§7_4_1 对面积的曲面积分

/ Surface Integrals with Respect to Area*/*

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

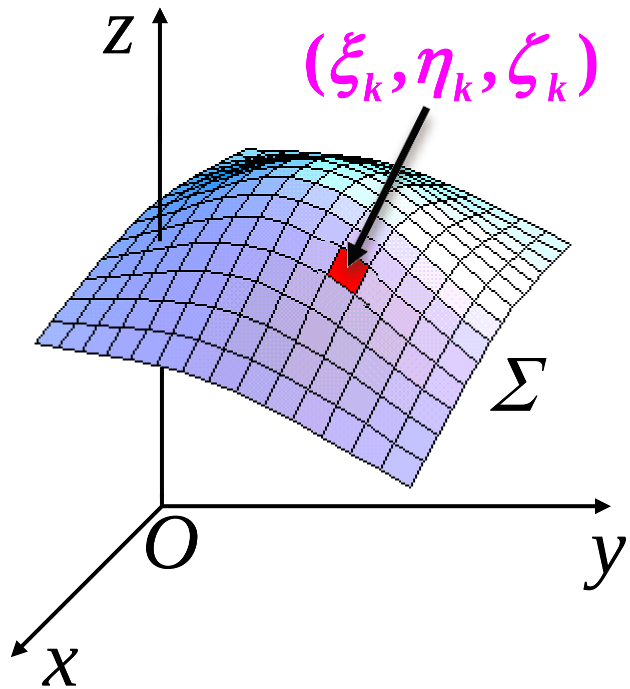
一、对面积的曲面积分的概念与性质

引例. 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"分割, 近似, 求和, 取极限"

的方法, 可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值(曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义. 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做**任意分割**和局部区域**任意取点**, "**乘积和式极限**"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上**对面积的曲面积分**或**第一类曲面积分**. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做**被积函数**, Σ 叫做**积分曲面**.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S$

性 质

(1) $f \in C(\Sigma)$, Σ有界光滑曲面, 则$\iint_{\Sigma} f\,\mathrm{d}S$必存在.

(2) $$\iint_{\Sigma}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]\mathrm{d}S$$

$$=\alpha\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\beta\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

(α, β为常数)

(3) $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

(Σ由Σ_1, Σ_2组成)

(4) 设在Σ上$f(x,y,z)\le g(x,y,z)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S\le\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

(5) $\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = S$ (S 为曲面Σ的面积)

(6) Σ区域对称性在积分中的作用

- 若Σ关于xoy面(yoz面或zox面)对称, 而f关于z(x或y)的奇函数,则$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S \equiv 0;$
- 若Σ关于xoy面(yoz面或zox面)对称, 而f关于z(x或y)的偶函数,则$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S;$
- 若Σ关于原点对称,而$f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$,则
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0;$$
- 若Σ关于$x = y = z$对称,则
$$\iint_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(y)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} f(z)\mathrm{d}S.$$

回顾：求曲面的面积

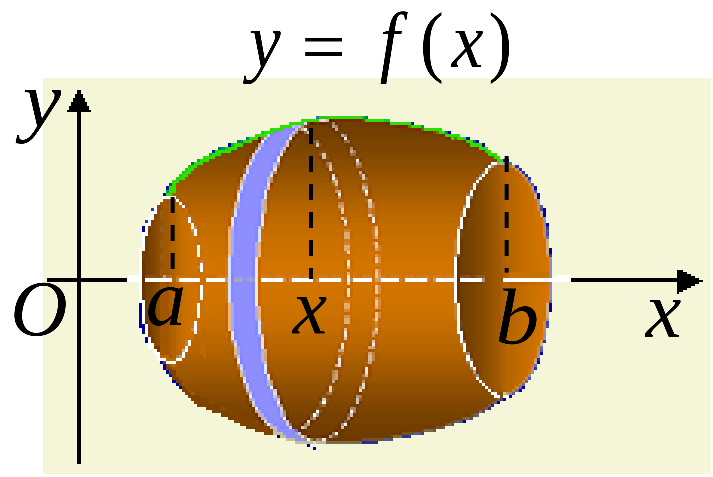
☆ 利用定积分求旋转体的侧面积

设平面光滑曲线 $y=f(x)\in C^1[a,b]$, 且 $f(x)\geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的侧面积.

