习题课

空间解析几何

一、内容小结

二、实例分析

内容小结

一、向量代数

设 $\vec{a}=(a_x\,,a_y\,,a_z)\,,\vec{b}=(b_x\,,b_y\,,b_z),\vec{c}=(c_x\,,c_y\,,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x\,,a_y\pm b_y\,,a_z\pm b_z)$

数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x\,,\lambda a_y\,,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

混合积: $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 向量关系

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$ 共线 $\rightleftarrows \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \rightleftarrows \dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} \quad (a_x a_y a_z \neq 0)$

$\vec{a} \perp \vec{b} \rightleftarrows \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightleftarrows a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\rightleftarrows (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$

$$\rightleftarrows \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

内容小结

二、 空间直线与平面的方程

1.空间平面

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

点:(x_0, y_0, z_0)
法向量:$\vec{n} = (A, B, C)$

三点式 $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

2.空间直线

一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

(x_0,y_0,z_0) **为直线上一点;**

$\vec{s}=(m,n,p)$ **为直线的方向向量.**

两点式（略）

三、 线面之间的相互关系

1.面与面的关系

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

2.线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$

垂直: $\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

平行: $\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

夹角公式: $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}$

3.面与线间的关系

平面： $Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = (A, B, C)$

直线： $\dfrac{x - x}{m} = \dfrac{y - y}{n} = \dfrac{z - z}{p},\ \vec{s} = (m, n, p)$

垂直： $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{m}{A} = \dfrac{n}{B} = \dfrac{p}{C}$

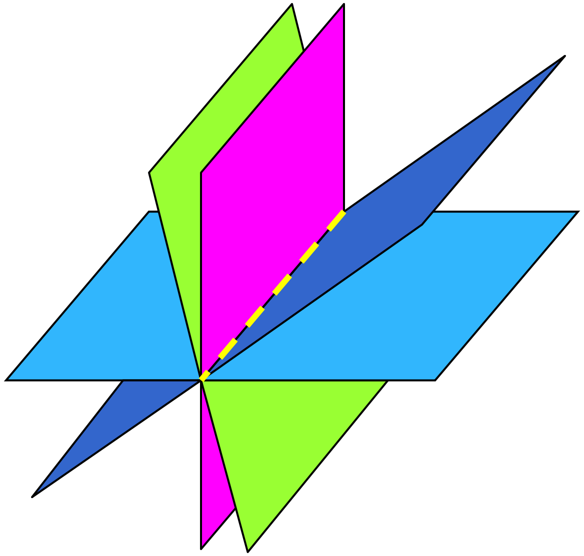
平行： $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$

夹角公式： $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

4. 相关的几个问题

(1) 过直线

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$



的**平面束**方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

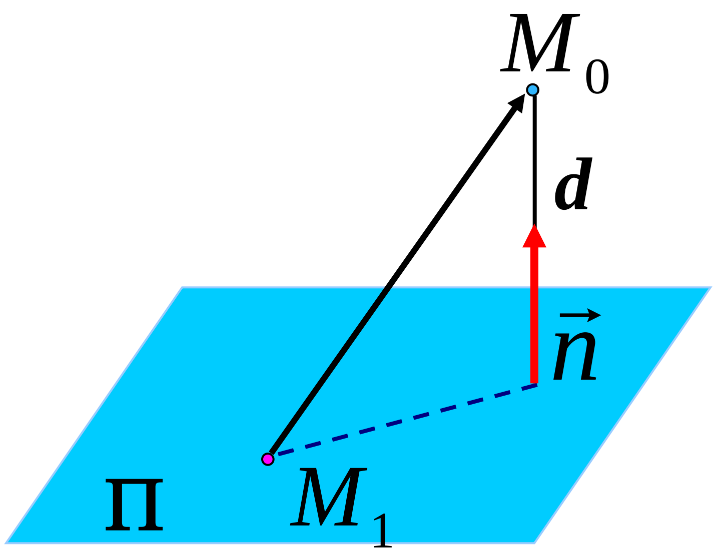
$(\lambda_1,\lambda_2$ 不全为 $0)$

注：一般取 $\lambda_1=1$

(2)点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 Π： $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



