数学家认为, 近代数学的发展以致辉煌离不开无穷概念的引入及研究, 它是数学的魅力之一.

无穷是一个永恒的谜.

——希尔伯特

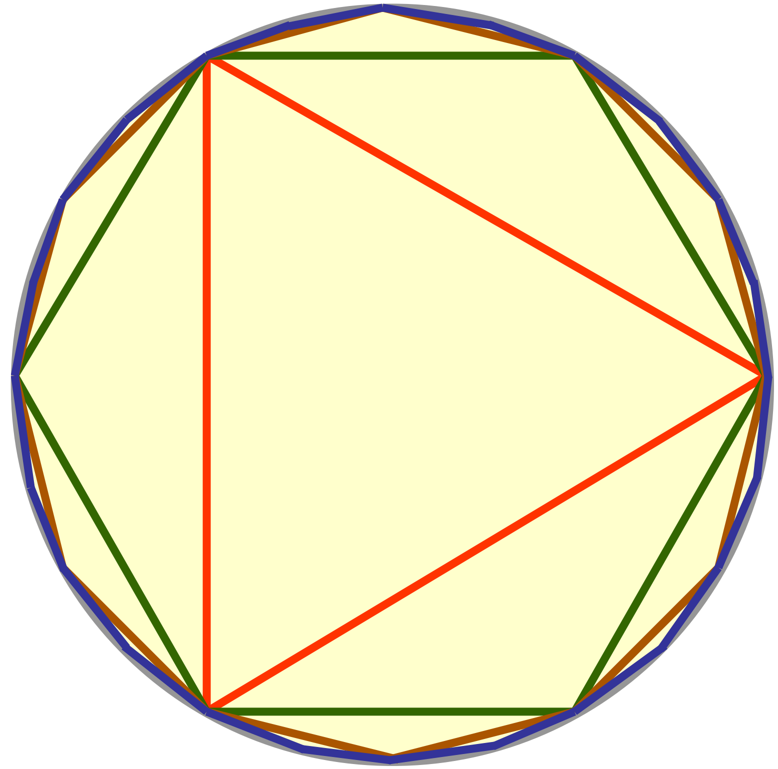
光辉的起点 数学无穷发展的萌芽时期

- 两千年以前，人们就已经产生了对数学无穷的萌芽认识
- 我国著名的《庄子》一书中有一段脍炙人口的话：

“一尺之棰，日取其半，而万世不竭”

- 第一个创造性地将无穷思想运用到数学中的是魏晋时期著名数学家刘徽.
- 他提出用增加圆内接正多边形的边数来逼近圆的“割圆术”.可见刘徽对数学无穷的认识已相当深刻.

割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣.



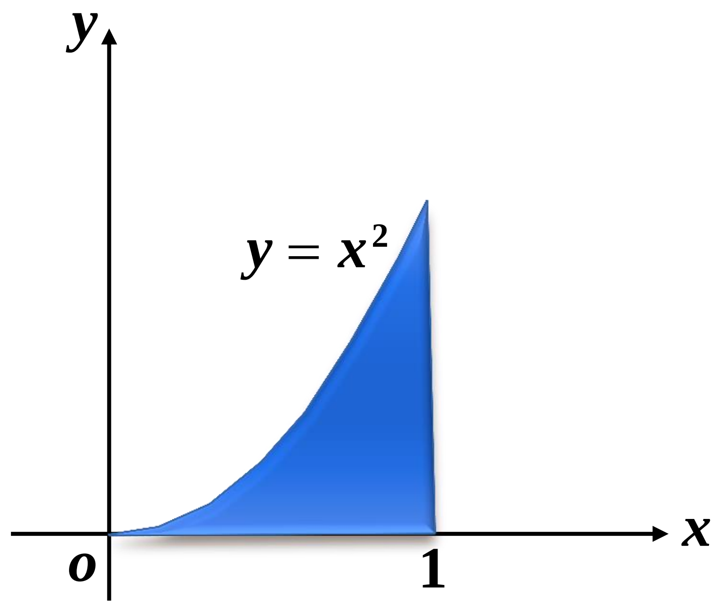
"割圆术"

----用内接正多边形的面积逼近圆的面积

刘徽一直计算到96边形的周界，得 $\pi \approx 3.14$ 的结果.

