傅里叶于1807年在他39岁时，提出了一个著名论断：**任意一个周期信号都可以表示为正弦函数的级数和**，其后，他又进一步提出一个更为著名的论断：**任意一个非周期信号都可以表示为不成谐波关系的正弦信号的加权积分**。一般将前者称为傅里叶级数，将后者称为傅里叶变换。

Jean Baptiste Joseph Fourier

1768年3月－1830年5月

第四节 傅里叶级数

*/*Fourier Series*/*

一、周期为2π的函数的傅立叶级数

1. 三角级数及三角函数系的正交性

2. 函数展开成傅里叶级数

3. 正弦级数和余弦级数

二、一般周期函数的傅立叶级数

一、周期为2π的函数的傅立叶级数

1. 三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅, ω为角频率, j为初相)

k 次谐波函数：$y_k = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$, $k \in N^+$

一个复杂的周期运动，可看作是许多不同频率的简谐振动的叠加，即1次, 2次, …, k 次谐波函数…的叠加.

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

(谐波迭加)

复杂的周期运动： $y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

(谐波迭加)

$$A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0,\ a_n = A_n \sin\varphi_n,\ b_n = A_n \cos\varphi_n,\ \omega t = x$

得函数项级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

定理1. 组成三角级数的函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\cdots,\cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上 **正交**, 即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0.

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx\cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x = 0 \quad (k\neq n)$$

同理可证 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k\neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分不等于 0. 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \pi$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

2. 函数展开成傅里叶级数

定理2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

若右端级数可逐项积分, 则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证: 由定理条件, 对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad ①$$

用cos $k\,x$ 乘 ① 式两边，再在[−π, π]逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = a_k\,\pi$$

(利用正交性)

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

同理得 $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n, b_n **称为函数** $f(x)$ **的傅里叶系数；以** $f(x)$ **的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为** $f(x)$ **的傅里叶级数.**

傅里叶，J.-B.-J.

定理3. **(收敛定理, 展开定理)** 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

狄利克雷，P.G.L.

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点}\end{cases}$$

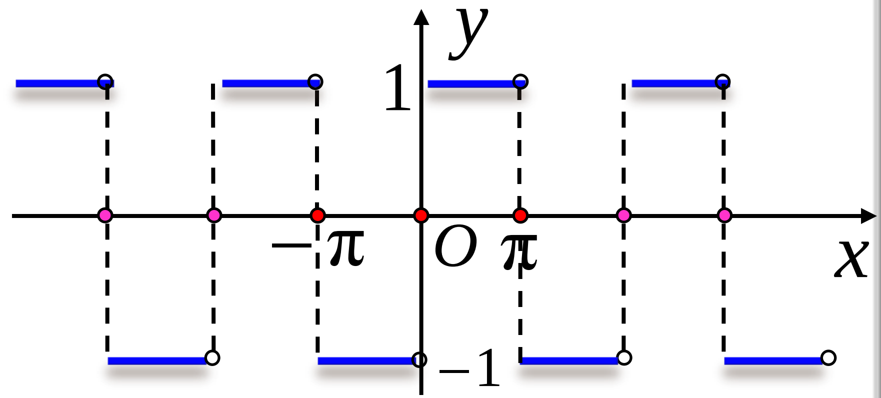
其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数. (证: 略)

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0\\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

令 $y=-x$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos ny\,\mathrm{d}y+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$(\,n=0,1,2,\cdots\,)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

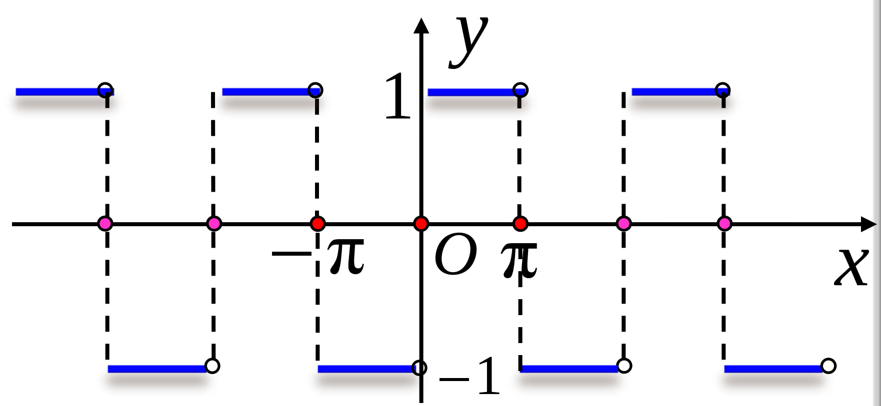
$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\,x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$

