TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

CÁLCULO

LÍMITE DE FUNCIONES

LÍMITE DE FUNCIONES

Las propiedades del punto 2.1 nos permiten calcular límites de funciones construidas a partir de funciones más simples. Retomando algunas reglas particulares importantes (Palacios Pineda, 2017, p.27):

Tabla 1. Propiedades de los Límites

Constantes	Si c es un número real, lim(x→a) c = c
Variable independiente	lim(x→a) x = a
Suma/Diferencia	lim(x→a) [f(x)±g(x)] = lim(x→a) f(x) ± lim(x→a) g(x)
Producto	lim(x→a) [f(x)*g(x)] = lim(x→a) f(x) * lim(x→a) g(x)
Cociente	lim(x→a) [f(x)/g(x)] = lim(x→a) f(x) / lim(x→a) g(x), si lim(x→a) g(x)≠0
Potencia	lim(x→a) [f(x)n] = [lim(x→a) f(x)]n, n entero

Ahora, vamos a proponer y resolver un ejercicio para cada propiedad, explicando cada paso en detalle.

Ejercicio 1: Límite de una constante

Calcular lim(x→2) [3]

Solución:

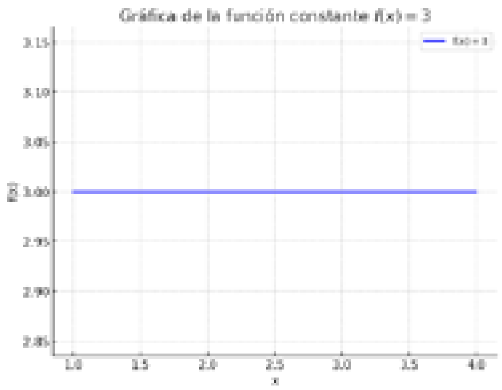
Según la propiedad de límites de constantes, si c es un número real, entonces lim(x→a) c = c para cualquier a.

En este caso, la función es f(x) = 3, una constante. Por lo tanto,

lim(x→2) [3] = 3

Intuitivamente, sin importar cuánto se acerque x a 2, la función siempre vale 3. Gráficamente, f(x) = 3 es una línea horizontal que no cambia de altura, por lo que su límite en cualquier punto es 3; lo que significa que independientemente del valor de x, la función siempre tendrá el valor 3. El límite de esta función en cualquier punto, incluido x=2, es igual a 3.

Figura 1. Gráfica de la función constante f(x) = 3



Ejercicio 2: Límite de la variable independiente

Calcular lim(x→1) [x]

Solución:

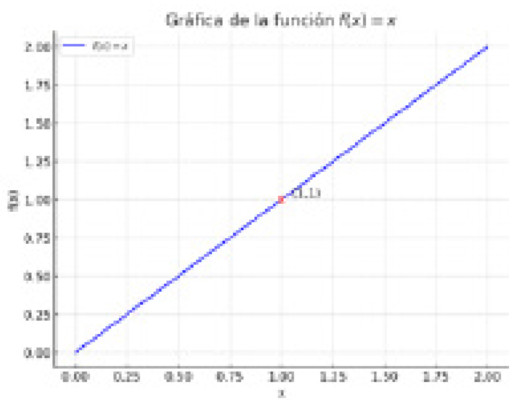
La propiedad de límites de la variable independiente establece que lim(x→a) x = a.

Aquí, la función es simplemente f(x) = x. Aplicando la propiedad,

lim(x→1) [x] = 1

Es decir, a medida que x se acerca a 1, la función f(x) = x también se acerca a 1. Gráficamente, f(x) = x es una línea recta de pendiente 1 que pasa por el origen, por lo que su límite en x = 1 es precisamente 1; la línea pasa por el origen y se extiende en ambas direcciones. El punto (1,1) está marcado en la gráfica para ilustrar que, cuando x se acerca a 1, la función también se acerca a 1, lo que confirma que el límite de f(x)=x cuando x tiende a 1 es efectivamente 1.

Figura 2. Gráfica de la función f(x) = x



Ejercicio 3: Límite de la suma

Calcular lim(x→0) [x2 + 3x]

Solución:

Para límites de sumas, lim(x→a) [f(x)+g(x)] = lim(x→a) f(x) + lim(x→a) g(x).

