第六章 多元函数微分学

一元函数微分学

推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

第一节

多元函数的基本概念

/ Functions of Several Variables */*

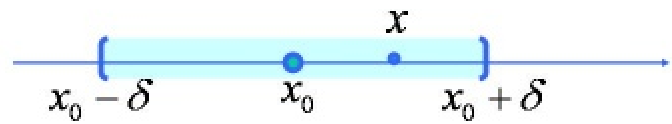
一、平面上的集合

二、多元函数的概念

三、多元函数的极限

四、多元函数的连续性

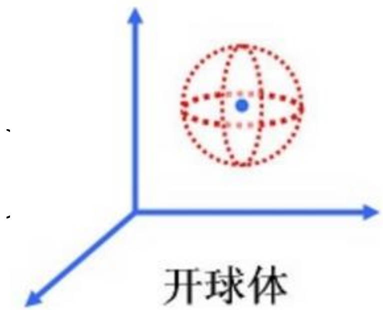
一、平面上的集合



1. 邻域 /*Neighborhood*/

点集 $U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的δ 邻域.

例如, 在平面上, （开圆邻域）



$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

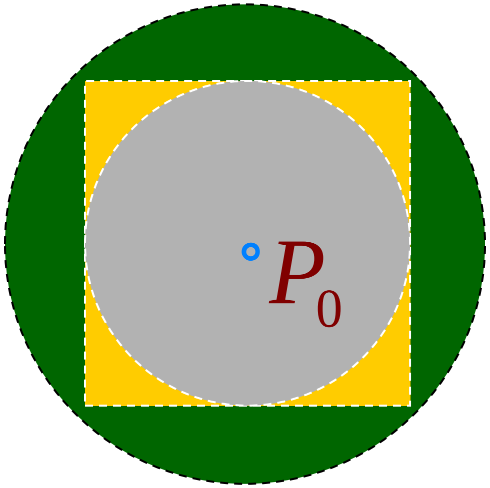
在空间中, （开球邻域）

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\right\}$$

说明: 若不需要强调邻域半径δ, 也可写成$U(P_0)$.

点 P_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域，因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

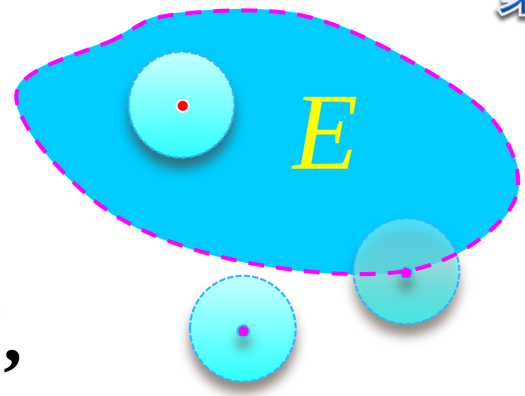


平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}$$

2. 区域

(1) 内点, 外点, 边界点

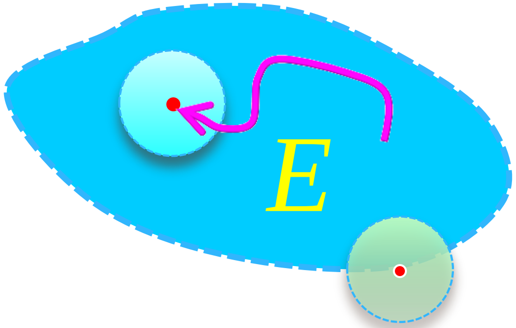


设有点集 E 及一点 P :

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的内点/*Inner point*/;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的外点/*Outer point*/;
- 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E 中的内点也含 E 的外点, 则称 P 为 E 的边界点/*Boundary point*/.

显然, E 的内点必属于 E, E 的外点必不属于 E, E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E.

(2) 聚点



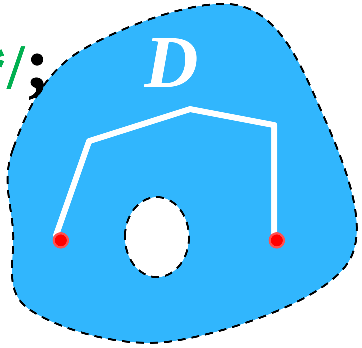
若对任意给定的$\delta>0$，点P 的去心邻域$\mathring{U}(P,\delta)$内总有E 中的点，则称 P 是 E 的聚点．(给出逼近的前提)

聚点可以属于 E，也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

所有聚点所成的点集成为 E 的导集.

(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点, 则称 E 为开集/*Open sets*/;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作 ∂E;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集/*Closed sets*/;
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连, 则称 D 是连通的/*Connected*/;;
- 连通的开集称为开区域, 简称区域/*Region*/;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.



Q1:除了开集, 就是闭集?

Q2:由闭集一定可以构造出开集?