说明:



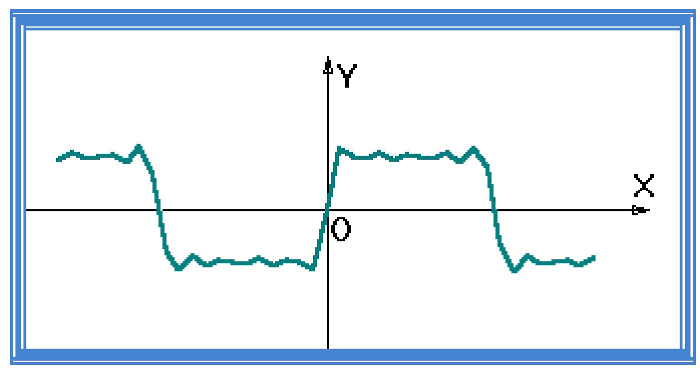
1) 根据收敛定理可知,

当 $x=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$

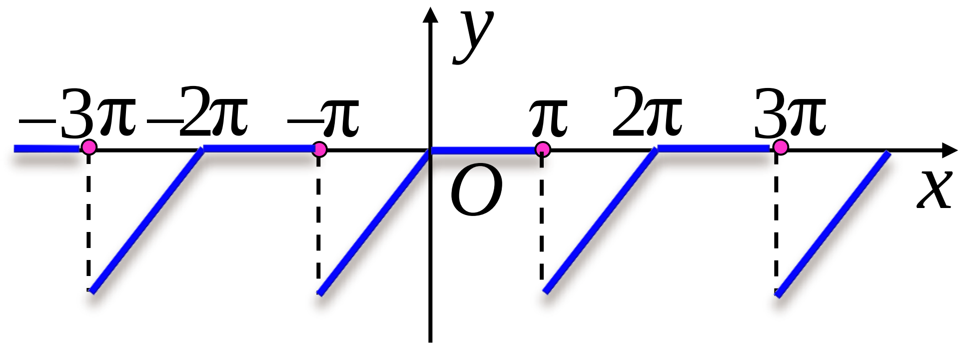
2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + (\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq (2k-1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

说明: 当 $x = (2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于 $\frac{0+(-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$

定义在$[-\pi,\pi]$上的函数 $f(x)$的傅氏级数展开法

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

$\Big\downarrow$ 周期延拓

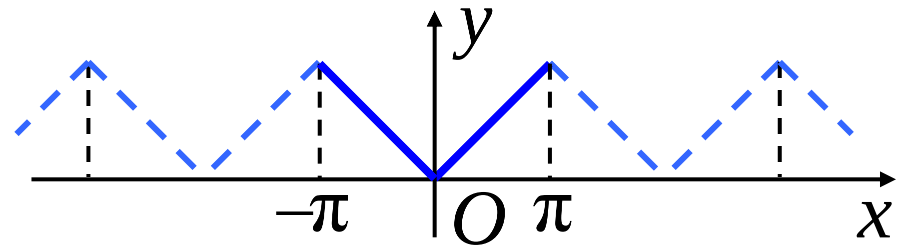
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x\pm 2k\pi),\ k\in N^{+}, & \text{其它} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数.