$M_1(x_1,y_1,z_1)$

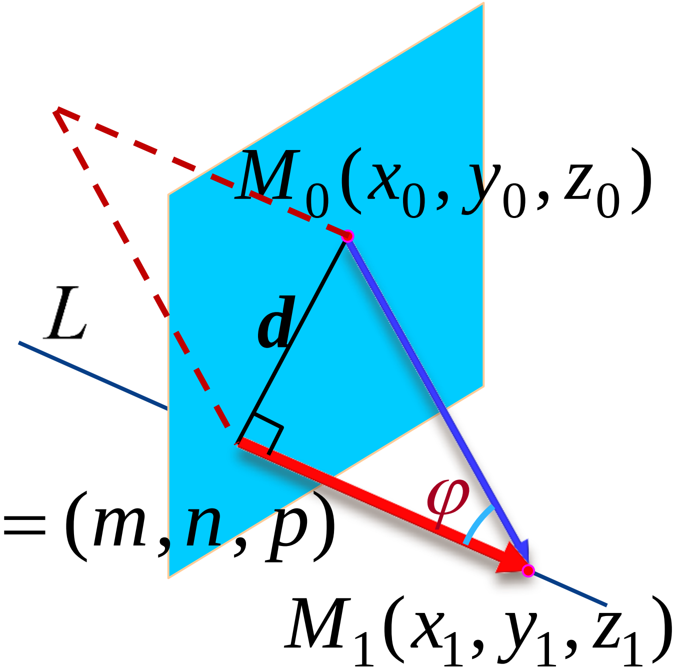
$$\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)$$

$$=Ax_0+By_0+Cz_0+D$$

(3) 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **到直线**

$$L: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

的距离为



$\vec{s} = (m, n, p)$

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{matrix} \right\|$$

内容小结

四、 空间曲面与曲线

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,, z)=0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如, 椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等.

1. 二次曲面 ⟷ **三元二次方程** $F(x, y, z) = 0$

- **椭球面:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- **椭圆锥面:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$
- **抛物面:** (p,q 同号)

椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

双曲抛物面

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

注意 当$p,q < 0$时曲面的形状,留作思考题.

- **双曲面:**

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- 空间曲面的**参数方程**含两个参数, 形如

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

例如 球面参数方程为

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

内容小结

1. 空间曲线 ⟷ **三元二次方程组** $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

- 空间曲线的参数方程, 形如

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

- 化一般方程为参数方程
- 空间曲线的投影方程

实例分析

例1. **设一平面平行于已知直线** $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ **且垂直于已知平面** $7x - y + 4z - 3 = 0$, **求该平面法线的的方向余弦.**

提示: 已知平面的法向量 $\vec{n}_1 = (7, -1, 4)$

求出已知直线的方向向量 $\vec{s} = (1, 1, 2)$

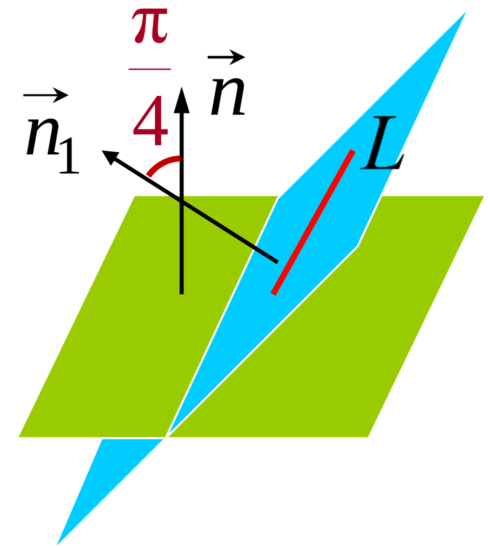
取所求平面的法向量

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(3, 5, -4)$$

所求为 $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{50}}$, $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{50}}$, $\cos\gamma = \dfrac{-4}{\sqrt{50}}$

例2. 求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

?



