TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

CÁLCULO

TIPOS DE FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

Finalmente, se profundizará en los principales tipos de funciones como las lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas, abordando algunas de sus principales aplicaciones en la gestión de empresas.

Función lineal

La función lineal es una de las funciones más básicas y ampliamente utilizadas en matemáticas y en diversas aplicaciones prácticas. Se caracteriza por tener una relación proporcional constante entre la variable independiente y la variable dependiente. La forma general de una función lineal es $f(x) = mx + b$, donde m representa la pendiente (la tasa de cambio) y b representa la intersección con el eje y (el valor de la función cuando $x = 0$).

Para ampliar los conceptos sobre función lineal, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Épsilon Akdemy. (2020, 16 de marzo). Función lineal. [Video]. YouTube https://youtu.be/j5lsOeFGhYU

De acuerdo con Ortiz Campos et al. (2016), las funciones lineales son fundamentales en la modelación de relaciones económicas y empresariales. Por ejemplo, la función de demanda lineal establece una relación inversa entre el precio de un bien y la cantidad demandada, mientras que la función de oferta lineal muestra una relación directa entre el precio y la cantidad ofrecida. Estas funciones lineales permiten analizar el equilibrio del mercado y realizar predicciones sobre los cambios en precios y cantidades.

Ejemplo:

Una empresa produce y vende un producto. La función de ingreso total está dada por $I(x) = 50x$, donde x es la cantidad vendida y el precio unitario es de \$50. Esta función lineal indica que cada unidad adicional vendida genera un ingreso adicional constante de \$50. Si la empresa vende 100 unidades, el ingreso total sería $I(100) = 50(100) = \$5000$. La representación gráfica de esta función lineal sería una línea recta con pendiente 50 y que pasa por el origen.

Ejercicios:

a. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 5) y (-3, 1).

Solución:

- Calculamos la pendiente utilizando la fórmula $m = (y2 - y1) / (x2 - x1)$.

$$m = (1 - 5) / (-3 - 2) = -4 / -5 = 4/5$$

- Utilizamos la ecuación punto-pendiente y = y1 + m(x - x1) para encontrar la ecuación de la recta.

  y = 5 + (4/5)(x - 2)

  y = 5 + (4/5)x - 8/5

  y = (4/5)x + 17/5

  Por lo tanto, la ecuación de la recta es y = (4/5)x + 17/5.

b. Graficar la función lineal f(x) = -3x + 2.

Solución:

- Identificamos la pendiente m = -3 y la intersección con el eje y b = 2.
- Elegimos dos puntos para graficar la recta.

  Para x = 0, y = 2. Para x = 1, y = -3(1) + 2 = -1.

- Graficamos los puntos (0, 2) y (1, -1), y los unimos con una línea recta.

