§ 7_5_3

斯托克斯公式 *环流量与旋度

/* Circulation and Rotation */

一、斯托克斯(Stokes)公式

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

*三、环流量与旋度

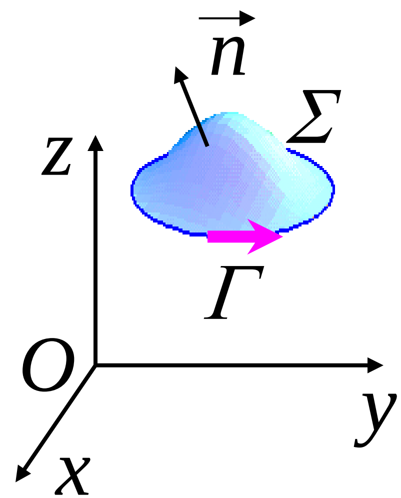
一、 斯托克斯公式

定理1. 设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面, Γ的正向与Σ的侧符合**右手法则**, P, Q, R在曲面Σ连同边界Γ上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$ **(斯托克斯公式)**

证略



$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

简言之:有向曲面Σ上的第二类曲面积分,等于其正向边界封闭曲线Γ上的第二类曲线积分.Γ正向与Σ的侧符合右手规则.

注意:如果Σ是xOy面上的一块平面区域,则斯托克斯公式就是格林公式,故格林公式是斯托克斯公式的特例.

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示：

$$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$$

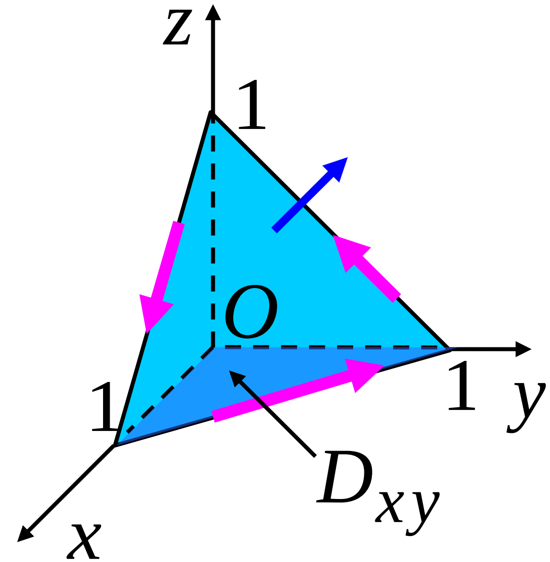
$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$P \quad Q \quad R$$

$$= \oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

例1. 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$

其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界, 方向如图所示.



解: 记三角形域为Σ, 取上侧, 则

$$\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

利用轮换对称性

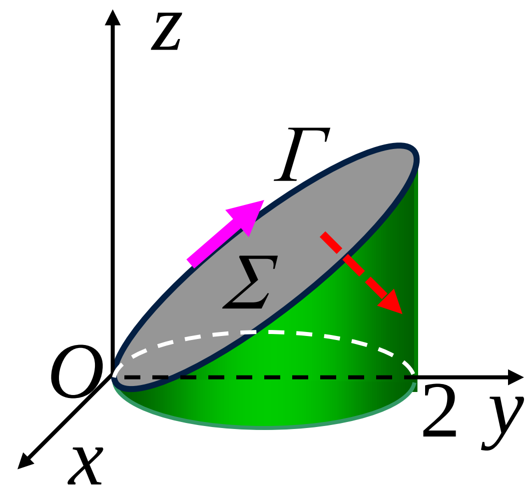
$$= \iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

思考: 如何转化为第一类曲面积分计算?

例2. Γ为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线, 从 z 轴正向看为顺时针, 计算 $I=\oint_{\Gamma} y^2\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}y+xz\,\mathrm{d}z$.

解: 设Σ为平面 $z=y$ 上被 Γ 所围椭圆域, 且取下侧, 则其法线方向余弦

$$\cos\alpha=0,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



利用斯托克斯公式得

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}(y-z)\,\mathrm{d}S=0$$

思考: 如何转化为第二类曲面积分计算?

*二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理2. 设 G 是空间一维单连通域, 函数 P, Q, R 在G内具有连续一阶偏导数, 则下列四个条件相互等价:

(1) 对G内任一分段光滑闭曲线$\varGamma$, 有

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$$

(2) 对G内任一分段光滑曲线$\varGamma$, $\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 与路径无关

(3) 在G内存在某一函数 u, 使 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

(4) 在G内处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

证: (4) $\Rightarrow$ (1) 由斯托克斯公式可知结论成立;

(1) $\Rightarrow$ (2) (自证);

(2) $\Rightarrow$ (3) 设函数

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y,z)-u(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P\,\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x\to 0} p(x+\theta\Delta x,y,z)$$

$$(0<\theta<1)$$

$$=P(x,y,z)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)$

故有 $\quad \mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$

(3) $\Rightarrow$ (4) 若(3)成立, 则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R$$

因P, Q, R 一阶偏导数连续, 故有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

同理 $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y},\quad \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$

