练习(3分)若D表示圆域 $x^2+y^2\le 1$,则$\iint_D (5x+6y)\mathrm{d}\sigma$=[D]

A. 11;　B. 1;　C. -1;　D. 0

§7_1_2 二重积分的计算法

一、曲顶柱体体积的计算(二重积分几何意义)

二、直角坐标系下二重积分的计算

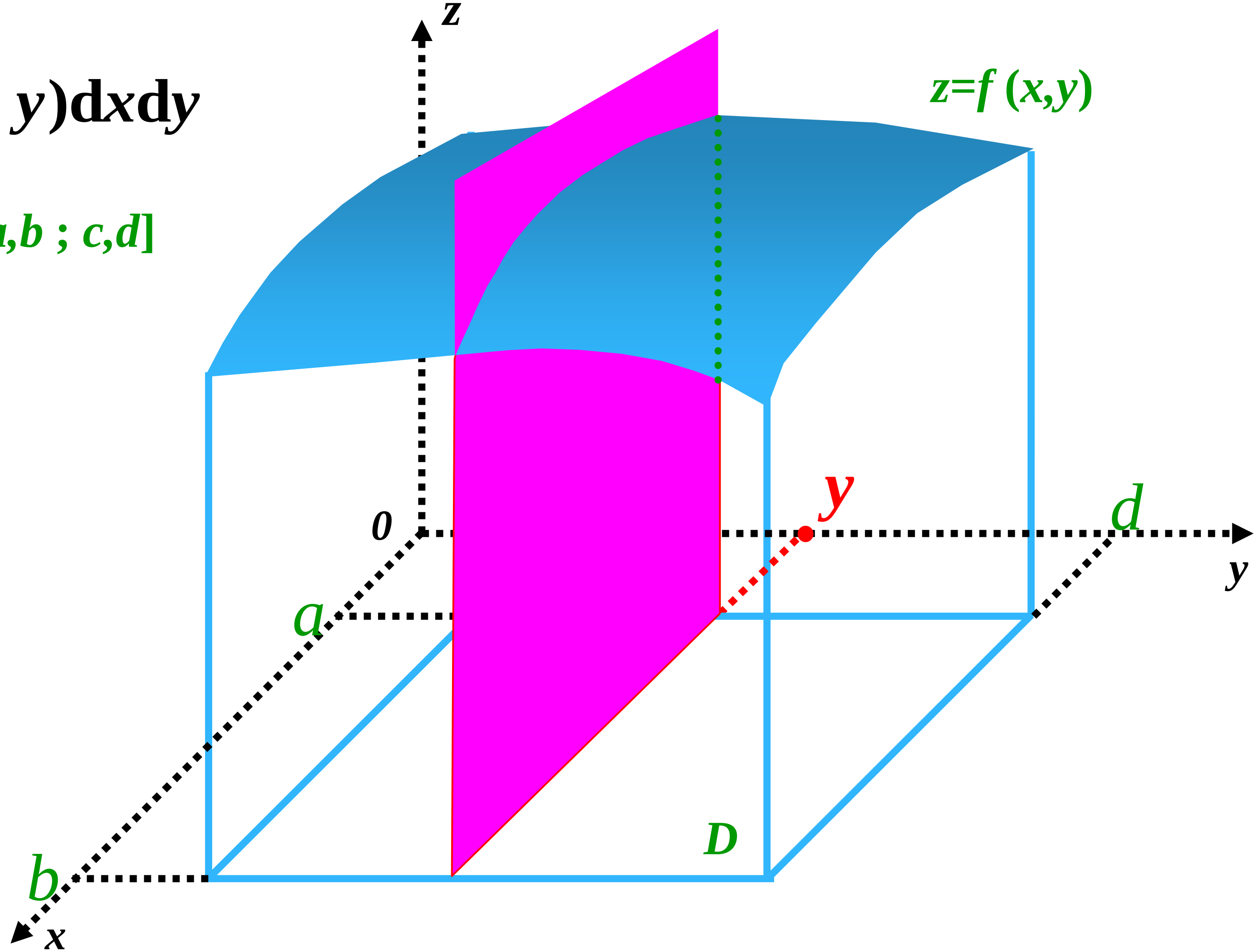
三、极坐标系下二重积分的计算

*四、二重积分的换元法

一、曲顶柱体体积的计算

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D是矩形区域 [a,b ; c,d]



一、曲顶柱体体积的计算

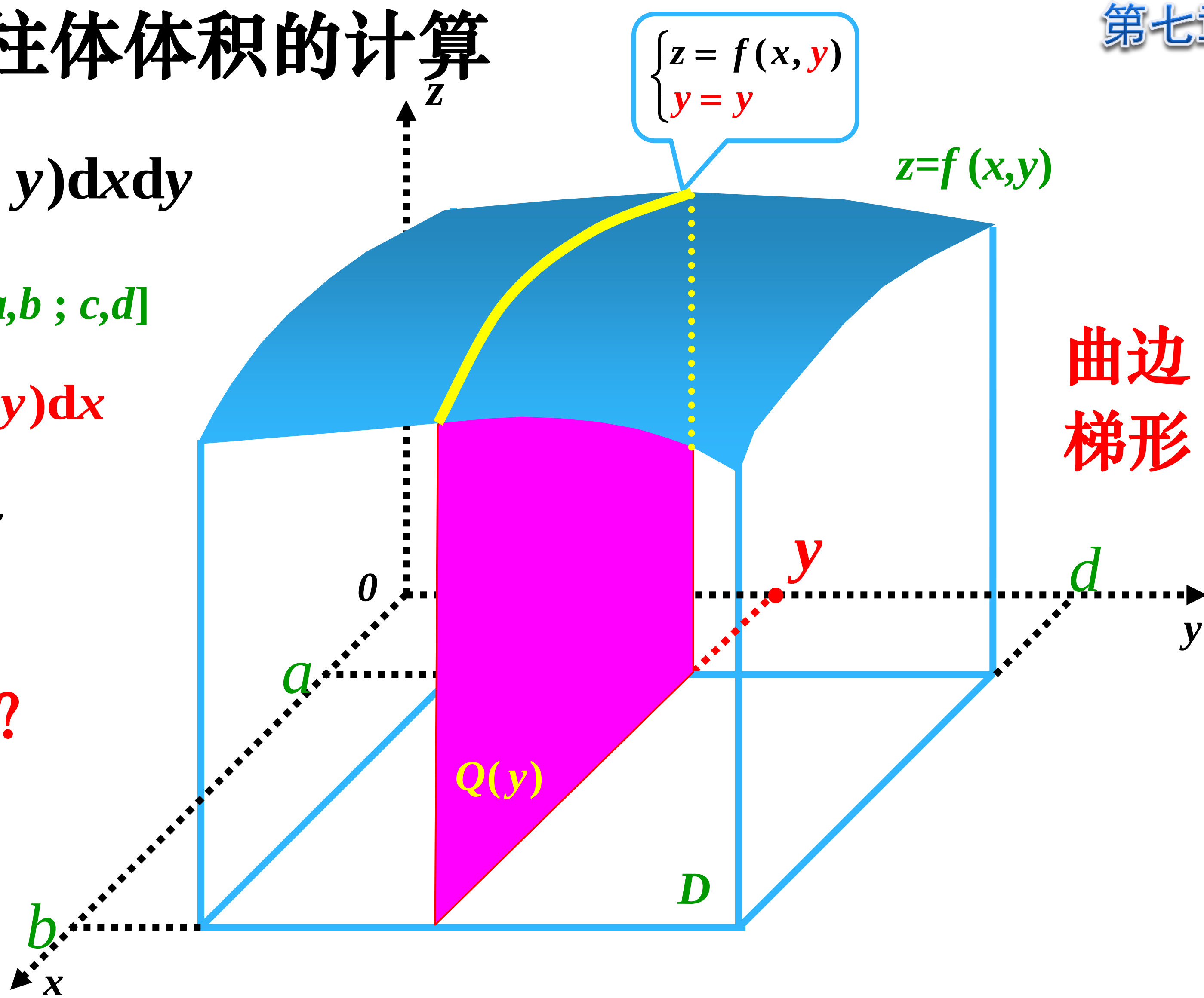
$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D是矩形区域 $[a,b\,;\,c,d]$

$$Q(y) = \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$I = \int_c^d Q(y)\mathrm{d}y$$

问题：$Q(y)$ 是什么图形?



