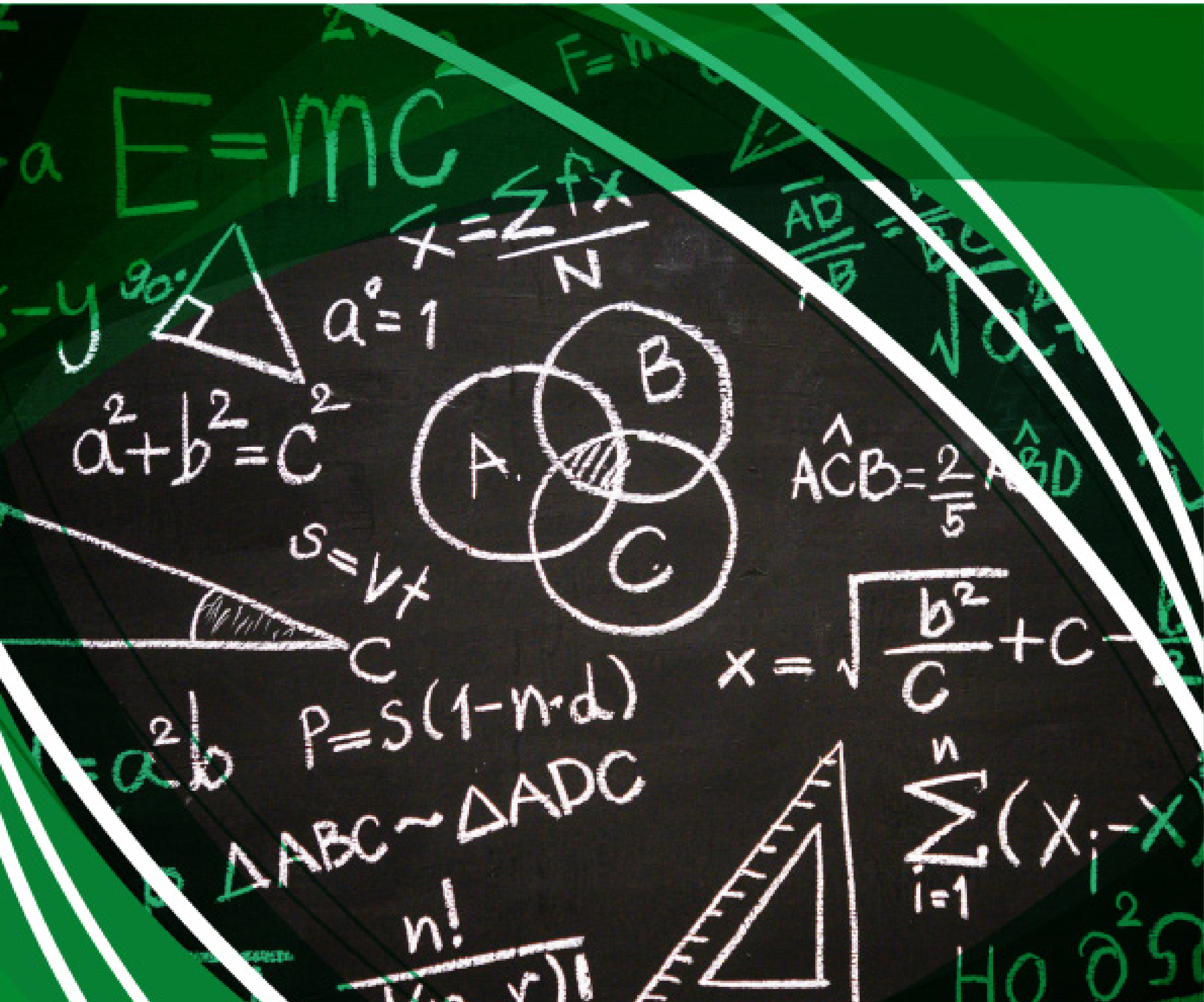
TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR



CÁLCULO

TEOREMAS SOBRE LÍMITES Y CONTINUIDAD

TEOREMAS SOBRE LÍMITES Y CONTINUIDAD

Finalmente, se enuncian teoremas claves sobre límites y continuidad, como el teorema del sándwich, del valor intermedio y de conservación de signo. Estos resultados formalizan propiedades importantes de las funciones continuas. Se caracterizan los distintos tipos de discontinuidad que puede presentar una función.