- 在国外, 古希腊毕达哥拉斯学派、柏拉图学派也有了对无穷思想的探索 .
- 数学之神阿基米德所运用的穷竭法已具近代极限理论的雏形 .
- 阿基米德对穷竭法应用之熟练, 使后人感到他在当时就已接近了微积分的边缘 .

求由抛物线 $y=x^2$,直线 $x=1$和 x 轴所围成曲边图形的面积.



第八章 无穷级数

/*Infinite Series*/

无穷级数 $\begin{cases} \text{数项级数} \\ \text{幂级数} \end{cases}$

无穷级数是研究函数的工具 $\begin{cases} \text{表示函数} \\ \text{研究性质} \\ \text{数值计算} \end{cases}$

第一节

常数项级数的概念和性质

一、常数项级数的概念

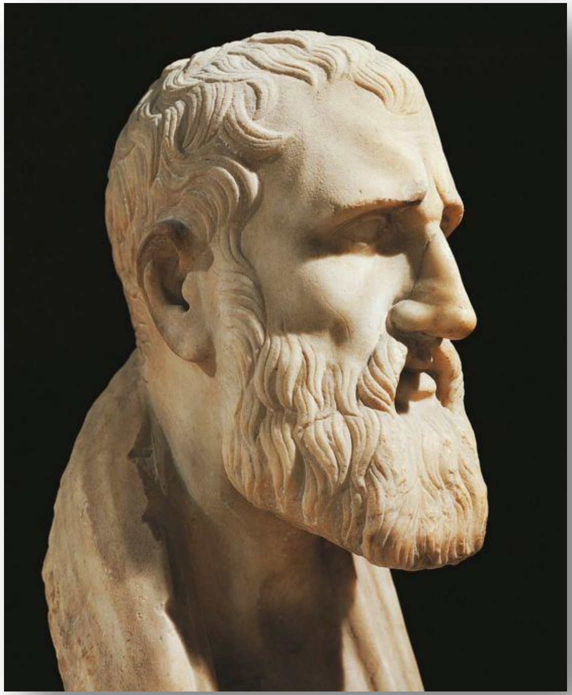
二、无穷级数的基本性质

三、级数收敛的必要条件

*四、柯西审敛原理

一、常数项级数的概念

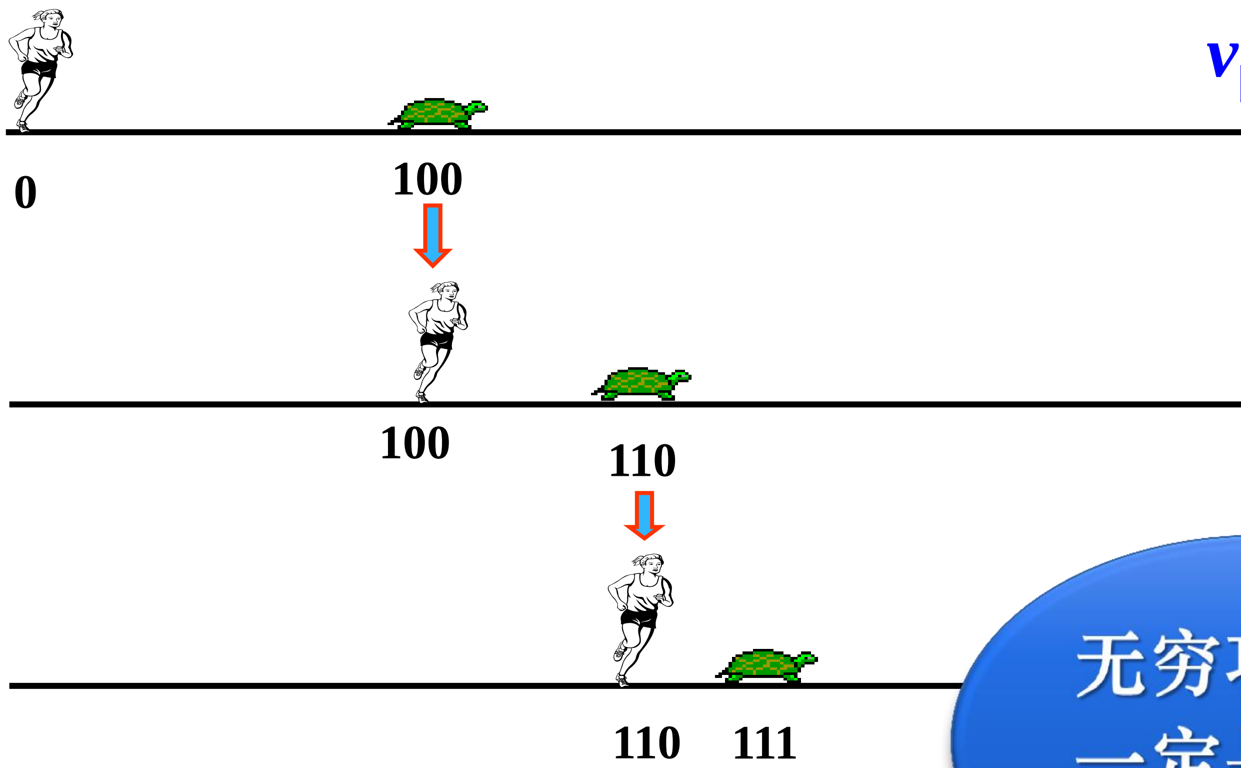
引例. 两千多年前，古希腊学者芝诺曾提出一个著名的“追龟”诡辩题.阿基里斯是古希腊传说中擅长跑步的英雄.但芝诺却断言：阿基里斯与乌龟赛跑，将永远也追不上乌龟！