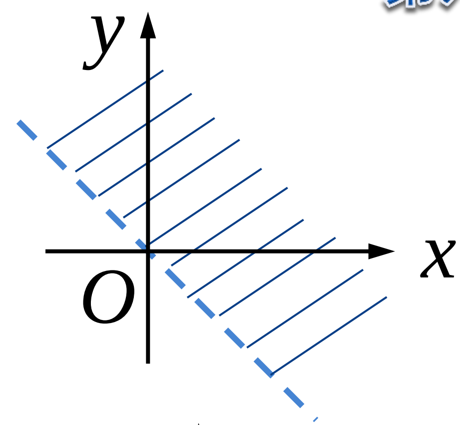
例如, 在平面上

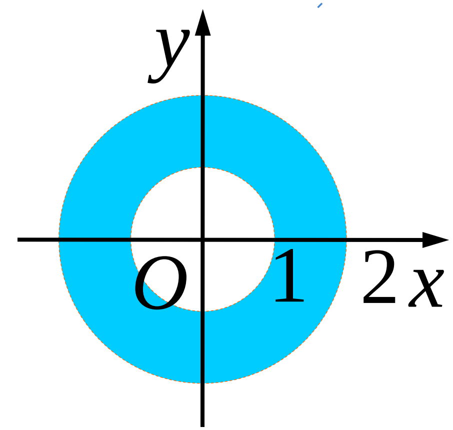
- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$

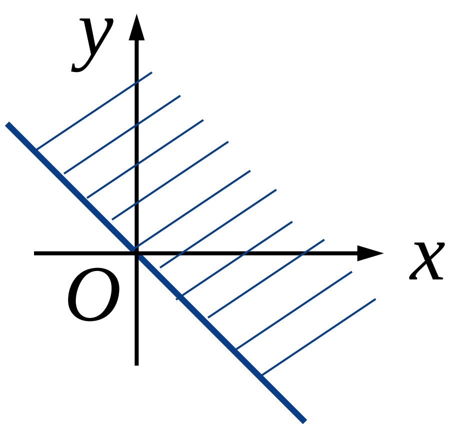
开区域

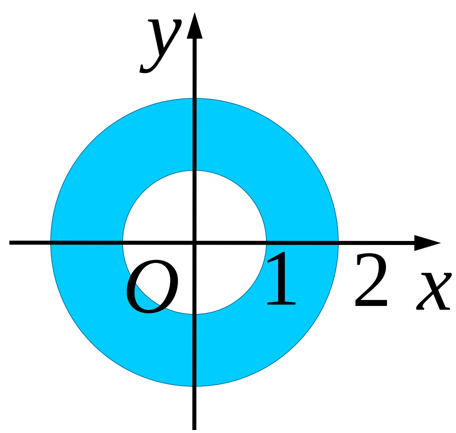
- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

闭区域



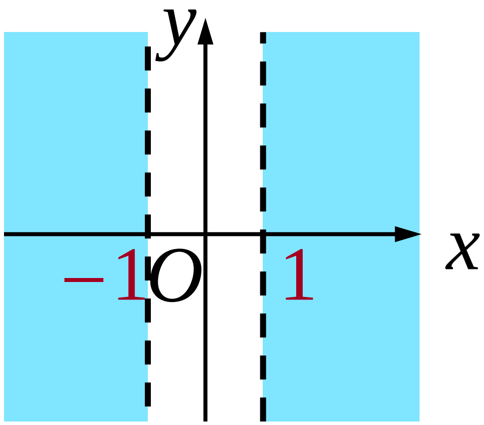






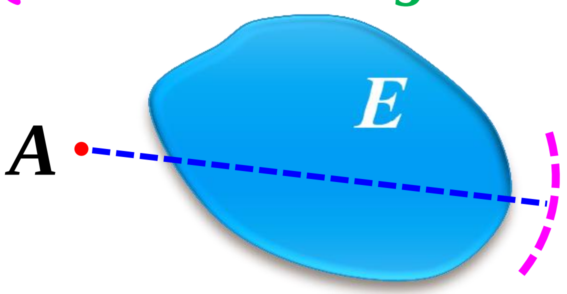
Q3:除了开区域就是闭区域?

- ♣ 整个平面 是最大的开区域，也是最大的闭区域；
- ♣ 点集 $\{(x,y)\,\|\,|x|>1\}$ 是开集，但非区域.



集与区域差“连通性”

- 对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$，则称 D 为有界域/*Bounded Region*/，否则称为无界域.