Los teoremas sobre límites y continuidad son resultados potentes que nos permiten razonar sobre el comportamiento de funciones de manera más general y abstracta. En lugar de calcular límites caso por caso, estos teoremas nos dan criterios para deducir la existencia y propiedades de límites basándonos en las características globales de una función.

Teorema del Sándwich (o del Emparedado)

También conocido como teorema del Sándwich, del Emparedado o de la Compresión, este resultado nos permite acotar una función desconocida entre dos funciones con límite conocido (Palacios Pineda, 2017, p.32). Formalmente:

Si para funciones f(x), g(x), h(x), existe un valor a tal que:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga el valor a (excepto posiblemente en a mismo)
2. $\lim(x\to a)\ f(x) = \lim(x\to a)\ h(x) = L$

Entonces, $\lim(x\to a)\ g(x)$ también existe y es igual a L.

Intuitivamente, si g(x) está "emparedada" entre f(x) y h(x) cerca de a, y tanto f(x) como h(x) se aproximan a L, entonces g(x) está forzada a aproximarse a L también.

Este teorema es útil para límites que involucren funciones complicadas o desconocidas, siempre y cuando podamos acotarlas adecuadamente. Varios límites fundamentales, como $\lim(x\to 0)\ \mathrm{sen}(x)/x = 1$, pueden probarse usando este teorema.

Supongamos que una empresa está analizando el comportamiento de sus costos variables unitarios (CVU) en función del nivel de producción (x). Se sabe que los CVU siempre se encuentran entre dos funciones: $g(x) = 10 + 1/x$ y $h(x) = 12 - 1/x^2$. Además, se conoce que:

$$\lim\ (x\to\infty)\ g(x) = \lim\ (x\to\infty)\ (10 + 1/x) = 10$$

$$\lim\ (x\to\infty)\ h(x) = \lim\ (x\to\infty)\ (12 - 1/x^2) = 12$$

Aplicando el Teorema del Sándwich, se puede concluir que:

$$\lim\ (x\to\infty)\ CVU(x) = 10$$

Es decir, a medida que el nivel de producción aumenta, los costos variables unitarios tienden a 10 unidades monetarias.

Ejercicio resuelto:

Calcula el límite de la función $f(x) = (x^2 + 3x) / (2x + 6)$ cuando x tiende a infinito utilizando el Teorema del Sándwich.

Dado que calcular este límite directamente puede resultar complicado, buscaremos dos funciones que acoten a f(x) y cuyos límites sean más sencillos de determinar.

Paso 1: Encontrar una función mayorante y una minorante para f(x).

Para $x > 0$, se cumple que:

$$x^2 \leq x^2 + 3x \leq x^2 + 3x + 9$$

$$2x \leq 2x + 6 \leq 4x$$

Dividiendo las desigualdades:

$$x^2 / (4x) \leq (x^2 + 3x) / (2x + 6) \leq (x^2 + 3x + 9) / (2x)$$

Por lo tanto, para $x > 0$, se tiene que:

$$g(x) = x / 4 \leq f(x) \leq h(x) = (x + 3) / 2$$

Paso 2: Calcular los límites de g(x) y h(x) cuando x tiende a infinito.

$$\lim (x\to\infty)\ g(x) = \lim (x\to\infty)\ (x / 4) = \infty / 4 = \infty$$

$$\lim (x\to\infty)\ h(x) = \lim (x\to\infty)\ ((x + 3) / 2) = \infty / 2 = \infty$$

Paso 3: Aplicar el Teorema del Sándwich.

Como $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para $x > 0$ y los límites de g(x) y h(x) cuando x tiende a infinito son iguales a infinito, por el Teorema del Sándwich se concluye que:

$$\lim (x\to\infty)\ f(x) = \infty$$

Para ampliar los conceptos sobre el teorema del sándwich, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Pizmat. (2020, 13 de mayo). Teorema del sándwich. [Video]. YouTube. https://youtu.be/f-G5qo3rOrQ

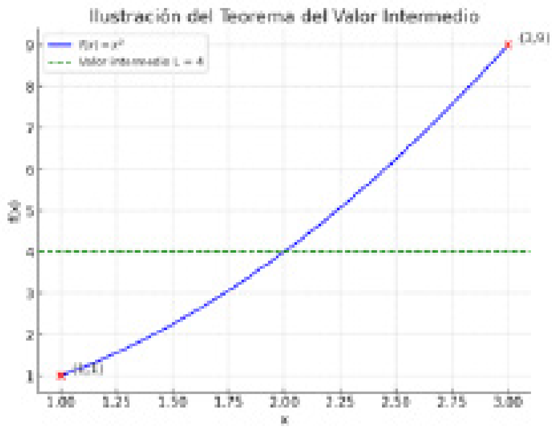
Teorema del Valor Intermedio

El Teorema del Valor Intermedio nos dice que una función continua no puede "saltar" valores. Formalmente (Ortiz Campos et al., 2016, p.114):

