第四节

曲面/*Surface*/及其方程

一、 曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

一、曲面方程的概念

定义1. 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

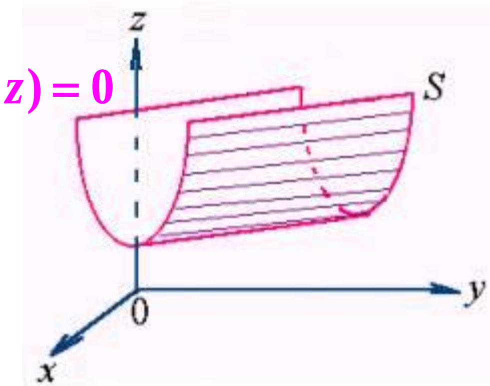
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程,

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程;

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的方程(隐式),

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.

两个基本问题:



(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,
求曲面方程.

(2) 已知方程时, 研究它所表示的几何形状
(必要时需作图).

例1. 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 $\boldsymbol{R}$ 的轨迹方程.

解: 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

故所求方程为

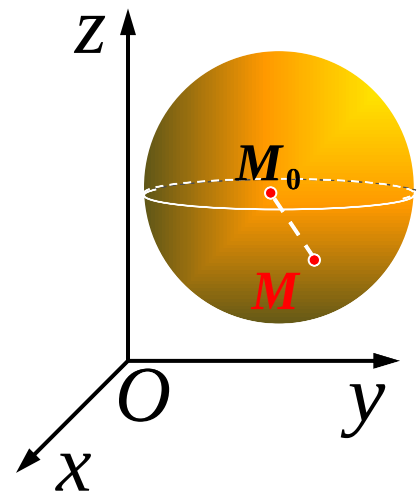
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

特别, 当M_0在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面

/*Sphere*/.



例2. 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面.

解: 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

可见此方程表示一个球面

球心为 $M_0(1,-2,0)$，半径为 $\sqrt{5}$

说明: 如下形式的三元二次方程 ($A\neq 0$)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

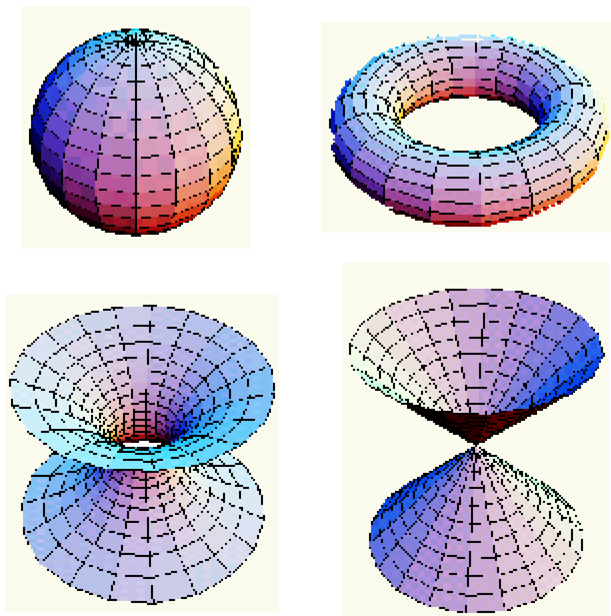
都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

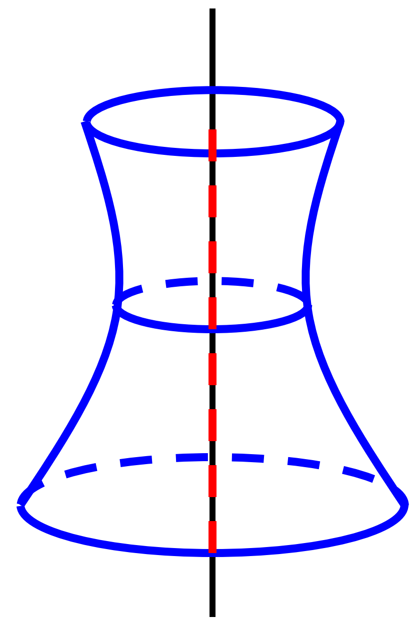
一个球面，或点，或虚轨迹.

二、旋转曲面 /*Surface of Revolution*/

定义2. 一条平面曲线 绕其平面上一条**定直线**旋转一周所形成的曲面叫做**旋转曲面**. 该定直线称为**旋转轴**.

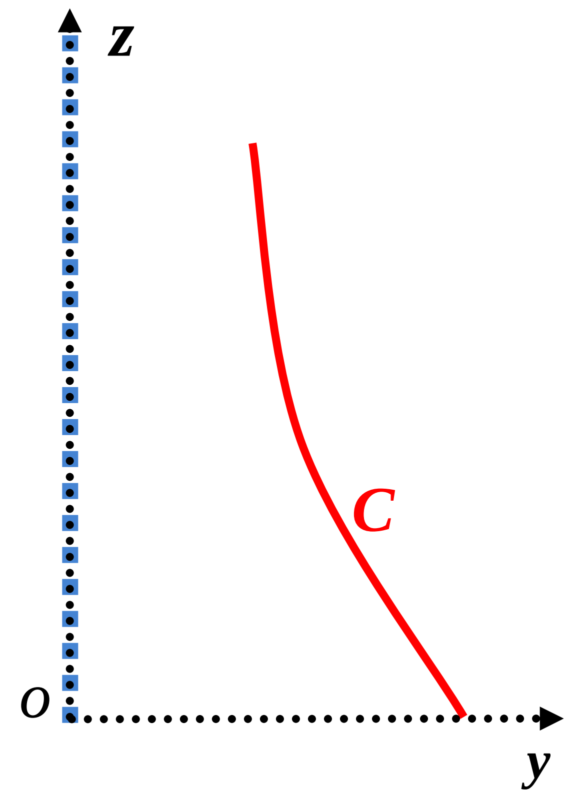
例如,





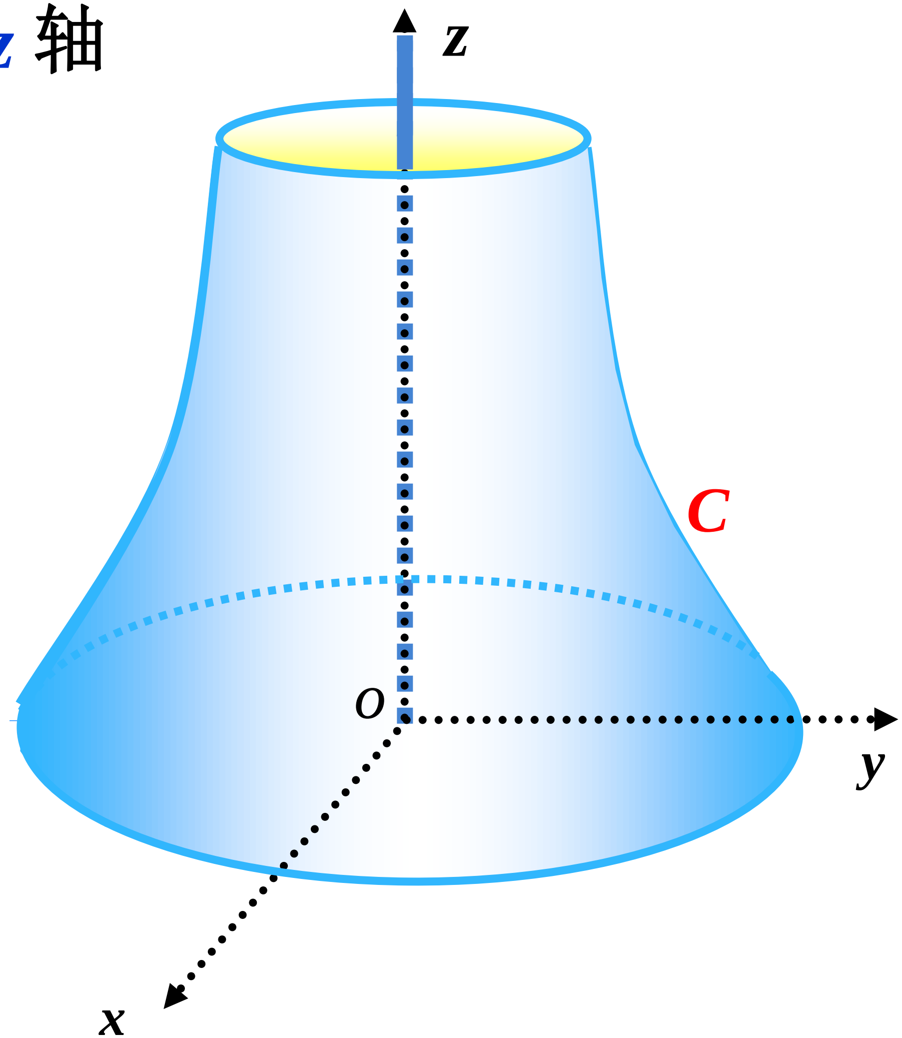
建立yOz面上曲线C绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

曲线 $C\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴



建立yOz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

曲线 $C\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴



建立yOz面上曲线C绕 z 轴旋转所成曲面的方程:

曲线 $C\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴

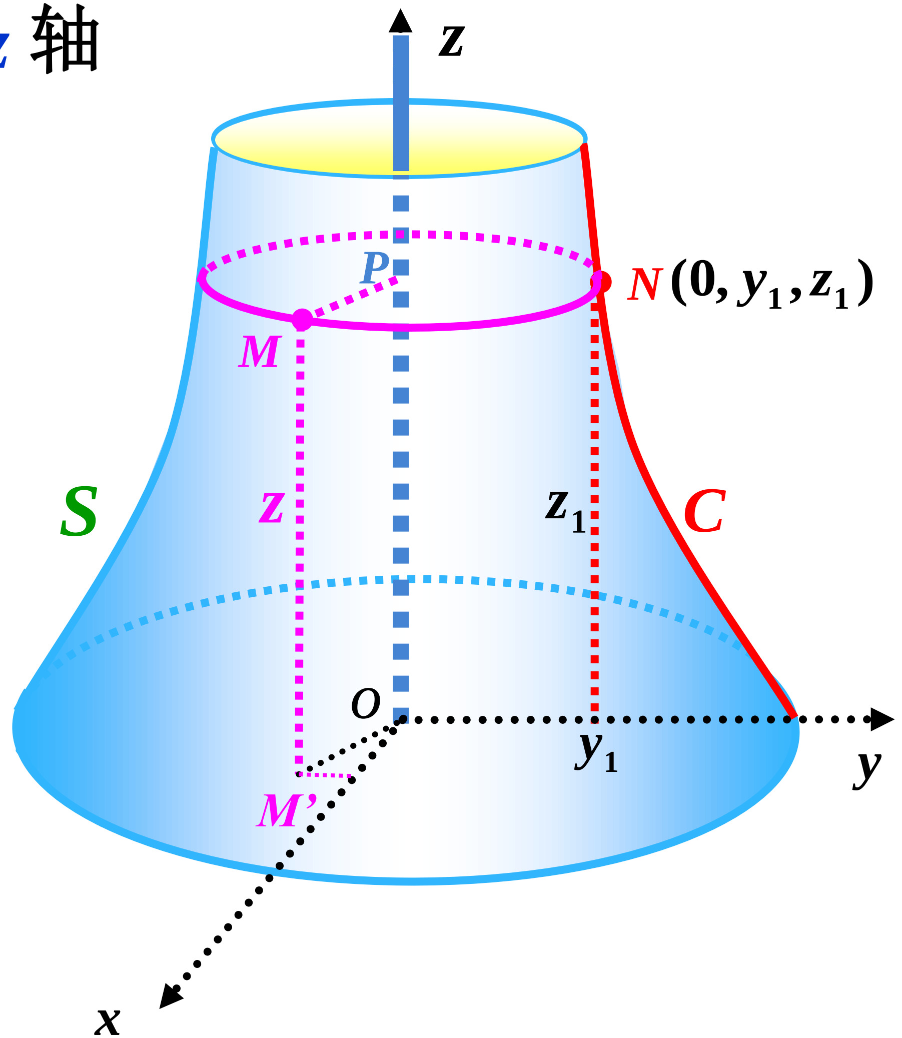
旋转一周得旋转曲面 S

$\forall M(x,y,z)\in S$

$f(y_1,z_1)=0$

$z_1=z$

$|y_1|=\left|\overline{MP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$



建立yOz面上曲线C 绕 z 轴旋转所

记忆：绕谁转，谁不变
其余变成对角线

曲线 $C\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周得旋转曲面 S

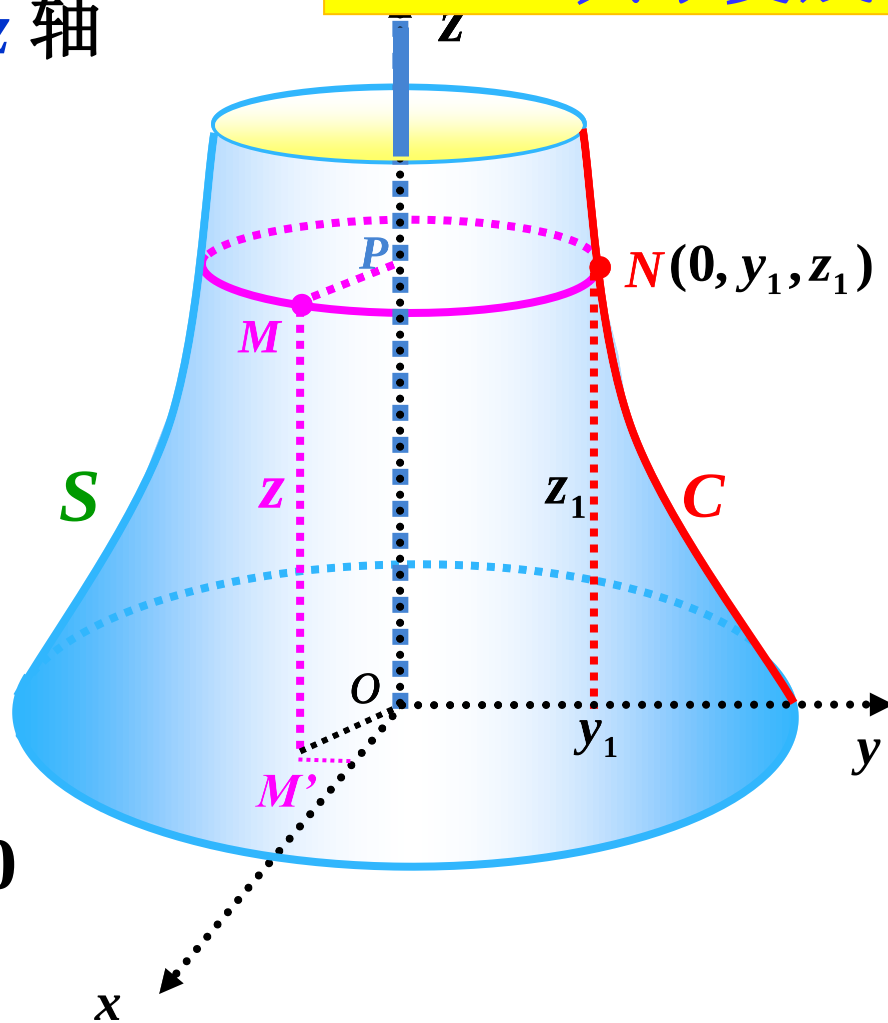
$\forall M(x,y,z)\in S$

$f(y_1,z_1)=0$

$z_1=z$

$|y_1|=\left|\overline{MP}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$

S：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$



例3. 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α 的圆锥面方程.

解: 在yOz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

且 $x = 0$

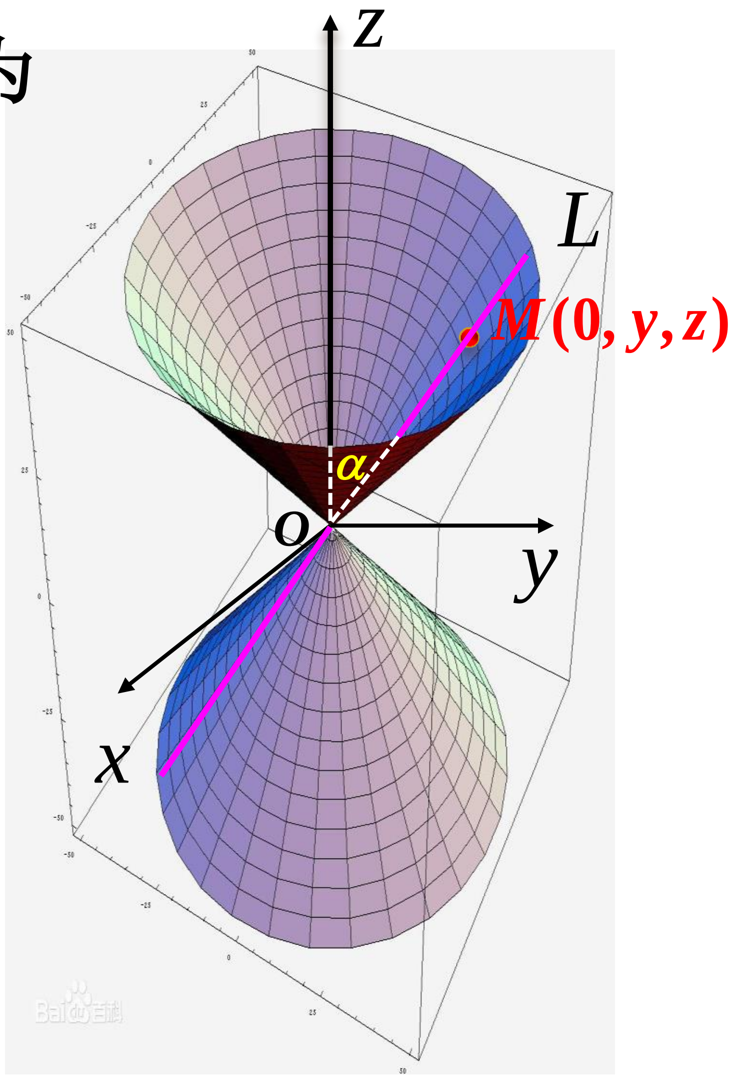
绕z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\cot\alpha$$

令 $a = \cot\alpha$

两边平方

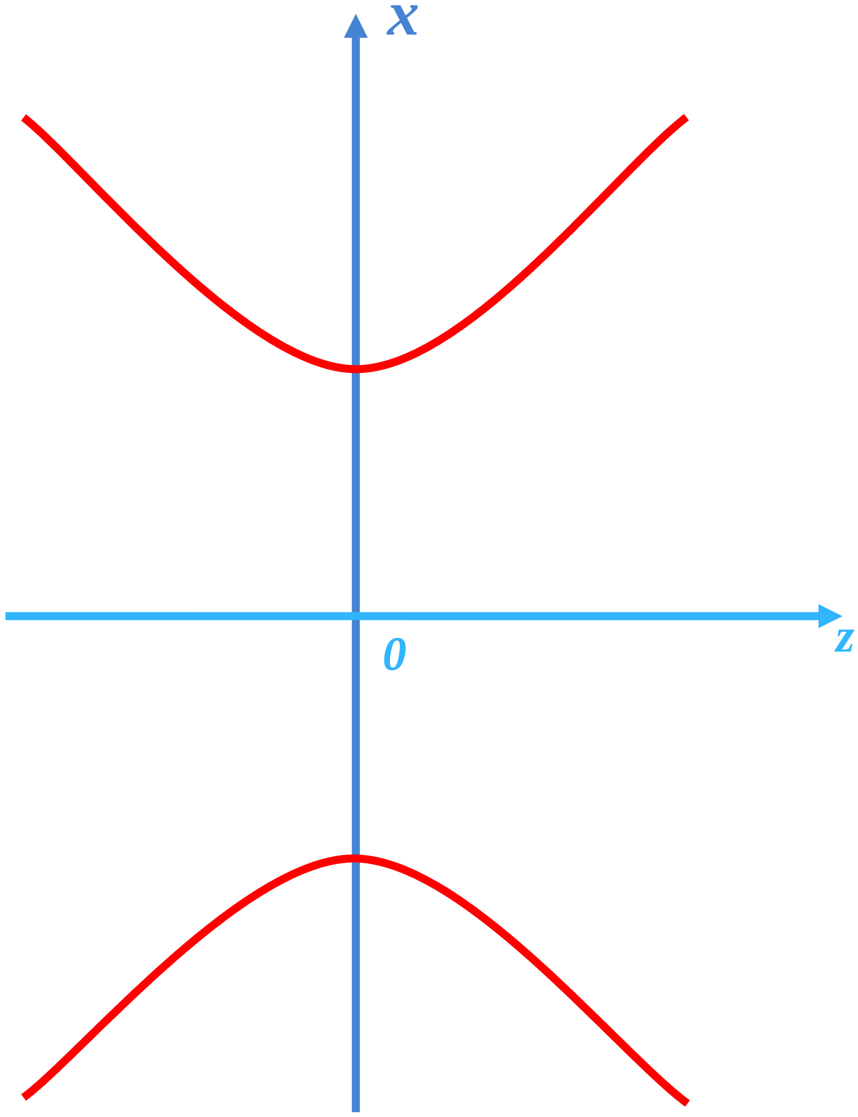
$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$