曲边梯形

一、曲顶柱体体积的计算

$$I=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

$$I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

D是矩形区域 [a,b ; c,d]

$$Q(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

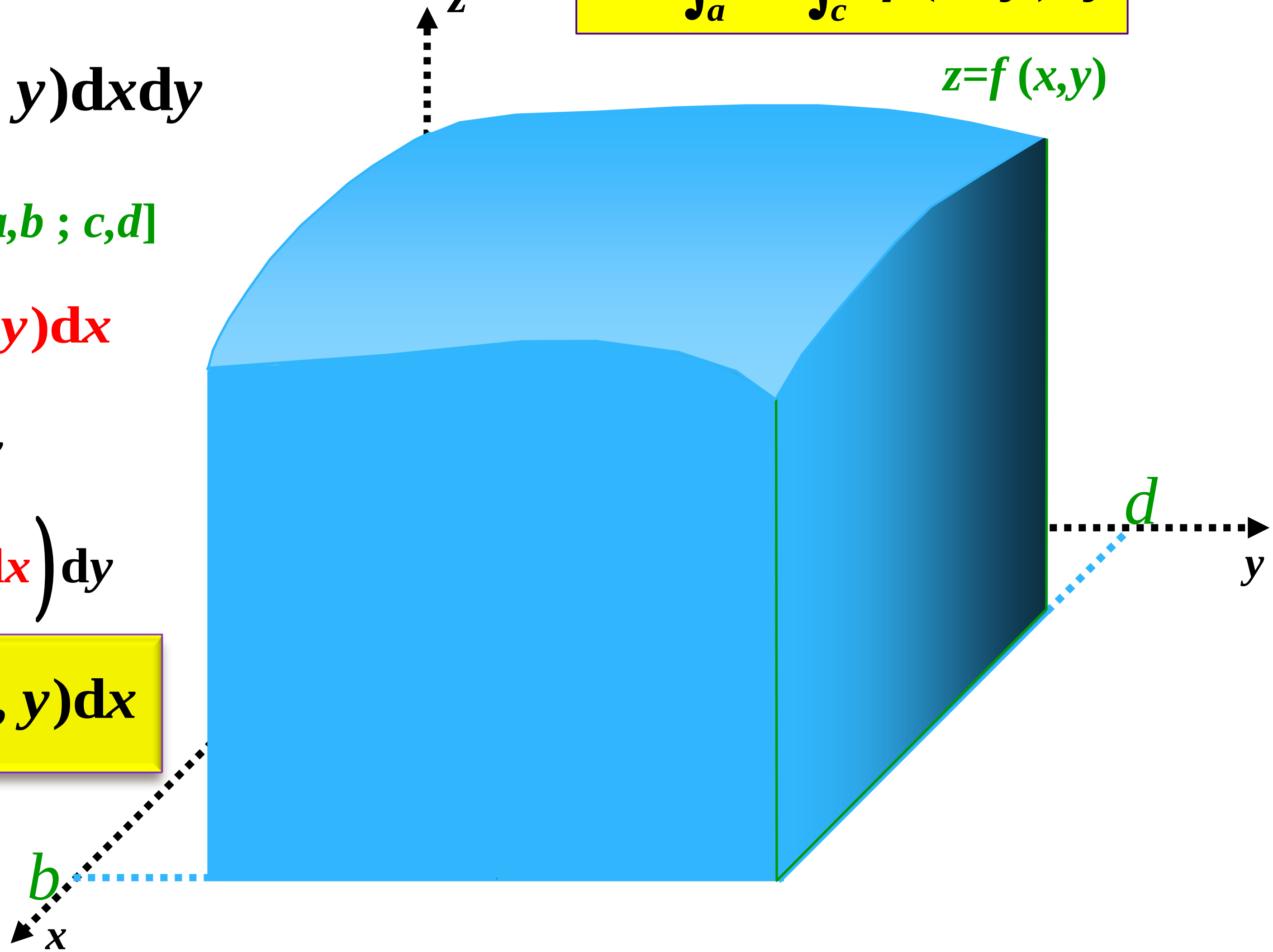
$$I=\int_c^d Q(y)dy$$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

$$=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

同理也可以

先对 y 积分

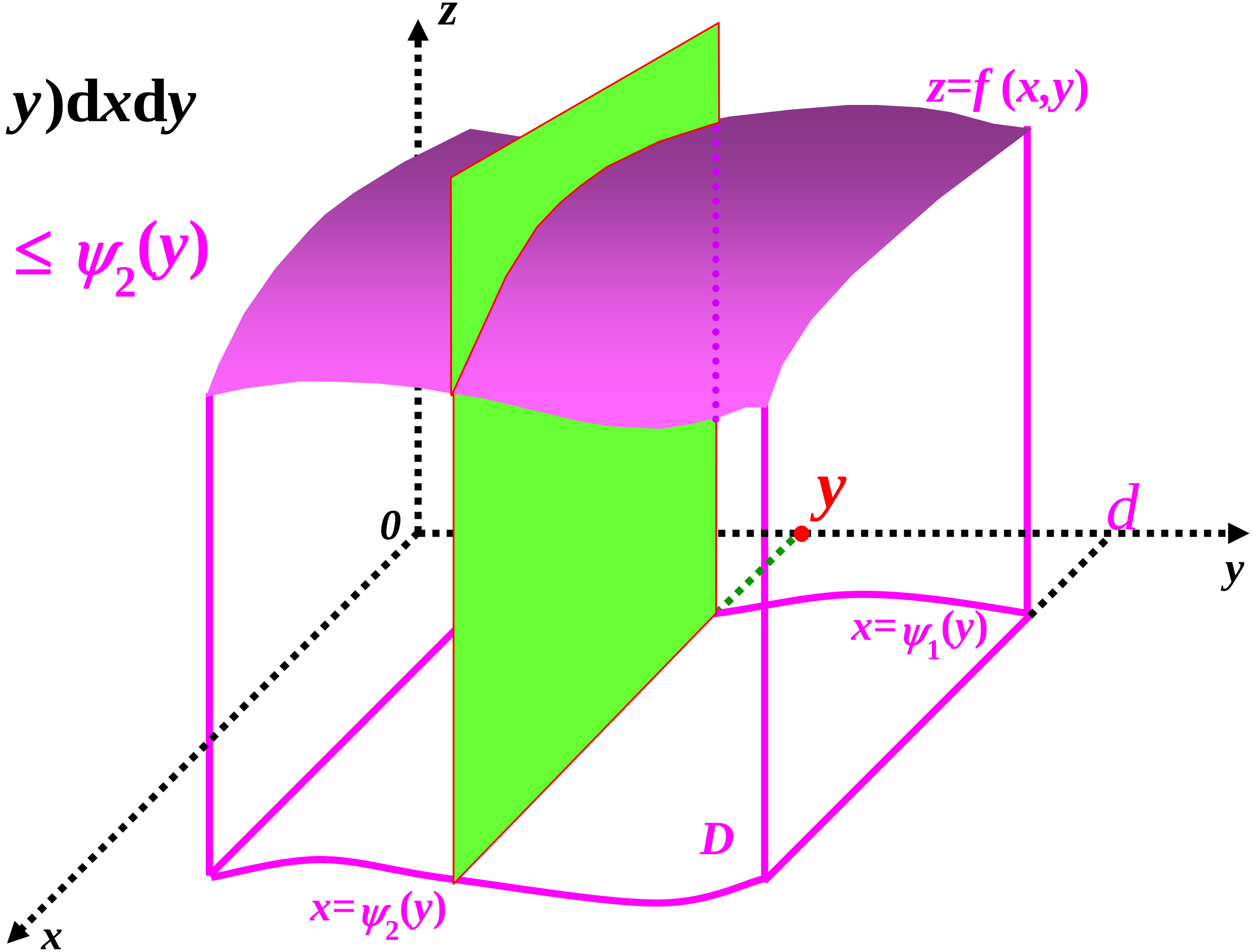


一、曲顶柱体体积的计算 —D是曲线梯形区域

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$D:\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)$