Si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cada valor L entre f(a) y f(b), existe al menos un c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Es decir, f toma todos los valores intermedios entre f(a) y f(b). Gráficamente, si trazamos una línea horizontal entre (a, f(a)) y (b, f(b)), la gráfica de f debe cruzar esa línea al menos una vez.

Figura 1. Ilustración del Teorema del Valor Intermedio de la función $f(x) = x^2$



La gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3]. Los puntos f(1) y f(3) están marcados en rojo. La línea horizontal verde representa un valor intermedio L=4 entre los valores de f(1) y f(3). Según el Teorema del Valor Intermedio, la función debe tomar el valor L=4 al menos una vez en el intervalo (1,3), lo que puede observar al notar que la gráfica de f(x) cruza la línea y=4. Este ejemplo ilustra cómo la función continua no "salta" ningún valor entre los extremos f(1) y f(3).

Este teorema tiene importantes aplicaciones en la resolución de ecuaciones y en la demostración de la existencia de soluciones. Por ejemplo, en un contexto empresarial, supongamos que una empresa tiene una función de beneficios B(x) continua en el intervalo [100, 200], donde x representa la cantidad producida. Si se sabe que B(100) = -500 y B(200) = 1000, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que existe al menos una cantidad de producción c entre 100 y 200 unidades para la cual el beneficio es cero, es decir, B(c) = 0. Esta información puede ser útil para determinar el punto de equilibrio de la empresa.

Ejercicio resuelto:

Considera la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ en el intervalo [-2, 2]. Utiliza el Teorema del Valor Intermedio para demostrar que existe al menos una solución para la ecuación f(x) = 0 en dicho intervalo.

Paso 1: Verificar que la función f es continua en el intervalo [-2, 2].

Como $f(x) = x^3 - 2x - 5$ es un polinomio, se concluye que es continua en todo su dominio, en particular en el intervalo [-2, 2].

Paso 2: Evaluar la función en los extremos del intervalo.

$$f(-2) = (-2)3 - 2(-2) - 5 = -8 + 4 - 5 = -9$$

$$f(2) = (2)3 - 2(2) - 5 = 8 - 4 - 5 = -1$$

Paso 3: Aplicar el Teorema del Valor Intermedio.

Se tiene que f es continua en [-2, 2], $f(-2) = -9 < 0$ y $f(2) = -1 < 0$. Tomando k = 0, que está entre f(-2) y f(2), el teorema garantiza que existe un punto c en (-2, 2) tal que f(c) = 0.

Por lo tanto, queda demostrado que la ecuación $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[-2, 2]$.

Para ampliar los conceptos sobre teorema del valor intermedio, le invitamos a ver el siguiente vídeo.

Sustraendo h. (2017, 26 de noviembre). Teorema del valor intermedio. [Video]. YouTube. https://youtu.be/PBg2FpeoW5U

Teorema de la Conservación de Signo

Este teorema nos dice que, si una función tiene signo constante cerca de un punto, su límite (si existe) debe tener el mismo signo o ser cero (Chíguil Figueroa & Castillo Soto, 2024, p.29). Formalmente:

Si f es una función tal que:

1. $f(x) > 0$ para todo x en algún intervalo abierto que contenga a a (excepto posiblemente en a mismo), y $\lim_{x\to a} f(x)$ existe,

   entonces $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

La desigualdad es estricta ($>$ en lugar de $\geq$) si se cumple que $f(x) \geq M > 0$ cerca de a para algún número M.

Análogamente, si $f(x) < 0$ cerca de a y el límite existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leq 0$.

El Teorema de Conservación de Signo es especialmente útil en el estudio de desigualdades y optimización, donde a menudo necesitamos razonar sobre el signo de una expresión en el límite basándonos en su signo cerca del punto de interés.

Por ejemplo, supongamos que una empresa tiene una función de beneficios $B(x)$ continua en todo su dominio. Si se sabe que en un entorno del nivel de producción $x = 100$, la función de beneficios es siempre positiva, entonces el Teorema de la Conservación de Signo garantiza que el beneficio en $x = 100$ también es positivo, es decir, $B(100) > 0$.