芝诺 (Zeno)
约公元前496-429

为什么阿基里斯永远追不上乌龟?

$$v_{\text{阿基里斯}} = 10 \cdot v_{\text{乌龟}}$$



无穷项之和一定是无穷大吗?

在芝诺悖论中阿基里斯追乌龟所

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

定义. 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项, 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

则有 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k$$

1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ 存在,则称无穷级数**收敛**,并称 S 为级数的**和**,记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,此时称差值 $r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 为级数的**余项**,显然 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$;

2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在,则称无穷级数**发散**.

无穷级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和收敛 $\Longleftrightarrow$ 余项收敛于0

级数举例

级数的展开形式	简写形式	一般项	备注
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	调和级数
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{1}{n(n+1)}$	
$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$	$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$	aq^{n-1}	等比级数 几何级数
$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$	$\frac{1}{n^p}$	p—级数

例1. 讨论公比为q的等比级数 (又称几何级数)的敛散性.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^{n}=a+a q+a q^{2}+\cdots+a q^{n}+\cdots \quad (a \neq 0)$$

注意: 不规范! 但已成习惯.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}=a+a q+a q^{2}+\cdots+a q^{n-1}+\cdots \quad (a \neq 0)$$

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_{n}=a+a q+a q^{2}+\cdots+a q^{n-1}=a \frac{1-q^{n}}{1-q}$$

当 $|q|<1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n}=0$, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_{n}=\frac{a}{1-q}$

因此级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q|>1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} q^{n}=\infty$, 从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_{n}=\infty$,

因此级数发散.

$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n, \ (a \neq 0)$

2) 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$时, $S_n = n a \to \infty$, 因此级数发散;

当 $q=-1$时, 级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

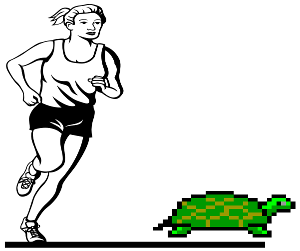
因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

综合 1), 2)可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛;

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散.

引例. 阿基里斯真的追不上乌龟吗?



阿基里斯要追上乌龟所走过的距离是

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$$

a=100，q=0.1的等比级数

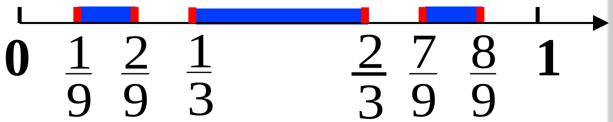
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1000}{9}\text{(米)}.$$

阿基里斯只要跑过 $\frac{1000}{9}$ 米的路程就可以追上乌龟!

例2. (神秘的康托尔尘集) 把[0,1]区间三等分, 舍弃中间的开区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, 将剩下的两个子区间分别三等分, 并舍弃在中间的开区间, 如此反复进行这种“弃中”操作, 问丢弃部分的总长和剩下部分的总长各是多少?