$c\le y\le d$



一、曲顶柱体体积的计算 ——D是曲线梯形区域

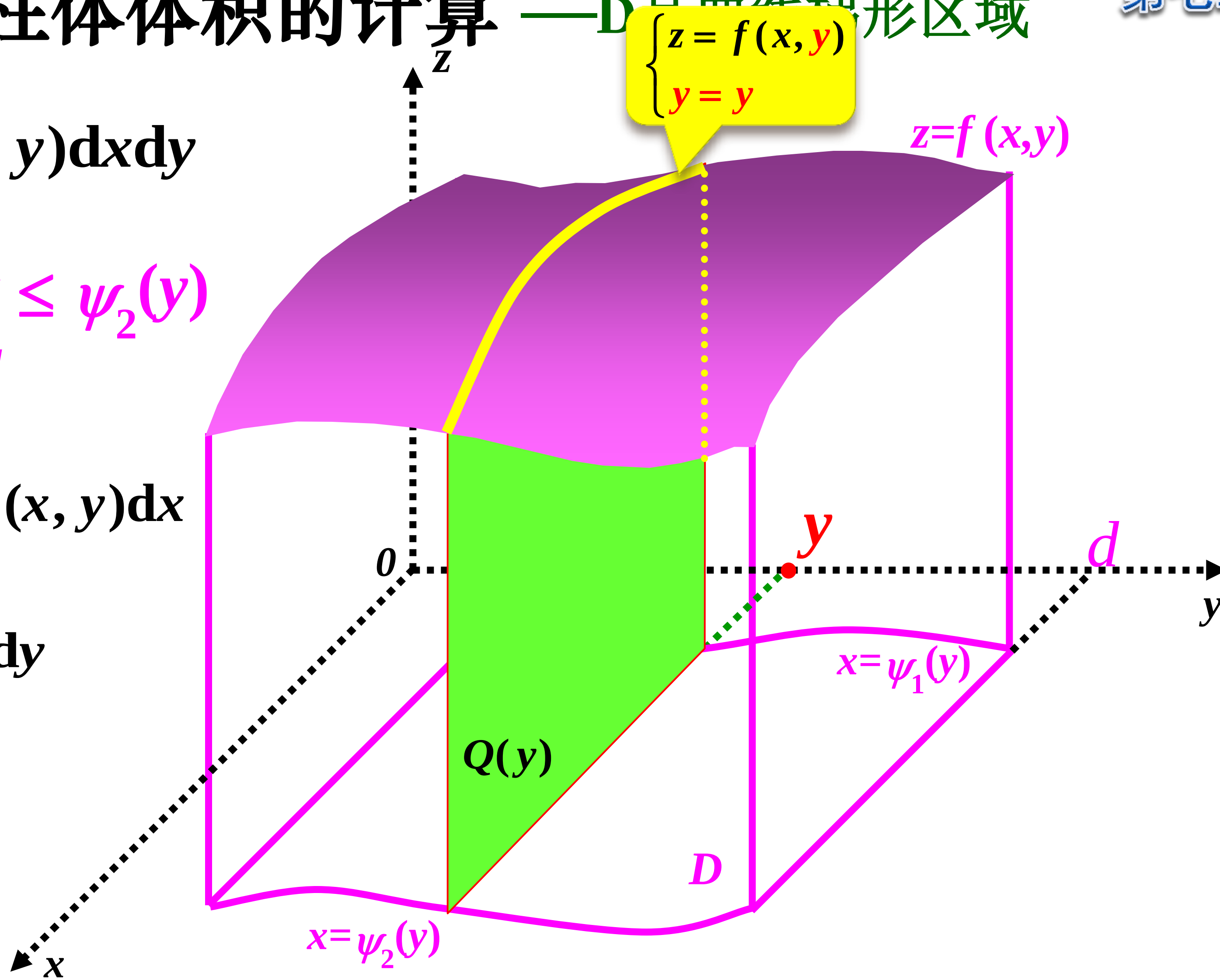
$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D: $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$

$c\le y\le d$

$$Q(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$I=\int_c^d Q(y)\mathrm{d}y$$



问题：$Q(y)$是什么图形？　　也是曲边梯形！

一、曲顶柱体体积的计算 —D是曲线梯形区域

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

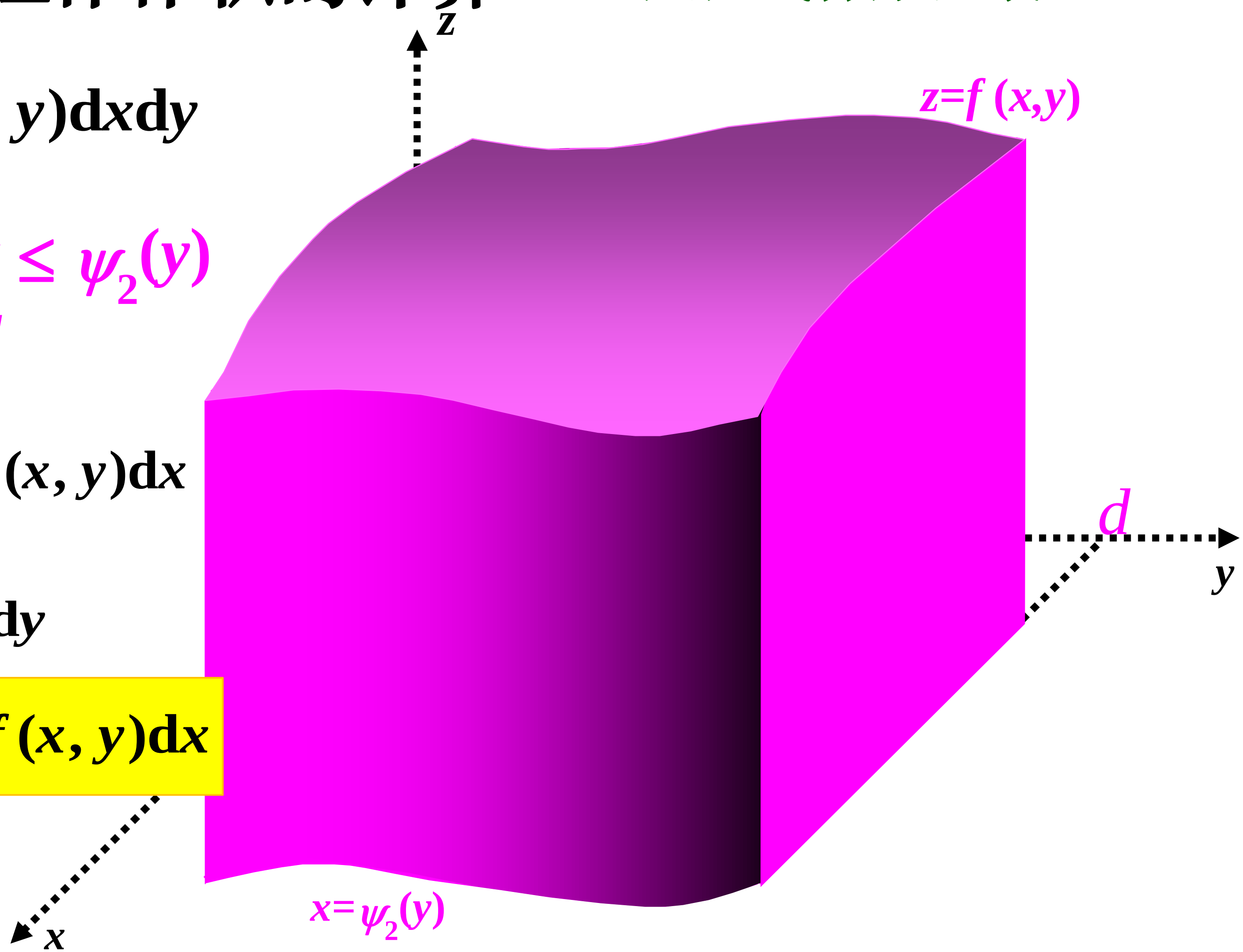
D: $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$