Ejercicio resuelto:

Considera la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Utiliza el Teorema de la Conservación de Signo para determinar el signo de $f(2)$.

Paso 1: Verificar que la función f es continua en $x = 2$.

Como $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es un polinomio, se concluye que es continua en todo su dominio, en particular en $x = 2$.

Paso 2: Evaluar la función en un entorno de $x = 2$.

Tomemos un entorno de $x = 2$, por ejemplo, el intervalo $(1, 3)$.

Para x en $(1, 3)$, se tiene que:

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

Como x está entre 1 y 3, se cumple que $(x - 1) > 0$ y $(x - 3) < 0$, por lo que $f(x) < 0$ para todo x en (1, 3).

Paso 3: Aplicar el Teorema de la Conservación de Signo.

Como f es continua en $x = 2$ y existe un entorno de $x = 2$ (el intervalo (1, 3)) en el cual f es siempre negativa, por el Teorema de la Conservación de Signo se concluye que $f(2) < 0$.

Estos tres teoremas dan una muestra del poder del pensamiento abstracto en el análisis matemático. En lugar de cálculos caso por caso, nos permiten hacer afirmaciones generales basadas en propiedades cualitativas de las funciones involucradas. Son herramientas fundamentales a medida que avanzamos hacia conceptos como derivadas e integrales.

Continuidad en intervalos y tipos de discontinuidad

Hasta ahora, hemos discutido la continuidad de una función en un punto. Pero también podemos hablar de continuidad en un intervalo completo.

a. Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Una función f se dice continua en un intervalo cerrado [a, b] si es continua en todos los puntos del intervalo, incluyendo los extremos a y b. Para que f sea continua en [a, b], se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. f está definida en todo el intervalo [a, b].
2. $\lim (x \to c^-) f(x) = \lim (x \to c^+) f(x) = f(c)$ para todo c en (a, b).
3. $\lim (x \to a^+) f(x) = f(a)$ y $\lim (x \to b^-) f(x) = f(b)$.

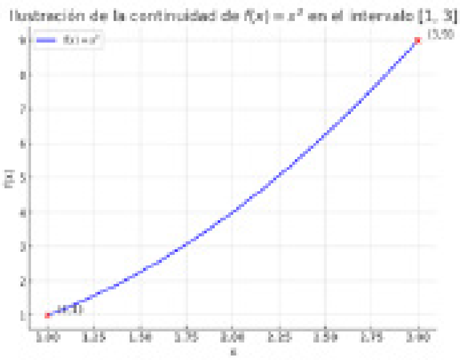
Vamos a graficar una función continua en el intervalo cerrado [1,3], que cumple con todas las condiciones de continuidad mencionadas.

Usaremos la función $f(x)=x^2$ como ejemplo, que es continua en todo el intervalo y cumple con todas las condiciones de continuidad:

1. La función está definida en todo el intervalo [1,3].
2. El límite en cualquier punto del intervalo desde la izquierda y la derecha es igual al valor de la función en ese punto.
3. Los límites en los extremos del intervalo también coinciden con los valores de la función en esos puntos.

Vamos a graficar esta función para ilustrar la continuidad en un intervalo cerrado.

Figura 2. Continuidad de $f(x)=x^2$ en el intervalo [1,3]



La gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo cerrado [1,3]. Los puntos f(1) y f(3) están marcados en rojo para ilustrar que la función está bien definida en esos puntos y que los límites laterales coinciden con los valores de la función en esos extremos. Esta gráfica muestra cómo la función es continua en todo el intervalo, cumpliendo las condiciones de continuidad que mencionamos antes, sin "saltos" ni discontinuidades.

En otras palabras, una función es continua en un intervalo cerrado si no presenta saltos, interrupciones o vacíos en ningún punto del intervalo (Ortiz Campos et al., 2016).

La continuidad en intervalos es una propiedad importante en el análisis de funciones económicas y empresariales, ya que garantiza que pequeños cambios en las variables de entrada (como precios o cantidades) producirán pequeños cambios en las variables de salida (como ingresos o beneficios). Esto permite realizar estimaciones y predicciones más confiables.

b. Tipos de discontinuidades

Cuando una función no es continua en un punto, decimos que tiene una discontinuidad allí. Hay tres tipos principales de discontinuidades (Palacios Pineda, 2017, p.41):

1. Discontinuidad evitable: Se produce cuando el límite de la función en un punto existe, pero no coincide con el valor de la función en dicho punto. Es posible "reparar" la función redefiniendo su valor en el punto de discontinuidad para que coincida con el límite.