Figura 1. Gráfico de la función F(X) = -3x + 2

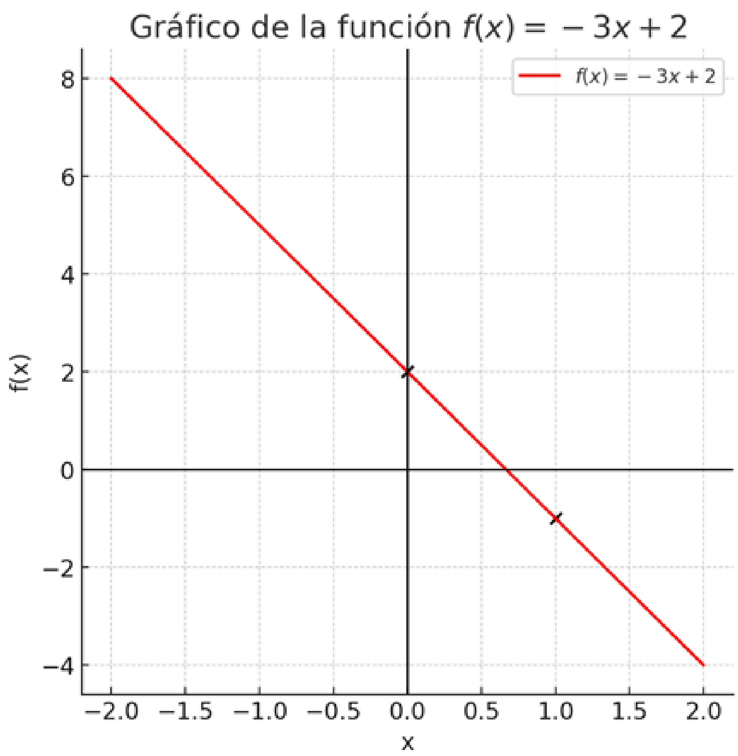

Gráfico de la función lineal f(x)=−3x+2, con los puntos (0,2) y (1,−1) destacados en la gráfica. La recta pasa por estos puntos y muestra la pendiente de -3.

c. Encontrar la función lineal que pasa por el punto (3, -1) y tiene una pendiente de 2/3.

Solución:

- Utilizamos la ecuación punto-pendiente y = y1 + m(x - x1) para encontrar la ecuación de la recta.

  y = -1 + (2/3)(x - 3)

  y = -1 + (2/3)x - 2

  y = (2/3)x - 3

  Por lo tanto, la función lineal es f(x) = (2/3)x - 3.

Figura 2. Gráfico de la función F(X) = (2/3)X - 3

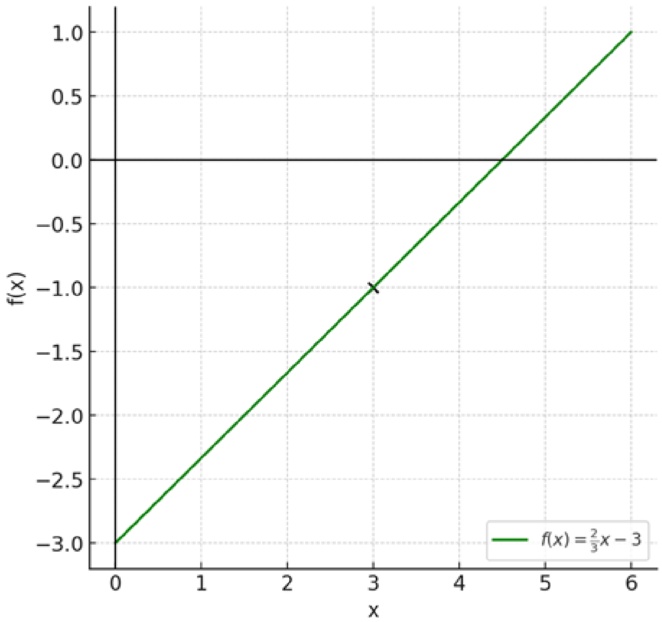

Gráfico de la función lineal f(x)=(2/3)x−3, que pasa por el punto (3,−1) y tiene una pendiente de 2/3. El punto (3,−1) está destacado en la gráfica.

Función cuadrática

La función cuadrática es otra función fundamental en matemáticas y tiene numerosas aplicaciones en diversos campos. Se caracteriza por tener una relación no lineal entre la variable independiente y la variable dependiente, y su gráfica es una parábola. La forma general de una función cuadrática es f(x) = ax2 + bx + c, donde a, b y c son constantes, y a ≠ 0. El coeficiente a determina la concavidad de la parábola (hacia arriba si a > 0, hacia abajo si a < 0), mientras que b y c afectan su posición.

Para ampliar los conceptos sobre función cuadrática, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Épsilon Akdemy. (2020, 16 de marzo). Función cuadrática. [Video]. YouTube https://youtu.be/GUe_HChRX8s

Según García Franchini y Alvarado Arellano (2016), las funciones cuadráticas son ampliamente utilizadas en la modelación de fenómenos económicos y empresariales que involucran optimización. Por ejemplo, la función de costo total de una empresa a menudo se modela como una función cuadrática, donde el término cuadrático representa los costos variables que aumentan a medida que se incrementa la producción. Asimismo, la función de ingreso total puede ser cuadrática si se considera la demanda con elasticidad variable.