En este caso, f(x) = x2 y g(x) = 3x. Aplicando la propiedad:

lim(x→0) [x2 + 3x] = lim(x→0) [x2] + lim(x→0) [3x]

Ahora, usamos las propiedades de límites de potencias y de múltiplos constantes:

lim(x→0) [x2] = [lim(x→0) x]2 = 02 = 0
lim(x→0) [3x] = 3*lim(x→0) x = 3*0 = 0

Por lo tanto,

lim(x→0) [x2 + 3x] = 0 + 0 = 0

Gráficamente, tanto x2 como 3x se acercan a 0 cuando x tiende a 0, por lo que su suma también se aproxima a 0; Como puede ver, la curva se acerca a 0 cuando x tiende a 0, lo cual confirma que el límite de la función en ese punto es 0. El punto (0,0) está marcado en la gráfica para ilustrar cómo la función se comporta cerca de este valor.

Figura 3. Gráfica de la función f(x) = x2+3x

Ejercicio 4: Límite de la diferencia

Calcular lim(x→1) [Ãx - 1/x]

Solución:

Similar al caso de la suma, para diferencias lim(x→a) [f(x)-g(x)] = lim(x→a) f(x) - lim(x→a) g(x).

Aquí, f(x) = Ãx y g(x) = 1/x. Aplicando la propiedad:

lim(x→1) [√x - 1/x] = lim(x→1) [√x] - lim(x→1) [1/x]

Evaluando cada límite por separado:

lim(x→1) [√x] = √(lim(x→1) x) = √1 = 1

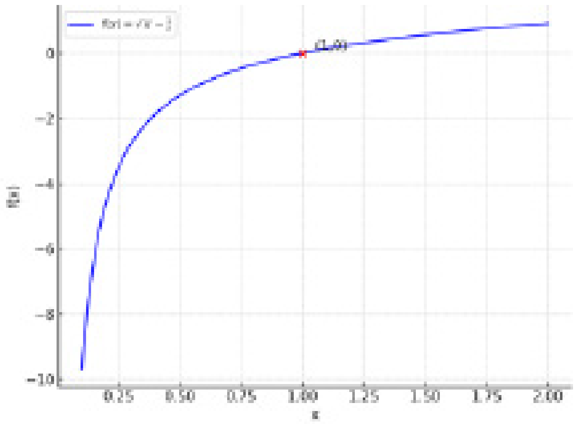
lim(x→1) [1/x] = 1/(lim(x→1) x) = 1/1 = 1

Entonces,

lim(x→1) [√x - 1/x] = 1 - 1 = 0

Aunque Ãx y 1/x tienen comportamientos muy diferentes (uno crece mientras el otro decrece), su diferencia se anula precisamente en x=1; Como puede ver, la curva se acerca a 0 cuando x tiende a 1, lo que confirma que el límite de la función en ese punto es 0. El punto (1,0) está marcado en la gráfica para ilustrar cómo la función se comporta cerca de este valor.

Figura 4. Gráfica de la función f(x) = √x-1/x



Ejercicio 5: Límite del producto

Calcular lim(x→2) [(x2-4)*(x-2)]

Solución:

La propiedad del producto establece que lim(x→a) [f(x)*g(x)] = lim(x→a) f(x) * lim(x→a) g(x).

Tomando f(x) = x2-4 y g(x) = x-2:

lim(x→2) [(x2-4)*(x-2)] = lim(x→2) [x2-4] * lim(x→2) [x-2]

Calculando cada límite:

lim(x→2) [x2-4] = 22-4 = 0

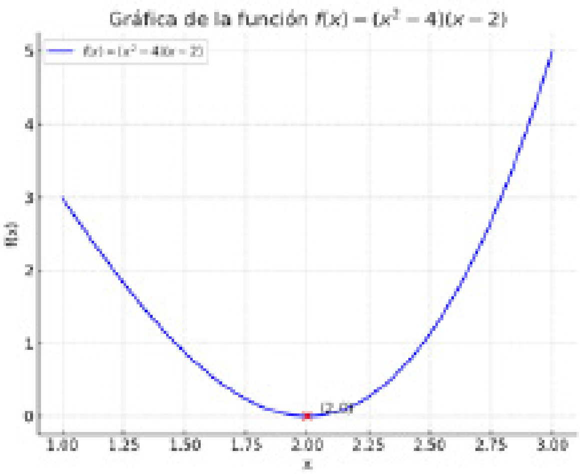
lim(x→2) [x-2] = 2-2 = 0

Por lo tanto,

lim(x→2) [(x2-4)*(x-2)] = 0 * 0 = 0

Este es un ejemplo de un límite "0/0" indeterminado. Aunque tanto f(x) como g(x) tienden a 0 (haciendo el límite aparentemente indeterminado), su producto también tiende a 0; Como puede ver, la curva se acerca a 0 cuando x tiende a 2, lo que confirma que el límite de la función en ese punto es 0. El punto (2,0) está marcado en la gráfica para ilustrar cómo la función se comporta cerca de este valor.