例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

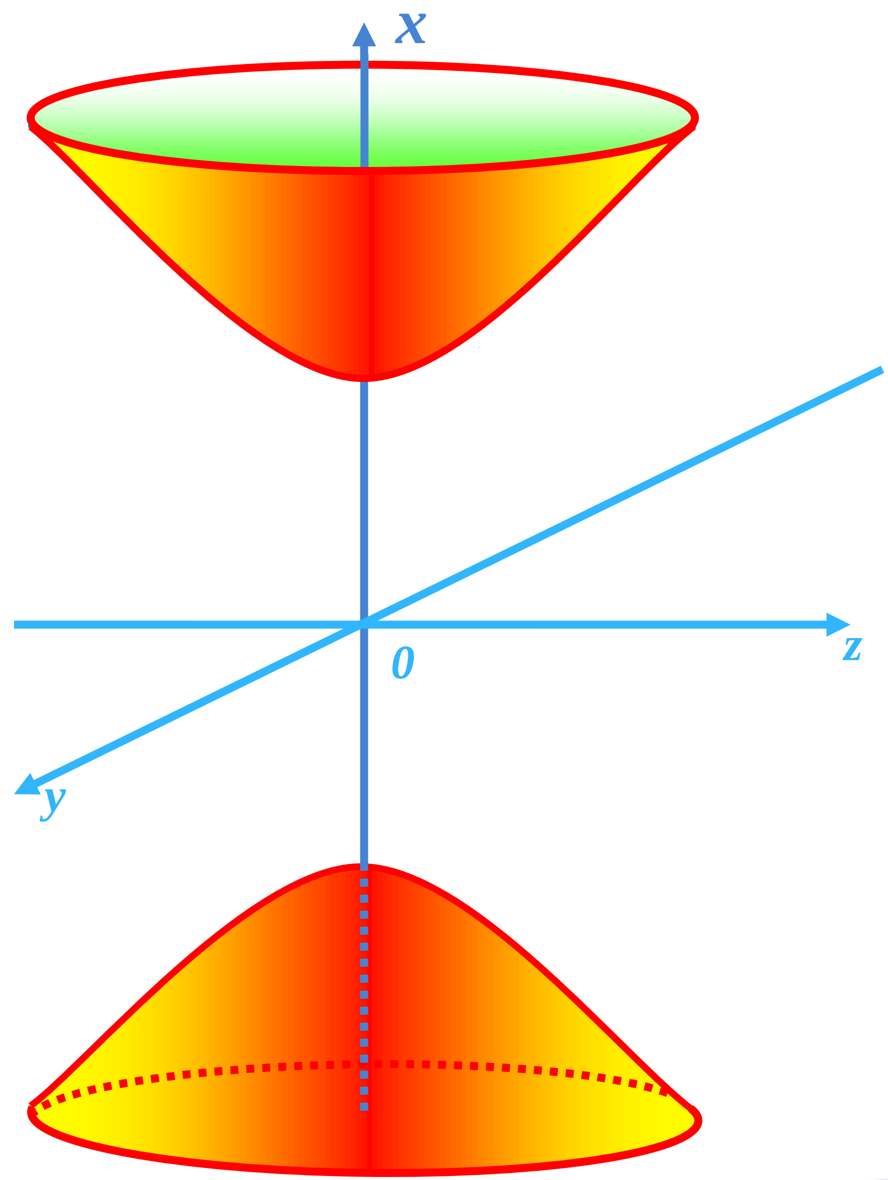
(1)绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面;



例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

(1)绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面；



例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

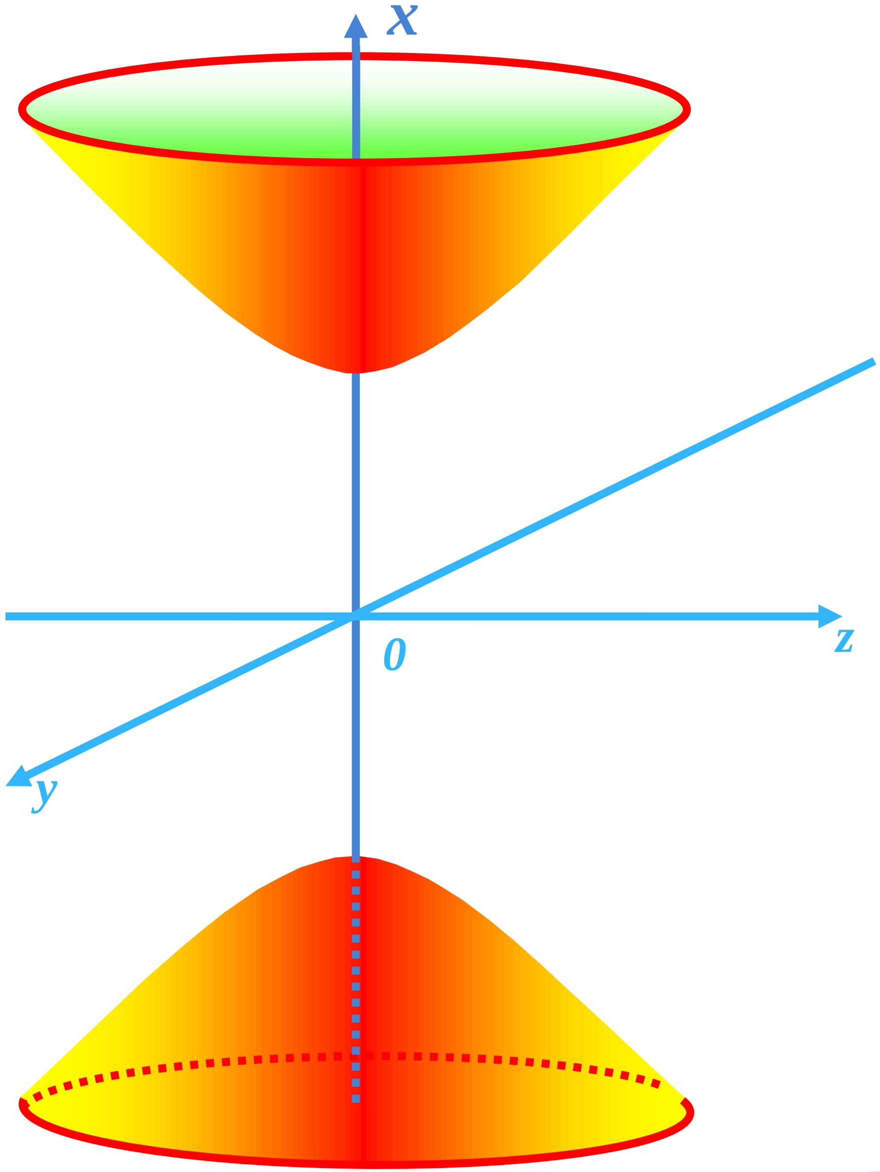
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

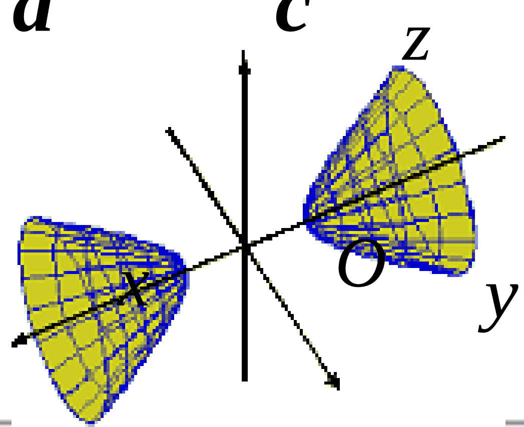
(1)绕 x 轴旋转一周生成的旋转曲面;

得双页旋转双曲面

*/*Hyperboloid of double sheet*/*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

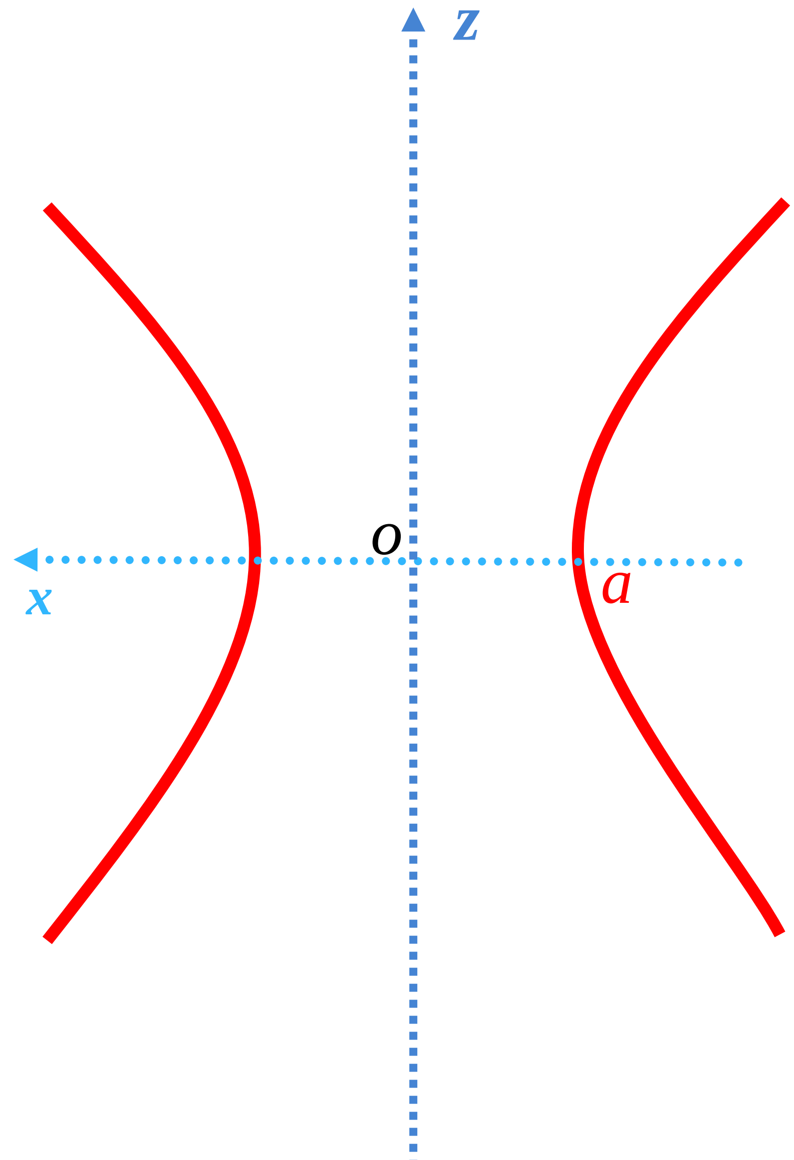




例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

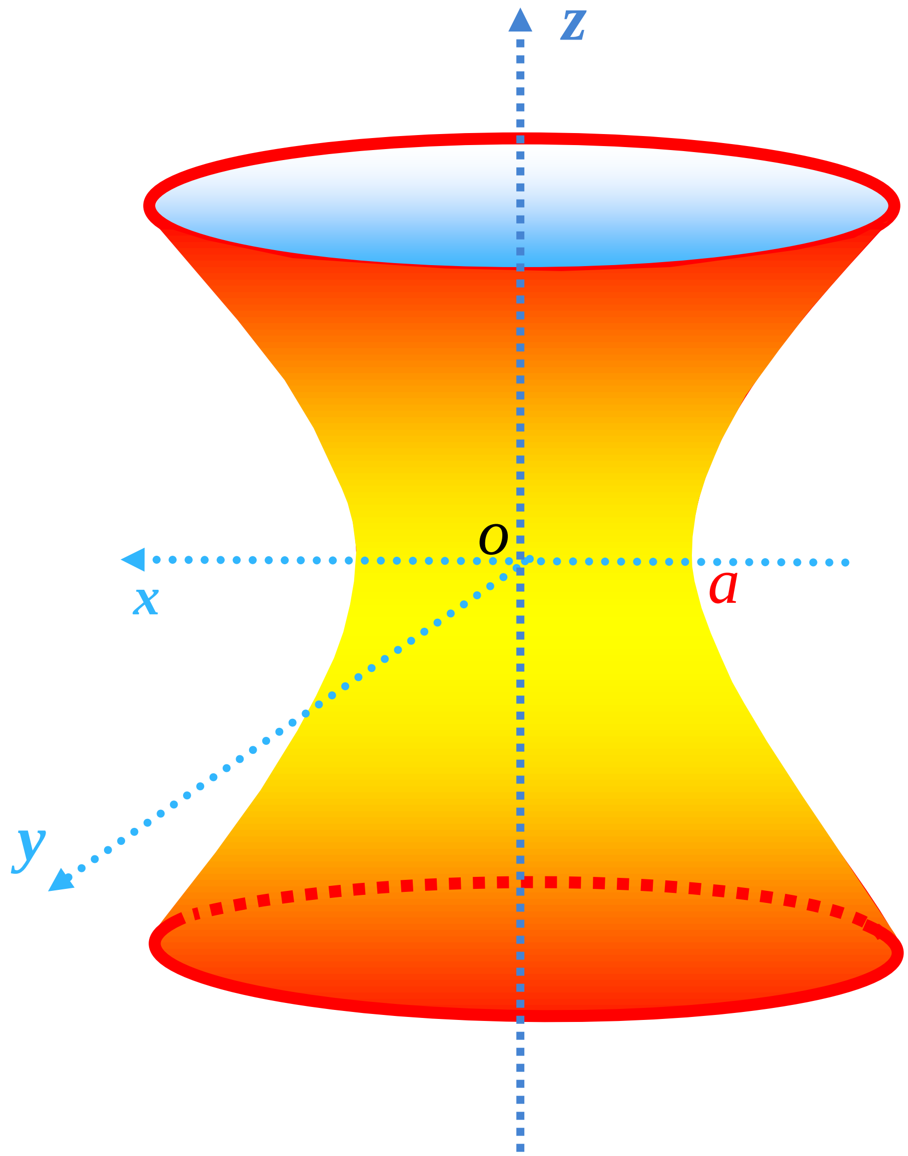
(2)绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面;



