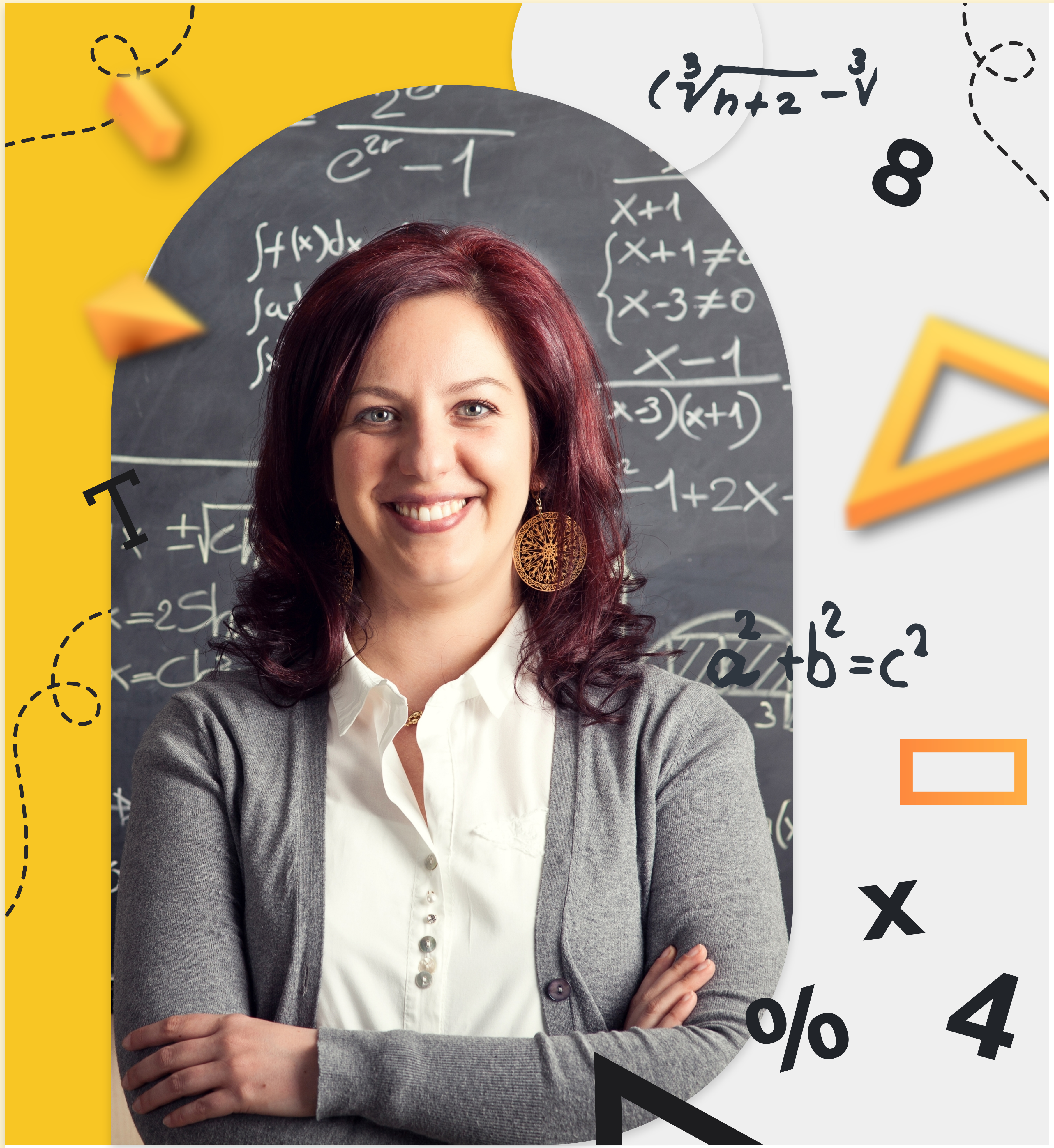


LÓGICA MATEMÁTICA

RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIONES LÓGICAS

La unidad 2: Razonamiento y demostraciones lógicas, abarca el estudio de tres temas clave: tipos de razonamiento, técnicas de demostración y cuantificadores lógicos. Se exploran los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo, esenciales en la lógica y matemáticas. Luego, se presentan métodos de demostración, como la demostración directa, indirecta, por contraposición y reducción al absurdo, herramientas clave para validar proposiciones matemáticas. Finalmente, se revisan los cuantificadores existenciales y universales, esenciales para estructurar enunciados lógicos precisos y rigurosos, aportando una base sólida para el análisis lógico-matemático.