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$, 则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0\quad, & n=2k\end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$(-\pi\le x\le\pi)$$

说明: 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

设 $\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, $\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$, $\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

已知 $\sigma_1 = \frac{\pi^2}{8}$

$$\because\ \sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4},\quad \therefore\ \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$$

又
$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

3. 正弦级数和余弦级数

1) 周期为2π 的奇/偶函数的傅里叶级数

定理4. 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数, 它的傅里叶系数为

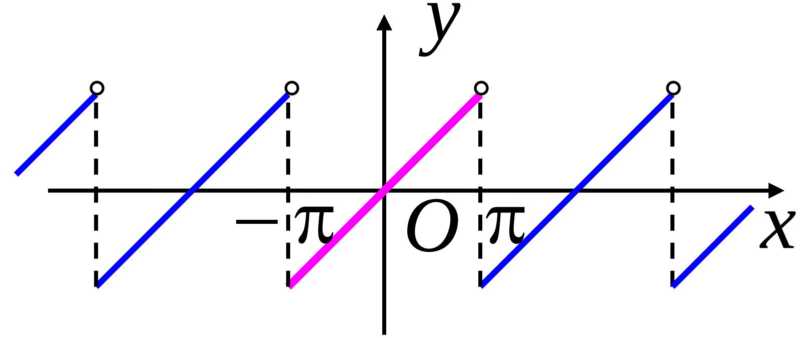
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为余弦级数, 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数, 它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$, 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则$f(x)$是周期为 2π 的奇函数, 因此



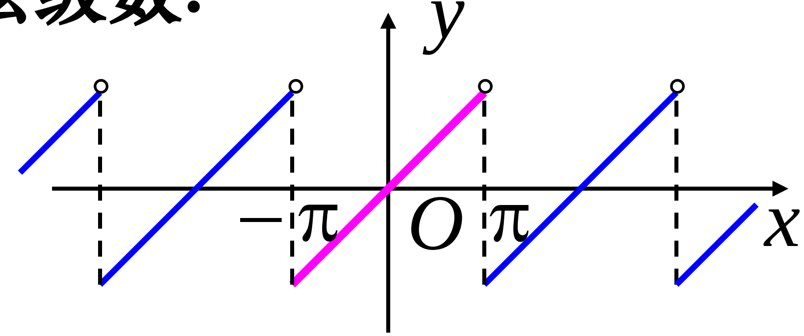
$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:

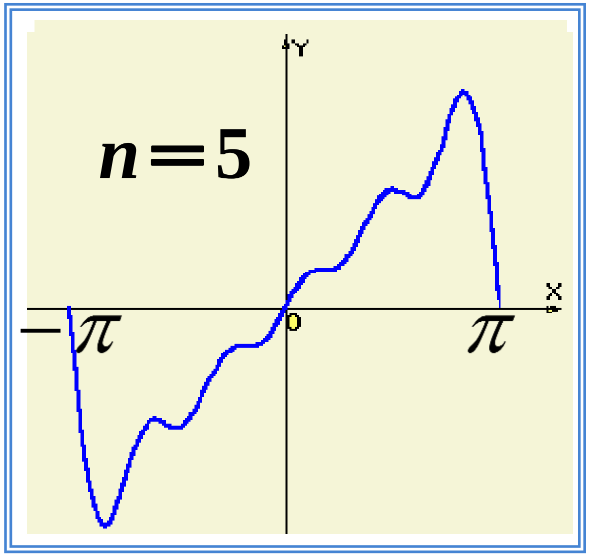


$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

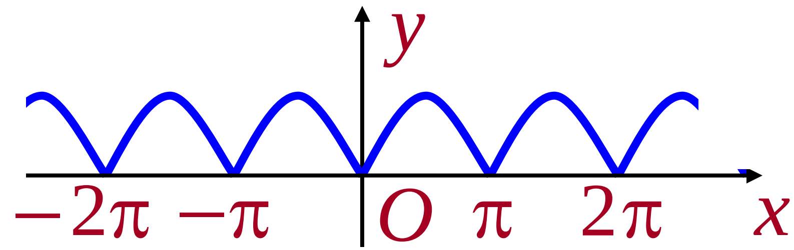
$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\cdots)$$

在 $[-\pi,\pi)$ 上 级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



例5. 将周期函数 $u(t)=|E\sin t|$ 展成傅里叶级数, 其中 E 为正常数.