取侧面积元素: 位于 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



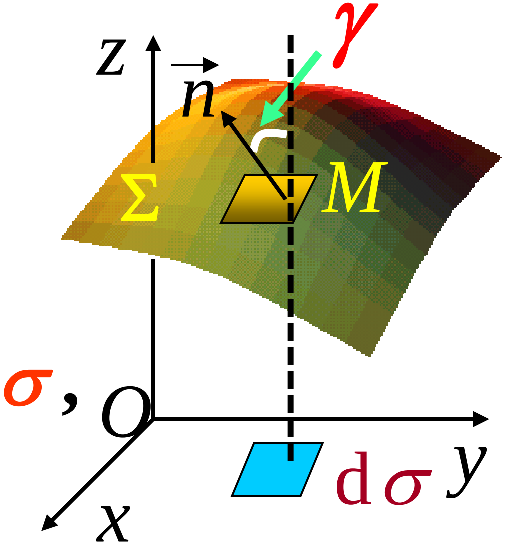
积分后得旋转体的侧面积

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

回顾：求曲面的面积

☆ 利用二重积分求空间曲面面积

设曲面为$\Sigma: z=f(x,y),(x,y)\in D$, 偏导连续, 则面积 **S** 可看成曲面上各点 $M(x,y,z)$ 处小切平面的面积 **dS** 无限积累(拼接)而成.设它在D上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$,

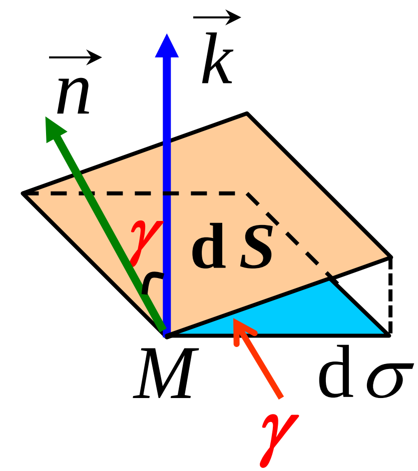


则 $\mathrm{d}S=\dfrac{1}{\cos\gamma}\cdot\mathrm{d}\sigma$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^{\,2}(x,y)+f_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)



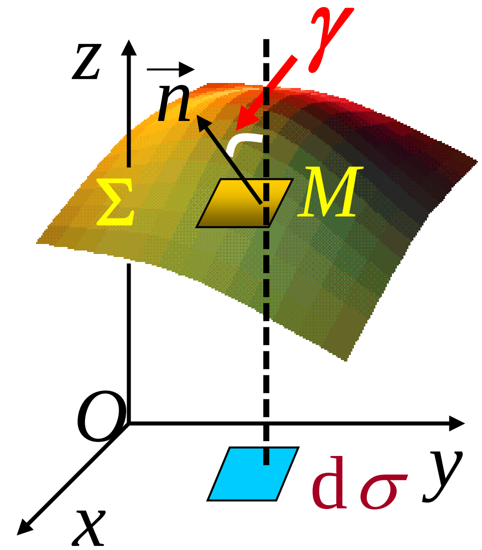
回顾：求曲面的面积

☆ 利用二重积分求空间曲面面积

故有曲面面积公式

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D}\sqrt{1+f_x{}^2(x,y)+f_y{}^2(x,y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

即 $$S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



二、对面积的曲面积分的计算法

定理. 设有光滑曲面

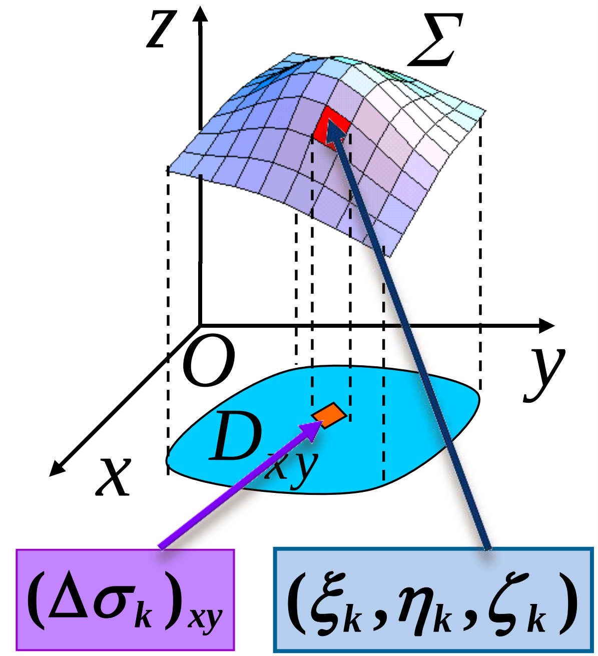
$$\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_\Sigma f(x, y, \underline{z})\,\underline{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



