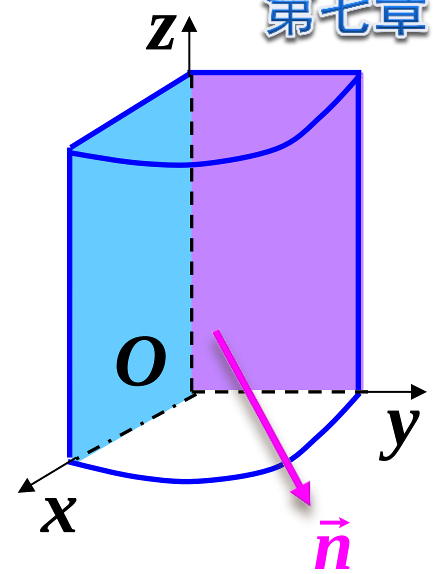
(前正后负)

- 若 $\Sigma: y = y(z,x),\ (z,x)\in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

例1. 计算 $I=\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限那部分的前侧.



解: Σ 在 xoy 平面的投影域的面积为0, 故

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

Σ 在 yoz 平面的投影域为 $D_{yz}: 0\le z\le 3,\ 0\le y\le 1$

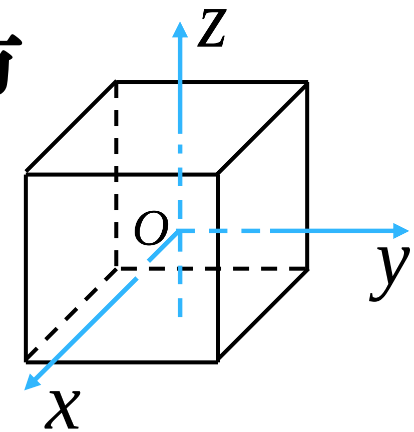
$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{4}\pi$$

Σ 在 zox 平面的投影域为 $D_{zx}: 0\le z\le 3,\ 0\le x\le 1$

同理 $\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\pi$, 故 $I=\frac{3}{2}\pi$.

例2. 计算 $\iint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中Σ是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用轮换对称性:

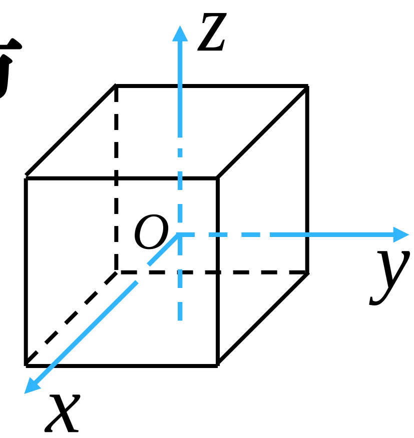
$$I=3\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

思考: 下述解法是否正确:

$$\boxed{\text{根据对称性}\iint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cancel{=}0}$$

例2. 计算 $\iint_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中Σ是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用轮换对称性:

$$I=3\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},\ |y|\le\frac{a}{2})$取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ (|x|\le\frac{a}{2},\ |y|\le\frac{a}{2})$取下侧

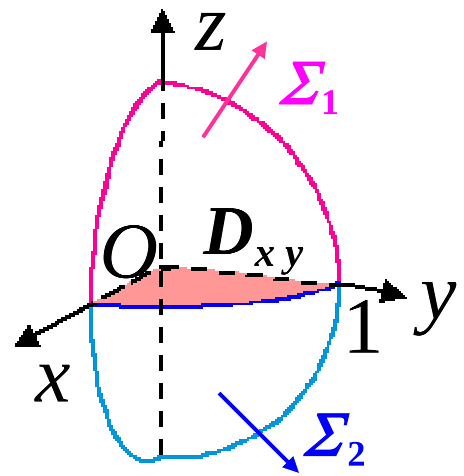
$$=3\Big[\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big]$$

$$=3\Big[\iint_{D_{xy}}(\frac{a}{2}+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}(-\frac{a}{2}+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big]$$

$$=3a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3a^3$$

例3. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在第一和第八卦限部分.

解: 把 Σ 分为上下两部分



$$\begin{cases} \Sigma_1: z = \sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2: z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x,y) \in D_{xy}: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

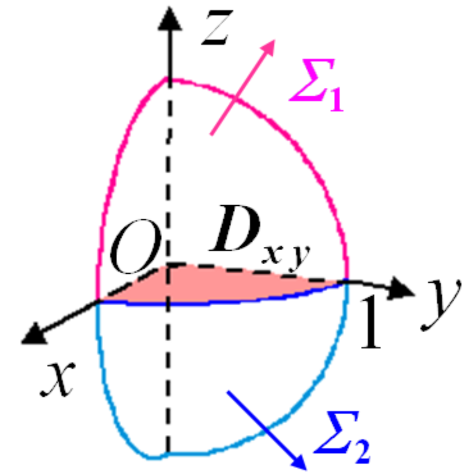
$$= \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = 2/15$$



总结：对坐标的曲面积分计算思路

"一代、二投、三定号"

- "一代" ——Σ表示成二元显函数,代入被积函数,
  将之化成二元函数;
- "二投" ——将Σ投影到与有向面积元素中两个
  变量同名的坐标面上;
  （例：dxdy,投影到xoy面）
- "三定号" ——曲面取 上侧、前侧、右侧时为正,
  曲面取 下侧、后侧、左侧时为负.