提示: 过直线 L 的平面束方程

$$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$$

其法向量为 $\vec{n}_1=(1+\lambda,5,1-\lambda)$.

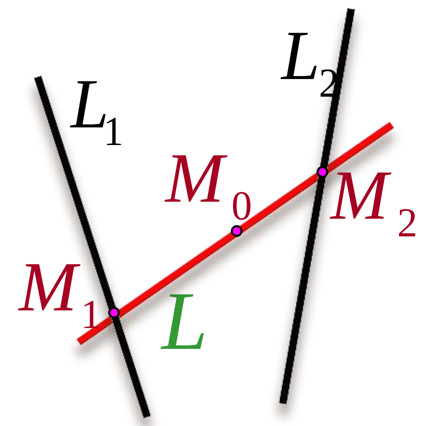
已知平面的法向量为 $\vec{n}=(1,-4,-8)$

选择 λ 使 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}$ $\Rightarrow$ $\lambda=-\frac{3}{4}$

从而得所求平面方程 $x+20y+7z-12=0$.

易证,平面 $x-z+4=0$ 亦满足条件.

例3. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.



提示1: 思路：先求交点 M_1, M_2；

再写直线方程.

将 L_1, L_2 的方程化为参数方程

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases}, \quad L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设 L 与它们的交点分别为

$$M_1(t_1, 2t_1, t_1-1),\ \ M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1).$$

M_0, M_1, M_2 三点共线

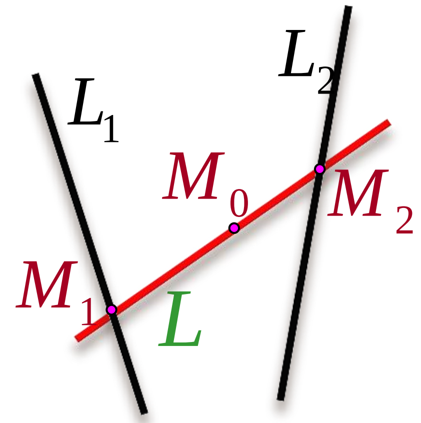
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \,//\, \overrightarrow{M_0M_2}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{(3t_2 - 4) - 1} = \frac{(t_1 - 1) - 1}{(2t_2 - 1) - 1}$$

$$\Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 2$$

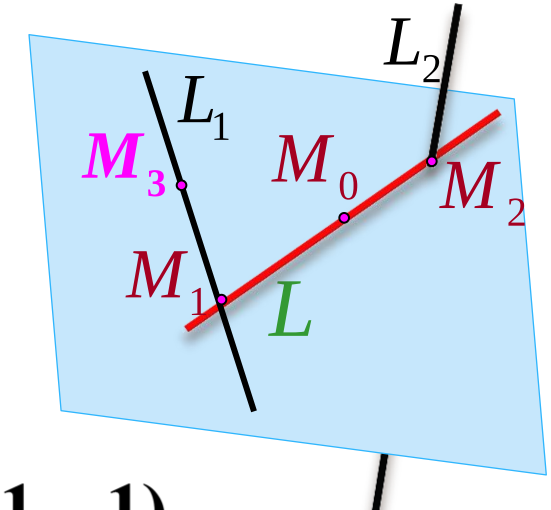
$$\Rightarrow \boldsymbol{M_1(0,0,-1), M_2(2,2,3)}$$

$$\Rightarrow L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$



$$M_0(1,1,1), \quad M_1(t_1, 2t_1, t_1 - 1), \quad M_2(t_2, 3t_2 - 4, 2t_2 - 1)$$

例3. 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$, $L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.