*3. n 维空间

n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体所构成的集合记作 $\mathbf{R}^n$，即 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$

$$=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_k\in\mathbf{R},k=1,2,\cdots,n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 中的每一个元素用单个粗体字母 $\boldsymbol{x}$ 或 $\vec{x}$ 表示，即

$$\boldsymbol{x}=\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

*3. n 维空间

任给 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathrm{R}^n,\lambda\in\mathrm{R}$

定义.
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}&=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\cdots,\ x_n+y_n) \\ \lambda\,\boldsymbol{x}&=(\lambda\,x_1,\ \lambda\,x_2,\ \cdots,\ \lambda\,x_n)\end{aligned}\right\}\text{线性运算}$$

定义了线性运算的 R^n 称为 n 维空间, 其元素称为点或 n 维向量. x_i 称为 x 的第 i 个坐标 或 第 i 个分量.

零元 $o=(0,0,\cdots,0)$ 称为 R^n 中的坐标原点或零向量.

R^n中两点 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的**距离**定义为

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \overset{\text{记作}}{=\!=} \rho(x,y) \text{ 或 } \|x-y\|$$

特别, 点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 0 的**距离**为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当 $n=1,2,3$ 时, $\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

R^n中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x-a\|\to 0$, 则称 **x趋于a**,

记作 $x\to a$. ——定义"逼近"概念

设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 显然 $x\to a \Leftrightarrow x_k\to a_k$

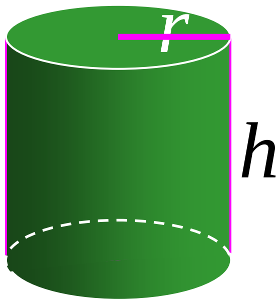
$(k=1,2,\cdots,n)$

R^n中点 a 的 **δ邻域**为 $U(a,\delta)=\{\,x\,|\,x\in R^n,\rho(x,a)<\delta\,\}$

二、多元函数的概念 /*Functions of Several Variables*/

引例.

- **圆柱体的体积**

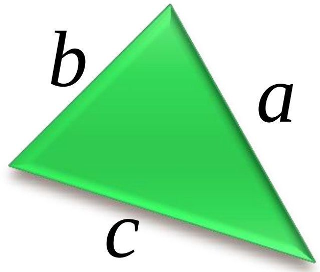


$$V=\pi r^2 h,\quad \{(r,h)\,|\,r>0,h>0\}$$

- **定量理想气体的压强**

$$p=\frac{RT}{V}\ (R\text{为常数}),\quad \{(V,T)\,|\,V>0,T>T_0\}$$

- **三角形面积的海伦公式** $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c)\,|\ a>0,b>0,c>0,a+b>c\}$$

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbf{R}$ 称为定义在 D 上的 n 元函数, 记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P),\ P \in D$$

点集 D 称为函数的定义域; 数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的值域.

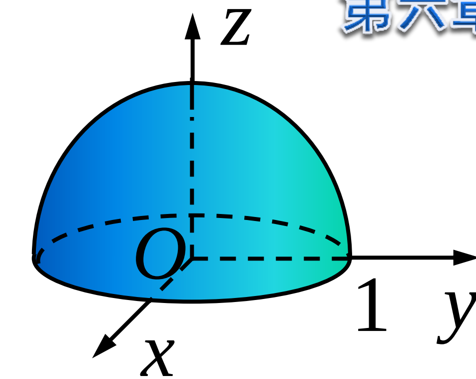
特别, 当 $n = 2$ 时, 有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

当 $n = 3$ 时, 有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbf{R}^3$$

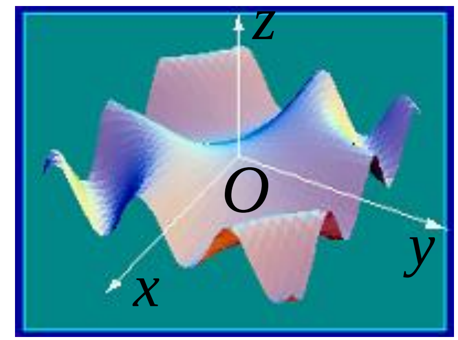
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



定义域为**圆域** $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

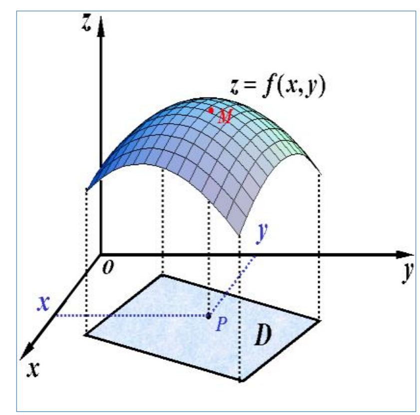
又如，$z=\sin(xy),\ (x,y)\in\mathbf{R}^2$



说明： 二元函数 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$

的图形一般为空间曲面 Σ.

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$



定义域为**单位闭球**：

$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

图形为 $\mathbf{R}^4$ 空间中的超曲面.