例4. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 计算

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}+\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}-\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}$$

解: 利用**轮换对称性**, 有

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x\cos^2 x}=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z},\quad \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x}{\cos^2 y}=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos^2 z}=0$$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z\cos^2 z}=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}=-4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\tan 1$$

四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\, P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$+ Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[\, P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i \Delta S_i$$

$$+ Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i \Delta S_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i \Delta S_i\big]$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) \mathrm{d}S$$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) \mathrm{d}S$$

其中 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 为有向曲面 Σ 指定侧上法向量的方向余弦.

显然有以下关系:

$$\cos\alpha \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\cos\beta \mathrm{d}S = \mathrm{d}z\mathrm{d}x;$$

$$\cos\gamma \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

令 $\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{e_n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

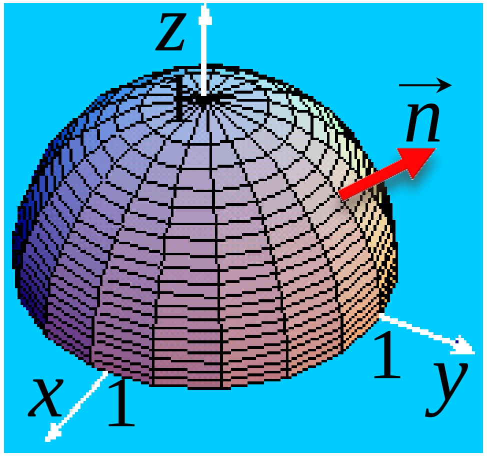
$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y) = \vec{e}_n \mathrm{d}S$

向量形式 $\iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S$

再令 $A_n = \vec{A} \cdot \vec{e}_n$ ($\vec{A}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影)

$$= \iint_{\Sigma} A_n \mathrm{d}S$$

例5. 设 $\Sigma : z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.



解: $I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$

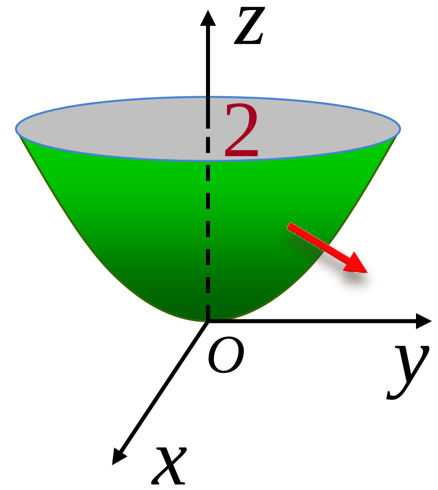
$=\iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\iint_{D_{xy}} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r$

$=\dfrac{\pi}{2}$

例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, Σ为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

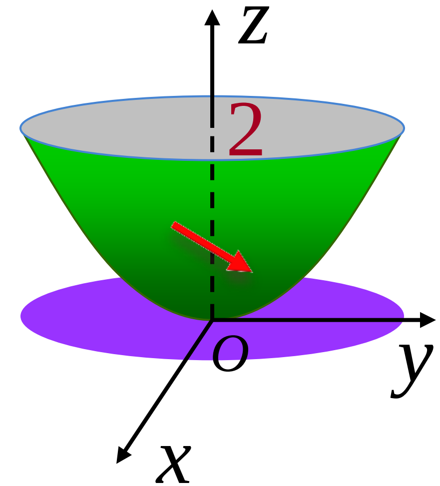
$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

$\therefore$ 原式 $=\iint_{\Sigma}\left[(z^2+x)(-x)-z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入, 得

$$原式=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)r\,\mathrm{d}r=8\pi$$

例7. 位于原点电量为 q 的点电荷产生的电场为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}=\frac{q}{r^3}(x,y,z)\quad\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

求 $\vec{E}$ 通过球面 $\Sigma: r=R$ 外侧的**电通量** Φ .

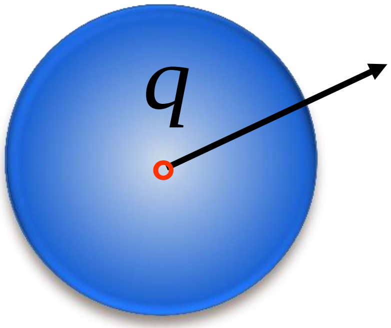
通过电场中任一给定截面的电场线的总数.

解: $\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{q}{r^2}\,\mathrm{d}S=\frac{q}{R^2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=4\pi q$$



内 容 小 结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\big]$$

性质: $\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

思考:

两类曲面积分的定义, 一个与 Σ 的方向无关, 一个与 Σ 的方向有关, 上述联系公式是否矛盾?

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程

(方程不同时分片积分)

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类: 面积投影}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{cases}$$

(4) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

当 $\Sigma: z = z(x, y)\,,\,(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取“+”，下侧取“–”)

类似可考虑在 yOz 面及 zOx 面上的二重积分转化公式.