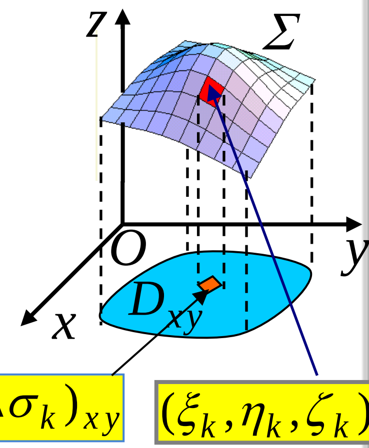
证明: 由定义知

$$\iint_\Sigma f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

曲面元素

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$



$$\therefore \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ 光滑)

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x^2(\xi_k,\eta_k)+z_y^2(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

总结：对面积的曲面积分的计算思路

“一代、二换、三投影”

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- “一代” ——Σ表示成二元显函数(或参数方程),代入被积函数,将之化成二元函数;
- “二换” ——将$\mathrm{d}S$代换成两个积分变量投影面积微元表示的形式;
- “三投影” ——将Σ投影到与两个积分变量同名的坐标面上,并将积分区域改成此投影区域.

说明:

1) 如果曲面方程为 $x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{yz}} f(x(y,z), y, z)\sqrt{1 + x_y^2(y,z) + x_z^2(y,z)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2) 如果曲面方程为 $y = y(z,x), (z,x) \in D_{zx}$

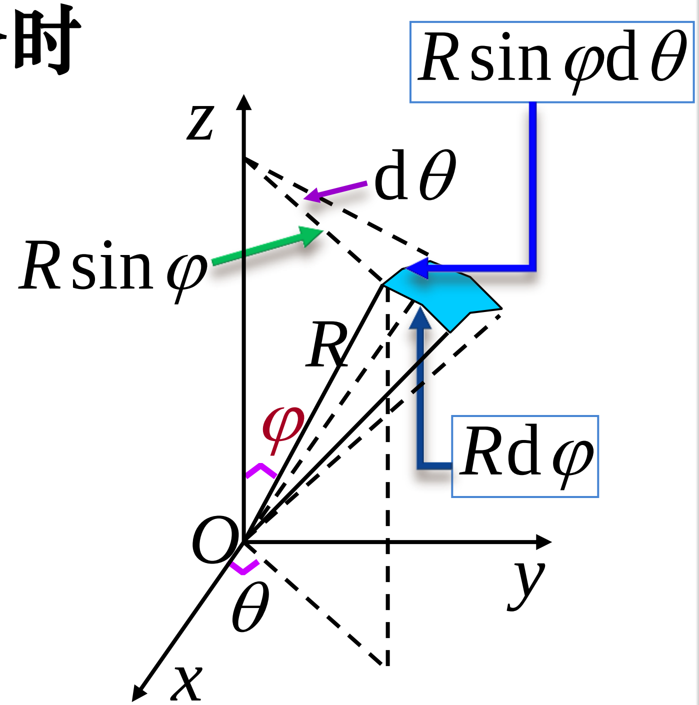
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{zx}} f(x, y(z,x), z)\sqrt{1 + y_z^2(z,x) + y_x^2(z,x)}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

说明:

3) 如果曲面为球面或球面上一部分时

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$



有 $\mathrm{d}S = R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

$$= \iint_\Sigma f(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)\, R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

说明:

*4) 如果曲面方程为 $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in D_{uv} \\ z = \omega(u,v) \end{cases}$

且 $\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| \neq 0$，有 $\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，

