Taller preparatorio Examen Final de **Cálculo Vectorial** MATE 1207 Sección 5

PREGUNTAS ABIERTAS

Mayo 17 de 2019

S. Adarve, A. F. Patiño, N. Ramírez

1. Halle los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y,z) = x + z$ sujeto a las restricciones $x + y + z = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. Una caja rectangular sin tapa debe hacerse con 12 m^2 de cartón. Encuentre el máximo volumen de tal caja.

3. Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos de ensilladura de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

4. Determine los puntos de máximo (mínimo) absoluto de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y$ sobre el disco elíptico $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 6\}$.

5. Halle los puntos más cercanos al origen de la curva de intersección del cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ con el plano $y + z = 2$.

6. Halle los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 4z$ sujeto a las restricciones $x + z = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

7. Utilice una transformación lineal apropiada $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para calcular la integral

   $$\iint_R (x+y)^2 e^{x-y} dxdy,$$

   siendo R el cuadrado de vértices $(0,-1), (1,0), (0,1)$ y $(-1,0)$.

8. Considere el cambio de variables definido mediante la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $x = v,\ y = u/v,$ y sea D la región en el plano xy limitada por las hipérbolas $xy = 1,\ xy = 2$ y las rectas $x = 2,\ x = 4$.

   a) Dibuje la región D en el plano xy y también la región D^* en el plano uv tal que $T(D^*) = D$.
   b) Utilice la transformación T para hallar la integral $\iint_D x^3 y \ dA$.

9. Un alambre delgado tiene la forma del círculo C de intersección del plano $y = x$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Suponga que C está orientado en contra de las manecillas del reloj al observarse desde la normal $(1, -1, 0)$. Halle el trabajo realizado por la fuerza $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ para mover una partícula una vez alrededor de C, esto es, calcule la integral $\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s}$.

10. Sea C la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$ y sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 1/3\,(-y^3\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k})$.
    a) Calcule la integral $\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{s}$.
    b) Utilice el Teorema de Stokes para calcular de nuevo la integral de la parte a).

11. Sea E el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $y + z = 1$ y $z = 0$ y sea S la frontera de E orientada con la normal exterior. Para cada uno de los campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ dados a continuación, halle $\iint_S \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$, el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S, de manera directa como integral de superficie. Compruebe el resultado mediante el Teorema de Gauss.
    a) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
    b) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i}$
    c) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z^3\boldsymbol{k}$

12. Considere el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$. Utilice el Teorema de Gauss para calcular la integral de superficie $\iint_S \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$, donde S es la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada con la normal exterior.

13. Repita el ejercicio anterior con el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ y con la superficie S obtenida al unir el paraboloide $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$, con el disco de radio 1 centrado en el origen ubicado en el plano $z = 0$, donde S está orientada con la normal exterior.

14. Sean $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ y S el cono circular dado por $x = rcos\theta,\ y = rsen\theta,$ $z = 4 - 2r$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2$.

a) Halle $rot\boldsymbol{F}$.

b) Calcule el flujo de $rot\boldsymbol{F}$ hacia afuera de S de dos maneras diferentes: evaluando directamente la integral de superficie $\iint_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$ y utilizando el Teorema de Stokes.

c) Sea D el disco $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$, en $\mathbb{R}^3$ orientado con la normal que apunta en la dirección del eje z positivo. Explique porqué

$$\iint_D rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S} = \iint_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}.$$

d) Sea R el hemisferio (superficie) $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, orientado con la normal con componente z positiva. Explique porqué

$$\iint_R rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S} = \iint_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}.$$

e) Compruebe las partes c) y d) calculando directamente las integrales $\iint_D rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$ y $\iint_R rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}$.

f) En general, describa las superficies Q en $\mathbb{R}^3$ para las cuales se tiene

$$\iint_Q rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S} = \iint_S rot\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{S}.$$