空间直线及其方程

/*Space Lines*/

一、空间直线方程

二、点、直线与平面的关系

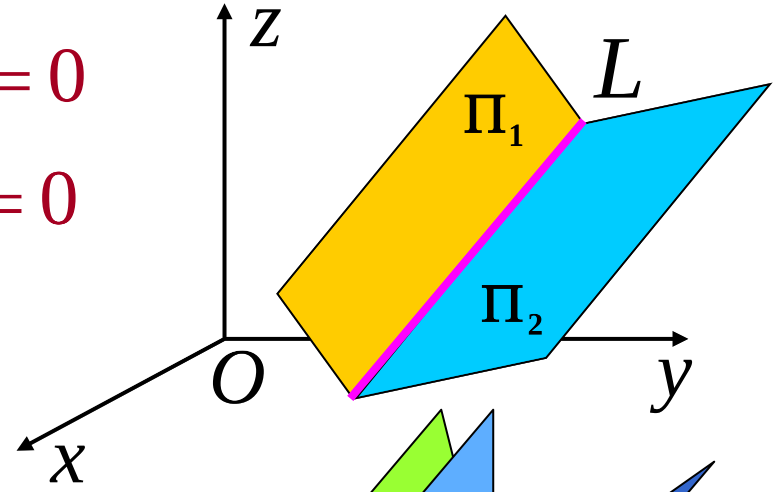
三、有轴平面束

一、空间直线方程

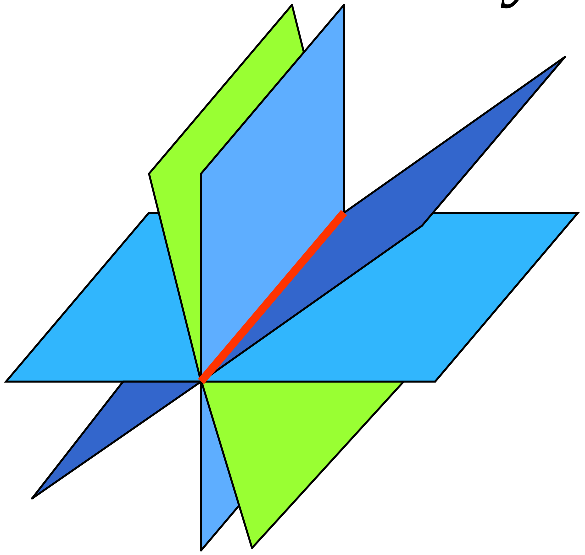
1. 一般式方程

直线可视为两平面交线, 因此其一般式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

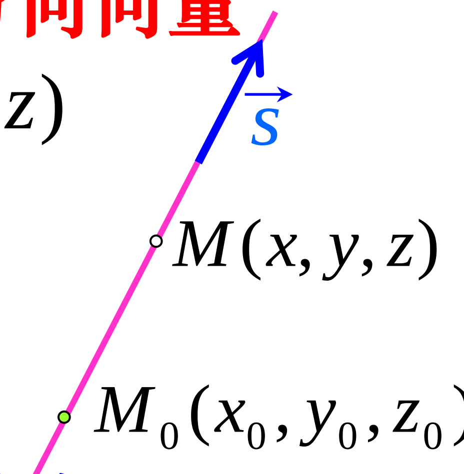


注: 此表示法不唯一
且两平面不平行.



2. 对称式 (点向式)方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的方向向量 $\vec{s}=(m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$



则 $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$

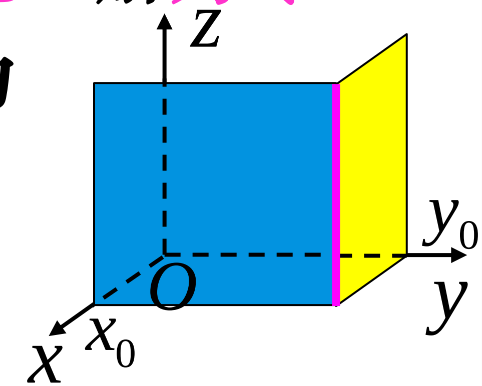
故有 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程(也称为点向式方程)