提示2: 思路：先求过点 M_0 与直线 L_1 的平面方程:

$$M_3(0,0,-1)\in L_1$$

$$\vec{n}=(1,2,1)\times\overrightarrow{M_3M_0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(3,-1,-1)$$

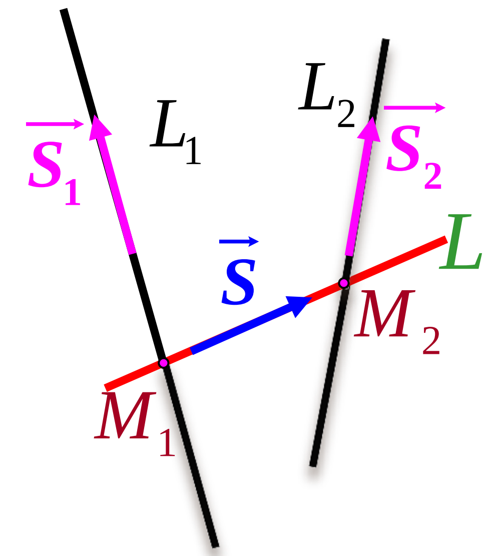
$$\Rightarrow 3(x-1)-(y-1)-(z-1)=0,\text{即}3x-y-z-1=0$$

再代入 L_2 参数方程,求出 $M_2(2,2,3)$,$\overrightarrow{M_0M_2}$与L_1不平行

故连接 M_0 ,M_2 的直线必与L_1相交,即得所求直线.

例4. 求已知两直线 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ 和

$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{2}$，求它们的公垂线. P48



提示 公垂线L与L_1的交点为M_1,

与L_2 的交点为M_2, 有:

$$M_1(1+2t_1,2+3t_1,-3+2t_1),$$

$$M_2(1+t_2,-1+2t_2,2t_2),$$

两直线方向向量：$\vec{S}_1=(2,3,2),\vec{S}_2=(1,2,2),$

令$\vec{S}=\vec{S}_1\times\vec{S}_1$, 必有$\overrightarrow{M_1M_2}\,//\,\vec{S}$

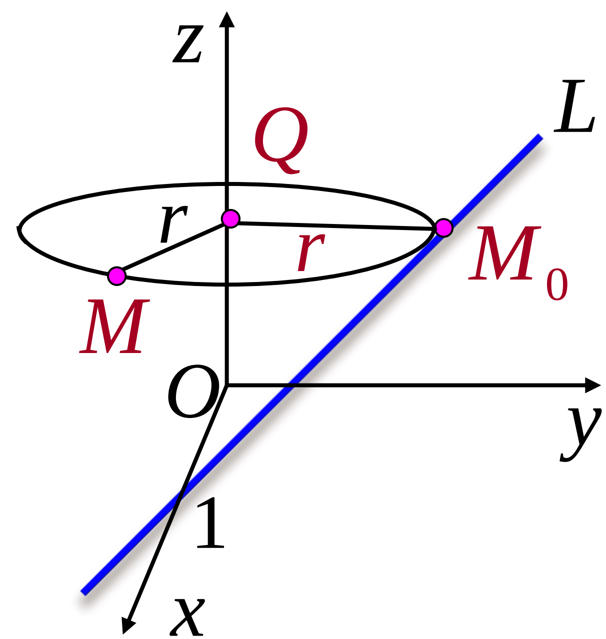
由坐标成比例,求出t_1与t_2,即得M_1与M_2坐标,方程即得.

例5. 直线 $L: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周, 求此旋转曲面的方程.

提示: 在 L 上任取一点 $M_0(1, y_0, z_0)$

设 $M(x,y,z)$ 为 M_0 绕 z 轴旋转轨迹上任一点, 则有

$$\begin{cases} z = z_0 = y_0 \\ x^2 + y^2 = |QM_0|^2 = 1 + y_0^2 \end{cases}$$



将 $y_0 = z$ 代入第二方程，

得旋转曲面方程

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$