例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

(2)绕 z 轴旋转一周生成的旋转曲面;



例4. 求坐标面 xOz 上的双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

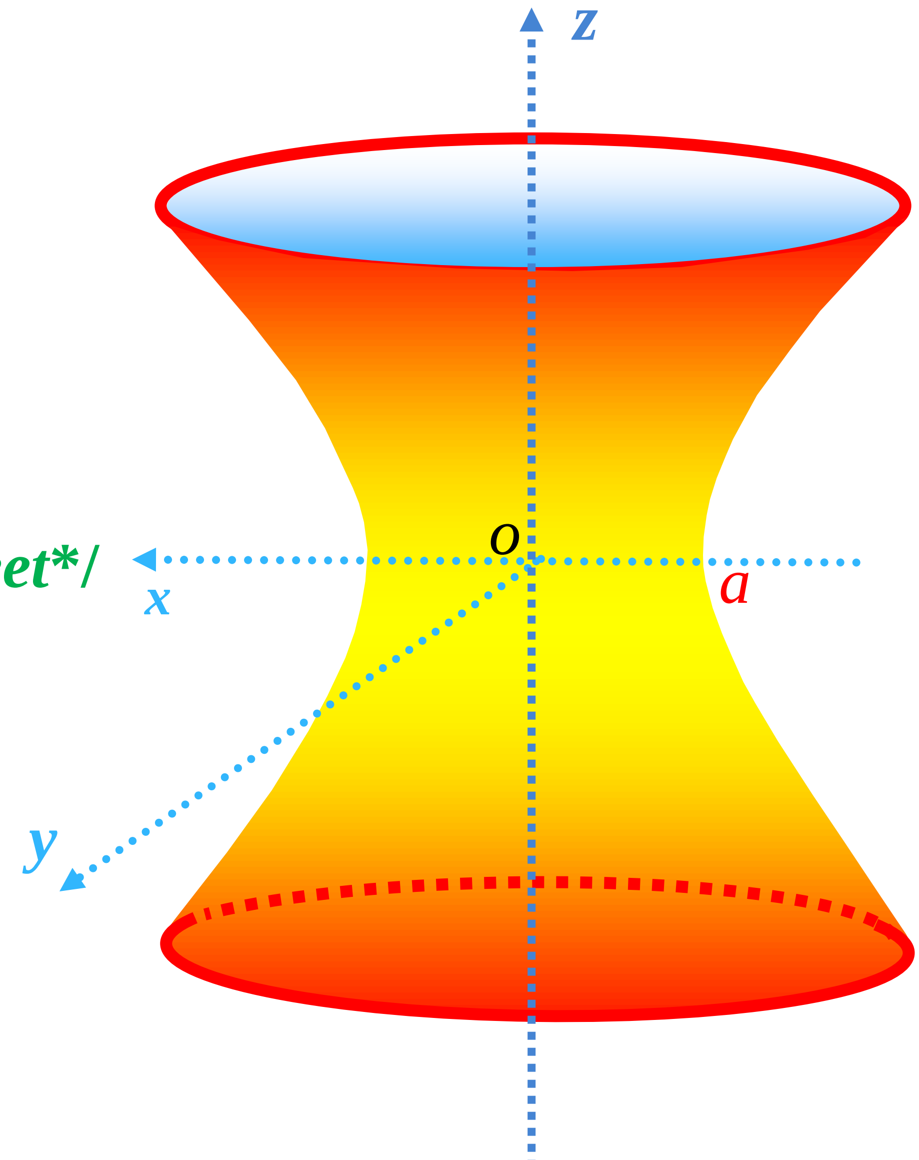
(2)绕 z 轴旋转一周

生成的旋转曲面；

得单页旋转双曲面

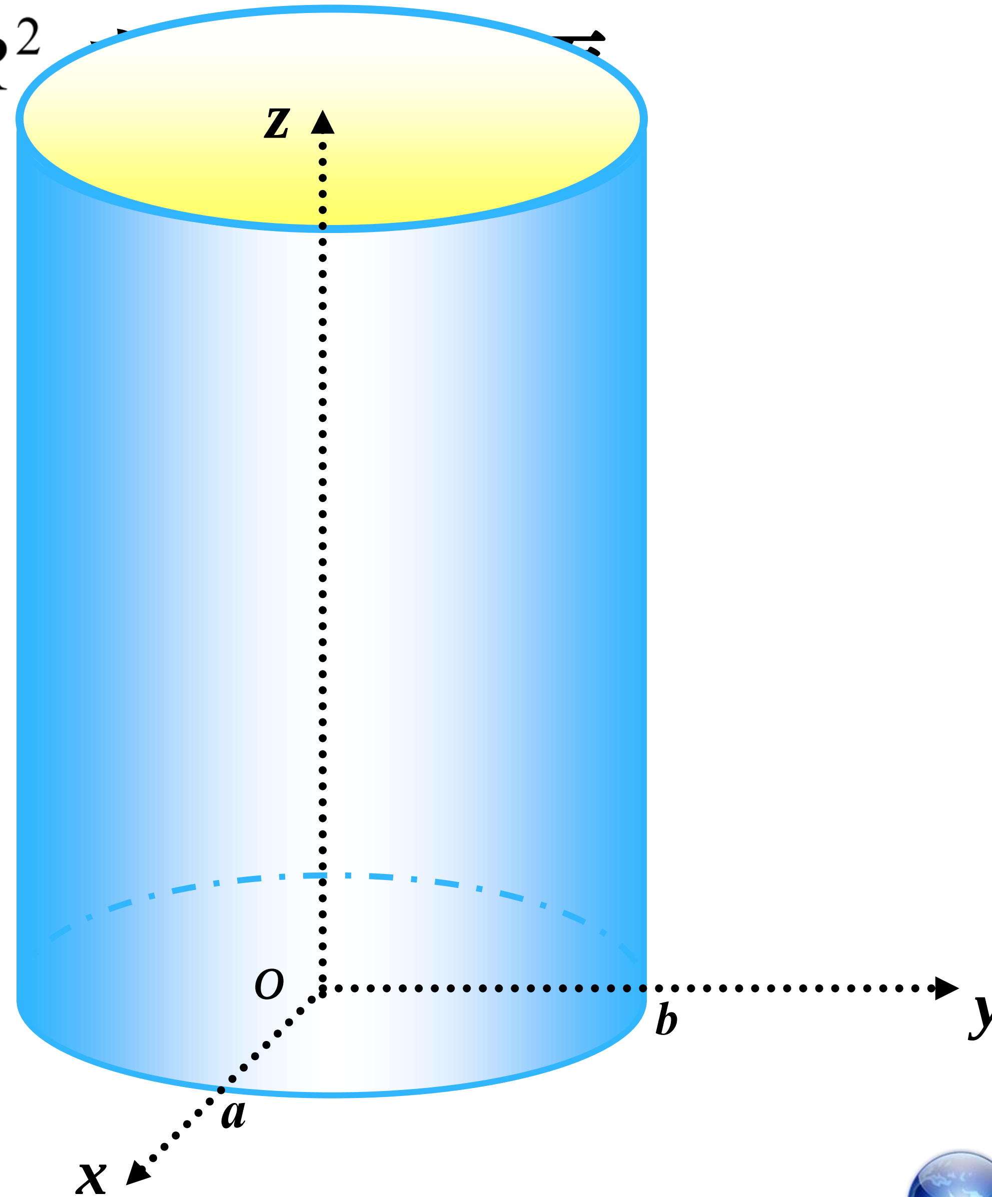
/*Hyperboloid of one sheet*/

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

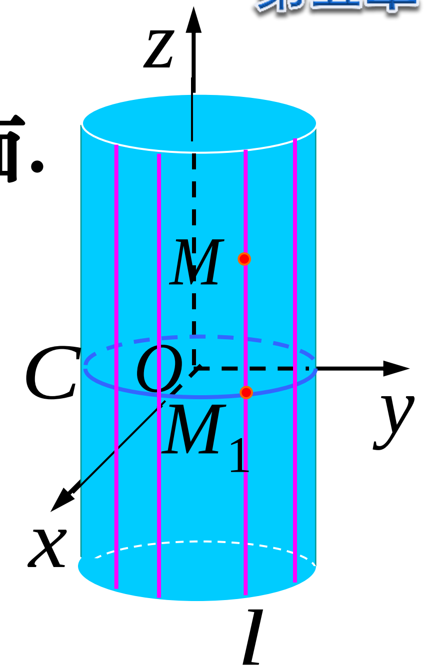


三、柱面/*Cylinder*/

引例分析方程 $x^2+y^2=R^2$



三、柱面 /*Cylinder*/



引例分析方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面.

解:在 xOy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆C.

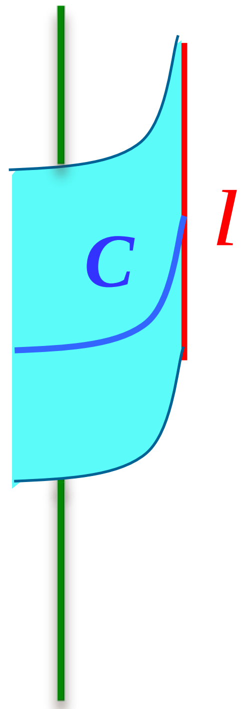
在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$, 过此点作平行 z 轴的直线 l, 对任意 z, 点 $M(x,y,z)$ 的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

沿圆周C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为圆柱面. 其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间

$$x^2+y^2=R^2 \text{ 表示圆柱面.}$$

定义3. 平行**定直线**并沿**定曲线** C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做**柱面**.

C 叫做**准线**, l 叫做**母线**.