Figura 5. Gráfico de la función f(x)=(x2−4)(x−2)



Ejercicio 6: Límite del cociente

Calcular lim(x→1) [(x2-1)/(x-1)]

Solución:

Para cocientes, lim(x→a) [f(x)/g(x)] = lim(x→a) f(x) / lim(x→a) g(x), siempre que lim(x→a) g(x) - 0.

Aquí, f(x) = x2-1 y g(x) = x-1. Aplicando la propiedad:

lim(x→1) [(x2-1)/(x-1)] = lim(x→1) [x2-1] / lim(x→1) [x-1]

Pero lim(x→1) [x2-1] = 12-1 = 0, y lim(x→1) [x-1] = 1-1 = 0. Entonces el límite es de tipo "0/0", indeterminado.

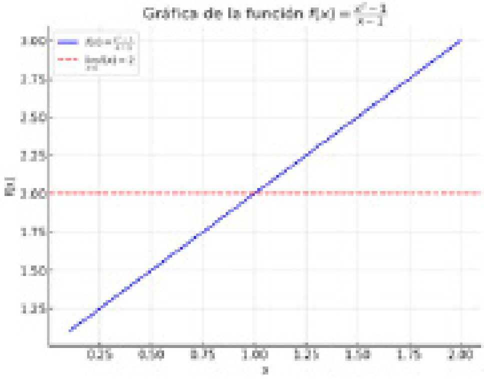
Sin embargo, notemos que x2-1 = (x-1)(x+1). Factorizando:

lim(x→1) [(x2-1)/(x-1)] = lim(x→1) [(x-1)(x+1)/(x-1)]

= lim(x→1) [x+1] = 1+1 = 2

Aunque la propiedad del cociente no pudo aplicarse directamente debido a la indeterminación, una manipulación algebraica nos permitió calcular el límite. Como puede observar, la línea discontinua roja representa el límite de la función en x=1, que es 2. Aunque la función no está definida en x=1, las ramas laterales se acercan a 2 a medida que x se aproxima a 1, lo que confirma que el límite en ese punto es 2.

Figura 6. Gráfico de la función f(x) = [(x2-1)/(x-1)]



Ejercicio 7: Límite de potencia

Calcular $\lim(x \to 0)\ [(1+2x)(1/x)]$

Solución:

La propiedad de límites de potencias afirma que $\lim(x \to a)\ [f(x)n] = [\lim(x \to a)\ f(x)]n$, para n entero.

En este caso, $f(x) = 1+2x$ y $n = 1/x$. Como $1/x$ no es entero, no podemos aplicar directamente la propiedad. En cambio, notemos que:

$$(1+2x)(1/x) = \exp(\ln[(1+2x)(1/x)]) = \exp[(1/x)*\ln(1+2x)]$$

Usando la propiedad de límites de funciones compuestas:

$$\lim(x \to 0)\ [(1+2x)(1/x)] = \exp[\lim(x \to 0)\ (1/x)*\ln(1+2x)]$$

Ahora, como $\lim(x \to 0)\ \ln(1+2x) = \ln(1) = 0$, tenemos una indeterminación de tipo "0*∞". Pero aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim(x \to 0)\ (1/x)*\ln(1+2x) = \lim(x \to 0)\ \ln(1+2x)/(1/x)$$

$$= \lim(x \to 0)\ [2/(1+2x)]/(-1/x2)$$

$$= \lim(x \to 0)\ -2x2/(1+2x) = 0/1 = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim(x \to 0)\ [(1+2x)(1/x)] = \exp[0] = 1$$

Este ejemplo ilustra cómo, incluso cuando las propiedades de límites no se aplican directamente, a menudo pueden combinarse con otras técnicas (como la regla de L'Hôpital) para calcular límites complejos.

En resumen, las propiedades de límites son herramientas poderosas que nos permiten calcular límites de funciones complejas reduciéndolos a límites más simples. Dominarlas es un paso clave para desarrollar fluidez en el cálculo de límites y, más ampliamente, para comprender el comportamiento local de las funciones.

Combinando estas reglas, podemos encontrar límites de funciones complejas. Por ejemplo:

$$\lim(x \to 2)\ [(x2+3x)/(x2-4)]$$

$$= [\lim(x \to 2)\ (x2) + \lim(x \to 2)\ (3x)]/[\lim(x \to 2)\ (x2) - \lim(x \to 2)\ 4]$$

$$= [\lim(x \to 2)\ x2 + 3 * \lim(x \to 2)\ x]/[\lim(x \to 2)\ x2 - 4]$$

$$= (4 + 6)/(4 - 4) = 10/0 \text{ (no existe)}$$

Así, aunque las funciones involucradas eran complicadas, usando las propiedades redujimos el problema a límites simples que pudimos evaluar directamente. El método revela además que el límite no existe debido a una división por 0.