说明: 方程中某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m=n=0,\ p\neq 0$ 时, 直线方程为

$$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$$

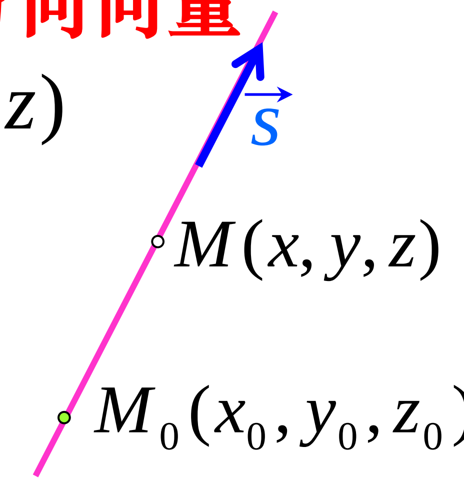


2. 对称式 (点向式)方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的**方向向量** $\vec{s}=(m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$

则 $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$

故有 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$



一般式方程 ⇒对称式方程

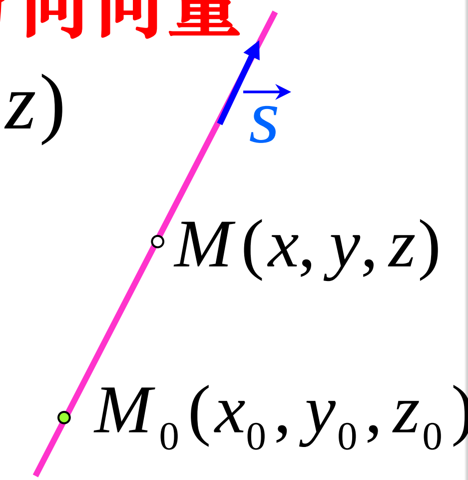
$$\vec{s}=(m, n, p)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

2. 对称式 (点向式)方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的**方向向量** $\vec{s}=(m, n, p)$, 设直线上的动点为 $M(x, y, z)$



则 $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{s}$

故有
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

得**对称式方程**

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

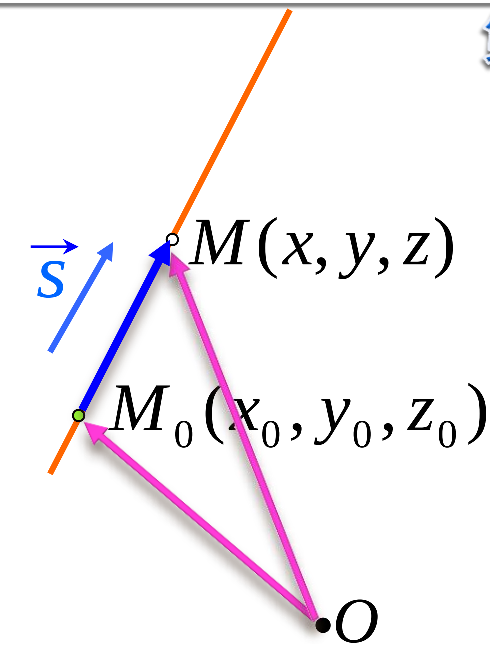
$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$$

3. 参数式方程

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$

得参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$



$$\overrightarrow{M_0M} = t\cdot\vec{s}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\cdot\vec{s}$$

向量方程

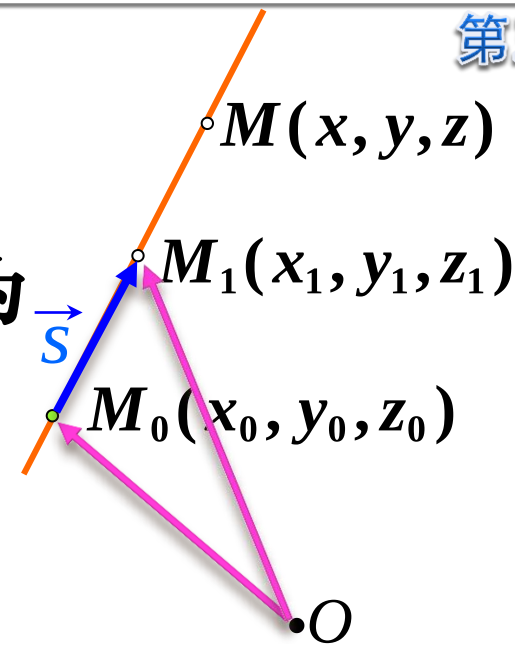
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\cdot(m, n, p)$$

4. 两点式方程

已知直线上两点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则直线的**方向向量**取为

$\vec{s} = (x_1 - x_0\,, y_1 - y_0\,, z_1 - z_0)$,

得直线的两点式方程为



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

例1.用对称式及参数式表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解:先在直线上找一点(试一试).