三、多元函数的极限

/* Limits of Functions of Several Variables*/

定义2. 设 n 元函数 $f(P)$, $P\in D\subset \mathbb{R}^n$, P_0 是 D 的**聚点**, 若存在常数 A, 对任意正数 ε, 总存在正数δ, 对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$, 都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(P)$当$P\to P_0$时的极限,记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$ (也称为 n 重极限)

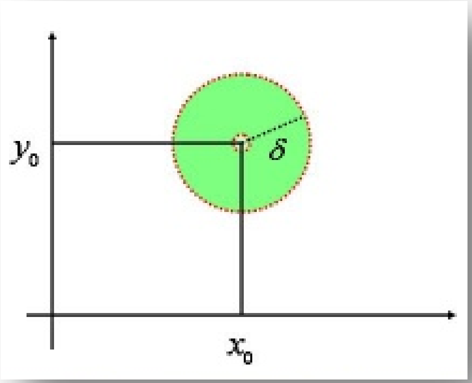
或者 $f(P)\to A,\ P\to P_0$.

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A$$

当 n =2 时, 记 $\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作(下列写法意义相同):

$$\lim_{\rho \to 0} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = A$$



二重极限存在的例子

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

在平面上的(0,0)点处

有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+1)=1$

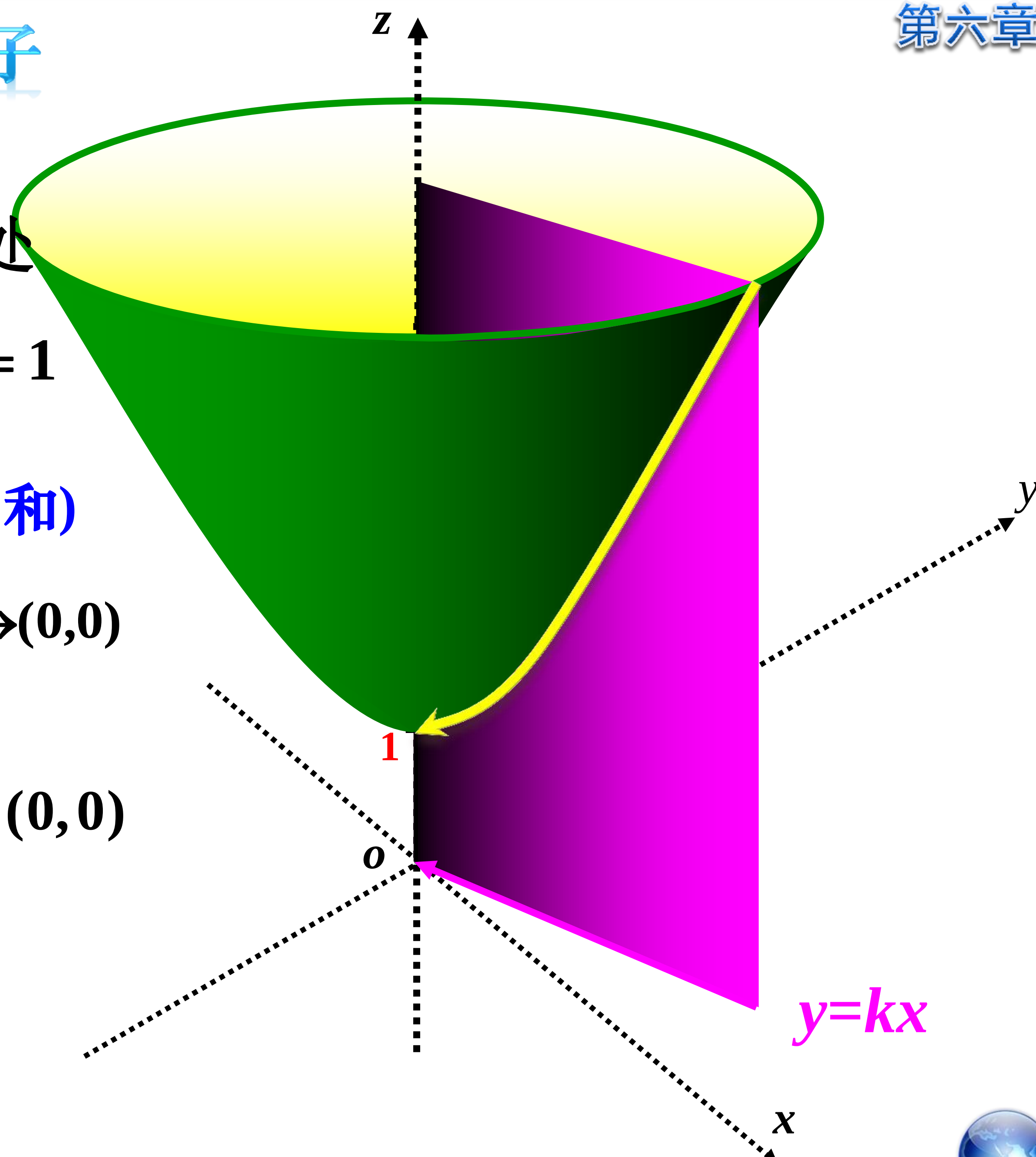
(和的极限等于极限的和)