为便于计算, 将周期取为2π

解: $u(t)$ 是周期为2π 的周期偶函数, 因此

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\big(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t\big)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \underline{\sin(n-1)t}\ \right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 0$$

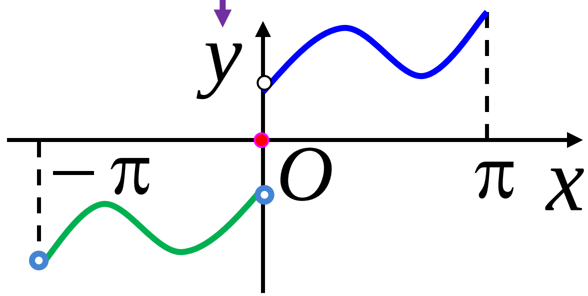
$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

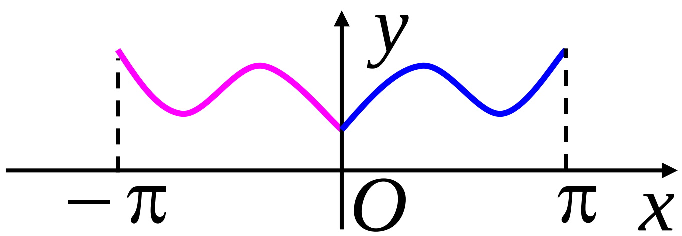
$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

$$(-\infty < t < +\infty)$$

2) 定义在[0, π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,\pi]$ 偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

(-π, π)内奇函数

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

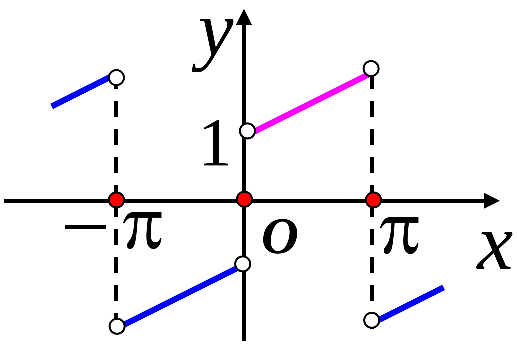
例6. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数.

解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

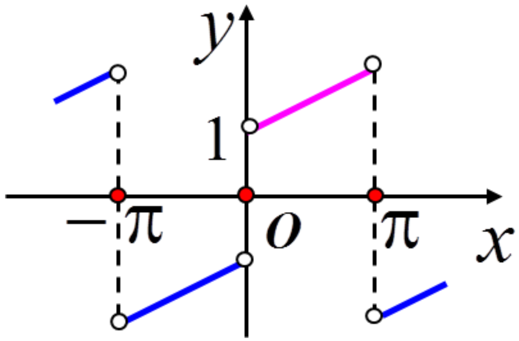
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$



$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\ -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



因此得

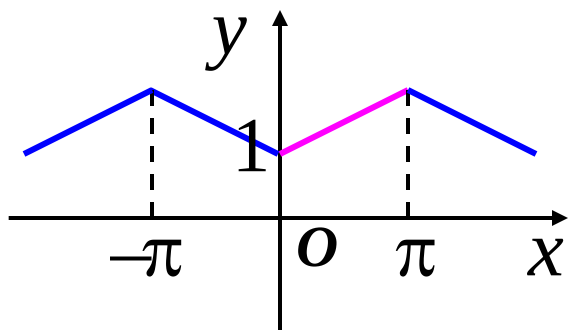
$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x\right.$$

$$\left.+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]\quad(0<x<\pi)$$

注意: **在端点 $x=0,\pi$, 级数的和为0, 与给定函数 $f(x)=x+1$ 的值不同.**

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓, 则有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi+2$$



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

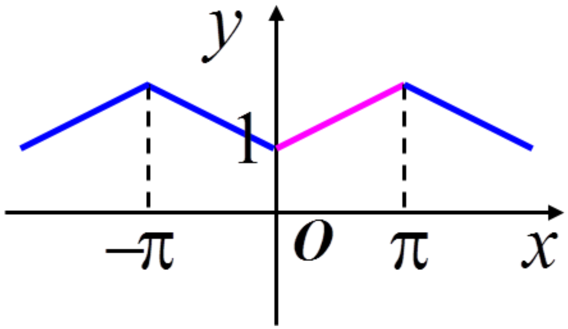
$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\[2ex] 0, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le \pi)$$