丢弃的各开区间长依次为 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2^3}{3^4}, \cdots, \frac{2^{n-1}}{3^n}, \cdots$

故丢弃部分总长



$$l_{丢} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right]$$

剩余部分总长 $l_{剩} = 1 - l_{丢} = 0$

剩余部分总长虽然为0, 但康托尔证明了其成员和
它们象尘埃一样散落在[0,1]区间上,人们称其为康托
长度趋于0, 而数目趋于无穷”的特点颠覆了传统几何

例4. **判别下列级数的敛散性:**

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1) $S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+(\cancel{\ln 4}-\cancel{\ln 3})+\cdots$$

$$+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散.

技巧

利用“拆项相消”求和

(2) $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1.

技巧

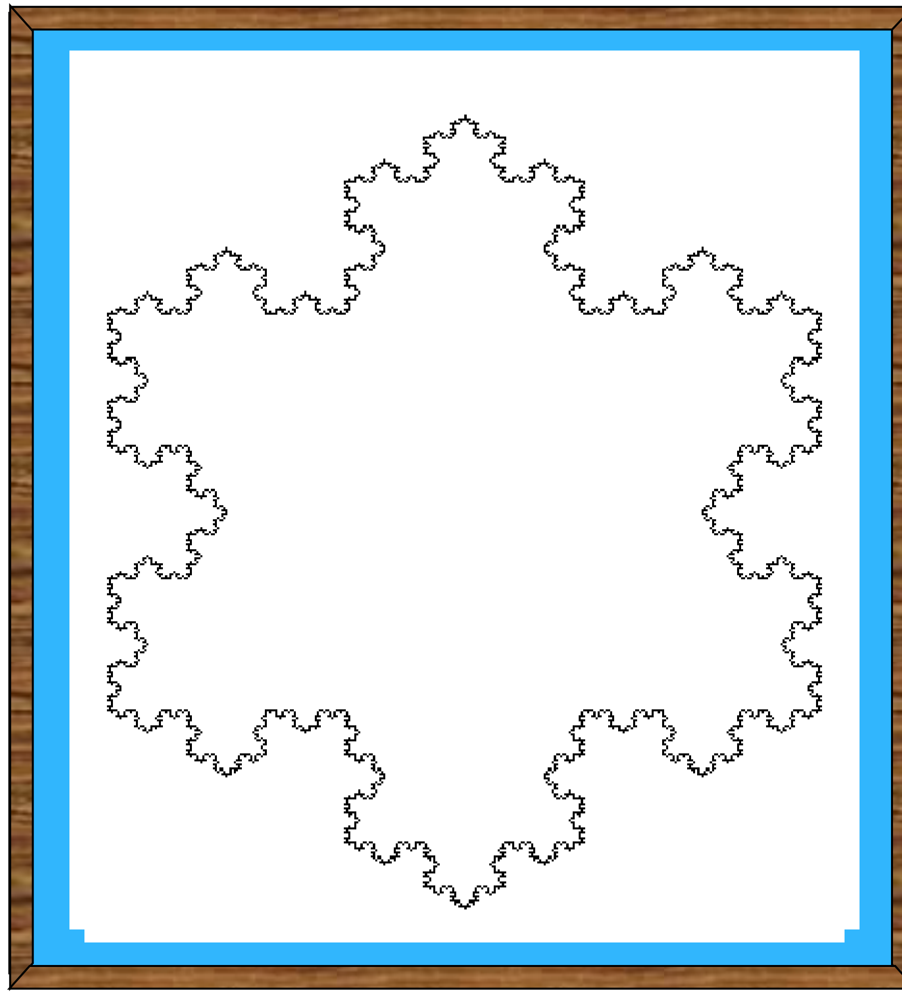
利用 “拆项相消” 求和

Koch雪花 — 分形问题

问题：

这片美丽的Koch雪花的**周长**是多少?

面积是多少?



