DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 1207 Sección 5 Cálculo Vectorial

TALLER 1

Febrero 20 de 2019

1. Considere las seis proposiciones a continuación relativas a un campo escalar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y a un punto (cualquiera) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

   a) f es continuo en $\boldsymbol{a}$.
   b) f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$.
   c) $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ existe para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ (derivada direccional en $\boldsymbol{a}$ en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{v}$).
   d) Existen todas las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^n$ y son continuas en $\boldsymbol{a}$.
   e) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \vec{\boldsymbol{O}}$.
   f) $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

   En la tabla a continuación, marque con una V cada casilla para la cual la proposición en su fila implica siempre la proposición en su columna.

	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e						
f						

2. Para cada una de las superficies y puntos dados a continuación, halle:

   a) La ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie en el punto dado.
   (*Sugerencia: Hay dos maneras de hacerlo: Una, considerando la superficie como la gráfica de una función apropiada de dos variables y, otra, considerando la superficie como una superficie de nivel de una función apropiada de tres variables*.)

   b) Una ecuación paramétrica vectorial para la recta normal a la superficie en el punto dado.

   - $z = \frac{1}{xy}$ en el punto $(1, -1, -1)$
   - $z = e^{x^2 - y^2}$ en el punto $(0, 0, 1)$
   - $z = senx\ seny$ en el punto $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{4})$

3. Una partícula sigue la trayectoria $\boldsymbol{\alpha}(t) = (e^t, e^{-t}, cost)$ hasta que escapa por la tangente en $t = 1$. ¿Dónde estará en $t = 2$?

4. Pruebe que la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$ es continua en $(0,0)$.

5. Para cada una de las afirmaciones a continuación responda verdadero (V) o falso (F) y luego justifique su respuesta de manera clara y breve.

   a) Si $\boldsymbol{\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial tal que $\| \boldsymbol{\alpha}'(t) \| = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ es perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   b) Si $\vec{\boldsymbol{r}}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, entonces $div(r\vec{\boldsymbol{r}}) = rdiv\vec{\boldsymbol{r}}$.

6. Para cada una de las funciones dadas a continuación, identifique y clasifique sus puntos críticos.

   a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
   b) $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

7. Determine los puntos donde la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ alcanza un mínimo (máximo) absoluto en el disco unitario $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (*Sugerencia: Para el interior del disco, es decir, la parte donde $x^2 + y^2 < 1$, halle los puntos críticos de f y, luego, utilice la matriz Hessiana para determinar su naturaleza. Para la frontera, es decir, la parte donde $x^2 + y^2 = 1$, puede, ya sea usar multiplicadores de Lagrange, ya sea parametrizar el círculo y reducir el problema a un problema max/min de una variable. Al final debe comparar todos los puntos hallados.*)

8. Calcule los siguientes límites, si existen. En caso de no existir el límite, dé un argumento apropiado.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+1}$
   b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$
   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9.
   a) Halle los puntos (x,y) y las direcciones para los que la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ tiene valor máximo si (x,y) está en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.
   b) Un campo escalar diferenciable f tiene en el punto $(3,3)$ las derivadas direccionales 5 en la dirección unitaria dirigida al punto $(5,3)$ y 4 en la dirección unitaria dirigida al punto $(7,6)$. Halle el gradiente de f en el punto $(3,3)$ y calcule la derivada direccional de f en ese punto en la dirección del vector unitario $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

10.
   a) Si $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$, muestre que $div\, \boldsymbol{F} = 0$ y $rot\, \boldsymbol{F} = \vec{\boldsymbol{O}}$.
   b) Si $\boldsymbol{F}(x,y,z) = xy^2z^2\boldsymbol{i} + z^2seny\boldsymbol{j} + x^2e^y\boldsymbol{k}$, pruebe que no puede existir ningún campo vectorial $\boldsymbol{G}$ tal que $rot\, \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$. ¿Es $\boldsymbol{F}$ u n campo gradiente? Justifique su respuesta.