说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

内 容 小 结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad (x\neq \text{间断点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 ⟶ 正弦级数
- 偶函数 ⟶ 余弦级数

3. 在 $[0, \pi]$ 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓, 展开为正弦级数
- 作偶周期延拓, 展开为余弦级数

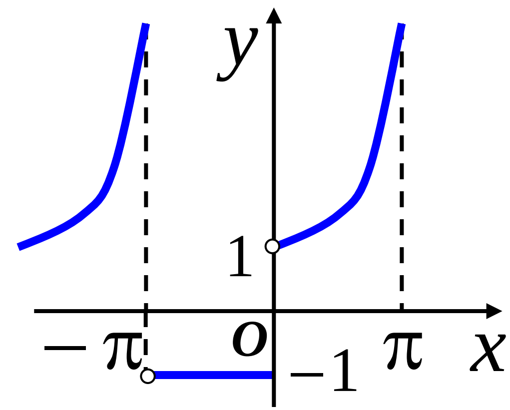
思 考 与 练 习

1. 在 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗 ?

答: 不唯一 , 延拓方式不同级数就不同.

2. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\pi^2/2}$ **, 在 $x=4\pi$ 处收敛于** $\underline{\ 0\ }$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

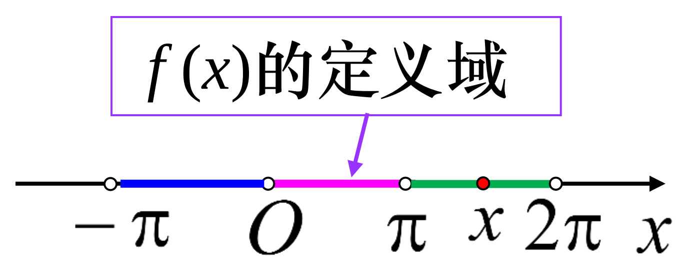
3. 设 $f(x)=\pi x-x^2,\ 0<x<\pi$，又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式.

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上，$S(x)=F(x)$；在 $(\pi,2\pi)$ 上，由周期性得

$$\begin{aligned}S(x)&=S(x-2\pi)\\&=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2\\&=x^2-3\pi x+2\pi^2\end{aligned}$$

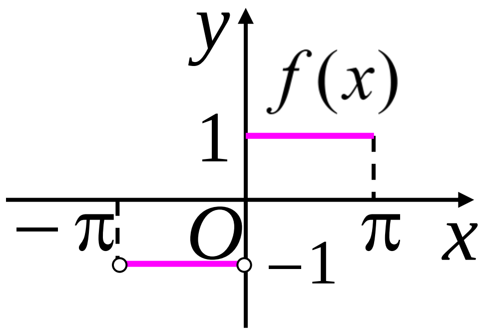


$x-2\pi\in(-\pi,0)$

4. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上

傅氏级数的和函数.

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



二、一般周期函数的傅立叶级数

到现在为止，我们所讨论的周期函数都是以2π为周期的，但是实际问题中所遇到的周期函数，它的周期不一定是2π，怎样把周期为$2l$的周期函数$f(x)$展开成三角级数呢？

以$2l$为周期的函数的傅里叶展开

周期为 $2l$ 函数 $f(x)$

↓ 变量代换 $z=\dfrac{\pi x}{l}$

周期为 2π 函数 $F(z)$

↓ 将$F(z)$ 作傅氏展开

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理4. 设周期为$2l$ 的周期函数 $f(x)$满足收敛定理条件，则它的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

说明: 如果 $f(x)$ 为奇函数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 $f(x)$ 为偶函数, 则有