1904年，瑞典数学家柯赫构造

问题：

观察雪花分形过程

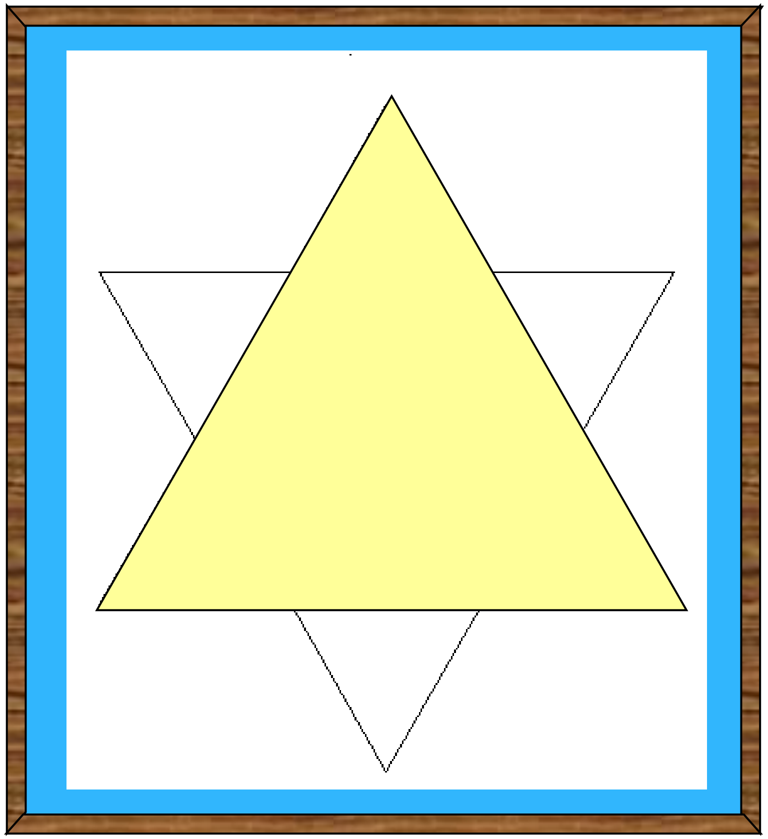
三角形周长 $P_1 = 3$

三角形面积 $A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

第一次分叉：

周长 $P_2 = \dfrac{4}{3} P_1$

面积 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot A_1$



依此类推

$$\text{雪花周长} = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{4}{3})^{n-1} P_1 = \lim_{n\to\infty} 3\cdot(\frac{4}{3})^{n-1} = \infty$$

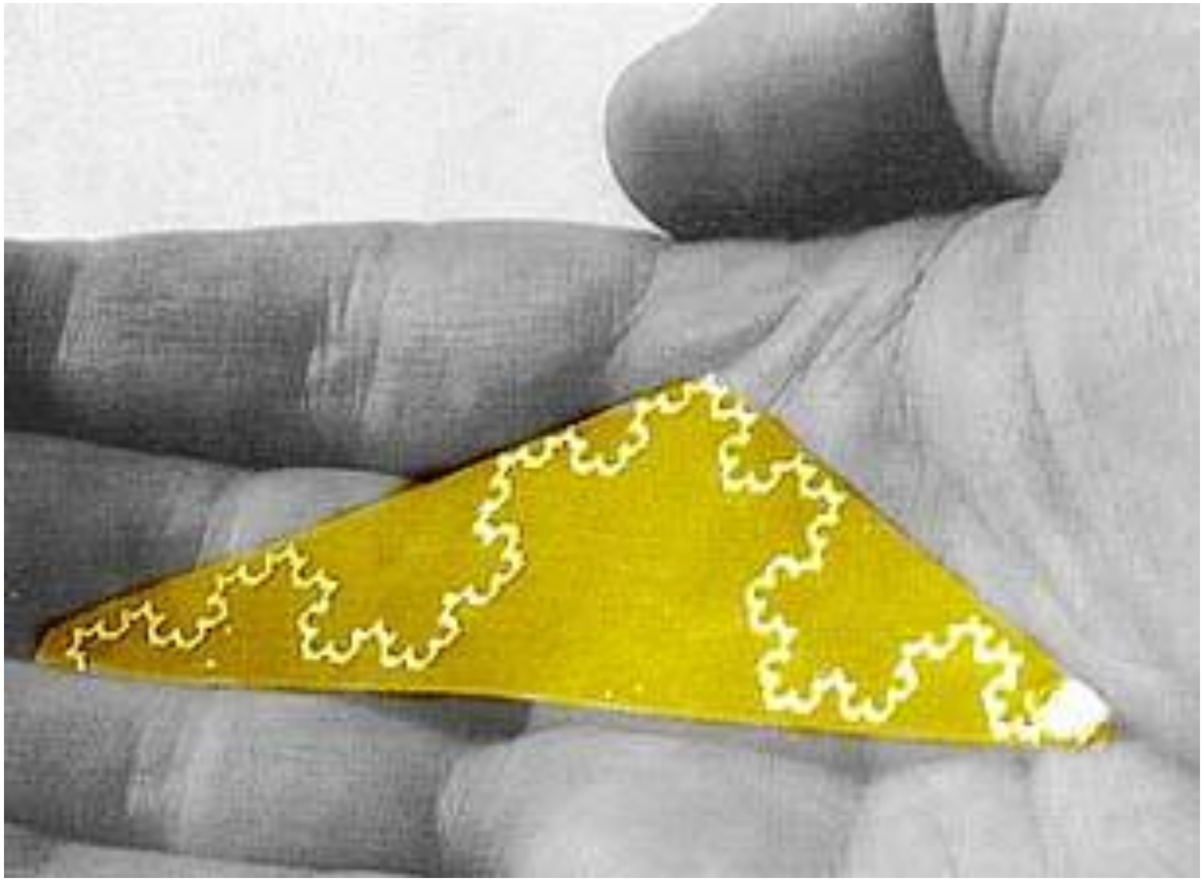
$$\text{雪花面积} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \{A_{n-1} + 3\{4^{n-2}[(\frac{1}{9})^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}]\}\}$$