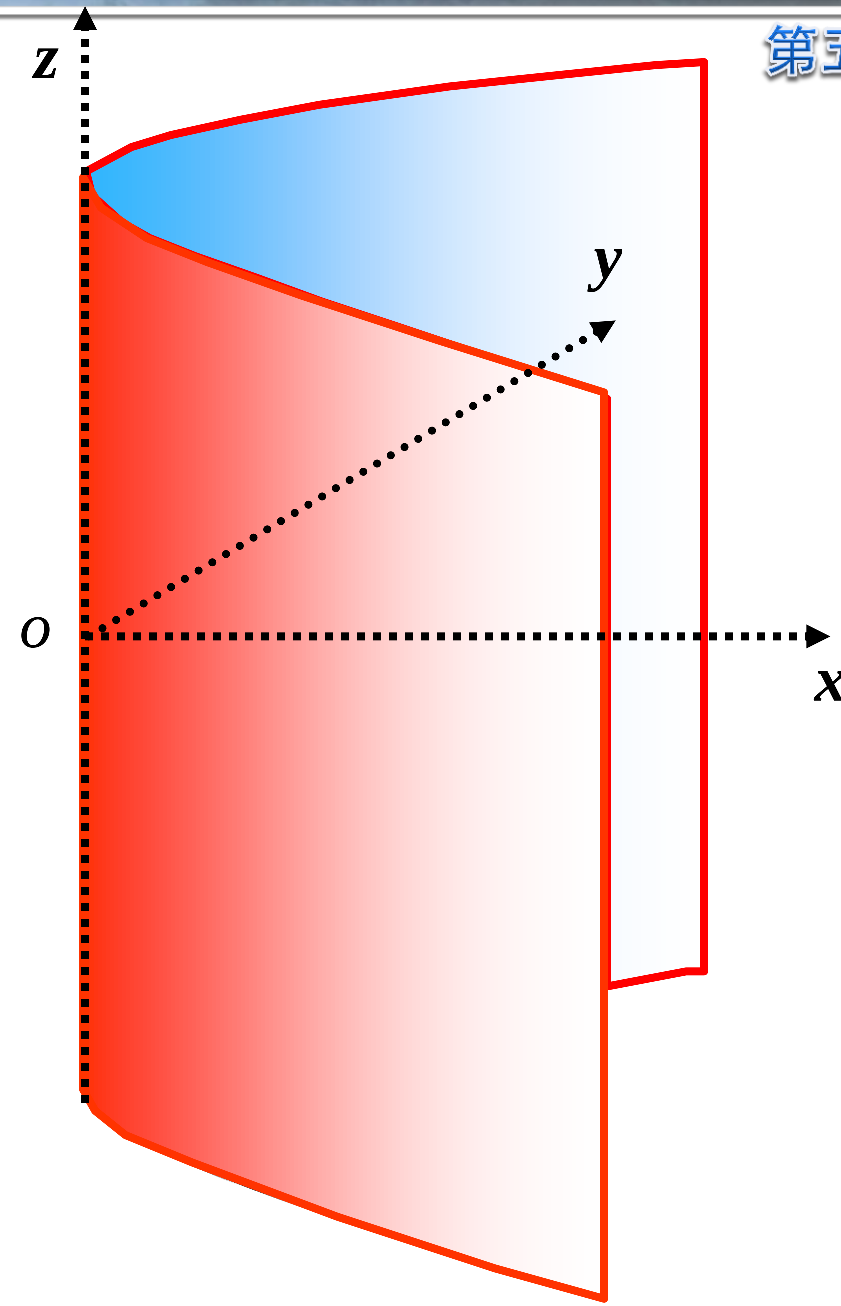


- $y^2 = 2px$

表示抛物柱面,

母线平行于 z 轴;

准线为 xOy 面上的抛物线.

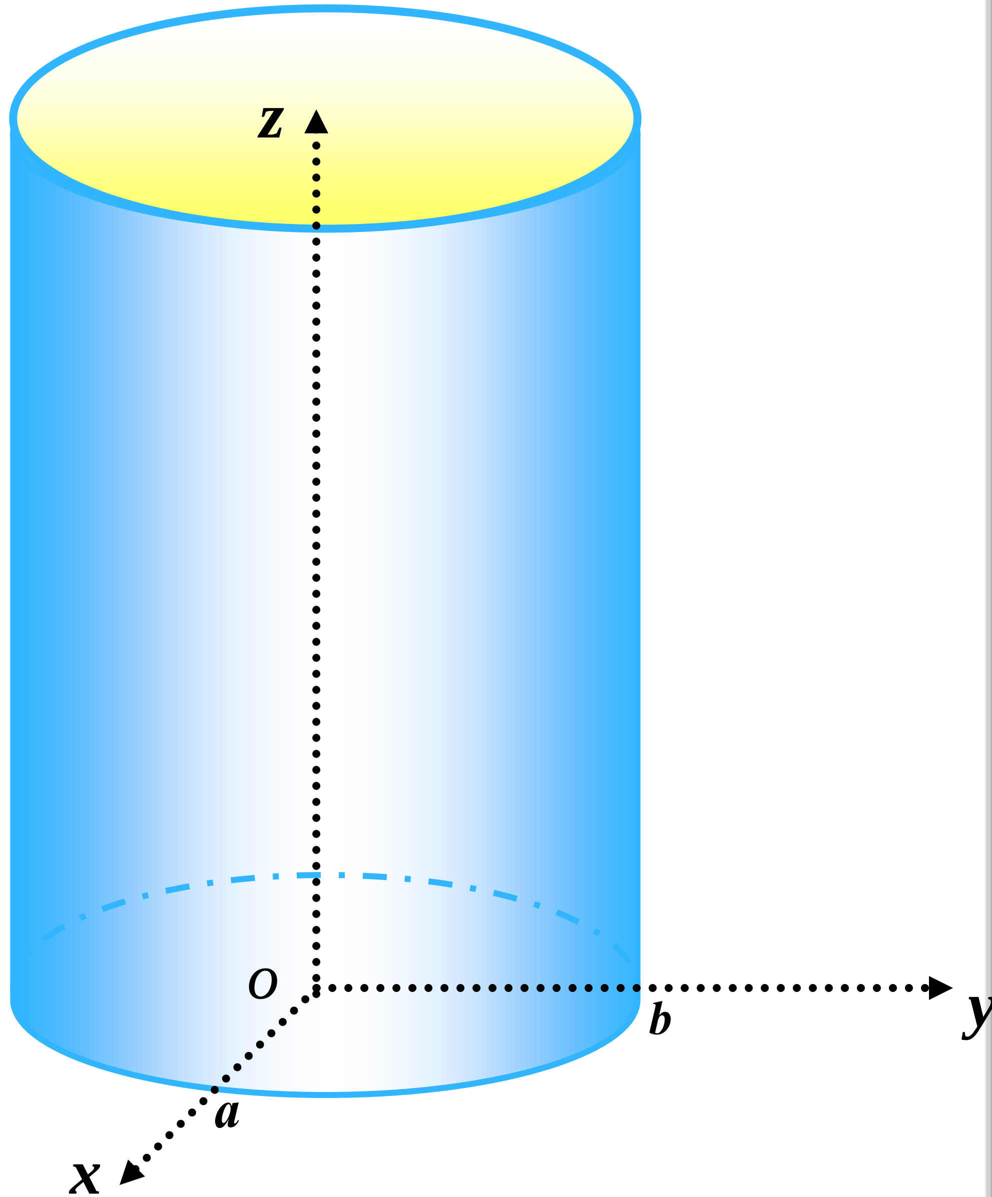


- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

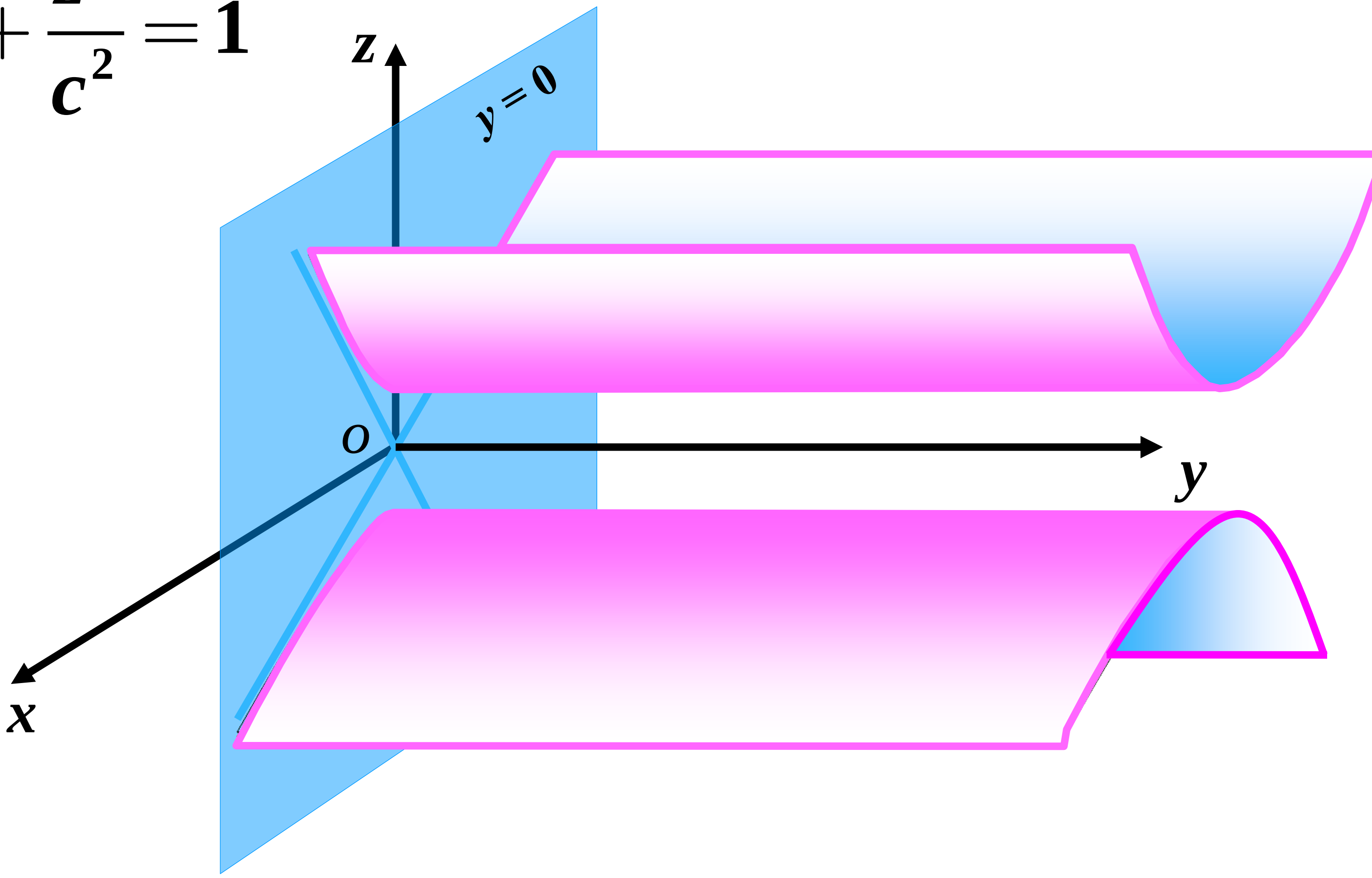
表示椭圆柱面,

母线平行于 z 轴;

准线为 xOy 面上的椭圆线.