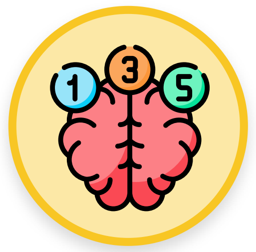
INICIAR

TECNOLÓGICA DEL ORIENTE
INSTITUCIÓN DE EDUCACIÓN SUPERIOR

UNIDAD 2: RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIONES LÓGICAS

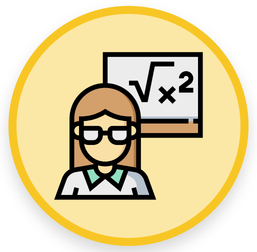
INTRODUCCIÓN

Esta unidad temática introduce los conceptos fundamentales del razonamiento lógico y las herramientas formales para demostrar proposiciones matemáticas. A través de tres temas centrales, se exploran los tipos de razonamientos, las técnicas de demostración, y el uso de cuantificadores lógicos para formular y probar enunciados.



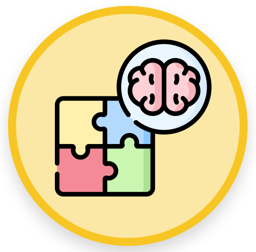
Tipos de razonamientos

El razonamiento inductivo, deductivo y abductivo son fundamentales en el pensamiento lógico. El razonamiento inductivo generaliza patrones observados, el deductivo deriva conclusiones específicas a partir de premisas generales, y el abductivo busca la explicación más plausible ante ciertas observaciones. Comprender estos tipos es clave para resolver problemas en lógica y matemáticas.



Técnicas de demostración

Las técnicas de demostración (directa, indirecta, por contraposición y reducción al absurdo) permiten validar la veracidad de proposiciones. Cada método sigue una estructura lógica rigurosa que fortalece el rigor de las matemáticas.