P169

其中 $\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases}$

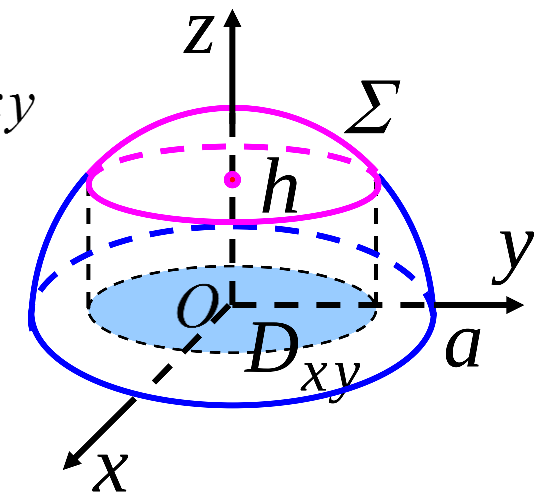
$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$
$$= \iint_{D_{uv}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$



$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{a^2-\rho^2}$$

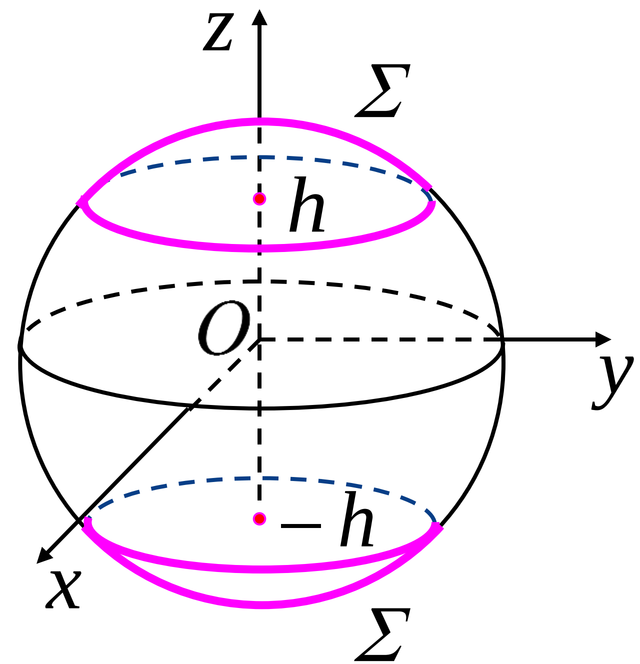
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

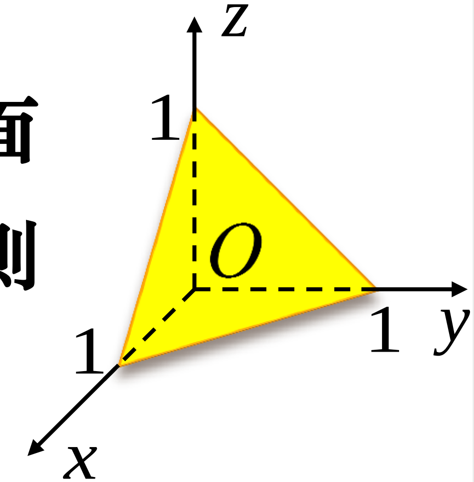
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\quad 0 \quad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\ 4\pi a\ln\frac{a}{h}\ )$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示 Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

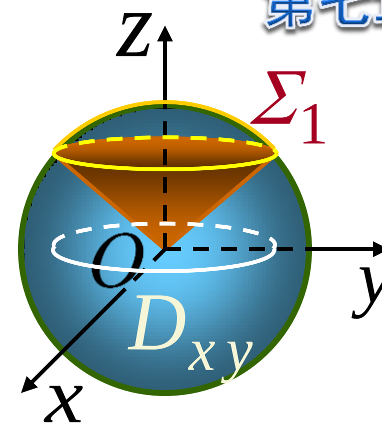
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1-x-y,\quad (x,y)\in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & 当 z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & 当 z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2, z=\frac{1}{\sqrt{2}}a.$

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分, 它在 xOy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$, 则

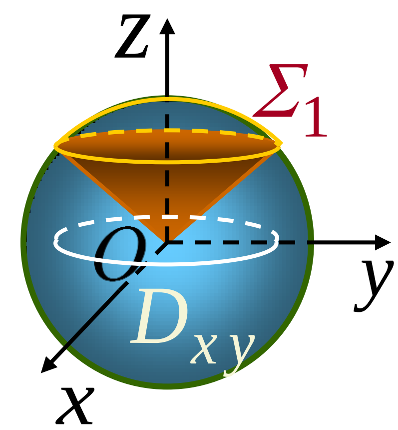
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}a}\frac{a r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$