$c\le y\le d$

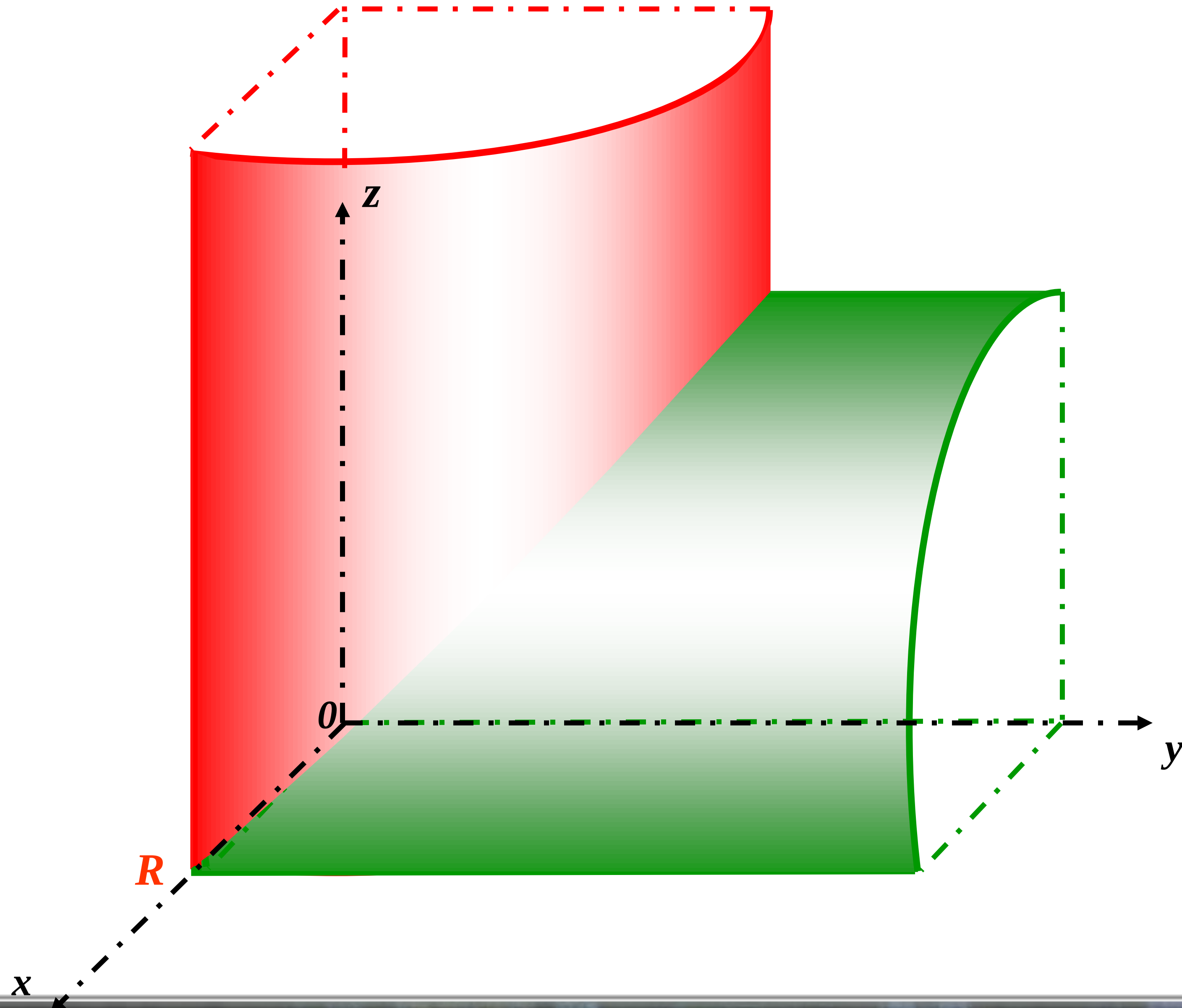
$$Q(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$I=\int_c^d Q(y)\mathrm{d}y$$

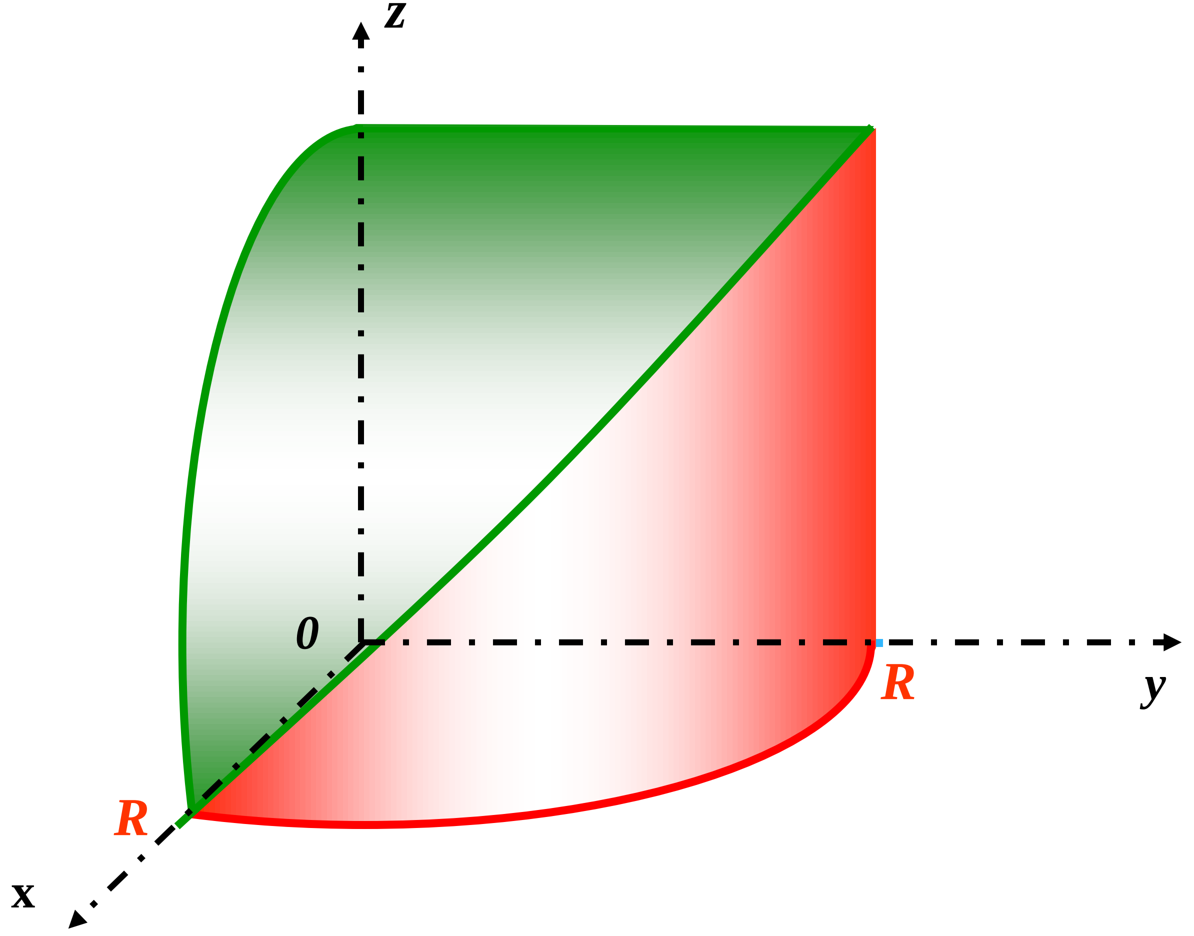
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$