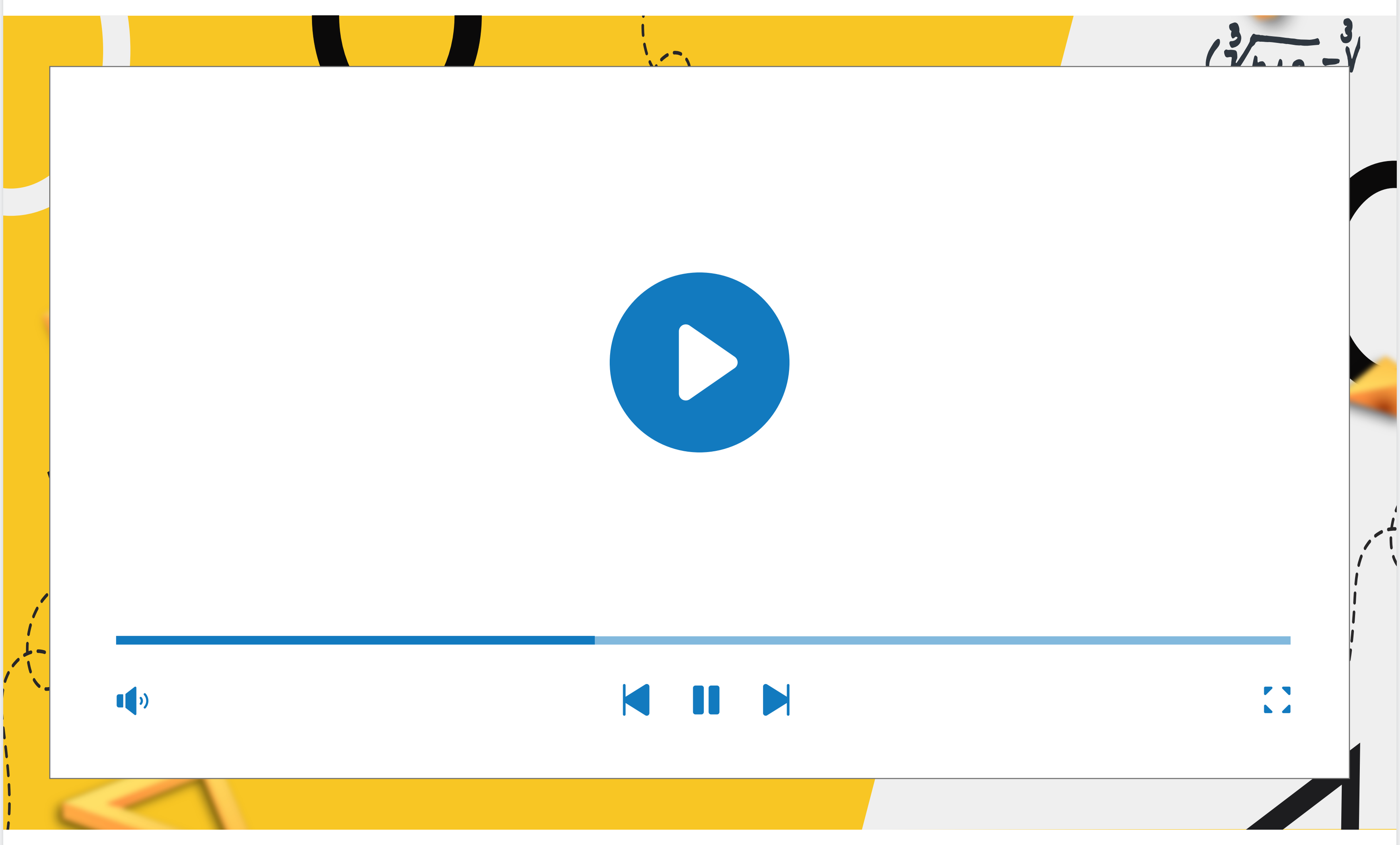
Cuantificadores lógicos

Los cuantificadores universales y existenciales ayudan a expresar la generalidad o existencia de una propiedad en un conjunto. Estos símbolos son esenciales en la formulación precisa de enunciados y en la realización de demostraciones matemáticas.

UNIDAD 2: RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIONES LÓGICAS

1. SIGNOS Y RAZONAMIENTO

El razonamiento es la herramienta esencial que permite a las personas interpretar el entorno, construir teorías y encontrar soluciones. A través de tres tipos principales inductivo, deductivo y abductivo; se estructura un ciclo de exploración y verificación que resulta clave para el conocimiento científico. En este video, se abordará cómo se interrelacionan estos tipos de razonamiento y el papel fundamental de la semiótica, el estudio de los signos y significados, en este proceso. Están invitados a descubrir el funcionamiento de estos métodos de pensamiento y su importancia en la búsqueda de respuestas y certezas.



Tipos de signos

Peirce identificó tres tipos de signos:

Íconos
Representan su objeto a través de una similitud; por ejemplo, un retrato.

Índices
Señalan su objeto mediante una conexión causal o contigüidad; por ejemplo, el humo que indica fuego.

Símbolos
Poseen un significado arbitrario que depende de convenciones; como las palabras.

La semiótica proporciona una herramienta poderosa para analizar cómo se construyen y se comunican los argumentos. Al considerar el razonamiento como un proceso semiótico, se puede entender mejor cómo las personas interpretan signos, generan significado y toman decisiones.

