四、多元函数的极值

/ Extremum of Functions of Several Variables */*

1. 多元函数的极值

2. 多地函数的最值

3. 条件极值

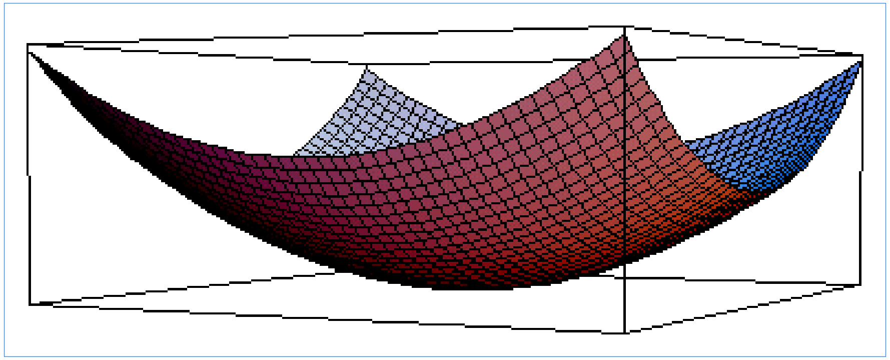
1. 多元函数的极值

定义. 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

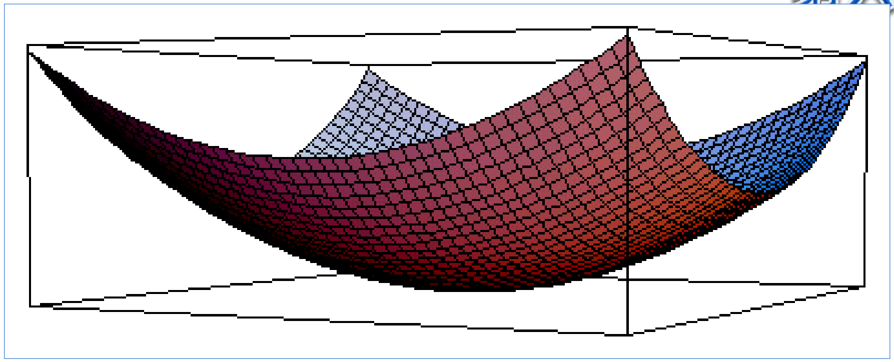
例如, $z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;



例如,

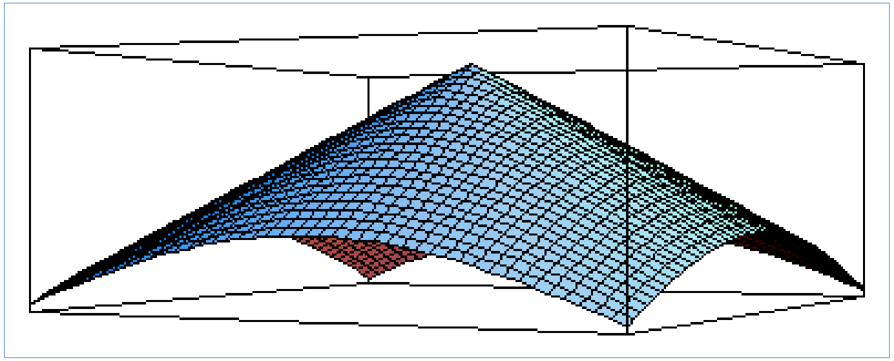
$$z = 3x^2 + 4y^2$$

在点 (0,0) 有极小值;



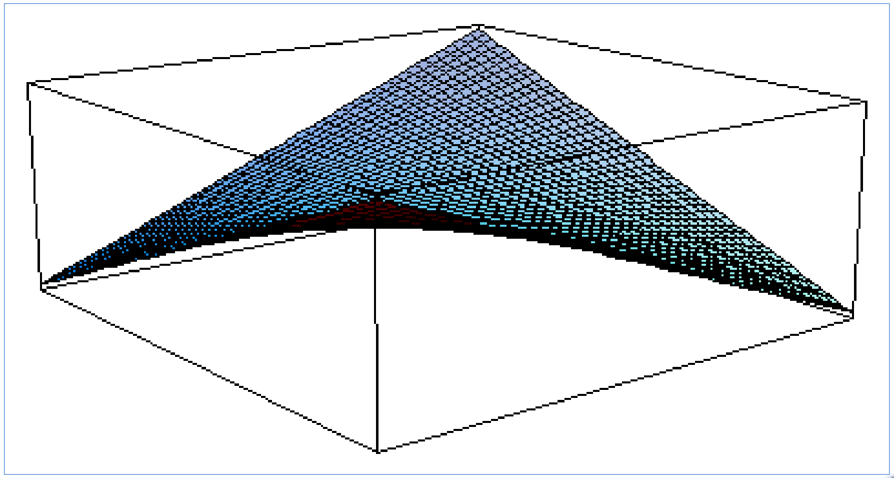
$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

在点 (0,0) 有极大值;



$$z = xy$$

在点 (0,0) 无极值.