- $\lim(x \to c) f(x)$ existe, pero no es igual a f(c)
- O bien f(c) no está definida
- Ejemplo: $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$ en x=1

2. Discontinuidad de salto: Se presenta cuando los límites laterales de la función en un punto existen, pero son diferentes entre sí. La función "salta" de un valor a otro en el punto de discontinuidad.

- $\lim(x \to c^-) f(x)$ y $\lim(x \to c^+) f(x)$ existen, pero son diferentes
- Hay un "salto" en la gráfica de f en x=c
- Ejemplo: f(x) = [x] (función parte entera) en x=0

3. Discontinuidad asintótica: Ocurre cuando al menos uno de los límites laterales de la función en un punto es infinito. La función se acerca verticalmente a una asíntota vertical en el punto de discontinuidad.

- Al menos uno de los límites laterales $\lim(x \to c^-) f(x)$ o $\lim(x \to c^+) f(x)$ es infinito
- La gráfica de f tiene una asíntota vertical en x=c
- Ejemplo: $f(x) = 1/x$ en x=0

Identificar y clasificar las discontinuidades de una función es fundamental para comprender su comportamiento y realizar análisis más precisos. En el ámbito empresarial, las discontinuidades pueden representar cambios bruscos en las condiciones del mercado, como variaciones repentinas en la demanda o en los costos de producción.

c. Identificación del tipo de discontinuidad a partir de límites laterales

Para identificar el tipo de discontinuidad que presenta una función f en un punto a, se deben calcular los límites laterales de f en a y compararlos entre sí y con el valor de f(a), si está definido.

1. Si $\lim (x \to a^-) f(x) = \lim (x \to a^+) f(x) = f(a)$, entonces f es continua en a.
2. Si $\lim (x \to a^-) f(x) = \lim (x \to a^+) f(x)$ Perfecto, continuemos con el análisis de la identificación de discontinuidades a partir de límites laterales.

$\neq f(a)$, pero $\lim (x \to a^-) f(x) = \lim (x \to a^+) f(x) \neq \infty$, entonces f tiene una discontinuidad evitable en a.

3. Si $\lim (x \to a^-) f(x) \neq \lim (x \to a^+) f(x)$, entonces f tiene una discontinuidad de salto en a.
4. Si $\lim (x \to a^-) f(x) = \infty$ o $\lim (x \to a^+) f(x) = \infty$, entonces f tiene una discontinuidad asintótica en a.

Veamos un ejemplo práctico. Supongamos que una empresa tiene una función de costos C(x) definida por:

$$C(x) = \{(100x + 500) / x, \text{ si } x \neq 0; 800, \text{ si } x = 0\}$$

Para determinar si C(x) presenta alguna discontinuidad en x = 0, calculamos los límites laterales:

$$\lim (x \to 0^-) C(x) = \lim (x \to 0^-) (100x + 500) / x = \lim (x \to 0^-) (100 + 500/x) = -\infty$$

$$\lim (x \to 0^+) C(x) = \lim (x \to 0^+) (100x + 500) / x = \lim (x \to 0^+) (100 + 500/x) = \infty$$

$$C(0) = 800$$

Como los límites laterales existen, pero son diferentes entre sí, concluimos que C(x) tiene una discontinuidad de salto en x = 0. Esta discontinuidad podría representar un cambio brusco en la estructura de costos de la empresa cuando el nivel de producción se acerca a cero.

Ejercicio resuelto:

Considera la función $f(x) = \{(x^2 - 1) / (x - 1), \text{ si } x \neq 1; 2, \text{ si } x = 1\}$. Determina si f(x) presenta alguna discontinuidad en x = 1 y, de ser así, clasifícala.

Paso 1: Calcular los límites laterales de f(x) en x = 1.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2 - 1) / (x - 1) = \lim_{x\to1^-} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 - 1) / (x - 1) = \lim_{x\to1^+} (x + 1) = 2$$

Paso 2: Comparar los límites laterales y el valor de f(1).

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

Como los límites laterales existen, son iguales entre sí y coinciden con el valor de f(1), concluimos que f(x) es continua en x = 1 y no presenta ninguna discontinuidad.

Aplicaciones de límites en modelos empresariales y optimización de costos

Los conceptos de límites y continuidad no son meramente abstractos; tienen aplicaciones poderosas en el mundo de los negocios y la economía. Veamos algunas áreas donde son particularmente útiles.