1.1 Razonamiento abductivo

El razonamiento abductivo se centra en identificar la mejor explicación posible para un conjunto de observaciones, siendo especialmente útil en áreas donde la información puede ser incompleta o ambigua, como la ciencia, la medicina y la investigación social. Este tipo de inferencia permite formular hipótesis que luego pueden ser probadas para validar su precisión.

Charles Sanders Peirce introdujo el término "abducción" en el siglo XIX, describiéndolo como el proceso de formar una hipótesis que explica los hechos observados. Según Peirce, la abducción es el primer paso en el proceso científico, ya que permite la generación de ideas y teorías innovadoras.

A continuación, se presenta un resumen de aspectos clave del razonamiento abductivo, comparándolo con la inducción y la deducción, y explorando sus aplicaciones, críticas y perspectivas contemporáneas en la filosofía de la ciencia.

Diferencias entre abducción, inducción y deducción

A diferencia de la inducción, que generaliza a partir de casos específicos, y la deducción, que aplica principios generales a casos concretos, la abducción busca la mejor explicación para un fenómeno observado. Por ejemplo, si se observan calles mojadas, se podría inferir que ha llovido, aunque existan otras posibles causas.

Aplicaciones del razonamiento abductivo en ciencia y medicina

Factores estructurales y dinámicas de poder en los conflictos

Perspectiva contemporánea en la filosofía de la ciencia

1.2 Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo es un proceso de inferencia en el que se llega a una conclusión general basada en la observación de casos específicos. A diferencia del razonamiento deductivo, que parte de principios generales para derivar conclusiones particulares, el razonamiento inductivo va de lo particular a lo general. Aunque no garantiza la certeza absoluta, es una herramienta clave para descubrir patrones, formular conjeturas y desarrollar nuevas teorías. En matemáticas, este tipo de razonamiento es especialmente útil en áreas como la teoría de números, la geometría y la combinatoria, donde los patrones y regularidades juegan un papel central.

Ejemplo 1. Patrón numérico

Consideremos la secuencia de los primeros números naturales: **1, 3, 5, 7, 9, ...**

Al observar esta sucesión, notamos que cada número es impar y que la diferencia entre ellos es 2. Basándonos en estos casos particulares, podemos inducir que el siguiente número en la secuencia será 11. Este tipo de conclusión, obtenida a partir de la observación de un patrón, es una inferencia inductiva. Aunque no hemos comprobado la totalidad de los números, el patrón observado sugiere una regla general: la secuencia está formada por números impares consecutivos.

Ejemplo 2. Suma de los primeros números naturales

Imaginemos que sumamos los primeros números naturales:

1 + 2 = 3

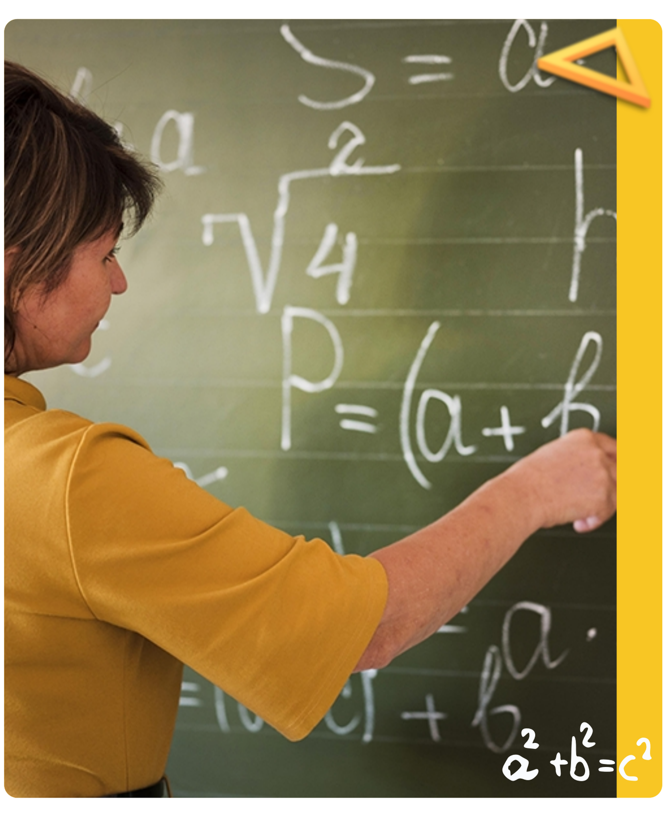
1 + 2 + 3 = 6

1 + 2 + 3 + 4 = 10

A partir de estas observaciones, podemos inducir una conjetura: la suma de los primeros n números naturales sigue un patrón. En este caso, el razonamiento inductivo nos lleva a suponer que la fórmula general para la suma de los primeros n números naturales es:

S(n)=((n(n+1))/2)

Aunque no hemos probado esta fórmula para todos los números naturales, el razonamiento inductivo sugiere que esta regla podría ser válida. Podríamos verificarla mediante una demostración formal, utilizando razonamiento deductivo.



El razonamiento inductivo es valioso porque permite a los matemáticos descubrir patrones y formular conjeturas sin necesidad de conocer de antemano la solución exacta. Este proceso es esencial en la investigación y el desarrollo de nuevas teorías matemáticas. Por ejemplo, muchos teoremas en geometría y álgebra comenzaron como simples conjeturas basadas en patrones observados a partir de ejemplos particulares.

Sin embargo, es importante destacar que el razonamiento inductivo no ofrece certeza absoluta. Un patrón observado en un conjunto limitado de casos puede no aplicarse en general. Por ello, aunque el razonamiento inductivo es fundamental para la generación de hipótesis, la validación de estas hipótesis a menudo requiere pruebas deductivas rigurosas.

1.3 Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo es un proceso de inferencia en el cual, a partir de principios o premisas generales, se deriva una conclusión específica que será necesariamente verdadera si las premisas son correctas. En matemáticas, este tipo de razonamiento es fundamental, ya que permite demostrar teoremas y resultados con certeza absoluta. A diferencia del razonamiento inductivo, que infiere generalidades a partir de ejemplos específicos, el razonamiento deductivo se basa en leyes o axiomas generales para llegar a conclusiones particulares que son irrefutables bajo las condiciones establecidas.

Ejemplo 1. Patrón numérico

Un ejemplo clásico de razonamiento deductivo en matemáticas es la demostración del teorema de Pitágoras. Este teorema establece que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. La expresión general del teorema es:

a^2 + b^2 = c^2

Donde **a** y **b** son los catetos, y **c** es la hipotenusa. Este resultado puede demostrarse deductivamente a partir de axiomas geométricos y de la definición de triángulo rectángulo. No importa cuántos ejemplos de triángulos rectángulos observemos; el razonamiento deductivo garantiza que el teorema es válido para todos los triángulos rectángulos.

Ejemplo 2. Propiedades de los números pares

Consideremos ahora una propiedad de los números pares. Sabemos que un número es par si puede expresarse en la forma 2n, donde n es un número entero. Si sumamos dos números pares, podemos demostrar deductivamente que el resultado será siempre par:

Premisa 1	Premisa 2
Un número par puede escribirse como **2n**, donde **n** es un número entero.	Otro número par puede escribirse como **2m**, donde **m** es un número entero.

La suma de dos números pares es:

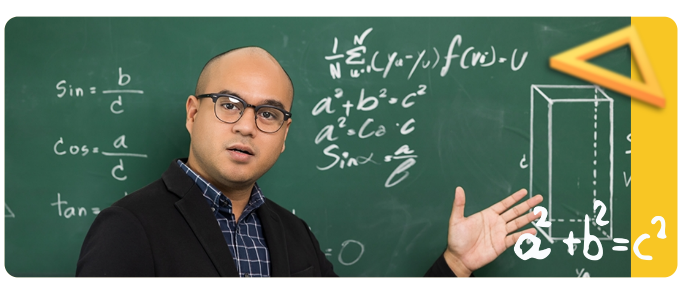
2n=2m=2(n+m)

Dado que n+m es un número entero, concluimos deductivamente que la suma tiene la forma 2k, donde k=n+m es un entero. Por lo tanto, la suma de dos números pares es par. Este resultado es aplicable en todos los casos posibles, ya que ha sido demostrado a partir de propiedades generales de los números enteros, sin depender de ejemplos específicos.