Ejemplo:

Una empresa tiene una función de costo total dada por C(x) = 100 + 10x + 0.2x2, donde x es la cantidad producida. Esta función cuadrática indica que los costos totales incluyen un costo fijo de $100, un costo variable unitario de $10 y un costo marginal creciente de $0.2 por cada unidad adicional producida. Si la empresa produce 50 unidades, el costo total sería C(50) = 100 + 10(50) + 0.2(502) = 100 + 500 + 500 = $1100. La representación gráfica de esta función de costo sería una parábola con concavidad hacia arriba.

Ejercicios:

a. Encontrar el vértice y la intersección con el eje y de la función f(x) = -2x2 + 8x - 3.

Solución:

- Para encontrar el vértice, utilizamos las fórmulas x = -b / (2a) y y = f(-b / (2a)).

  x = -8 / (2(-2)) = -8 / -4 = 2

  y = f(2) = -2(22) + 8(2) - 3 = -8 + 16 - 3 = 5

  Por lo tanto, el vértice de la función es (2, 5).

- Para encontrar la intersección con el eje y, evaluamos f(0).

  f(0) = -2(02) + 8(0) - 3 = -3

  Por lo tanto, la intersección con el eje y es (0, -3).

b. Determinar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (1, 2), (-2, 9) y (3, 28).

Solución:

- Utilizamos la forma general de la función cuadrática f(x) = ax2 + bx + c y sustituimos los tres puntos para obtener un sistema de ecuaciones.

  2 = a(12) + b(1) + c

  9 = a(-22) + b(-2) + c

  28 = a(32) + b(3) + c

- Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de a, b y c.

  a = 3, b = 2, c = -3

  Por lo tanto, la ecuación de la parábola es f(x) = 3x2 + 2x - 3.

c. Determinar el dominio y rango de la función f(x) = -x2 + 6x - 5.

Solución:

- Dominio: Al ser una función polinómica, el dominio son todos los números reales, es decir, (-∞, ∞).
- Rango: Encontramos el vértice de la parábola para determinar el valor máximo o mínimo de la función.

  x = -b / (2a) = -6 / (2(-1)) = 3

  y = f(3) = -32 + 6(3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4

Como la parábola abre hacia abajo (a < 0), el valor máximo es 4. Por lo tanto, el rango de la función es (-∞, 4].

Figura 3. Gráfico de la función F(X) = -X2 + 6x - 5

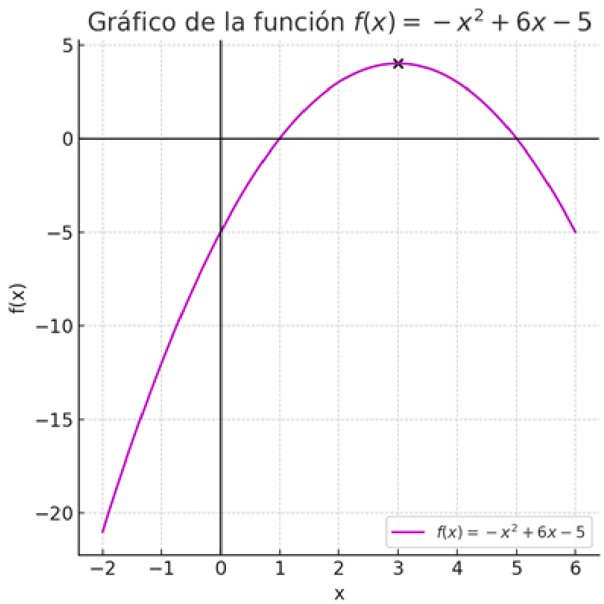

Gráfico de la función cuadrática f(x)=−x2+6x−5, con el vértice marcado en (3,4). La parábola abre hacia abajo, y su valor máximo es 4, como se deduce del vértice.

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son aquellas en las que la variable independiente aparece como exponente. Tienen la forma general f(x) = ax, donde a es una constante positiva y diferente de 1. Estas funciones se caracterizan por un crecimiento o decrecimiento acelerado, dependiendo del valor de a. Si a > 1, la función crece exponencialmente, mientras que si 0 < a < 1, la función decrece exponencialmente.