点 $(x,y)\xrightarrow{\text{以任何方式}}(0,0)$

都有 $z\to 1$

例如$(x, y)\xrightarrow{\text{沿 } y=kx}(0,0)$

有 $z\to 1$



例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leq x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=$,

例1_注

分析: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$

$$=\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2=|PP_0|^2,\ P_0=(0,0)$$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$,

只需 $|PP_0|^2<\varepsilon$, 即 $|PP_0|<\sqrt{\varepsilon}$

即P到P_0的距离小于$\sqrt{\varepsilon}$即可,所以P_0的邻域半径应为

$$\delta=\sqrt{\varepsilon}$$

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

例1_注

证: $\because\ \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leq x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$|f(x,y)-0|\leq x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0\quad , & xy=0 \end{cases}$

求证: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left| f(x,y)-0 \right| \le \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} \right|$

$$\le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$$

要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon/2$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, **总有**

$$\left| f(x,y)-0 \right| \le 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例3.求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$. $\cdot \dfrac{\sqrt{xy+1}+1}{\sqrt{xy+1}+1}$

解: 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例4. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{xy+1}-1}{x\sin y}$.

解: $\sqrt[3]{xy+1}-1 \sim \dfrac{1}{3}xy,\quad \sin y \sim y$

原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\frac{1}{3}xy}{xy} = \dfrac{1}{3}$ $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x \quad (x\to 0)$

例5. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

解: $1-\cos(x^2+y^2) \sim \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2$,

$$\text{原式} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}$$

例6. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

解1: 令 $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$

$$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0$$

$$原式 = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

例6. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

解2: $\left|x^2 y\right| \le \dfrac{|x|}{2}(x^2+y^2)$

$$0 \leftarrow 0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|}{2} \to 0$$ (夹逼准则…)

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

例6. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

解3: $0 \le \left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}.y\right| \le |y| \to 0$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}=0.$

注1: 若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数**趋于不同值**或**有的极限不存在**, 则可以断定: 函数**极限不存在**.

例7. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0), 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2+k^2\cancel{x}^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同！

故 $f(x,y)$ 在 (0, 0) 点极限不存在.