例1. 求两个底圆半径为R 的直交圆柱面所围的体积.



例1. 求两个底圆半径为R 的直交圆柱面所围的体积.



例1. 求两个底圆半径为 R 的直交圆柱面所围的体积.

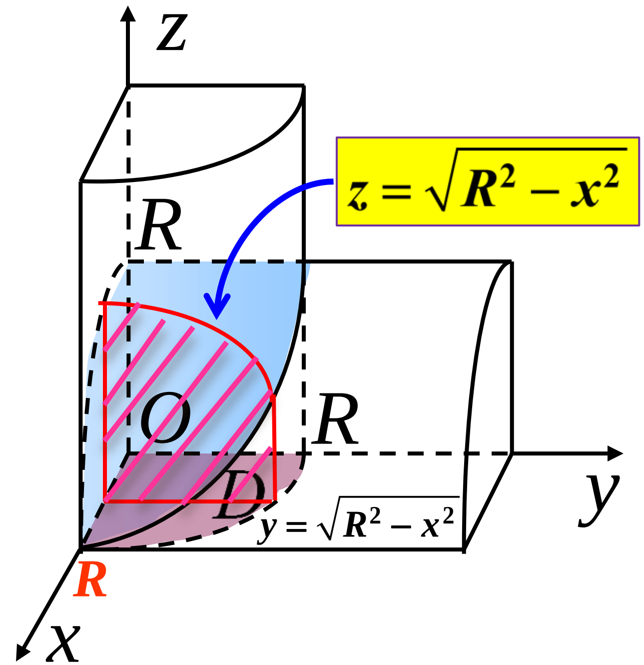
解: 设两个圆柱面的方程为

$$x^2+y^2=R^2,\quad x^2+z^2=R^2$$

利用对称性, 考虑第一卦限部分,

其曲顶柱体的顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2}$

$$(x,y)\in D:\begin{cases}0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\\0\le x\le R\end{cases}$$



则所求体积为

$$V=8\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}y=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}R^3$$

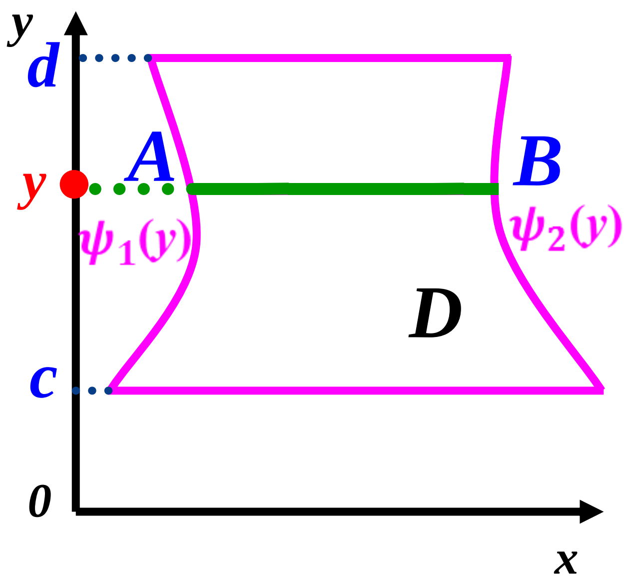
二、利用直角坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

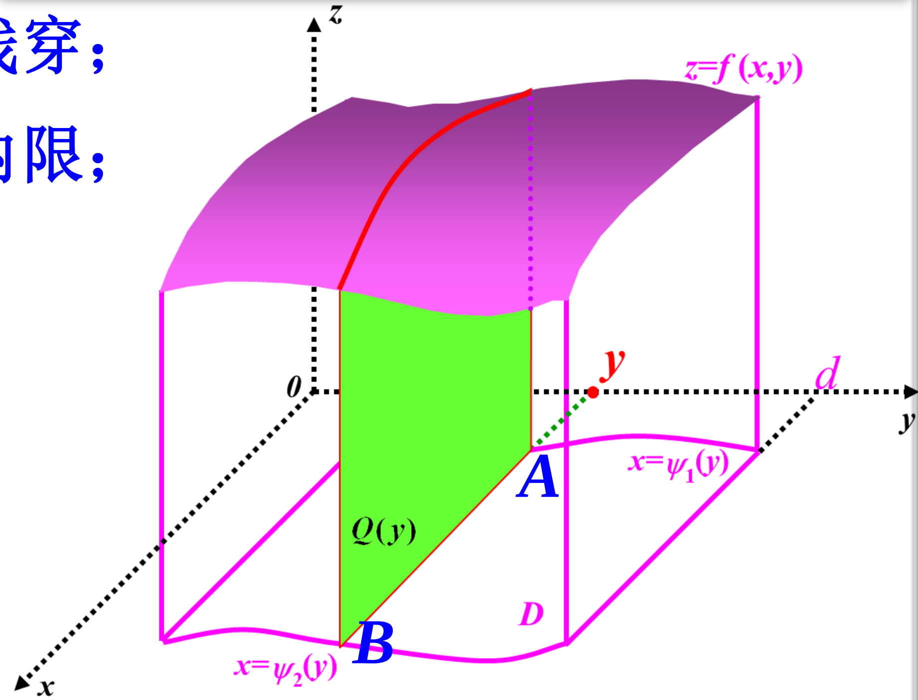
1、二重积分计算的两种积分顺序

当被积函数 $f(x,y)\geq 0$
(不变号)且在D上连续时

D: $\psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)$
$c\leq y\leq d$



域内一线穿；
两点定内限；



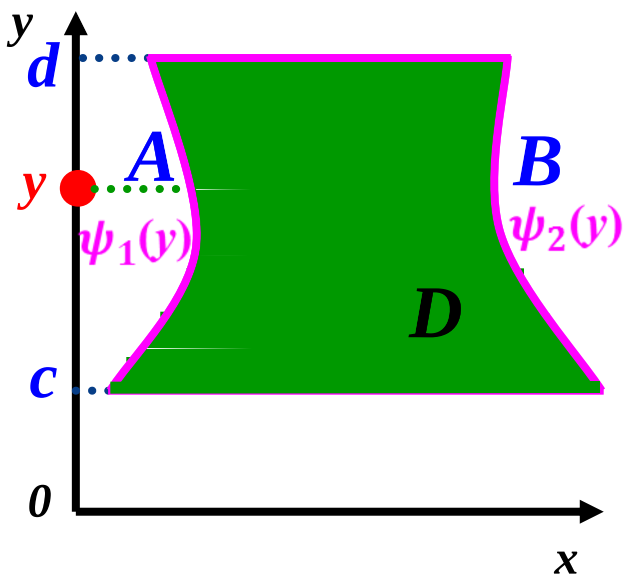
$$I=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