- $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



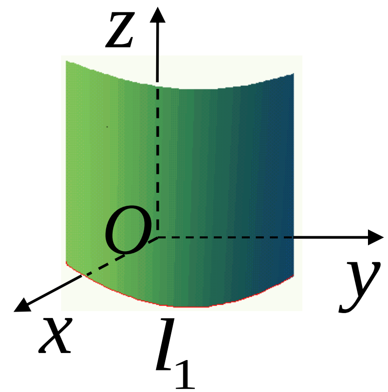
表示母线平行于y轴的双曲柱面

一般地, 在三维空间

方程 $F(x,y)=0$ 表示 **柱面**:

母线 平行于 z 轴;

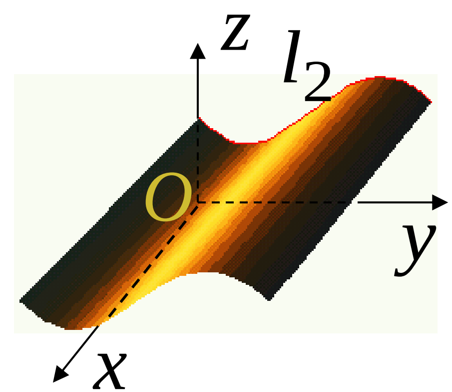
准线 xOy 面上的曲线 l_1.



方程 $G(y,z)=0$ 表示 **柱面**:

母线 平行于 x 轴;

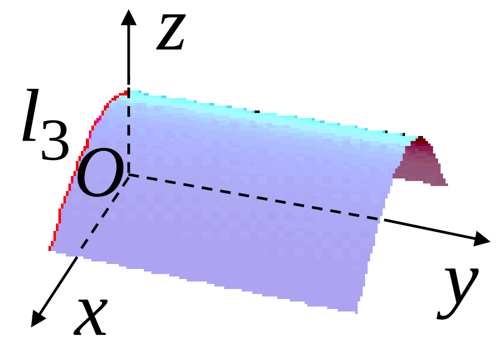
准线 yOz 面上的曲线 l_2.



方程 $H(z,x)=0$ 表示 **柱面**:

母线 平行于 y 轴;

准线 xOz 面上的曲线 l_3.



四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形统称为二次曲面. 其基本类型有:

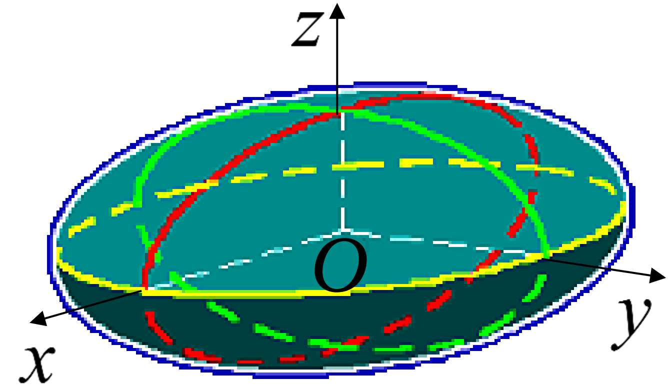
椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍.

研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

1. 椭球面 /*Ellipsoid*/

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$



(1)范围：

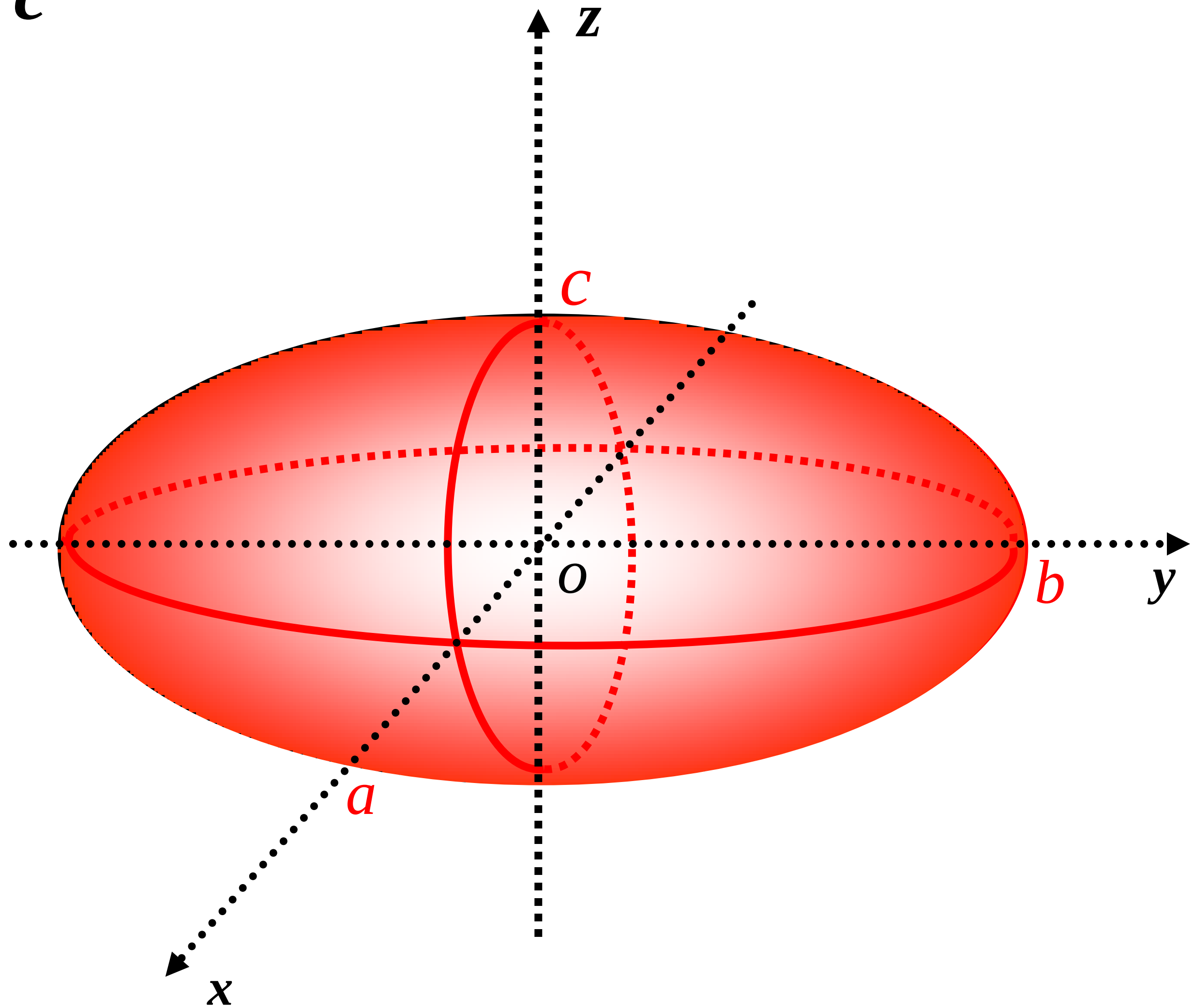
$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$

(2)与坐标面的交线: 椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ y=0\end{cases}$$

(3) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面; 当$a=b=c$ 时为球面.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c\text{为正数})$$



截痕法

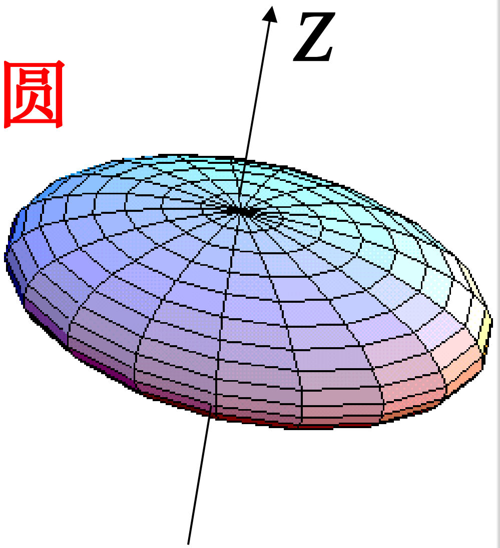
用$z=z_1$截曲面

用$y=y_1$截曲面

用$x=x_1$截曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ (a,b,c\text{为正数})$$

(4) 截痕:与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为椭圆



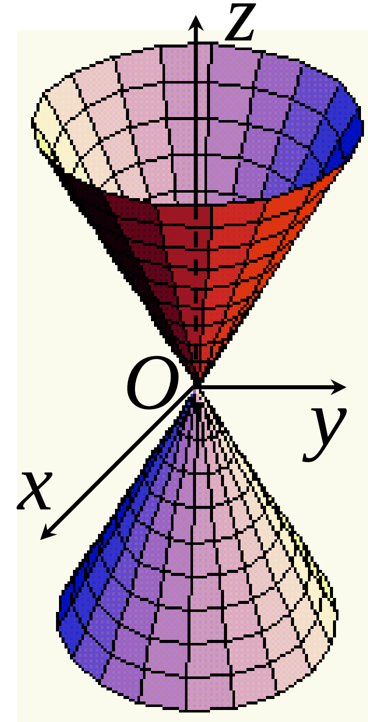
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1{}^2)}=1\\ z=z_1\end{cases}$$

同样 $y=y_1\ (|y_1|\le b)$ 及 $x=x_1\ (|x_1|\le a)$ 的截痕

也为椭圆.

2. 椭圆锥面 /*Elliptic cone*/

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a,b\text{ 为正数})$$



在平面 $z=t$ 上的截痕为 椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1,\ \ z=t \qquad ①$$

在平面 $x=0$ 或 $y=0$ 上的截痕为过原点的两直线.

可以证明, 椭圆①上任一点与原点的连线均在曲面上.

(椭圆锥面也可由圆锥面经 x 或 y 方向的伸缩变换得到)

3. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$$

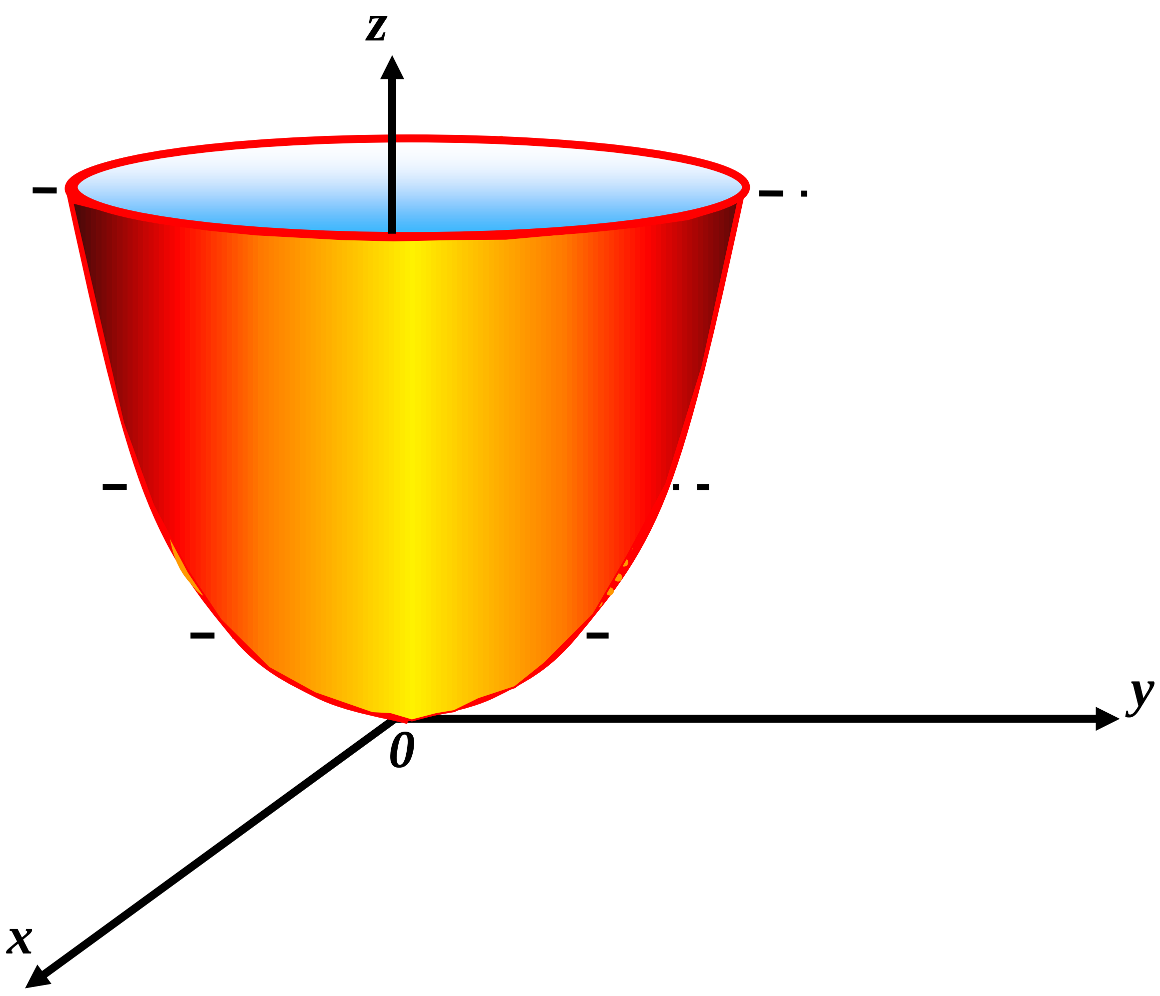
$(p, q$ 同号$)$

截痕法

用$z=a$截曲面

用$y=b$截曲面

用$x=c$截曲面



3. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2z$$

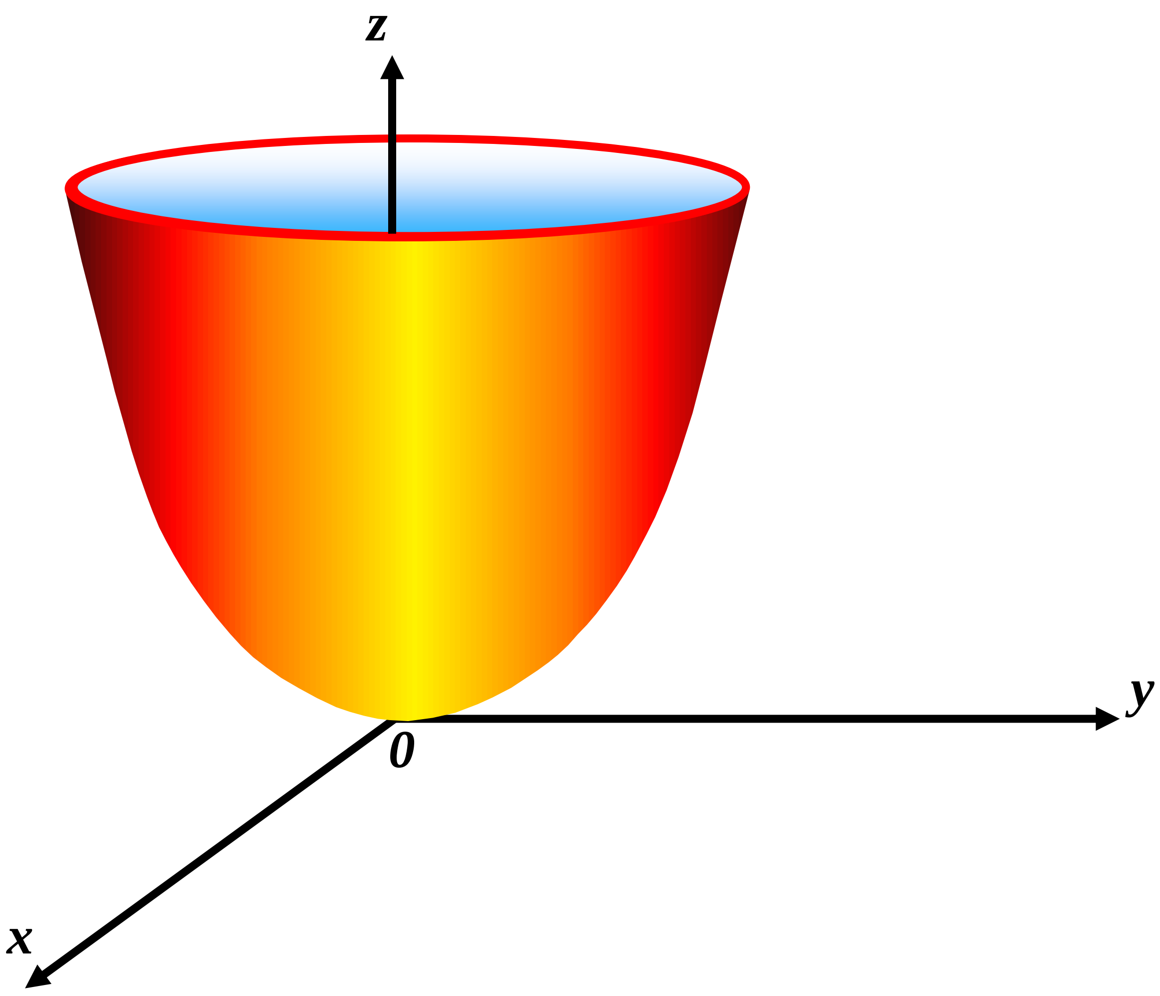
(p, q 同号)

截痕法

用 $z=a$ 截曲面

用 $y=b$ 截曲面

用 $x=c$ 截曲面



3. 抛物面 (2) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$

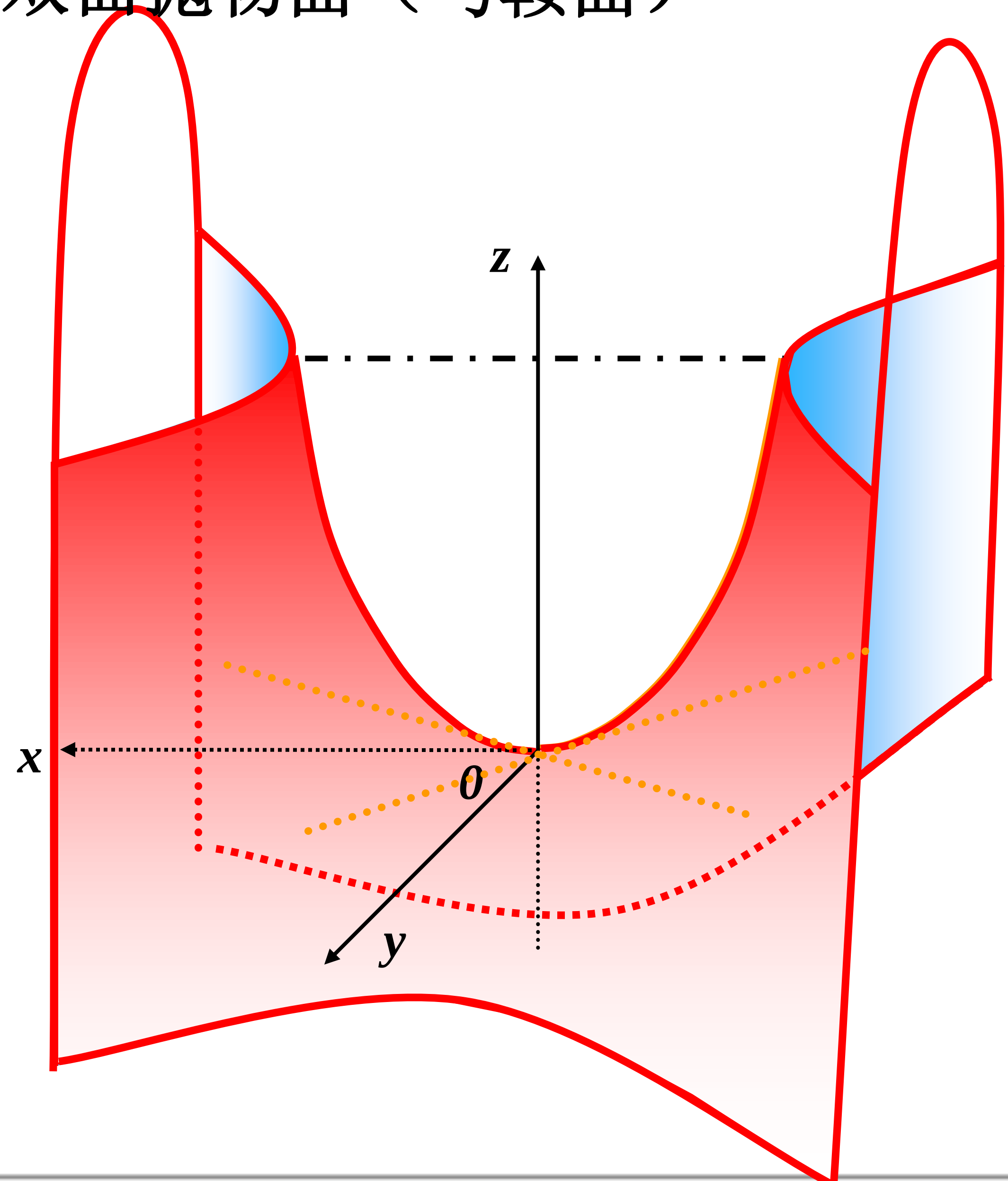
(p, q 同号)