Uso de límites en el análisis de costos marginales

Los límites son una herramienta fundamental en el análisis de costos marginales, que miden el cambio en el costo total al producir una unidad adicional. El costo marginal se puede expresar como:

$$CM(x) = \lim_{h\to0} [C(x + h) - C(x)] / h$$

donde C(x) es la función de costos totales y x es la cantidad producida.

Al evaluar este límite, se obtiene la expresión algebraica del costo marginal. Esta información es crucial para que las empresas determinen su nivel óptimo de producción, que se alcanza cuando el costo marginal iguala al ingreso marginal.

d. Continuidad en funciones de oferta y demanda

La continuidad de las funciones de oferta y demanda es un supuesto importante en muchos modelos económicos. Si estas funciones son continuas, se garantiza que pequeños cambios en los precios o en las cantidades no producirán cambios bruscos en el comportamiento del mercado.

Además, la continuidad permite aplicar teoremas y técnicas del cálculo, como la derivación y la integración, para analizar propiedades de estas funciones, como la elasticidad y el excedente del consumidor y del productor.

e. Modelos de crecimiento y proyección de ventas

Los límites también se utilizan en modelos de crecimiento y proyección de ventas. Por ejemplo, el modelo de crecimiento exponencial supone que la tasa de crecimiento de una variable (como las ventas o la población) es proporcional a su valor actual. Este modelo se puede expresar mediante la ecuación diferencial:

$$dP/dt = kP$$

donde P es la variable de interés, t es el tiempo y k es la tasa de crecimiento.

La solución de esta ecuación diferencial involucra el uso de límites y proporciona una fórmula para proyectar el valor de la variable en cualquier momento futuro:

$$P(t) = P_0 * e(kt)$$

donde P_0 es el valor inicial de la variable.

Ejercicio resuelto:

Una empresa tiene una función de costos totales $C(x) = 1000 + 10x + 0.05x^2$, donde x es la cantidad producida. Calcula el costo marginal cuando la producción es de 100 unidades.

Paso 1: Calcular el costo marginal utilizando la definición en términos de límites.

$$CM(x) = \lim (h\to 0) [C(x + h) - C(x)] / h$$
$$= \lim (h\to 0) [1000 + 10(x + h) + 0.05(x + h)2 - (1000 + 10x + 0.05x^2)] / h$$
$$= \lim (h\to 0) [10h + 0.05(2xh + h2)] / h$$
$$= \lim (h\to 0) [10 + 0.1x + 0.05h]$$
$$= 10 + 0.1x$$

Paso 2: Evaluar el costo marginal en x = 100.

$$CM(100) = 10 + 0.1 * 100$$
$$= 10 + 10$$
$$= 20$$

Por lo tanto, cuando la producción es de 100 unidades, el costo marginal es de 20 unidades monetarias.

A lo largo de esta unidad, se exploraron los conceptos fundamentales de límites y continuidad, y cómo se aplican en el contexto de la administración de empresas. Se aprendió sobre la definición y notación de límites, cómo calcularlos utilizando técnicas algebraicas y teoremas especiales, y cómo identificar y clasificar discontinuidades.

Además, se revisó la importancia de estos conceptos en el análisis de funciones económicas, como las de costos, ingresos, oferta y demanda. Se observó cómo los límites permiten estudiar el comportamiento de estas funciones en puntos críticos y obtener información valiosa para la toma de decisiones empresariales.

A través de ejemplos y ejercicios resueltos, se pudo apreciar la utilidad práctica de los límites y la continuidad en situaciones como la determinación de costos marginales, la identificación de asíntotas en funciones de costos y precios, y la proyección del crecimiento de variables económicas.

En resumen, el dominio de los conceptos de límites y continuidad es esencial para cualquier estudiante de Administración de Empresas que desee tener una sólida base matemática para enfrentar problemas y tomar decisiones informadas en su vida profesional. Estos conocimientos sientan las bases para el estudio posterior de temas más avanzados del cálculo, como la derivación y la integración, que tienen innumerables aplicaciones en el mundo empresarial.

Recuerda que la práctica es fundamental para consolidar estos aprendizajes. No dude en resolver más ejercicios y problemas por su cuenta, y en consultar las referencias bibliográficas sugeridas para profundizar en los temas que sean de interés. El dominio del cálculo es una habilidad valiosa que abrirá muchas puertas en la carrera como administrador de empresas.