亦可令$x=0$或$x=-1$

令 $x=1$, 解方程组 $\begin{cases} y+z=-2 \\ y-3z=6 \end{cases}$,得 $y=0,\ z=-2$

故$(1,0,-2)$是直线上一点.

再求直线的方向向量 $\vec{s}$.

交已知直线的两平面的法向量为 $\begin{cases} \vec{n}_1=(1,1,1), \\ \vec{n}_2=(2,-1,3) \end{cases}$

$\because\ \vec{s}\perp\vec{n}_1,\ \vec{s}\perp\vec{n}_2 \qquad \therefore\ \vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$$

故所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{-3}=t$

参数式方程为 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}$

$(1,0,-2)$
是直线上一点

解题思路: 先找直线上一点;
再找直线的方向向量(常利用叉积).

另: 亦可直接选 y 为参数t, 解出x , z. (思考题)

例2.求过点(–3,2,5)且与两平面的交线 $\begin{cases} x-4z=3 \\ 2x-y-5z=1 \end{cases}$ 平行的直线方程.

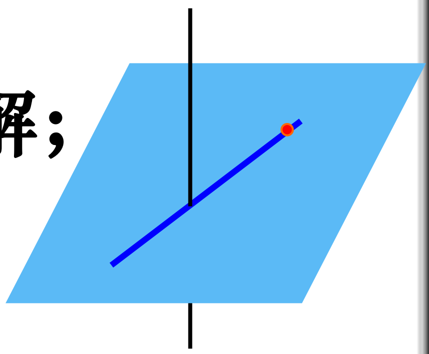
解:直线的方向向量

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4,-3,-1) = -(4,3,1) = -\vec{s}$$

故 $\vec{s}$=(4, 3, 1), 直线的点向式方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = z-5$$

例3.求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.



解:关键是求出交点,即可由两点式方程得解;

(1)求过点M且与直线垂直的平面

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

(2)由交点在已知直线上,给出参数式假设

设 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=-t \end{cases}$

故交点为:

$$\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$$

(3)代入(1)中的平面方程,求出 $t=\dfrac{3}{7}$

下略.

二、点、直线与平面的关系

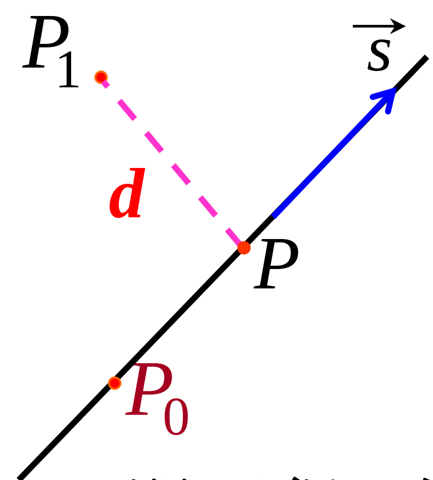
1. 点到直线的投影与距离

假设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 是直线 $L: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$

外一点, 求 P_1 在 L 上的投影 $P(x,y,z)$的及距离 d.

分析:投影点 P 在直线上,故满足直线参数方程:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$



$\overrightarrow{P_1P} \perp \vec{s}$

$\Longleftrightarrow (x-x_1)m + (y-y_1)n + (z-z_1)p = 0$ 即可得 t 值,

从而得 P 的坐标; $d = \left|\overrightarrow{P_1P}\right|$.