例7几何说明

$$z=\frac{xy}{x^2+y^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

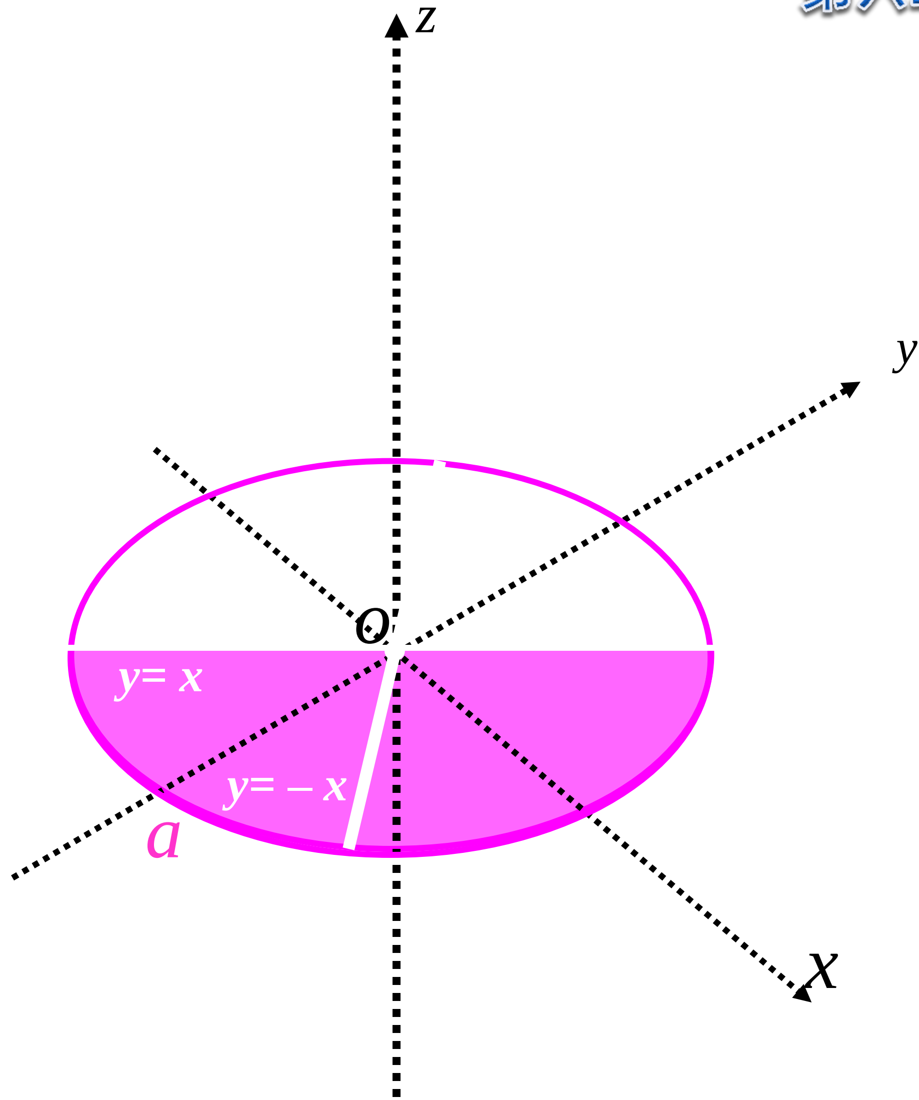
点$P(x,y)$沿直线 $y=kx$

$\rightarrow(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在

那么,曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢?



曲面与z轴无交点;

曲面关于平面 $y=x$对称;

曲面关于平面 $y=-x$对称;

例7几何说明

$$z=\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

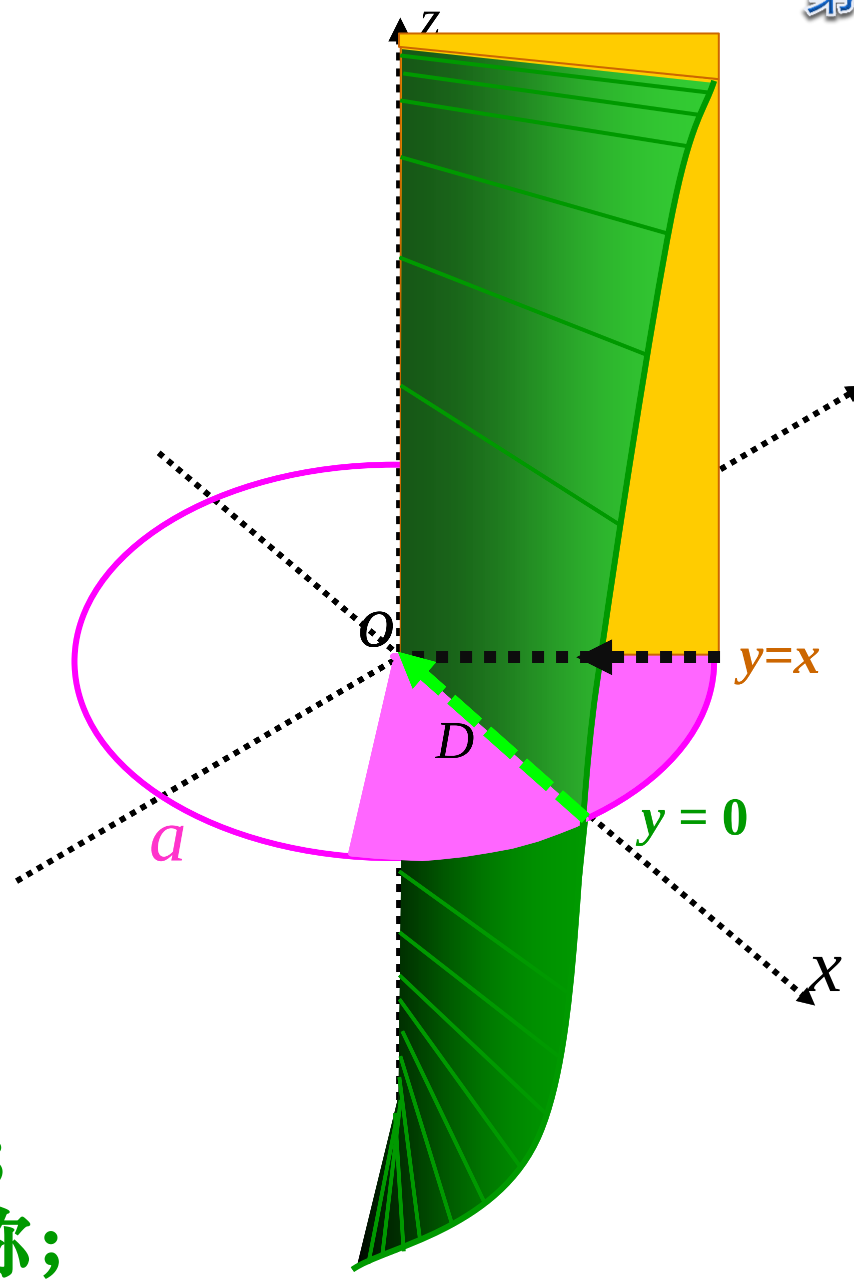
点$P(x,y)$沿直线 $y=kx$

$\to(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在

那么,曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢?