Para ampliar los conceptos sobre función exponencial, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Épsilon Akdemy (2020, 20 de marzo). Función exponencial. [Video]. YouTube https://youtu.be/lTpB8XUGCQM

De acuerdo con Palacios Pineda (2017), las funciones exponenciales tienen diversas aplicaciones en la modelación de fenómenos económicos y empresariales. Por ejemplo, el crecimiento poblacional, el interés compuesto, la depreciación de activos y la propagación de información en redes sociales pueden modelarse mediante funciones exponenciales. Estas funciones permiten analizar y predecir comportamientos que exhiben tasas de cambio proporcionales a la cantidad actual.

Ejemplo:

Una empresa invierte $10,000 en un fondo que ofrece un interés compuesto anual del 5%. La función del valor futuro de la inversión está dada por V(t) = 10,000(1.05) t, donde t es el número de años transcurridos. Esta función exponencial indica que el valor de la inversión crece exponencialmente con el tiempo debido al efecto del interés compuesto. Después de 5 años, el valor de la inversión sería V(5) = 10,000(1.05)5 ≈ $12,762.82. La representación gráfica de esta función exponencial sería una curva que crece cada vez más rápido a medida que t aumenta.

Ejercicios:

a. Graficar la función exponencial f(x) = 2x para x en el intervalo [-2, 2].

Solución:

- Evaluamos la función en varios puntos del intervalo [-2, 2].

  f(-2) = 2(-2) = 1/4

  f(-1) = 2(-1) = 1/2

  f(0) = 20 = 1

  f(1) = 21 = 2

  f(2) = 22 = 4

- Graficamos los puntos (-2, 1/4), (-1, 1/2), (0, 1), (1, 2) y (2, 4), y los unimos con una curva suave.

Figura 4. Gráfico de la función F(X) = 2X En El Intervalo [-2, 2]

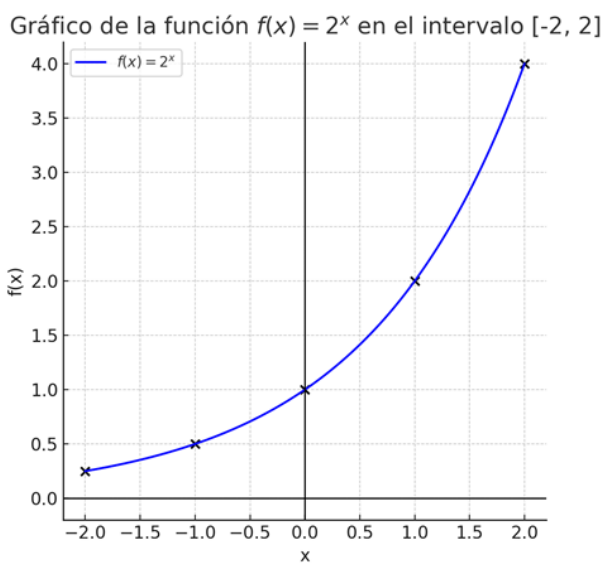

Gráfico de la función exponencial f(x)=2x en el intervalo [−2,2], con los puntos destacados: (−2,1/4), (−1,1/2), (0,1), (1,2), y (2,4). Los puntos están marcados y la curva los conecta suavemente.

b. Determinar la ecuación de la función exponencial que pasa por los puntos (0, 3) y (2, 12).

Solución:

- Utilizamos la forma general de la función exponencial f(x) = ax y sustituimos los dos puntos para obtener un sistema de ecuaciones.

  $3 = a^0$

  $12 = a^2$

- De la primera ecuación, obtenemos que a = 3.
- Sustituimos a = 3 en la segunda ecuación para verificar:

  12 = 32 = 9 (se cumple)

  Por lo tanto, la ecuación de la función exponencial es f(x) = 3x.

c. Determinar el dominio y rango de la función f(x) = 5x.

Solución:

- Dominio: Al ser una función exponencial, el dominio son todos los números reales, es decir, (-∞, ∞).
- Rango: Como la base de la exponencial es mayor que 1, la función es siempre positiva y creciente. Por lo tanto, el rango de la función es (0, ∞).

Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas son las inversas de las funciones exponenciales. Si una función exponencial tiene la forma f(x) = ax, entonces su función logarítmica inversa tiene la forma g(x) = loga(x), donde a es una constante positiva y diferente de 1, llamada base del logaritmo. La función logarítmica devuelve el exponente al que se debe elevar la base para obtener el argumento x.