定理1. **(必要条件)** 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且在该点取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，故

$z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极值

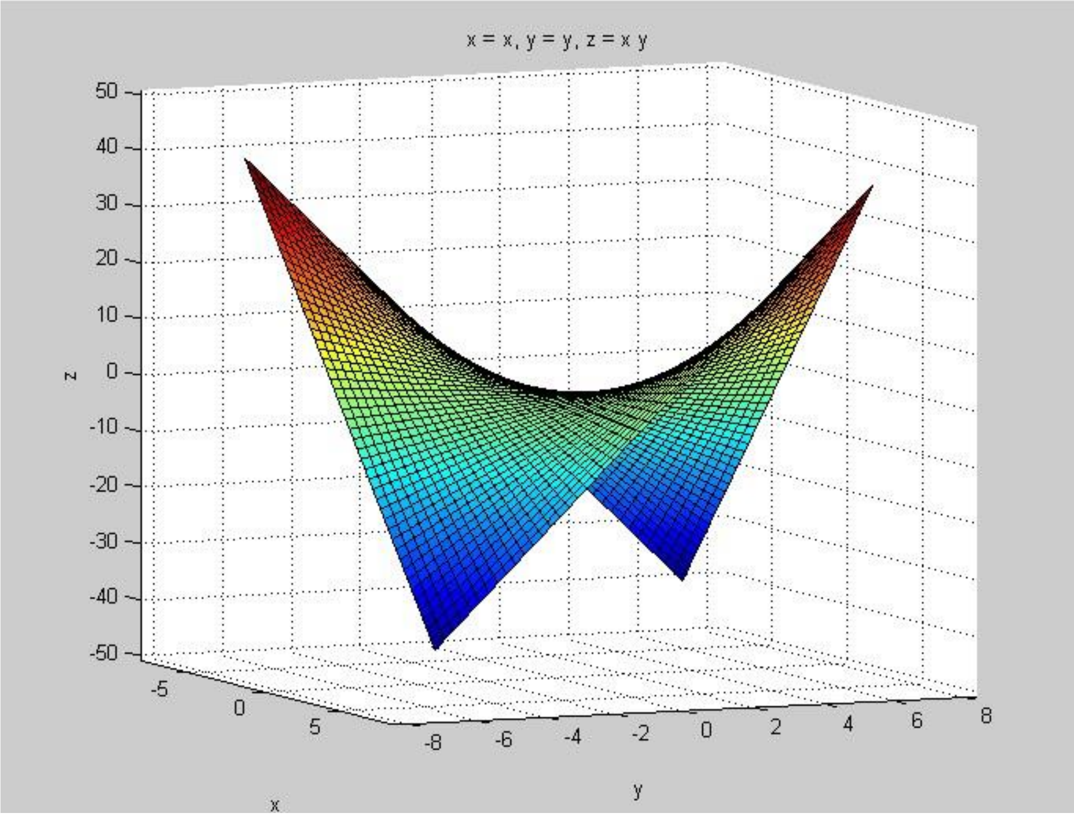
$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为**驻点**.

但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点(0,0), 但在该点不取极值.



定理2. (充分条件) 若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A = f_{xx}(x_0,y_0),\ B = f_{xy}(x_0,y_0),\ C = f_{yy}(x_0,y_0)$

则 1) 当 $AC-B^2>0$ 时, **具有极值** $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC-B^2<0$ 时, **没有极值.**

3) 当 $AC-B^2=0$ 时, **不能确定, 需另行讨论.**

记忆: $AC-B^2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(f_x,f_y)}{\partial(x,y)}$

证明略.