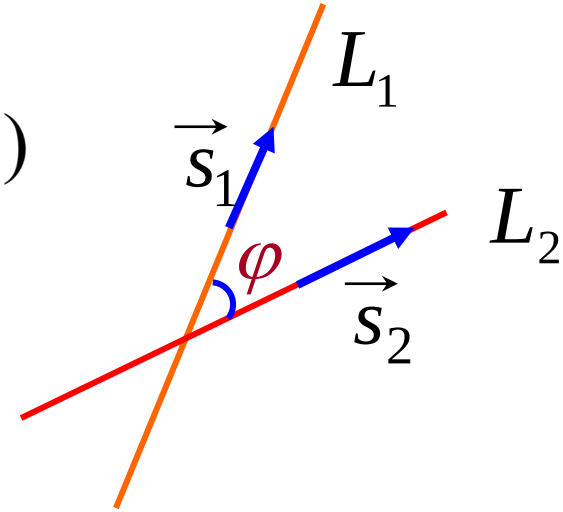
2. 两直线的夹角

两直线的夹角指其方向向量间的夹角(通常取锐角).

设直线 L_1, L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1),\ \vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足



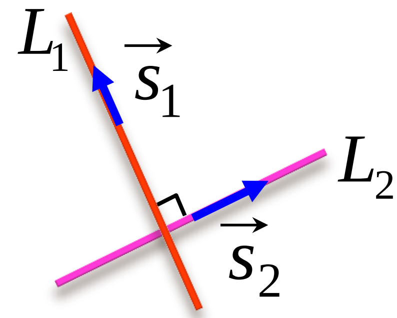
$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

$$=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

特别有:

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$

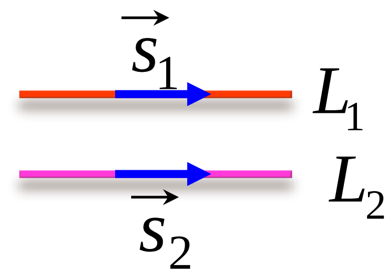
$\Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$



(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2$

$\Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

$\Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$



$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$

$\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

例2. 求以下两直线的夹角

$$L_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1} \qquad L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

解: 直线L_1的方向向量为 $\vec{s}_1=(1,-4,1)$

直线L_2的方向向量为 $\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2,-2,-1)$

二直线夹角φ的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

3. 直线与平面的夹角

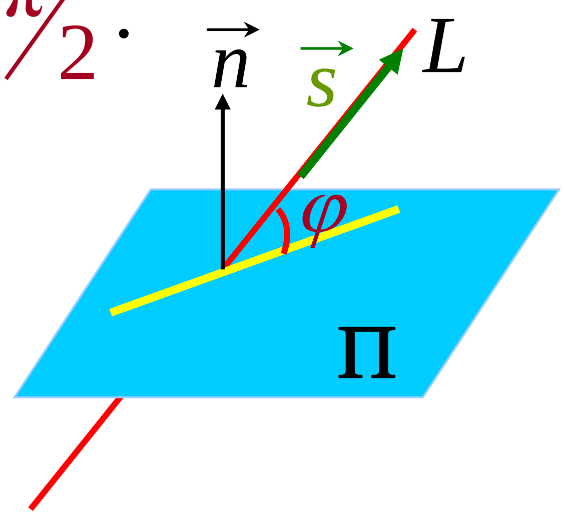
当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角φ称为直线与平面间的夹角；

当直线与平面垂直时,规定其夹角为 $\pi/2$.

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

则直线与平面夹角 φ 满足



$$\sin\varphi=\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})$$

$$=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

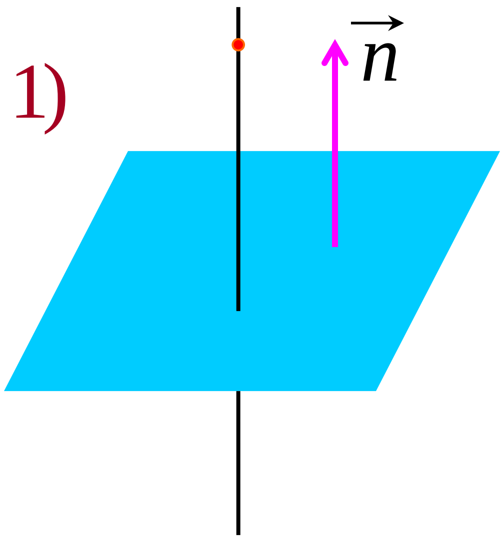
特别有:

(1) $L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} // \vec{n} \Longleftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

(2) $L // \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

例4. 求过点(1, −2 , 4) 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线方程.