结论：

$$= \lim_{n\to\infty} \{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \{1 + [\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(\frac{4}{9}) + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^2 + \cdots + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}]\}\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}}) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

——“怪兽曲线”



Koch单极天线——体积小、频带宽

分形几何学简介

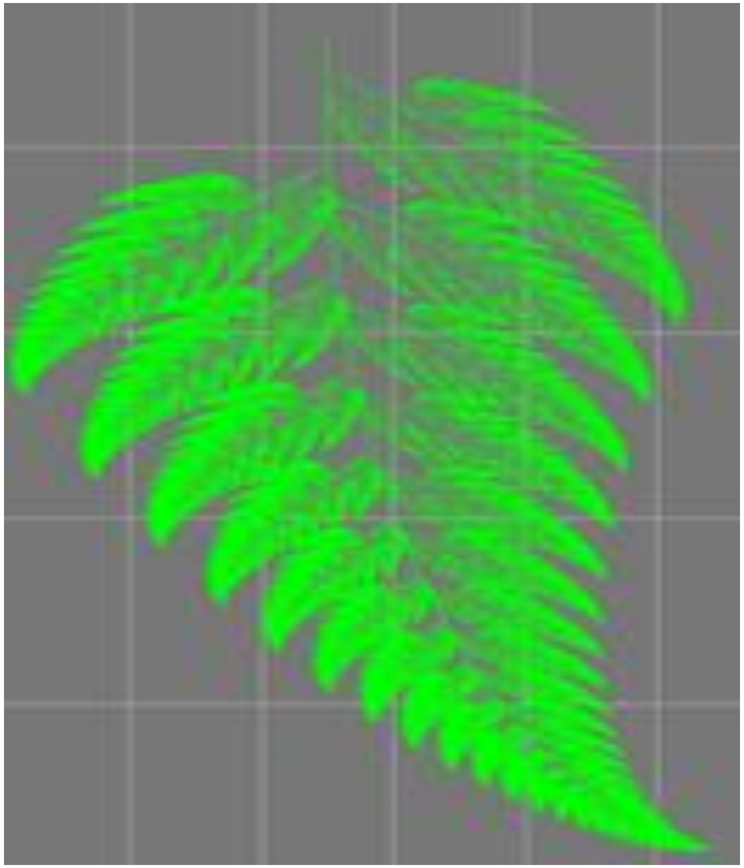
客观自然界中许多事物，具有自相似的“层次”结构，在理想情况下，甚至具有无穷层次。许多自然现象，特别是物理现象和分形有着密切的关系。比如，布朗粒子的运行轨迹，银河系中的若断若续的星体分布，多孔介质中的流体运动和它产生的渗流模型，都是分形的研究对象。这些促使数学家进一步的研究，从而产生了分形几何学。