UNIDAD 2: RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIONES LÓGICAS

2. TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN: DIRECTA, INDIRECTA, POR CONTRAPOSICIÓN Y REDUCCIÓN AL ABSURDO

Las técnicas de demostración son métodos que se utilizan en matemáticas y lógica para probar la veracidad de una proposición o enunciado. Una demostración es una secuencia de argumentos lógicos que parten de definiciones, axiomas o proposiciones previamente aceptadas, con el objetivo de llegar a una conclusión que demuestre la afirmación.



2.1 Demostración directa

La demostración directa es una técnica que permite demostrar la validez de una proposición partiendo directamente de las hipótesis o premisas y aplicando una serie de pasos lógicos que llevan, de manera consecutiva, a la conclusión deseada. En esta técnica, el matemático no necesita suponer lo contrario o utilizar elementos indirectos; en su lugar, emplea propiedades conocidas y el razonamiento lógico.

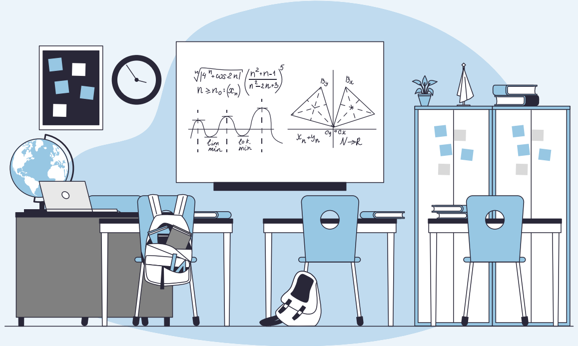
Ejemplo 1

Proposición.
La suma de dos números pares es siempre un número par.

Demostración.
El matemático comienza suponiendo que tiene dos números pares, **a y b**. Por la definición de número par, esto significa que ambos números pueden escribirse como múltiplos de 2, es decir, **a=2k** y **b=2m**, donde k y m son números enteros. Aquí, la clave es recordar que cualquier número par es el doble de algún entero.

Seguidamente, el matemático procede a sumar los dos números:

$$a+b=2k+2m$$



Factorizando el término común 2, obtiene:

$$a+b=2(k+m)$$

Dado que **k+m** es un número entero (pues la suma de dos enteros siempre es otro entero), esto significa que la expresión final **2(k+m)** es de la forma **2n**, donde **n=k+m** es un entero. Por tanto, **a+b** es divisible por 2, lo que implica que **a+b** es un número par.

Conclusión
El matemático concluye que la suma de dos números pares siempre resulta en un número par, lo que valida la proposición.

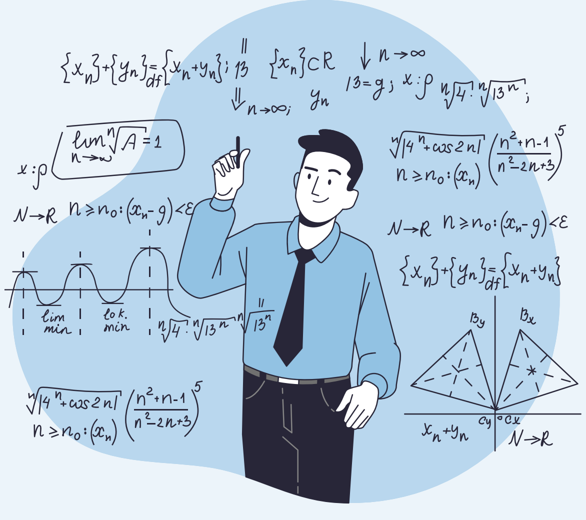
2.2 Demostración indirecta

La demostración indirecta, también conocida como prueba por contradicción, es una técnica donde el matemático no prueba directamente la afirmación que quiere demostrar. En su lugar, comienza suponiendo que la proposición es falsa, y luego muestra que esta suposición lleva a una contradicción, ya sea con otra afirmación conocida como verdadera, con los axiomas del sistema o con la lógica misma. Al llegar a una contradicción, el matemático concluye que la proposición inicial debe ser verdadera.