证毕

(4)可记忆为:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\vec{0}$$

例3. 验证曲线积分 $\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0}$$

与路径无关, 并求函数

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)$$

解: 令 $P=y+z\,,\ Q=z+x\,,\ R=x+y$

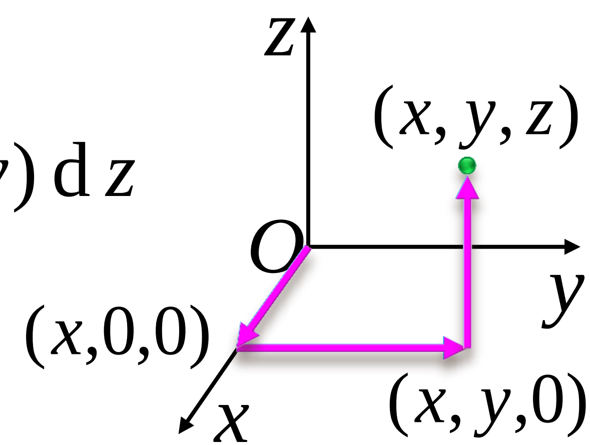
$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$\therefore$ 积分与路径无关, 因此

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z (x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z$$

$$=xy+yz+zx$$



*三、 环流量与旋度

斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

设曲面 Σ 的法向量为 $\vec{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

曲线 Γ 的单位切向量为 $\vec{e}_\tau=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$

则斯托克斯公式可写为

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A}=(P,Q,R)$, 由之前引入的向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\times\vec{A}\ \underline{\underline{\text{记作}}}\ \mathrm{rot}\vec{A}$$

rotation

于是得斯托克斯公式的向量形式:

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{e}_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$$

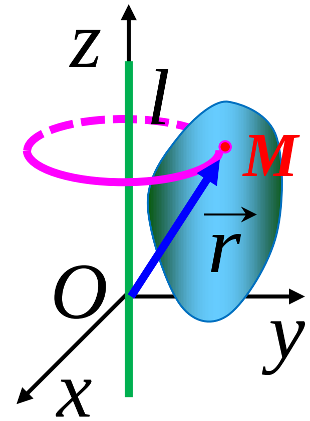
或

$$\iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\,A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_\tau\,\mathrm{d}s \qquad ①$$

定义. $\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}A_\tau\,\mathrm{d}s$ 称为向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的**环流量**. 向量 $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ 称为向量场 $\vec{A}$ 的**旋度**.

旋度的力学意义

设某刚体绕定轴 l 转动，角速度为 $\vec{\omega}$，M 为刚体上任一点，建立坐标系如图，则



$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega), \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

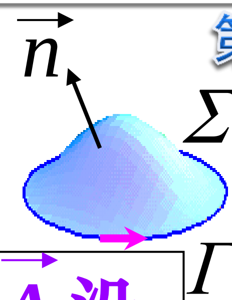
点 M 的线速度为

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega) = 2\vec{\omega}$$

(此即“旋度”一词的来源)

斯托克斯公式①的物理意义



$$\iint_{\Sigma}(\mathrm{rot}\ A)_n\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\,\mathrm{d}s$$

向量场 $\vec{A}$ 产生的旋度场穿过 Σ 的通量

向量场 $\vec{A}$ 沿 Γ 的环流量

注意 Σ 与 Γ 的方向形成右手系!

例4. 求电场强度 $\vec{E}=\dfrac{q}{r^3}\vec{r}$ 的旋度.

解:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{qx}{r^3} & \dfrac{qy}{r^3} & \dfrac{qz}{r^3}\end{vmatrix}=(0,0,0)\quad\text{(除原点外)}$$

这说明, 在除点电荷所在原点外, 整个电场无旋.

例5. 设 $\vec{A}=(2y\,,3x\,,z^2)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$, $\vec{e}_n$ 为 Σ 的外法向量, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{e}_n\,\mathrm{d}S$.

解: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2y & 3x & z^2\end{vmatrix}=(0\,,0\,,1)$$

$$\vec{e}_n=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$$

$$\therefore\quad I=\oiint_{\Sigma}\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma_{上}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oiint_{\Sigma_{下}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

内容小结

1. 斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

也可写成:

$$\oint_{\Gamma} A_{\tau}\,\mathrm{d}s = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A})_n\,\mathrm{d}S$$

其中

$\vec{A} = (P, Q, R)$

A_{τ} —— **$\vec{A}$在 Γ 的切向量 $\vec{\tau}$ 上投影**

$(\nabla \times \vec{A})_n$ —— **$\vec{A}$ 的旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 在 Σ 的法向量 $\vec{n}$ 上投影**

2. 空间曲线积分与路径无关的充要条件

设 P, Q, R 在 Ω 内具有一阶连续偏导数, 则

$$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$ 在 Ω 内与路径无关

$\rightleftarrows$ 在 Ω 内处处有

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\rightleftarrows$ 在 Ω 内处处有

$$\operatorname{rot}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{0}$$

3. 场论中的三个度

设 $u=u(x,y,z)$， $\vec{A}=(P,Q,R)$， $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$， 则

梯度: $$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\nabla u$$

散度: $$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$$

旋度: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$$

思考与练习

设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=$ $\underline{\ {}^{2}\!/\!{}_{r}\ }$； $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=$ $\underline{\ \vec{0}\ }$.

提示： $\operatorname{grad} r=\left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},\dfrac{z}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\cdot {}^{x}\!/\!{}_{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{r^2-y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

三式相加即得 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} r)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & \dfrac{z}{r}\end{vmatrix}=(0,0,0)$$