曲面与z轴无交点;

曲面关于平面 $y=x$对称;

曲面关于平面 $y=-x$对称;

例7几何说明

$$z=\frac{xy}{x^2+y^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

点$P(x,y)$沿直线 $y=kx$

$\to(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

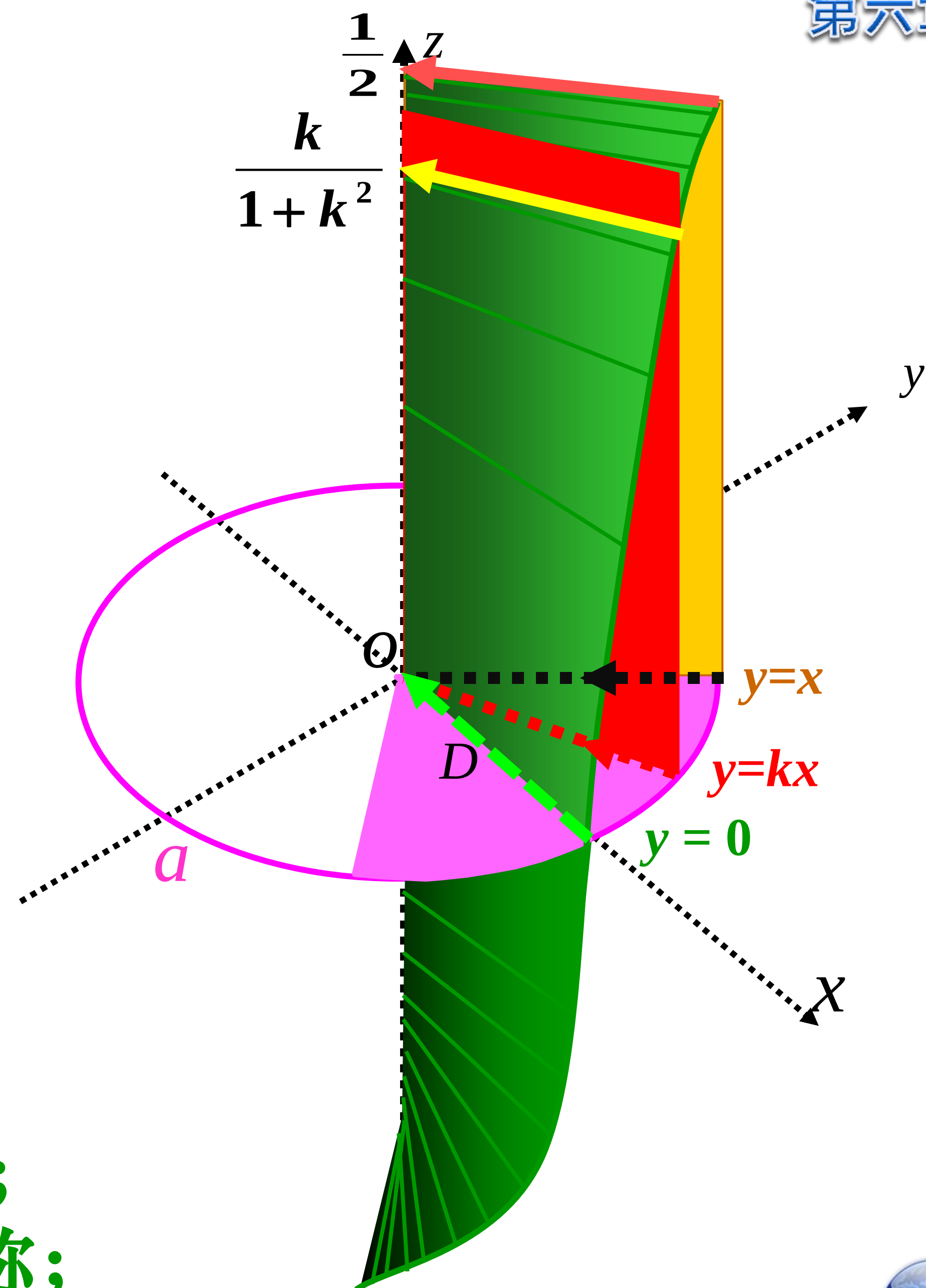
故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在

那么,曲面在点(0,0)附近的形状是怎样的呢?