记忆：$AC-B^2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\dfrac{\partial(f_x, f_y)}{\partial(x,y)}$

1) 当 $AC-B^2>0$ 时，保证某$\cup(P_0)$内，

$\Delta f=f(P)-f(P_0)$的符号不变，且Δf与A同号；

因此，$A>0$必有$\Delta f>0$，则$f(P_0)$为极小值；

$A<0$必有$\Delta f<0$，则$f(P_0)$为极大值；

2) 当 $AC-B^2<0$ 时，Δf有正有负，故P_0不是极值点.

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0), (1, 2), (–3, 0), (–3, 2).

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \overbrace{f_{xy}(x,y)=0}^{B},\quad \overbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}^{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\quad A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$ 为极小值;

在点(1,2) 处 $A=12,\ B=0,\ C=-6,$

$AC-B^2=12\times(-6)<0,\quad \therefore f(1,2)$ 不是极值;

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=-12\times 6<0,\quad \therefore f(-3,0)$ 不是极值;

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6,$

$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\quad A<0,$

$\therefore f(-3,2)=31$ 为极大值.

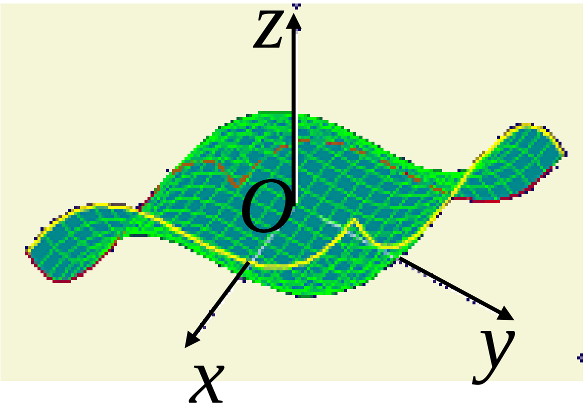
$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$

A B C

例2. 讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点, 并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

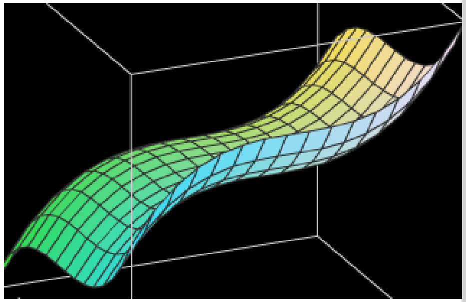


$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases}\text{正}\\ \text{负}\\ 0\end{cases}$, 因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, $z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$ 为极小值.



例3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则(**A**)

(*A*) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

(*B*) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点；

(*C*) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点；

(*D*) 根据条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(2003 考研)

例3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 则(**A**)

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点;

提示: 由题设 $\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha$, 其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$

$$\Rightarrow f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha\cdot(x^2+y^2)^2$$

$\Rightarrow$ 在$(0,0)$的邻近 $f(x,y)$的正负由xy确定.

二、多元函数的最值

依据

函数 f 在有界闭区域上连续

↓

函数 f 在该区域上可达到最值

假定:函数在有界闭区域内可微, 且只有有限个驻点.

可疑最值点 $\begin{cases} \text{驻点} \\ \text{边界上的最值点} \end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且只有一个极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小值 (大) ⟶ $f(P)$ 为最小值 (大)

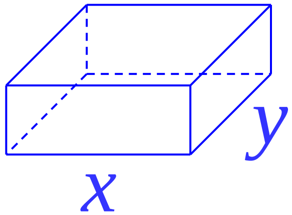
例4. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱, 问当长, 宽, 高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x, y m, 则高为 $\frac{2}{xy}$ m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$



根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长与宽均为 $\sqrt[3]{2}$, 高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

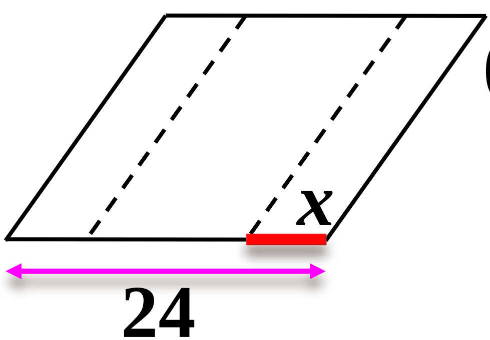
例5. 有一宽为 24cm 的长方形铁板, 把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