截痕法

用 $z = a$ 截曲面

用 $y = 0$ 截曲面

用 $x = b$ 截曲面



3. 抛物面 (2) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z$$

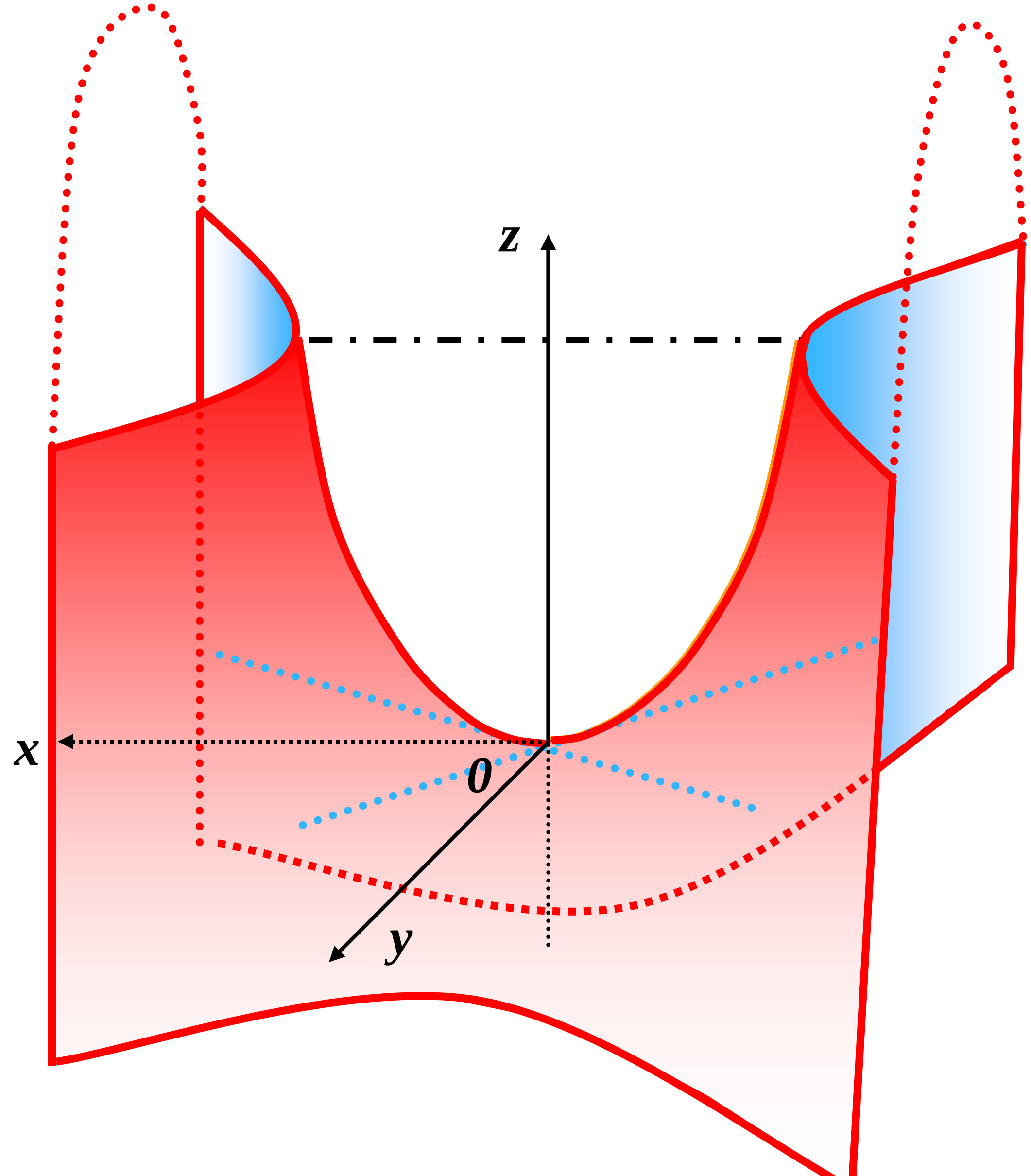
(p, q 同号)

截痕法

用 $z=a$ 截曲面

用 $y=0$ 截曲面

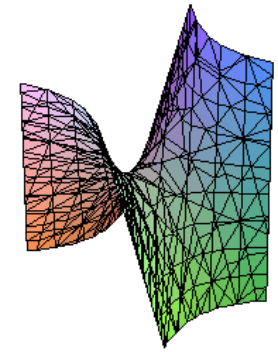
用 $x=b$ 截曲面



3. 抛物面 (2) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z$$

(p, q 同号)

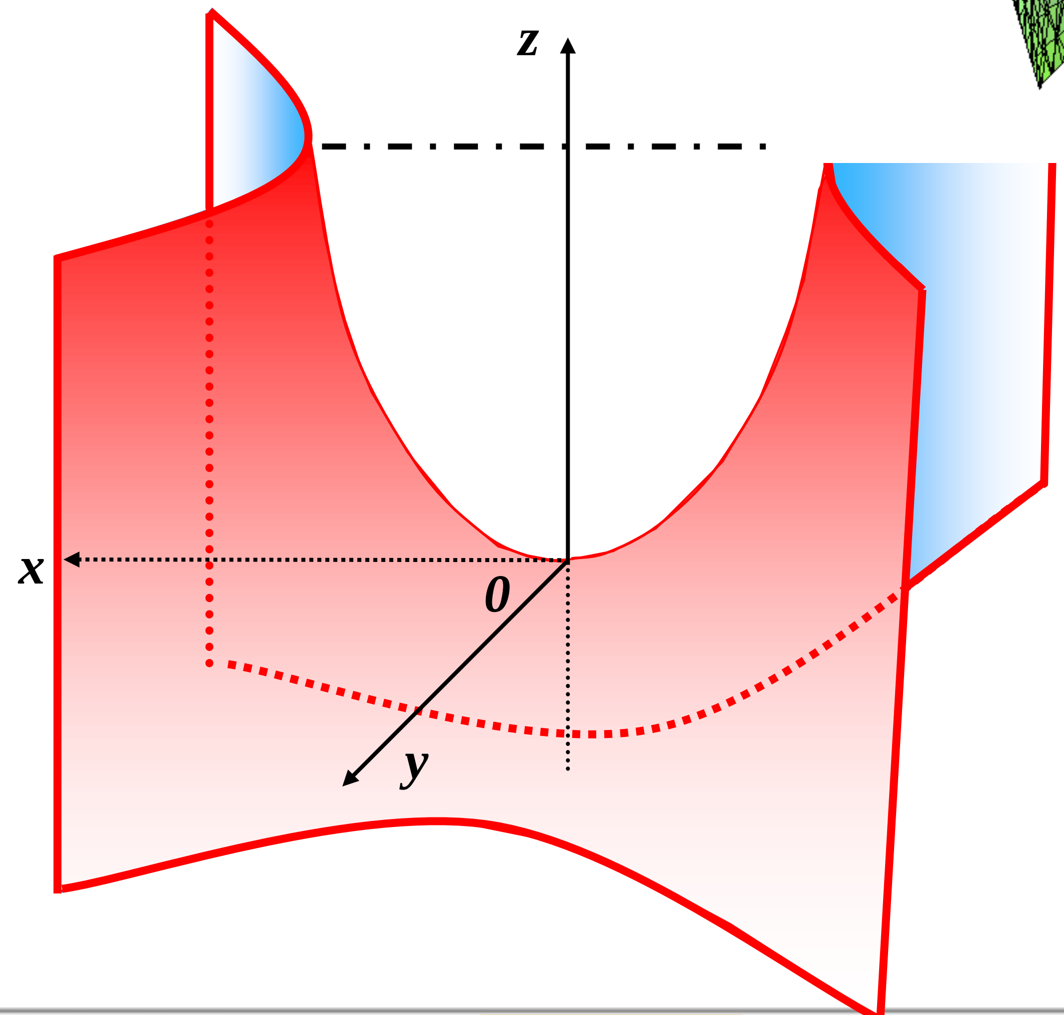


截痕法

用$z = a$截曲面

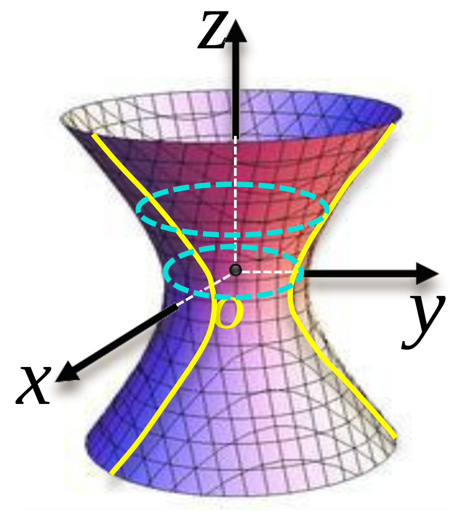
用$y = 0$截曲面

用$x = b$截曲面



4. 双曲面 /*Hyperboloid*/

(1) 单叶双曲面



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c\text{ 为正数})$$

平面 $z=z_1$ 上的截痕为 椭圆.

平面 $y=y_1$ 上的截痕情况:

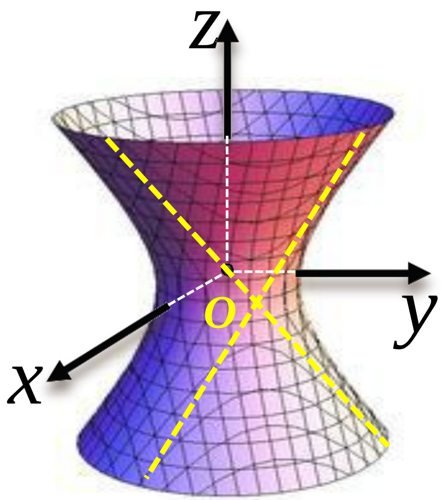
1) $|y_1|<b$ 时, 截痕为 双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_1^2}{b^2} > 0 \\ y=y_1\end{cases}$$

(实轴平行于x 轴;
虚轴平行于z 轴)

2) $|y_1| = b$ 时，截痕为**相交直线**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b\,(\text{或}\ -b) \end{cases}$$

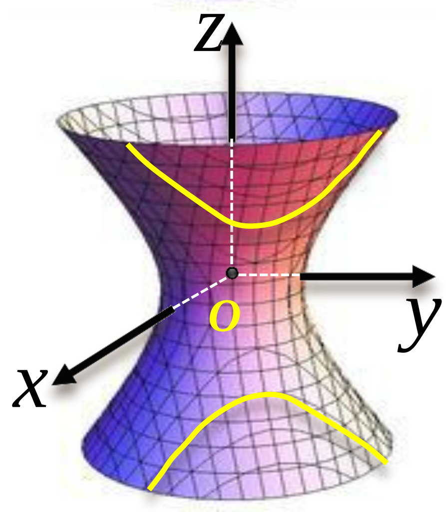


3) $|y_1| > b$时，截痕为**双曲线**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y_1{}^2}{b^2} < 0 \\ y = y_1 \end{cases}$$

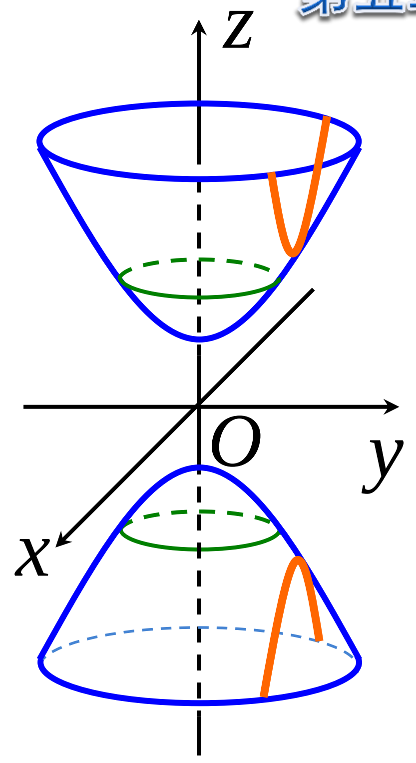
（实轴平行于z 轴；

虚轴平行于x 轴）



(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \ (a,b,c \text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $x=x_1$ 上的截痕为 双曲线

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为椭圆

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1 & \text{单叶双曲面}\\ -1 & \text{双叶双曲面}\end{cases}$$

内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z)=0$

- 球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,z)=0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y)=0$ 表示母线平行 z 轴的柱面.

又如, 椭圆柱面, 双曲柱面, 抛物柱面等.

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- **椭球面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- **椭圆锥面:** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$
- **抛物面:** (p,q 同号)

  椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$

  双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=z$
- **双曲面:**

  单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

  双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

思考与练习

指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0) 半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的 圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面