Para ampliar los conceptos sobre funciones logarítmicas, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Épsilon Akdemy. (2020, 21 de marzo). Función logarítmica. [Video]. YouTube https://youtu.be/_TQaXNLMjko

Pensemos en las funciones logarítmicas como una forma de "deshacer" lo que hacen las funciones exponenciales. Si las exponenciales toman un número y lo elevan a una potencia, los logaritmos toman un número y nos dicen a qué potencia hay que elevar la base para obtener ese número. Esta relación inversa es fundamental para entender muchos fenómenos naturales y económicos.

Según Riquenes Rodríguez et al. (2016), las funciones logarítmicas tienen numerosas aplicaciones en el análisis económico y empresarial. Por ejemplo, la función de utilidad logarítmica se utiliza en teoría del consumidor para modelar preferencias que exhiben utilidad marginal decreciente. Asimismo, los logaritmos permiten linearizar modelos económicos no lineales, facilitando su estimación y análisis mediante técnicas de regresión lineal.

Ejemplo:

Una empresa experimenta un crecimiento exponencial en sus ventas, dado por la función V(t) = 1000 * 2t, donde t es el número de meses transcurridos. Si queremos saber en cuántos meses se duplicarán las ventas, podemos usar logaritmos. Sea d, el número de meses buscado, entonces:

2000 = 1000 * 2d

2 = 2d

Aplicando el logaritmo en base 2 a ambos lados:

log2(2) = log2(2d)

1 = d

Por lo tanto, las ventas se duplicarán en 1 mes. Graficar la función V(t) y su logaritmo inverso nos ayudaría a visualizar esta relación.

Figura 5. Gráfico de la función exponencial V(t) = 1000 * 2t

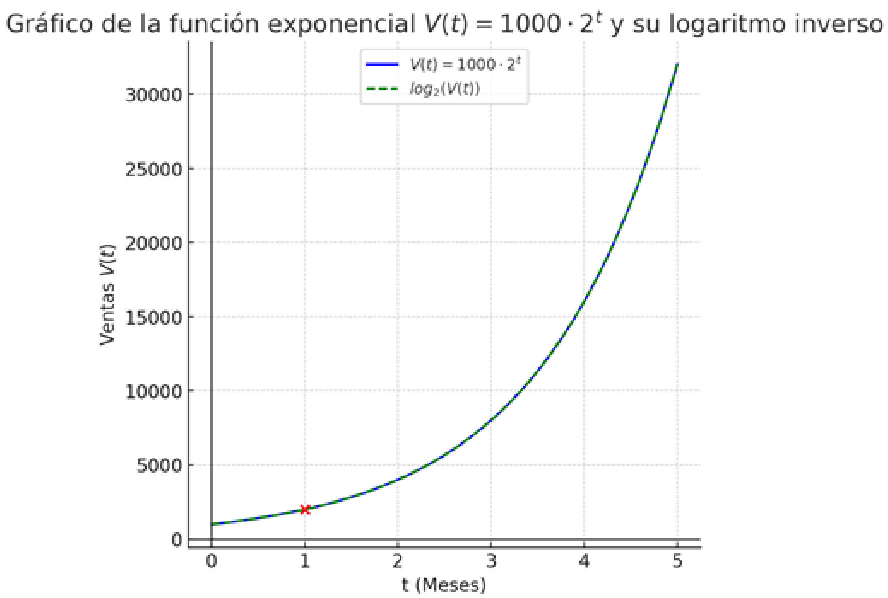

gráfico de la función exponencial V(t)=1000·2^t junto con su logaritmo inverso log2(V(t)). El punto donde las ventas se duplican, es decir, t=1t = 1t=1 mes, está marcado en rojo. La función exponencial crece rápidamente, mientras que el logaritmo inverso muestra cómo el valor de t se relaciona con el crecimiento de las ventas.

Ejercicios:

a. Graficar la función logarítmica f(x) = $\log_2$(x) para x > 0.