曲面与z轴无交点;

曲面关于平面 $y=x$对称;

曲面关于平面 $y=-x$对称;



注2: 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \text{ 及 } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ 不同.}$$

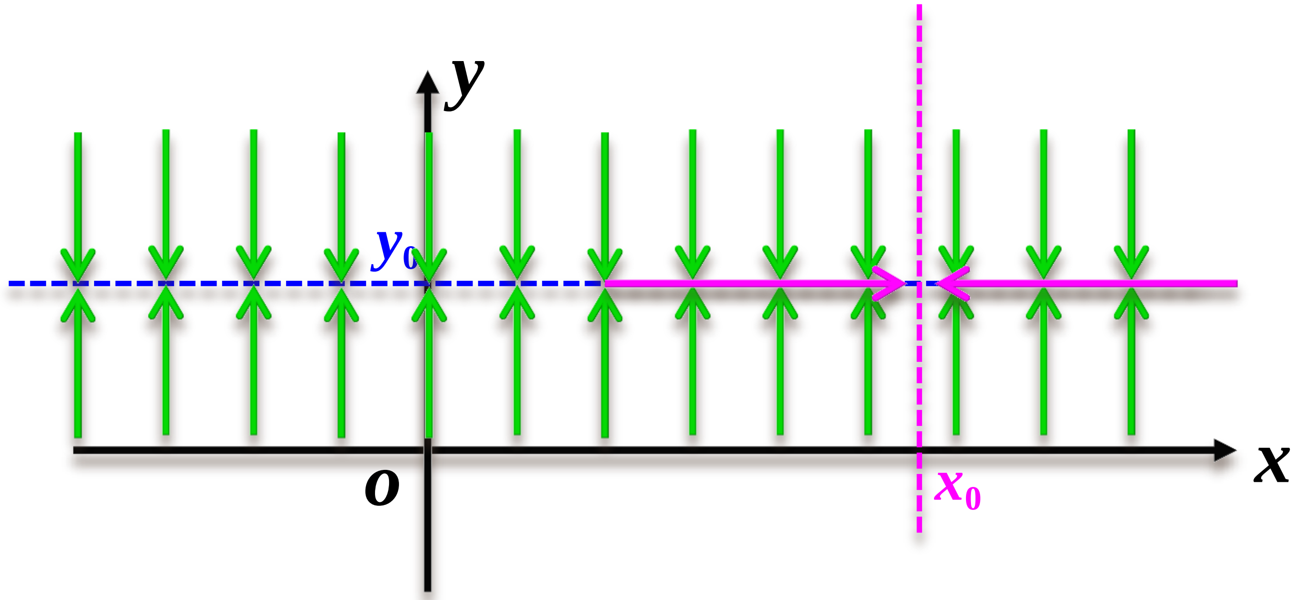
注意: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

☆如果它们都存在, 则三者相等.

☆仅知其中之一或之二存在, 推不出其他存在.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$



例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 显然

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=0$$

但由例7 知它在(0, 0)点二重极限不存在.

又如，$f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{xy}$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{xy}=\lim_{x\to 0} x\left(\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{xy}\right)$$ 不存在

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{xy}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{xy}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{xy}=0$$

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{xy}\right|\le|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{xy}\right|\le|x|\to 0$$

四、多元函数的连续性

定义3. 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上，聚点 $P_0 \in D$，如果

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 **连续**，否则称为**不连续**. 不连续的点称为**间断点**.

如果函数在 D 上**各点处都连续**，则称此函数**在 D 上连续**.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0, 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

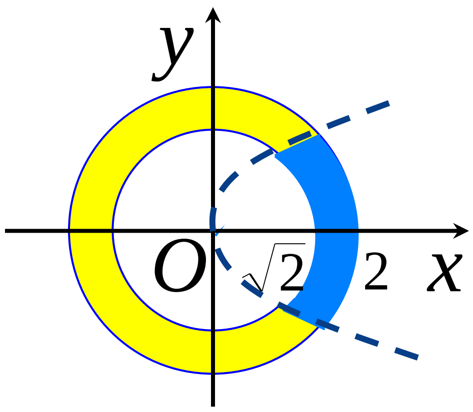
又如, 函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论：一切多元初等函数在定义区域内连续.

例8. **求函数** $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ **的连续域.**

解: $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$$

例9. **求极限** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\left[\ln(y-x)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right].$

解: (0,1)为连续点,故

$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\ln(y-x)+\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\ln(1-0)+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}=1$$

闭区域上多元连续函数有与一元函数类似的性质:

性质1. (有界性与最大值和最小值定理)

在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界, 且能取得它的最大值和最小值. 即

(1) $\exists K > 0$, 使 $|f(P)| \le K$, $P \in D$;

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m.

(证明略)

闭区域上多元连续函数有与一元函数类似的性质:

性质2.（介值定理）

在有界闭区域D上的多元连续函数, 必定取得介于最大值和最小值之间的任何值. 即

对任意 $\mu\in[m, M]$, $\exists\, Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$. (证明略)

内 容 小 结

1. 区域

- **邻域:** $U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- **区域** —— **连通的开集**
- $\mathbf{R}^n$空间

2. 多元函数概念

***n* 元函数** $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$P \in D \subset \mathbf{R}^n$$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数（图形一般为空间曲面）} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |PP_0| < \delta \text{时},$$
$$\text{有} |f(P) - A| < \varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理; 最值定理; 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续