二、利用直角坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1、二重积分计算的两种积分顺序

$$D:\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$$
$$c\le y\le d$$

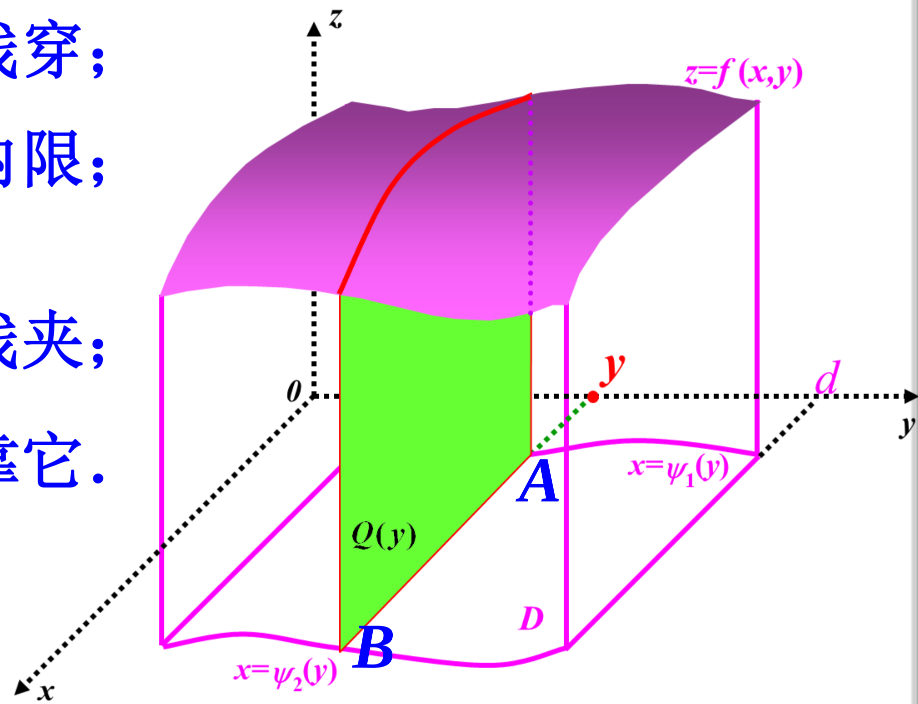


域内一线穿；

两点定内限；

域边两线夹；

外限依靠它.



$$I=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

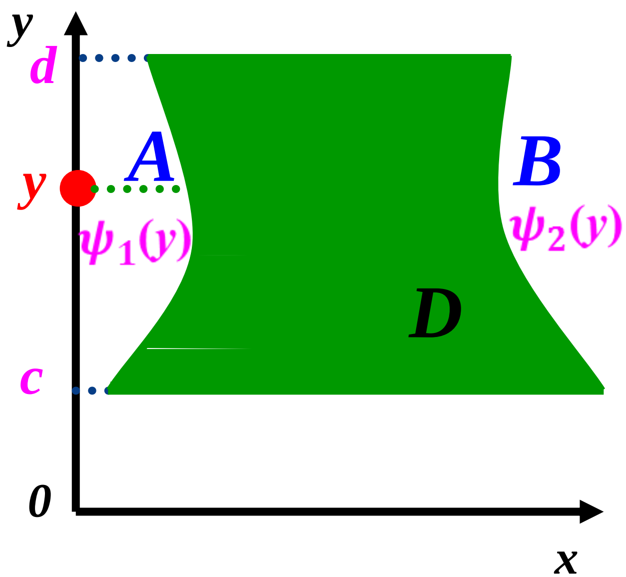
二、利用直角坐标计算二重积分

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

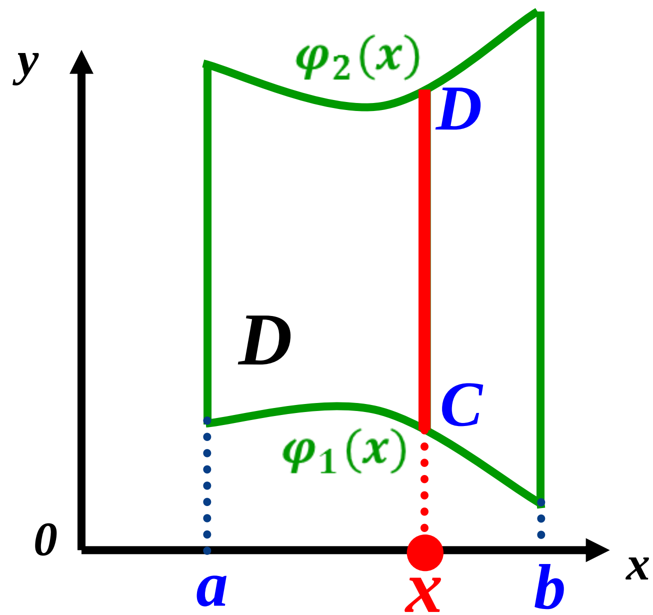
1、二重积分计算的两种积分顺序

D: $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$
$c\le y\le d$

D: $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$
$a\le x\le b$



域内一线穿；
两点定内限；
域边两线夹；
外限依靠它.



$$I=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$I=\quad\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

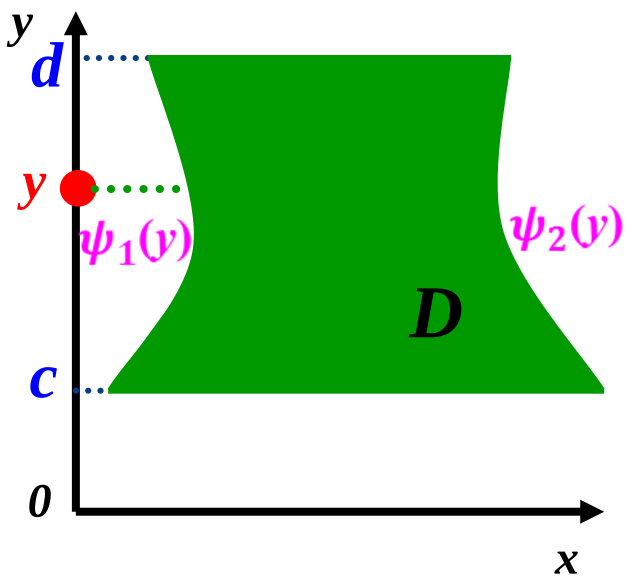
二、利用直角坐标计算二重积分

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

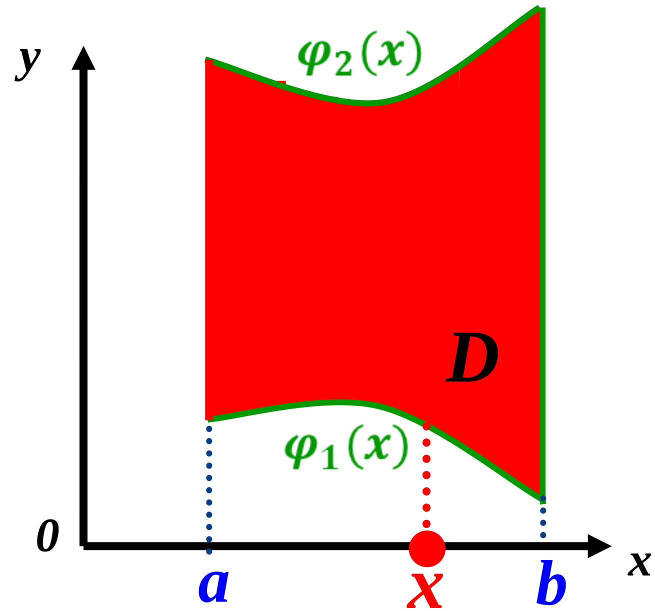
1、二重积分计算的两种积分顺序

D: $\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)$, $c\le y\le d$

D: $\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)$, $a\le x\le b$



域内一线穿；
两点定内限；
域边两线夹；
外限依靠它.