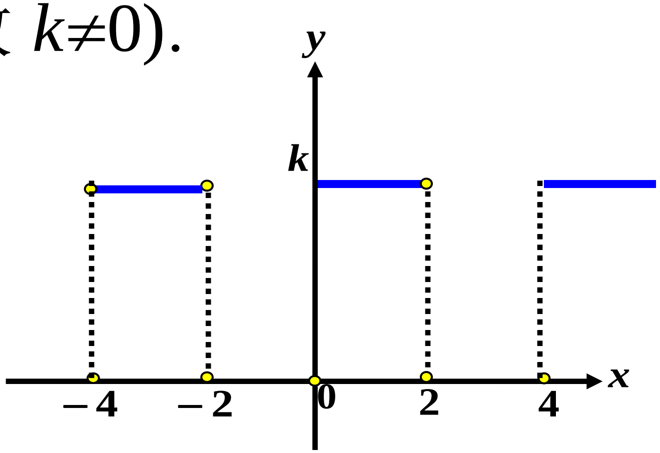
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

注意 无论哪种情况, 在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例7. 设$f(x)$是以4为周期的函数, 它在$[-2, 2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ k & 0\le x<2\end{cases}\quad(常数\ k\ne 0).$$



将$f(x)$展开成傅里叶级数.

解: 这是$l = 2$,由公式得

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}kdx=k.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\cos\frac{n\pi}{2}xdx=\left[\frac{k}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}x\right]\Big|_0^2=0\qquad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 k\cdot\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\left[-\frac{k}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}x\right]\Big|_0^2=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

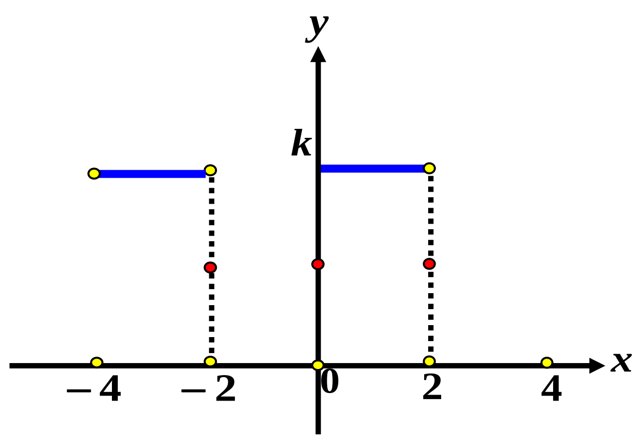
$$=\begin{cases}\dfrac{2k}{n\pi} & 当n=1,3,5,\cdots\\ 0 & 当n=2,4,6,\cdots\end{cases},$$

$$a_0 = k,\quad a_n = 0 \quad (n=1,2,\cdots) \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{2k}{n\pi} & 当 n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & 当 n = 2,4,6,\cdots \end{cases},$$

所以 $$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

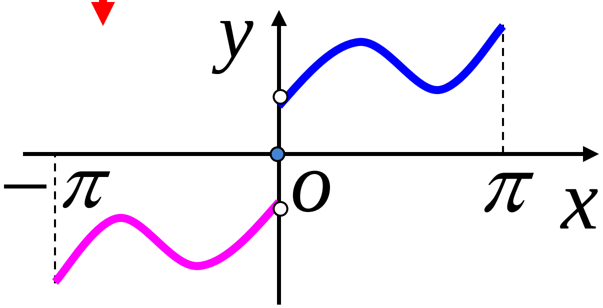
$$(-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \cdots)$$

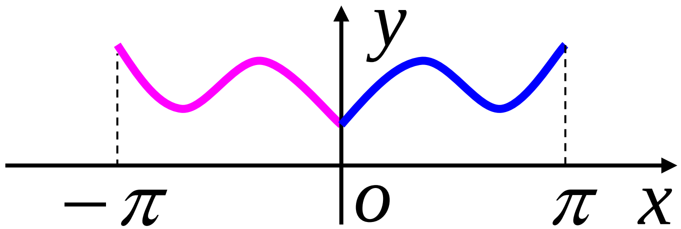
函数 $f(x)$在点$x=0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \cdots$是间断的, 在这些点 $f(x)$的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{k}{2}$.