Ejemplo 2

Proposición.
La raíz cuadrada de 2 es un número irracional.

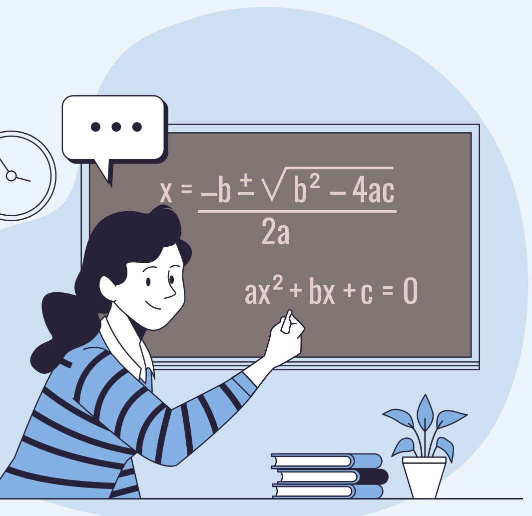
Demostración.
El matemático inicia suponiendo lo contrario de lo que se quiere demostrar, es decir, que √2 es un número racional. Si √2 es racional, entonces, por definición, se puede escribir como una fracción de dos números enteros p y q, donde p/q está en su forma más simplificada (es decir, que p y q no tienen factores comunes):



$$\sqrt{2} = p/q$$

A continuación, el matemático eleva ambos lados de la ecuación al cuadrado para deshacerse de la raíz:

$$\sqrt{(2)} = p^2/q^2$$



Multiplicando ambos lados por q^2 se obtiene:

$$2q^2 = p^2$$

Esto significa que p^2 es un número par (pues es igual al doble de q^2). Como p^2 es par, el matemático deduce que ppp también debe ser un número par, porque solo los cuadrados de los números pares son pares. Entonces, puede escribir p como p=2k, donde k es un número entero.

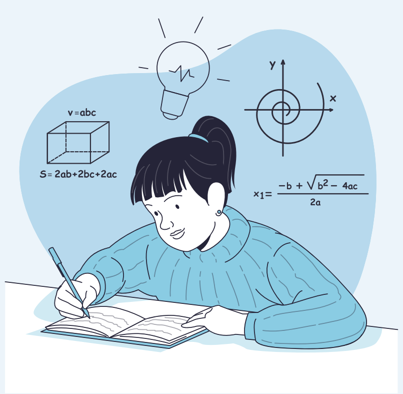
Sustituyendo p=2k en la ecuación $2q^2 = p^2$, se obtiene:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Dividiendo ambos lados por 2:

$$q^2 = 2k^2$$

Esto implica que q^2 también es un número par, lo que a su vez significa que q es par. Pero aquí es donde surge la contradicción: si tanto p como q son pares, entonces ambos tienen 2 como factor común, lo cual contradice la suposición inicial de que la fracción p/q estaba en su forma más simplificada.



Conclusión
Dado que la suposición de que √2 es racional lleva a una contradicción, el matemático concluye que √2 debe ser irracional.

2.3 Demostración por contraposición

La demostración por contraposición se basa en el principio de que una proposición del tipo "Si A, entonces B" es lógicamente equivalente a su contraposición: "Si no B, entonces no A". En lugar de probar directamente la proposición original, el matemático prueba la contraposición, que a veces puede ser más fácil de demostrar.