利用无穷层次结构和无限嵌套形式，应用计算机图形显示协助了人们推开分形几何的大门。

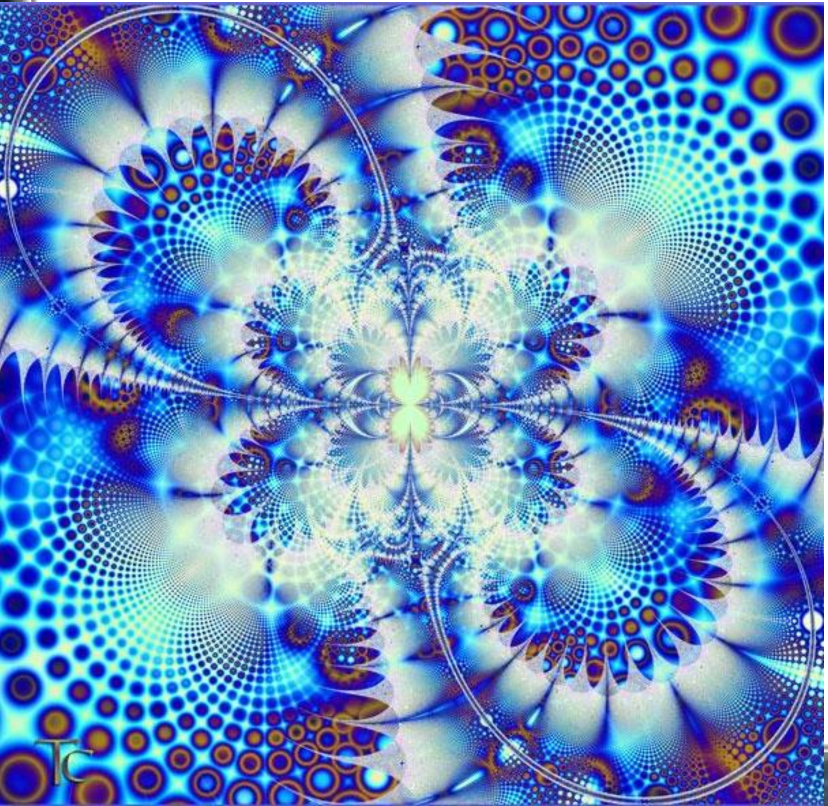
法国数学家曼德尔勃罗特对分形几何产生了重大的推动作用。他在1975、1977和1982年先后用法文和英文出版了三本书，特别是《分形——形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》，开创了新的数学分支——分形几何学。

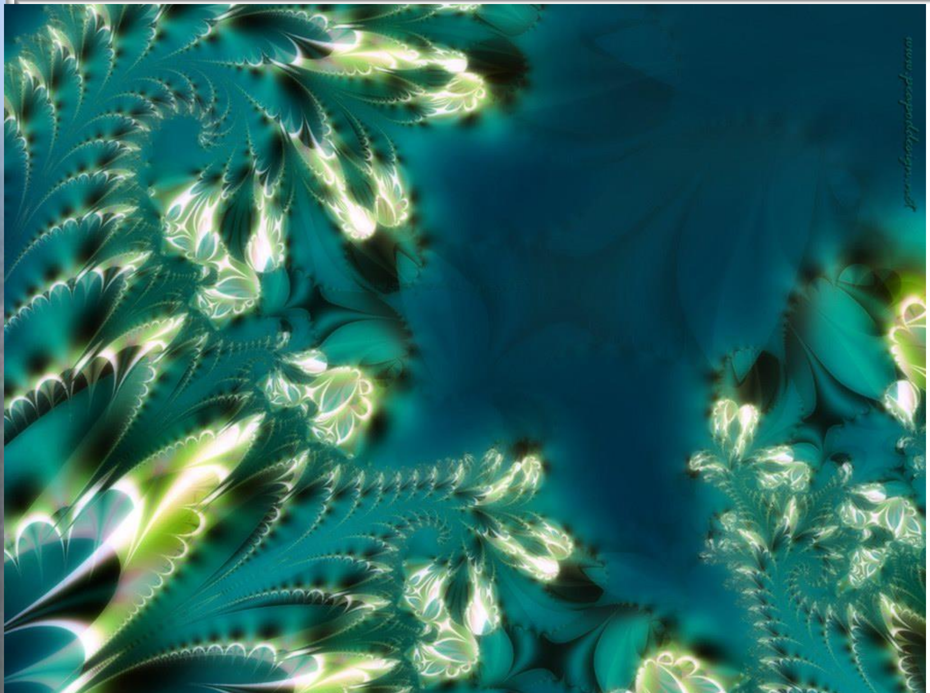
分形几何学作为当今世界十分风靡和活跃的新理论、新学科。分形几何学不仅让人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美的统一，而且还有其深刻的科学方法论意义。