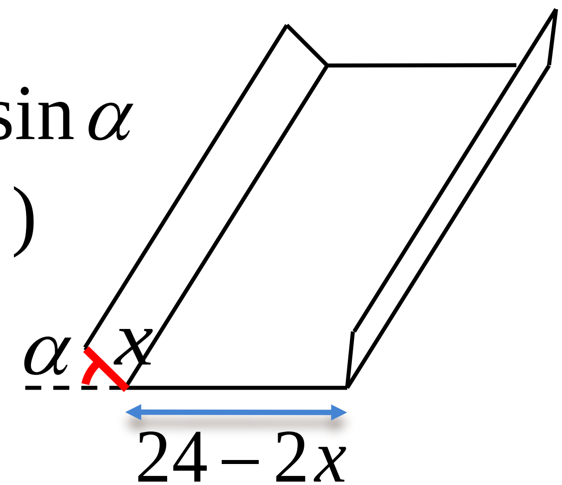
解: 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α, 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(\underbrace{24-2x+2x\cos\alpha}_{\text{上底长}}+\underbrace{24-2x}_{\text{下底长}})\cdot x\sin\alpha$$

$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\left(D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$





$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D: 0 < x < 12, 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$

$\Big\downarrow$ $\sin\alpha \neq 0$, $x \neq 0$

由 $x = \dfrac{12}{2-\cos\alpha}$, 代入

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得 $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$, $x = 8\,(\mathrm{cm})$

由题意知, 最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

三、条件极值

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值：对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外，还有其他条件限制} \end{cases}$

条件极值的求法：

方法1　代入法

在条件$\varphi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值.

$\Big\downarrow$ 转化　从条件$\varphi(x,y)=0$中解出$y=\psi(x)$

求一元函数$z=f(x,\psi(x))$的无条件极值问题.

方法2 拉格朗日/*Lagrange*/ 乘数法

在条件$\varphi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值.

分析: 如方法 1 所述，设$\varphi(x,y)=0$可确定隐函数$y=\psi(x)$，则问题等价于一元函数$z=f(x,\psi(x))$的极值问题，故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$，故有$f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$，即$\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$

记$\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

记 $\dfrac{f_x}{\varphi_x} = \dfrac{f_y}{\varphi_y} = -\lambda$

引入辅助函数 $L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

则极值点满足 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数L称为拉格朗日(Lagrange)函数.利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广： 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值.

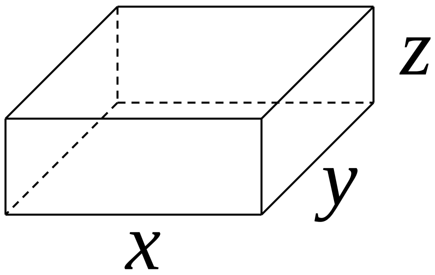
设 $L(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda_1\varphi(x,y,z) + \lambda_2\psi(x,y,z)$

解方程组 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda_1\varphi_x + \lambda_2\psi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda_1\varphi_y + \lambda_2\psi_y = 0 \\ L_z = f_z + \lambda_1\varphi_z + \lambda_2\psi_z = 0 \\ L_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ L_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$ 可得到条件极值的可疑点.

例6. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长, 宽, 高等于多少时所用材料最省?

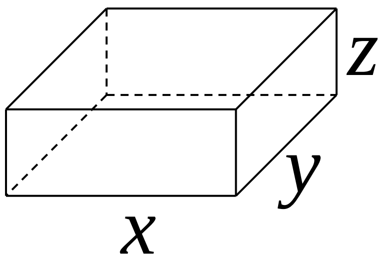
解: 设 x, y, z 分别表示长, 宽, 高,则问题为求x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小. 令 $L(x, y, z; \lambda) = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$

解方程组
$$\begin{cases} L_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ L_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ L_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ L_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$



得唯一驻点 $x=y=2z=\sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda=\dfrac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的. 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{4}}$, 长, 宽都为高的 2 倍时, 所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长, 宽, 高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x=y=z=\sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长, 宽, 高尺寸如何?

提示: $L=2(xz+yz)+2xy+\lambda(xyz-V_0)$

长, 宽, 高尺寸相等.

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x,y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件判别驻点是否为极值点.

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值,

设拉格朗日函数 $L(x,y;\lambda) = f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点.