Solución:

- Tabulamos algunos valores:

x	F(x)
1	log2(1) = 0
2	log2(2) = 1
4	log2(4) = 2
8	log2(8) = 3

- Graficamos los puntos (1, 0), (2, 1), (4, 2) y (8, 3), y los unimos con una curva suave.
- Observamos que la gráfica es creciente, pero su crecimiento es muy rápido cerca de x = 0 y se ralentiza para valores grandes de x.

Figura 6. Gráfico de la función F(X) = \Log2(X) Para X > 0

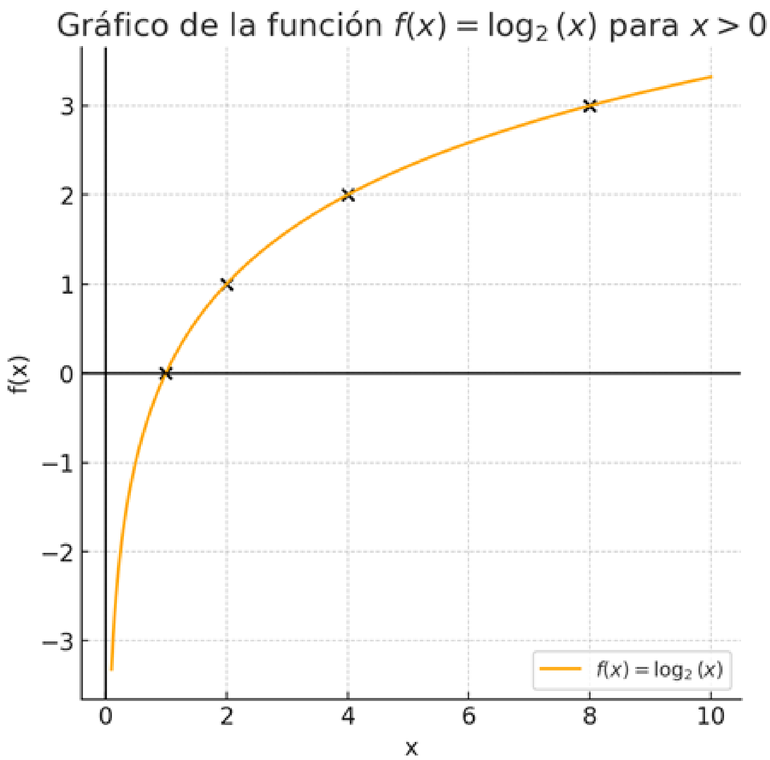

Gráfico de la función logarítmica f(x)=log2(x) para x>0, con los puntos (1,0), (2,1), (4,2) y (8,3) destacados. Como se observa, la función es creciente, pero su tasa de crecimiento disminuye a medida que x aumenta.

b. Resolver la ecuación exponencial 3(2x-1) = 27.

Solución:

- Aplicamos logaritmo en base 3 a ambos lados de la ecuación:

  log3(3(2x-1)) = log3(27)

2x - 1 = 3

2x = 4

x = 2

- Comprobamos sustituyendo el valor obtenido en la ecuación original:

  3(2*2-1) = 33 = 27

c. La población de una bacteria se duplica cada 3 horas. Si inicialmente hay 1000 bacterias, ¿cuántas habrá después de 1 día?

Solución:

- Sea P(t) la población después de t horas, con P(0) = 1000.
- Como la población se duplica cada 3 horas, después de t horas se habrá multiplicado por 2(t/3)
- Entonces, P(t) = 1000 * 2(t/3)
- Después de 1 día (24 horas):

  P(24) = 1000 * 2(24/3) = 1000 * 28 = 256000 bacterias.

- Comprobación usando logaritmos:

  log2(P(24)/1000) = 24/3

  log2(P(24)) - log2(1000) = 8

  log2(P(24)) = 18

  P(24) = 218 = 262144 bacterias. (La diferencia se debe al redondeo.)

En resumen, las funciones logarítmicas son una herramienta esencial en el análisis matemático y tienen diversas aplicaciones en economía y negocios. Su estrecha relación con las funciones exponenciales las hace fundamentales para modelar fenómenos de crecimiento y decrecimiento acelerado, así como para resolver ecuaciones y problemas que involucran exponentes. Dominar el concepto y las propiedades de los logaritmos es clave para un sólido entendimiento del cálculo y su aplicación en el mundo empresarial.