例4. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R),\ \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2.$

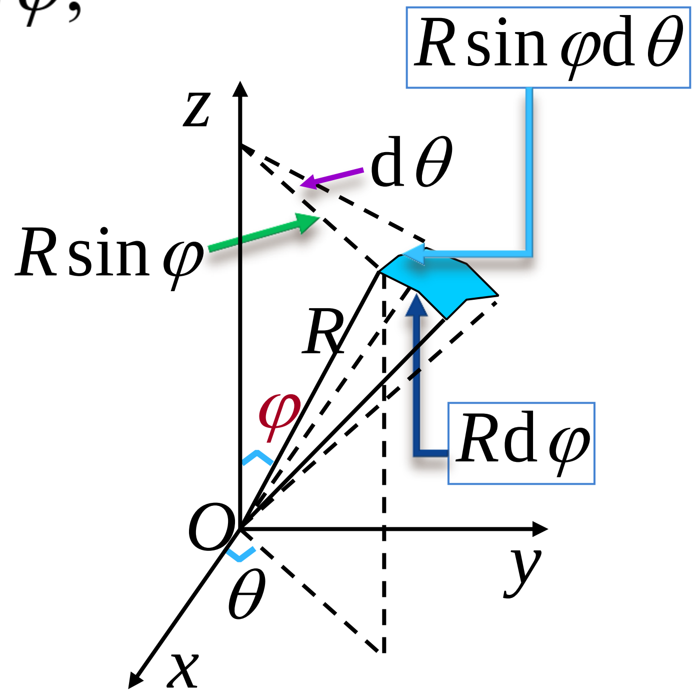
解: 取球面坐标系, 则 $z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi}{\lambda-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\varphi)}{\lambda-R\cos\varphi}$$

$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$



思考: 例3 是否可用球面坐标计算?

例5. 求半径为R 的均匀半球壳 Σ 的质心.

解: 设 Σ 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in D_{xy}$

利用对称性可知质心的坐标 $\bar{x}=\bar{y}=0$, 而

$$\bar{z}=\frac{\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S}{\iint_\Sigma \mathrm{d}S}$$

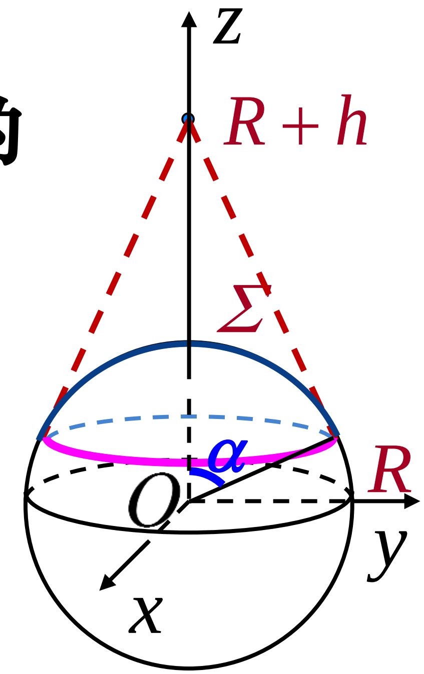
用球面坐标

$z=R\cos\varphi$

$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}=\frac{\pi R^3}{2\pi R^2}=\frac{R}{2}$$

例6. 设有一颗地球同步轨道通讯卫星，距地面高度 $h = 36000$ km，运行的角速度与地球自转角速度相同，试计算该通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比.（地球半径 $R = 6400$ km）



解： 建立坐标系如图，记覆盖曲面 Σ 的半顶角为 α，利用球面坐标系，则

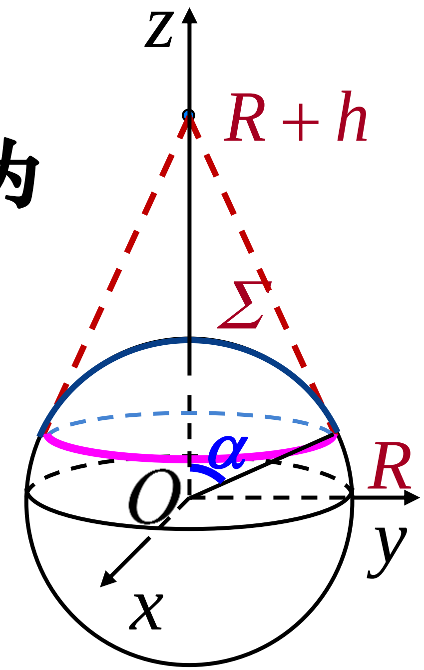
$$\mathrm{d}S = R^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$$