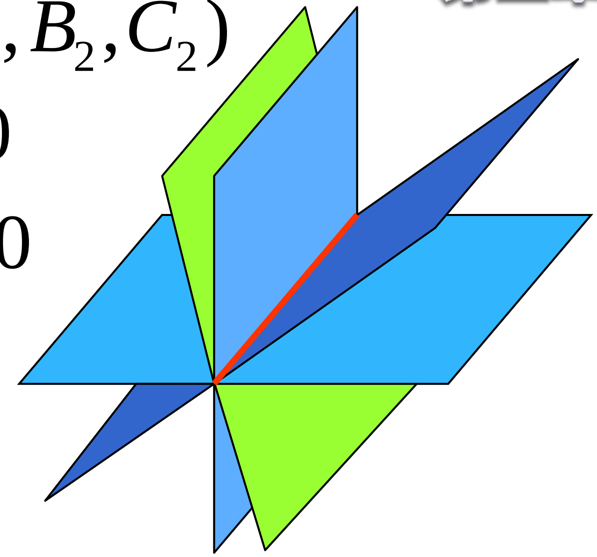
解: 取已知平面的法向量 $\vec{n} = (2, -3, 1)$ 为所求直线的方向向量.



则直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}$$

三、有轴平面束 $(A_1,B_1,C_1) \not\parallel (A_2,B_2,C_2)$



过直线 $L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

的**平面束**方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$

$$+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

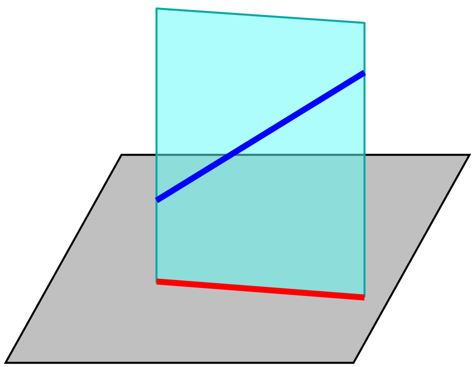
$(\lambda_1,\lambda_2$不全为$0)$

也可表示为:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(但不能表示第二个平面) **为什么?**

例5. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.



解： 过已知直线的平面束方程

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$$

即 $$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

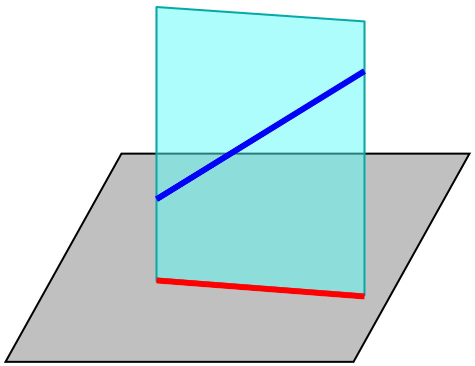
从中选择 λ 使其与已知平面垂直：

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$$

得 $\lambda=-1$, 从而得投影直线方程

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ (这是投影平面) 选z为参数 $$\begin{cases} x=-2z-1 \\ y=z+1 \\ z=z \end{cases}$$

例5. 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.



另解: 已知直线的方向向量为

$$\vec{s} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$$

则过已知直线且垂直于已知平面的平面法向量:

$$\vec{n} = \vec{s} \times (1,1,1) = \ldots = (0,1,-1)$$,(直线过(0,0, –1))

从而得投影平面 $y-(z+1)=0$ (点法式)

从而得投影直线 $\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 选z为参数 $\begin{cases} x=-2z-1 \\ y=z+1 \\ z=z \end{cases}$

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

对称式 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

参数式 $$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

$$(m^2+n^2+p^2\neq 0)$$

2. 线与线的关系

直线 L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $\vec{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$

直线 L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $\vec{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

夹角公式 $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$

3. 线与面的关系

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

(1) $L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\,/\!/\,\vec{n} \Longleftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

(2) $L\,/\!/\,\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n} \Longleftrightarrow Am+Bn+Cp=0$

(3)直线与平面夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$