$$I=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$I=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

二、 ... dxdy

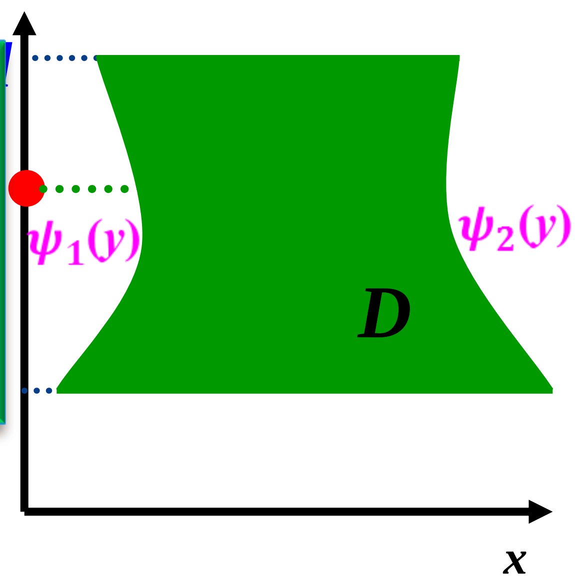
1、二 ...

特点：内层积分限是外层积分变量的函数，外层积分限是常数。

D: $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$

D: $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$

Y型区域

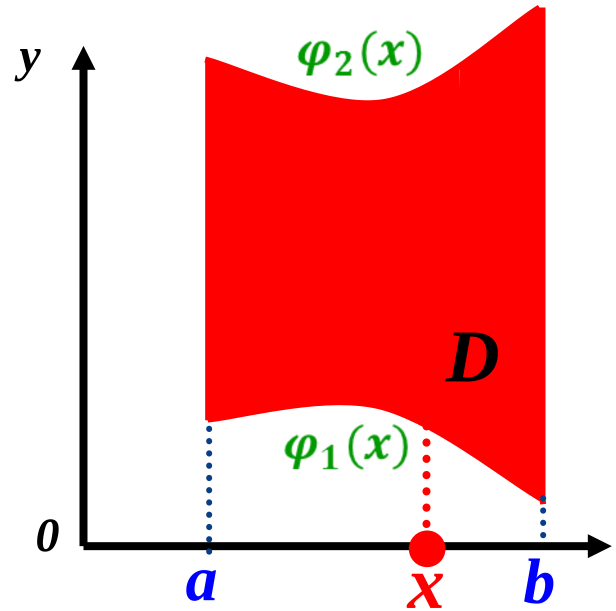


域内一线穿；

两点定内限；

域边两线夹；

外限依靠它.



X型区域

$$I = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad I = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

当被积函数 $f(x,y)$ 在 D 上变号时, 由于

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{f(x,y)+\left|f(x,y)\right|}{2}}_{f_1(x,y)}-\underbrace{\frac{\left|f(x,y)\right|-f(x,y)}{2}}_{f_2(x,y)}$$

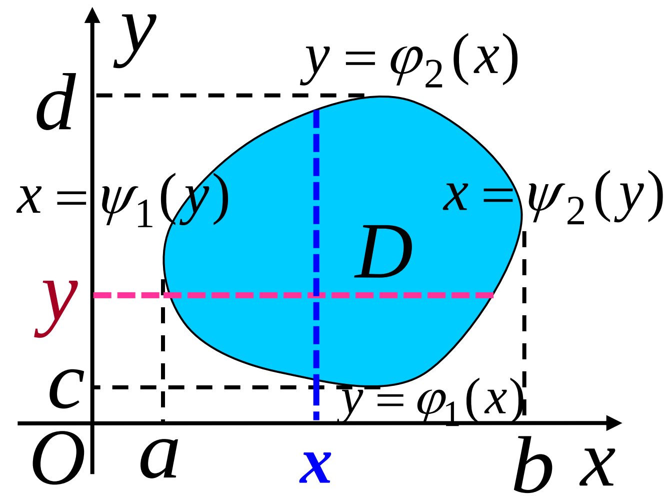
均非负

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此上面讨论的累次积分法仍然有效.

说明: (1) 若积分区域既是 X - 型区域又是 Y - 型区域,

则有
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



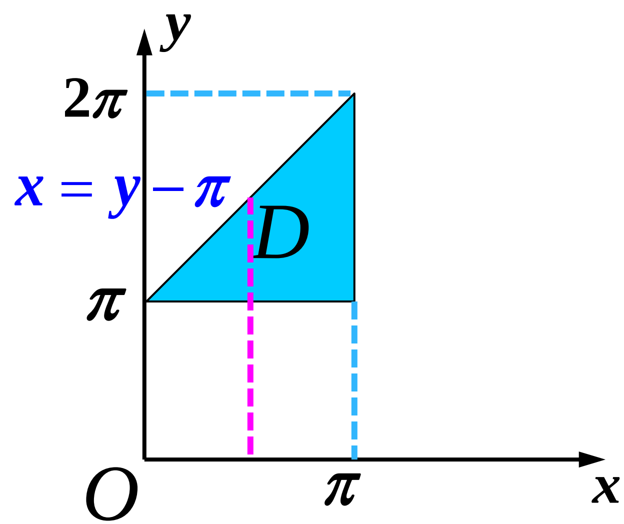
为计算方便,可**选择积分序**, 必要时还可以**交换积分序**.

练习1(3分) 二次积分 $\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的另一种积分次序?

练习1(3分)二次积分$\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$的另一种积分次序?

$$\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int_{y-\pi}^{\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

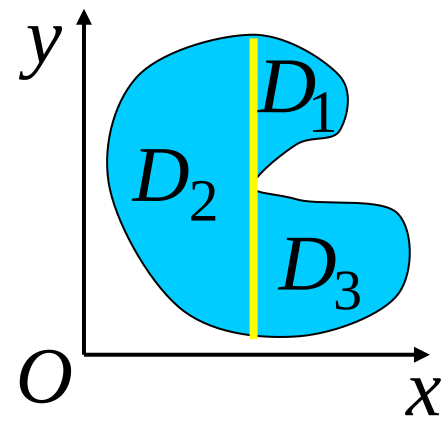
$$=\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi}^{x+\pi}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$



练习2(3分)二次积分$\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{3\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$的另一种积分次序?