Ejemplo 3

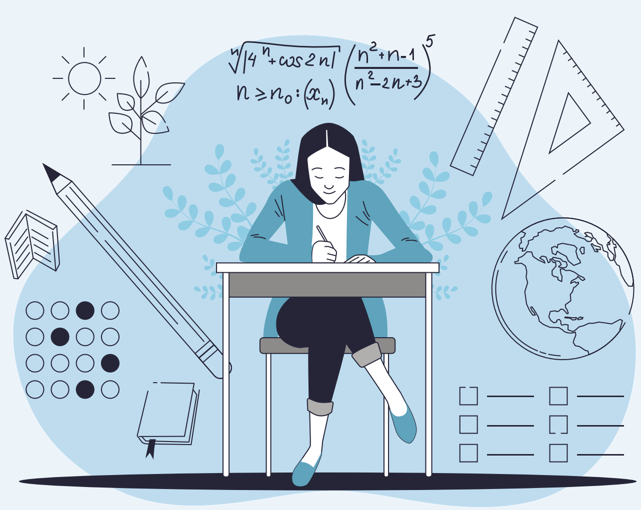
Proposición.
Si n^2 es impar, entonces n es impar.

Demostración.
El matemático utiliza la contraposición de la proposición original: "Si n es par, entonces n^2 es par". A través de este enfoque, en lugar de probar que n es impar cuando n^2 es impar, demuestra que si n es par, su cuadrado también es par, lo cual es la contraposición de la afirmación original.

Supone que n es un número par. Por definición, si n es par, se puede escribir como n=2k, donde k es un número entero. A continuación, el matemático eleva n al cuadrado:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Esto se puede reescribir como $n^2 = 2(2k^2)$, lo que muestra que n^2 es divisible por 2, y por lo tanto es un número par.



Conclusión
Al demostrar la contraposición ("Si n es par, entonces n^2 es par"), el matemático concluye que la proposición original es verdadera: Si n^2 es impar, entonces n debe ser impar.

2.3 Reducción al absurdo

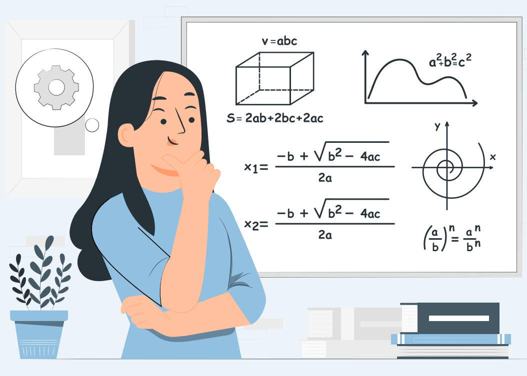
La reducción al absurdo es una técnica en la que el matemático comienza asumiendo lo contrario de lo que se quiere probar, pero el objetivo es llevar esa suposición a una contradicción con una verdad conocida o un principio aceptado. Esta técnica es similar a la demostración por contradicción, pero el absurdo puede no estar directamente relacionado con las hipótesis iniciales, sino con una conclusión que viola una verdad fundamental.

Ejemplo 4

Proposición.
No existe un número mayor.

Demostración.
El matemático comienza suponiendo lo contrario de lo que se quiere demostrar, es decir, que existe un número mayor, llamémoslo N, que es el número más grande posible. Bajo esta suposición, ningún número puede ser mayor que N.

A continuación, el matemático considera el número N+1. Claramente, N+1 es mayor que N, lo que contradice la suposición inicial de que N era el número más grande. Esta contradicción con una verdad fundamental (que siempre se puede sumar 1 a un número para obtener un número mayor) revela que la suposición original es falsa.



Conclusión
No existe un número mayor, ya que cualquier número puede ser superado sumándole 1.

Cuantificadores lógicos: existenciales y universales

Los cuantificadores lógicos, existencial (∃) y universal (∀), son fundamentales en la lógica matemática para expresar generalizaciones y particularidades en proposiciones. Este documento explora su uso en la estructuración del razonamiento lógico, mostrando ejemplos y ejercicios que ilustran cómo el cuantificador universal permite afirmar una propiedad para todos los elementos de un conjunto, mientras que el existencial señala la existencia de al menos un elemento que cumple cierta condición.

PDF **Anexo.** Cuantificadores lógicos: existenciales y universales.