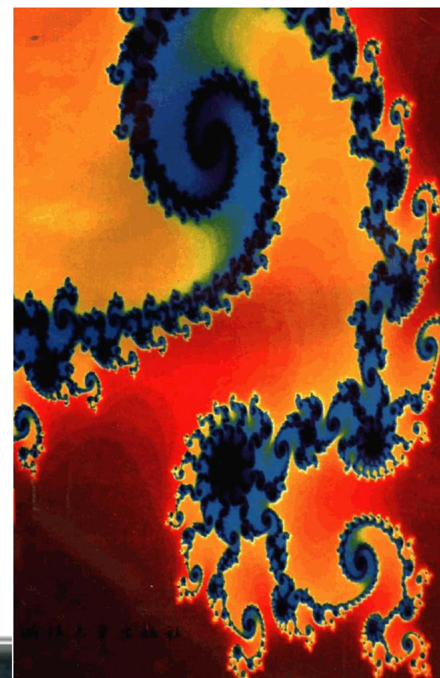
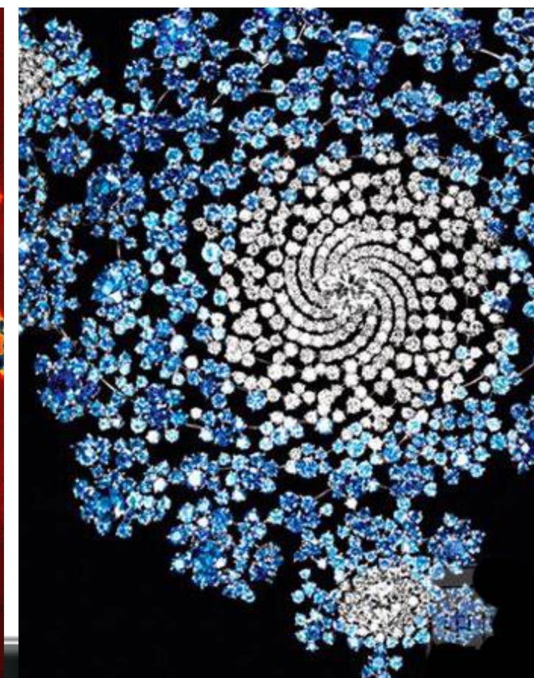
真实蕨类树叶图片



分形技术模拟图片





二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S, 即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛, 其和为 $c\,S$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$, 则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c\,u_k=c\,S_n$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=c\,S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛, 其和为 cS.

说明: 级数各项乘以**非零常数**后其敛散性不变.

性质2. 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n\pm\sigma_n \to S\pm\sigma \quad (n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$

(1) 收敛+收敛 ⟹ 收敛

(2) 收敛+发散 ⟹ 发散 (用反证法可证)

(3) 发散+发散 ⟹ 未必发散

例如, 取 $u_n = (-1)^n,\ v_n = (-1)^{n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

推广: 在级数中加上/去掉/修改有限项, 不影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为 $\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况.

性质4. 收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括号, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

说明 加减括号对敛散性影响

(1) 收敛+(　　) ⟹ 收敛

(2) 收敛−(　　) ⟹ 未必收敛

(3) 发散+(　　) ⟹ 未必发散

(4) 发散−(　　) ⟹ 发散　(用反证法可证)

例如 $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$，但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

三、级数收敛的必要条件

性质5. 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证： $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见：若级数的一般项不趋于0，则级数必发散.

例如, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$，其一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当 $n\to\infty$ 时，u_n 不趋于0，因此这个级数发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散.

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$$

但 $$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

矛盾! 所以假设不真.

例4. 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ **发散!**

从而原级数发散.

***例5.** 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\,n!}{n^n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

解: (1) 令 $u_n=\dfrac{e^n\,n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\tfrac{1}{n})^n<e<(1+\tfrac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n\,n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $\quad u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

(2) $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$

$S_n-\frac{1}{2}S_n$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}\right)$

$=\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}S_n$

$\therefore\quad S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$

这说明原级数收敛, 其和为 3.

*四、柯西审敛原理

定理. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathrm{N}^{+}$,

当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathrm{N}^{+}$, 有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

证: 设所给级数部分和数列为 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$, 因为

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon$$

所以利用数列 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的柯西审敛原理(第一章第六节), 即得本定理的结论.

例6. 利用柯西审敛原理判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解: 对任意 $p \in \mathrm{N}^{+}$,有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathrm{N}^{+}$,
都有

$$\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

由柯西审敛原理可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.