卫星覆盖面积为

$$A = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi$$

$$A=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi R^2\frac{h}{R+h}$$



$$\cos\alpha=\frac{R}{R+h}$$

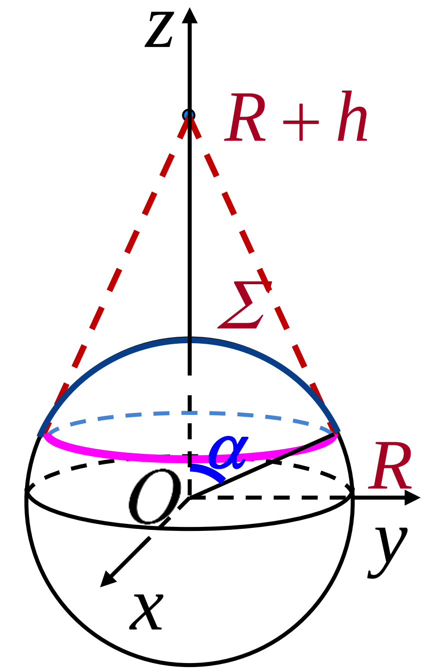
故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2}=\frac{h}{2(R+h)}$$

$$=\frac{36\cdot 10^6}{2(36+6.4)\cdot 10^6}\approx 40.5\,\%$$

故通讯卫星的覆盖面积与地球表面积的比为

$$\frac{A}{4\pi R^2} \approx 40.5\,\%$$



$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

由以上结果可知，卫星覆盖了地球 $1/3$ 以上的面积，故使用三颗相隔 $2\pi/3$ 角度的通讯卫星就几乎可以覆盖地球全表面.

说明: 此题也可用二重积分求 A.

例7. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ

$+z^2=2(x+y+z)$.

利用质心公式

$$\bar{x}=\frac{\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S}{\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S}$$

解: 显然球心为 $(1,1,1)$, 半径为 $\sqrt{3}$

利用对称性可知 $\oiint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

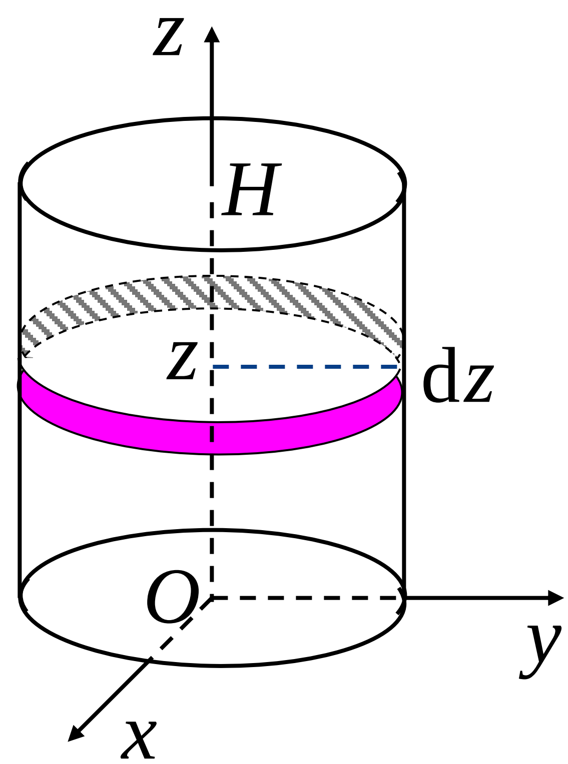
$$\therefore\quad I=\frac{2}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

$$\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S$$

$$=4\oiint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S=4\cdot\bar{x}\cdot\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\cdot1\cdot4\pi(\sqrt{3})^2=48\pi$$

例8. 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面 $z=0, z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)两片，则计算较繁.



解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设 $\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, **则**

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他几种情况类似)

注意:利用球面坐标, 柱面坐标, 对称性, 质心公式简化计算的技巧.