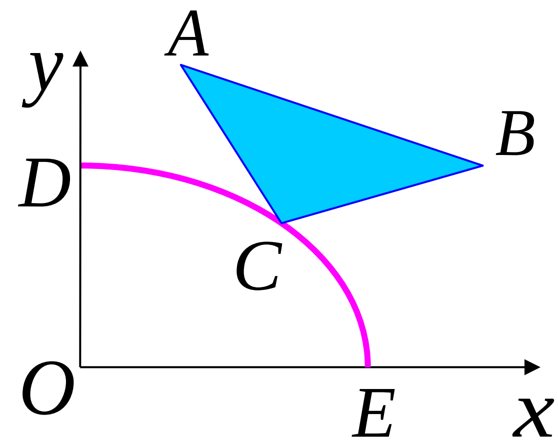
3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 1. 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y), 则

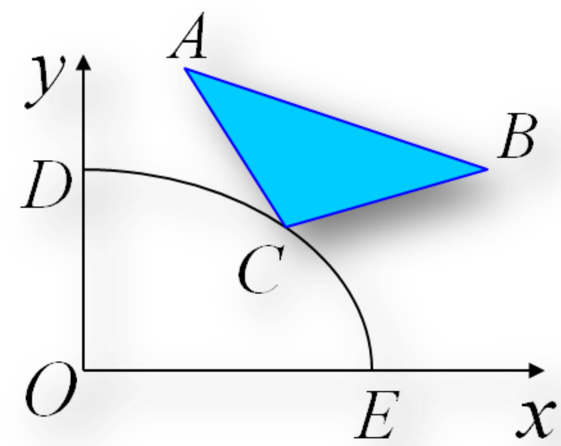
$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$



得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_E=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

2. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解一： 设平面上点 $A(x, y, z)$, 点 A 到原点的距离为 d,

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

则拉格朗日函数 $L(x,y;\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y-1)$

解方程组 $\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+2\lambda=0 \\ 2z=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ 得唯一驻点 $x=\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{2}{5}, z=0$

$$\lambda=-\frac{2}{5}$$

由题意可知此点为所求,且最短距离为

$$d=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解二: 设过原点且垂直于已知平面的直线为 L,则

$$\vec{s}=(1,2,0),\ L:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{0}$$

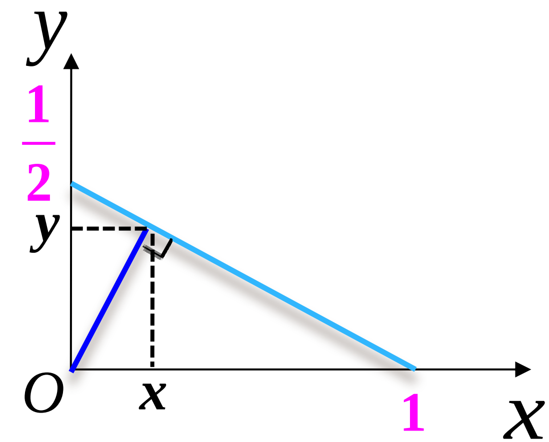
其参数方程 $x=t, y=2t, z=0$

代入平面方程 $t+4t-1=0$ 得 $t=\dfrac{1}{5}$,

故所求点坐标为: $x=\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{2}{5}, z=0$

2. 求平面 $x+2y=1$ 上距离原点最近的点的坐标. (6分)

解三: 由于平面平行于 z 轴, 垂直于 xoy 面, 故所求点必在 xoy 面上, 坐标设为 $(x, y, 0)$, 事实上即求 xoy 面上原点(0,0)到直线 $x+2y=1$ 的最短距离的点.



$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \dfrac{1}{2} \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

即 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 且 $x+2y-1=0$

推得: $x=\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{2}{5}, z=0$

3.将长为l的细铁丝剪成三段,分别用来围成圆、正方形和正三角形,问怎样剪法,才能使它们所围成的面积之和最小?并求出最小值. (6分)

解: 设剪成的三段分别为x,y,z,则围成的面积之和为

$$S=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36} \text{ 且 } x+y+z=l$$

则拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l)$$

则拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{\sqrt{3}z^2}{36}+\lambda(x+y+z-l)$$

解方程组 $\begin{cases} L_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0 \\ L_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0 \\ L_z=\dfrac{\sqrt{3}z}{18}+\lambda=0 \\ L_\lambda=x+y+z-l=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\dfrac{l\pi}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ y=\dfrac{4l}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ z=\dfrac{3\sqrt{3}l}{4+3\sqrt{3}+\pi} \\ \lambda=\cdots\cdots \end{cases}$

由于得唯一驻点,故即为所求, 且$S=\cdots\cdots$