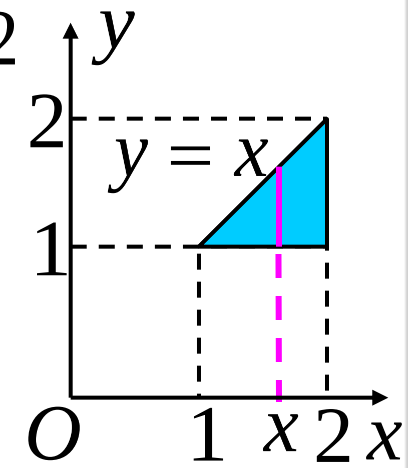
说明:(2) 若积分域较复杂, 可将它分成若干 X-型域或 Y-型域，则

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$



例2. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1 将D看作X - 型区域, 则 $D:\begin{cases}1\le y\le x\\ 1\le x\le 2\end{cases}$

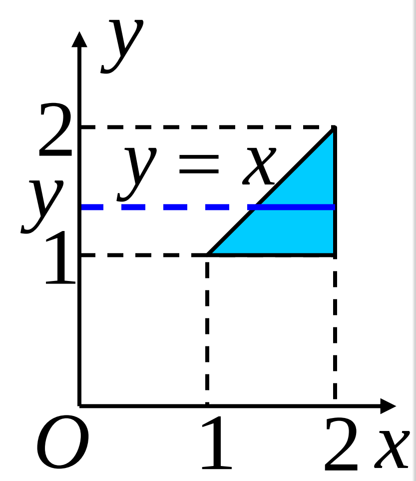


$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

例2. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是直线 $y=1$, $x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

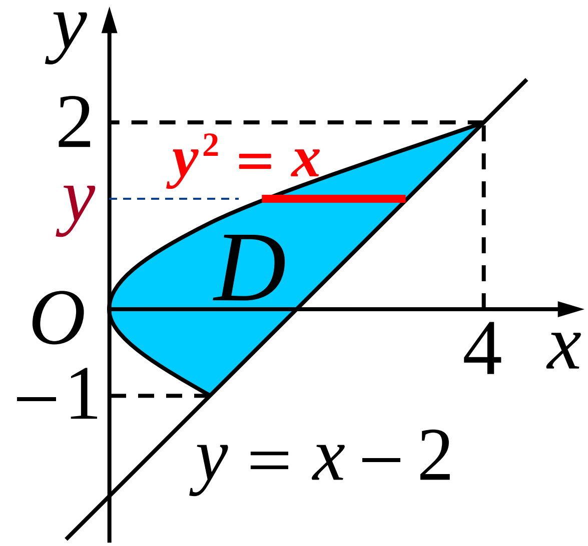
解法2 将 D 看作 **Y - 型区域**, 则 $D:\begin{cases} y\le x\le 2 \\ 1\le y\le 2\end{cases}$



$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解: 为计算简便, 先对 x 后对 y 积分,

则 $$D: \begin{cases} y^2 \le x \le y + 2 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}$$

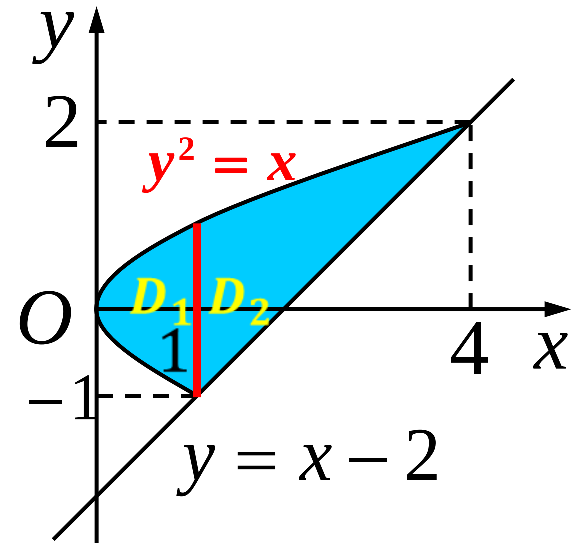
$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y+2} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{2} x^2 y\right]_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} [y(y+2)^2 - y^5]\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3}y^3 + 2y^2 - \frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2} = \frac{45}{8}$$

例3. 计算 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$ 是抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.

解二: 若先对 y 后对 x 积分,



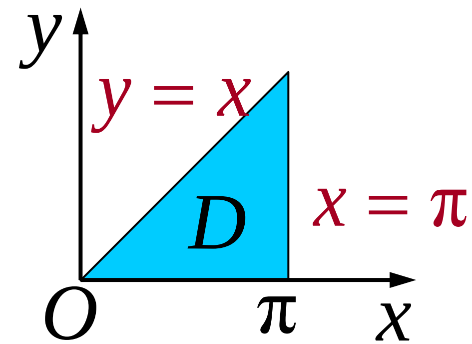
则 $D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ x - 2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y}_{0} + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{45}{8}$$

例4. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x,\ y=0,$ $x=\pi$ 所围成的闭区域.



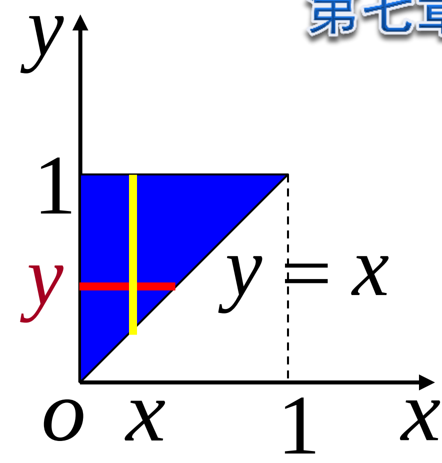
解: 由积分区域,先对谁积分均可;
但由被积函数可知,先对 x 积分不行,

因此取D 为X - 型域: $D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \pi \end{cases}$

$$\therefore \iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

说明: 有些二次积分为了积分方便, 还需交换积分顺序.

例5. 填空 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{d}y = (\qquad)$.

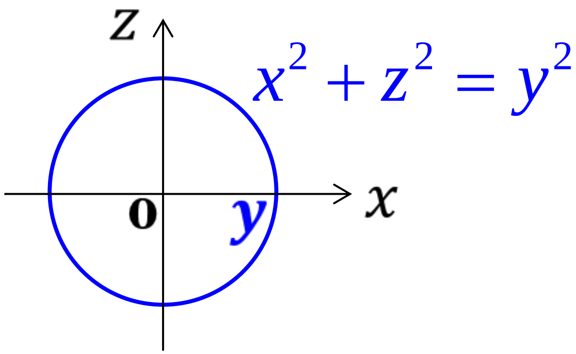


解: 原式$=\iint\limits_D \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ D 如图:

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

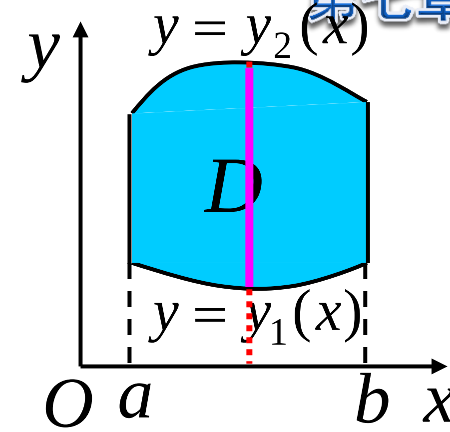
$$= \int_0^1 \frac{1}{4}\pi y^2 \,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{12}.$$



注: $\int_0^y \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi y^2$ (半径为 y 的1/4圆的面积).

内容小结



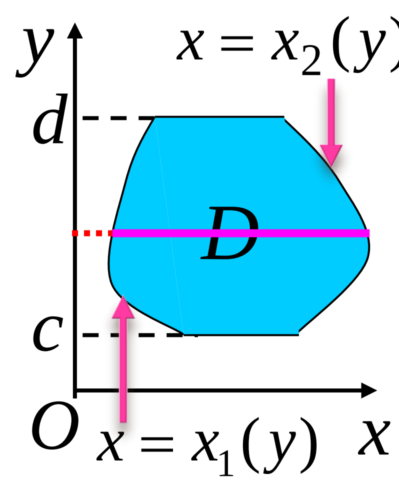
(1) 二重积分化为二次积分的方法

直角坐标系情形:

- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$



- 若积分区域为

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

则 $$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

(2) 计算步骤及注意事项

结合积分域和被积函数的特征,选择坐标系

确定积分序及积分限:

域内一线穿,　两点定内限.

域边两线夹,　外限依靠它.

注意利用对称性.