PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA : PARCIAL I

$$P(A) = \frac{\#\text{ favorables}}{\#\text{ posibles}}$$

Técnicas de conteo

1. Regla de multiplicación
   Un experimento consiste en dos partes. La primera da M resultados. Sin importar lo que pase en la primera, la segunda da N resultados.

   # Total Resultados = M · N. Si hay más, pues por más.

2. Permutaciones
   Selección sin reemplazo. K selecciones.
   EL ORDEN IMPORTA

   $P_{n,k}$ = # de ordenamientos de n elementos, tomados k veces $= \frac{n!}{(n-k)!}$

3. Combinaciones
   Se escogen K elementos de un conjunto de N elementos.
   EL ORDEN NO IMPORTA

   $$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Probabilidades condicionales

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B) > 0$$

* EVENTOS INDEPENDIENTES

  $P(A|B) = P(A)$
  $P(B|A) = P(B)$
  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Que sean independientes, NO significa que sean disyuntos.

* PROBABILIDADES TOTALES

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)\, P(B|A_j)$$

* TEOREMA DE BAYES

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_{j=1} P(A_j)\,P(B|A_j)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

* ARBOLES DE PROBABILIDAD

Variables aleatorias

Discretas

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

$g_X(x) = P(X = x)$

PROPIEDADES
1. Esta entre 0 y 1.
2. La sumatoria sobre el rango da 1.
3. Da 0 si $x \notin R$.

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A} g_X(x)$$

Contínua

FUNCIÓN DE DENSIDAD

$f_X(x)$

PROPIEDADES
1. Siempre es ≥ 0
2. Si integras sobre el rango da 1
3. Da 0 si $x \notin R$
4. Solita no es una probabilidad

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$$

Función de distribución

$F_X(x) = P(X \leq x)$

TEOREMA 1 $\quad P(X > x) = 1 - F_X(x)$
TEOREMA 2 $\quad P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a)$

En una variable aleatoria contínua $P(X=x)=0$

Medidas descriptivas de una distribución

DISCRETA

$$E(x) = \sum_{R(x)} x\, g_X(x)$$

CONTINUO

$$E(x) = \int_{R(x)} x\, f_X(x)$$

TEOREMAS

$Y = aX + b \rightarrow E(Y) = aE(X) + b$

VARIANZA

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

DESVIACIÓN ESTANDAR

$\sigma = \sqrt{var(X)}$

TEOREMAS

$var(aX+b) = a^2 var(X)$

Momentos

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

En $t=0$, debe dar 1.

Distribuciones discretas

BERNOULLI

Uno de dos resultados posibles

$$g_X(x) = p^x q^{1-x} \qquad q = 1-p$$

$E(X) = p$

$var(X) = pq \qquad X \sim B(p)$

$$M_X(t) = pe^t + q$$

GEOMÉTRICA

X: # requeridos de ensayos hasta obtener el primer éxito.

$$g_X(x) = q^{x-1} p$$

$E(X) = \frac{1}{p} \qquad var(X) = \frac{q}{p^2}$

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

BINOMIAL

X: # de éxitos en N ensayos

$$g_X(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$E(X) = np$

$var(X) = npq \qquad M_X(t) = (pe^t + q)^n$

BINOMIAL NEGATIVA

X: # de ensayos hasta completar k exitos.

$$g_X(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

$E(X) = \frac{k}{p}$

$var(X) = \frac{kq}{p^2} \qquad M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-e^t}\right]^k$

POISSON

X: # de ocurrencias de un fenómeno de interés en un periodo de tiempo de longitud t.

$$g_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$E(X) = \lambda$

$var(X) = \lambda \qquad M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

Distribuciones contínuas

UNIFORME

Todo es igualmente probable.

$$f_X = \frac{1}{b-a} \qquad E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \frac{(b-a)^2}{2}$$

EXPONENCIAL

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad E(X) = \frac{1}{x}$$

$$var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

PROPIEDAD DE NO MEMORIA

No importa lo que haya pasado antes la probabilidad no cambia

NORMAL

$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[\frac{-1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right]$$

$$E(X) = \mu \qquad M_X(t) = \exp\left(ut + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

$$var(X) = \sigma^2$$

TEOREMA

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $y = ax + b \rightarrow y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$