在[0,l]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,l]$ 偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,l] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-l,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,l]$ 上展成正弦级数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,l] \\ f(-x), & x\in(-l,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

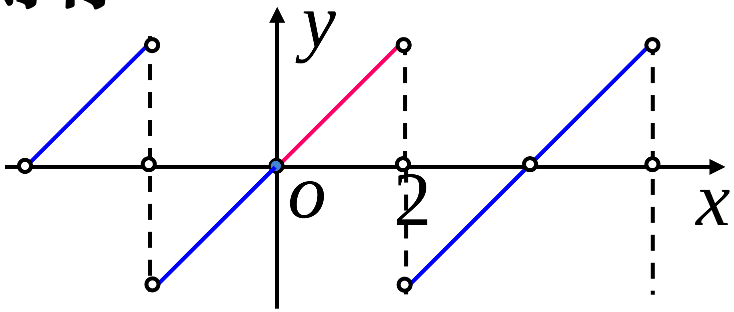
$f(x)$ 在 $[0,l]$上展成余弦级数

例8. 把 $f(x)=x\ \ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; (2) 余弦级数.

在 $x=2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓, 则有



$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

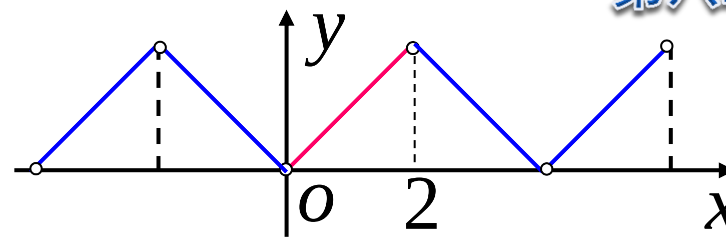
$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ \ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad(0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作**偶**周期延拓, 则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

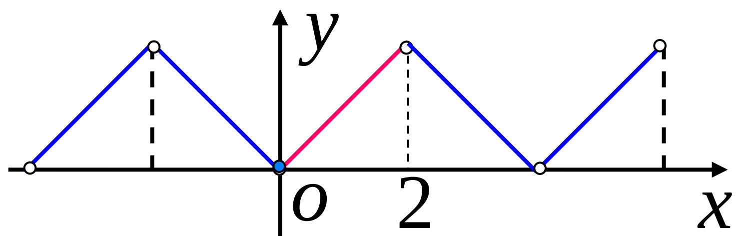
$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$

说明: 此式对 $x=0$ 也成立,



据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当函数定义在**任意有限区间**上时，其傅里叶展开方法:

方法1 $f(x),\ x\in[a,b]$

令 $x=z+\frac{b+a}{2}$，即 $z=x-\frac{b+a}{2}$

$$F(z)=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2}),\ z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$$

周期延拓

$F(z)$在$[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$上展成傅里叶级数

将 $z=x-\frac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅里叶级数

方法2 $f(x)$，$x\in[a,b]$

令 $x=z+a$，即 $z=x-a$

$$F(z)=f(x)=f(z+a),\quad z\in[0,b-a]$$

奇或偶式周期延拓

$F(z)$ 在 $[0,b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

将 $z=x-a$ 代入展开式

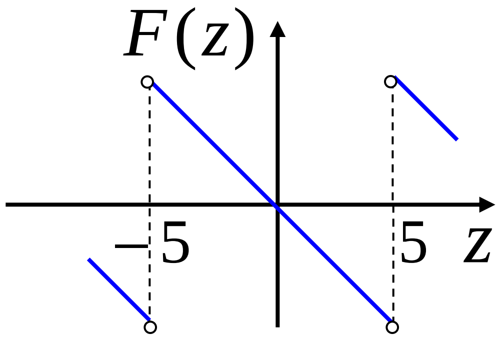
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例9. 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展成傅里叶级数.

解: 令 $z=x-10$, 设

$$F(z)=f(x)=f(z+10)=-z \qquad (-5<z<5)$$

将$F(z)$ 延拓成周期为 10 的周期函数, 则它满足收敛定理条件. 由于$F(z)$ 是奇函数, 故



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -z\sin\frac{n\pi z}{5}\,\mathrm{d}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5} \qquad (-5<z<5)$$

$$\therefore\ 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad (5<x<15)$$